UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

PLANEJAMENTO E APLICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ÂMBITO DO PIBID

Juliana Ramos Amâncio

Rio de Janeiro
2012

PLANEJAMENTO E APLICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ÂMBITO DO PIBID

Juliana Ramos Amâncio

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos parcial para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Claudia Coelho de Segadas Vianna

Coorientador: Nei Carlos dos Santos Rocha

Rio de Janeiro

Dezembro de 2012

PLANEJAMENTO E APLICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA O ENSINO DE PROBABILIDADE NO ÂMBITO DO PIBID

Juliana Ramos Amâncio

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Claudia Segadas Vianna

Profa. Dra. Claudia Coelho de Segadas Vianna – IM/UFRJ
Presidente, Orientador

Nei Carlos Rocha

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha – IM/UFRJ
Coorientador

Flávia Landim

Profa. Dra. Flavia Maria Pinto Ferreira Landim – IM/UFRJ

Márcia Maria Fusaro Pinto

Profa. Dra. Márcia Maria Fusaro Pinto – IM/UFRJ

Carvalho

Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho – IMPA

Rio de Janeiro
Dezembro de 2012

A484p Amâncio, Juliana Ramos.
Planejamento e aplicação de uma sequência didática para o ensino de probabilidade no âmbito do PIBID / Juliana Ramos Amâncio. -- Rio de Janeiro, 2012.
x, 225 f. : il. ; 29 cm.
Orientadora: Claudia Coelho de Segadas Vianna

Dissertação (mestrado) – UFRJ / Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2012.
Referências: f. 168-172

1. Didática matemática. 2. Matemática (estudo e ensino) - Tese. I. Vianna, Claudia Coelho de Segadas (Orient.) II.Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. III. Título.

CDD 510.7

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar, agradeço à Deus por me permitir realizar este sonho mesmo com todas as adversidades que a vida oferece. Agradeço à minha família que sempre me estimulou a estudar, entendendo ou aceitando minhas ausências.

Agradeço aos meus orientadores, Claudia Coelho Segadas Vianna e Nei Carlos dos Santos Rocha pela dedicação que tiveram em me orientar, não só na orientação acadêmica, mas também na orientação para vida, amigos conselheiros e pela paciência em minhas limitações.

Agradeço aos demais membros da Banca, professores Flavia M. P. F. Landim, Marcia P. Fusaro, Paulo Cezar P. Carvalho pela disponibilidade dedicada ao projeto e pelas sugestões que fizeram em meu exame de Qualificação, que possibilitaram aprimorar este trabalho. Em especial a Professora Maria Fernanda E. Guimarães uma das responsável pelo meu ingresso no Mestrado e pelo espaço cedido no PIBID.

Agradeço aos licenciandos pela dedicação, colaboração e disponibilidade que tiveram ao participar da Pesquisa, lamento não poder citar seus nomes. Ao professor Janilson F. D. Vieira, professor supervisor do PIBID, pela contribuição que ofereceu a esta pesquisa.

A toda minha turma do Mestrado de 2010, em especial Alicia, Rachel, Chaves, Felipe, Alexandre e ao saudoso Armando, pela amizade e pelas inúmeras horas de estudo em grupo dedicado à Geometria e à Análise. E por fim, agradeço a todos aos meus amigos e professores que diretamente ou indiretamente me ajudaram a concluir este Mestrado.

RESUMO

Neste trabalho buscamos elaborar uma sequência didática em que fossem propostas situações que favorecessem a construção dos conceitos probabilísticos, em um nível introdutório, e que evitassem os equívocos conceituais sobre probabilidade descritos na literatura. Para isso, utilizamos como metodologia de pesquisa a Engenharia didática (ARTIGUE, 1992). O estudo foi realizado em duas vertentes, a primeira refere-se à análise da sequência didática que propõe inserir os conceitos da probabilidade identificados em um estudo teórico e os que julgamos adequados para serem trabalhados no Ensino Médio. Utilizamos a primeira vertente como pano de fundo para segunda que foi a identificação de conhecimentos adquiridos ou explorados pelos licenciandos que aplicaram a sequência didática no âmbito do PIBID. Para isso, utilizamos os estudos de Shulman (1986, 1987) referentes ao conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico de conteúdo e conhecimento curricular.

