UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Renato de Carvalho Alves

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Rio de Janeiro
Janeiro/2012

Renato de Carvalho Alves

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª Dra. Claudia Coelho de Segadas Vianna

Rio de Janeiro
Janeiro / 2012

A474e

Alves, Renato de Carvalho

O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores / Renato de Carvalho. – Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2012.

vi, 161f. ;30 cm.

Orientador: Claudia Coelho de Segadas Vianna.

Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Matemática, 2012.

Referências: f.146-148.

1. Análise combinatória – Tese 2.Formação de Professores 3. Livros didáticos I. Vianna, Claudia Coelho de Segadas. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro.Instituto de Matemática III.Título.

O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO BÁSICA E A FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Renato de Carvalho Alves

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____
Presidente, Profª. Dra. Claudia Coelho de Segadas Vianna – PEMAT/UFRJ

____
Profª. Dra. Márcia Rosana Cerioli - UFRJ

____
Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho - IMPA

Rio de Janeiro
Janeiro / 2012

DEDICATÓRIA

À minha mãe, Margarete,
meu porto seguro de ontem,
e à minha esposa Luzia,
meu porto seguro de hoje.

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por permitir que eu tenha nascido e criado pela família que tive, que sempre me estimulou a estudar e a lutar por meus sonhos. Estímulo esse que veio de pais, avós, irmãos, tios e primos.

Agradeço à minha orientadora, Claudia Coelho de Segadas Vianna, pela disponibilidade em me atender e orientar, e por todos os auxílios prestados a um orientando dividido entre estudo, trabalho e vida pessoal, não só na orientação, mas também como professora, nas duas oportunidades que tive de ser seu aluno.

Agradeço aos demais membros da banca, professores Márcia Rosana Cerioli e Paulo Cezar Pinto Carvalho, pela leitura atenta de meu projeto, pelas valiosas intervenções em meu Exame de Qualificação, e por todas as dicas que possibilitaram a execução deste trabalho.

Aos demais professores do programa: Victor Giraldo, Gerard Grimberg, João Bosco Pitombeira, Nei Rocha e Ana Teresa de Oliveira, por todas as oportunidades de crescimento pessoal e profissional que obtive em suas respectivas disciplinas. Ainda da UFRJ, agradeço aos professores Nedir do Espírito Santo, Wendel Alexandre Xavier de Melo, e novamente ao professor Gerard, pela possibilidade de aplicar os questionários da pesquisa em suas turmas de graduação.

A todos os amigos do mestrado, em especial à Gaya e à Valéria, pelo companheirismo, pelas caronas, e claro, pelas Análises.

Agradeço a todos os colegas do Colégio Pedro II, que direta ou indiretamente, me ajudaram nesta jornada, dividindo tarefas (ou às vezes assumindo-as totalmente), compreendendo o não cumprimento de prazos, e me substituindo nas ocasiões em que precisei me ausentar.

Agradeço a todos os colegas das escolas municipais Pedro Rodrigues do Carmo, Hilda do Carmo Siqueira, CIEP 318 - Paulo Mendes Campos, Nísia Vilela e CIEP 097 - Carlos Chagas, da prefeitura de Duque de Caxias, bem como às suas direções, pela compreensão das dificuldades em se fazer mestrado e trabalhar ao mesmo tempo.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é mostrar a importância de considerarmos vários fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória. Para isso, apresentamos alguns desses fatores, com detalhamento especial para um deles, o Modelo Combinatório Implícito (MCI), de DUBOIS (1984). Analisamos e classificamos problemas combinatórios em três coleções de livros do Ensino Fundamental, em dois livros do Ensino Médio, e em provas de vestibular, do ENEM e da OBMEP, constatando que os problemas não possuem variabilidade do ponto de vista do MCI. Após esta etapa, aplicamos dois questionários a alunos de Licenciatura em Matemática. A análise das respostas e tipos de erros encontrados, inspirada em BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996), mostrou que mesmo futuros professores de matemática trazem diversas lacunas e idéias equivocadas sobre Análise Combinatória. Constatamos que tanto professores da Educação Básica quanto do Ensino Superior devem considerar esses fatores, para que seus alunos consigam desenvolver plenamente o raciocínio combinatório.

Palavras-Chave: Análise Combinatória; Ensino; Formação de Professores; Contagem; Raciocínio Combinatório; Livros Didáticos.

ABSTRACT

The aim of such research is to show the importance of considering multiple factors that influence the teaching and learning of combinatorics. To this end, we present some of these factors, focusing on a special detailed one, the Implicit Model Combinatorics (IMC), from DUBOIS (1984). We analyzed and classified combinatorial problems in three collections of books of Elementary School, in two books of High School, from vestibular tests, from ENEM, and from OBMEP, verifying that the problems do not have variability concerning the IMC. After this step, we applied two questionnaires to students in Mathematics Degree. The analysis of responses and types of errors found, inspired by BATANERO, NAVARRO-PELAYO and GODINO (1996) showed that even future teachers of mathematics bring several gaps and misconceptions about combinatorics. We found that both teachers of Basic Education and Higher Education should consider these factors, so that their students can develop combinatorial reasoning fully.

Keywords: Combinatorial Analysis; Teaching; Training Teachers; Count; Combinatorial Reasoning; Textbooks.

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta pesquisa, sobre o ensino da Análise Combinatória no âmbito da escola básica, surgiu de nossa percepção das dificuldades encontradas por nossos alunos na aprendizagem e resolução de problemas combinatórios. Apesar dos aparentemente poucos pré-requisitos necessários para tal aprendizagem, os relatos e o desempenho dos alunos em nossa trajetória profissional mostram dificuldades de ordem diversa. Desde a leitura e interpretação dos problemas, passando por dificuldades mais específicas como: decidir se os elementos dos problemas são distinguíveis ou indistinguíveis; se a ordem é ou não importante; se é possível haver repetição de objetos ou não; se é uma situação aditiva ou multiplicativa. Vários fatores parecem interferir na aprendizagem deste conceito.

Tais dificuldades não passaram despercebidas ao longo do tempo pelos pesquisadores em Educação Matemática. Algumas pesquisas já feitas, como BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996) e HADAR e HADASS (1981) abordam algumas das dificuldades mencionadas, bem como investigam o quanto cada uma pode influenciar no desenvolvimento do raciocínio combinatório, além de categorizarem os erros mais comuns cometidos pelos alunos na resolução de problemas combinatórios. Outras, como DUBOIS (1984), buscaram categorizar os tipos de problemas combinatórios, classificando-os seguindo certos critérios.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais enfatizam a importância do raciocínio combinatório como forma de auxiliar na tomada de decisões e na compreensão, não só de situações que exigem a aplicação deste raciocínio por si só, como também para auxiliar a plena compreensão de situações envolvendo a Probabilidade e a Estatística, cada vez mais comuns nos dias atuais. A vantagem do desenvolvimento deste raciocínio também se mostra útil na compreensão da matemática enquanto ciência, com métodos e objetivos próprios, e enquanto auxiliar às outras ciências, conforme o trabalho de KAPUR (1970).

Sabe-se que um dos principais materiais didáticos nas escolas brasileiras é o livro didático, tanto para os alunos enquanto material de estudo, quanto para os professores enquanto material de estudo e de trabalho. Após um período mais restrito às escolas particulares, os alunos e os professores das escolas públicas também puderam ter acesso a esse material didático graças ao Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), do Ministério da Educação. Não há como negar que o livro didático atinge um grande contingente de alunos da escola básica brasileira.

Quanto à avaliação, além das escolares, os estudantes brasileiros são avaliados de maneira relativamente uniforme através dos testes de larga escala, como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e dos exames de vestibular.

Este trabalho tem como objetivo tentar responder às seguintes perguntas, sobre o ensino da Análise Combinatória na escola básica:

1. Como os livros didáticos brasileiros têm abordado a Análise Combinatória, e como essas abordagens favorecem ou não o desenvolvimento do raciocínio combinatório ?

2. Como a Análise Combinatória vem sendo cobrada nas provas de vestibular e nos testes de larga escala ?

3. Como se encontram os alunos recém aprovados no vestibular (e portanto recém saídos do ensino médio), do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio combinatório ?

Em um primeiro momento, são analisadas as principais recomendações dos Parâmetros Curriculares Nacionais para este tema. Além disso, pesquisamos como a Análise Combinatória era apresentada por alguns autores brasileiros em livros didáticos antigos. Estes dois aspectos sobre o tema compõem o capítulo 1.

Fazemos a seguir uma revisão bibliográfica, em que mencionamos alguns trabalhos que consideramos importantes, embora não atuem tão diretamente em nossa pesquisa, e detalhamos os dois principais referenciais teóricos utilizados, DUBOIS (1984) e BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996). Além disso, incluímos as definições, fórmulas e formulações intuitivas das técnicas mais comumente trabalhadas na escola básica. Isto compõe o capítulo 2.

O capítulo 3 trata da metodologia de pesquisa utilizada. Incluímos aqui a justificativa da escolha dos livros didáticos e das provas que analisamos, bem como detalhamos cada pergunta do questionário que foi aplicado aos alunos da licenciatura em matemática da UFRJ, no primeiro semestre do ano 2011.

No capítulo 4 se encontram as análises do que encontramos nos livros didáticos e nas provas, e no capítulo 5 incluímos a análise dos questionários aplicados. Por último, apresentamos nossas considerações finais no capítulo 6.

Capítulo 1 - Ensino

1.1 Parâmetros Curriculares do Ensino Fundamental (PCN's)

Os PCN's (BRASIL, 1998) estruturam a matemática do Ensino Fundamental em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, e Tratamento da Informação. Neste nível de ensino, a Combinatória (denominada Contagem) faz parte do bloco Tratamento da Informação, em conjunto com a Probabilidade e a Estatística. É dado destaque a este bloco devido à necessidade crescente de se ler e lidar com informações não só no meio escolar, mas também no cotidiano.

O tema contagem tem como objetivos

"... *levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades*." (BRASIL, p.52)

Fica claro que o foco do trabalho não deve ser uma extensa definição de termos ou fórmulas sobre o assunto. Além disso, há a sugestão de que todos os temas (e não só a contagem) podem e devem ser trabalhados nos diversos anos de escolaridade desse nível de ensino, adequados a cada grupo de alunos, sejam do terceiro ciclo (6º e 7º anos), sejam do 4º ciclo (8º e 9º anos).

Para os alunos do 3º ciclo, é sugerido o trabalho com resolução de problemas de contagem com o uso do princípio multiplicativo, através da utilização de esquemas e tabelas, da representação das configurações possíveis em situações combinatórias, e construção de espaços amostrais em problemas de probabilidade.

Para os alunos do 4º ciclo, é sugerido um aprofundamento dos conteúdos trabalhados no 3º ciclo, com problemas de contagem com números maiores, levando o aluno a perceber a vantagem do uso do princípio multiplicativo em relação a métodos de enumeração sistemática (como o uso de tabelas e árvores de possibilidades), quando o objetivo do problema é obter a quantidade de soluções possíveis, e não conhecê-las uma a uma. Ainda assim, o uso de tabelas e diagramas de árvore não é desaconselhado, pois pode auxiliar a esboçar a “cara” de uma solução possível e facilitar a aplicação do princípio multiplicativo.

1.2 Parâmetros Curriculares do Ensino Médio (PCNEM)

O PCNEM (BRASIL, 2006) estrutura a matemática do Ensino Médio em três grandes temas: *Álgebra* (Números e Funções), *Geometria e Medidas* e *Análise de Dados*. A Análise Combinatória é uma das componentes do terceiro tema citado (em conjunto com Estatística e Probabilidade). Este tema é tido como importante pelo fato de trabalhar com ideias e procedimentos que visam permitir ao aluno aplicar o conhecimento matemático a outros contextos (científicos ou não), decidir sobre uma ou outra técnica para quantificar e interpretar conjuntos de dados (quantificáveis diretamente ou não), e tentar, com relativa precisão, controlar a incerteza e mobilidade dessas informações.

Neste nível de ensino, a Contagem ou Análise Combinatória é vista ao mesmo tempo como instrumental para a Estatística e para a Probabilidade, e como forma de desenvolver uma nova maneira de pensar, denominada Raciocínio Combinatório. O raciocínio combinatório se refere à capacidade de organizar informações através da construção de um modelo simplificado e explicativo para contar os casos possíveis para uma determinada situação, com o objetivo de uma posterior tomada de decisão.

Assim, é ressaltado no PCNEM que a construção deste raciocínio depende fortemente de um trabalho com a resolução de problemas, e não através de uma lista de fórmulas, que devem ser resultado da observação de regularidades em vários problemas que são, depurados do contexto, essencialmente os mesmos.

O PCNEM (p.127) sugere para a área Contagem, os seguintes conteúdos e habilidades a serem desenvolvidos:

- Conteúdos- Princípio Multiplicativo e Problemas de Contagem

- Habilidades- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou eventos; identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem; identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

Na organização do trabalho escolar, os três temas estão distribuídos nas três séries, com Estatística na 1ª e 2ª séries, e Probabilidade na 3ª série. A área Contagem se faz presente na 2ª série do ensino médio.

1.3 Um Breve Histórico da Análise Combinatória em Livros Didáticos

Encontramos no trabalho de SOUZA (2010) uma análise sobre como a Análise Combinatória se fazia presente em treze livros didáticos brasileiros ou traduzidos para o português, que circularam no Brasil por volta das décadas de 40, 50, 60, 70, 90 e anos 2000. Onze desses livros eram de Ensino Médio, enquanto que dois deles eram voltados para o Ensino Superior: um para a formação de professores em matemática (licenciatura), e outro para um curso de graduação em matemática (bacharelado ou licenciatura). O leitor interessado pode consultar quais foram os livros analisados por esta autora diretamente em seu trabalho. Souza utiliza os seguintes quatro critérios para fazer a sua análise:

i) Se ao trabalhar a Análise Combinatória os autores partem ou não de problemas;
ii) Se o livro didático motiva e sugere um trabalho colaborativo entre os alunos, no sentido de estimular pesquisas ou resolução de problemas em grupo;
iii) Se a formalização dos conceitos de Análise Combinatória é feita antes do problema dado, durante a resolução do problema, ou após a resolução do mesmo;
iv) Se o livro é um dos recursos didáticos que pode contribuir para o trabalho do professor em sala de aula, no sentido de propor atividades que favoreçam o desenvolvimento de um raciocínio combinatório.

Souza percebeu em seu trabalho que, nas décadas observadas, houve mudanças na postura dos autores em relação ao tópico Análise Combinatória. Observa ainda que tais mudanças refletem as mudanças ocorridas no século XX no âmbito da Educação Matemática, com os focos em Exercício e Prática (Conexionismo), Aritmética Significativa (Teoria Gestalt), Conjuntos e suas operações e notações (Matemática Moderna), Resolução de Problemas (Construtivismo), dentre outras.

Apesar das mudanças de postura baseadas nas mudanças citadas, na maioria dos livros analisados o tópico Análise Combinatória é tratado na forma dita tradicional. Conforme diz Souza:

> *... os conceitos são definidos pelo professor, seguidos de alguns exemplos e com uma possível aplicação num problema a ser resolvido pelo professor, não permitindo a participação dos alunos na construção desses conceitos, uma vez que os problemas para os alunos resolverem são oferecidos somente no final do capítulo. Antes de o*

problema ser colocado para os alunos, a matemática necessária para resolvê-lo já é trabalhada pelo professor, com a apresentação das fórmulas para a posterior aplicação. (SOUZA, 2010, p. 100)

Esta pesquisadora menciona ainda, sobre os livros analisados, a falta de um trabalho em Análise Combinatória que utilizasse a resolução de problemas e os Princípios Multiplicativo e Aditivo como forma de o aluno, com a mediação de colegas e do professor, construir por si só estratégias de contagem que o levasse, pouco a pouco, aos modelos / técnicas de contagem para os diferentes tipos de agrupamento estudados nesse nível de ensino. Tal maneira de se trabalhar é encontrada em poucos dos livros pesquisados. Além disso, a autora notou na maioria dos livros a ausência do uso de tabelas ou de árvores de possibilidades como estratégia inicial de contagem.

A pesquisadora relata com mais pormenores em seu trabalho quais são os pontos fortes e fracos de cada livro, utilizando para isso os quatro critérios supracitados. A título de exemplo, fizemos uma análise resumida do tópico Análise Combinatória em quatro livros da década de 70, utilizando os mesmos critérios de SOUZA, acrescentando ainda o seguinte critério extra: se os autores dão ênfase aos Princípios Multiplicativo e Aditivo na resolução dos problemas. Em um primeiro momento foi feito um resumo de como a matéria era apresentada em cada livro; posteriormente, fazemos uma análise conjunta dos mesmos. Esses quatro livros foram escolhidos pela disponibilidade nos locais pesquisados.

1.3.1 NETTO, Scipione di Pierro e GÓES, Célia Contin. Matemática na Escola Renovada (v.2) Edição Saraiva. São Paulo, 1973

Este livro, do início da década de 70, aborda as idéias da Análise Combinatória na antiga segunda série do 2º Grau (atualmente 2º ano do Ensino Médio). O trabalho se inicia com as chamadas Regra da Soma e Regra do Produto. Tais regras são, respectivamente, o modo de se calcular o número de elementos da União de dois ou mais conjuntos finitos, e o modo de se calcular o número de elementos do Produto Cartesiano de dois ou mais conjuntos finitos. As duas regras são enunciadas com forte apoio da notação da Teoria dos Conjuntos, e o caso geral de cada uma delas é enunciado. A prova das mesmas fica a cargo do leitor, com a sugestão dos autores em se usar o Princípio da Indução para a demonstração (assunto tratado no livro em capítulos anteriores). Após essas definições, é proposta uma lista de exercícios e problemas, para aplicar as técnicas vistas.

Ao passar aos modelos de contagem da Análise Combinatória, os autores continuam utilizando as notações de conjuntos, somadas agora às notações e conceitos envolvendo funções. São definidos os seguintes conjuntos:

- $E = \{(A)_x, (B)_y, ..., (M)_z\}$, denominado conjunto depósito, onde o número de elementos de E, denotado por n(E), é n(E) = x + y + ... + z = n
- $F = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, onde n(F) = n (número de elementos de F).

No conjunto E, cada elemento do tipo $(P)_q$ indica que há q elementos do tipo P em E, e a notação $(P)_q$ é denominada cela. Uma visualização do conjunto E seria:

$$E = \{(A)_2, (B)_4, (C)_3\} = \{A, A, B, B, B, B, C, C, C\}$$

Considerando as aplicações bijetoras $f : E \to F$, os autores denotam o número dessas aplicações por $\binom{n}{x, y, ..., z}$, onde x + y + ... + z = n, com a convenção de que as aplicações que trocam apenas as imagens de elementos de mesma cela serão contadas uma só vez. A figura abaixo ilustra essa ideia:

que associa a cada ficha um aluno, e vice-versa.

Observemos que a troca de imagens entre dois elementos de uma mesma cela muda a aplicação mas não altera o resultado da distribuição. Por exemplo, consideremos a aplicação f_1:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_1 & A_2 & B_1 & A_3 & B_2 & B_3 & C_1 & A_4 & A_5 & C_2 \end{array}$$

e a aplicação f_2:

$$\begin{array}{cccccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & a_{10} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ A_3 & A_1 & B_1 & A_5 & B_2 & B_3 & C_1 & A_2 & A_4 & C_2 \end{array}$$

Naturalmente, f_1 e f_2 são aplicações distintas, por associarem imagens distintas, por exemplo, ao elemento a_1. Porém, constituem a mesma distribuição de tarefas, isto é, em ambas $\{a_1, a_2, a_4, a_8, a_9\}$ é o conjunto dos alunos que realizarão a tarefa A, $\{a_3, a_5, a_6\}$, a tarefa B e $\{a_7, a_{10}\}$, a tarefa C.

O objetivo da **Análise Combinatória** é contar o número de aplicações bijetoras possíveis, de E em F (ou de F em E), com a convenção de que as aplicações cuja diferença seja apenas a troca de imagens de elementos de mesma cela serão contadas uma só vez.

O número dessas aplicações será simbolizado por:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5,\ 3,\ 2 \end{pmatrix}$$

Figura 1.3.1: Exemplo ilustrativo da correspondência entre um conjunto depósito e outro conjunto (p. 118)

A seguir, os autores dividem o número de aplicações em dois casos: no primeiro, temos x = y = ... = z = 1, ou seja, cada cela do conjunto E possui apenas 1 elemento. No segundo, é considerada a situação mais geral, em que cada cela do conjunto E pode ter um número qualquer de elementos.

Para resolver o primeiro caso, os autores partem do exemplo numérico em que $E = \{(A)_1, (B)_1, (C)_1, (D)_1\}$ e $F = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Através do uso de uma árvore de possibilidades, os autores chegam ao resultado 24, e a notação para o número de aplicações bijetoras de E em F nesse caso fica $\begin{pmatrix} 4 \\ 1,1,1,1 \end{pmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Após esse exemplo, é enunciado o resultado geral

$$\binom{n}{1,1,\ldots,1} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1,$$

a partir do qual é definido o fatorial de n, n!. Os autores então definem tais aplicações como Permutações Simples de n elementos, e n!, é o número dessas aplicações. Após isso, é dada uma definição recorrente para o fatorial

$$\begin{cases} 1! = 1 \\ n! = (n-1)! \cdot n \end{cases},$$

e em seguida são resolvidos mais exemplos numéricos envolvendo o cálculo do número de Permutações Simples.

O segundo caso é trabalhado com o auxílio apenas da notação e da definição recorrente de fatorial. Através de um exemplo numérico, os autores calculam $\binom{10}{5,3,2} = \frac{10!}{5! \cdot 3! \cdot 2!} = 2520$ para a seguir enunciarem o resultado geral $\binom{n}{x, y, \ldots, z} = \frac{n!}{x! \cdot y! \cdot \ldots \cdot z!}$. Feito isso, tais aplicações são denominadas Permutações com elementos repetidos, e o último quociente expressa o seu número. É então proposta uma nova lista de exercícios para aplicar as técnicas estudadas.

O livro aborda ainda as Combinações Simples e os Arranjos Simples. O cálculo do número de Arranjos é visto como o produto entre o número de Combinações e o número de Permutações Simples. Tanto no caso dos Arranjos como no caso das Combinações, os autores partem de exemplos numéricos para definir então uma fórmula geral que fornece o número de cada uma destas configurações. Ao final da seção são propostos exercícios para aplicar os conhecimentos vistos.

1.3.2 TROTTA, Fernando, IMENES, Luís M. P. e JAKUBOVIC, José. Matemática Aplicada (v. 2) Editora Moderna. São Paulo, 1979

O livro analisado, do final da década de 70, se refere à segunda série do 2º Grau, série em que são trabalhados os conceitos referentes à Análise Combinatória. Neste livro, os autores iniciam o trabalho com um problema de combinatória que é resolvido através de contagem direta, utilizando tabelas e uma árvore de possibilidades. A partir dessa contagem direta, os autores levam o estudante a perceber que podem realizar uma contagem indireta através de uma multiplicação, e denominam este método de Princípio Fundamental da Contagem. São propostos em seguida nove problemas, com a sugestão que os alunos os resolvam trabalhando em grupo.

Os autores chamam a atenção para o fato de que quatro desses problemas, embora não pareçam a princípio, são equivalentes ao serem "traduzidos" em um problema puramente matemático: o de contar o número de sequências de n elementos que podem ser formadas a partir de um conjunto de m elementos. A partir destes quatro problemas são enunciadas as definições de Arranjos e Arranjos sem repetição (ou simples). Para mostrar como se calcula cada um deles, os autores utilizam dois exemplos resolvidos (um de cada tipo), em que levam os estudantes a observarem através do Princípio Fundamental que no caso dos Arranjos, o número de opções a cada decisão tomada continua o mesmo, logo basta calcular $m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^n$ (n fatores m). No caso dos Arranjos sem repetição (ou Simples), como o número de opções a cada decisão tomada diminui de uma unidade, basta calcular $m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot (m-n+1)$.

Os autores utilizam essa mesma estratégia para definir Permutações Simples e Combinações Simples, bem como para mostrar como se calcula o número de cada uma delas. Ao final de cada seção, são propostos problemas para aplicar esses modelos. A definição de fatorial aparece logo após a definição de Permutações Simples, e as fórmulas passam a partir desse momento a serem deduzidas em termos de fatoriais. Após abordarem o tópico Binômio de Newton, o livro trabalha com a ideia de contagem de Anagramas, e em seguida, define e mostra como se calcula o número de Permutações com repetição.

1.3.3 MORANDI, Henrique, OLIVEIRA, Afonso Soares e MORAIS, Eulâmpio. Matemática Prática e Instrumental (v. 2). Editora Lê. Belo Horizonte, 1980

Neste livro, os autores dividem o tópico Análise Combinatória em duas seções: sem repetição e com repetição. O assunto se inicia através da pergunta de quantos números distintos de dois algarismos podemos formar tendo à disposição os números 1, 2 e 3. Embora não resolvam o exemplo, os autores examinam alguns exemplos de possíveis soluções, evidenciando que a ordem em que os elementos são escolhidos é importante (por exemplo, os números 13 e 31 são diferentes, embora utilizem os mesmos elementos, 1 e 3). A partir dessa observação, os autores definem os Arranjos Simples como todo subconjunto ordenado de um conjunto A com n elementos, contendo p elementos distintos. O autores deduzem a fórmula para calcular seu número utilizando o Princípio da Indução Finita, tópico trabalhado em uma seção anterior deste mesmo volume.

A seguir, os autores definem as Permutações Simples como um caso particular de Arranjos Simples, e definem então o fatorial de um número. A partir da definição do fatorial, a fórmula para o número de Arranjos Simples é revista e reescrita com o uso de fatoriais, fato que segundo os autores facilita o seu cálculo. Após alguns exemplos resolvidos, são propostos então vários exercícios para se trabalhar as técnicas estudadas, a maioria sendo problemas que se referem a formação de números com certas restrições dadas.

Após isso, os autores definem Permutação Circular. Para chegar à fórmula que calcula o seu número, são utilizados dois exemplos envolvendo letras em torno de um círculo. A partir da enumeração dos casos possíveis para estes dois exemplos, é enunciada a fórmula $(PC)_n = (n - 1)!$.

Os autores simplesmente definem Combinações Simples, sem um exemplo prévio, bem como apresentam sua fórmula como o quociente entre a fórmula de Arranjos Simples e a fórmula das permutações simples. São a seguir definidos diversos conceitos ligados às combinações simples, tais como números binomiais, Relação de Stifel, Triângulo de Pascal. Somente após todas essas definições são propostos exercícios que, em sua maioria, são problemas puramente matemáticos, desprovidos de contexto.

Para a segunda parte do assunto, os Arranjos, Permutações e Combinações com repetição, são fornecidas as fórmulas sem mais justificativas, seguidas de listas de exercícios.

1.3.4 TIZZIOTTI, José Guilherme e SCHOR, Damian. Matemática - Segundo Grau. Editora Ática. São Paulo, 1980

Neste livro, a definição do Princípio Multiplicativo é a primeira ação dos autores, logo no início do capítulo sobre Análise Combinatória. Logo após essa definição, são dados sete exemplos em forma de problemas, todos resolvidos, em que é ilustrado o uso do Princípio Multiplicativo. Em um dos problemas é preciso usar também o Princípio Aditivo, embora o mesmo não seja definido em nenhuma parte deste capítulo.

Logo após esses problemas vem a definição do fatorial de um número, seguida de uma lista de exemplos de como simplificar expressões que contenham fatoriais. A partir daí, começam a ser definidas e exemplificadas as técnicas de contagem comuns nos livros de Ensino Médio.

O primeiro modelo definido pelos autores é o de Arranjos Simples. A definição é seguida de um exemplo em que são montados arranjos simples com os elementos do conjunto $\{a,b,c,d\}$. São listados quatro exemplos de arranjos simples, dois em que os conjuntos diferem pela natureza de seus elementos, e dois em que os conjuntos diferem pela ordem de seus elementos. A contagem do número total desses arranjos é feita a seguir, de modo direto, usando uma árvore de possibilidades em que são listados todos os arranjos, e de modo indireto, com o uso do Princípio Multiplicativo. Após essa parte, os autores deduzem a fórmula do número de Arranjos Simples, primeiro apresentando-a como aplicação do Princípio Multiplicativo, e depois, com a notação de fatorial. A parte referente aos Arranjos Simples termina com uma lista de exercícios para aplicação.

O livro apresenta ainda, usando a mesma estratégia descrita, as Permutações Simples, Permutações com Repetição, e as Combinações Simples. A cada vez que a exposição de uma das técnicas termina, tem-se uma lista de exercícios de aplicação. Ao final do capítulo, há uma lista geral de revisão. Após esta lista, os autores apresentam os Arranjos e Combinações com repetição, e as Permutações Circulares, porém apenas através da definição das respectivas fórmulas, sem justificativa.

1.3.5 Análise conjunta utilizando os critérios de SOUZA e o critério extra

Em relação ao critério (i) (p. 7 de nossa pesquisa), apenas o livro de TROTTA, IMENES e JAKUBOVIC parte de problemas para tentar motivar as técnicas de contagem indireta que serão utilizadas no estudo da Análise Combinatória. Após o trabalho inicial com estes problemas, são definidos paulatinamente os modelos de contagem mais comuns, sendo os problemas inicialmente trabalhados uma referência inicial de exemplo.

Em relação ao critério (ii) (p. 7 de nossa pesquisa), notamos que o livro de TROTTA, IMENES e JAKUBOVIC sugere, apenas em sua parte inicial com os problemas combinatórios, um trabalho colaborativo. Após a formalização da teoria, não há sugestão neste sentido, a exemplo dos outros três livros analisados.

Em relação ao critério (iii) (p. 7 de nossa pesquisa), notamos que nos livros de NETTO e GÓES, e no livro de MORANDI, OLIVEIRA e MORAIS, a formalização dos conceitos ocorre antes de uma tentativa efetiva de resolver um novo problema. Somente após a formalização é que são propostos exercícios e problemas associados ao modelo trabalhado. No livro de TROTTA, IMENES e JAKUBOVIC, a formalização ocorreu sempre após a resolução/discussão de pelo menos um problema associado ao modelo em estudo, assim como no livro de TIZZIOTTI e SCHOR.

Em relação ao critério (iv) (p. 7 de nossa pesquisa), notamos em todos os quatro livros analisados elementos que não contribuem para o trabalho do professor em sala de aula. Todos apresentam um excesso de técnicas e fórmulas, embora o livro de TROTTA, IMENES e JAKUBOVIC tente em vários momentos dialogar com o aluno e fazê-lo chegar às conclusões apresentadas. O livro de TIZZIOTTI e SCHOR chama a atenção explicitamente para que o aluno verifique, dentre as respostas possíveis, se os conjuntos soluções diferem entre si pela ordem, pela natureza, ou pela ordem e pela natureza de seus elementos, embora não apresente muitos problemas. Já o livro de MORANDI, OLIVEIRA e MORAIS é bastante resumido, com poucos exemplos resolvidos e bastante focado no uso de fórmulas. Consideramos o livro de NETTO e GÓES o que menos poderia ajudar o professor no ensino da Análise Combinatória, por ser muito carregado de notações e por apresentar muitos exercícios puramente teóricos e distantes da realidade, características bem marcantes do Movimento Matemática Moderna. De ponto positivo, é o único dos três livros que chega perto do Princípio Aditivo, ao definir o número de elementos da união de dois conjuntos, embora não forneça muitos problemas em que o mesmo poderia ser explorado.

Quanto ao critério extra, sobre o uso dos Princípios Aditivo e Multiplicativo, verificamos que apenas os livros de TROTTA, IMENES e JAKUBOVIC, e TIZZIOTTI e SCHOR valorizam o uso do Princípio Multiplicativo antes de partir diretamente para as fórmulas. Nenhum desses quatro livros analisados define explicitamente o Princípio Aditivo, embora todos contenham pelo menos um problema em que a aplicação do mesmo se faz necessária.

Não iremos em nosso trabalho re-analisar cada um dos livros da dissertação de SOUZA (2010). Para a nossa pesquisa, a sua contribuição é a de fornecer uma análise geral da forma como o tópico Análise Combinatória era trabalhado em livros de décadas passadas, para comparação com a maneira em que o mesmo tópico é trabalhado em livros atuais, o que faremos mais adiante neste trabalho.

CAPÍTULO 2 - PESQUISA

2.1 PESQUISA EM ANÁLISE COMBINATÓRIA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Em nossa busca por trabalhos anteriores que embasassem a nossa pesquisa, encontramos pouco material relacionado ao ensino da Análise Combinatória, principalmente em relação a outros tópicos da matemática como Ensino de Cálculo, ou Ensino de Geometria. Encontramos algumas pesquisas sobre Combinatória nos periódicos *Educational Studies in Mathematics* (DUBOIS, 1984; HADAR e HADASS, 1981; KAPUR, 1970), Educación Matemática (BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO, 1996) e *Boletim GEPEM*[1] (NINA, MENEGASSI e SILVA, 2009). Nos anais do X ENEM, realizado em 2010 em Salvador, Bahia, encontramos relatos das pesquisas de SOUZA (2010), RIBEIRO e BORTOLOTI (2010), PESSOA e BORBA (2010), LIMA e BORBA (2010) e FERRAZ, BORBA e AZEVEDO (2010).

As principais pesquisas que nortearão o nosso trabalho são a de DUBOIS (1984) e a de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996), que detalharemos mais adiante. Há porém as outras pesquisas que, embora não utilizemos diretamente, tiveram sua importância na construção de nosso trabalho, bem como nos auxiliaram na escolha de determinadas direções, e podem ser úteis a outros interessados nessa área de inquérito.

Em seu trabalho, KAPUR (1970) destaca a importância das aplicações como origem da construção de conhecimento matemático novo, bem como finalidade para este novo conhecimento. O autor exemplifica a Combinatória como um tópico propício para esta maneira de se trabalhar a matemática, justificando sua escolha pelo fato de ser

[1] Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática

possível trabalhá-la em diferentes níveis de dificuldade e em todas as séries escolares (a mesma não depende, por exemplo, das ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral), bem como pelas suas possíveis aplicações em áreas como Física, Biologia, Engenharia, dentre outras. Além disso, permite aos estudantes trabalhar com enumerações, fazer conjecturas, generalizações, verificar existência de solução. O artigo apresenta várias outras justificativas, e também mostra 20 problemas, de diferentes níveis de dificuldade, em que a Análise Combinatória é necessária.

A pesquisa de HADAR e HADASS (1981) examina obstáculos que os alunos devem superar para serem capazes de resolver um problema combinatório. O artigo explora como cada obstáculo pode influenciar a resolução utilizando sempre o mesmo problema:

“Alguém escreve n cartas e escreve os respectivos endereços em n envelopes. Quantas maneiras diferentes existem de colocar todas as cartas em envelopes errados?” (HADAR e HADASS, 1970, pág. 435, tradução nossa)

Dentre outros obstáculos, os autores citam: a identificação dos conjuntos dos eventos em questão; a escolha de uma notação apropriada; a percepção de um problema global através de um conjunto de problemas particulares; a construção de um método sistemático; a fixação de uma ou mais variáveis; a realização de um plano de contagem; a generalização.

O artigo de PESSOA e BORBA (2010) tem como objetivo analisar o desempenho e as estratégias utilizadas por alunos ao resolverem problemas combinatórios. Em seu trabalho, realizado com alunos de ensino fundamental e médio, as autoras investigam fatores que influenciam no desempenho dos alunos, como quais são os seus conhecimentos prévios, e o quão próximo ou distante o contexto dos problemas combinatórios estão do quotidiano dos alunos. As pesquisadoras concluem que o desenvolvimento do raciocínio combinatório se dá durante um longo período, e é influenciado tanto por situações e conhecimentos escolares quanto não escolares. A pesquisa de LIMA e BORBA (2010) têm os mesmos objetivos, mas realizaram suas investigações com alunos da Educação de Jovens e Adultos. Dentre suas conclusões, citamos a de que a aprendizagem da combinatória para alunos desse nível sofre influência, dentre outros fatores, dos tipos de problema, dos anos anteriores de escolarização e da atividade profissional desenvolvida pelo aluno.

Os pesquisadores RIBEIRO e BORTOLOTI (2010) relatam um recorte de uma pesquisa interinstitucional realizada nos cursos de licenciatura em matemática nas universidades estaduais baianas. A pesquisa visava investigar tipos de erros e dificuldades mostradas por licenciandos que já haviam cursado disciplinas de Combinatória na graduação. O trabalho, de cunho qualitativo, foi realizado com 7 alunos de 6º período, através da resolução de 6 questões de Combinatória. Foi verificada uma carência no raciocínio combinatório que os autores esperavam que os alunos apresentassem. Ao analisar as respostas dos alunos à sexta questão proposta, uma questão em que deveriam aplicar o raciocínio multiplicativo, os pesquisadores constataram que a maioria dos alunos não utilizou este raciocínio, preferindo fazer uso de esquemas de contagem direta e não sistemática.

ROCHA e BORBA (2010) analisam os conhecimentos dos professores da escola básica sobre os problemas combinatórios, e sobre como a posse ou não desse conhecimento influencia o desempenho desses professores quanto à análise das respostas de seus alunos e na elaboração e seleção de problemas com vistas ao ensino deste tópico. A pesquisa relata entrevistas realizadas com três professores, que mostram práticas de ensino diversificadas quanto ao uso ou não de fórmulas. As autoras consideram superficiais as escolhas dos tipos de problemas selecionados pelos professores para o trabalho com seus alunos, do ponto de vista da classificação proposta pelas mesmas para os problemas combinatórios. A classificação mencionada se dá em quatro categorias, que são por elas denominadas como Permutação, Arranjo, Combinação e Produto Cartesiano, respectivamente.

A pesquisa de SOUZA (2010), já citada na seção 1.3 deste trabalho, traz como sugestão o uso da metodologia da resolução de problemas como ponto de partida para o ensino da Análise Combinatória. Mais especificamente, a autora busca analisar qual a contribuição da metodologia Ensino-Aprendizagem-Avaliação de matemática, através da resolução de problemas. São analisados três projetos elaborados pela pesquisadora, com focos distintos: o primeiro, como professora-pesquisadora atuando em sua própria sala de aula, com seus próprios alunos; o segundo, como pesquisadora, ministrando mini-cursos e oficinas para professores e estudantes de licenciatura em matemática em encontros de Educação Matemática; e o terceiro, também como pesquisadora, atuando em congressos e encontros, apresentando suas pesquisas e resultados para divulgação e avaliação pela comunidade de pesquisadores em Educação Matemática.

NINA, MENEGASSI e SILVA (2010) propõem em sua pesquisa um trabalho com a resolução de problemas utilizando objetos de aprendizagem confeccionados para este fim. O material consistia em sete problemas, que foram trabalhados com duas turmas de alunos do 2º ano do ensino médio através de fichas e materiais manipuláveis, que ilustravam as situações propostas. A análise das respostas dadas pelos alunos forneceram as estratégias utilizadas pelos mesmos durante as resoluções, bem como auxiliaram no sentido de perceber um aumento ou não da motivação por parte da classe, ao se envolverem de forma mais ativa na construção de seu conhecimento. As autoras esperam que a pesquisa auxilie professores e futuros professores, no sentido de propor uma maneira alternativa de se trabalhar a Análise Combinatória, diferente da tradicional.

Quanto ao uso de novas tecnologias, FERRAZ, BORBA e AZEVEDO (2010) exploram o uso de um software, de nome “Árbol”, na confecção de árvores de possibilidades e na resolução de problemas combinatórios. Foram propostos oito problemas combinatórios para serem resolvidos em duplas ou em trios, por 19 alunos do 7º ano do ensino fundamental, de uma escola do Recife. Após seu uso nas atividades propostas, as autoras analisaram as respostas dadas pelos diferentes grupos, e entrevistaram pelo menos um aluno de cada dupla ou trio, para esclarecer qualidades e deficiências deste software no ensino da Análise Combinatória.

2.2 ALGUMAS TÉCNICAS DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Na análise das questões encontradas tanto nos livros didáticos quanto nas provas, classificamos as questões quanto à(s) técnica(s) necessárias à sua resolução. Assim, incluímos aqui as descrições das técnicas mais comuns encontradas nos livros didáticos, acompanhadas de suas fórmulas e das definições das configurações correspondentes. Tais descrições e informações complementares podem ser encontradas em MORGADO et al (2005), ROCHA (2009) e SANTOS, MELO e MURARI (2007).

2.2.1 Princípio Aditivo - Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, e A e B são mutuamente exclusivos, então o número de maneiras de ocorrer o evento A ou o evento B é $m + n$. Pensando em termos de conjuntos, outra maneira de se pensar é: se A e B são dois conjuntos com m e n elementos respectivamente, disjuntos ($A \cap B = \varnothing$), então o número de elementos de $A \cup B$ é $m + n$.