Palavra Chave: Probabilidade, Engenharia Didática, PIBID, Conhecimentos Docentes.

ABSTRACT

We initially seek to develop a didactic sequence to propose situations that favor the construction of probabilistic concepts in an introductory level, with activities that could help to avoid misconceptions about Probability. For this aim we use, as a research methodology Didactic Engineering by Artigue (1992). The study was conducted in twofold perspectives: the first refers to the analysis of didactic sequence which proposes to insert the concepts of Probability identified in a theoretical study and those we thought suitable to be worked in High School. We use the first part as a backdrop for the second which was the identification of some knowledge acquired or operated by undergraduates who applied the didactic sequence in the context of the PIBID. For this, we applied Shulman’s research (1986, 1987) regarding the content knowledge, pedagogical content knowledge and curricular knowledge.

Keyword: Probability, Didactic Engineering, PIBID, Teachers knowledge.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

1. INTRODUÇÃO

O primeiro contato com o conteúdo de Probabilidade no Mestrado em Ensino da Matemática se deu por meio da disciplina Matemática Combinatória e Probabilidade, no ano de 2009, como aluna avulsa. Experienciei uma enorme dificuldade em realizar as tarefas propostas no curso, pois exigiam muito conhecimento de conteúdo e muita capacidade de interpretação. Entretanto, ao mesmo tempo fascinava-me o assunto, fazendo-me querer aprender e estudar mais e mais este conteúdo, mesmo em face às dificuldades.

No ano seguinte, já como aluna matriculada no Mestrado em Ensino da Matemática, me deparei, pela primeira vez, com a responsabilidade de ensinar Probabilidade aos meus alunos de Ensino Médio. Mesmo tendo concluído a disciplina Matemática Combinatória e Probabilidade, que muito acrescentou à minha formação, senti-me despreparada para lecionar este conteúdo, não sabendo ao certo como ensinar, dado o meu embasamento teórico ainda incipiente, e a pouca experiência necessária para se lidar com os inúmeros obstáculos cognitivos do campo. O livro didático adotado pela escola em que atuo também não ajudava significativamente. Apesar disso, como eu, meus alunos também demonstravam interesse e motivações para a Probabilidade. Diante deste cenário, senti a necessidade de estudar mais profundamente este conteúdo, de maneira a aprimorar meus conhecimentos, me capacitar para os desafios da sala de aula, proporcionando assim aos meus alunos uma aprendizagem mais significativa.

Neste mesmo ano, soube através da professora Maria Fernanda Elbert Guimarães do Instituto de Matemática da UFRJ da existência do PIBID (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência), que incentiva a integração entre professores das redes Estadual e Municipal, licenciandos das universidades públicas e alunos das escolas estaduais e municipais. Este projeto tem como fim contribuir na melhoria do ensino nas escolas públicas onde o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) está abaixo da média nacional, que é atualmente de 3,7. Por outro lado, tem também a finalidade de inserir os licenciandos no âmbito do ensino médio público, visando contribuir para a sua formação profissional. Para minha surpresa e frustração, alguns dos alunos de licenciatura em Matemática da UFRJ vinculados ao PIBID realizavam suas atividades no colégio Estadual no qual trabalho, mas cujo desenvolvimento infelizmente não tive como acompanhar, pois ocorria em turnos e dias diferentes do meu horário de trabalho no ano de 2010.