2.2.2 Princípio Multiplicativo (ou Princípio Fundamental da Contagem)- Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes e, se para cada uma dessas m maneiras possíveis de A ocorrer, um outro evento B pode ocorrer de n maneiras diferentes, então o número de maneiras de ocorrer o evento A seguido do evento B é $m \cdot n$. Pensando em termos de conjuntos, outra maneira de se pensar é: se A e B são dois conjuntos com m e n elementos respectivamente, então o número de elementos de $A \times B$ (produto cartesiano) é $m \cdot n$.

2.2.3 Permutações Simples - Sejam n objetos distintos, ordenados em fila. Cada configuração desses objetos recebe o nome de *permutação simples*. O número de configurações das ordenações possíveis, ou por outra, o número de permutações dos objetos dados é dado por $P_n = n!$, onde n! representa a multiplicação $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. O raciocínio para chegar à fórmula vem do Princípio Multiplicativo: para escolher o 1° elemento da ordenação, temos n opções; escolhido o 1°, restam apenas (n – 1) opções para o segundo (não podemos usar o elemento já escolhido para ocupar a 1ª posição). Esse raciocínio prossegue, até que, para escolher o último elemento, resta apenas uma opção (o único elemento que ainda não foi escolhido). Pelo Princípio Fundamental da Contagem, o total de maneiras é $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

2.2.4 Permutações com Repetição - Se há n objetos, com r_1 objetos indistinguíveis do tipo 1, r_2 objetos indistinguíveis do tipo 2, ... , r_m objetos indistinguíveis do tipo m, onde $r_1 + r_2 + \ldots + r_m = n$, então todas as permutações distintas geradas pelos objetos recebem o nome de *permutações com repetição* desses objetos. A fórmula para calcular o número de permutações com repetição é dada por $P_n^{r_1, r_2, \ldots, r_m} = \dfrac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_m!}$. A justificativa desse cálculo é o de que, se apenas calcularmos n!, estaremos contando permutações de objetos indistinguíveis como se fossem distinguíveis. Para descontar o que foi contado a mais, devemos dividir pelo número de permutações de cada objeto indistinguível presente no conjunto.

2.2.5 Arranjos Simples - São todos os grupos de k elementos distintos, escolhidos de um grupo de n elementos (onde $k \leq n$), que diferem entre si pela ordem e pela natureza dos k elementos. A fórmula para calcular o número de Arranjos Simples é dada por $A_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$. Podemos pensar da seguinte maneira: para escolhermos o primeiro dos k elementos, temos n opções; uma vez tendo escolhido um dos n elementos, este não pode mais ser utilizado, restando (n – 1) opções para escolher o 2° elemento; o raciocínio prossegue o mesmo até a escolha do k-ésimo elemento, que pode ser feita de (n – k + 1) maneiras. O total de modos de escolher os k elementos é dado pelo produto $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. Multiplicando essa expressão por $\frac{(n-k)!}{(n-k)!}$, chega-se a fórmula dos arranjos simples.

2.2.7 Combinações Simples - São todos os grupos de k elementos distintos, escolhidos de um grupo de n elementos (onde $k \leq n$), que diferem entre si não pela ordem, mas apenas pela natureza dos k elementos. A fórmula para se calcular o número de Combinações Simples é dada por $C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Inicialmente, o raciocínio é o mesmo feito para os arranjos simples. Com isso chegaríamos a $\frac{n!}{(n-k)!}$. Mas nesse caso, a ordem entre os k elementos escolhidos é irrelevante, e por isso, a permutação das ordenações possíveis entre esses k elementos não deve ser considerada. Para descontarmos essas permutações, basta dividir a expressão $\frac{n!}{(n-k)!}$ por k!, chegando assim à fórmula dada.

Embora o conhecimento das fórmulas seja útil, principalmente quando ao resolver um problema for possível enquadrá-lo como uma das configurações descritas acima (e, consequentemente, na técnica correspondente), tal conhecimento não substitui a posse de um raciocínio combinatório, aprendido através da plena compreensão dos Princípios Multiplicativo e Aditivo, e da articulação dos dois em uma mesma situação, quando necessário. Abaixo, transcrevemos de MORGADO et al (2005), p.32, um problema e a sua resolução, com o uso de fórmula e sem o uso de fórmula:

Quantas saladas de fruta contendo exatamente 4 frutas podemos formar se dispomos de 10 frutas diferentes ?

<u>*Resolução sem fórmula*</u>

Para montar a salada devemos escolher 4 dentre as 10 frutas disponíveis. Há 10 opções para a 1ª fruta. Para cada uma dessas 10, há 9 opções de escolha para a 2ª fruta (pois as 4 frutas devem ser diferentes). Analogamente, para a 3ª fruta restam 8 opções e, para a 4ª fruta, restam 7 opções. Pelo Princípio Multiplicativo, teríamos $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$ opções de salada. Mas, por exemplo, uma salada com maçã, banana, laranja e abacaxi, não é diferente de uma salada com banana, maçã, laranja e abacaxi (a ordem de escolha das frutas não interfere na salada final). Assim, devemos dividir o resultado obtido pelo número de permutações possíveis entre as 4 frutas, para descontar o que foi contado a mais. A solução é, portanto, $\dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ saladas.

<u>*Resolução com fórmula*</u>

Para montar a salada precisamos escolher 4 frutas distintas, de um total de 10 frutas distintas, em que a ordem de escolha não interfere na salada que será obtida. Trata-se portanto de um problema de combinação simples (devemos combinar as 10 frutas, em grupos de 4 frutas). O número de saladas é $C_{10,4} = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = 210$.

2.3 O MODELO COMBINATÓRIO IMPLÍCITO

A teoria do Modelo Combinatório Implícito, desenvolvida por DUBOIS (1984), tem como objetivo classificar os problemas combinatórios. Tal teoria fornece as seguintes classificações, baseadas na situação principal presente no contexto dos problemas:

- Alocação / Correspondência: problemas cuja idéia principal do contexto é a de distribuir elementos de um conjunto em outro conjunto (com a mesma cardinalidade do primeiro ou não);
- Seleção: problemas cuja idéia principal do contexto é a de selecionar uma amostra de um conjunto dado;
- Partição: problemas cuja idéia principal do contexto é a de dividir um conjunto em subconjuntos.

Seguem-se três exemplos de problemas traduzidos de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO, 1996, p. 17-18, classificados em Alocação, Seleção e Partição:

Alocação

A garagem do prédio de Angel tem cinco vagas. Como o prédio é novo, até agora só há três carros: de Angel, Beatriz e Carmen, que podem colocar cada dia seu carro no lugar que preferirem, desde que não esteja ocupado. Este é o esquema da garagem:

1 2 3 4 5

Por exemplo, Angel pode parar seu carro na vaga do apartamento 1, Beatriz na do apartamento 2 e Carmen na do apartamento 4. ***De quantas formas possíveis eles podem estacionar seus carros na garagem?***

Seleção

Uma professora tem que escolher três estudantes para limpar o quadro. Para isso dispõe de cinco voluntários: Elisa, Fernando, Gérman, Jorge e Maria. ***De quantas formas ela pode escolher três destes alunos?*** *Exemplo: Elisa, Fernando e Maria.*

Partição

Um grupo de quatro amigos, Andrés, Benito, Clara e Daniel, têm que realizar dois trabalhos diferentes: um de Matemática e outro de Linguagem. Para realizá-lo, decidem dividir-se em dois grupos de dois integrantes cada um. ***De quantas formas eles podem se dividir para realizar os trabalhos?*** *Exemplo: Andrés e Benito podem fazer o trabalho de Matemática e Clara e Daniel o trabalho de Linguagem.*

De um modo geral, o objetivo em um problema de alocação é o seguinte: desejo *colocar* m objetos em n casas. Outras palavras-chave que podem substituir a palavra colocar são: *alocar*, *corresponder*, *introduzir*, *guardar*. Dentro desta categoria, podemos fazer as seguintes distinções (DUBOIS, 1984 p.40, a tradução é nossa):

(i) alocações ordenadas de m objetos distintos em n casas distintas;

(ii) alocações não ordenadas de m objetos distintos em n casas distintas;

(iii) alocações de m objetos indistinguíveis em n casas distintas;

(iv) alocações ordenadas de m objetos distintos em n casas indistinguíveis;

(v) alocações não ordenadas de m objetos distintos em n casas indistinguíveis;

(vi) alocações de m objetos indistinguíveis em n casas indistinguíveis.

Quanto à cardinalidade, os problemas de alocação ainda podem ser classificados como:

(I) Injetivos, quando $m \leq n$ (um objeto em cada casa e podem sobrar casas vazias);

(S) Sobrejetivos, quando $m \geq n$ (há objetos em todas as casas, podendo haver mais de um objeto em alguma casa);

(B) Bijetivos, quando $m = n$ (há um objeto em cada casa, sem sobra de objetos e nem de casas).

Em seu artigo, DUBOIS fornece ainda maneiras de traduzir[2] um problema de Alocação em um problema de Seleção ou Partição. Para

[2] A palavra “traduzir” foi traduzida literalmente do francês “Traduction”. É utilizada por DUBOIS no sentido de reescrever ou pensar um problema de um tipo (alocação por exemplo) em um problema correspondente matematicamente, mas de outro tipo (seleção, por exemplo).

ilustrar, criamos abaixo dois exemplos. No primeiro há um problema de alocação e outro de seleção, e no segundo há um problema de alocação e outro de partição. Os problemas, em cada exemplo, têm em comum os valores numéricos e a resposta final, já que o modelo matemático não se altera, mesmo mudando a situação e a natureza dos objetos.

Tabela 2.3.1 Problemas de Alocação / Seleção correspondentes

Problema	Tradução
Em um hotel há 9 quartos vagos, e precisamos acomodar 4 hóspedes, um em cada quarto. De quantos modos isso pode ser feito?	Em uma loja há uma urna com 9 bolas numeradas de 1 a 9. Um cliente sorteará 4 bolas para formar um número de 4 dígitos, que corresponde a um produto da loja. De quantos modos isso pode ser feito ?
Alocação Injetiva, de 4 objetos distintos em 9 casas distintas	**Seleção ordenada, sem repetição, de 4 objetos escolhidos dentre 9**

Tabela 2.3.2 Problemas de Alocação / Partição correspondentes

Problema	Tradução
Devemos colocar em dois vasos idênticos 4 tipos de insumo, dois em cada vaso. De quantos modos isso pode ser feito ?	De quantos modos podemos dividir 4 pessoas em 2 duplas, para disputar uma partida de buraco ?
Alocação não-ordenada, de 4 objetos distintos em 2 casas indistinguíveis	**Partição de um conjunto de 4 elementos em dois subconjuntos**

As tabelas abaixo fornecem algumas traduções possíveis, de problemas de alocação em seleção, e de problemas de alocação em partição (a tradução das informações é nossa):

Tabela 2.3.3 Dicionário intermodal relativo às alocações e às seleções (DUBOIS, 1984, p.46)

Alocações não ordenadas em casas distintas	Seleções
De objetos distintos	Ordenadas
De objetos indistinguíveis	Não ordenadas
Injetivas	Sem repetição
Sobrejetivas	Sem sobra de objetos
Bijetivas	Sem repetição e sem sobra de objetos

Tabela 2.3.4 Dicionário intermodal relativo às alocações e às partições (DUBOIS, 1984, p.46)

Alocações	**Partições**
Ordenadas	Em conjuntos ordenados
Não ordenadas	Em conjuntos não ordenados
De objetos distintos	De objetos distintos
De objetos indistinguíveis	De objetos indistinguíveis
Em casas distintas	Ordenadas
Em casas indistinguíveis	Não ordenadas
Injetivas	Em conjuntos vazios ou unitários
Sobrejetivas	Em conjuntos não vazios
Bijetivas	Em conjuntos unitários

Em um problema de seleção, o objetivo é o de *extrair* n objetos, de um conjunto de m objetos. Outras palavras chave que dão a idéia de seleção em um problema combinatório são *selecionar*, *escolher*, *colher*, *sacar*, *tomar*. Assim, da maneira como é definido, para se resolver qualquer problema de seleção, se utilizam as Permutações, os Arranjos e as Combinações, simples ou com repetição.

Já em um problema de partição, o objetivo é o de *dividir* um conjunto de m objetos em n subconjuntos. Outras palavras chave são *partir*, *repartir*, *decompor*, *separar*.

Segundo DUBOIS, um problema de alocação sempre pode ser traduzido em um problema de partição e vice-versa, ou seja, há uma bijeção entre esses tipos de problemas. Com isso, assim como no caso dos problemas de alocação, para resolver um problema de partição podem não bastar as Permutações, Arranjos e Combinações, havendo a necessidade da aplicação de outras técnicas de contagem.

A pesquisa de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996), mostrou que uma das variáveis que deve ser levada em conta no ensino da Análise Combinatória é a teoria do Modelo Combinatório Implícito, como forma de apresentar problemas de contagem em situações as mais variadas possíveis. Essa é a importância da teoria de DUBOIS em nosso trabalho: verificar, em nossas análises, a variabilidade (ou a não variabilidade) dos problemas utilizados no ensino da combinatória na escola básica.

2.4 ANÁLISE DE ERROS

Em seu artigo, BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996) relatam uma pesquisa realizada na Espanha, com o objetivo de investigar variáveis que poderiam influenciar o ensino e a aprendizagem da Análise Combinatória. A pesquisa, realizada com alunos da escola básica na faixa etária de 14 / 15 anos consistiu na aplicação de um questionário com 13 problemas combinatórios, montados após revisão de literatura feito pelos autores. Tais problemas levavam em consideração as seguintes variáveis:

- Situações de seleção, alocação e partição como contexto do problema (teoria do Modelo Combinatório Implícito);
- Tipo de operação combinatória necessária à resolução (arranjos e permutações com e sem repetição e combinações simples, que são as técnicas mais comumente trabalhadas no ensino médio);
- Tipos de elementos a serem combinados (entre letras ou números, pessoas ou objetos);
- O valor dado aos parâmetros m e n, no caso do possível uso de fórmulas .

Após a aplicação e posterior análise das respostas dos estudantes, estes autores estabeleceram as seguintes categorias de erros, cometidos pelos estudantes durante a resolução dos problemas:

- Erro 1: trocar o tipo de modelo (técnica) necessário(a) para resolver o problema;
- Erro 2: erros de ordem, tanto quando a mesma é essencial, como quando é irrelevante;
- Erro 3: erros de repetição (repete quando não pode e não repete quando pode);
- Erro 4: considerar idênticos objetos que são distinguíveis, e considerar diferentes objetos que são indistinguíveis;

- Erro 5: enumeração não sistemática, que permite encontrar algumas soluções do problema, mas não todas, ou soluções repetidas já encontradas anteriormente;
- Erro 6: resposta intuitiva errada, que não possui justificativa;
- Erro 7: identificar o modelo correto, mas utilizar uma fórmula errada;
- Erro 8: não lembrar o significado de cada parâmetro na fórmula utilizada na resolução;
- Erro 9: interpretação ou construção errada de um diagrama de árvore correspondente à questão;
- Erro 10: confusão entre tipos de subconjuntos, quando os mesmos são distinguíveis ou indistinguíveis;
- Erro 11: erro na formação de partições, seja pelo fato da união de todas as partições possíveis não formar todo o conjunto original (contar a menos), seja pelo fato de considerar um número maior do que o de todas as partições possíveis..

Em nosso trabalho, além de utilizarmos as variáveis mencionadas para confecção de um questionário aplicado aos alunos que ingressaram recentemente na licenciatura em matemática na UFRJ, tentamos enquadrar os erros observados nas respostas destes alunos dentro das categorias de erros criadas por BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO. Porém procuramos resumir essas categorias, pois algumas estão relacionadas. Abaixo se encontram as nossas categorias, e a sua correspondência com as categorias anteriormente citadas:

Tabela 2.4.1 Relação entre as categorias de erros

Nossas Categorias	**Categorias de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO**
Erro 1	Erro 1
Erro 2	Erro 2
Erro 3	Erro 3, Erro 4 e Erro 10
Erro 4	Erro 5, Erro 9 e Erro 11
Erro 5	Erro 6
Erro 6	Erro 7
Erro 7	Erro 8

O nosso Erro 3 passa a considerar os erros que os alunos possam cometer quanto à distinguibilidade / indistinguibilidade de objetos ou conjuntos de objetos, que podem levar a eventuais erros de repetição ou ausência de repetição, representados pelos erros 3, 4 e 10 da pesquisa de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO. Quanto aos erros 5, 9 e 11 da mesma pesquisa, que dizem respeito a erros por contagem em demasia ou por falta, tanto de objetos individuais quanto de subconjuntos, foram por nós agrupados na categoria Erro 4. Os demais têm correspondência direta com os erros já citados.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA

3.1 A METODOLOGIA UTILIZADA

Para a realização deste trabalho, fizemos uso dos seguintes instrumentos de pesquisa:

- Análise de alguns livros didáticos usados atualmente, com vistas a identificar quais conteúdos e técnicas da Análise Combinatória estão presentes, como são trabalhados, e em que série / ano se encontram. Todos os problemas foram classificados de acordo com o Modelo Combinatório Implícito de DUBOIS (1984). Além disso, foi verificado se os mesmos estavam ou não associados ao cálculo de alguma probabilidade;

- Análise de provas de vestibular e testes de larga escala, com vistas a identificar como são cobrados os conteúdos e técnicas da Análise Combinatória dos alunos que terminam o Ensino Médio ou o Ensino Fundamental. Assim como nos livros didáticos, todas as questões de combinatória encontradas foram classificadas de acordo com o Modelo Combinatório Implícito, bem como foi verificado se estavam ou não associadas a um cálculo de probabilidade;

- Aplicação de um questionário aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, na UFRJ, com o objetivo de analisar a habilidade de raciocínio combinatório destes alunos, egressos do Ensino Médio. Para a análise das respostas obtidas, foi utilizado como referencial as categorias de erros cometidos em resolução de problemas de combinatória, que consta da tabela 2.4.1 (p.31) deste trabalho, re-elaborada a partir da tabela confeccionada por BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996).

As seções seguintes esclarecem o porquê e quais foram os livros didáticos utilizados (seção 3.2), bem como quais foram as provas analisadas (seção 3.3). A seção 3.4 detalha cada pergunta do questionário aplicado, o que ela cobra, e porque a mesma está presente no instrumento.

3.2 OS LIVROS DIDÁTICOS ANALISADOS

Os livros que foram analisados nesta pesquisa foram escolhidos por serem adotados por um grande número de escolas no Rio de Janeiro e no Brasil. Especificamente no Rio de Janeiro, os livros citados são adotados, tanto no ensino fundamental quanto no ensino médio, por instituições de reconhecida qualidade, como o Colégio Pedro II, os Colégios de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAP-UFRJ) e da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (CAP-UERJ), o Colégio Brigadeiro Newton Braga, além de diversas escolas públicas (em âmbito municipal e estadual) e particulares. Podemos dizer que esses livros atingem um grande contingente de alunos (enquanto material didático de estudo) e de professores (enquanto material didático de trabalho). Os livros escolhidos para análise foram:

Ensino Fundamental

- Tudo é Matemática (6° ao 9° ano), de autoria de Luiz Roberto Dante, da Editora Ática (utilizado no Colégio Pedro II, no CAP-UFRJ e no CAP-UERJ)

- Matemática e Realidade (6° ao 9° ano), de autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, da Atual Editora (utilizado por diversas escolas municipais da prefeitura de Duque de Caxias (RJ), dentre elas a Escola Municipal Hilda do Carmo Siqueira, e o CIEP Brizolão Municipalizado 318 – Paulo Mendes Campos)

- Matemática para todos (6° ao 9° ano), Luis Márcio Imenes e Marcelo Lellis, da editora Scipione (utilizado no Colégio Brigadeiro Newton Braga)

Ensino Médio

- Matemática (volume único), de autoria de Luiz Roberto Dante, da Editora Ática (utilizado no Colégio Pedro II, no CAP-UFRJ e no CAP-UERJ)

- Matemática (volume único), de autoria de Gelson Iezzi et al., da Atual Editora (utilizado no Colégio Brigadeiro Newton Braga)

3.3 AS PROVAS ANALISADAS

Para verificar como a Análise Combinatória vem sendo cobrada dos alunos egressos da educação básica, optamos por analisar dois tipos de provas: concursos de vestibular e testes de larga escala.

Tanto os testes de larga escala quanto as provas de vestibular são aplicados a um grande número de alunos, com o objetivo de avaliar os conhecimentos adquiridos na educação básica. Tais avaliações não são feitas com o objetivo de avaliar determinados grupos de alunos ou escolas, mas sim avaliar qualquer aluno egresso da escola básica que realize as provas, seja para diagnóstico de problemas do ensino ou para uma seleção. Assim, tais testes se revelam úteis para avaliar, com objetividade e imparcialidade, os alunos, as escolas, e as redes de ensino.

Com o objetivo de verificar como a análise combinatória vem sendo cobrada em tais sistemas de avaliação, optamos por analisar as provas:

- de vestibular das universidades UFRJ, UERJ e Universidade Federal Fluminense (UFF), dos anos 2006 a 2011;

- de avaliação em larga escala do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), também dos anos 2006 a 2010.

Dos testes de larga escala mencionados, apenas a OBMEP é aplicada somente a alunos das escolas públicas. Porém, este exame foi escolhido devido ao fato de avaliar tanto os alunos do ensino médio quanto os alunos do ensino fundamental, separados em nível 1 (6° e 7° anos), nível 2 (8° e 9° anos) e nível 3 (médio).

3.4 O QUESTIONÁRIO APLICADO

O questionário foi aplicado aos alunos da licenciatura em Matemática, da UFRJ. O conjunto de perguntas se baseou nos seguintes critérios, também presentes na pesquisa realizada por BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996):

- Problemas abordando os três tipos de situações do Modelo Combinatório Implícito (problemas de Seleção, Alocação e Partição);

- Problemas que necessitassem de diferentes técnicas para a sua resolução.

Uma cópia dos questionários que foram aplicados aos alunos se encontra no anexo dessa dissertação. Passamos a descrever agora cada um dos problemas dos questionários.

3.4.1 As questões

Questão 1A. *Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgado. Suponha que Maria tenha permissão para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer?*

Esta foi a 1ª questão do questionário A, e está presente em SANTOS, MELLO e MURARI, 2007 (p. 38). Aqui, Maria irá comer 1 salgado e tomar um picolé, escolhendo uma dentre 3 opções de salgado, e uma dentre 5 opções de picolé. Trata-se de um problema de seleção, em que é necessário aplicar o Princípio Multiplicativo. O número de maneiras de escolher um picolé e um salgado é $5 \cdot 3 = 15$.

Este é um problema bem parecido com os comumente encontrados nos livros didáticos atuais, quando se introduz o estudo da Análise Combinatória. Por esse motivo, acreditamos que o único erro possível de aparecer é um erro do tipo E5, ou seja, o aluno pode tentar enumerar os casos possíveis, mas acabar contando um número de possibilidades maior ou menor do que o número de soluções possíveis.

Questão 1B*: Numa confeitaria há 5 sabores de picolés e 3 sabores de salgado. Suponha que Lúcia tenha permissão para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer?*

Esta foi a 1ª questão do questionário B, e também foi retirada de SANTOS, MELLO e MURARI, 2007 (p. 38). Aqui, Lúcia deve escolher entre comer 1 picolé ou comer 1 salgado, não sendo possível fazer as duas coisas. Trata-se de um problema de seleção, em que é necessário aplicar o princípio aditivo. Como há 5 opções de sabores de picolé e 3 opções de sabores de salgado, o número de maneiras de escolher um picolé ou um salgado é $5+3=8$.

Em nossa análise a priori, acreditamos que nesta questão surgirá o erro do tipo E1, ou seja, trocar o modelo necessário para a resolução (no caso o Princípio Aditivo) por um modelo incorreto (no caso, o Princípio Multiplicativo), seja pelo não conhecimento da técnica adequada, seja pela falta de atenção na leitura.

Questão 2. *Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes?*

Esta questão, comum aos dois questionários, foi retirada do questionário da pesquisa de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996), e envolve a alocação de cartas em envelopes. Como cada envelope só pode conter no máximo uma carta, irá sobrar um envelope sem carta. Para colocar a 1ª carta, há 5 opções de envelope. Para colocar a 2ª carta, restam 4 opções de envelope. Para a 3ª carta, há 3 opções de envelope. E para a 4ª e última carta, há 2 opções de envelope. Utilizando o Princípio Multiplicativo, chegamos a $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$. Porém, se trocarmos, por exemplo, a carta do envelope amarelo pela carta do envelope branco, não chegaremos a uma forma diferente de alocar as cartas, pois as cartas são iguais. Assim, precisamos dividir o total encontrado pelo número de modos de trocar as cartas de envelope, para descontar o que foi contado a mais quando utilizamos apenas o princípio multiplicativo. Temos 4 modos de alocar a 1ª carta em outro envelope. Feito isso, temos 3 modos para alocar a 2ª carta. Para alocar a 3ª carta, restam 2 opções. Por último, há apenas uma opção para alocar a 4ª carta, totalizando $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ maneiras de trocar as 4 cartas de envelope. A solução do problema é portanto $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$.

Caso o aluno percebesse, poderia também utilizar diretamente a fórmula do número de Combinações Simples, pois tal configuração é o modelo matemático correspondente à situação problema. Efetuando o cálculo, o aluno chegaria a $C_{5,4} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} = 5$.

Neste problema, acreditamos que é possível surgir os erros E2 e E4, no sentido de o aluno não perceber que é necessário dividir o produto $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$ pelo número de permutações das 4 cartas nos 4 envelopes escolhidos, já que embora os envelopes sejam distinguíveis pela cor, as cartas são indistinguíveis e a ordem em que são colocadas nos envelopes escolhidos é irrelevante. Também cremos na possibilidade de ocorrer os erros E5, de enumeração, e E7, no sentido de o aluno durante a resolução, perceber que a solução do problema corresponde ao número de Combinações Simples, mas utilizar uma fórmula incorreta para calcular esse número.

Questão 3. *Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?*

Este problema, comum aos dois questionários, foi criado por nós para esta pesquisa. Aqui, a idéia principal é a de partição, pois precisamos dividir 8 pessoas em dois grupos: um com 5 pessoas e outro com 3 pessoas. Como não há nenhuma hierarquia entre os funcionários que realizarão o tal trabalho, fica implícito que a ordem em que cada membro é direcionado para um ou para outro grupo não é importante. Para montar o 1º grupo, devemos determinar quem serão as 5 pessoas de sua composição. A 1ª pessoa do grupo pode ser qualquer uma das 8 disponíveis. A 2ª pessoa, só pode ser uma das 7 restantes. A 3ª, uma das 6 que ainda restam. A 4ª pode ser qualquer uma das 5 disponíveis, e a 5ª uma das 4 restantes. O 2º grupo ficará automaticamente determinado pelas 3 pessoas que sobraram. O cálculo seria $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 7720$. Porém, devemos dividir tal resultado pelo número de modos de escolher as mesmas 5 pessoas em ordem diferente da utilizada (pois como vimos, uma ordem diferente não levará a um grupo diferente). O número de modos de trocar a ordem das 5 pessoas é $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Assim, a solução do problema é $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$.

Caso o aluno percebesse, poderia também utilizar diretamente a fórmula do número de Combinações Simples, pois assim como no problema anterior, tal configuração é o modelo matemático correspondente à situação problema. Efetuando o cálculo, o aluno chegaria a $C_{8,5} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 56$.

Em uma solução alternativa, o aluno poderia começar a formar primeiro o grupo com as três pessoas (as cinco restantes automaticamente formariam o segundo grupo). Seguindo o mesmo raciocínio, chegamos a $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ ou a $C_{8,3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$.

Acreditamos que surgirá nessa questão o erro E2 (de ordem), com o aluno não percebendo a necessidade de dividir o produto $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 7720$ pelo número de Permutações Simples da ordem de escolha dos funcionários a compor o primeiro grupo. Poderá também surgir o erro E10, no sentido de o aluno não perceber que conjuntos com os mesmos componentes são indistinguíveis entre si, já que a ordem em que entraram no grupo é irrelevante. Além desses, ao tentar enumerar as possibilidades de formação dos grupos poderá também aparecer o erro E5. Por fim, cremos ser possível também que os alunos cometam o erro E7, ao perceberem que a solução corresponde ao número de Combinações Simples das pessoas nos grupos, mas ao tentarem calcular esse número, acabem por utilizar uma fórmula incorreta.

Questão 4. *Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana ?*

Essa é uma questão comum aos dois questionários, de seleção, confeccionada por nós. Aqui, o médico deve escolher obrigatoriamente dois dias diferentes de uma mesma semana para cumprir a sua carga horária de trabalho. Para o 1º dia de trabalho, o médico possui 7 opções de escolha. Para escolher o 2º dia de trabalho, estão disponíveis agora 6 dias. A solução seria $7 \cdot 6 = 42$, porém trabalhar terça e quinta é o mesmo que trabalhar quinta e terça, ou seja, trocar a ordem dos dois dias escolhidos não leva a uma rotina de trabalho diferente. Assim, devemos dividir o número encontrado pelo número de modos de trocar a ordem dos dois dias escolhidos, ou seja, 2. A solução do problema é, portanto, $\frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$.

O modelo matemático correspondente a solução do problema é o de combinações simples. Caso o aluno percebesse tal fato, também poderia calcular o número de soluções utilizando $C_{7,2} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = 21$.

Na resolução deste problema esperamos encontrar o erro E2, com o aluno não percebendo que a ordem de escolha dos dois dias de trabalho não é importante, sendo então necessária a divisão do produto $7 \cdot 6 = 42$ por 2. Assim como na 4ª e na 5ª questão, também acreditamos que possam surgir os erros E5, de enumeração, e E7, com a percepção do modelo correto (no caso, o cálculo do número de Combinações Simples de 7 dias, escolhidos dois a dois), mas com a utilização de uma fórmula incorreta para encontrar a solução.

Questão 5A*.* *Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um desses cargos, de quantas maneiras podemos formar uma diretoria ?*

Essa questão, presente apenas no questionário A, nós retiramos de DANTE, 2008 (p.289, exercício 18). O objetivo aqui é *selecionar*, dentre 30 pessoas, quatro para ocupar cargos específicos e não acumuláveis. Podemos pensar em selecionar o presidente, depois o vice, em terceiro o secretário, e por último o tesoureiro. Dada uma seleção, trocando a ordem da mesma teremos uma nova seleção (pois quem era o presidente poderá agora ser o vice, por exemplo). Para escolher o presidente, há 30 opções. Para cada uma destas, há 29 opções de escolha para o vice-presidente. Em seguida sobram 28 opções para escolher o secretário e, por último, 27 opções para escolher o tesoureiro. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de diretorias diferentes que podem ser montadas é $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657.720$.

O aluno poderia perceber que a configuração descrita neste enunciado corresponde a um arranjo simples. O número de seleções possíveis também pode ser calculado através de $A_{30,4} = \frac{30!}{26!} = 657.720$ (possibilidades de escolhas ordenadas de 4 pessoas, escolhidas dentre as 30 disponíveis).

A partir de nossa pré-análise, acreditamos que os prováveis erros que surgirão nesta questão são: o E2, com o aluno dividindo o produto pelo número de permutações das 4 pessoas escolhidas para os 4 cargos, sem que se deva fazer isso; e o E7, no sentido de o aluno reconhecer que uma solução do problema corresponde a um Arranjo Simples, mas acabar utilizando uma fórmula incorreta para calcular o número de soluções.

Questão 5B. *Um professor precisará aplicar uma prova de segunda chamada a 4 alunos de sua turma. Para isso, tem a sua disposição uma sala com 30 lugares. De quantos modos diferentes o professor pode arrumar os alunos nesta sala, sem qualquer restrição ?*

Essa questão foi adaptada de DANTE, e envolve a alocação de 4 alunos em 4 lugares dos 30 que estão disponíveis em uma sala. Para alocar o 1º aluno, o professor tem 30 opções. Para o 2º aluno, restam 29 lugares disponíveis. Para o 3º aluno há 28 possibilidades, e para o 4º e último, qualquer lugar dos 27 ainda disponíveis. A solução é dada por $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 = 657.720$ e aqui não há a necessidade de dividir esse número, pois a ordem em que os alunos estão sentados, se trocada, leva a uma nova configuração.

O aluno também poderia reconhecer que o modelo matemático correspondente à solução do problema é um Arranjo Simples, e calcular o número desses arranjos através de $A_{30,4} = \frac{30!}{26!} = 657.720$.

Assim como na questão 5A, os erros esperados são os erros E2 e E7, pelos mesmos motivos já especificados. Além desses dois, acreditamos que nesta 7ª questão poderá surgir o erro E4, com o aluno considerando os lugares vazios como distinguíveis entre si, quando não o são.

Questão 6. *Um menino tem 4 carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e roxo) e decide dá-los a seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes ele pode dar <u>todos</u> os seus carrinhos a seus irmãos ? Por exemplo: poderia dar 2 para Fernando e 2 para Teresa, ou ainda, poderia dar todos para Luis.*

Este problema foi retirado da pesquisa de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO. Não há restrições quanto à divisão dos carrinhos entre os irmãos, ou seja, um deles pode receber mais do que um carrinho (todos inclusive) e pode acontecer de algum irmão não receber carrinhos. Para cada carrinho, há 3 opções de escolha de qual irmão irá recebê-lo, e para cada um dos outros carrinhos, esse número de opções é o mesmo. Assim, pelo Princípio Multiplicativo, a solução do problema é calculada como $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Como todos os carrinhos são distintos (o mesmo ocorrendo com os irmãos), trocando-se os carrinhos recebidos por cada irmão, troca-se cada distribuição feita. Assim, a ordem da distribuição é importante, e não devemos dividir o número encontrado para descontar soluções contadas a mais.

Há ainda a opção de se pensar a distribuição já tendo ocorrido. Com isso, olhamos para cada irmão e verificamos quantos e quais carrinhos ele pode ter recebido. Procedendo deste modo, é necessário dividir o problema em casos:

- Um dos irmãos pode receber os 4 carrinhos, e os outros dois nenhum. Há 3 modos diferentes disso ocorrer;
- Um dos irmãos recebe 3 carrinhos, outro recebe 1, e o terceiro não recebe nenhum. Há $6 \cdot 4 = 24$ modos diferentes disso ocorrer (6 maneiras de escolher quais dos três irmãos receberão carrinhos, e para cada uma destas escolhas, 4 maneiras diferentes de dar os 4 carrinhos para os dois irmãos selecionados);
- Dois dos irmãos recebem dois carrinhos cada, e um não recebe nenhum. Há $3 \cdot 6 = 18$ modos disso ocorrer (3 maneiras de escolher quais dos três irmãos receberão carrinhos, e para cada uma destas escolhas, há 6 maneiras diferentes de se dar os 4 carrinhos para os dois irmãos);

- Um dos irmãos recebe 2 carrinhos, e os outros dois irmãos recebem um carrinho cada. Há $3 \cdot 6 \cdot 2 = 36$ modos disso ocorrer (3 maneiras de escolher qual dos irmãos receberá 2 carrinhos, 6 maneiras diferentes de escolher 2 dos 4 carrinhos para esse irmão, e 2 maneiras de dar os 2 carrinhos restantes para os outros dois irmãos).

Utilizando o Princípio Aditivo, chegamos a $3 + 24 + 18 + 36 = 81$.

Quanto aos erros esperados para esta questão, acreditamos que resolvendo da primeira maneira surgirá o erro E3, com os alunos não percebendo que um mesmo irmão pode receber mais do que um carrinho, e o erro E5 (de enumeração). Já resolvendo da segunda maneira, acreditamos que além dos já mencionados E3 e E5, poderá também surgir o erro E4, com os alunos considerando os carrinhos como indistinguíveis, quando são distinguíveis.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS E PROVAS

4.1 DOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

4.1.1 DANTE, Luiz Roberto - Tudo é Matemática (6° ao 9° ano)

No livro do 6º ano, o capítulo 2 revisa e trabalha com as propriedades das quatro operações envolvendo números naturais. São apresentadas quatro idéias associadas à multiplicação. Dentre essas idéias, a de contagem do número de possibilidades (ou combinações) para uma determinada situação, as outras idéias são "adicionar parcelas iguais", "disposição retangular" e "proporcionalidade". A ideia associada à disposição retangular recebe esse nome devido ao seu apelo geométrico, que não se faz presente em grande parte dos problemas de contagem, e também pode ser enquadrada como uma adição de parcelas iguais. Na verdade, embora sejam quatro as idéias apresentadas, o significado matemático de cada uma pode possuir interseção com alguma das outras, não sendo elas, portanto, disjuntas.

Os exemplos a seguir foram retirados do livro do 6° ano desta coleção, e envolvem as quatro idéias mencionadas no texto (um de cada uma):

Figura 4.1.1.1, p.48 do livro do 6° ano

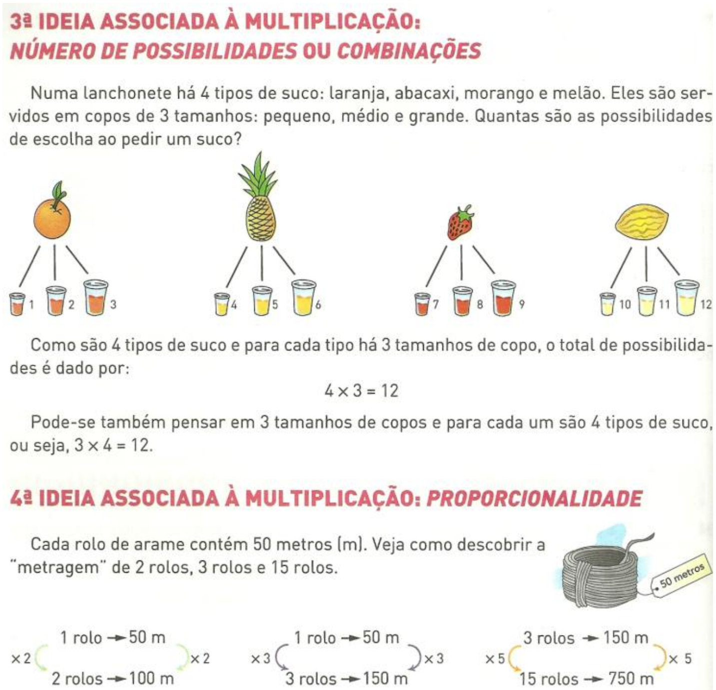
2ª IDEIA ASSOCIADA À MULTIPLICAÇÃO: *DISPOSIÇÃO RETANGULAR*

Observe a sala de aula abaixo. Qual é o total de carteiras?

Não há necessidade de contar uma a uma. Basta ver que as carteiras estão em *disposição retangular* com 8 linhas e 5 colunas.

Assim, para saber o total de carteiras fazemos 8 · 5 ou 5 · 8 e obtemos 40.

Figura 4.1.1.2, p.49 do livro do 6° ano



3ª IDEIA ASSOCIADA À MULTIPLICAÇÃO:
NÚMERO DE POSSIBILIDADES OU COMBINAÇÕES

Numa lanchonete há 4 tipos de suco: laranja, abacaxi, morango e melão. Eles são servidos em copos de 3 tamanhos: pequeno, médio e grande. Quantas são as possibilidades de escolha ao pedir um suco?

Como são 4 tipos de suco e para cada tipo há 3 tamanhos de copo, o total de possibilidades é dado por:

$$4 \times 3 = 12$$

Pode-se também pensar em 3 tamanhos de copos e para cada um são 4 tipos de suco, ou seja, $3 \times 4 = 12$.

4ª IDEIA ASSOCIADA À MULTIPLICAÇÃO: *PROPORCIONALIDADE*

Cada rolo de arame contém 50 metros (m). Veja como descobrir a "metragem" de 2 rolos, 3 rolos e 15 rolos.