Diante do potencial de investigação em Ensino da Matemática que o PIBID apresenta, por ser um laboratório experimental que reúne os licenciandos em Matemática e os alunos de Ensino Médio, resolvi unir o meu interesse pessoal de estudar o conteúdo de Probabilidade em conjunção com o PIBID. O presente trabalho tem, por conseguinte, os seguintes objetivos:

1) Criar uma proposta para iniciar o conteúdo de Probabilidade para o Ensino Médio que possa ser aplicada pelos licenciandos vinculados ao PIBID. Para isto, nos valemos dos vários conceitos que permeiam a Probabilidade, dos conhecimentos de conteúdo e pedagógico de conteúdo (SHULMAN, 1986, 1987) e da análise do conteúdo de Probabilidade apresentado no livro didático do Ensino Médio adotado na escola em que se dará o acompanhamento da pesquisa.
2) Identificar, via a proposta criada, algumas das contribuições do PIBID na formação profissional dos licenciados em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

É importante ressaltar que os licenciandos aplicaram a proposta de ensino na escola vinculada ao PIBID e, durante a aplicação, tive o papel de observadora acompanhando apenas na escola na qual trabalho e auxiliando esporadicamente. Enquanto observava, fui recolhendo alguns dados que pudessem auxiliar na pesquisa.

As Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 2006) ressaltam que o conteúdo de Probabilidade é recomendado para todos os níveis de educação básica, em especial para o Ensino Médio, pelo fato de as ideias de incerteza e de probabilidade estarem associadas aos fenômenos aleatórios presentes no mundo natural e no mundo social. Sua importância no ensino se dá também pelo fato de viabilizar a aprendizagem da formulação de perguntas que podem ser respondidas com uma coleta, organização e representação de dados. Além disso, o Ensino de Probabilidade permeou palestras e discussões em encontros de Educação Matemática tais como: IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (ANAIS DO IV SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, BRASÍLIA, 2009); Encontro Nacional de Educação

Matemática (ANAIS DO X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA COMUNICAÇÃO CIENTÍFICA, SALVADOR, 2010).

Este assunto vem sendo estudado e discutido por alguns pesquisadores, destacando-se para esta pesquisa o estudo de Ortiz (2002); Stadelmanns (2003); Bebbett e Anway (2004); Batanero (2005); Viali e Oliveira (2009); e Cabral e Traldi (2010). De um modo geral esses autores ressaltam a importância de se trabalhar com os diversos significados da probabilidade, tais como a Probabilidade Clássica (ou Laplaciana), Frequentista, Geométrica e Condicional, de acordo com o grau de instrução dos alunos.

Nos artigos estudados é possível notar uma tendência em renovar o ensino de Probabilidade, no intuito de torná-lo o mais experimental possível e proporcionar aos alunos uma experiência estocástica desde a infância e, desta forma, uma aprendizagem mais significativa.

Todos os autores concordam que os significados da Probabilidade são inerentes ao conceito e limitar-se a apenas um enfoque reduz a sua amplitude. Por isso, defendem a institucionalização dos diversos significados de acordo com cada nível de ensino. A necessidade de institucionalização é de fato necessária, porém os professores, de uma forma geral, não estão preparados para incorporá-la e nem os livros estão adequados a esta tendência de renovação do Ensino de Probabilidade. É evidente, portanto, a necessidade de mais pesquisas sobre o assunto que procurem estabelecer quais são os conceitos fundamentais para o ensino adequado deste conteúdo. Além disso, é necessário que sejam realizados trabalhos que proponham meios de capacitar os professores de acordo com as mudanças necessárias.

Esta pesquisa pretende contribuir para uma renovação no ensino de Probabilidade, visto que uma das etapas é analisar o livro didático do Ensino Médio adotado pela escola em que se deu a pesquisa, confrontando-o como que propõe esta nova abordagem de trabalhar os diversos significados da Probabilidade sugerida pelos pesquisadores citados anteriormente. Além disso, foi produzida e aplicada uma sequência didática com essa abordagem, visando a uma aprendizagem mais significativa dos alunos. Por outro lado, analisamos as contribuições e as dificuldades do PIBID da escola básica e dos licenciandos, utilizando para estes os estudos de Shulman (1986, 1987). Tendo em vista que foi desenvolvida uma sequência didática, aplicamos para esta parte do trabalho a metodologia da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1992; MACHADO, 2002).