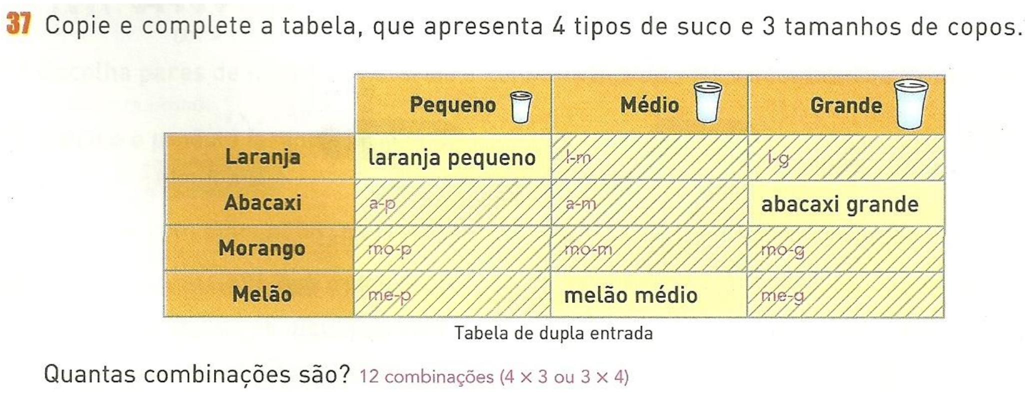
1 rolo → 50 m ×2 / 2 rolos → 100 m

1 rolo → 50 m ×3 / 3 rolos → 150 m

3 rolos → 150 m ×5 / 15 rolos → 750 m

Figura 4.1.1.3, p.52 do livro do 6° ano

Logo após a apresentação da ideia de número de possibilidades ou combinações, há dois exercícios associados: um envolvendo a escrita de todas as possibilidades para posterior enumeração, e outro utilizando o Princípio Multiplicativo, sem a escrita de todas as possibilidades, conforme os exemplos abaixo:


37 Copie e complete a tabela, que apresenta 4 tipos de suco e 3 tamanhos de copos.

	Pequeno	Médio	Grande
Laranja	laranja pequeno	l-m	l-g
Abacaxi	a-p	a-m	abacaxi grande
Morango	mo-p	mo-m	mo-g
Melão	me-p	melão médio	me-g

Tabela de dupla entrada

Quantas combinações são? 12 combinações (4 × 3 ou 3 × 4)

Figura 4.1.1.4, p.52 do livro 6° ano: exercício sem sugestão do princípio multiplicativo

38. Se temos 7 tipos de suco e copos de apenas 2 tamanhos, quantas combinações são ?

Transcrição do exercício 38, p.53 do livro do 6° ano

Ao final do capítulo, há um conjunto de problemas multiplicativos envolvendo uma ou mais operações por problema. Nesses problemas são encontradas todas as quatro ideias que o autor associa à multiplicação, mas apenas em mais dois deles, aparece o uso de multiplicação como contagem, conforme pode ser observado na tabela abaixo:

Tabela 4.1.1.1 Idéias associadas à multiplicação

Idéia associada à multiplicação	**Nº de exercícios / problemas**
Adição de parcelas iguais	15
Disposição retangular	5
Número de possibilidades	4
Proporcionalidade	7

Como é possível observar, a maioria dos problemas multiplicativos encontrados dizia respeito à ideia “adicionar parcelas iguais”.

Há em todo o livro do 7º ano seis problemas de contagem: um no capítulo inicial (de revisão de tópicos do 6º ano), e os demais ao longo do livro (em seções denominadas “revisão cumulativa”, ao fim de cada capítulo). Na parte teórica, há um breve comentário na seção “Nº de diagonais de um polígono convexo", sobre o uso da contagem para determinar a sua quantidade, sem que seja necessário desenhá-las para posterior quantificação, usando como exemplo o eneágono:

- Se o polígono convexo tem 9 lados, ele tem 9 vértices.
- De cada vértice partem (9 – 3) diagonais, ou seja, 6 diagonais. Pense por quê!
- A expressão 9 · (9 – 3) ou 9 · 6 nos dá o dobro do número total de diagonais, pois cada uma foi contada duas vezes ($\overline{AE}$ e $\overline{EA}$ são a mesma diagonal).
- O número total de diagonais é, então, obtido assim:

$$\frac{9 \cdot (9-3)}{2} = \frac{9 \cdot 6}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

Logo, um polígono convexo de 9 lados tem 27 diagonais.

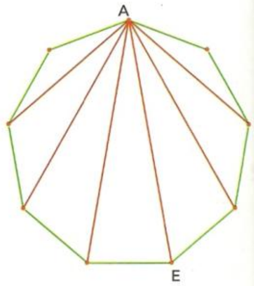


Figura 4.1.1.5, p.96 do livro do 7° ano

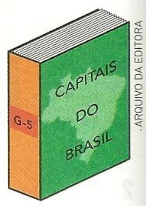
No livro do 8º ano, o autor fala sobre o uso da contagem ao revisar o cálculo do número de diagonais de um polígono convexo (já visto no 7º ano). Os problemas de contagem desse livro são, em geral, associados ao número de diagonais de polígonos convexos, com apenas um problema fugindo a essa característica. O mesmo está associado a uma probabilidade, e se encontra na figura abaixo:

11 Regina vai colocar etiquetas nos livros da biblioteca onde trabalha, especificando nelas o assunto e o ano mais adequado para a leitura.

Assuntos
Ciências (**C**)
Geografia (**G**)
História (**H**)
Matemática (**M**)
Português (**P**)

Anos
6º (6)
7º (7)
8º (8)
9º (9)

Um tipo de etiqueta é G-6, que representa livro de Geografia para 6º ano.



Responda em seu caderno:

a) Quantos tipos diferentes de etiqueta ela irá fazer?
20 tipos (5 × 4 ou 4 × 5).

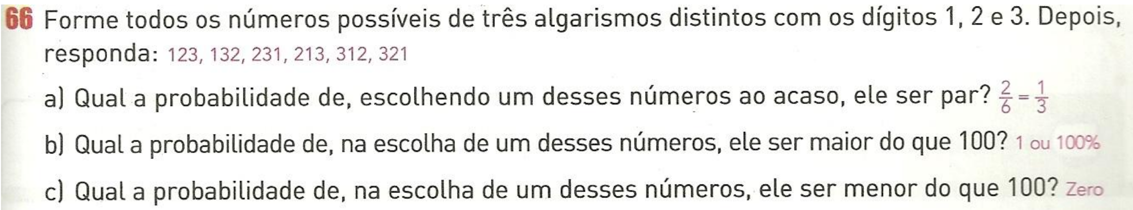
b) Escolhendo um desses tipos ao acaso, qual é a probabilidade de ser etiqueta para um livro de Matemática?

c) Qual é a probabilidade de escolha para um livro que não seja de História nem de 9º ano? 60% (12 (4 × 3) em 20 → $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ = 60%).

b) 20% (M-6, M-7, M-8, M-9: 4 em 20 → $\frac{4}{20} = \frac{1}{5}$ = 20%).

Figura 4.1.1.6, p.42 do livro do 8° ano

No livro do 9º ano, a combinatória aparece no capítulo 10, denominado “ Noções de estatística e probabilidade”, e é vista como ferramenta para a mesma, mas em poucos problemas. Quase todos sugerem o uso de uma enumeração de todas as possibilidades, usando tabelas ou diagramas de árvore (onde o resultado não é, em geral, um número natural muito grande), para posterior cálculo de probabilidades, como no caso abaixo:


66 Forme todos os números possíveis de três algarismos distintos com os dígitos 1, 2 e 3. Depois, responda: 123, 132, 231, 213, 312, 321

a) Qual a probabilidade de, escolhendo um desses números ao acaso, ele ser par? $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b) Qual a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser maior do que 100? 1 ou 100%

c) Qual a probabilidade de, na escolha de um desses números, ele ser menor do que 100? Zero

Figura 4.1.1.7, p.291 do livro do 9° ano

Dividimos os problemas encontrados nesta coleção em dois grupos: problemas combinatórios não associados a um cálculo de probabilidade, e problemas combinatórios associados ao cálculo de alguma probabilidade. Feito isso, construímos a tabela abaixo:

Tabela 4.1.1.2 Associação entre problemas combinatórios e probabilidade

Ano / Categoria	**Não associados à probabilidade**	**Associados à probabilidade**	**Total**
6º	4	1	5
7º	6	0	6
8º	9	1	10
9º	4	3	7
Total	**23**	**5**	**28**

Observamos que, considerando o total de problemas nos 4 livros, há um número maior de problemas não associados à probabilidade (aproximadamente 86% do total). Embora haja a associação da análise combinatória como ferramenta para o cálculo de probabilidades, como recomendado pelos PCNs, consideramos pequeno o número de problemas que mostra essa associação (aproximadamente 14%). Além disso, consideramos pequena a quantidade de problemas sobre contagem (28, em uma coleção com 4 livros-texto e vários exercícios distribuídos por todo o conteúdo de matemática do ensino fundamental).

Abaixo, se encontram os problemas encontrados divididos nas categorias de problemas de Alocação, Seleção e Partição:

Tabela 4.1.1.3 Classificação dos problemas quanto ao Modelo Combinatório Implícito

Ano	**Alocação**	**Seleção**	**Partição**	**Total**
6°	2	3	0	5
7°	6	0	0	6
8°	8	2	0	10
9°	5	2	0	7
Total	**21**	**7**	**0**	**28**

Chama a atenção nesta tabela, o fato de, no contexto dos problemas, não ter surgido nenhum problema envolvendo partições, além de uma predominância dos problemas de alocação sobre os problemas de seleção.

4.1.2 IEZZI, Gelson ET al. - Matemática e Realidade (6° ao 9° ano)

No livro do 6° ano desta coleção, a análise combinatória surge no 2° capítulo, dentro de uma revisão sobre multiplicação de números naturais. Neste livro também estão presentes nos problemas propostos as quatro ideias associadas à multiplicação, embora não seja feita uma menção específica à contagem de elementos em disposição retangular e à proporcionalidade. Há menção a problemas de contagem, com um exemplo resolvido e quatro problemas propostos (três na própria seção e um em uma seção denominada “Teste seu conhecimento”). O exemplo citado é resolvido através da escrita (desenho) de todas as possibilidades e do Princípio Multiplicativo. Um dos três exercícios é o da figura abaixo:

56 Enzo adora sorvete. Na sorveteria onde ele vai há quatro tipo de sabores: abacaxi, coco, limão e morango. Ele sempre compra uma bola de sorvete com um tipo de cobertura: morango, chocolate ou caramelo.

a) De quantos modos pode ser composto o sorvete com uma bola e uma cobertura? 12 modos

b) Hoje Enzo resolveu pedir duas bolas de sorvete de sabores diferentes, sem cobertura. Escreva todas as possibilidades que ele tem a escolher. Quantas são?
6 possibilidades: abacaxi e coco, abacaxi e limão, abacaxi e morango, coco e limão, coco e morango, limão e morango

Figura 4.1.2.1, p.31, livro do 6° ano, exercício proposto

Dos quatro problemas propostos, todos podem ser resolvidos tanto por enumeração quanto pelo princípio multiplicativo, pois as soluções dos mesmos não são números de valor elevado (o maior é 12). Uma tabela com o quantitativo de problemas associado a cada ideia de multiplicação é a seguinte:

Tabela 4.1.2.1 Ideias associadas à multiplicação

Ideia associada à multiplicação	**Nº de exercícios / problemas**
Adição de parcelas iguais	14
Disposição retangular	3
Contagem	4
Proporcionalidade	3
Total	**24**

Podemos perceber que mais da metade dos problemas multiplicativos dizia respeito à idéia de adicionar parcelas iguais.

Os livros de 7° e 8° anos apresentam, respectivamente, um e dois problemas de contagem, em forma de desafio. Não estão vinculados a nenhum tópico específico trabalhado nestes livros. Transcrevemos abaixo a questão encontrada no livro do 7° ano:

Compute as possibilidades

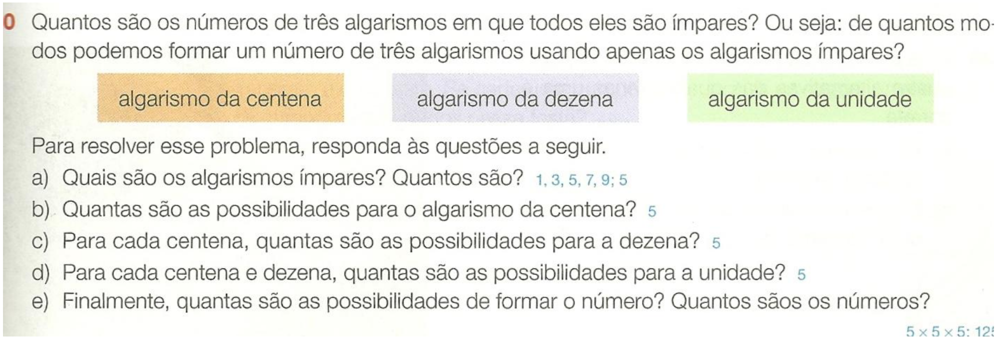
Em um banco, os saques em caixas eletrônicos podem ser feitos em notas de R$ 10,00 e R$ 50,00. De quantas maneiras diferentes o caixa eletrônico poderá pagar a quantia de R$ 500,00 a um cliente ?

p.42, na seção “Desafios” do livro do 7° ano

No livro do 9° ano, o capítulo 16 trata especificamente sobre contagem e probabilidade. Nesse capítulo, que começa com um exemplo resolvido tanto por contagem direta quanto por contagem indireta, os autores enunciam, de modo geral, o princípio fundamental da contagem:

"Se uma ação é composta de duas etapas sucessivas, sendo que a primeira pode ser realizada de ***m*** *modos e, para cada um destes, a segunda pode ser feita de* ***n*** *modos, então o número de modos de realizar a ação é* ***m . n****."* (pág. 175)

A seguir, há um total de 21 problemas envolvendo contagem. No primeiro, há uma sugestão de roteiro para resolução, conforme mostra a figura abaixo, retirada do livro:


0 Quantos são os números de três algarismos em que todos eles são ímpares? Ou seja: de quantos modos podemos formar um número de três algarismos usando apenas os algarismos ímpares?

algarismo da centena	algarismo da dezena	algarismo da unidade

Para resolver esse problema, responda às questões a seguir.

a) Quais são os algarismos ímpares? Quantos são? 1, 3, 5, 7, 9; 5
b) Quantas são as possibilidades para o algarismo da centena? 5
c) Para cada centena, quantas são as possibilidades para a dezena? 5
d) Para cada centena e dezena, quantas são as possibilidades para a unidade? 5
e) Finalmente, quantas são as possibilidades de formar o número? Quantos sãos os números?

5 × 5 × 5: 12

Figura 4.1.2.2, p.175 do livro do 9° ano

Para efeito de comparação, também dividimos os problemas encontrados nesta coleção em contagem não associada a uma probabilidade e contagem associada a uma probabilidade. Os resultados estão tabulados abaixo:

Tabela 4.1.2.2 Associação entre problemas combinatórios e probabilidade

Ano / Categoria	**Não associado à probabilidade**	**Associado à probabilidade**
6º	4	0
7º	1	0
8º	2	0
9º	19	2
Total	**26**	**2**

Na maioria das questões de probabilidade não é necessário o uso do Princípio Multiplicativo, como no primeiro problema abaixo. O segundo, que também pode ser resolvido por contagem direta, consideramos como um problema combinatório:

52 Um prêmio será sorteado entre os alunos das três classes do 9º ano.

	9º A	9º B	9º C
Meninos	15	18	17
Meninas	22	20	23

Calcule a probabilidade de que o ganhador seja:

a) um aluno do 9º A, menino ou menina; $\frac{37}{115}$

b) um menino do 9º B; $\frac{18}{115}$

c) uma menina. $\frac{13}{23}$

Figura 4.1.2.3, p.181 do livro do 9° ano: problema sem a necessidade de raciocínio combinatório

51 Responda:

a) Um casal pretende ter dois filhos. Admitindo probabilidades iguais para ambos os sexos, qual a probabilidade de que venha a ter duas meninas? $\frac{1}{4}$ (25%)

b) Considerando todas as famílias de quatro pessoas — pai, mãe e dois filhos — qual é aproximadamente a porcentagem daquelas formadas por pai, mãe e duas filhas? 25%

Figura 4.1.2.4, p.181 do livro do 9° ano: problema com necessidade de raciocínio combinatório

Nesta coleção, o tema Análise Combinatória está concentrado nos livros do 6° ano e do 9° ano. Quase todos os problemas de probabilidade encontrados no livro de 9° ano não fazem uso do princípio multiplicativo, e sim de contagem direta para cálculo do espaço amostral e dos casos favoráveis a cada evento mencionado. Assim, não fica muito explícita a utilidade de um raciocínio combinatório como ferramenta para aplicação a problemas de probabilidade.

Além disso, consideramos pequeno o número de problemas de contagem encontrados (28), em comparação com a quantidade de exercícios e problemas distribuídos pelas outras áreas da matemática. Abaixo se encontram os problemas categorizados em problemas de Alocação, Seleção ou Partição:

Tabela 4.1.2.3 Classificação dos problemas quanto ao Modelo Combinatório Implícito

Ano	Alocação	Seleção	Partição	Total
6°	1	3	0	4
7°	1	0	0	1
8°	2	0	0	2
9°	12	9	0	19
Total	**16**	**12**	**0**	**28**

Assim como na primeira coleção analisada, não encontramos problemas associados a partições, e constatamos um predomínio de problemas de alocação sobre os problemas de seleção.

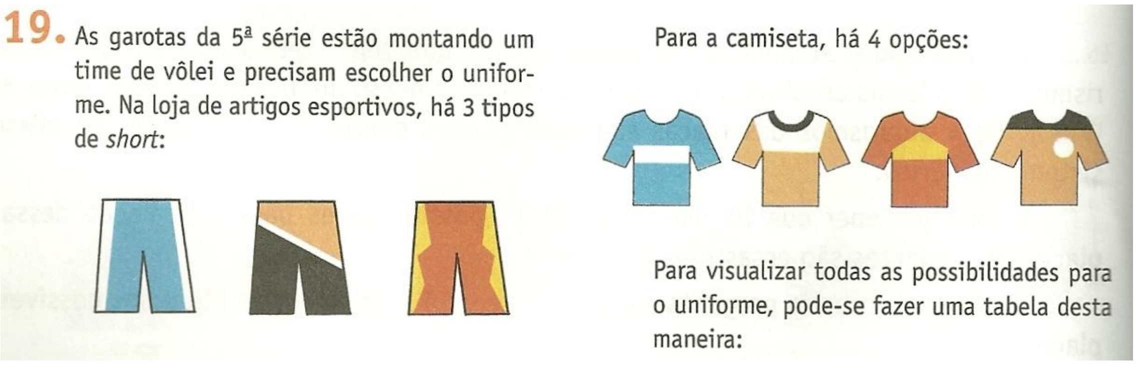
4.1.3 IMENES, Luis Márcio e LELLIS, Marcelo C. - Matemática para todos (6° ao 9° ano)

Nesta coleção há problemas combinatórios em todos os livros. No livro do 6° ano, a Análise Combinatória se faz presente no primeiro capítulo do livro, em uma seção denominada “Contando possibilidades”. Esta seção se inicia com um texto envolvendo o número total de placas de carro que podem ser confeccionadas com a codificação atual (três letras seguidas de quatro dígitos), para motivar o estudo da contagem. Diferente das outras duas coleções analisadas, não há uma menção específica de outras possíveis interpretações da operação de multiplicar (adição de parcelas iguais, disposição retangular), mas as mesmas são trabalhadas em problemas espalhados no primeiro capítulo e no decorrer do livro. A proporcionalidade não é explorada neste primeiro capítulo, ficando o seu uso e aplicações para serem utilizados no capítulo que trata de frações e porcentagens. Para confeccionar a tabela abaixo, não consideramos a proporcionalidade como forma de interpretar a operação de multiplicar, nos detendo apenas nos problemas de contagem e nas outras interpretações mencionadas, todas contidas neste primeiro capítulo do livro:

Tabela 4.1.3.1 Ideias associadas à multiplicação

Interpretação	Nº de problemas
Adição de parcelas iguais	2
Disposição retangular	3
Contagem	10
Total	**15**

Podemos observar que, diferente das outras coleções, não há um predomínio da interpretação "adição de parcelas iguais" sobre as outras interpretações. Quanto aos problemas de contagem, em todos há a sugestão de uma contagem direta, com o uso de tabelas, conforme o exemplo abaixo:



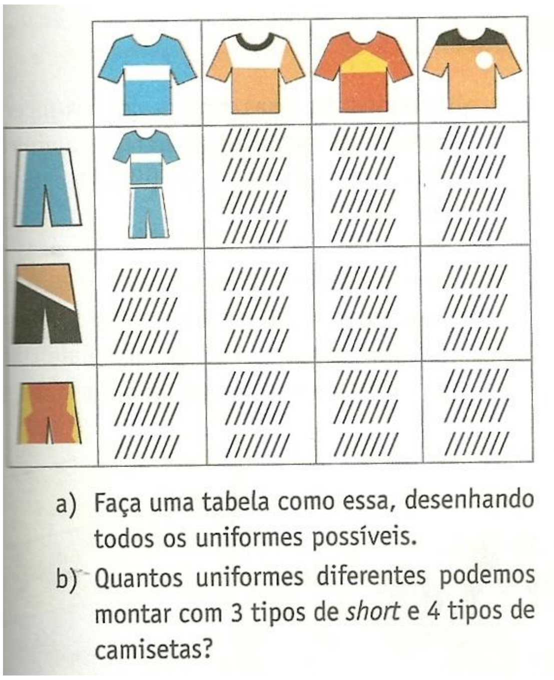


Figura 4.1.3.1, p.18, livro do 6º ano

Não há no livro do 6º ano nenhuma sugestão específica quanto ao uso de um diagrama de árvore, e nenhum dos problemas aborda a ideia de probabilidade.

No livro do 7º ano, a Análise Combinatória também aparece no primeiro capítulo, de revisão sobre os Números Naturais. Aqui, logo no primeiro exemplo, acompanhado também de uma tabela, os autores já fazem uso de um diagrama de árvore. A questão trata sobre todas as possibilidades de comando que podem ser dadas a um personagem de vídeo game, através do controle (joystick) abaixo:

Figura 4.1.3.2, p.27, livro do 7º ano

As maneiras de fornecer um comando neste jogo são: escolher uma das opções de movimento, no botão direcional à esquerda (que tem as opções “cima”, “baixo”, “esquerda” e “direita”) e escolher uma opção dos botões de ação, à direita (opções “A”, “B” ou “C”). As possíveis escolhas são assim apresentadas pelos autores:

<u>*Em tabela*</u>

	↑	↓	→	←
Ⓐ	A ↑	A ↓	A →	A ←
Ⓑ	B ↑	B ↓	B →	B ←
Ⓒ	C ↑	C ↓	C →	C ←

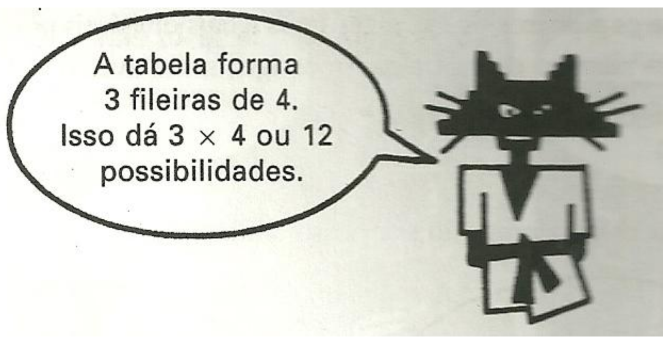


Figura 4.1.3.3, p.28, livro do 7º ano

Em diagrama de árvore

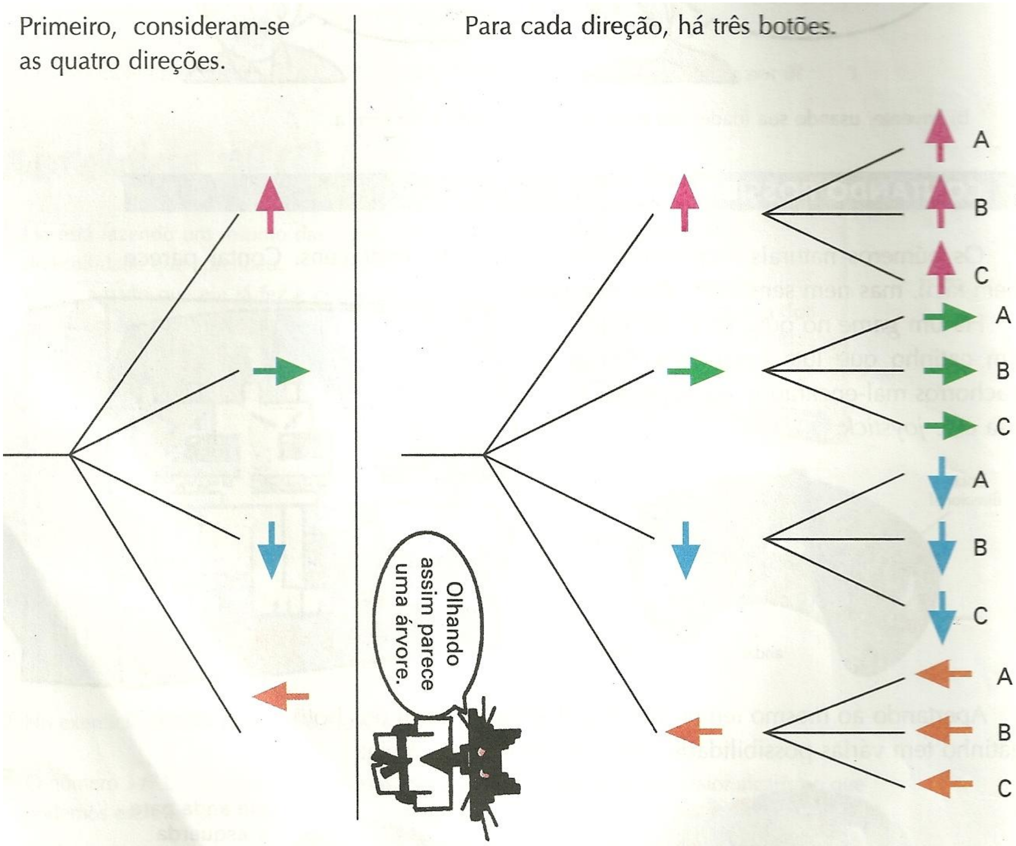


Figura 4.1.3.4, p.28, livro do 7º ano

Com ambas as resoluções, os autores mostram que a resposta pode ser obtida através de uma multiplicação. Há, logo a seguir, uma advertência de que nem sempre uma multiplicação resolve qualquer problema de contagem, fato que é ilustrado pelo seguinte problema:

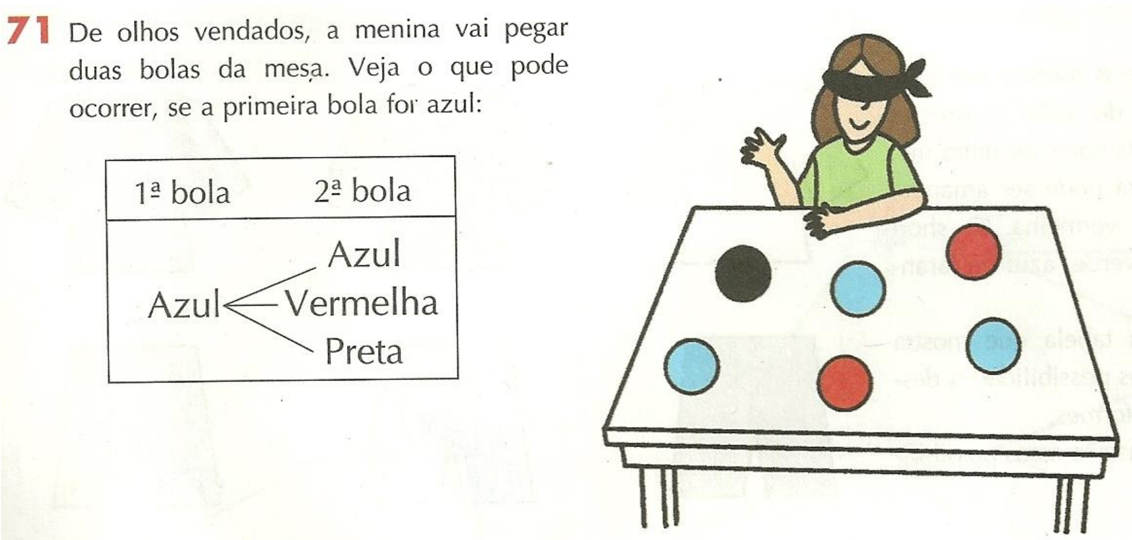


Figura 4.1.3.5, p.30, livro do 7º ano

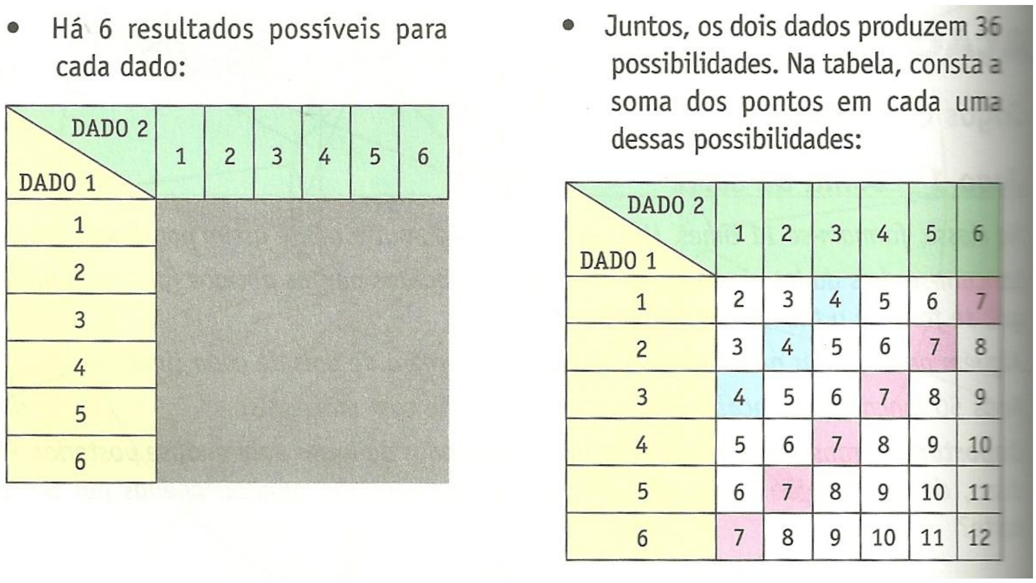
A tabela apresentada no problema anterior nos parece um convite para que o aluno escreva, através de uma árvore de possibilidades, todas as possíveis escolhas da menina de olhos vendados. Com isto, o aluno perceberia que se a primeira bola for preta, a segunda só poderá ser azul ou vermelha. Com isso, apenas o Princípio Multiplicativo não é suficiente para contar indiretamente as situações possíveis, havendo a necessidade de se dividir o problema em dois casos: se a primeira bola escolhida for preta, e se a primeira bola sorteada não for preta.

De todos os 18 problemas de contagem encontrados no livro do 7º ano, nenhum está associado a um cálculo de probabilidade.

No livro do 8º ano, o conteúdo de Combinatória se encontra dentro do capítulo 9, denominado “Estatística e Possibilidades”. A Combinatória é utilizada para contar casos possíveis e auxiliar a construção da idéia de Probabilidade, como nos dois primeiros exemplos, retirados da página 149 do referido livro:

<u>*Jogo 1 - Soma da sorte*</u>

Na classe, formam-se 11 times. Um terá o número 2, outro o 3, e assim por diante até o 12. Lançam-se dois dados simultaneamente. Se a soma dos pontos obtidos for 4, o time 4 faz gol; se for 9, é o time 9 que faz gol, etc. Alguém deve anotar numa tabela, na lousa, o número de gols de cada time. Após 50 lançamentos acaba o jogo e ganha o time com mais gols. ***Importante****: transcreva em seu caderno os resultados da lousa para análise posterior. Além disso, dê sua opinião sobre esta questão: o time vencedor ganhou apenas por ter mais sorte ?*



- Há 6 resultados possíveis para cada dado:

DADO 2 / DADO 1	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

- Juntos, os dois dados produzem 36 possibilidades. Na tabela, consta a soma dos pontos em cada uma dessas possibilidades:

DADO 2 / DADO 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Figura 4.1.3.6, p.150, livro do 8º ano, esquema do jogo “Soma da sorte”

Jogo 2 - Par ou ímpar

Forme dupla com um colega. Um de vocês será PAR e o outro, ÍMPAR. Lançam-se três dados e multiplicam-se os pontos de cada dado. Se o produto for par, ponto para o jogador PAR; se for ímpar, ponto para o jogador ÍMPAR. O jogo termina após oito lançamentos. ***Importante****: anote o resultado da partida (quantos pontos para o PAR e quantos para o ÍMPAR). O professor transcreve os resultados de toda a classe no quadro-de-giz. Registre sua opinião sobre o jogo: a vitória do PAR (ou do ÍMPAR) foi pura sorte ?*

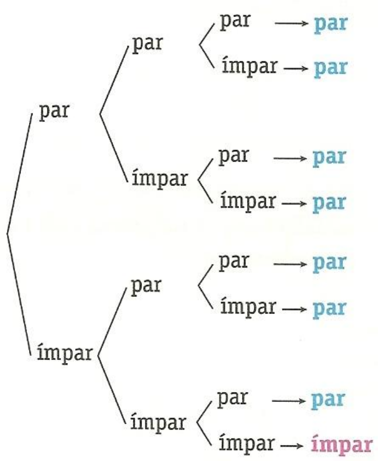


Figura 4.1.3.7, p.151, livro do 8º ano, esquema do jogo "Par ou Ímpar"

Em todos os 5 problemas encontrados, as respostas são números pequenos, e o aluno é estimulado a contá-los através do uso de tabelas e árvores, conforme o problema abaixo, retirado da página 153 do livro do 8º ano:

5*. Em cada urna esférica há três bolinhas, marcadas com os números 1, 2 e 3. Vamos sortear uma bolinha de cada urna, formando assim um número de três algarismos. Todas as bolinhas têm a mesma chance de ser sorteadas.*

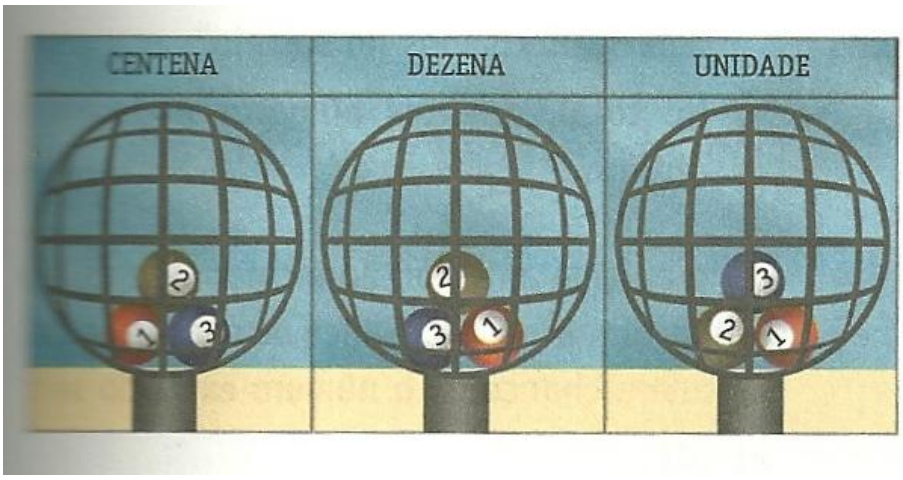


Figura 4.1.3.8, p.153, exercício 5, do livro do 8º ano

(a) Desenhe a árvore que mostra todas as possibilidades de números com o algarismo 1 nas centenas.

(b) Quantos são os números que têm 1 na centena ?

(c) No total, quantos os números podem ser formados nesse sorteio ?

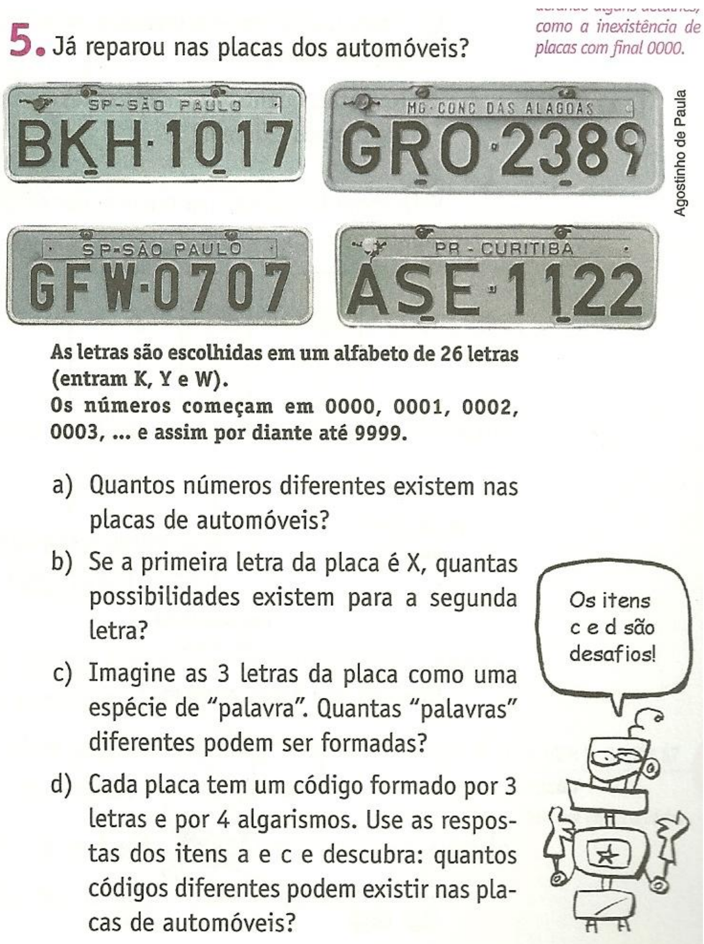
(d) Qual é a chance de o número sorteado ser 111 ?

(e) Qual é a chance de o número sorteado ser 132 ?

(f) Todos esses números têm a mesma chance de ser sorteados ?

Todos os 5 problemas encontrados no livro do 8º ano estão associados ao cálculo de uma probabilidade.

No livro do 9º ano, a Análise Combinatória se encontra no capítulo 5, denominado “Estatística”. O capítulo começa na seção “Contando possibilidades”, com alguns problemas combinatórios que utilizam tabelas, diagramas de árvore ou o princípio multiplicativo em sua resolução. Um desses problemas é o seguinte:



como a inexistência de placas com final 0000.

5. Já reparou nas placas dos automóveis?

As letras são escolhidas em um alfabeto de 26 letras (entram K, Y e W).
Os números começam em 0000, 0001, 0002, 0003, ... e assim por diante até 9999.

a) Quantos números diferentes existem nas placas de automóveis?

b) Se a primeira letra da placa é X, quantas possibilidades existem para a segunda letra?

c) Imagine as 3 letras da placa como uma espécie de "palavra". Quantas "palavras" diferentes podem ser formadas?

d) Cada placa tem um código formado por 3 letras e por 4 algarismos. Use as respostas dos itens a e c e descubra: quantos códigos diferentes podem existir nas placas de automóveis?

Figura 4.1.3.9, p.93 do livro do 9º ano

Em seguida, há uma seção denominada "Estatística e chance", que explora o conceito de probabilidade. Das questões desta seção, há 3 problemas combinatórios associados ao cálculo de probabilidades. Podemos citar como exemplo o problema abaixo, transcrito da página 98 do livro do 9º ano:

***14**. Vou lançar uma moeda três vezes. Em cada lançamento, o resultado pode ser cara ou coroa. Em vez de encontrar todas as possibilidades desses lançamentos, procure usar um raciocínio multiplicativo.*

(a) Qual é a chance de o resultado ser cara no primeiro lançamento e também no segundo ?

(b) Qual é a chance de o resultado dos três lançamentos ser cara - cara - cara ?

(c) Para você ter exatamente duas caras nos três lançamentos, o resultado tem de ser um destes:

cara - cara - coroa, cara - coroa - cara, coroa - cara - cara

Como todos os três têm a mesma chance de ocorrer, qual é a probabilidade de obter

exatamente duas caras ?
(d) Qual é a chance de haver pelo menos uma cara (também pode haver duas ou três) em três lançamentos ?
(e) Invente mais uma pergunta baseando-se nos dados deste problema e dê para seu colega resolver. Depois, você corrige.

A tabela abaixo resume quantitativamente os problemas combinatórios encontrados, categorizados como associados à probabilidade ou não associados à probabilidade:

Tabela 4.1.3.2 Associação entre problemas combinatórios e probabilidade

Ano	Não associados à probabilidade	Associados à probabilidade
6º	10	0
7º	18	0
8º	0	5
9º	12	3
Total	**40**	**8**

Assim como nas outras coleções analisadas, constatamos que os autores trabalham a combinatória também associada à probabilidade, mas com a maioria dos problemas (aproximadamente 83%) sendo problemas de contagem sem conexão com este assunto.

Quanto à classificação dos problemas pelo Modelo Combinatório Implícito, temos na tabela abaixo o resumo quantitativo, por ano de escolaridade, de nossa análise:

Tabela 4.1.3.3 Classificação dos problemas quanto ao Modelo Combinatório Implícito

Ano	Alocação	Seleção	Partição	Total
6º	4	6	0	10
7º	13	5	0	18
8º	4	1	0	5
9º	9	6	0	15
Total	**30**	**18**	**0**	**48**

Podemos observar na tabela que não foi encontrado nenhum problema envolvendo Partição, e um predomínio dos problemas de Alocação (62,5%) sobre os de Seleção (32,5%). Além disso, há uma quantidade total de problemas combinatórios maior do que a encontrada nas outras coleções.

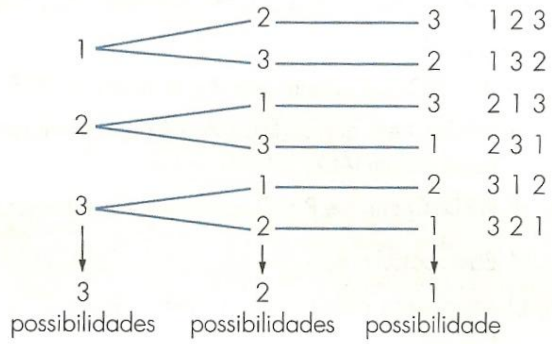
4.2 DOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

4.2.1 DANTE, Luiz Roberto - Matemática - volume único (Ensino Médio)

Neste livro de ensino médio, há um capítulo específico sobre Análise Combinatória. As técnicas de contagem que constam neste capítulo são as Permutações Simples, os Arranjos Simples, as Combinações Simples e as Permutações com Repetição. O Princípio Multiplicativo é apresentado no início do capítulo, e comparado com outras formas diretas de contar (como o uso de uma enumeração através da escrita direta das possibilidades ou através de um diagrama de árvore), para explicitar sua vantagem quando o objetivo é apenas verificar a quantidade de possibilidades, sem especificar quais são essas possibilidades.

O autor apresenta exemplos resolvidos através do Princípio Multiplicativo para deduzir as fórmulas de cada uma das técnicas trabalhadas. Após isso, há sempre pelo menos um exemplo de cada uma das técnicas mencionadas, em que o problema é resolvido com fórmula e sem fórmula, conforme podemos observar nos exemplos abaixo:

1º) Quantos números de 3 algarismos (sem repeti-los num mesmo número) podemos formar com os algarismos 1, 2 e 3? Podemos resolver por tentativa. Assim temos: 123, 132, 213, 231, 312 e 321. Concluímos então que são seis os números procurados. Podemos também fazer uma árvore de possibilidades:



Pelo princípio fundamental da contagem temos $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ possibilidades.

Observe que a *ordem dos algarismos* é muito importante. Todos os números diferem entre si pela ordem de seus algarismos.

Figura 4.2.1.1, p. 285, contagem do número de permutações simples, antes da definição do fatorial de um número natural

3º) De quantas maneiras 5 meninos podem sentar-se num banco que tem apenas 3 lugares?

1ª maneira: usando a fórmula

Estamos interessados nos agrupamentos ordenados de 3 elementos, retirados de 5 elementos, ou seja:

$$A_{5,\,3} = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

Portanto, há 60 maneiras possíveis.

2ª maneira: sem usar a fórmula

5 meninos são possíveis para o 1º lugar do banco, 4 para o 2º e 3 para o 3º. Então, são $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ possibilidades.

Figura 4.2.1.2, p. 288, exemplo resolvido envolvendo a contagem do número de arranjos simples

2ª De quantas maneiras diferentes um técnico pode escalar seu time de basquete tendo à sua disposição 12 atletas que jogam em qualquer posição?

1ª maneira: usando a fórmula

Procuramos o número total de subconjuntos (ou combinações) com 5 elementos tirados de um conjunto de 12 elementos. A ordem não importa; cada subconjunto difere um do outro apenas pela natureza dos seus elementos. Assim, procuramos:

$$C_{12,5} = \frac{A_{12,5}}{5!} = \frac{\cancel{12}\cdot 11 \cdot \cancel{10}\cdot 9 \cdot 8}{\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot 1} =$$

$$= 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$$

Portanto, podemos formar 792 times de basquete diferentes com 12 atletas.

2ª maneira: sem usar a fórmula

São 5 jogadores a serem escolhidos entre 12. Então, teríamos $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$ possibilidades se estivéssemos calculando um arranjo. Como é uma combinação, então devemos dividir o resultado pelo fatorial dos elementos escolhidos, que foram 5 elementos:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5!} = 792 \text{ possibilidades.}$$

Figura 4.2.1.3, p. 291, exemplo resolvido envolvendo a contagem do número de combinações simples

Ao final de cada explanação teórica, há um conjunto de exercícios (para que o aluno trabalhe com as notações e simplificações envolvendo os fatoriais) e problemas, apresentados logo após o desenvolvimento de cada uma das técnicas. No final do capítulo são apresentados problemas “misturados”, em que o aluno deve usar o Princípio Multiplicativo ou identificar a(s) técnica(s) de contagem mais adequada(s) para resolvê-los.

Observamos ainda que não há um enunciado especifico sobre o Princípio Aditivo, embora o autor o utilize em alguns exemplos resolvidos, e o mesmo seja necessário na resolução de alguns problemas propostos. Tal fato parece sugerir que o uso deste princípio é algo “natural”, e surgirá espontaneamente para o aluno e para o professor, quando da resolução dos problemas.

Além disso, há um capítulo específico sobre Probabilidade (seguinte ao capítulo sobre Análise Combinatória). Devido a este fato, não há problemas envolvendo probabilidade no capítulo de combinatória. Por isso, incluímos também a análise do capítulo de probabilidade em nossa pesquisa, com vistas a identificar a existência de problemas sobre o assunto em que a combinatória seja uma ferramenta de resolução.

Na tabela abaixo, quantificamos os problemas de seleção, alocação e partição encontrados:

Tabela 4.2.1.1: Classificação dos problemas quanto ao Modelo Combinatório Implícito (as porcentagens estão em itálico)[3]

Situação	Frequência
Alocação	34 *31,5*
Seleção	71 *65,7*
Partição	3 *2,8*
Total	**108** ***100***

Podemos observar a partir da tabela que a maioria dos problemas encontrados é de Seleção. Os problemas de Partição, embora existam, são minoria (aproximadamente 3% do total). Quanto às técnicas de contagem encontradas, identificamos Permutações Simples e com repetição, Arranjos Simples e com repetição, e Combinações Simples. Como não há menção na parte teórica sobre Arranjos com repetição, supomos que o aluno deva resolvê-los usando o princípio multiplicativo e os mesmos estejam presentes para evidenciar ao aluno que as técnicas mencionadas explicitamente, embora úteis, não bastam para resolver qualquer problema de contagem.

[3] Como a quantidade de problemas encontrados nos livros de Ensino Fundamental foi pequena, não incluímos nas tabelas com os dados dos mesmos os valores na forma percentual.

A tabela abaixo apresenta os problemas encontrados categorizados quanto à técnica necessária para sua resolução. Dividimos os problemas em três categorias: modelos prontos, quando a mera aplicação de uma fórmula era suficiente para resolvê-lo; princípio multiplicativo, quando o mesmo se fazia necessário com ou sem aplicação de fórmulas; e princípio aditivo, quando era necessário simplesmente aplicá-lo ou dividir o problema em partes para depois somar os resultados parciais.

Tabela 4.2.1.2: Classificação dos problemas quanto à técnica (as porcentagens estão em itálico)

Técnica	Frequência
Princípio Multiplicativo	29 *26,9*
Princípio Aditivo	11 *10,2*
Modelo Pronto	68 *62,9*
Total	**108** ***100***

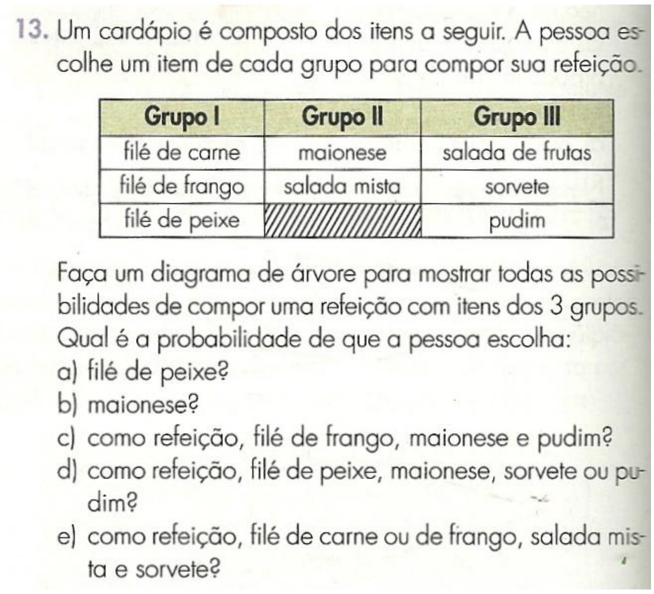
Podemos perceber que a maior parte dos problemas encontrados pode ser solucionada apenas aplicando-se diretamente um dos modelos apresentados no livro.

Um resumo do quantitativo de problemas associados ou não a uma probabilidade, se encontra na tabela a seguir:

Tabela 4.2.1.3: Classificação dos problemas quanto à sua associação ou não com probabilidade (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	Frequência
Associados à probabilidade	8 *7,4*
Não associados à probabilidade	100 *92,6*
Total	**108** ***100***

Podemos observar a partir desta tabela, que a maior parte dos problemas de combinatória deste livro é vista sem associação direta ao cálculo de uma probabilidade. Além disso, apesar de os problemas de probabilidade se encontrarem em um capítulo logo após o de combinatória, as ferramentas e técnicas desenvolvidas no capítulo anterior não são muito exigidas dos alunos para a resolução desses problemas. Em geral, é solicitado que o estudante faça uso da construção de árvores de possibilidades, como mostra a questão abaixo:



13. Um cardápio é composto dos itens a seguir. A pessoa escolhe um item de cada grupo para compor sua refeição.

Grupo I	Grupo II	Grupo III
filé de carne	maionese	salada de frutas
filé de frango	salada mista	sorvete
filé de peixe		pudim

Faça um diagrama de árvore para mostrar todas as possibilidades de compor uma refeição com itens dos 3 grupos. Qual é a probabilidade de que a pessoa escolha:

a) filé de peixe?
b) maionese?
c) como refeição, filé de frango, maionese e pudim?
d) como refeição, filé de peixe, maionese, sorvete ou pudim?
e) como refeição, filé de carne ou de frango, salada mista e sorvete?

Figura 4.2.1.4, pág. 302, seção "Exercícios propostos", do capítulo de Probabilidade

4.2.2 IEZZI, Gelson et al - Matemática - volume único (Ensino Médio)

O livro inicia o assunto apresentando os três problemas abaixo (p. 356), visando ilustrar um dos objetos de investigação da Análise Combinatória, a contagem de certas configurações:

- *De quantas maneiras distintas cinco pessoas podem ser colocadas em fila indiana ?*
- *De quantos modos diferentes pode ocorrer o resultado do sorteio dos números da Mega Sena ?*
- *De quantas formas distintas cinco amigos podem ocupar os lugares de um automóvel se apenas dois deles sabem dirigir ?*

Logo a seguir, os autores utilizam o seguinte problema para apresentar a definição do Princípio Multiplicativo e a montagem de um diagrama de árvore em que são escritas e contadas todas as possibilidades de solução para o problema dado:

Os alunos da 3ª série do ensino médio de uma escola de Salvador decidiram fazer uma viagem de confraternização. Uma comissão de alunos procurou uma agência de turismo, que ofereceu as seguintes opções de destino: Porto Seguro, Ilhéus e Aracaju. Os meios de transporte disponíveis eram ônibus e avião. De quantos modos distintos poderá ser montada a viagem ? (p. 356)

Após dividir a resolução do problema em duas etapas (escolha da cidade de destino, com 3 opções, e escolha do meio de transporte, com 2 opções), os autores organizam essas decisões no esquema abaixo:

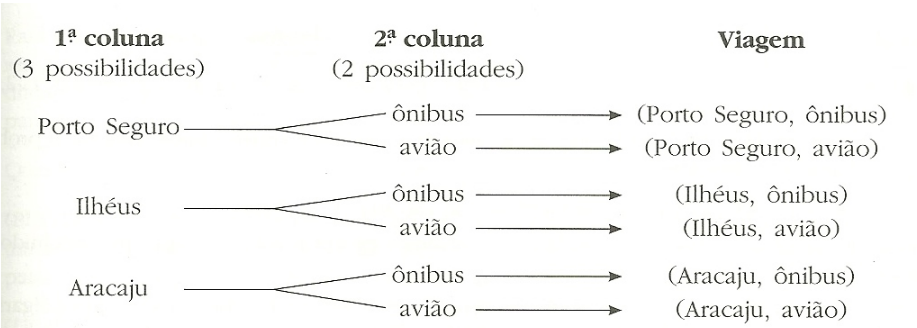


Figura 4.2.2.1 p. 357, exemplo de enumeração utilizando árvore de possibilidades

Depois de enumerar todas as soluções e chegar à solução através de uma contagem direta, os autores resolvem o problema com o Princípio Multiplicativo, e o definem de uma maneira mais geral:

Suponhamos que uma ação seja constituída de duas etapas sucessivas. A 1ª etapa pode ser realizada de n maneiras distintas. Para cada uma dessas possibilidades, a 2ª etapa pode ser realizada de m maneiras distintas. Então, o número de possibilidades de se efetuar a ação completa é dado por $n \times m$. (p. 357)

Após a apresentação de mais três exemplos, o livro apresenta uma lista de 16 problemas. Tal lista é anterior à parte do livro que introduz as técnicas de contagem, com o objetivo de que o aluno utilize o Princípio Multiplicativo para resolver os problemas.

A seção seguinte apresenta a notação de fatorial, com dois exemplos resolvidos e quatro exercícios em que os objetivos são a simplificação e a resolução de equações envolvendo expressões contendo fatoriais.

Logo a seguir vem a definição de Arranjos Simples, que é motivada com o exemplo abaixo:

O Comitê Olímpico Brasileiro selecionou quatro cidades, São Paulo (SP), Rio de Janeiro (RJ), Porto Alegre (POA) e Belo Horizonte (BH), como candidatas a sede de dois eventos: os Jogos Pan-americanos e os Jogos Olímpicos. De quantos modos distintos o Comitê poderá lançar tais candidaturas se uma cidade só pode sediar um dos eventos ? (p. 361)

Todos os possíveis arranjos são escritos na tabela seguinte, e ao final, os autores calculam a quantidade de arranjos via Princípio Multiplicativo. Em seguida os autores apresentam a definição geral de arranjos simples, bem como deduzem a fórmula para calcular o seu número.

Jogos Pan-americanos	Jogos Olímpicos
SP	Rio
SP	POA
SP	BH
Rio	SP
Rio	POA
Rio	BH
POA	SP
POA	Rio
POA	BH
BH	SP
BH	Rio
BH	POA

Figura 4.2.2.2, p. 361, enumeração dos casos possíveis utilizando uma tabela

O exemplo a seguir vem logo após a dedução da fórmula, e os autores apresentam a resolução do problema através da utilização da fórmula e do Princípio Multiplicativo, denominado Princípio Fundamental da Contagem (PFC):

Exemplo 6

Ao se cadastrar em um portal eletrônico de compras, o usuário deve criar uma senha formada por duas letras distintas (entre as 26 do alfabeto) seguidas por dois algarismos distintos. Quantas senhas podem ser criadas nessas condições?

A senha BG 18 é diferente da senha GB 81, isto é, *importa a ordem* em que as letras e os algarismos são escolhidos. Trata-se, portanto, de um *arranjo*.

- Para a escolha das letras, há $A_{26,\,2} = \frac{26!}{24!} = 650$ possibilidades.
- Para a escolha dos algarismos, temos $A_{10,\,2} = \frac{10!}{8!} = 90$ possibilidades.

Logo, pelo PFC, há ao todo $650 \cdot 90 = 58\,500$ senhas.
Poderíamos, alternativamente, fazer:

$$\underbrace{26 \cdot 25}_{\text{letras}} \quad \underbrace{10 \cdot 9}_{\text{algarismos}} = 58\,500$$

Figura 4.2.2.3, p.362, exemplo de problema de Arranjos Simples

O ponto de partida para a definição das Permutações Simples são os anagramas. Através da escrita de todos os anagramas da palavra PAZ, os autores definem permutações simples e mostram com o Princípio Multiplicativo como calcular o seu número. A dedução da fórmula para esse cálculo é feita considerando as Permutações Simples como sendo um caso particular de Arranjos Simples, em que cada permutação de n elementos é um arranjo desses n elementos tomados n a n:

O número total de permutações de n elementos, indicado por P_n, é dado por:

$$P_n = A_{n,\,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Figura 4.2.2.4, p.364, dedução da fórmula do número de permutações simples

Após a apresentação de um exemplo resolvido, há uma lista com 12 problemas envolvendo permutações simples, para serem resolvidos pelos alunos.

Os autores definem as Combinações Simples explorando o seguinte exemplo:

Para organizar um coquetel de lançamento de um produto, o departamento de eventos de uma empresa terá de escolher três entre cinco salgadinhos que um bufê oferece: coxinha (C), empadinha (E), rissole (R), quibe (Q) e minibauru (B).

Como poderão ser escolhidos os três salgadinhos que serão oferecidos no coquetel?

Escolher, por exemplo, {coxinha, quibe, rissole} é o mesmo que escolher {rissole, coxinha, quibe}, pois em qualquer caso esses três serão os salgadinhos oferecidos, *não* importando a ordem de escolha.

Acompanhe então as dez opções para escolher os três salgadinhos:

$$\{C, E, R\}, \{C, E, Q\}, \{C, E, B\}, \{C, R, Q\}, \{C, R, B\},$$
$$\{C, Q, B\}, \{E, R, Q\}, \{E, R, B\}, \{E, Q, B\}, \{R, Q, B\}$$

Figura 4.2.2.5, p.366, exemplo inicial de um problema de Combinações Simples

A seguir, os autores utilizam o Princípio Multiplicativo para resolver o problema, evidenciando que não basta apenas efetuar a multiplicação $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$, pois procedendo assim estaríamos contando cada opção de escolha dos salgadinhos 6 vezes (que é o número de permutações dos três tipos de salgadinhos escolhidos, permutações estas que não precisam ser consideradas nesta situação). Assim é necessário dividir o resultado encontrado por 6, para descontar o que foi contado a mais. Os autores deduzem a fórmula geral para calcular o número de combinações simples de n elementos tomados k a k, como sendo o número de arranjos desses n elementos tomados k a k, dividido pelo número de permutações simples dos k elementos escolhidos.

A última configuração apresentada no livro é a das Permutações com Repetição, através do cálculo do número de anagramas da palavra CASA. Após evidenciar que a troca de posição entre as duas letras A não leva a uma nova permutação, os autores mostram cinco exemplos de palavras com letras repetidas: dois em que há uma letra que se repete (PARAÍBA e ATRASADO), e três em que há mais do que uma letra que se repete (PASSARELA, RESSACA e TERRITÓRIO). Com isso, deduzem a fórmula para o cálculo do número de Permutações com Repetição como sendo o número de Permutações Simples dos n elementos de um conjunto, dividido pelo produto dos números de Permutações Simples de cada elemento que se repete.

Todos os exercícios dessa seção são sobre calcular o número de anagramas de palavras em que há a repetição de letras, com exceção dos dois exercícios transcritos abaixo:

Uma moeda é lançada 5 vezes. De quantos modos distintos podem ser obtidas 2 caras e 3 coroas ? (p. 371, problema 61)

Uma prova contém 10 testes que devem ser respondidos com V ou F. De quantos modos distintos ela pode ser resolvida assinalando-se 3 testes com V e 7 testes com F ? (p. 371, problema 62)

Ao final do capítulo, há uma seção denominada “Testes de Vestibulares”, com 26 problemas envolvendo as técnicas estudadas, e uma seção denominada “Desafios”, que apresenta as duas questões transcritas abaixo:

Quantos múltiplos de 3, compostos de três algarismos distintos, podem ser formados com os algarismos 2, 3, 4, 5 e 7 ? (p. 374, Desafio 1)

(Unirio-RJ) Uma pessoa quer comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo-se que podem ser compradas de zero a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes esta compra pode ser feita ? (p. 374, Desafio 2)

Uma solução da segunda questão da seção “Desafios” corresponde a uma Combinação com Repetição, configuração que não é explorada pelos autores nas seções anteriores. Acreditamos que o objetivo deste problema seja chamar a atenção para o fato de que as técnicas estudadas anteriormente não abarcam todos os tipos de problemas de contagem, e por isso não substituem a compreensão e uso do Princípio Multiplicativo na resolução de problemas combinatórios.

Encontramos ainda treze problemas combinatórios no capítulo seguinte, sobre Probabilidade.

A tabela abaixo contém um resumo quantitativo dos problemas encontrados classificados segundo o Modelo Combinatório Implícito:

Tabela 4.2.2.1 : Classificação dos problemas encontrados quanto ao Modelo Combinatório Implícito (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	Frequência
Seleção	78 *88,6*
Alocação	10 *11,4*
Partição	0 *0*
Total	**88** ***100***

Podemos observar que a grande maioria dos problemas são de Seleção. Além disso, não foi encontrada nenhuma questão de Partição dentre os 88 problemas combinatórios.

Quanto às estratégias de resolução, assim como no livro de DANTE (Ensino Médio, volume único), não há uma definição específica do Princípio Aditivo, embora o mesmo seja necessário para resolver vários dos problemas encontrados, conforme a tabela a abaixo:

Tabela 4.2.2.2: Classificação dos problemas quanto à técnica (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	Frequência
Princípio Multiplicativo	24 27,2
Princípio Aditivo	18 20,5
Modelos Prontos	46 52,3
Total	**88** **100**

O problema abaixo ilustra um exemplo em que há a necessidade de uso do Princípio Aditivo:

Deseja-se formar números divisíveis por 5, compostos de quatro algarismos distintos. Qual é a quantidade de números existentes nessa condição ? Sugestão: analise dois casos: quando o número termina por zero e quando termina por 5. (p. 358, exercício 6)

Neste problema, o aluno precisa perceber que, ao se separar o problema em duas etapas distintas, que não ocorrem simultaneamente, é preciso somar o número de soluções encontrados em cada etapa para se chegar ao total de soluções da questão proposta.

Um resumo do quantitativo de problemas associados ou não a uma probabilidade, se encontra na tabela a seguir:

Tabela 4.2.2.3: Classificação dos problemas quanto à sua associação ou não com probabilidade (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	**Frequência**
Associados à probabilidade	13 *14,8*
Não associados à probabilidade	75 *85,2*
Total	**88** ***100***

Assim como no livro de Dante, a maioria dos problemas encontrados não estavam relacionados a uma probabilidade. Um exemplo de problema associado a uma probabilidade está exemplificado abaixo:

Na tradicional *loteria esportiva* há 13 jogos. Em cada jogo aposta-se em um dos times (coluna 1 ou coluna 2) ou em empate (coluna do meio). A aposta mínima é de um duplo, isto é, num único jogo assinalam-se 2 opções, ao preço de R$ 0,50. Há também o palpite triplo: as 3 colunas são assinaladas para um determinado jogo. Apostar em 1 triplo custa R$ 0,75.

a) Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos com a aposta mínima?

b) Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos apostando 1 triplo?

c) Na aposta máxima, são assinalados 5 duplos e 3 triplos ao preço de R$ 216,00. Qual é a probabilidade de se acertarem os 13 jogos com a aposta máxima? Há proporcionalidade entre os valores apostados e as chances de acerto, considerando-se as apostas mínima e máxima?

Figura 4.2.2.6, p. 387, exercício proposto em que é necessário o uso da Análise Combinatória

Notamos que este problema necessita do uso do raciocínio combinatório para que seja possível contar todos os resultados possíveis para os 14 jogos. Porém, neste caso, chamou nossa atenção o fato de os autores considerarem que todos esses resultados são equiprováveis, o que não é razoável de se supor. De fato, se um time se encontra na coluna 1 ele é o “time da casa” (ou seja, joga em seu estádio ou em um estádio em que sua torcida é maioria). Se o time se encontra na coluna 2, então ele é o time visitante, jogando portanto “fora de casa” (em um estádio em que sua torcida não é maioria). Além dessa informação interferir na probabilidade do time vencer ou perder, outros fatores precisam ser levados em consideração, como se o time joga completo ou desfalcado de seus principais jogadores.

4.3 Comparação entre os resultados encontrados na análise dos livros

As tabelas abaixo apresentam um resumo quantitativo do que observamos nos livros didáticos analisados, em relação ao contexto principal dos problemas:

Tabela 4.3.1: Classificação geral dos problemas quanto ao Modelo Combinatório Implícito nos livros de Ensino Fundamental e Médio (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	**Frequência (Ensino Fundamental)**	**Frequência (Ensino Médio)**
Seleção	37 *35,6*	149 *76,02*
Alocação	67 *64,4*	44 *22,45*
Partição	0 *0*	3 *1,53*
Total	**104** ***100***	**196** ***100***

A partir desta tabela, podemos observar que tanto nos livros do Ensino Fundamental quanto nos livros do Ensino Médio os problemas de Partição foram minoria. Já os problemas de Seleção foram a grande maioria nos livros do Ensino Médio, seguidos dos problemas de Alocação, situação inversa à observada nos livros do Ensino Fundamental. Atribuímos essa diferença ao fato de boa parte dos problemas observados nos livros de Ensino Fundamental serem sobre a formação de números com uma certa quantidade de dígitos, escolhidos a partir de um conjunto de algarismos. Tais problemas, classificados como de Alocação, também foram encontrados nos livros de Ensino Médio, porém em menor número. Os problemas nos livros de Ensino Médio apresentaram uma maior variabilidade quanto à natureza dos elementos que deveriam ser contados.

Para resolver um problema de seleção (pela sua própria definição), bastam as técnicas de Arranjos (com ou sem repetição) e de Combinações (com ou sem repetição). Já os problemas de Alocação e Partição, que podem ser traduzidos bijetivamente de uma forma para a outra, segundo DUBOIS, se revelam mais ricos do ponto de vista da variedade de técnicas de contagem necessárias à sua resolução. Assim, esperávamos que problemas envolvendo estas duas ideias (Alocação e Partição) fossem maioria em livros didáticos de Ensino Médio. E embora problemas envolvendo estas duas idéias possam ser traduzidos de um tipo para outro, para o aluno o que fica é a idéia principal vinculada ao contexto do problema. Assim, deveria haver uma quantidade maior de problemas em que ficasse clara a idéia de partição em seu contexto. Isso não foi observado nos livros didáticos analisados, onde uma minoria dos problemas encontrados se dão em um contexto de partição.

A tabela a seguir relaciona a quantidade de problemas encontrados nas coleções de ensino fundamental e médio, e que estão ou não associados a um cálculo de probabilidade:

Tabela 4.3.2 Classificação dos problemas encontrados quanto à associação a uma probabilidade, nos livros de Ensino Fundamental e Médio (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	**Frequência (Ensino Fundamental)**	**Frequência (Ensino Médio)**
Associados a uma probabilidade	15 *14,4*	21 *10,7*
Não associados a uma probabilidade	89 *85,6*	175 *89,3*
Total	**104** ***100***	**196** ***100***

Observando a tabela podemos notar que os problemas combinatórios encontrados envolvendo probabilidade foram minoria, tanto nos livros de Ensino Fundamental quanto nos livros de Ensino Médio. Embora a Análise Combinatória tenha a sua importância própria enquanto área da Matemática, esperávamos encontrar um número maior de problemas relacionando-a à Probabilidade nos livros de Ensino Médio, o que ocorreu em termos absolutos, mas não em termos relativos.

A próxima tabela mostra um resumo da classificação dos problemas encontrados nos livros do ensino médio, quanto às técnicas necessárias à sua resolução:

Tabela 4.3.3 Classificação dos problemas encontrados nos livros de Ensino Médio quanto às técnicas necessárias à resolução (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	**Frequência**
Princípio Multiplicativo	53 *27*
Princípio Aditivo	29 *14,8*
Modelos Prontos	114 *58,2*
Total	**196** ***100***

Podemos perceber nesta tabela que mais da metade dos problemas encontrados nos livros de Ensino Médio analisados podiam ser resolvidos apenas aplicando imediatamente uma das fórmulas dadas.

Além disso, o número de problemas que necessitavam da aplicação do Princípio Aditivo em algum momento é alto, considerando que em nenhum dos dois livros observados há um enunciado específico sobre este conceito. Em ambos, há uma definição sobre o número de elementos da união de dois conjuntos, feita logo no início do capítulo sobre Conjuntos (que é o primeiro capítulo, nas duas obras). Porém, como esse assunto é estudado brevemente, e no início do 1º ano do Ensino Médio, pensamos que os autores deveriam retornar ao mesmo no capítulo sobre Análise Combinatória, enfatizando o seu significado e possibilidades de utilização no contexto de resolução de problemas de contagem, o que não é feito.

4.4 DAS PROVAS E TESTES DE LARGA ESCALA

Na análise das questões das provas e dos testes de larga escala, classificamos as questões segundo o Modelo Combinatório Implícito (Seleção, Alocação e Partição), e segundo a técnica necessária para a sua resolução. Assim como nos livros didáticos, as técnicas foram classificadas como “Modelos Prontos” quando a simples aplicação de uma das fórmulas comumente estudadas no Ensino Médio solucionava a questão. Além disso, também classificamos se os problemas estavam ou não associados a um cálculo de probabilidade.

4.4.1 Provas de vestibular da UFRJ

Nas provas de vestibular da UFRJ encontramos questões de combinatória em todos os anos analisados (2006 a 2010), em um total de 7 questões. Os problemas não se restringem aos modelos comumente encontrados nos livros de ensino médio analisados, e há questões de combinatória associadas ou não ao cálculo de probabilidades. Transcrevemos abaixo dois dos problemas analisados:

__3__. João criou uma senha de 4 algarismos para o segredo de seu cofre. Mais tarde, quando foi abrir o cofre, João percebeu que não lembrava mais qual era a senha, mas sabia que os algarismos eram 1, 3, 8 e 9. Ele, então, resolveu escrever todos os números possíveis formados pelos 4 algarismos e, em seguida, tentar abrir o cofre sorteando ao acaso, um a um, os números de sua lista, sem repetir os números já testados.

(a) *Determine quantos números João escreveu.*

(b) *Calcule a probabilidade de que ele abra o cofre na 12ª tentativa.*

(Vestibular UFRJ 2009, Prova 2, 3ª questão: problema de Alocação, com Probabilidade)

Questão 4 *Nove pessoas serão distribuídas em três equipes de três para concorrer a uma gincana.*

O número de maneiras diferentes de formar as três equipes é menor do que 300?

(Vestibular UFRJ 2006, 2° dia de provas, 4ª questão: problema de Partição, sem Probabilidade)

Um resumo quantitativo do que encontramos está representado na tabela abaixo:

Tabela 4.4.1.1: Classificação dos problemas encontrados quanto ao Modelo Combinatório Implícito e à associação ou não com probabilidade

	Associado à probabilidade	**Não associado à probabilidade**	**Total**
Alocação	2	4	**6**
Seleção	0	0	**0**
Partição	0	1	**1**
Total	**2**	**5**	**7**

Quanto ao Modelo Combinatório Implícito, é possível perceber que a maioria das questões encontradas era de Alocação, e não encontramos problemas de Seleção. Também percebemos que os problemas associados à Probabilidade foram minoria entre as questões analisadas. A tabela seguinte apresenta os problemas encontrados classificados quanto às técnicas necessárias para a sua solução:

Tabela 4.4.1.2: classificação dos problemas encontrados na UFRJ quanto às técnicas (as porcentagens estão em itálico)

Técnica	Frequência
Princípio Multiplicativo	3 *42,8*
Princípio Aditivo	2 *28,6*
Modelos Prontos	2 *28,6*
Total	**7** ***100***

4.4.2 Provas de vestibular da UERJ

Nas provas de vestibular da UERJ, assim como na UFRJ, encontramos questões de combinatória em todos os anos analisados, em um total de 7 questões. Também há questões de combinatória associadas ou não ao cálculo de probabilidades. Encontramos uma questão associada ao cálculo de um termo do Binômio de Newton, que, por não estar caracterizada como um problema, sendo apenas uma questão de aplicação de fórmula para descobrir um termo, não incluímos em nossa análise. A tabela abaixo mostra um resumo do que encontramos:

Tabela 4.4.2.1: Classificação dos problemas encontrados quanto ao Modelo Combinatório Implícito e à associação ou não com probabilidade

	Associado à probabilidade	**Não associado à probabilidade**	**Total**
Alocação	2	3	**5**
Seleção	0	1	**1**
Partição	0	0	**0**
Total	**2**	**4**	**6**

Percebemos que nas provas da UERJ, também houve uma maioria de questões de Alocação, além da ausência de questões de

Partição. Os problemas associados à Probabilidade também foram minoria nos vestibulares dessa universidade. Abaixo estão dois exemplos de questões retirados das provas analisadas:

QUESTÃO 22

Com o intuito de separar o lixo para fins de reciclagem, uma instituição colocou em suas dependências cinco lixeiras de diferentes cores, de acordo com o tipo de resíduo a que se destinam: vidro, plástico, metal, papel e lixo orgânico.

Sem olhar para as lixeiras, João joga em uma delas uma embalagem plástica e, ao mesmo tempo, em outra, uma garrafa de vidro.

A probabilidade de que ele tenha usado corretamente pelo menos uma lixeira é igual a:

(A) 25%
(B) 30%
(C) 35%
(D) 40%

Figura 4.4.2.1 Vestibular UERJ, 2° exame de 2006: questão de Alocação, com Probabilidade

Questão **23**

Um estudante possui dez figurinhas, cada uma com o escudo de um único time de futebol, distribuídas de acordo com a tabela:

time/escudo	quantidade de figurinhas idênticas
A	3
B	2
C	1
D	1
E	1
F	1
G	1

Para presentear um colega, o estudante deseja formar um conjunto com cinco dessas figurinhas, atendendo, simultaneamente, aos seguintes critérios:

– duas figurinhas deverão ter o mesmo escudo;

– três figurinhas deverão ter escudos diferentes entre si e também das outras duas.

De acordo com esses critérios, o número máximo de conjuntos distintos entre si que podem ser formados é igual a:

(A) 32
(B) 40
(C) 56
(D) 72

Figura 4.4.2.2 Vestibular UERJ 2009, 2° exame: questão de Seleção, sem Probabilidade

A tabela a seguir resume as técnicas necessárias para a resolução dos problemas encontrados:

Tabela 4.2.2.2: classificação dos problemas encontrados na UERJ quanto às técnicas (as porcentagens estão em itálico)

Técnica de Contagem	Frequência
Princípio Multiplicativo	0 *0*
Princípio Aditivo	1 *16,7*
Modelos Prontos	5 *83,3*
Total	**6** ***100***

Aqui, todos os problemas podiam ser solucionados pelas técnicas encontradas nos livros didáticos e trabalhadas, em geral, pelos professores.

4.4.3 Provas de vestibular da UFF

Diferentemente do que observamos nas provas da UFRJ e da UERJ, a UFF não apresentou questões de combinatória em todos os anos analisados. Foi observado um total de 6 questões. Nos anos em que caíram problemas combinatórios em seu vestibular, alguns estavam associados e outros não a um cálculo de probabilidades. A tabela abaixo resume o que foi observado:

Tabela 4.4.3.1: Classificação dos problemas encontrados na UFF quanto ao Modelo Combinatório Implícito e à associação ou não com probabilidade

	Associado à probabilidade	Não associado à probabilidade	Total
Alocação	2	2	**4**
Seleção	1	1	**2**
Partição	0	0	**0**
Total	**3**	**3**	**6**

Aqui houve um equilíbrio entre as questões envolvendo ou não probabilidade. A predominância de problemas de Alocação sobre os demais se manteve, e não encontramos problemas de Partição. Segue um exemplo de questão encontrada nas provas desta universidade:

53 Determinado provedor de Internet oferece aos seus usuários 15 (quinze) salas de bate-papo. Três usuários decidiram acessar as salas. Cada usuário escolheu, independentemente, uma sala.

Assinale a opção que expressa a probabilidade de os três usuários terem escolhido a mesma sala.

(A) $\frac{1}{15^2}$

(B) $\frac{1}{15^3}$

(C) $\frac{1}{3^3}$

(D) $\frac{3}{15}$

(E) $\frac{3^3}{15^3}$

Figura 4.4.3.1 Vestibular UFF 2006, 1ª fase: questão de Seleção, com Probabilidade

A tabela a seguir organiza os problemas encontrados do ponto de vista das técnicas necessárias à sua resolução:

Tabela 4.4.3.2: Classificação dos problemas encontrados na UFF quanto às técnicas (as porcentagens estão em itálico)

Técnica de Contagem	Frequência
Princípio Multiplicativo	2 *33,3*
Princípio Aditivo	0 *0*
Modelos Prontos	4 *66,7*
Total	**6** ***100***

Assim como nas provas da UERJ, todas as questões encontradas nas provas da UFF podiam ser resolvidas usando as técnicas mais comumente vistas nos livros didáticos.

4.4.4 Provas do ENEM

Nas provas do ENEM analisadas, não encontramos questões de combinatória nos anos de 2006, 2007 e 2008. Assim, a tabela abaixo se refere apenas aos 2 problemas que observamos na prova de 2009 (prova válida)[4]:

Tabela 4.4.4 : Classificação dos problemas encontrados quanto ao Modelo Combinatório Implícito e à associação ou não com probabilidade (as porcentagens estão em itálico)

	Associado à probabilidade	**Não associado à probabilidade**	**Total**
Alocação	0	0	**0**
Seleção	1	1	**2**
Partição	0	0	**0**
Total	**1**	**1**	**2**

As duas questões encontradas são as seguintes:

Questão 165

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de

A uma combinação e um arranjo, respectivamente.
B um arranjo e uma combinação, respectivamente.
C um arranjo e uma permutação, respectivamente.
D duas combinações.
E dois arranjos.

Figura 4.4.4 ENEM 2009, prova válida: questão de Seleção, sem Probabilidade

Questão 171 *A população brasileira sabe, pelo menos intuitivamente, que a probabilidade de acertar as seis dezenas da mega sena não é zero, mas é quase.*

4 No ano de 2009 houve vazamento da prova do ENEM antes de sua realização, por isso a mesma foi cancelada. A prova cancelada foi divulgada, e continha duas questões de combinatória. Mas como não foi a oficial, optamos por incluir em nossa pesquisa os dados referentes apenas à prova oficial (válida).

Mesmo assim, milhões de pessoas são atraídas por essa loteria, especialmente quando o prêmio se acumula em valores altos. Até junho de 2009, cada aposta de seis dezenas, pertencentes ao conjunto $\{01,\ 02,\ 03,\ ...,\ 59,\ 60\}$*, custava R$ 1,50.*

Disponível em www.caixa.gov.br. Acesso em 7 jul. 2009

Considere que uma pessoa decida apostar exatamente R$ 126,00, e que esteja mais interessada em acertar apenas cinco das seis dezenas da mega sena, justamente pela dificuldade desta última. Nesse caso, é melhor que essa pessoa faça 84 apostas de seis dezenas diferentes, que não tenham cinco números em comum, do que uma única aposta com nove dezenas, porque a probabilidade de acertar a quina no segundo caso em relação ao promeiro é, aproximadamente:

(a) $1\frac{1}{2}$ *vez menor* *(b)* $2\frac{1}{2}$ *vezes menor* *(c) 4 vezes menor* *(d) 9 vezes menor* *(e) 13 vezes menor*

Quanto às técnicas de contagem, das duas questões encontradas, a primeira era resolvida através de Arranjos e Combinações Simples, e a segunda através de Combinações Simples. Ambas foram classificadas como Modelos Prontos.

4.4.5 Provas da OBMEP

Na análise das provas da OBMEP, observamos que houve questões de combinatória em todos os anos pesquisados, e em todos os níveis observados, em um total de 15 questões. Um resumo quantitativo do que observamos se encontra na tabela abaixo:

Tabela 4.4.5.1: Classificação dos problemas encontrados na OBMEP quanto ao Modelo Combinatório Implícito e à associação ou não com probabilidade

	Associado à probabilidade	**Não associado à probabilidade**	**Total**
Alocação	0	7	**7**
Seleção	2	6	**8**
Partição	0	0	**0**
Total	**2**	**13**	**15**

Algumas questões, tanto na primeira fase quanto na segunda fase, aparecem em provas de níveis diferentes. Assim, para efeito da elaboração da tabela anterior, as mesmas só foram contadas uma vez. Podemos perceber que houve um equilíbrio entre questões de Alocação e de Seleção, e não foram encontrados problemas envolvendo Partição. Também percebemos que a Probabilidade está presente na minoria dos problemas combinatórios analisados. Abaixo há dois exemplos retirados das provas analisadas:

***14**. Carolina tem três cartões brancos numerados de 1 a 3 e três cartões pretos, também numerados de 1 a 3. Ela escolheu, ao acaso, um cartão branco e um preto. Qual é a probabilidade de a soma dos números dos cartões escolhidos ser par ?*

A) $\frac{3}{5}$ ***B)*** $\frac{5}{9}$ ***C)*** $\frac{1}{2}$ ***D)*** $\frac{2}{3}$ ***E)*** $\frac{3}{4}$

OBMEP 2010, Nível 3, 1ª fase: questão de Seleção, com Probabilidade

7. Dois casais de namorados vão sentar-se em um banco de uma praça. Em quantas ordens diferentes os quatro podem sentar-se no banco, de modo que cada namorado fique ao lado de sua namorada?