Trabalhamos com os alunos do Ensino Médio de uma Escola Estadual do Rio de Janeiro (colégio no qual trabalho, vinculado ao PIBID), e com os Licenciandos de Matemática da UFRJ vinculados ao PIBID, que realizaram as atividades para o segundado ano na escola em que se deu a pesquisa.

Para facilitar a leitura e o entendimento ressaltamos que todas as vezes que estivermos nos referindo aos bolsistas do PIBID usaremos a expressão "licenciandos" e quando estivermos nos referindo aos estudantes das escolas públicas vinculadas ao projeto PIBID usaremos a expressão "alunos".

1.1 Estrutura da Dissertação

A presente dissertação está estruturada em oito capítulos, iniciando pela Introdução, em que apresentamos as questões centrais de pesquisa, além dos objetivos, justificativas e sua relevância.

No Capítulo 2, explicamos o que é o PIBID, seus objetivos, sua abrangência e a atribuição de cada um de seus participantes. Apresentamos, também, algumas pesquisas que visam divulgar as contribuições do PIBID na formação inicial dos futuros professores que fizeram parte da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM, Recife, Brasil, 2011. Além disso, descrevemos a organização e as atividades desenvolvidas no PIBIB Matemática na UFRJ, desde a sua implementação em 2009 até o período em que se deu a pesquisa de campo em 2011.

O Capítulo 3 visa tecer, inicialmente, algumas discussões sobre o ensino de Probabilidade para dar suporte na elaboração da sequência didática. Nestas, incluímos, também, algumas considerações sobre as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro, e o livro didático adotado pela escola estadual em que se deu a pesquisa, restringindo-se ao conteúdo de Probabilidade. Além disso, apresentamos a categorização dos conhecimentos docentes segundo Shulman (1986, 1987) a fim de, posteriormente, termos condições teóricas para identificar as contribuições do PIBID na formação profissional dos licenciandos em Matemática vinculados ao projeto.

O objetivo do Capítulo 4 é apresentar e justificar a escolha metodológica desta pesquisa, a Engenharia Didática. Descrevemos o que é a Engenharia Didática e como se estrutura, apresentamos, também, os instrumentos de pesquisa utilizados ao longo do processo.

No Capítulo 5 apresentamos cada fase da Engenharia Didática aplicada em nossa pesquisa, descrevendo toda a sequência didática, bem como a sua análise a priori, experimentação, análise a posteriori e validação. A análise a posteriori das aulas está orientada a validar a proposta de inserir os significados da Probabilidade que julgamos adequados ao nível médio e a identificar aqueles momentos de aula em que os licenciandos manifestaram seus conhecimentos de conteúdo, pedagógico de conteúdo e o conhecimento curricular.

Criamos o Capítulo 6 para sugerir as modificações na sequência didática decorrentes da análise a posteriori com o propósito de aprimorá-la, fazendo uso, novamente, da Engenharia Didática aplicada em nossa proposta inicial. Para isso, retomamos as sugestões apresentadas na análise a posteriori e elaboramos uma nova aula que nomeamos de “4.1”.

No Capítulo 7 apresentamos as entrevistas com os licenciandos, com o objetivo de propiciar visibilidade, através de seus testemunhos, das práticas formativas que ocorreram no âmbito do PIBID. Destacamos as experiências adquiridas pelos licenciandos (visando principalmente ao conhecimento de conteúdo, o conhecimento pedagógico de conteúdo e o conhecimento curricular), identificamos as dificuldades vivenciadas dentro do PIBID no ano de 2011, fizemos uma breve discussão quanto à aprendizagem dos alunos e uma avaliação da viabilidade da sequência didática e suas contribuições.

Para finalizar, apresentamos as considerações finais desta dissertação, fazendo um resumo das principais discussões que foram realizadas em detalhe ao longo dos capítulos, para, em seguida, apresentar as contribuições referentes a cada objetivo proposto do nosso estudo, apresentar as suas implicações para a educação e projeções para próximas linhas de pesquisa.

2. O QUE É PIBID?

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) é um programa do Ministério da Educação, gerenciado pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), que oferece bolsas para estudantes de cursos de licenciatura plena, O objetivo do Governo através do PIBID é o incentivo à formação de professores e a elevação da qualidade da educação pública brasileira por meio da articulação feita entre a educação superior e as escolas públicas.

O PIBID vem-se expandindo desde o seu lançamento em 2007. No início, sua prioridade era atender as áreas de Física, Química, Biologia e Matemática para o Ensino Médio. Atualmente visa contemplar toda a Educação Básica.

A fim de tentarmos dimensionar a proporção que o PIBID vem alcançando, iremos apresentar alguns dados relativos ao ano de 2011, que foram expostos em setembro de 2011 no II Encontro Nacional dos Coordenadores do PIBID que ocorreu em Brasília (NEVES, 2011). Neste ano, faziam parte do projeto 30.344 bolsistas. Dentre esses, podemos citar 21.598 alunos de licenciatura, 3.198 professores das escolas públicas que atuavam como supervisores dos licenciandos bolsistas, 1938 escolas vinculadas a 146 universidades públicas. Sua abrangência, de acordo com a região, foi 10 programas no Centro-Oeste, 38 no Nordeste, 15 no Norte, 45 no Sudeste e 38 no Sul. Além desses números, vale ressaltar também que em 2009 eram 266 escolas atendidas por 43 universidades públicas.

No encontro foram ressaltadas algumas das principais contribuições do PIBID para a formação profissional dos licenciandos e para a formação continuada dos professores supervisores. Entre elas podemos citar, mais especificamente: a diminuição da evasão e o aumento da procura pelos cursos de licenciatura; valorização das licenciaturas e dos licenciandos na comunidade acadêmica; a articulação entre teoria e prática, universidades e escolas básicas; aumento de trabalhos dos bolsistas em eventos científicos; reconhecimento da escola básica como um campo de produção e construção de conhecimento; produção de materiais didáticos; criação de laboratórios de ciências e informática; e aumento da participação dos alunos das escolas em olimpíadas científicas. Essas contribuições interferem diretamente na melhoria da qualidade dos cursos de licenciaturas e das escolas públicas vinculadas ao projeto.

O PIBID oferece bolsas aos licenciandos; aos Supervisores, aos coordenadores de área, ao coordenador de área de gestão de processos educacionais e ao coordenador institucional. Recursos para financiar as despesas com a execução das atividades vinculadas ao projeto são também repassados.

Cada bolsista tem suas devidas responsabilidades. Os licenciandos devem desenvolver ações pedagógicas em escolas da rede pública de educação básica, cumprindo as atividades e metas previstas dentro do projeto aprovado pela CAPES, disponibilizando no mínimo 30 horas mensais sem prejudicar o seu desempenho no curso de licenciatura. O supervisor é o docente da escola pública responsável por controlar a frequência e acompanhar as atividades presenciais dos licenciandos bolsistas sob sua orientação, na escola (ANEXO DA PORTARIA Nº 260, DE 30 DE DEZEMBRO DE 2010).

O coordenador de área é o docente responsável pela coordenação do subprojeto na área de conhecimento selecionada pelas instituições. Deve orientar, avaliar e acompanhar todas as atividades desenvolvidas pelos bolsistas (licenciandos e professores) no subprojeto. O coordenador institucional é o docente que responde pela coordenação geral do PIBID, é quem articula e implementa o programa no âmbito da Instituição de Ensino Superior. Deve acompanhar todas as atividades desenvolvidas em cada subprojeto de sua instituição. O coordenador de área de gestão de processos educacionais é o docente que apoia o coordenador institucional no desenvolvimento do projeto (ANEXO DA PORTARIA Nº 260, DE 30 DE DEZEMBRO DE 2010).