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4
(E) 8

Figura 4.4.5.1 OBMEP 2006, Nível 1, 1ª fase: questão de Alocação, sem Probabilidade

As técnicas necessárias à resolução das questões estão apresentadas na tabela abaixo:

Tabela 4.4.5.2: Classificação dos problemas da OBMEP quanto às técnicas (as porcentagens estão em itálico)

Técnica de Contagem	Frequência
Princípio Multiplicativo	4 *26,7*
Princípio Aditivo	4 *26,7*
Modelos Prontos	7 *46,6*
Total	**15** ***100***

Quase a metade nas questões encontradas podia ser resolvida apenas utilizando uma das fórmulas a que os alunos costumam ser apresentados. Mas no caso da OBMEP, acreditamos que não era essa a intenção dos elaboradores das questões, já que algumas delas também estão presentes nas provas de Nível I e II (de Ensino Fundamental).

4.4.6 Comparação entre os resultados encontrados na análise das provas

A tabela a seguir resume quantitativamente o que observamos quanto ao contexto dos problemas encontrados, classificados em problemas de Seleção, Alocação e Partição:

Tabela 4.4.6.1: Resumo quantitativo dos problemas encontrados nas provas, classificados quanto ao Modelo Combinatório Implícito (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	Frequência (sem OBMEP)	Frequência (com OBMEP)
Seleção	5 *23,8*	13 *36,1*
Alocação	15 *71,4*	22 *61,1*
Partição	1 *4,8*	1 *2,8*
Total	**21** ***100***	**36** ***100***

Como as provas da OBMEP também são aplicadas a alunos de Ensino Fundamental, dividimos o total de questões nas duas colunas da tabela: uma apenas com as questões de ENEM e dos vestibulares, resolvidas apenas por alunos oriundos do Ensino Médio, e outra que também inclui as questões da OBMEP. Diferentemente do que observamos nos livros didáticos, a maioria das questões encontradas nas provas analisadas foi classificada como de Alocação, considerando as questões da OBMEP ou não. Assim como nos livros didáticos, apesar da tradução possível de problemas de alocação em partição e vice-versa, a quantidade de problemas de partição foi muito pequena em relação ao total, considerando as questões da OBMEP ou não.

A seguinte tabela apresenta o que observamos quanto à quantidade de questões que relacionava o uso das técnicas de contagem para aplicação ou não a um cálculo de probabilidade:

Tabela 4.4.6.2: Classificação dos problemas encontrados nas provas quanto a estar ou não associado a uma probabilidade (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	**Frequência (sem OBMEP)**	**Frequência (com OBMEP)**
Associado a uma probabilidade	8 *38,1*	10 *27,8*
Não associado a uma probabilidade	13 *61,9*	26 *72,2*
Total	**21** ***100***	**36** ***100***

Assim como nos livros didáticos, podemos perceber que a maioria dos problemas combinatórios que encontramos nas provas e anos analisados não estava associado a um cálculo de probabilidade.

A tabela a seguir apresenta nossas observações quanto às técnicas necessárias à resolução dos problemas encontrados:

Tabela 4.4.6.3: Classificação dos problemas encontrados nas provas quanto às técnicas necessárias à resolução (as porcentagens estão em itálico)

Classificação	Frequência (sem OBMEP)	Frequência (com OBMEP)
Princípio Multiplicativo	5 *23,8*	9 *25*
Princípio Aditivo	3 *14,3*	7 *19,4*
Modelos Prontos	13 *61,9*	20 *55,6*
Total	**21** ***100***	**36** ***100***

A tabela acima nos mostra que assim como nos livros, o uso de um modelo pronto resolvia a maioria das questões encontradas, considerando ou não os problemas das provas da OBMEP.

CAPÍTULO 5 - DOS QUESTIONÁRIOS

5.1 Análise Quantitativa

Nesta seção, apresentamos uma análise quantitativa das respostas dos alunos de graduação da UFRJ aos nossos questionários (vide anexos). Foi aplicado um total de 77 questionários a alunos de três turmas de graduação. Duas turmas eram da disciplina Geometria, uma do período diurno e outra do período noturno. A terceira turma era da disciplina Matemática Finita, que aborda tópicos de Análise Combinatória. Nesta turma, o questionário foi aplicado logo em sua primeira aula, de modo que os alunos que responderam o questionário o fizeram antes de voltar a rever as técnicas e problemas combinatórios trabalhados no ensino médio.

Apresentamos a seguir alguns dados do questionário que caracterizam os sujeitos de nossa amostra:

Tabela 5.1.1: População categorizada quanto à modalidade do curso (as porcentagens estão em itálico)

Curso	Frequência
Licenciatura em Matemática	61 *81,3*
Bacharelado em Matemática	14 *18,7*
Outros cursos	0 *0*
Total	**75** ***100***

Na tabela acima percebemos que a maioria dos alunos era do curso de Licenciatura em Matemática. Dos 77 alunos que responderam ao questionário, 2 não incluíram qualquer dado que fornecesse informações sobre sua vida de estudos atual ou anterior, apesar de terem tentado responder às questões. Assim, nas próximas tabelas que dizem respeito à caracterização da amostra, o total de alunos está subtraído desses dois alunos.

A tabela seguinte nos diz o tipo de escola em que os participantes da pesquisa estudaram no Ensino Fundamental :

Tabela 5.1.2: População categorizada quanto às escolas de origem do Ensino Fundamental (as porcentagens estão em itálico)

Escolas de Ensino Fundamental	Frequência
Particulares	47 *62,7*
Municipais	9 *12*
Estaduais	10 *13,3*
Federais	1 *1,3*
Mistas	8 *10,7*
Total	**75** ***100***

Podemos perceber na tabela que a maior parte da amostra é composta de alunos que cursaram o Ensino Fundamental em escolas e colégios particulares. A categoria "Mistas" inclui alunos que estudaram parte de sua vida em escolas de um tipo, e parte em outro.

A próxima tabela é similar à anterior, fornecendo as informações sobre o tipo de escola em que os atuais alunos de graduação estudaram quando cursavam o Ensino Médio:

Tabela 5.1.3: População categorizada quanto às escolas de origem do Ensino Médio (as porcentagens estão em itálico)

Escolas de Ensino Médio	Frequência
Particulares	36 *48*
Estaduais	19 *25,3*
Federais	16 *21,3*
Mistas	4 *5,3*
Total	**75** ***100***

Podemos perceber nessa tabela que, no Ensino Médio, houve um aumento do número de alunos que cursou esta modalidade de ensino em escolas públicas (46,6%, sem considerar a categoria “Mistas”) em relação ao Ensino Fundamental (26,6%, também sem considerar a categoria “Mistas”).

A tabela a seguir traz informações quanto aos livros didáticos de matemática utilizados pelos sujeitos da pesquisa, quando alunos do Ensino Fundamental:

Tabela 5.1.4: População categorizada quanto ao livro didático utilizado no Ensino Fundamental (as porcentagens estão em itálico)

Livro utilizado no Ensino Fundamental	Frequência
Matemática e Realidade, Gelson Iezzi et al	5 *6,7*
Matemática para Todos, Imenes e Lellis	6 *8*
Tudo é Matemática, Dante	3 *4*
Outros	6 *8*
Não lembra	49 *65,3*
Não usou livro didático	6 *8*
Total	**75** ***100***

Podemos perceber que 18,7% dos graduandos utilizou um dos livros de matemática de Ensino Fundamental que analisamos neste trabalho. A maioria dos 8% de alunos enquadrados na categoria “Outros” afirmou ter utilizado apostilas da instituição em que estudaram, enquanto a maior parte da amostra, de 65,3%, afirmou não se lembrar qual livro didático utilizaram no Ensino Fundamental.

A tabela abaixo é similar à anterior, fornecendo as mesmas informações, só que referentes ao livro didático de matemática utilizado no Ensino Médio:

Tabela 5.1.5: População categorizada quanto ao livro didático utilizado no Ensino Médio (as porcentagens estão em itálico)

Livro utilizado no Ensino Médio	Frequência
Matemática, Gelson Iezzi et AL	10 *13,3*
Matemática, Dante	10 *13,3*
Outros	14 *18,7*
Não lembra	29 *38,7*
Não usou livro didático	12 *16*
Total	**75** ***100***

Nesta tabela, percebemos que houve um aumento no número de alunos que utilizou os livros que analisamos para nossa pesquisa (26,6%, contra 18,7% dos livros de Ensino Fundamental). O número de alunos que não se lembra de qual livro usou diminuiu (65,3% para 38,7%), provavelmente pelo Ensino Médio ter sido concluído a menos tempo do que o Ensino Fundamental. Assim como na tabela anterior, a maioria dos alunos da categoria “Outros” desta tabela afirmou ter usado apostilas institucionais.

A próxima tabela traz as informações quanto ao período que o aluno cursava ao responder o questionário. Através dessa informação, pudemos constatar de modo aproximado, o quantitativo de alunos que ainda não haviam cursado a disciplina Matemática Finita, oferecida no 3º período de curso:

Tabela 5.1.6: População categorizada quanto ao período, separados pela turma a que pertenciam (as porcentagens estão em itálico)

Período	**Geometria (Diurno)**	**Geometria (Noturno)**	**Matemática Finita (Noturno)**	**Total**
1º	33	17	0	50 *64,9*
3º	5	0	8	13 *16,9*
4º	0	0	2	2 *2,6*
5º	2	2	6	10 *13*
7º	1	0	1	2 *2,6*
Total	**41**	**19**	**17**	**77** ***100***

Podemos perceber que a grande maioria dos alunos que responderam ao questionário (81,8%) estava cursando o 1º ou 3º períodos, o que garante que ainda não haviam feito a disciplina Matemática Finita, cuja ementa contém tópicos sobre Análise Combinatória. Ou seja, esses alunos traziam como bagagem apenas o que estudaram sobre o assunto durante o Ensino Médio, ou em sua preparação para o vestibular.

A tabela a seguir resume, apenas de modo quantitativo, as respostas dos alunos às questões de combinatória propostas em nosso questionário. Neste primeiro momento, antes de proceder a uma análise qualitativa das respostas, categorizamos as questões em “Certo”, “Errado”, e “Em Branco”. Os números em negrito em itálico indicam a frequência relativa do tipo de resposta encontrada. Do total de 77 alunos participantes, 39 responderam ao questionário A e 38 ao questionário B.

Tabela 5.1.7: Respostas obtidas dos problemas, categorizadas em certas, erradas ou em branco (as porcentagens estão em itálico)

Questões	Certas	Erradas	Em branco	Total
1A	36 *92,3*	3 *7,7*	0 *0*	39 *100*
1B	23 *60,5*	15 *39,5*	0 *0*	38 *100*
2	33 *42,9*	42 *54,5*	2 *2,6*	77 *100*
3	26 *33,8*	43 *55,8*	8 *10,4*	77 *100*
4	42 *54,5*	34 *44,2*	1 *1,3*	77 *100*
5A	26 *66,7*	11 *28,2*	2 *5,1*	39 *100*
5B	13 *34,2*	22 *57,9*	3 *7,9*	38 *100*
6	1 *1,3*	65 *84,4*	11 *14,3*	77 *100*

Embora esta tabela nos forneça apenas informações quantitativas, podemos já a partir dela fazer algumas observações.

A questão 1A, que envolvia apenas a aplicação do Princípio Multiplicativo, foi a que teve o maior índice de acertos. Já a questão 1B, que difere da 1A pelo fato de que é necessário usar o Princípio Aditivo para a sua resolução, apresenta um índice de erros bem maior. Embora possam ter ocorrido eventuais desatenções na leitura do enunciado da questão, com o aluno não percebendo o conectivo “ou” presente na mesma, o índice de erros na questão 1B (de quase 40%, contra apenas 7,7% na questão 1A) nos permite inferir que identificar situações em que o Princípio Aditivo é necessário não são tão trabalhadas no ensino básico quanto situações envolvendo o Princípio Multiplicativo.

As questões 2, 3 e 4 do questionário necessitam do mesmo modelo matemático para a sua resolução: as combinações simples.

Porém, podemos perceber que o problema ser de Seleção, Alocação ou Partição influenciou na resolução dos mesmos. Por exemplo, dos três problemas, o mais acertado pelos alunos foi o 4, de Seleção, o tipo mais encontrado nos livros didáticos analisados. Já o que teve menos acertos, o 3, era um problema de Partição, o tipo menos encontrado nos livros que analisamos.

As questões 5A e 5B tinham o mesmo objetivo do ponto de vista matemático: calcular o número de Arranjos Simples de 30 elementos, tomados em grupos de 4 elementos. Podemos perceber que o problema 5A, de Seleção, teve um índice de acertos muito maior do que o problema 5B, de Alocação.

Já o problema 6, sem dúvida é o que mais chama a atenção em nossa tabela: apenas 1 aluno conseguiu resolvê-lo corretamente. Além de ter sido o problema com maior índice de erros, foi também o que apresentou o maior índice de respostas em branco. Problemas como esse, em que o número de opções para tomar a próxima decisão continua o mesmo, foram pouco encontrados nos livros analisados e, em geral, envolviam a formação de números com determinada quantidade de dígitos.

Durante a análise das questões, para cada problema foi atribuída uma nota 1,0, se o problema foi resolvido corretamente, e uma nota 0,0, se houve algum tipo de erro. Assim, cada aluno teve uma nota que variou de 0,0 a 6,0. Com essa nota, tivemos como objetivo medir o desempenho global dos alunos em relação a cada um dos dois questionários. O resumo quantitativo dessa análise se encontra nas duas tabelas a seguir:

Tabela 5.1.8: Quantitativo de cada uma das “notas” obtidas pelos alunos que responderam ao Questionário A (as porcentagens estão em itálico)

Nota obtida	Nº de alunos
6,0	0 *0*
5,0	5 *13,2*
4,0	7 *18,4*
3,0	9 *23,7*
2,0	14 *36,8*
1,0	2 *5,3*
0,0	1 *2,6*
Total	**38** ***100***

Tabela 5.1.9: Quantitativo de cada uma das “notas” obtidas pelos alunos que responderam ao Questionário B (as porcentagens estão em itálico)

Nota obtida	Nº de alunos
6,0	0 *0*
5,0	0 *0*
4,0	5 *12,8*
3,0	16 *41*
2,0	7 *18*
1,0	9 *23,1*
0,0	2 *5,1*
Total	**39** ***100***

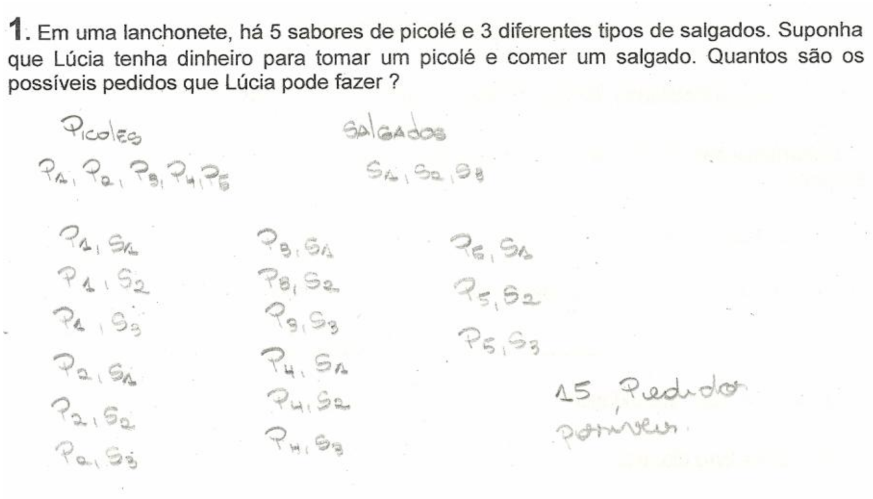
A partir das duas tabelas, pode-se perceber que nenhum dos 77 alunos respondeu corretamente a todas as questões, e que 3 desses alunos não acertaram nenhuma das 6 questões propostas. Em ambos os questionários, há um alto índice de alunos que acertaram a metade ou menos da metade das questões, com 68,4% e 87,2% para A e B, respectivamente. Além disso, acreditamos que os participantes tiveram mais facilidade em responder ao questionário A, devido ao seu índice de acertos em mais da metade das questões (31,6%, contra 12,8% do questionário B).

Na próxima seção, analisaremos as respostas apresentadas pelos alunos de uma forma qualitativa, observando e detalhando os tipos de erros encontrados, bem como as formas de raciocínio que os alunos mostraram ter. Deixamos claro desde já que, ao utilizar exemplos retirados dos próprios questionários, utilizamos pseudônimos no lugar dos nomes verdadeiros, com o objetivo de preservar a privacidade dos sujeitos da pesquisa.

5.2 Análise Qualitativa dos Questionários

Análise da questão 1A (39 questionários)

Na análise das respostas à questão 1A, encontramos apenas duas respostas incorretas, e nenhum aluno deixou o problema sem resposta. Na maioria das respostas corretas, os alunos utilizaram o Princípio Multiplicativo. Alguns alunos optaram por ilustrar seu raciocínio utilizando uma árvore de possibilidades e outros enumeraram os casos possíveis usando pares ordenados. Outros ainda utilizaram combinações simples para escrever suas respostas, como mostram os exemplos abaixo:

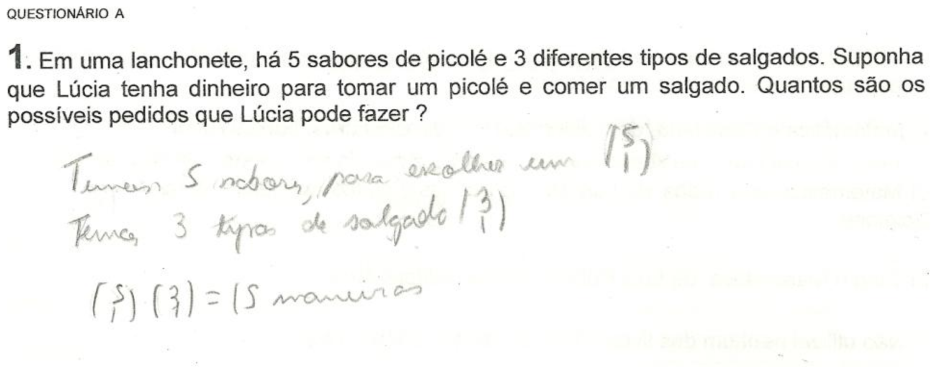

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Lúcia tenha dinheiro para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer ?

Picolés Salgados
P1, P2, P3, P4, P5 S1, S2, S3

P1, S1 P3, S1 P5, S1
P1, S2 P3, S2 P5, S2
P1, S3 P3, S3 P5, S3
P2, S1 P4, S1
P2, S2 P4, S2
P2, S3 P4, S3

15 Pedidos possíveis

Figura 5.2.1: Resposta de Zilda, correta, utilizando enumeração de pares ordenados.

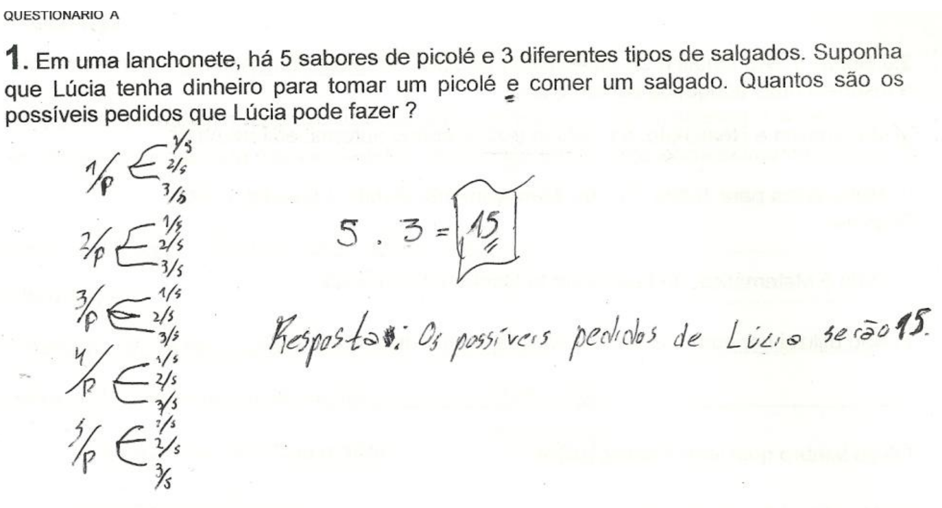

QUESTIONÁRIO A

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Lúcia tenha dinheiro para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer ?

Temos 5 sabores, para escolher um $\binom{5}{1}$
Temos 3 tipos de salgado $\binom{3}{1}$

$\binom{5}{1}\binom{3}{1} = 15$ maneiras

Figura 5.2.2: Resposta de Yasmim, correta. A aluna usou combinações simples para contar individualmente as possibilidades de cada opção, e depois multiplicou os resultados.


QUESTIONARIO A

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Lúcia tenha dinheiro para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer ?

1/p: 1/s, 2/s, 3/s
2/p: 1/s, 2/s, 3/s
3/p: 1/s, 2/s, 3/s
4/p: 1/s, 2/s, 3/s
5/p: 1/s, 2/s, 3/s

$5 \cdot 3 = \boxed{15}$

Resposta: Os possíveis pedidos de Lúcia serão 15.

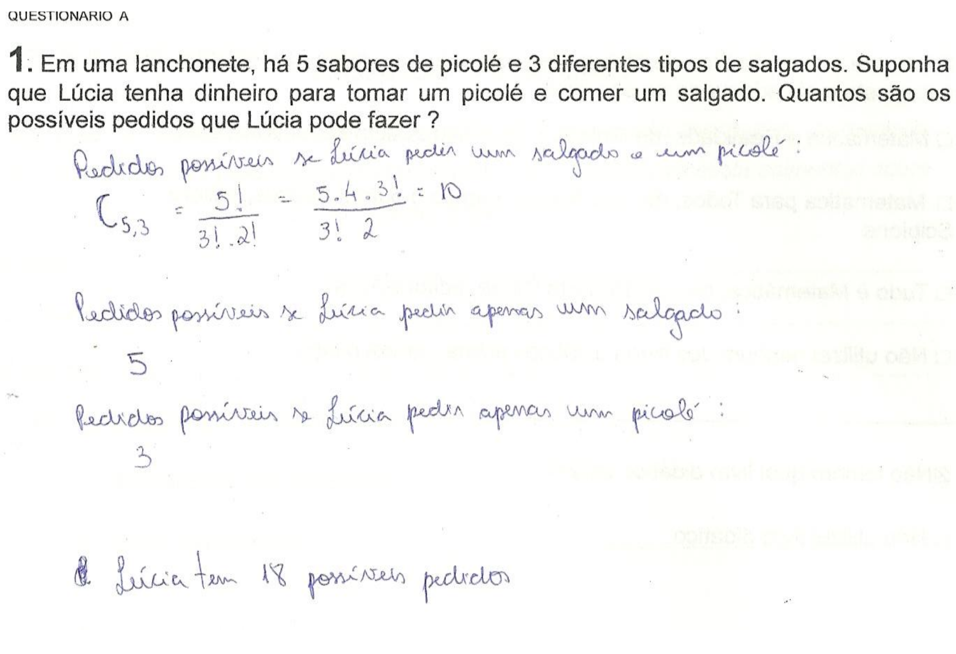
Figura 5.2.3: Resposta de Jonas, correta, em que ilustra o Princípio Multiplicativo com uma árvore de possibilidades.

A tabela abaixo ilustra todas as técnicas utilizadas pelos alunos que resolveram essa questão, de forma correta ou não:

Tabela 5.2.1: Técnicas utilizadas pelos alunos para tentar responder à questão 1A (as porcentagens estão em itálico)

Técnica Utilizada	**Frequência**
Princípio Multiplicativo	31 *79,5*
Princípio Aditivo	2 *5,2*
Modelos Prontos	3 *7,7*
Enumeração	3 *7,7*
Não responderam	0 *0*
Total	**39** ***100***

Quanto às respostas erradas, uma, além de incorreta, nos mostra que a aluna interpretou o enunciado de outro modo, como nos mostra a ilustração abaixo:



QUESTIONARIO A

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Lúcia tenha dinheiro para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer ?

Pedidos possíveis se Lúcia pedir um salgado e um picolé:

$C_{5,3} = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4.3!}{3!\ 2} = 10$

Pedidos possíveis se Lúcia pedir apenas um salgado:

5

Pedidos possíveis se Lúcia pedir apenas um picolé:

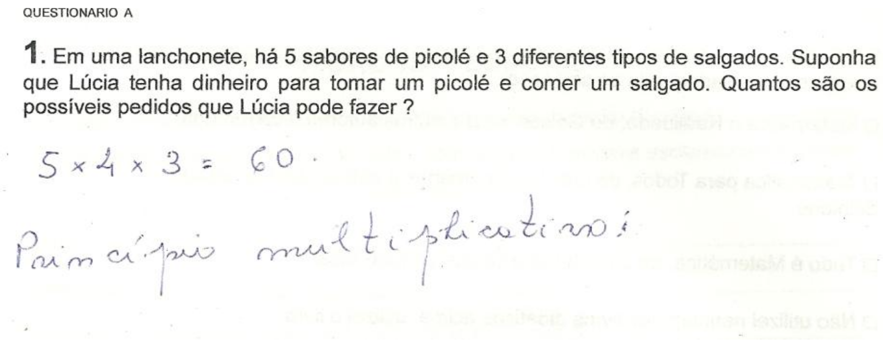
3

R. Lúcia tem 18 possíveis pedidos

Figura 5.2.4: Resposta da aluna Yvone, incorreta (E1)

A aluna Yvone interpretou, a partir do enunciado, que Lúcia poderia comer apenas 1 salgado, tomar apenas 1 picolé, ou fazer as duas coisas. A aluna cometeu um erro ao contar o número de maneiras de se fazer as duas coisas, tentando talvez adequar o modelo do número de Combinações Simples aos números dados no enunciado. Apesar disso, é possível perceber que a aluna soube utilizar o Princípio Aditivo, separando o problema em situações mutuamente exclusivas, para depois somar os resultados de cada uma.

Na segunda resposta errada observada, o aluno Paulino apresentou o seguinte esquema:


QUESTIONARIO A

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Lúcia tenha dinheiro para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer ?

$5 \times 4 \times 3 = 60.$

Princípio multiplicativo!

Figura 5.2.5: Resposta de Paulino, incorreta (E1)

Como há apenas o esquema multiplicativo, não sabemos exatamente qual foi a sua intenção ao efetuar esse cálculo. Assim como Yvone, Paulino também parece ter tentado adaptar os dados do problema (números 5 e 3) à sua resposta, acrescentando a expressão “Princípio Multiplicativo” à mesma. Os três erros observados foram classificados como E1 (troca do modelo necessário) e E5 (resposta errada sem justificativa), conforme a tabela abaixo:

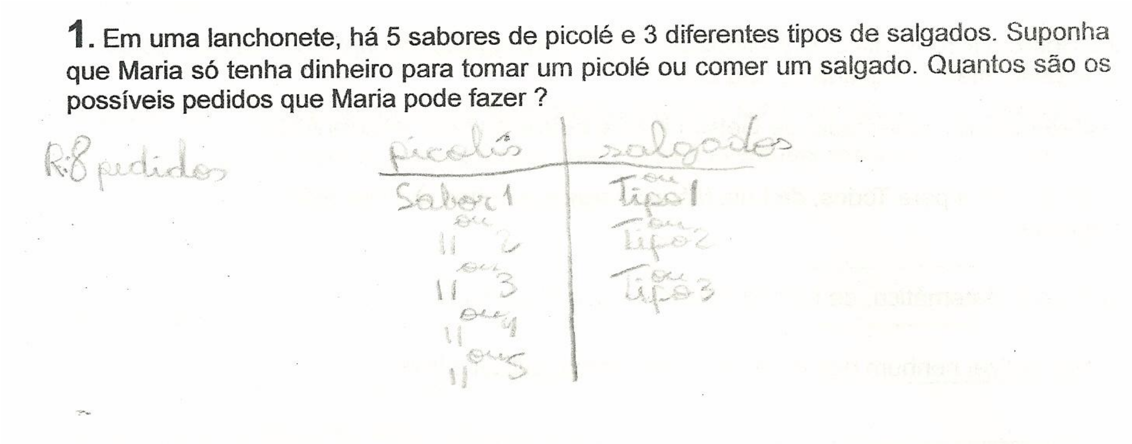
Tabela 5.2.2: tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 1ª (as porcentagens estão em itálico)

Tipos de Erros	**Frequência**
E1	2 *66,7*
E5	1 *33,3*
Total	**3** ***100***

Análise da questão 1B (38 questionários)

A questão 1B apresentada aos alunos difere da questão 1A apenas pelo fato de ser necessário o uso do Princípio Aditivo ao invés do Princípio Multiplicativo para a sua solução. Apesar disso, o número de erros encontrados nesta questão foi bem maior do que os encontrados na questão 1A.

Nas respostas corretas apresentadas, além do simples uso do Princípio Aditivo, alguns alunos chegaram até a solução utilizando contagem direta, esquematizando seu raciocínio com conjuntos e tabelas. Outros, utilizaram Arranjos e Combinações Simples para contar individualmente as opções, e depois somar os resultados. As figuras abaixo ilustram alguns desses exemplos citados:

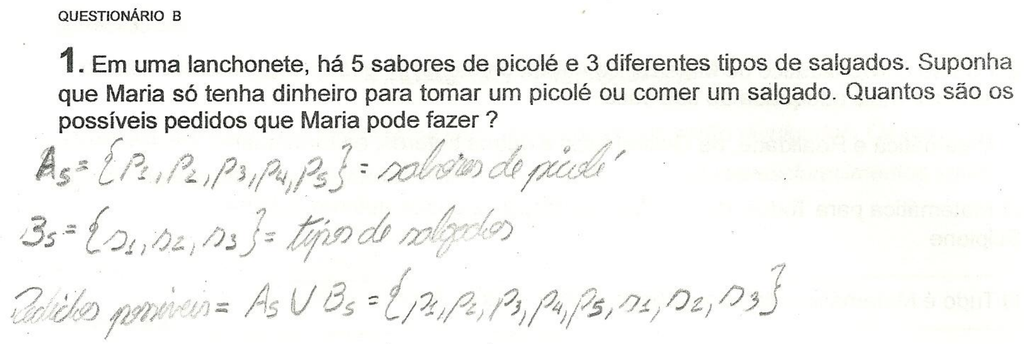


1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ?

R: 8 pedidos

picolés	salgados
Sabor 1	Tipo 1
ou	ou
" 2	Tipo 2
ou	ou
" 3	Tipo 3
ou	
" 4	
ou	
" 5	

Figura 5.2.6: Resposta de Leandra, correta, enumerando as soluções possíveis em uma tabela.



QUESTIONÁRIO B

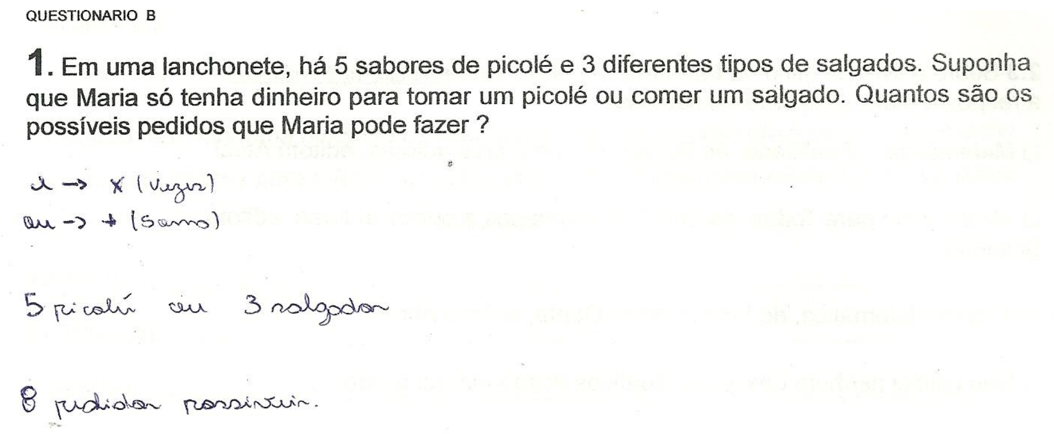
1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ?

$A_S = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$ = sabores de picolé

$B_S = \{S_1, S_2, S_3\}$ = tipos de salgados

Pedidos possíveis $= A_S \cup B_S = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, S_1, S_2, S_3\}$

Figura 5.2.7: Resposta de Murilo, correta, enumerando as possíveis soluções utilizando conjuntos.


QUESTIONARIO B

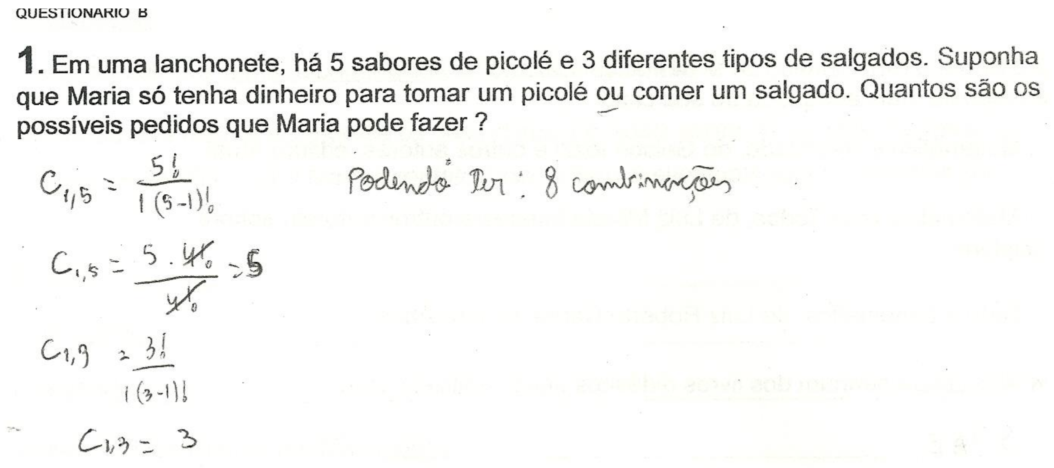
1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ?

e → x (vezes)
ou → + (soma)

5 picolés ou 3 salgados

8 pedidos possíveis.

Figura 5.2.8: Resposta de Inês, correta, destacando a relação entre os conectivos e as operações.


QUESTIONARIO B

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ?

$C_{1,5} = \frac{5!}{1!(5-1)!}$

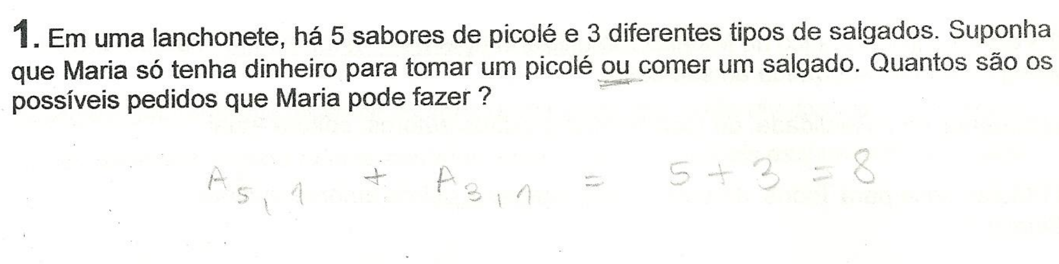
Podendo Ter: 8 combinações

$C_{1,5} = \frac{5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$

$C_{1,3} = \frac{3!}{1!(3-1)!}$

$C_{1,3} = 3$

Figura 5.2.9: Resposta de Joana, correta, somando as possibilidades de cada escolha, que foram contadas usando Combinações Simples.


1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé <u>ou</u> comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ?

$A_{5,1} + A_{3,1} = 5 + 3 = 8$

Figura 5.2.10: Resposta de Joelmir, correta, somando as possibilidades de cada escolha, que foram contadas usando Arranjos Simples. O aluno destacou o conectivo "ou" no enunciado, sublinhando-o.

A tabela abaixo resume quantitativamente os modos utilizados pelos alunos que responderam essa questão, de forma correta ou não:

Tabela 5.2.3: Técnicas utilizadas pelos alunos para tentar responder à questão 1B (as porcentagens estão em itálico)

Técnica Utilizada	Frequência
Princípio Multiplicativo	11 *29*
Princípio Aditivo	11 *29*
Modelos Prontos	9 *23,7*
Enumeração	7 *18,4*
Total	**38** ***100***

Quanto às respostas erradas, a maioria dos alunos trocou o Princípio Aditivo pelo Princípio Multiplicativo, seja por desatenção na leitura do enunciado, seja por não saber que o número de soluções para a situação descrita não corresponde à multiplicação do número de possibilidades das opções de salgados e de picolés. A figura abaixo ilustra uma dessas respostas erradas:

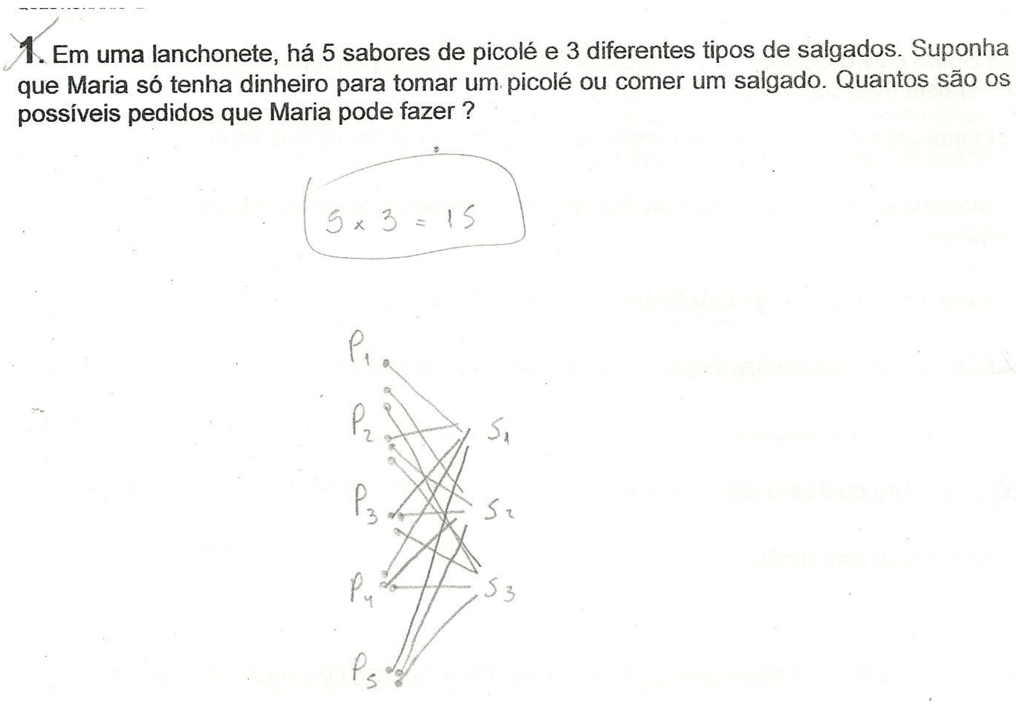
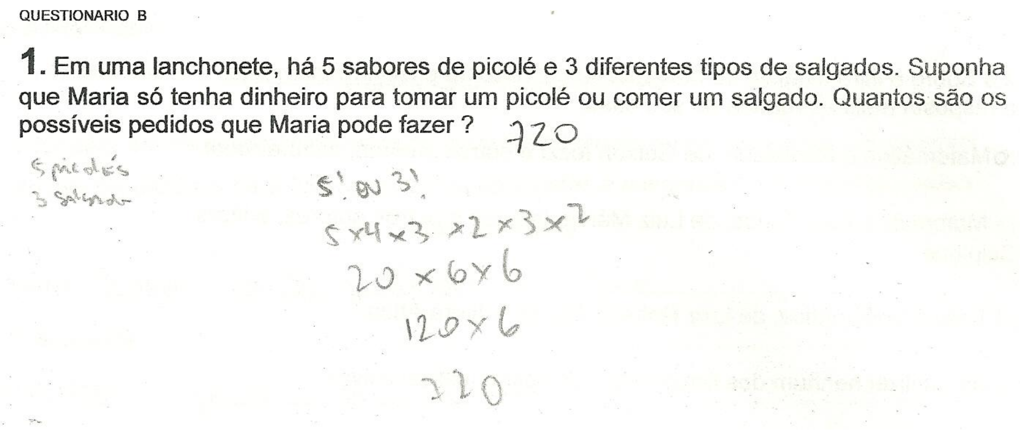


Figura 5.2.11: Resposta de Lidiana, incorreta, utilizando o Princípio Multiplicativo ao invés do Princípio Aditivo, apoiada em uma árvore de possibilidades (E1)

A próxima figura ilustra uma resposta errada, em que a aluna Francisca parece apenas ter adequado os números dados no problema à fórmula do número de Permutações Simples, o que mostra que a aluna já estudou o assunto, mas não compreende como e quando usar tal técnica. Feito isso, Francisca multiplica os resultados, o que mostra a não compreensão do problema como uma situação aditiva, e não multiplicativa:



QUESTIONARIO B

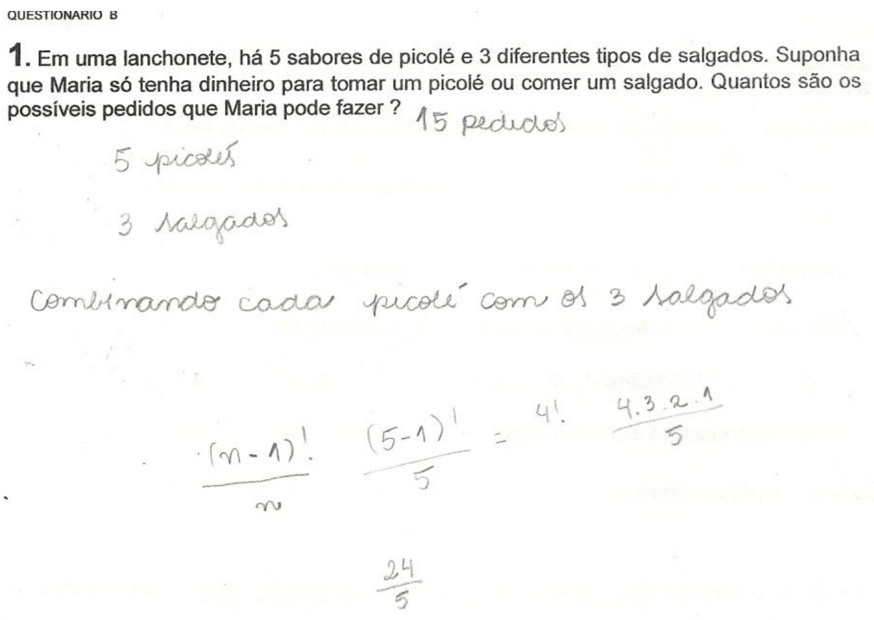
1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ? 720

5 picolés
3 salgados

5! ou 3!
5×4×3×2×3×2
20×6×6
120×6
720

Figura 5.2.12: Resposta da aluna Francisca, incorreta, em que faz uso de Permutações Simples para contar individualmente o número de opções, e depois multiplica os resultados (E1)

A figura a seguir, com a resposta do aluno Geraldo, mostra uma tentativa de calcular o número de combinações simples utilizando uma fórmula incorreta. Ao chegar a uma fração, aparentemente o aluno abandona o seu raciocínio e escreve o resultado 15, certamente pensando na multiplicação de 5 por 3.