Segundo a CAPES, Anexo da Portaria nº 260, de 30 de dezembro de 2010, o PIBID tem como objetivos:

a) Incentivar a formação de docentes em nível superior para a Educação Básica.
b) Contribuir para a valorização do magistério.
c) Elevar a qualidade da formação inicial de professores nos cursos de licenciatura, promovendo a integração entre a Educação Superior e a Educação Básica.
d) Inserir os licenciandos no cotidiano de escolas da rede pública de educação, proporcionando-lhes oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino e aprendizagem.

e) Incentivar escolas públicas de Educação Básica, mobilizando seus professores como co-formadores dos futuros docentes e tornando-as protagonistas nos processos de formação inicial para o magistério.
f) Contribuir para a articulação entre teoria e prática necessárias à formação dos docentes, elevando a qualidade das ações acadêmicas nos cursos de licenciatura.

A CAPES recomenda que as universidades desenvolvam os projetos em escolas que estejam com o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) abaixo da média nacional, com o intuito de elevar este índice. Além disso, podem participar do projeto escolas bem sucedidas, pois desta forma os licenciandos vivenciarão as diferentes realidades e necessidades da Educação Básica.

O desenvolvimento do projeto será acompanhado pela CAPES mediante análise de relatórios de atividades contendo a descrição das principais ações realizadas e em andamento.

2.1 Revisão de Literatura: Os Diversos PIBID'S

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), vinculado ao Governo Federal, com financiamento da CAPES, tem a participação de diversas Universidades Federais e, a partir de 2010, também atende a Universidades Estaduais.

Nesta parte descreveremos, brevemente, algumas pesquisas que visam divulgar as contribuições do PIBID na formação inicial dos futuros professores. Vale ressaltar que no início da elaboração do nosso projeto de pesquisa, janeiro de 2011, era difícil encontrar na literatura artigos sobre o PIBID. Atualmente existe uma variedade de estudos publicados. Segue algumas considerações que julgamos relevantes a respeitos das pesquisas, que fizeram parte da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM, Recife, Brasil, 2011.

Evangelista, José e Barbosa (2011) apresentam um trabalho com o objetivo de mostrar as contribuições que o programa PIBID de Araguaína proporcionou aos bolsistas de Matemática. Uma das perguntas norteadora deste trabalho foi: "Quais foram as perspectivas e tendências que o PIBID proporcionou aos bolsistas, especificamente de Matemática, com relação às práticas de ensino?". Os autores ressaltam que as considerações surgiram com o fruto de quase dois anos de participação do programa e de reflexões teóricas baseadas principalmente nas ideias de Ubiratan D'Ambrosio e Ole Skovsmose apud Machado

Evangelista, José e Barbosa (2011). Como resultado, mostraram as influências do PIBID na construção de um educador matemático reflexivo-investigativo.

Pranke, Heling, Rocha e Fonseca (2011) descreveram as suas próprias experiências como discentes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Pelotas, bolsistas do Projeto PIBID. O objetivo do trabalho foi apresentar um relato destas experiências, pois as autoras consideram que as mesmas comprovam que é possível ensinar Matemática através da interdisciplinaridade e de atividades práticas. As atividades foram: reforço escolar através de atividades de monitoria; oficinas e o desenvolvimento de um projeto interdisciplinar sobre tema extraído a partir das necessidades dos alunos. As autoras ressaltam que as atividades trouxeram resultados positivos, pois os alunos tiveram uma aprendizagem significativa firmada na contextualização e na interdisciplinaridade. Além disso, acreditam que participar do PIBID enriqueceu muito a sua formação, pois vivenciaram o cotidiano escolar, aprenderam a ouvir o aluno, a valorizar seus conhecimentos prévios e, assim, buscar alternativas que tornem os conteúdos interessantes, no sentido de uma aprendizagem interdisciplinar e contextualizada.