QUESTIONARIO B

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ? 15 pedidos

5 picolés

3 salgados

Combinando cada picolé com os 3 salgados

$$\frac{(n-1)!}{n} \quad \frac{(5-1)!}{5} = \frac{4!}{5} \quad \frac{4.3.2.1}{5}$$

$$\frac{24}{5}$$

Figura 5.2.13: Resposta do aluno Geraldo, incorreta (E5)

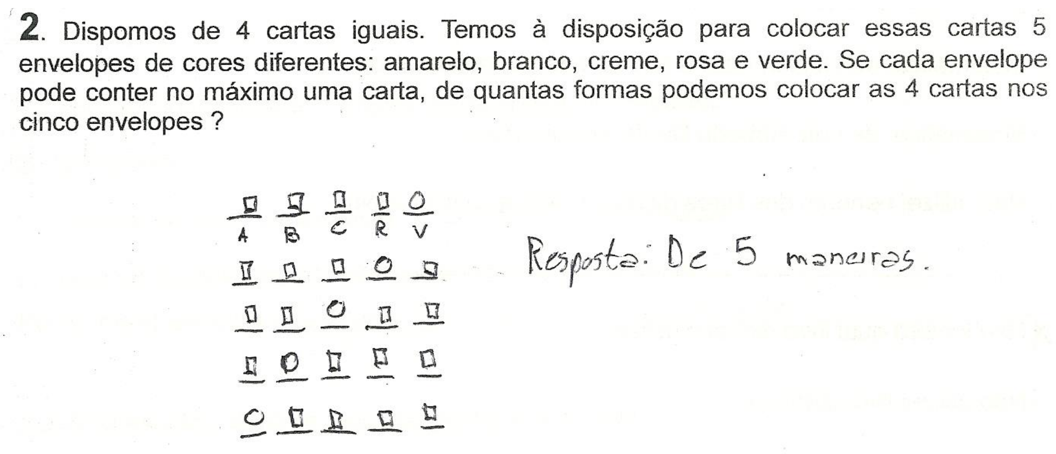
Tal resposta é para nós, significativa, no sentido de dizer que o aluno não desenvolveu o seu raciocínio combinatório, embora tenha estudado o assunto, fato perceptível pelo uso de fatoriais e do termo combinação. A tabela abaixo resume a classificação dos erros observados nessa questão:

Tabela 5.2.4: Tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 1B (as porcentagens estão em itálico)

Tipos de Erros	**Frequência**
E1	10 *66,7*
E5	3 *20*
E8	2 *13,3*
Total	**15** ***100***

Análise da questão 2 (77 questionários)

Esta questão foi respondida corretamente por 33 dos 77 alunos. Das respostas corretas, em 20 os alunos utilizaram algum tipo de enumeração, como podemos perceber no exemplo abaixo:


2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

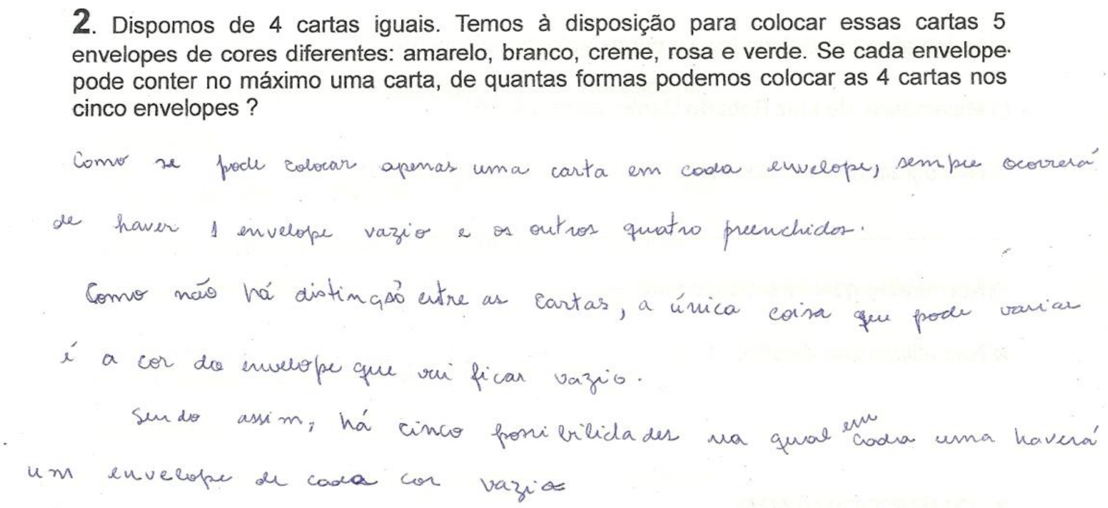
A B C R V

Resposta: De 5 maneiras.

Figura 5.2.14: Resposta de Lucinéia, correta, em que enumera as possibilidades para pôr as cartas nos envelopes

Aqui, a aluna Lucinéia usa cinco espaços para denotar os cinco envelopes, nomeados pelas iniciais de cada uma das cores. Em cada espaço, a aluna coloca um quadrado para dizer que o envelope contém uma carta, e um círculo para dizer que o envelope está vazio. Embora a aluna não tenha escrito em palavras, podemos inferir de seu esquema que houve a percepção de que, pelo fato de as 4 cartas serem idênticas, a ordem em que as mesmas eram colocadas nos envelopes não era importante.

O aluno Joaquim deu sua resposta correta descrevendo textualmente o seu raciocínio, a exemplo de outros dois alunos:


2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

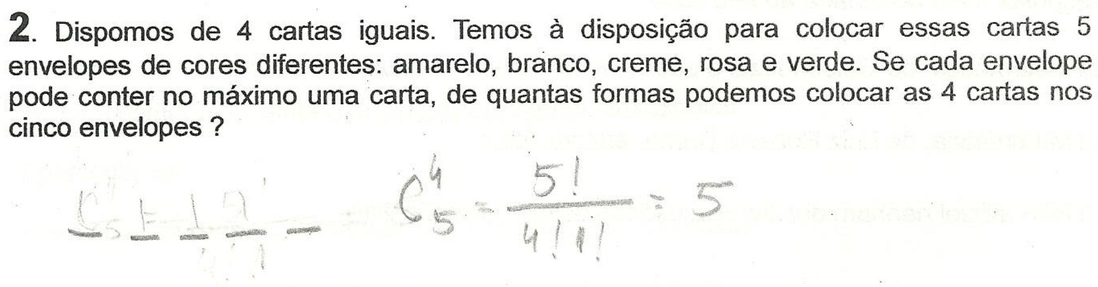
Como se pode colocar apenas uma carta em cada envelope, sempre ocorrerá de haver 1 envelope vazio e os outros quatro preenchidos.

Como não há distinção entre as cartas, a única coisa que pode variar é a cor do envelope que vai ficar vazio.

Sendo assim, há cinco possibilidades na qual em cada uma haverá um envelope de cada cor vazio.

Figura 5.2.15: Resposta de Joaquim, correta, em que descreve por escrito o seu raciocínio

Os demais 10 alunos que acertaram esta questão a responderam utilizando a fórmula do número de Combinações Simples, como o aluno Cristiano, cuja resolução se encontra na próxima figura:


2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

$$C_5^4 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$$

Figura 5.2.16: Resposta do aluno Cristiano, correta, em que utiliza a fórmula do número de Combinações Simples

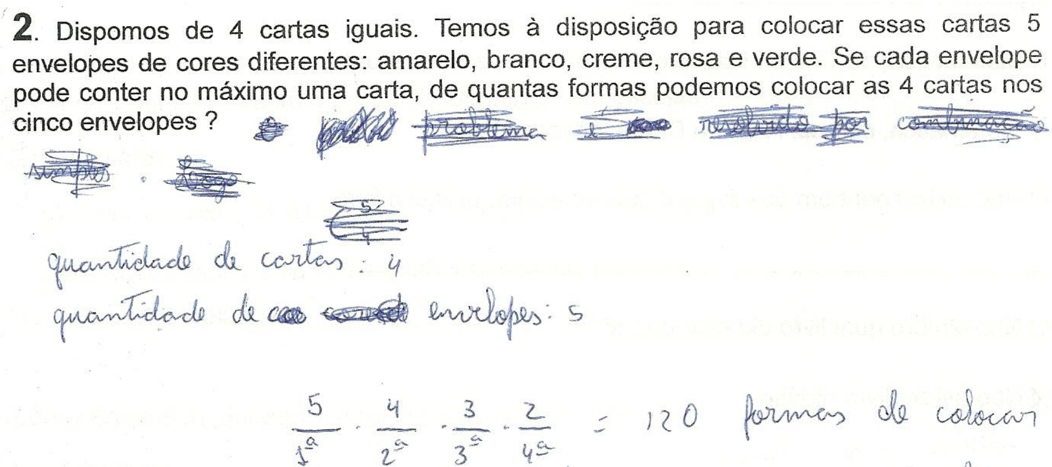
Incluímos na tabela a seguir um resumo quantitativo das técnicas utilizadas pelos alunos que responderam esta questão, de forma correta ou não:

Tabela 5.2.5: Técnicas utilizadas pelos alunos para responder à questão 2 (as porcentagens estão em itálico)

Técnicas Utilizadas	**Frequência**
Princípio Multiplicativo	28 *36,4*
Enumeração	26 *33,8*
Modelos Prontos	21 *27,3*
Não responderam	2 *2,6*
Total	**77** ***100***

Dois dos participantes deixaram esse problema em branco, e os 42 restantes apresentaram respostas incorretas, que passamos a analisar.

Observamos que 16 dos alunos que erraram chegaram a 120 como resposta, 13 utilizando o princípio multiplicativo, calculando $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, e 3 utilizando a fórmula do número de Arranjos Simples, $A_{5,4}$, conforme as figuras a seguir:

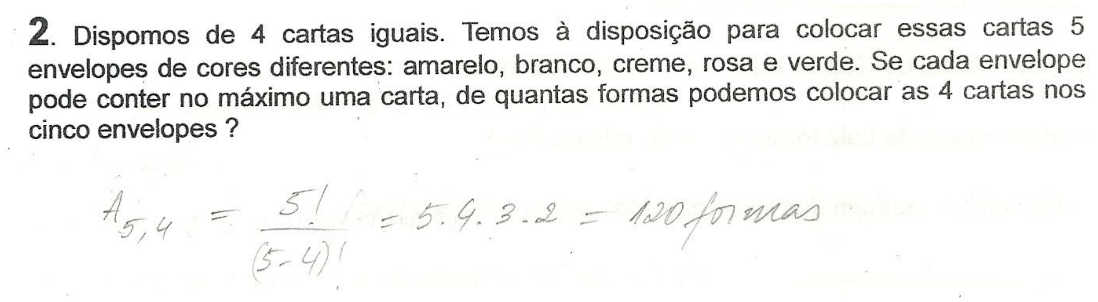

2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ? ~~problema~~ ~~resolvido por~~ ~~combinação~~ ~~simples~~.

quantidade de cartas: 4

quantidade de envelopes: 5

$\underbrace{\frac{5}{1^a} \cdot \frac{4}{2^a} \cdot \frac{3}{3^a} \cdot \frac{2}{4^a}}_{\text{cartas}} = 120$ formas de colocar 4 cartas nos 5 envelopes

Figura 5.2.17: Resposta de Ana Carolina, incorreta, em que utiliza o Princípio Multiplicativo para tentar responder à questão (E3)



2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

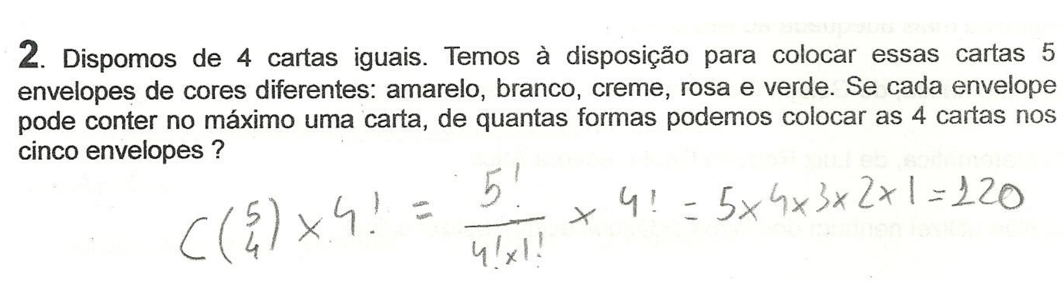
$$A_{5,4} = \frac{5!}{(5-4)!} = 5.4.3.2 = 120 \text{ formas}$$

Figura 5.2.18: Resposta de Isaura, incorreta, em que utiliza a fórmula do número de Arranjos Simples para tentar responder à questão (E3)

Em ambos os casos, podemos inferir a partir da resposta que estes 16 alunos não consideraram que, pelo fato de as cartas serem indistinguíveis, não era necessário contar o número de modos de se trocar as cartas de lugar para cada grupo de 4 envelopes escolhidos. Assim, a resposta que obtiveram deveria ser dividida por $4! = 24$.

Houve 4 alunos que efetuaram a multiplicação $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1$, sem maiores justificativas. Aqui, acreditamos que cada número se refere ao número de opções de escolha de qual carta será colocada naquele envelope, à exceção do último número 1, que se refere ao fato de que ao último envelope só resta uma opção, a de ficar vazio.

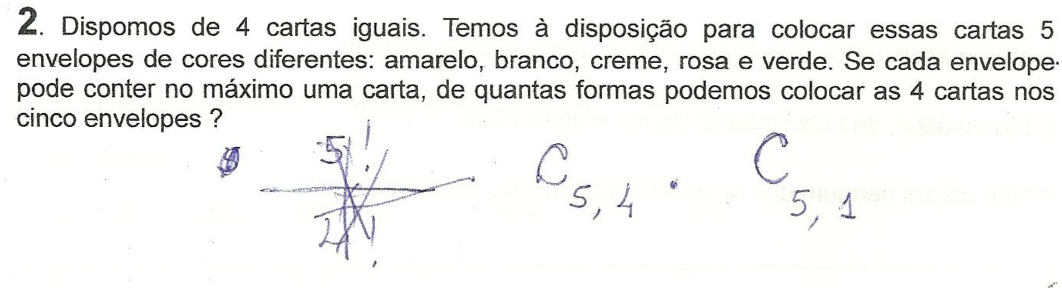
As próximas figuras se referem aos erros cometidos por dois alunos, Anita e Ademir:



2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

$$C\binom{5}{4} \times 4! = \frac{5!}{4! \times 1!} \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

Figura 5.2.19: Resposta de Anita, incorreta, em que multiplica o que seria a resposta certa por 4! (E3)



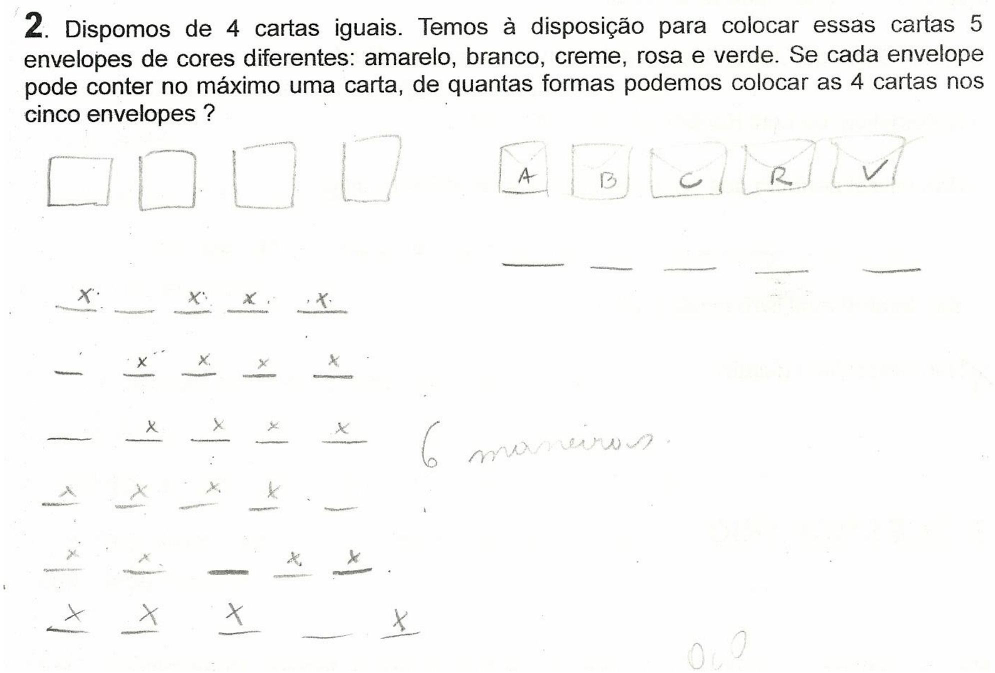
2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

$\frac{5!}{4!}$ $C_{5,4} \cdot C_{5,1}$

Figura 5.2.20: Resposta de Ademir, incorreta, em que multiplica o que seria a resposta certa por $C_{5,1}$ (E3)

A resposta de Anita nos mostra que a aluna considerou que trocar as cartas de envelope, entre os 4 envelopes que guardavam uma carta, levava a uma nova maneira de alocar as cartas nos envelopes e por isso multiplicou $C_{5,4}$ por 4!. Já Ademir, aparentemente multiplicou $C_{5,4}$ por $C_{5,1}$ para considerar as possíveis escolhas de qual dos 5 envelopes ficaria vazio, sem perceber que esse número já havia sido indiretamente contado ao calcular $C_{5,4}$.

Três dos alunos que erraram chegaram a 120 como resposta ao fazer o cálculo de 5!. Outros dois erraram ao tentar enumerar as situações possíveis, como é o caso da aluna Denair que ilustramos a seguir:

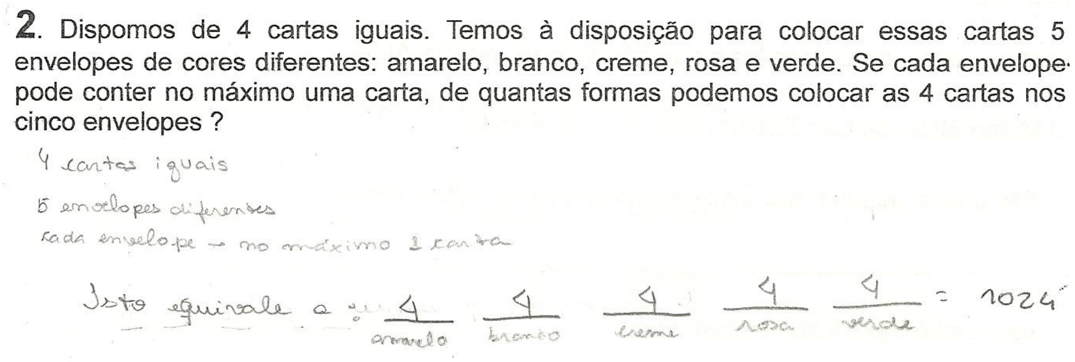


2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

Figura 5.2.21: Resposta da aluna Denair, incorreta (E4)

Denair usa 5 espaços para representar os 5 envelopes e uma letra X para representar cada uma das 4 cartas idênticas. O espaço que fica em branco representa o envelope que ficou sem nenhuma carta. Porém, por descuido, a aluna repetiu a segunda linha de seu esquema na terceira, o que acabou por levá-la a contar duas vezes a mesma configuração e a chegar a uma resposta incorreta.

O aluno Lourival resolveu o problema da seguinte maneira:



2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

4 cartas iguais

5 envelopes diferentes

cada envelope → no máximo 1 carta

Isto equivale a: $\underset{\text{amarelo}}{4}$ $\underset{\text{branco}}{4}$ $\underset{\text{creme}}{4}$ $\underset{\text{rosa}}{4}$ $\underset{\text{verde}}{4}$ = 1024

Figura 5.2.22: Resposta do aluno Lourival, incorreta (E3)

Aqui, Lourival desconsidera que se uma das 4 cartas já foi colocada em um dos envelopes, então o número de opções para escolher a carta que será colocada no próximo diminui. Além disso, o aluno não considera que, como as cartas são idênticas, permutá-las entre os 4 envelopes escolhidos não levará a uma nova forma de alocá-las nesses envelopes.

A tabela a seguir apresenta nossa classificação para os erros encontrados nessa questão:

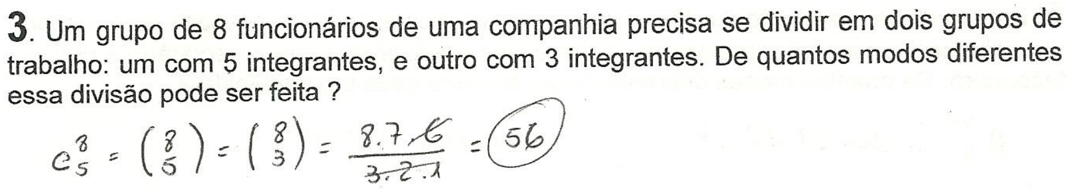
Tabela 5.2.6: tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 2 (as porcentagens estão em itálico)

Tipos de Erros	Frequência
E1	10 *23,8*
E2	17 *40,5*
E3	9 *21,4*
E4	2 *4,8*
E5	4 *9,5*
Total	**42** ***100***

O erro mais observado foi do tipo E2, relacionado ao fato de que vários alunos consideraram que, mesmo as cartas sendo idênticas, permutá-las entre os quatro envelopes escolhidos levaria a uma nova configuração da alocação das mesmas. Houve também um grande número dos erros E1 e E3, o que mostra que vários alunos tentaram enquadrar o problema em um modelo ou fórmula, mas sem sucesso (caso de E1), ou então fizeram confusão entre objetos que são distinguíveis (caso dos envelopes, pela cor) e objetos que são indistinguíveis (caso das cartas).

Análise da questão 3 (77 questionários)

Dos 77 participantes da pesquisa, 26 responderam corretamente à questão 3. Destes, 22 alunos utilizaram explicitamente a fórmula do número de Combinações Simples. A maioria simplesmente calculou $C_{8,5}$ ou efetuou o produto $C_{8,5} \cdot C_{3,3}$. Outros, tais como o aluno Lucas, além de calcular, escreveram também que $C_{8,5} = C_{8,3}$, talvez querendo dizer que tanto fazia primeiro montar o grupo com 5 pessoas, que o outro já estaria determinado, quanto o contrário:

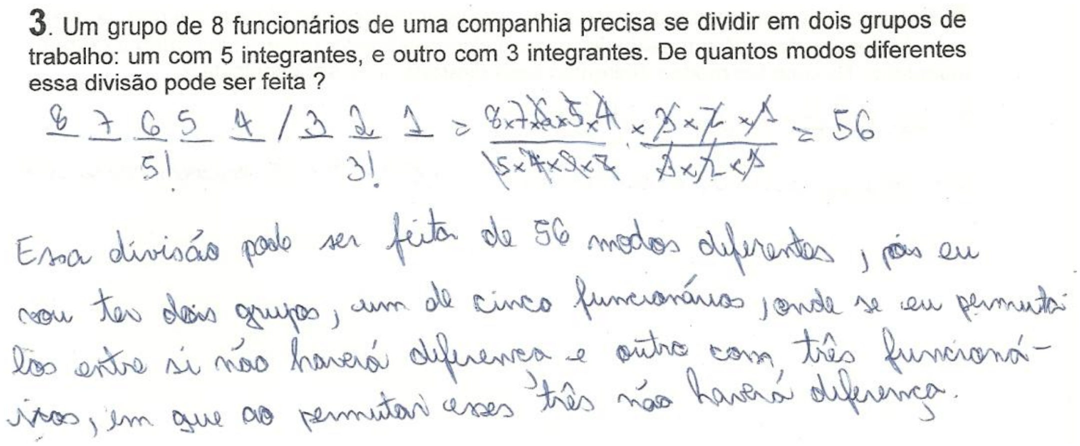


3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

$C^8_5 = \binom{8}{5} = \binom{8}{3} = \frac{8.7.\cancel{6}}{\cancel{3.2}.1} = 56$

Figura 5.2.23: Resposta de Lucas, correta

Já a aluna Joyce, resolveu a questão do seguinte modo:



3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

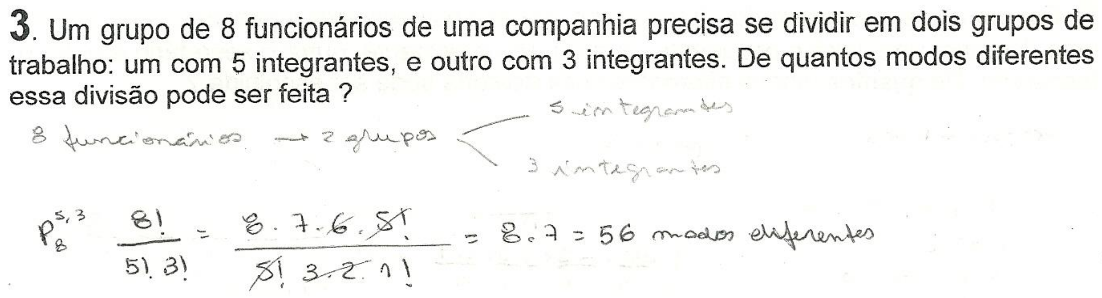
$\underbrace{\underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}}_{5!} / \underbrace{\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}}_{3!} = \frac{8\times7\times\cancel{6}\times\cancel{5}\times\cancel{4}}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} \times \frac{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}} = 56$

Essa divisão pode ser feita de 56 modos diferentes, pois eu vou ter dois grupos, um de cinco funcionários, onde se eu permutá-los entre si não haverá diferença e outro com três funcionários, em que ao permutar esses três não haverá diferença.

Figura 5.2.24: Resposta da aluna Joyce, correta

Joyce foi a única a resolver corretamente a questão sem fazer uso explícito de fórmulas. Ela utiliza o Princípio Multiplicativo em cada um dos grupos, dividindo o resultado obtido pelo número de maneiras de se permutar a ordem entre os membros de cada grupo, o que mostra sua percepção de que a ordem em que os membros são escolhidos não é relevante para o problema.

Dois dos alunos deram a entender que utilizaram a fórmula do número de Permutações com Repetição, como a aluna Karla, cuja resposta se encontra na próxima figura:



3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

8 funcionários → 2 grupos
5 integrantes
3 integrantes

$P_8^{5,3}\ \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8.7.6.\cancel{5!}}{\cancel{5!}\,3.2.1!} = 8.7 = 56$ modos diferentes

Figura 5.2.25: Resposta da aluna Karla, correta, em que usa a fórmula do número de Permutações com Repetição para resolver o problema

Acreditamos que Karla raciocinou do seguinte modo: permutam-se as 8 pessoas, porém considera-se 5 pessoas como "iguais" devido ao fato das 5 pertencerem ao mesmo grupo, ou seja, permutar essas 5 pessoas não irá formar um novo grupo. O mesmo ocorre com as 3 pessoas restantes.

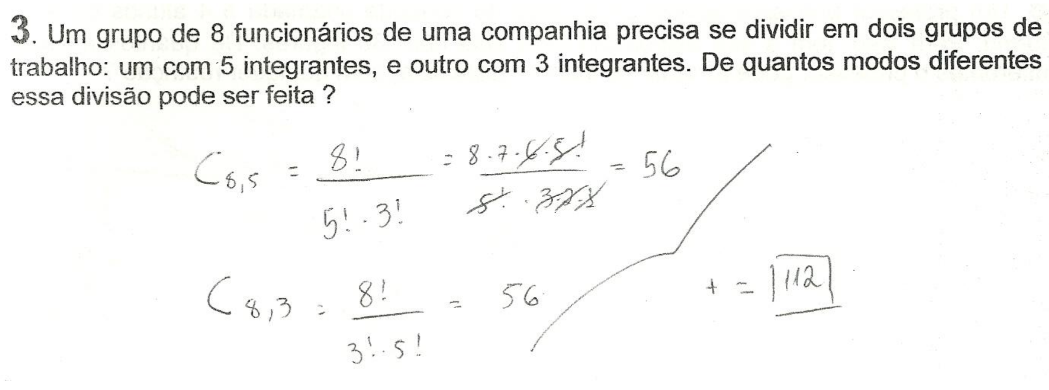
Resumimos na tabela abaixo as técnicas utilizadas pelos alunos que resolveram esta questão, corretamente ou não :

Tabela 5.2.7: Técnicas utilizadas pelos alunos para tentar responder à questão 3 (as porcentagens estão em itálico)

Técnicas Utilizadas	**Frequência**
Princípio Multiplicativo	11 *14,3*
Princípio Aditivo	1 *1,3*
Modelos Prontos	54 *70,1*
Enumeração	0 *0*
Sem Justificativa	3 *3,9*
Não responderam	8 *10,4*
Total	**68** ***100***

Dos 51 questionários restantes, 8 alunos deixaram esta questão em branco. Passemos à análise das 43 respostas erradas observadas.

Encontramos nas respostas incorretas 9 alunos que resolveram esta questão como o aluno Venâncio:



3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

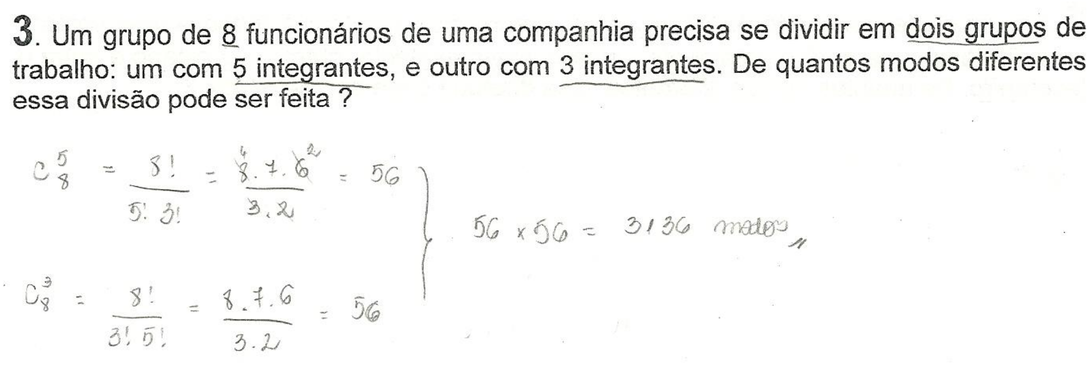
$C_{8,5} = \frac{8!}{5!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 7\cdot \cancel{6}\cdot \cancel{5!}}{\cancel{5!}\cdot \cancel{3\cdot 2\cdot 1}} = 56$

$C_{8,3} = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = 56$

$+ = \boxed{112}$

Figura 5.2.26: Resposta do aluno Venâncio, incorreta (E3)

Acreditamos que Venâncio e os outros alunos consideraram que escolher o primeiro grupo tendo 5 pessoas e o segundo tendo 3 pessoas era diferente de escolher o primeiro tendo 3 pessoas e o segundo tendo 5 pessoas. Assim era necessário contar os dois casos separadamente e depois unificá-los de alguma maneira. Esse grupo de 9 alunos optou por somar os resultados, chegando a 112. Já outros 6 alunos começaram de modo idêntico, mas ao final preferiram multiplicar os resultados, como o aluno Jefferson:



3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

$C_8^5 = \frac{8!}{5!\,3!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56$

$C_8^3 = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} = 56$

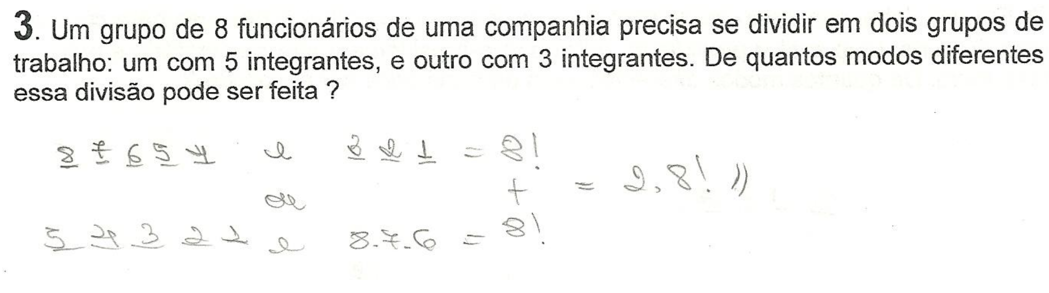
$56 \times 56 = 3136$ modos

Figura 5.2.27: Resposta de Jefferson, incorreta (E3)

Acreditamos em duas possibilidades: a primeira, que os alunos perceberam que a ordem não era relevante para a resolução do problema, mas não notaram que bastava contar o número de possibilidades para um dos dois grupos, pois o outro já estaria determinado. A segunda, que tanto em um grupo como no outro, os alunos utilizaram a fórmula do número de Combinações Simples apenas por acaso, pois o fato de terem considerado os dois casos como distintos, e tendo que somar ou multiplicar os resultados de cada um ao final, mostra que esses alunos não tinham claro que a ordem entre os membros de cada grupo, bem como a ordem de escolha dos grupos, não era importante para o problema. Esse também parece ser o caso de outros 6 alunos que utilizaram a mesma idéia, mas calcularam o número de Arranjos Simples em lugar das Combinações Simples. Feitas as contas, 4 deles calcularam $A_{8,5} + A_{8,3}$, e os outros dois calcularam $A_{8,5} \cdot A_{8,3}$.

Quatro alunos apenas multiplicaram 5 por 3, sem justificar suas respostas. Do mesmo modo, dois alunos apenas multiplicaram 8 por 2, outro multiplicou 8, 5 e 3, e um outro, multiplicou 6 por 4. À exceção do último, para o qual não conseguimos ver significado algum em sua resposta, os demais parecem apenas ter adequado dados do enunciado a uma multiplicação.

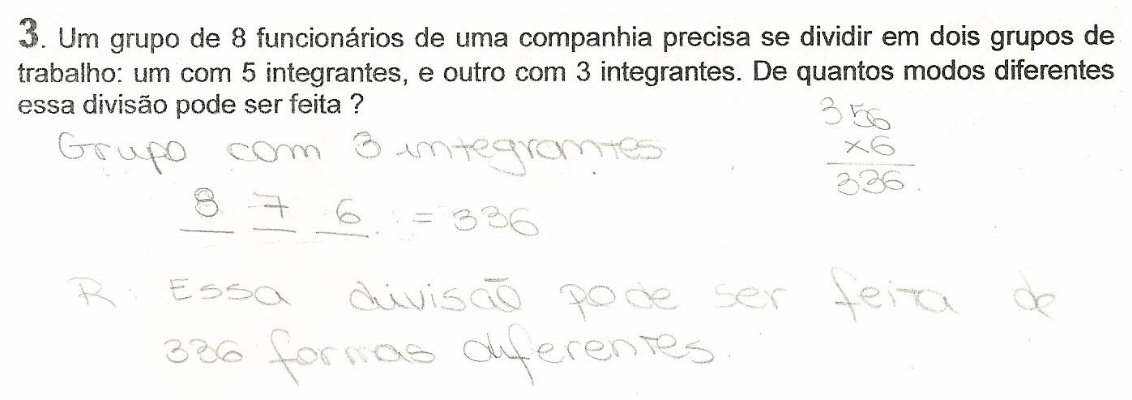
Sete alunos afirmaram que a resposta era 8!, alguns utilizando o Princípio Multiplicativo, e outros escrevendo $P_8 = 8!$. A aluna Zenóbia respondeu do seguinte modo:


3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

8 7 6 5 4 e 3 2 1 = 8!
ou + = 2.8!))
5 4 3 2 1 e 8.7.6 = 8!

Figura 5.2.28: Resposta da aluna Zenóbia, incorreta (E3)

Tanto Zenóbia quanto os sete alunos mencionados não perceberam que permutar membros de um mesmo grupo não levava à formação de um grupo diferente, sendo que Zenóbia ainda considerou que formar primeiro o grupo de 5 pessoas e depois o de 3 pessoas é diferente de começar pelo grupo de 3 pessoas para depois formar o de 5 pessoas. Outros dois alunos calcularam $5!\cdot 3!$, aparentemente desconsiderando que as escolhas eram feitas a partir de um total de 8 pessoas, e que a ordem não era importante para essa questão, Um dos alunos, Jonathan, resolveu o problema da seguinte maneira:


3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

Grupo com 3 integrantes

8 7 6 = 336

3 56
×6
336.

R: Essa divisão pode ser feita de 336 formas diferentes.

Figura 5.2.29: Resposta de Jonathan, incorreta (E2)

Acreditamos que Jonathan percebeu que contando o número de possibilidades para o grupo de 3 pessoas, o outro grupo já estaria determinado pelas 5 pessoas que sobram. Porém, não percebeu que a ordem entre os integrantes de um mesmo grupo não era importante, já que não dividiu seu resultado pelo número de modos de permutar os três membros escolhidos para o grupo de 3 pessoas.

A tabela abaixo resume nossa classificação para os erros encontrados nesse problema:

Tabela 5.2.8: Tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 3 (as porcentagens estão em itálico)

Tipo de Erro	**Frequência**
E1	8 *19,5*
E2	7 *17,1*
E3	17 *41,5*
E5	9 *21,9*
Total	**41** ***100***

Nesta questão, a maior parte dos erros cometidos se deu em relação ao não reconhecimento por parte dos alunos de que os grupos eram distinguíveis pela quantidade de componentes. Além disso, alguns erraram ao não reconhecer que não era importante nesta questão considerar, nem a ordem em que os grupos seriam formados, e nem a ordem entre os membros de cada grupo.

Análise da questão 4 (77 questionários)

Esta questão foi respondida corretamente por 43 dos 77 participantes. Para resolver o problema, 7 alunos utilizaram contagem direta. Um exemplo deste tipo de solução se encontra na figura abaixo:

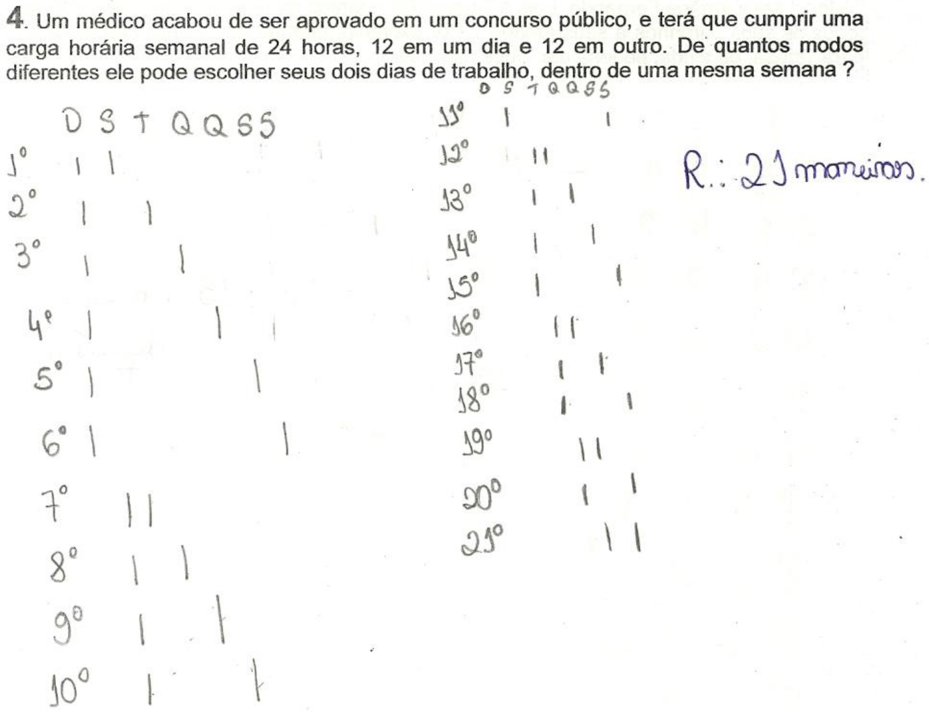


Figura 5.2.30: Resposta de Ivete, correta, em que enumera os possíveis dias de trabalho para o médico

A aluna Ivete montou o esquema acima para enumerar as possíveis escolhas dos dias de trabalho do médico. Além de auxiliar a sua contagem, seu esquema facilitou sua percepção de que a ordem em que os dias são escolhidos não é importante. Pode-se perceber, por exemplo, que na passagem da 11ª para a 12ª possibilidade, Ivete não considera "segunda e domingo", pois já havia considerado "domingo e segunda" na 1ª possibilidade. Já o aluno Humberto, utilizou uma árvore de possibilidades para representar as possíveis escolhas do médico, como podemos ver em sua resolução, na figura a seguir:

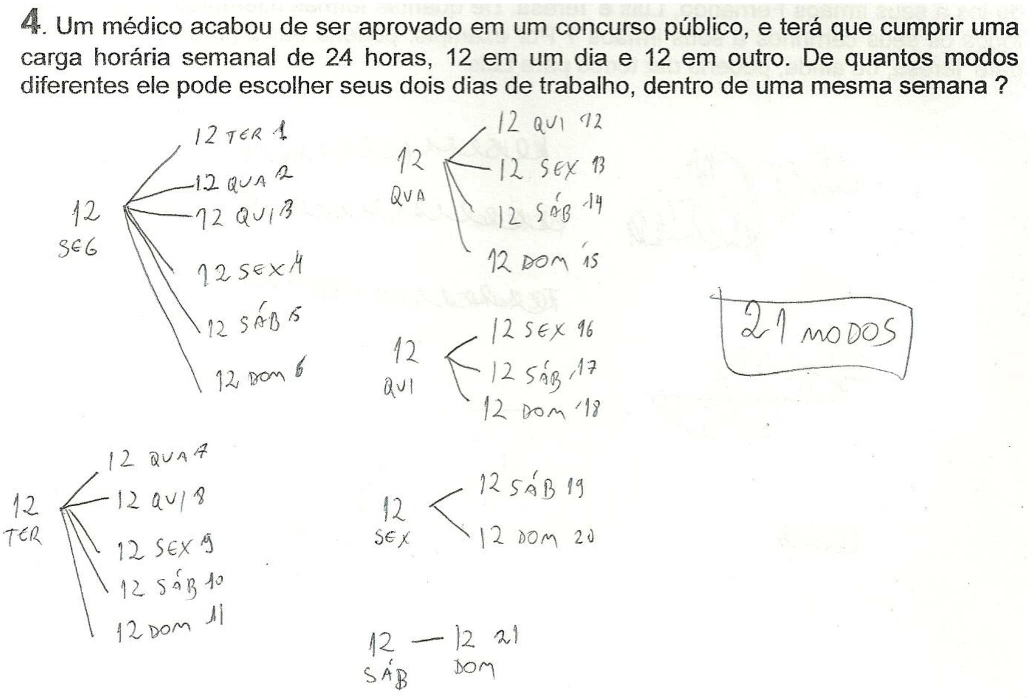


Figura 5.2.31: Resposta de Humberto, correta, em que enumera as possíveis escolhas do médico usando árvores de possibilidades

Pode-se perceber que em seu raciocínio, Humberto também não repete os mesmos dias em ordem diferente, o que mostra que, embora tenha utilizado uma enumeração para chegar à solução, reconheceu que a ordem de escolha dos dias não era relevante para o problema.

A solução abaixo, da aluna Giovana, ilustra uma solução correta com a utilização do princípio multiplicativo:

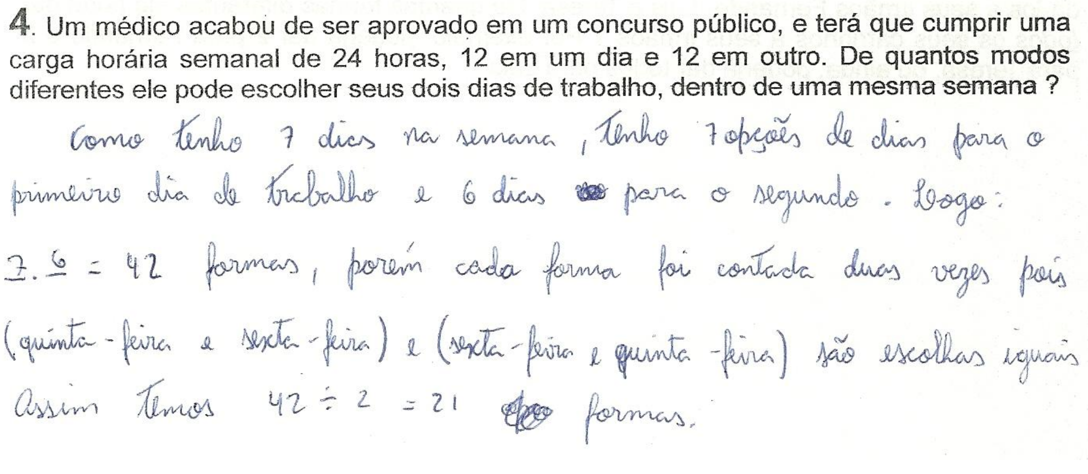
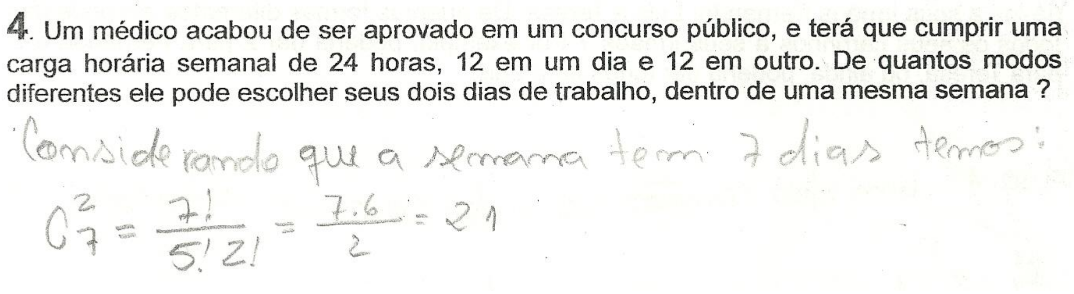


Figura 5.2.32: Resposta da aluna Giovana, correta, em que a mesma faz uso do Princípio Multiplicativo

Encontramos ainda 19 soluções corretas em que os alunos utilizaram a fórmula para o cálculo do número de Combinações Simples, conforme ilustrado pela solução da aluna Jamille:

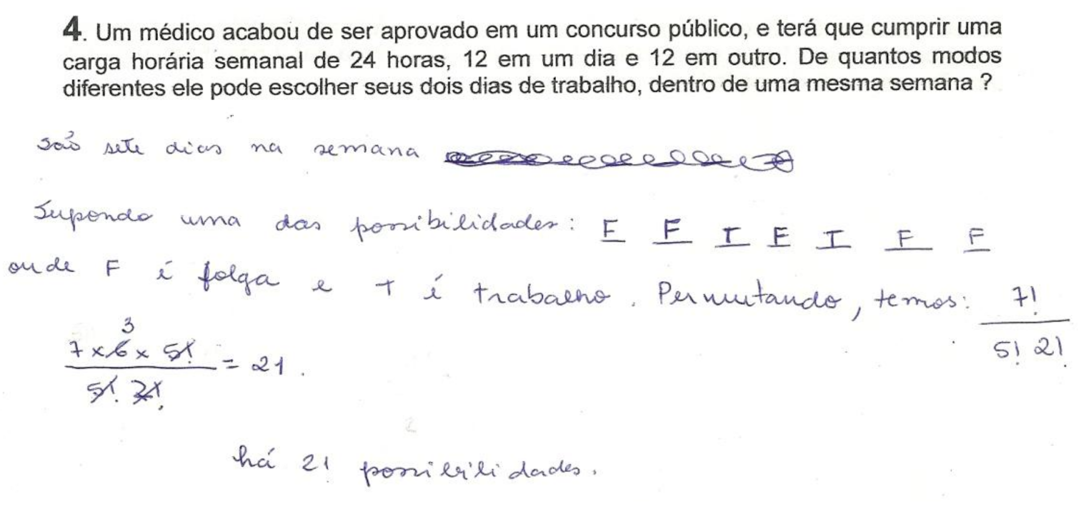

4. Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana ?

Considerando que a semana tem 7 dias temos:

$$C_7^2 = \frac{7!}{5!\,2!} = \frac{7.6}{2} = 21$$

Figura 5.2.33: Resposta de Jamille, correta, em que é utilizada a fórmula do número de Combinações Simples

Em um outro tipo de solução correta, dois alunos utilizaram Permutação com repetição para resolver o problema. A resolução abaixo, do aluno Jerônimo ilustra esse raciocínio:


4. Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana ?

são sete dias na semana

Supondo uma das possibilidades: F F T F T F F

onde F é folga e T é trabalho. Permutando, temos: $\frac{7!}{5!\,2!}$

$$\frac{7 \times \cancel{6}^{3} \times \cancel{5!}}{\cancel{5!}\,.\,\cancel{2!}} = 21.$$

há 21 possibilidades.

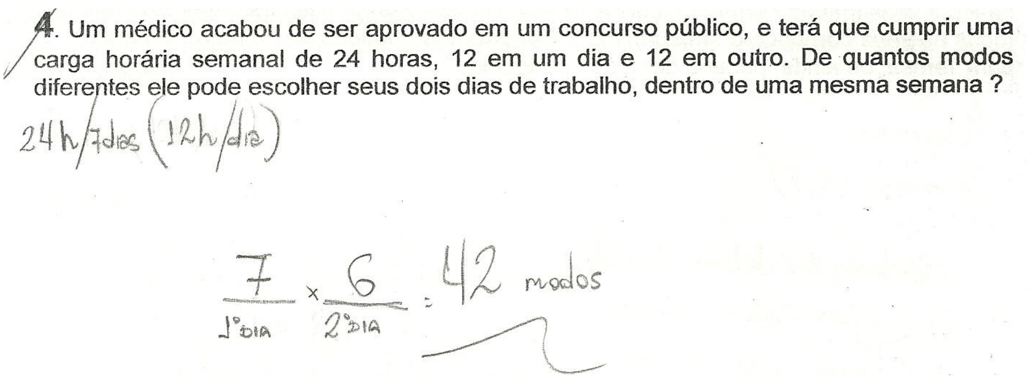
Figura 5.2.34: Resposta de Jerônimo, correta, em que é utilizada a técnica das Permutações com repetição

O aluno Jerônimo chegou à solução correta após perceber que, denominando por T os dias de trabalho e por F os dias em que o médico não trabalha, trocando a ordem entre os dias de trabalho (ou seja, T por T), chega-se a uma possibilidade de escolha idêntica à anterior (o mesmo ocorrendo com a troca entre as letras F). A tabela abaixo resume quantitativamente as técnicas utilizadas pelos alunos que resolveram esta questão, corretamente ou não:

Tabela 5.2.9: Técnicas utilizadas pelos alunos para responder à questão 4 (as porcentagens estão em itálico)

Técnicas Utilizadas	**Frequência**
Princípio Multiplicativo	23 *29,9*
Princípio Aditivo	0 *0*
Modelos Prontos	41 *53,3*
Enumeração	10 *13*
Sem Justificativa	2 *2,6*
Não responderam	1 *1,3*
Total	**77** ***100***

Dos 77 alunos, dois deixaram esta questão em branco. Passemos agora à análise das respostas incorretas. Das 32 respostas erradas encontradas, 15 simplesmente utilizaram o Princípio Multiplicativo efetuando o produto $7 \cdot 6 = 42$. Esses alunos não perceberam que a ordem de escolha dos dias não era importante e por isso era necessário dividir o resultado por 2 para descontar o que foi contado a mais. Ilustramos esse raciocínio incorreto com a resposta da aluna Meire:



4. Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana ?

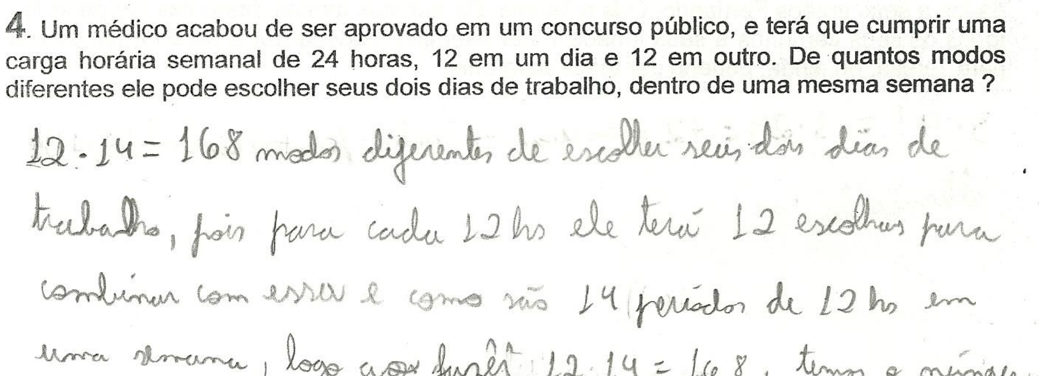
24h/7dias (12h/dia)

$\frac{7}{1^\circ \text{DIA}} \times \frac{6}{2^\circ \text{DIA}} = 42$ modos

Figura 5.2.35: Resposta da aluna Meire, incorreta, com a utilização do Princípio Multiplicativo (E2)

Um dos alunos calculou $A_{5,2}$, considerando que a semana teria apenas os dias úteis, de segunda à sexta, e quatro alunos calcularam $A_{7,2}$. Em ambos os casos, os alunos utilizaram um raciocínio incorreto ao considerar que a ordem de escolha dos dias era importante. Dois dos alunos reconheceram a situação como um problema de Combinação Simples, mas erraram a fórmula que fornece o seu número.

Três dos participantes chegaram a um resultado incorreto multiplicando 12 por 14. Destes três, apenas José Maria forneceu uma explicação para seu raciocínio, que reproduzimos abaixo:



4. Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana ?

12·14 = 168 modos diferentes de escolher seus dois dias de trabalho, pois para cada 12 hs ele terá 12 escolhas para combinar com essa e como são 14 períodos de 12 hs em uma semana, logo ao fazer 12·14 = 168, temos o número de modos.

Figura 5.2.36: Resposta de José Maria, incorreta, em que é feito o produto $12 \cdot 14$ (E2)

Inicialmente acreditamos que José Maria aparentemente lembrava que vários problemas combinatórios se resolvem usando uma multiplicação, e parece que apenas quis adaptar valores fornecidos no enunciado para efetuar essa multiplicação. Após analisar melhor a sua resposta, chegamos a uma possível explicação para seu raciocínio: o aluno dividiu a semana de 7 dias em 14 períodos de 12 horas. Isto feito, pensou: o primeiro período de trabalho de 12 horas pode ser escolhido de 14 maneiras; já o segundo, só pode ser escolhido de 12 maneiras, pois o período de 12 horas que faz parte do primeiro dia de trabalho já escolhido não pode ser utilizado, pois em caso contrário, os dois períodos de trabalho seriam no mesmo dia, o que contraria o enunciado do problema.

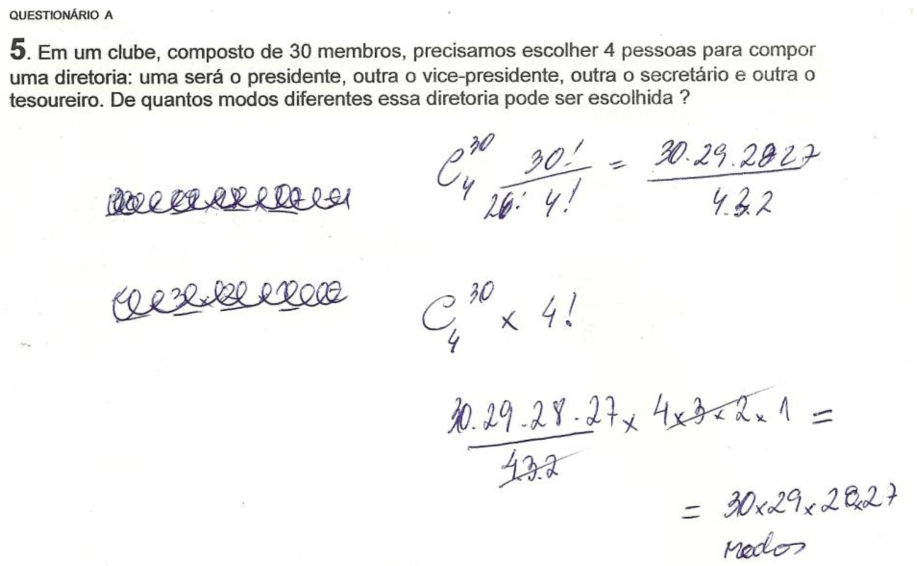
A tabela abaixo mostra a classificação dos erros observados nesta questão:

Tabela 5.2.10: Tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 4 (as porcentagens estão em itálico)

Tipos de Erros	Frequência
E1	10 *29,4*
E2	15 *44,1*
E4	2 *5,9*
E5	2 *5,9*
E6	5 *14,7*
Total	**34** ***100***

Análise da questão 5A (39 questionários)

Dos 26 alunos que responderam corretamente esta questão, 17 a resolveram utilizando simplesmente o Princípio Multiplicativo, efetuando o cálculo $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$. Outros 6 alunos aplicaram diretamente a fórmula do número de Arranjos Simples de 30 elementos, tomados 4 a 4. Os outros 3 alunos calcularam o número de Combinações Simples de 30 elementos tomados 4 a 4, e depois multiplicaram o resultado por 4!, para contar o número de modos de se permutar os 4 alunos de lugar. Ilustramos essas respostas com três imagens, retiradas dos questionários de Luis Guilherme, Elisa e Stephanie:



QUESTIONÁRIO A

5. Em um clube, composto de 30 membros, precisamos escolher 4 pessoas para compor uma diretoria: uma será o presidente, outra o vice-presidente, outra o secretário e outra o tesoureiro. De quantos modos diferentes essa diretoria pode ser escolhida ?

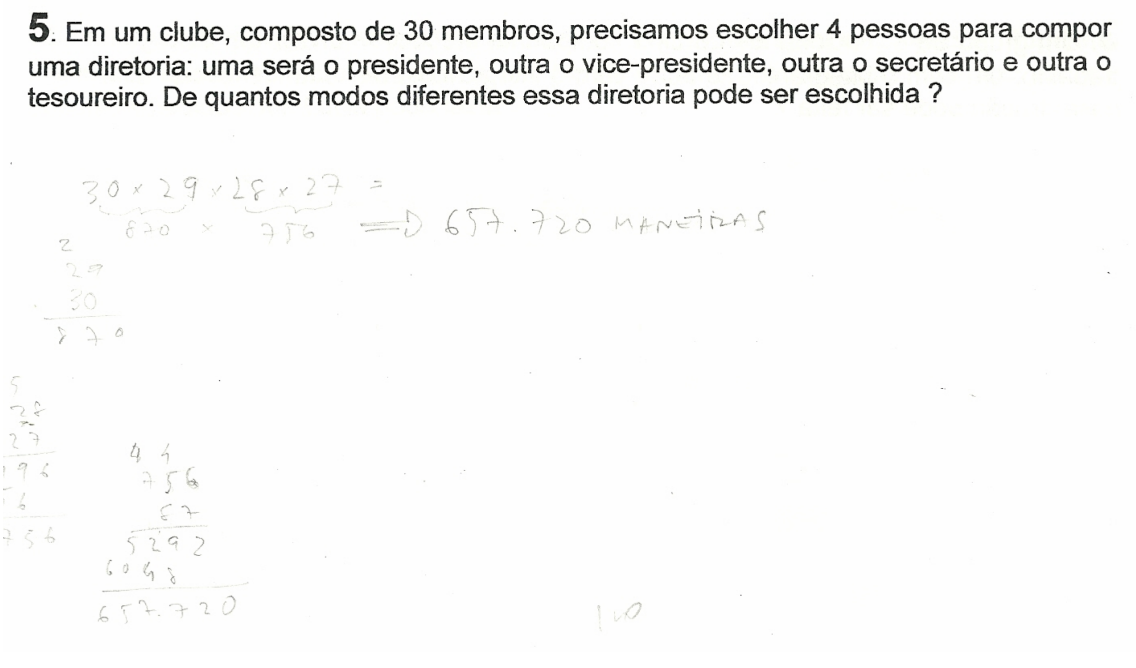
C_4^{30} $\frac{30!}{26!\ 4!} = \frac{30.29.28.27}{4.3.2}$

$C_4^{30} \times 4!$

$\frac{30.29.28.27}{4.3.2} \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 =$

$= 30 \times 29 \times 28 \times 27$ modos

Figura 5.2.37: Resposta de Luis Guilherme, correta, exemplo de solução em que se multiplicam $C_{30,4}$ e 4!

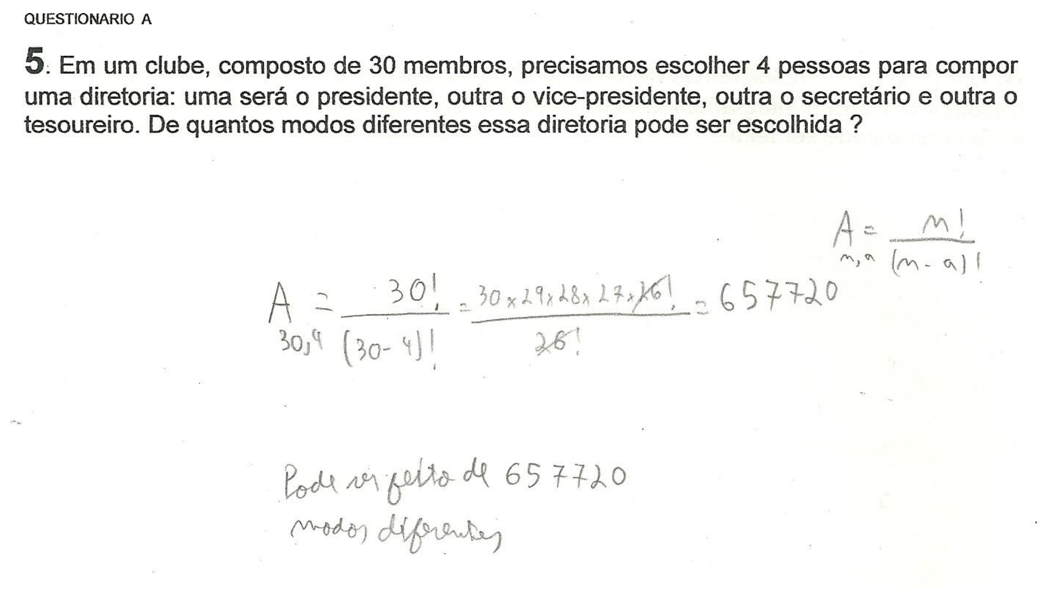


5. Em um clube, composto de 30 membros, precisamos escolher 4 pessoas para compor uma diretoria: uma será o presidente, outra o vice-presidente, outra o secretário e outra o tesoureiro. De quantos modos diferentes essa diretoria pode ser escolhida ?

$30 \times 29 \times 28 \times 27 =$

$870 \times 756 \Rightarrow$ 657.720 MANEIRAS

Figura 5.2.38: Resposta de Elisa, correta, ilustrando o uso do Princípio Multiplicativo


QUESTIONARIO A

5. Em um clube, composto de 30 membros, precisamos escolher 4 pessoas para compor uma diretoria: uma será o presidente, outra o vice-presidente, outra o secretário e outra o tesoureiro. De quantos modos diferentes essa diretoria pode ser escolhida ?

$$A_{m,a} = \frac{m!}{(m-a)!}$$

$$A_{30,4} = \frac{30!}{(30-4)!} = \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times \cancel{26!}}{\cancel{26!}} = 657720$$

Pode ser feito de 657720 modos diferentes

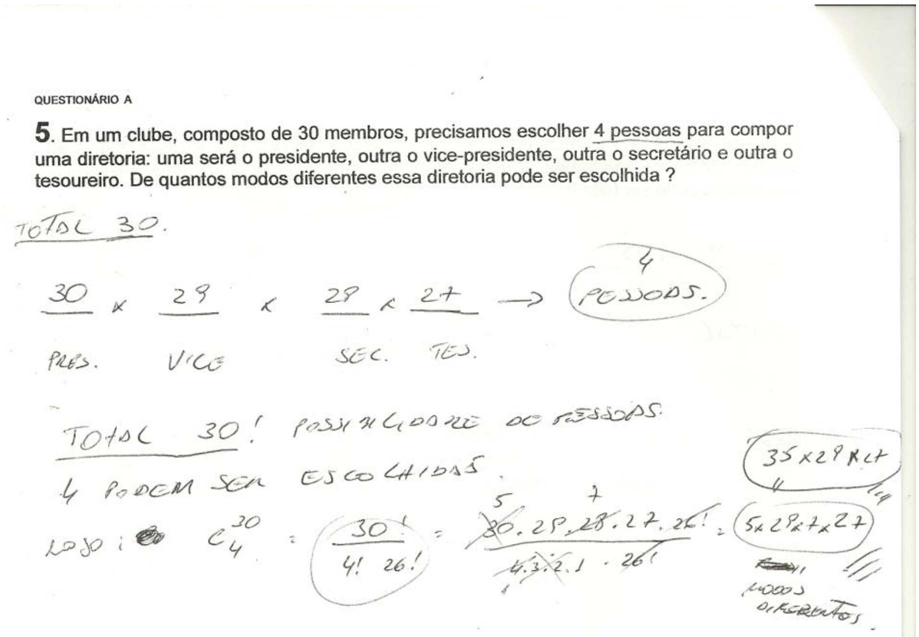
Figura 5.2.39: Resposta de Stephanie, correta, ilustrando uma solução utilizando Arranjos Simples.

Na tabela a seguir apresentamos as técnicas utilizadas nesta questão pelos alunos que a resolveram, corretamente ou não:

Tabela 5.2.11: Técnicas utilizadas pelos alunos para responder à questão 5A (as porcentagens estão em itálico)

Técnicas Utilizadas	**Frequência**
Princípio Multiplicativo	18 *46,2*
Princípio Aditivo	0 *0*
Modelos Prontos	19 *48,7*
Enumeração	0 *0*
Resposta sem Justificativa	0 *0*
Não responderam	2 *5,1*
Total	**39** ***100***

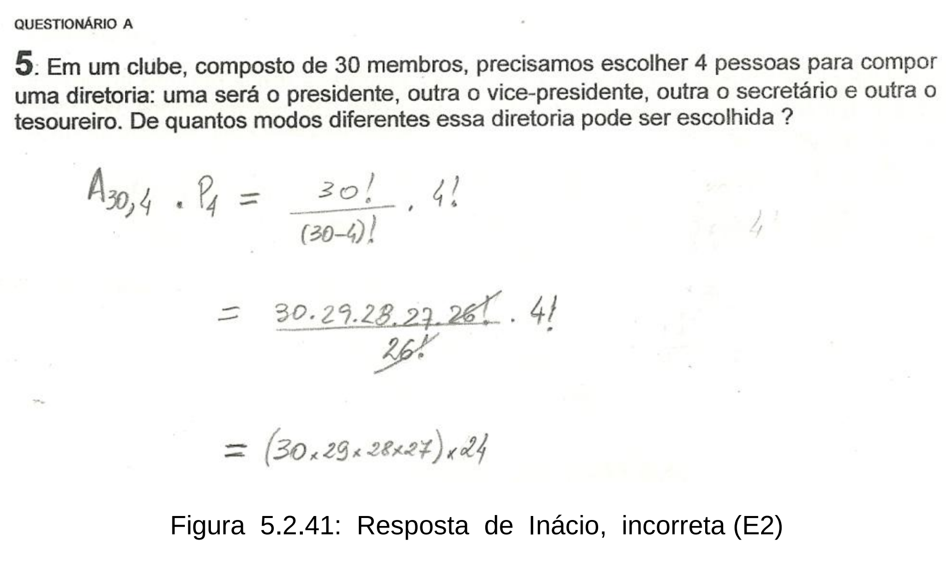
Nas onze questões erradas, o erro mais freqüente foi a utilização do cálculo do número de Combinações Simples ao invés de Arranjos Simples, desconsiderando assim a importância da ordem para o problema, devido à hierarquia entre os cargos. Tal erro foi observado em 6 das 11 questões erradas. Uma ilustração deste erro se encontra na resposta dada por Jean, na figura abaixo:


QUESTIONÁRIO A

5. Em um clube, composto de 30 membros, precisamos escolher 4 pessoas para compor uma diretoria: uma será o presidente, outra o vice-presidente, outra o secretário e outra o tesoureiro. De quantos modos diferentes essa diretoria pode ser escolhida ?

Figura 5.2.40: Resposta do aluno Jean, incorreta, em que utiliza a fórmula do número de Combinações Simples para responder o problema (E1)

Ainda nesta questão, 4 alunos cometeram o mesmo erro, ilustrado pela resolução de Inácio, logo a seguir:


QUESTIONÁRIO A

5. Em um clube, composto de 30 membros, precisamos escolher 4 pessoas para compor uma diretoria: uma será o presidente, outra o vice-presidente, outra o secretário e outra o tesoureiro. De quantos modos diferentes essa diretoria pode ser escolhida ?

$A_{30,4} \cdot P_4 = \frac{30!}{(30-4)!} \cdot 4!$

$= \frac{30.29.28.27.\cancel{26!}}{\cancel{26!}} \cdot 4!$

$= (30 \times 29 \times 28 \times 27) \times 24$

Figura 5.2.41: Resposta de Inácio, incorreta (E2)

Essa resposta mostra que, para esses 4 alunos, os Arranjos Simples não são configurações já ordenadas, havendo a necessidade de se multiplicar por 4!, para aí sim contarmos a troca da ordem entre as pessoas selecionadas para os cargos.

Outra aluna, Lorena, resolveu a questão do seguinte modo:

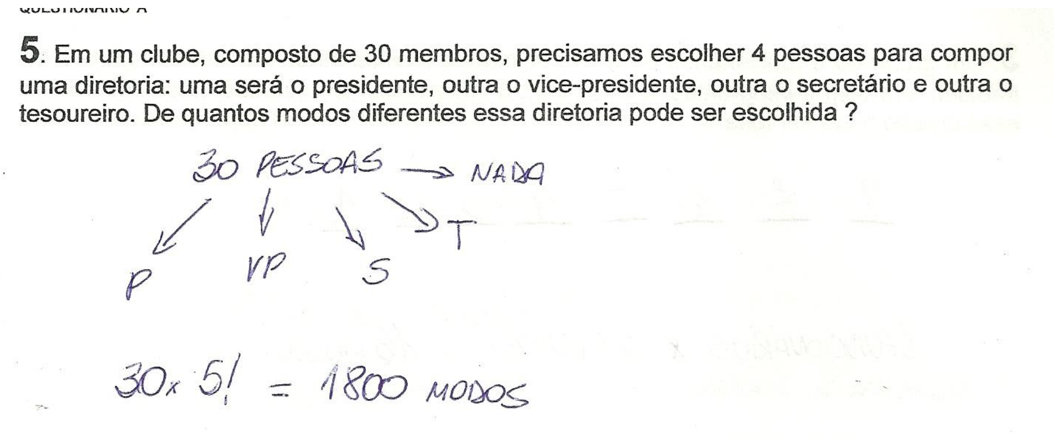


Figura 5.3.2.42: Resposta de Lorena, incorreta (E1)

Essa aluna considerou 5 possibilidades: uma pessoa poderia ser Presidente (P), Vice-Presidente (VP), Secretário (S), Tesoureiro (T) ou não ocupar nenhum dos cargos. A aluna conta então o número de permutações entre os cinco cargos (considerando “nada” como um cargo), e multiplica esse valor por 30, pelo fato de serem 30 os membros do clube.

A tabela a seguir mostra nossa classificação para os erros encontrados nessa questão:

Tabela 5.2.12: Tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 5A (as porcentagens estão em itálico)

Tipos de Erros	Frequência
E1	6 *54,5*
E2	5 *45,5*
Total	**11** ***100***

O fato de termos classificado todos os erros encontrados em E1 ou E2 mostra que os alunos que erraram tiveram grande preocupação em ajustar o problema a um modelo ou fórmula, quando bastava o uso do Princípio Multiplicativo para solucioná-lo. Além disso, em quase a metade dos casos os alunos desconsideraram a importância da ordem nesta questão, devido à hierarquia entre os cargos que seriam ocupados pelas pessoas, e pelo fato de que uma pessoa não poderia ocupar mais do que um cargo.

Análise da questão 5B (38 questionários)

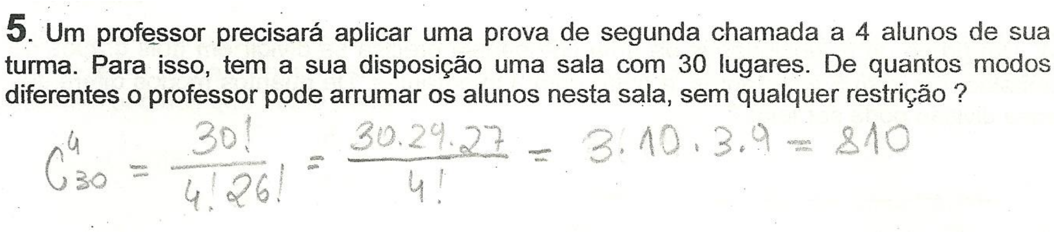
Na análise da questão 5B encontramos 13 respostas corretas. Destas, em 9 os alunos utilizaram o Princípio Multiplicativo, efetuando $30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27$. Outros 3 alunos utilizaram a fórmula do número de Arranjos Simples, $A_{30,4}$, e uma das alunas calculou $C_{30,4}$ e depois multiplicou esse resultado por 4!, para contar as possíveis permutações de lugar entre os 4 alunos. A tabela a seguir resume as informações sobre as técnicas utilizadas pelos alunos ao responder essa questão, corretamente ou não:

Tabela 5.2.13: Técnicas utilizadas pelos alunos para responder à questão 5B (as porcentagens estão em itálico)

Técnicas Utilizadas	**Frequência**
Princípio Multiplicativo	12 *31,6*
Princípio Aditivo	1 *2,6*
Modelos Prontos	20 *52,6*
Enumeração	0 *0*
Resposta sem Justificativa	2 *5,3*
Não responderam	3 *7,9*
Total	**38** ***100***

Das 25 questões restantes 4 estavam em branco e as demais, erradas.

Encontramos 13 questões com o mesmo tipo de erro: utilização da fórmula do número de Combinações Simples no lugar da fórmula de Arranjos Simples, conforme ilustramos abaixo com a resolução de Atílio:

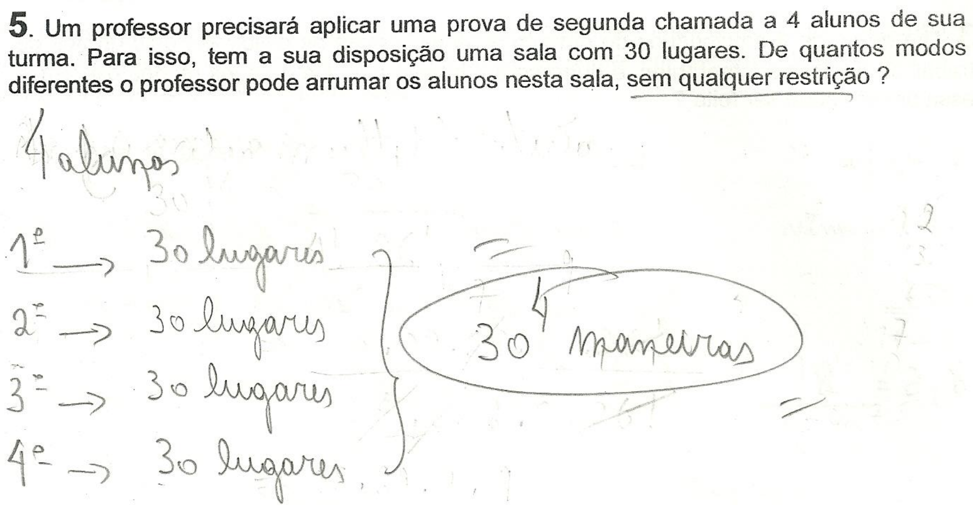

5. Um professor precisará aplicar uma prova de segunda chamada a 4 alunos de sua turma. Para isso, tem a sua disposição uma sala com 30 lugares. De quantos modos diferentes o professor pode arrumar os alunos nesta sala, sem qualquer restrição ?

$$C_{30}^{4} = \frac{30!}{4!26!} = \frac{30.29.27}{4!} = 3.10.3.9 = 810$$

Figura 5.2.43: Resposta de Atílio, incorreta, em que usa um modelo incorreto para contar o que é pedido (E1)

Atílio e os outros doze alunos não consideraram que trocando os alunos de lugar, chegariam a uma nova configuração para a arrumação da sala, desconsiderando assim a importância da ordem, neste problema.

Já Ivan, resolveu a questão do seguinte modo:


5. Um professor precisará aplicar uma prova de segunda chamada a 4 alunos de sua turma. Para isso, tem a sua disposição uma sala com 30 lugares. De quantos modos diferentes o professor pode arrumar os alunos nesta sala, sem qualquer restrição ?

4 alunos

1º → 30 lugares
2º → 30 lugares
3º → 30 lugares
4º → 30 lugares

30^4 maneiras

Figura 5.2.44: Resposta do aluno Ivan, incorreta (E3)

Ao tentar resolver o problema, Ivan desconsiderou que após o 1º aluno ter escolhido um dos 30 lugares, ao 2º aluno só restariam 29 lugares disponíveis, e após este escolher restariam apenas 28 lugaresdisponíveis para o 3º aluno, sobrando apenas 27 lugares para o 4º e último dos alunos escolher se sentar.

Os demais alunos que erraram cometeram um dos seguintes erros: multiplicaram 4 por 30, 4! por 30, 4 por 30! ou 4! por 30!. Um dos alunos que multiplicou 4 por 30, Lucílio, desenhou o seguinte esquema:

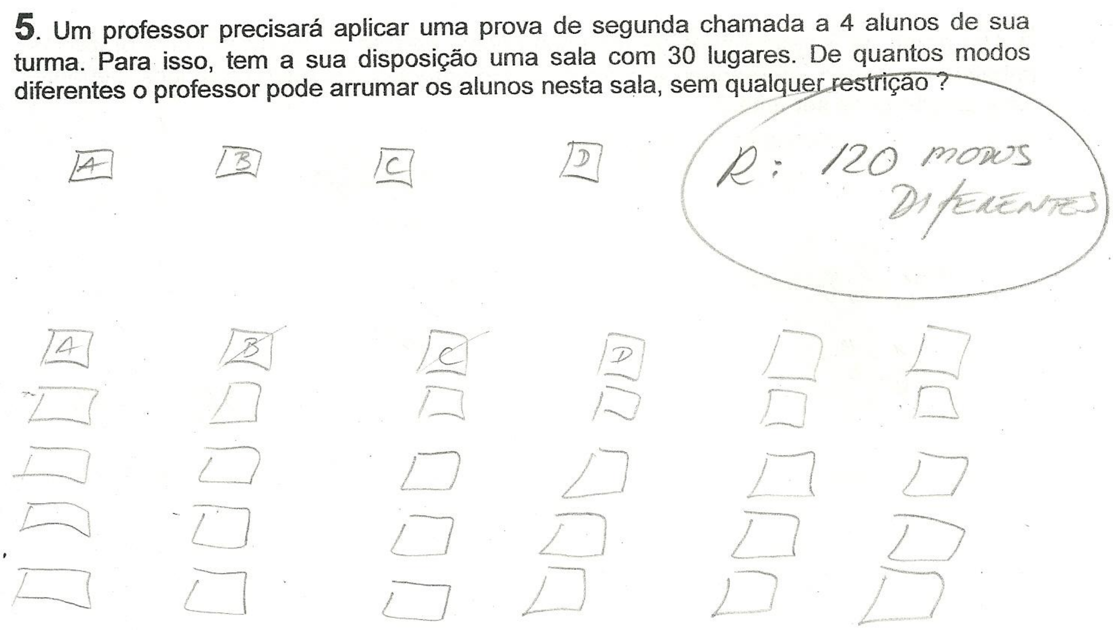


Figura 5.2.45: Resposta do aluno Lucílio, incorreta (E1)

O aluno Lucílio compreendeu o enunciado da questão e representou esquematicamente os 30 lugares disponíveis, com 4 deles ocupados pelos 4 alunos, denominados A, B, C e D. Porém não soube como contar o número de maneiras de se trocar esses 4 alunos de lugar, e por isso acreditamos que multiplicou 30 por 4 por serem os únicos dados numéricos do problema. Quanto às outras multiplicações mencionadas, nenhum aluno apresentou algum esquema ou justificou por escrito as contas feitas, de modo que consideramos os mesmos respostas erradas sem justificativa.

A tabela abaixo mostra uma classificação para os erros encontrados nesta questão:

Tabela 5.2.14: Tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 5B (as porcentagens estão em itálico)

Tipos de Erros	Frequência
E1	7 *31,8*
E2	11 *50*
E3	1 *4,6*
E5	1 *4,6*
E6	2 *9*
Total	**22** ***100***

Como podemos observar na tabela, embora tenham surgido outros erros além de E1 e E2, estes foram maioria, a exemplo da questão 5A. No caso da questão 5B, a maioria dos alunos desconsiderou que, trocando a posição dos alunos, chega-se a uma nova arrumação da sala. Em alguns casos, embora o aluno estivesse indo pelo caminho correto, com ou sem o uso de fórmulas, acabou contando a mais devido ao fato de não perceber que tanto o Princípio Multiplicativo quanto a fórmula do número de Arranjos Simples se referem a arranjos ordenados de objetos.

Análise da questão 6 (77 questionários)

Conforme mencionamos no início dessa seção, essa questão foi a questão em que houve mais erros e mais respostas em branco. A figura abaixo mostra a resposta do único aluno que a respondeu corretamente, Marcel:

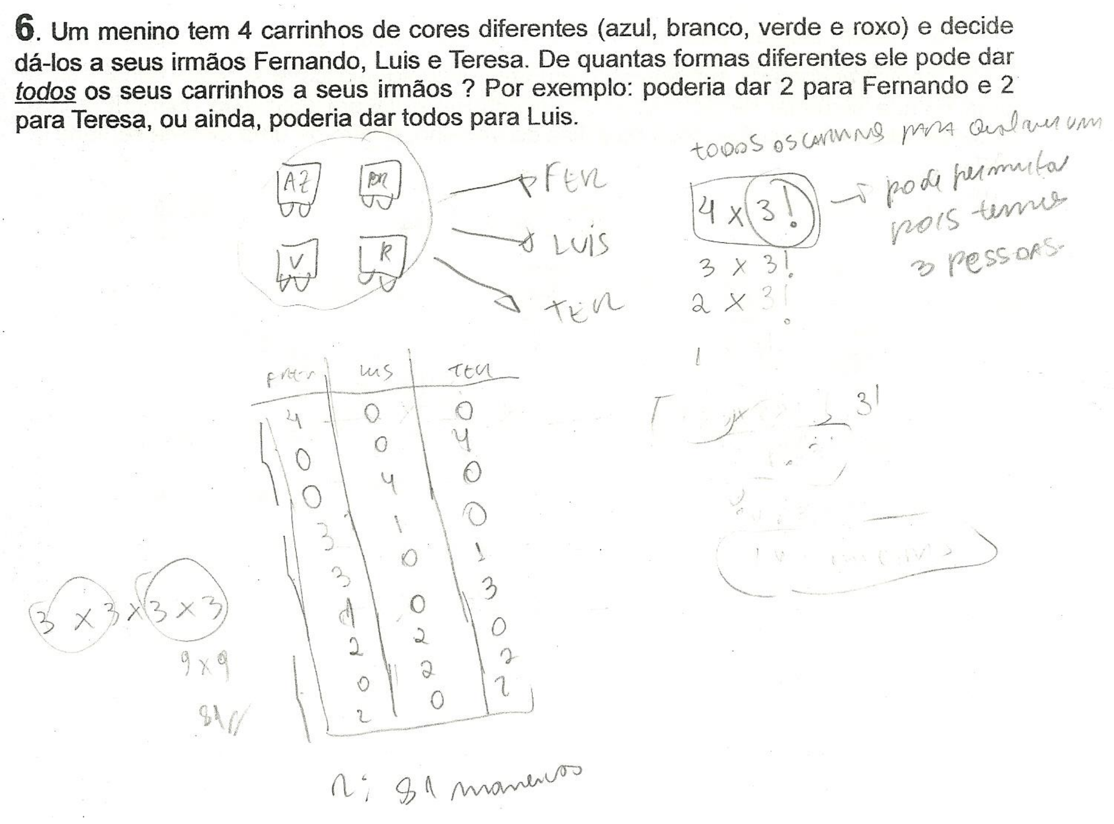

6. Um menino tem 4 carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e roxo) e decide dá-los a seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes ele pode dar *todos* os seus carrinhos a seus irmãos ? Por exemplo: poderia dar 2 para Fernando e 2 para Teresa, ou ainda, poderia dar todos para Luis.

Figura 5.2.46: Resposta de Marcel, a única correta dada para esta questão

Aparentemente, Marcel chegou à solução após apoiar seu raciocínio nos esquemas da figura, dentre eles uma tabela em que tenta contar os modos de distribuir os carrinhos entre os três irmãos, apenas do ponto de vista da quantidade. Não podemos afirmar com certeza se ele percebeu que a estratégia da tabela era trabalhosa e por isso a abandonou, ou se foi durante esta tentativa que ele percebeu que o esquema montado no canto inferior esquerdo o levaria à solução. Ali, Marcel quis dizer que cada fator do produto representava um carrinho que seria dado a um dos irmãos, e o valor 3 de cada um dos fatores representava o número de opções de escolha de qual irmão receberia o referido carrinho.

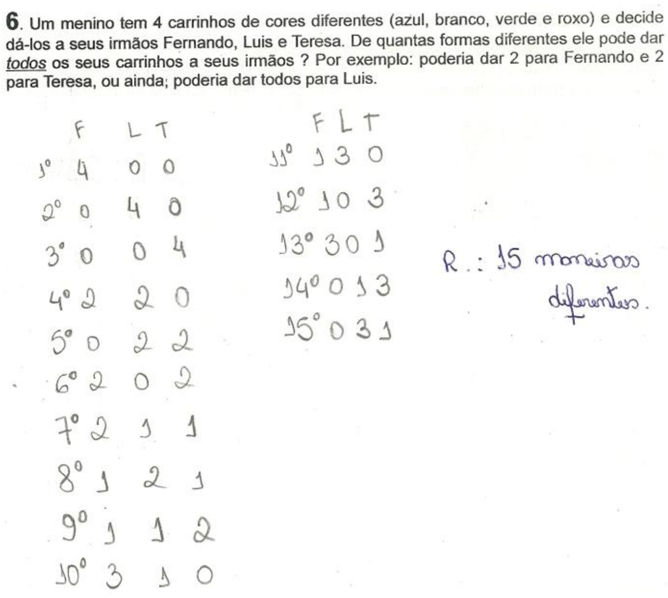
Dos alunos restantes, 11 deixaram a questão em branco. A tabela abaixo apresenta as técnicas utilizadas pelos 66 alunos que responderam a esta questão, corretamente ou não:

Tabela 5.2.15: Técnicas utilizadas pelos alunos para responder à questão 6 (as porcentagens estão em itálico)

Técnicas Utilizadas	Frequência
Princípio Multiplicativo	15 *19,5*
Princípio Aditivo	7 *9,1*
Modelos Prontos	27 *35,1*
Enumeração	14 *18,2*
Resposta sem Justificativa	3 *3,9*
Não responderam	11 *14,3*
Total	**77** ***100***

Passemos à análise das 65 respostas incorretas que observamos.

Verificamos que 14 alunos dividiram as possibilidades de distribuição em casos, enumerando-os com o uso de tabelas ou esquemas, como o aluno Jorge Henrique:


6. Um menino tem 4 carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e roxo) e decide dá-los a seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes ele pode dar *todos* os seus carrinhos a seus irmãos ? Por exemplo: poderia dar 2 para Fernando e 2 para Teresa, ou ainda; poderia dar todos para Luis.

	F	L	T
1°	4	0	0
2°	0	4	0
3°	0	0	4
4°	2	2	0
5°	0	2	2
6°	2	0	2
7°	2	1	1
8°	1	2	1
9°	1	1	2
10°	3	1	0
11°	1	3	0
12°	1	0	3
13°	3	0	1
14°	0	1	3
15°	0	3	1

R.: 15 maneiras diferentes.

Figura 5.2.47: Resposta de Jorge Henrique, incorreta (E4)

Embora esses alunos tenham contado corretamente a distribuição das quantidades de carrinhos, erraram a questão ao não contar as possibilidades distintas para cada distribuição, já que os carrinhos eram distinguíveis pela cor. Outros 14 alunos tentaram fazer o mesmo, mas cometeram erro na enumeração dos casos possíveis. Assim como os 15 colegas já mencionados, estes 14 deixaram claro que para eles bastaria contar a distribuição das quantidades de carrinhos que o problema já estaria resolvido.

A exemplo de Manuela, 16 alunos perceberam que além das possibilidades de distribuição das quantidades, deveriam também contar o número de modos de se distribuir os 4 tipos de carrinhos entre os irmãos. Alguns desses alunos dividiram a contagem em casos exclusivos para posteriormente usar o Princípio Aditivo, mas erraram na contagem de um ou mais desses casos, o que os levou a uma resposta incorreta:

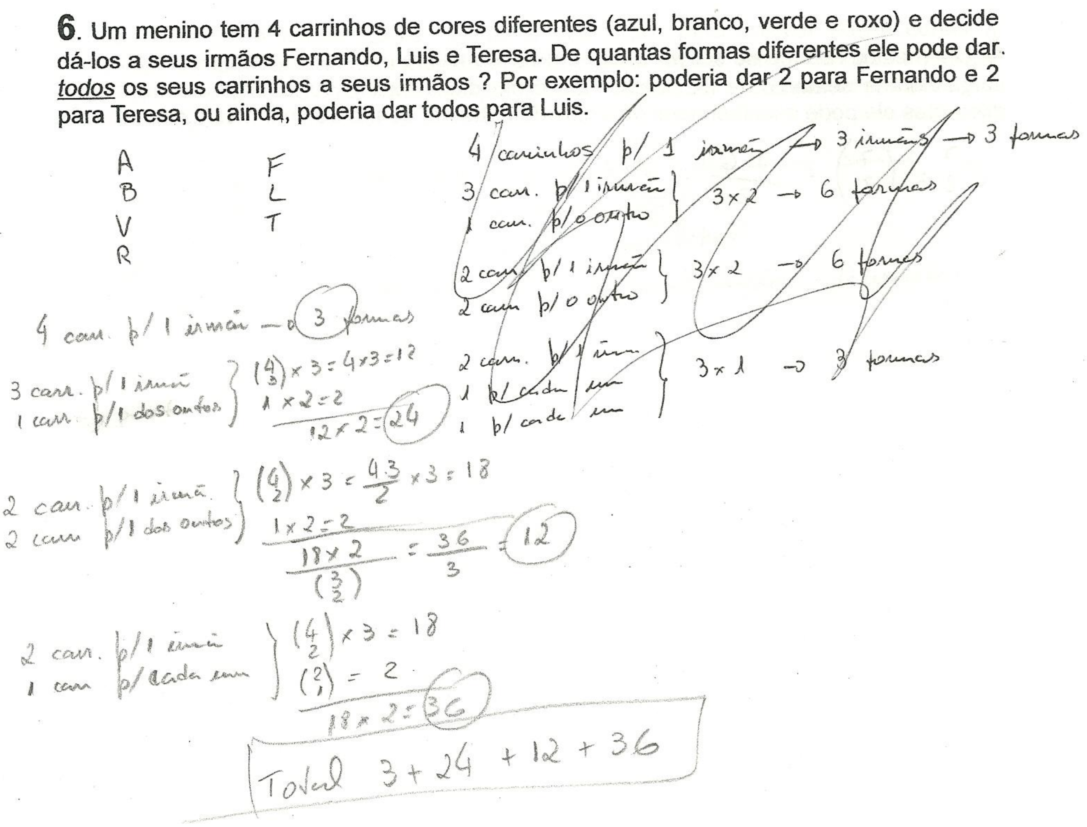


Figura 5.2.48: Resposta de Manuela, incorreta (E1)

O erro de Manuela se deu ao contar as possibilidades de se dar dois carrinhos para um irmão e dois para outro, com um dos irmãos não recebendo nenhum carrinho (são 18 possibilidades e não 12, como calculou Manuela).

Cinco alunos deram $4^3 = 64$ como resposta a esta questão. Acreditamos que cada fator 4 se referia a um dos três irmãos, que teria 4 opções de carrinhos para receber. Nesse caso, esses alunos não levaram em conta, dentre outros fatores, que a quantidade de carrinhos vai diminuindo conforme a divisão vai sendo feita. Sete alunos responderam utilizando fórmulas, aparentemente adaptando os dados das questões às mesmas, como $C_{4,3}$, ou $A_{4,3}$, sem perceber que tais modelos não respondiam à pergunta proposta. Um dos alunos não entendeu o enunciado e considerou que cada irmão deveria receber pelo menos um carrinho, contando de modo errado o número de possibilidades para esta interpretação. Já os demais alunos deram respostas para as quais não conseguimos inferir nenhum tipo de raciocínio combinatório que as justifiquem.

A tabela abaixo resume nossa classificação para os erros observados nesse problema:

Tabela 5.2.16: Tipos de erros encontrados nas resoluções da questão 3 (as porcentagens estão em itálico)

Tipo de Erro	Frequência
E1	12 *18,5*
E3	48 *73,8*
E5	5 *7,7*
Total	**65** ***100***

A maior parte dos erros observados se deu porque os alunos desconsiderarem que os carrinhos eram distintos, e contaram o número de possibilidades para distribuir os carrinhos entre os irmãos, somente do ponto de vista da quantidade que cada um receberia. Além disso, chamou a nossa atenção nesse problema o fato de que a maior parte dos alunos imaginou o problema resolvido, com os carrinhos já distribuídos, para contar o número de possibilidades de se fazê-lo. Embora tal raciocínio conduza à solução, é bem mais trabalhoso do que seguir a recomendação contida em LIMA et al (2002):

> *"Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devemos tomar", p. 86*

Os alunos poderiam ter se colocado no lugar da pessoa que distribui os carrinhos, o que provavelmente os levaria à solução através do cálculo de $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$.

CAPÍTULO 6 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

No início deste trabalho, nos propusemos a responder as seguintes perguntas, referentes ao ensino da Análise Combinatória na escola básica:

1. Como os livros didáticos brasileiros têm abordado a Análise Combinatória, e como essas abordagens favorecem ou não o desenvolvimento do raciocínio combinatório ?
2. Como a Análise Combinatória vem sendo cobrada nas provas de vestibular e nos testes de larga escala ?
3. Como se encontram os alunos recém aprovados no vestibular (e portanto recém saídos do ensino médio), do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio combinatório ?

Iremos agora retornar a essas perguntas, mostrando em que medida nossa pesquisa fornece elementos para respondê-las.

6.1 Como os livros didáticos brasileiros têm abordado a Análise Combinatória, e como essas abordagens favorecem ou não o desenvolvimento do raciocínio combinatório ?

No capitulo 1, vimos que os PCNs sugerem que o tema Análise Combinatória deve ser trabalhado um pouco a cada ano de escolaridade. Em um primeiro momento, do 6º ao 7º ano, tal assunto deve ser abordado com o uso do Princípio Multiplicativo, apoiado em estratégias como o uso de tabelas e árvores de possibilidades. Posteriormente, do 8º ao 9º ano, devem ser trabalhados problemas que explicitem as vantagens do uso do Princípio Multiplicativo em relação à métodos de contagem direta, quando o mais importante for contar os elementos de um conjunto, sem necessariamente explicitar quais são. Vimos também que tanto os PCNs quanto o PCNEM sugerem que a Análise Combinatória deve ser vista não só como uma área própria, mas também como ferramenta para resolver problemas envolvendo o cálculo de probabilidades.

Todos os livros que analisamos no Capítulo 4 atendem a estes critérios. A Análise Combinatória é trabalhada sempre através de problemas, em contraste com a maneira com que o tema era tratado nos livros antigos que analisamos na seção 1.3, e como pode ser observado na pesquisa de SOUZA (2010).

Quanto à relação da Análise Combinatória com a Probabilidade, fazemos o seguinte comentário: a mesma é apresentada como útil na resolução de problemas de probabilidade, mesmo quando não se tratam de eventos equiprováveis. Por exemplo, no problema da figura 4.2.1.4 (p. 67 de nosso trabalho), não é razoável supor que há eqüiprobabilidade na escolha de carne vermelha, frango ou peixe para a confecção de um prato. O mesmo ocorre com o problema da figura 4.2.2.6 (p. 75 desta pesquisa): o exercício pede que se calcule a probabilidade de acerto em uma aposta da loteria esportiva, sem levar em consideração que não há eqüiprobabilidade de um time ganhar, empatar ou perder. Ambos os problemas são propostos com o objetivo de se contar os casos possíveis e os casos favoráveis. Sem que o professor chame a atenção para o fato, os alunos provavelmente resolverão ambos os problemas utilizando o raciocínio combinatório, mas com uma idéia equivocada sobre eventos equiprováveis.

O trabalho de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996), que detalhamos no capítulo 2, mostrou a importância de considerarmos o Modelo Combinatório Implícito, de DUBOIS (1984), como um importante fator no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Seu estudo mostrou que deve haver um equilíbrio nos problemas propostos aos alunos, dos tipos seleção, alocação e partição. Equilíbrio este que não encontramos em nenhum dos livros que analisamos em nosso capítulo 4. Percebemos que há uma predileção, consciente ou não, pelos problemas ditos de seleção, enquanto que problemas de partição quase não foram encontrados. Se levarmos em consideração que os livros analisados são utilizados por um grande contingente de alunos, a menos que os professores tenham conhecimento dos trabalhos citados, não estarão oportunizando aos alunos a diversidade de situações proposta pela teoria de DUBOIS (1984), resolvendo problemas que, embora variem a técnica necessária para a contagem solicitada, são essencialmente de mesmo tipo.

Também deixamos nossa crítica em relação à falta de uma definição explícita do Princípio Aditivo em todos os livros didáticos que analisamos, tanto os atuais, no capítulo 4, quanto os mais antigos, na seção 1.3. Todos os livros propõem exercícios e problemas em que o mesmo é necessário, aparentemente considerando que a sua aplicação ocorrerá de modo natural ao estudante. Como vimos na análise dos questionários aplicados aos alunos de Licenciatura em Matemática da UFRJ, e que comentaremos com mais detalhes mais adiante, esse raciocínio não é tão "natural" assim.

6.2 Como a Análise Combinatória vem sendo cobrada nas provas de vestibular e nos testes de larga escala ?

Essa pergunta foi por nós formulada com o objetivo de estabelecer uma comparação com os resultados da análise dos livros didáticos. Vimos no capítulo 4 (tabela 4.3.1, p.76) que mais da metade das questões encontradas nos livros didáticos era de Seleção, com uma porcentagem muito pequena de questões de Partição. Já na tabela 4.4.6.1, que traz as questões encontradas nas provas analisadas, percebemos que a maioria das questões encontradas era de Alocação. O número de questões de Seleção era aproximadamente a metade das de Alocação, e encontramos apenas uma questão de Partição.

Vimos que a maior parte das questões encontradas nos livros didáticos eram puramente de Análise Combinatória (tabela 4.3.2, p. 77 deste trabalho), sem estarem vinculadas com o cálculo de alguma probabilidade. Essa relação se manteve nas provas que analisamos, como pôde ser observado na tabela 4.4.6.2 (p. 89 de nossa pesquisa).

Na tabela 4.3.3 (p. 78 de nossa dissertação), podemos verificar que mais da metade das questões encontradas nos livros didáticos analisados no capítulo 4, podiam ser resolvidas aplicando uma única vez alguns dos modelos comumente encontrados nos livros didáticos, modelos esses que descrevemos na seção 2.1. As demais questões requeriam ou apenas a aplicação dos Princípios Aditivo ou Multiplicativo, ou a articulação destes com algum dos modelos citados. Essa relação também se manteve ao analisar as questões das provas, de acordo com os dados da tabela 4.4.6.3 (p. 89 deste trabalho). A diferença é que nas provas houve um aumento na porcentagem de questões em que se fazia necessário o uso do Princípio Aditivo, que foi aproximadamente a mesma do Princípio Multiplicativo. Nos livros, a porcentagem de problemas que precisavam do Princípio Aditivo era bem menor em relação à porcentagem dos problemas que envolviam o Princípio Multiplicativo (aproximadamente a metade).

É fato sabido que livros didáticos e o fazer pedagógico em grande parte das escolas são influenciados pelos exames de vestibular e pelas avaliações externas, como testes de larga escala. Escolas e materiais que preparam o aluno para essas provas e exames são mais bem vistos pela sociedade em geral. Em nossa pesquisa, pudemos notar que, percentualmente, as questões de vestibular apresentaram uma distância menor em relação à quantidade de questões de Alocação e Seleção, diferentemente dos livros didáticos, cuja grande maioria de questões analisadas eram de Seleção. Embora nas provas tenhamos encontrado uma maior variabilidade entre esses dois tipos de problemas, os problemas de Partição foram minoria, a exemplo do que observamos nos livros didáticos. Acreditamos que um dos fatores que podem fazer com que os livros didáticos passem a ter maior variabilidade de problemas, do ponto de vista do Modelo Combinatório Implícito, é justamente um aumento dessa variabilidade nas provas de vestibular e nos testes de larga escala. Também cremos que o mesmo vale para que se passe a dar mais importância ao uso consciente dos Princípios Aditivo e Multiplicativo. Embora os modelos sejam úteis, não substituem o uso inteligente de um desses princípios ou de ambos, de forma articulada.

6.3 Como se encontram os alunos recém aprovados no vestibular (e portanto recém saídos do ensino médio), do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio combinatório ?

Embora alguns alunos de períodos mais avançados tenham também respondido ao nosso questionário, a maioria dos sujeitos da pesquisa se revelou como sendo aluno cursando o 3º período ou períodos anteriores. Com isso, podemos garantir que a maioria dos alunos que participaram de nossa pesquisa ainda não voltou a estudar a Análise Combinatória na faculdade, tendo resolvido as questões apenas com os conhecimentos trazidos do Ensino Médio.

Na tabela 5.1.7 (p. 95 deste trabalho), observamos que os problemas 2, 3 e 4 de nosso questionário, respectivamente classificados como de Alocação, Partição e Seleção, tiveram índices de acerto em ordem parecida com seus quantitativos encontrados nos livros didáticos. A questão mais acertada foi a 4 (de Seleção, maioria nos livros analisados), seguida da questão 2 (de Alocação, de quantidade intermediária nos livros analisados), sendo a questão 3 (de Partição, minoria nos livros didáticos) a que teve o menor índice de acertos dessas três. Tal fato vem confirmar o que já foi observado no trabalho de BATANERO, NAVARRO-PELAYO e GODINO (1996), com os alunos adolescentes na Espanha: embora o modelo matemático necessário para responder às três questões seja o mesmo (Combinações Simples), a situação no contexto do problema influencia na dificuldade de resolução do mesmo. Nossos resultados nos permitem afirmar que os licenciandos tiveram mais facilidade em responder às questões de Seleção do que as de Alocação e Partição.

Na análise das questões 5A e 5B, observamos a mesma diferença de acertos já notadas nas respostas dos problemas 2, 3 e 4: a questão 5A, de Seleção, obteve quase o dobro do índice de acertos da questão 5B, de Alocação. Essas duas questões foram úteis para nossa pesquisa por dois motivos: mostrar que mantendo o modelo matemático (Arranjos Simples) e variando o contexto do problema, aumenta-se a dificuldade para os alunos, e evidenciar que a ênfase que os livros didáticos dão ao uso de modelos os influenciam na hora de resolver uma questão de Análise Combinatória. Mesmo sendo mais fácil utilizar diretamente o Princípio Multiplicativo para resolvê-la, a maioria dos alunos optou por aplicar a fórmula do número de Arranjos Simples, como pudemos ver nas tabelas 5.2.11 (p.126) e 5.2.13 (p.129).

Percebemos que as questões 1A e 1B tiveram índices de acerto bem distintos, como pode ser visto na tabela 5.1.7. Embora a questão 1B também tenha tido um alto índice de acertos, este número foi bem menor do que a taxa de acertos da questão 1A. Tal fato é coerente com o que observamos nos livros didáticos: uma minoria de problemas em que o Princípio Aditivo se faz necessário. Nos dois livros de Ensino Médio analisados, é enunciada no primeiro capítulo do livro (em geral ministrado nos primeiros dias de aula do 1º ano do Ensino Médio) a formulação matemática do Princípio Aditivo, como o número de elementos da união de dois conjuntos, considerando-se os mesmos disjuntos ou não. Em ocasião do ensino da Análise Combinatória, já na metade do 2º ano do Ensino Médio (e portanto mais de 1 ano após a formulação matemática do Princípio Aditivo), não há um retorno explícito ao mesmo, além de não ser feita uma definição intuitiva, no contexto de problemas de contagem.

6.4 Limitações da pesquisa

Foi uma opção nossa priorizar neste trabalho a influência do Modelo Combinatório Implícito (DUBOIS, 1984) no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Assim, todas as conclusões de nossa pesquisa estão restritas à opção feita. Além disso, a quantidade de livros e provas analisadas, bem como o tamanho da amostra de sujeitos que responderam ao nosso questionário, são certamente pequenos em relação ao número de livros, provas e alunos de licenciatura em matemática no Brasil. Uma tentativa de se confirmar ou confrontar os dados e as conclusões obtidos, seria ampliar o número de livros e provas analisadas, bem como a aplicação de um questionário a um grupo maior de alunos, o que não foi possível em nosso trabalho.

Outra maneira de ampliar as conclusões obtidas nesta dissertação seria considerar outros aspectos que também podem auxiliar ou não na aprendizagem da Análise Combinatória, como pode ser visto na pesquisa de BATANERO, NAVARRO-PELAYO E GODINO (1996):

1) A influência da natureza dos objetos a serem contados: embora não apresentemos essa informação de modo quantificado em nossa pesquisa, percebemos durante a nossa análise uma quantidade razoável de problemas referentes à formação de números ou de palavras, a partir de um conjunto específico de, respectivamente, algarismos e letras. Uma investigação a ser feita seria verificar se esse fato ocorre também em outros livros didáticos, e se em conseqüência disso, os alunos têm mais facilidade em resolver problemas de contagem envolvendo esses dois tipos de objetos em relação a outros.

2) A influência dos modelos de contagem: em nosso questionário, trabalhamos com os modelos de Combinações Simples (questões 2, 3 e 4) e de Arranjos Simples (questões 5A e 5B). Em ambos os casos, fixamos esses modelos, e variamos o contexto do problema (Alocação, Seleção ou Partição). Uma alternativa seria fixar um contexto, assim como as quantidades envolvidas, mas variarmos o modelo necessário, para verificar se o desempenho dos alunos muda ou fica invariante.

6.5 Contribuições da pesquisa

Acreditamos que nossa pesquisa pode servir de apoio tanto a professores da educação básica, quanto a formadores de professores.

No primeiro caso, ao ter conhecimento de nossas conclusões, assim como das teorias que embasam a nossa dissertação, os professores do ensino básico terão mais elementos para avaliar livros didáticos ou outros materiais a eles ofertados para o trabalho com os alunos, em relação à Análise Combinatória. Esse mesmo conhecimento pode ser útil a esses professores no sentido de elaborarem material próprio, visando a preencher eventuais lacunas deixados por livros ou materiais, auxiliando-os a desenvolver o raciocínio combinatório de seus alunos.

No segundo caso, dos formadores de professores, é essencial conhecer as dificuldades em Análise Combinatória com que os prováveis futuros professores de matemática chegam à faculdade, assim como os fatores que influenciam a superação dessas dificuldades. A posse ou falta do conhecimento desses fatores, certamente influenciarão na manutenção ou superação dos obstáculos para o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos futuros professores e, consequentemente, de seus futuros alunos .

BIBLIOGRAFIA

BATANERO, C., NAVARRO-PELAYO, P., e GODINO, J.D. **Razonamiento Combinatorio en Alumnos de Secundaria.** Educación Matemática, 8 (1), p. 26-39, 1996.

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília. MEC/SEB, 2006

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO BÁSICA. **PCN+Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília. MEC/SEB, 2006

BRASIL. SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília. MEC/SEF, 1998

DANTE, Luiz Roberto . **Tudo é Matemática** (6° ao 9° ano). 3ª Ed. São Paulo. Editora Ática, 2010

DANTE, Luiz Roberto . **Matemática** (vol. único). 1ª Ed. São Paulo. Editora Ática, 2008

DUBOIS, Jean-Guy. **Une Systématique des Configurations Combinatoires Simples**. Educational Studies in Mathematics 15, p. 37-57, 1984

FERRAZ, Martha C., BORBA, Rute e AZEVEDO, Juliana. **Usando o Software ÁRBOL na Construção de Árvores de Possibilidades Para a Resolução de Problemas Combinatórios**. Anais do X ENEM, Salvador, Bahia. 2010 (Cd-ROM)

HADAR, N. e HADASS, R. **The Road to Solving a Combinatorial Problem is Strewn with Pitfalls**. Educational Studies in Mathematics 12, 1981, p. 435-443

IMENES, Luis M. e LELLIS, Marcelo C. **Matemática para todos** (6º ao 9º ano). 3ª Ed. São Paulo. Editora Scipione, 2007

KAPUR, J. N. **Combinatorial Analysis and School Mathematics**. Educational Studies in Mathematics 3, 1970, p. 111-127

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol.2. 1ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2002

LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Vol.4. 1ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2007

LIMA, Rita de Cássia G. e BORBA, Rute. **O Raciocínio Combinatório de Alunos da Educação de Jovens e Adultos: do Início da Escolarização até o Ensino Médio.** Anais do X ENEM, Salvador, Bahia. 2010 (Cd-ROM)

MORGADO, Augusto C. O. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 7ª Ed. Rio de Janeiro. SBM, 2005

NINA, Clarissa T. D., MENEGASSI, Maria E. J. e SILVA, Mercedes M. **Análise Combinatória: Experiências em Sala de Aula**. Boletim GEPEM 55. Jul/Dez 2009, p. 195-208

PESSOA, Cristiane e BORBA, Rute. **O Raciocínio Combinatório do Início do Ensino Fundamental ao Término do Ensino Médio**. Anais do X ENEM, Salvador, Bahia. 2010 (Cd-ROM)

RIBEIRO, Ib Couto e BORTOLOTI, Roberta D. M. **Análise Combinatória: o que o Teste Padrão nos Informa a Partir das Respostas de Estudantes Veteranos da UNEB / Alagoinhas – BA**. Anais do X ENEM, Salvador, Bahia. 2010 (Cd-ROM)

ROCHA, Nei Carlos S. **Notas de Aula da Disciplina Matemática Combinatória**. Curso de Mestrado em Ensino de Matemática. IM - UFRJ, 2009

ROCHA, Cristiane de A. e BORBA, Rute. **Formação Docente e o Ensino de Problemas Combinatórios: Diferentes Olhares**. Anais do X ENEM, Salvador, Bahia. 2010 (Cd-ROM)

SANTOS, José Plínio O., ESTRADA, Eduardo Luis. **Problemas Resolvidos de Combinatória**. 1ª Ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna, 2007

SANTOS, José Plínio O., MELLO, Margarida P. e MURARI, Idani T. C. **Introdução à Análise Combinatória**. 4ª Ed. Rio de Janeiro. Editora Ciência Moderna, 2007

SOUZA, Analucia C. P. **Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Análise Combinatória Através da Resolução de Problemas**. Dissertação de Mestrado. UNESP - Rio Claro (2010). Disponível em: http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2010/souza_acp_me_rcla.pdf (acesso em novembro de 2011)

ANEXOS

UFRJ - Instituto de Matemática

Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática - Mestrado

Este questionário é parte da pesquisa de dissertação de mestrado de Renato de Carvalho Alves, sob orientação da prof[a] Dr[a] Claudia Segadas.

1. Dados pessoais

Atenção: *em nenhuma hipótese os seus dados pessoais serão divulgados. Os mesmos só são necessários para futuros contatos, com vistas à eventuais esclarecimentos sobre suas respostas.*

Nome: ____

Telefone(s): ____

E-mail(s): ____

Curso: ☐ Licenciatura em Matemática

☐ Bacharelado em Matemática

☐ Outro (especifique) ______________________________________

Período: __________

2. Dados de escolaridade

2.1 Você estudou, durante o *ensino fundamental*, em escolas:

☐ particulares	☐ públicas, da rede: ☐ estadual ☐ federal ☐ municipal	☐ parte em escolas particulares, parte em escolas públicas.

Nome da(s) escola(s) ____

2.2 Você estudou, durante o *ensino médio*, em escolas:

☐ particulares

☐ públicas, da rede:
- ☐ estadual
- ☐ federal
- ☐ municipal

☐ parte em escolas particulares, parte em escolas públicas.

Nome da(s) escola(s) ____

2.3 Sobre o livro didático de Matemática utilizado no ensino fundamental, marque abaixo a resposta mais adequada ao seu caso:

☐ Matemática e Realidade, de Gelson Iezzi, editora Atual
☐ Matemática para Todos, de Luiz Márcio Imenes, editora Scipione
☐ Tudo é matemática, de Luiz Roberto Dante, editora Atual
☐ Não utilizei nenhum dos livros didáticos acima, utilizei o livro
____
☐ Não lembro qual livro didático utilizei
☐ Não utilizei livro didático

2.4 Sobre o livro didático de Matemática utilizado no ensino médio, marque abaixo a resposta mais adequada ao seu caso:

☐ Matemática, Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, editora Atual
☐ Matemática, de Luiz Roberto Dante, editora Atual
☐ Não utilizei nenhum dos livros didáticos acima, utilizei o livro
____
☐ Não lembro qual livro didático utilizei
☐ Não utilizei livro didático

3. <u>Questionário</u>

A seguir, há 6 questões sobre o tópico Análise Combinatória. Ao tentar respondê-las, procure escrever seu raciocínio da maneira mais completa que lhe for possível.

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Lúcia tenha dinheiro para tomar um picolé e comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Lúcia pode fazer ?

2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

4. Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana ?

5. Em um clube, composto de 30 membros, precisamos escolher 4 pessoas para compor uma diretoria: uma será o presidente, outra o vice-presidente, outra o secretário e outra o tesoureiro. De quantos modos diferentes essa diretoria pode ser escolhida ?

6. Um menino tem 4 carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e roxo) e decide dá-los a seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes ele pode dar *todos* os seus carrinhos a seus irmãos ? Por exemplo: poderia das 2 para Fernando e 2 para Teresa, ou ainda, poderia dar todos para Luís.

UFRJ - Instituto de Matemática

Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática - Mestrado

Este questionário é parte da pesquisa de dissertação de mestrado de Renato de Carvalho Alves, sob orientação da prof^{a} Dr^{a} Claudia Segadas.

<u>1. Dados pessoais</u>

Atenção: *em nenhuma hipótese os seus dados pessoais serão divulgados. Os mesmos só são necessários para futuros contatos, com vistas à eventuais esclarecimentos sobre suas respostas.*

Nome: ____

Telefone(s): ____

E-mail(s): ____

Curso: ☐ Licenciatura em Matemática

☐ Bacharelado em Matemática

☐ Outro (especifique) ______________________________________

Período: __________

<u>2. Dados de escolaridade</u>

2.1 Você estudou, durante o *ensino fundamental*, em escolas:

☐ particulares

☐ públicas, da rede:

☐ estadual

☐ federal

☐ municipal

☐ parte em escolas particulares, parte em escolas públicas.

Nome da(s) escola(s) ____

2.2 Você estudou, durante o *ensino médio*, em escolas:

☐ particulares

☐ públicas, da rede:
- ☐ estadual
- ☐ federal
- ☐ municipal

☐ parte em escolas particulares, parte em escolas públicas.

Nome da(s) escola(s) ____

2.3 Sobre o livro didático de Matemática utilizado no ensino fundamental, marque abaixo a resposta mais adequada ao seu caso:

☐ Matemática e Realidade, de Gelson Iezzi, editora Atual
☐ Matemática para Todos, de Luiz Márcio Imenes, editora Scipione
☐ Tudo é matemática, de Luiz Roberto Dante, editora Atual
☐ Não utilizei nenhum dos livros didáticos acima, utilizei o livro ____
☐ Não lembro qual livro didático utilizei
☐ Não utilizei livro didático

2.4 Sobre o livro didático de Matemática utilizado no ensino médio, marque abaixo a resposta mais adequada ao seu caso:

☐ Matemática, Ciência e Aplicações, de Gelson Iezzi, editora Atual
☐ Matemática, de Luiz Roberto Dante, editora Atual
☐ Não utilizei nenhum dos livros didáticos acima, utilizei o livro ____
☐ Não lembro qual livro didático utilizei
☐ Não utilizei livro didático

3. <u>Questionário</u>

Abaixo, há 6 questões sobre o tópico Análise Combinatória. Ao tentar respondê-las, procure escrever seu raciocínio da maneira mais completa que lhe for possível.

1. Em uma lanchonete, há 5 sabores de picolé e 3 diferentes tipos de salgados. Suponha que Maria só tenha dinheiro para tomar um picolé ou comer um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que Maria pode fazer ?

2. Dispomos de 4 cartas iguais. Temos à disposição para colocar essas cartas 5 envelopes de cores diferentes: amarelo, branco, creme, rosa e verde. Se cada envelope pode conter no máximo uma carta, de quantas formas podemos colocar as 4 cartas nos cinco envelopes ?

3. Um grupo de 8 funcionários de uma companhia precisa se dividir em dois grupos de trabalho: um com 5 integrantes, e outro com 3 integrantes. De quantos modos diferentes essa divisão pode ser feita ?

4. Um médico acabou de ser aprovado em um concurso público, e terá que cumprir uma carga horária semanal de 24 horas, 12 em um dia e 12 em outro. De quantos modos diferentes ele pode escolher seus dois dias de trabalho, dentro de uma mesma semana ?

5. Um professor precisará aplicar uma prova de segunda chamada a 4 alunos de sua turma. Para isso, tem a disposição uma sala com 30 lugares. De quantos modos diferentes o professor pode arrumar os alunos nesta sala, sem qualquer restrição ?

6. Um menino tem 4 carrinhos de cores diferentes (azul, branco, verde e roxo) e decide dá-los a seus irmãos Fernando, Luis e Teresa. De quantas formas diferentes ele pode dar *todos* os seus carrinhos a seus irmãos ? Por exemplo: poderia das 2 para Fernando e 2 para Teresa, ou ainda, poderia dar todos para Luís.