Nogueira et al (2011) descreveram suas ações realizadas dentro do projeto do PIBID de Matemática da FEG/UNESP (Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá / Universidade Estadual Paulista) e a sua contribuição para a formação dos licenciandos bolsistas. A metodologia adotada para as atividades desenvolvidas no projeto é baseada na reflexão-ação-reflexão que implica análise, discussão e reflexão sobre a inserção do licenciando no contexto escolar. As atividades desenvolvidas foram: observação de aulas; participação nas Horas de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC); participação no conselho de classe; participação em eventos na escola; participação em aulas de reforço; e contação de histórias explorando os conteúdos matemáticos. A participação nas Horas de Trabalho Pedagógico Coletivo (HTPC) é regulamentada por lei estadual e tem como objetivo oferecer a oportunidade de, dentro do horário escolar, reunir os professores e gestores da escola para desenvolverem atividades pedagógicas diversificadas. Os autores destacam que vivenciaram situações reais de um ambiente escolar com toda a sua complexidade inerente, conheceram novas opções metodológicas que servirão para sua prática docente e experiências que lhes permitiram identificar alguns dos problemas atuais no processo de ensino e aprendizagem. Observam, também, que no decorrer deste projeto no ano de 2011 dariam continuidade às atividades que já estão sendo realizadas na escola e fariam intervenções durante as aulas procurando torná-las mais contextualizadas e atrativas para os alunos.

Carvalho (2011) apresenta alguns impactos e desafios que o PIBID – Matemática, na Universidade Estadual de Londrina, tem proporcionado para a formação de alunos universitários, sua influência na formação continuada dos professores supervisores destes alunos e o impacto para os estudantes das Escolas Públicas Estaduais envolvidas. Entre as atividades realizadas pelos bolsistas destacam-se: aulas de reforço, palestras de capacitação para os professores da equipe de matemática dos colégios, disseminação de técnicas de ensino, atividades montadas para a utilização da TV Pendrive, oficina pré-vestibular de matemática e o atendimento de alunos com necessidades especiais. Carvalho finaliza seu artigo ressaltando que aliar os dois grupos de profissionais: os licenciandos e professores supervisores das escolas públicas, ou seja, formação inicial e continuada, gera uma influência lucrativa no ambiente escolar, promovendo elevação da qualidade de ensino, aperfeiçoamento de técnicas didáticas e pedagógicas, sustentação de saberes pautados em estudo e conhecimento adquiridos ao longo do processo colaborativo.

Marim e Andraus (2011) relataram experiência no PIBID desenvolvida em parceria com o curso de Matemática da UFU (Universidade Federal de Uberlândia) e com duas escolas de educação básica. Durante o primeiro semestre de 2010 foram investigados aspectos relacionados ao espaço físico, aos recursos humanos e materiais, e também aos documentos da escola e os planejamentos dos professores. Em alguns planejamentos os autores destacaram a ausência de sugestões de atividades e de indicação dos materiais pedagógicos necessários ao desenvolvimento dos conteúdos propostos. Além disso, os planos de aula restringem-se a esquemas e, às vezes, os professores nem isso faziam. Os autores observaram que o professor diante de uma remuneração limitada propõe-se a trabalhar dois ou mais turnos, o que dificulta a disponibilidade de tempo para atualização ou investimento profissional, acarretando assim a desmotivação e o acomodamento. Por conta disto, os autores ressaltam que é necessária uma mudança de postura do educador além da necessidade de realizar inovações e reflexões a respeito do currículo e do planejamento diário.

Alves, Reis e Franco (2011) descrevem a relevância de um minicurso, Cabri Géomètre, aos alunos da Licenciatura de Matemática da Universidade Estadual de Montes Claros, bolsistas do PIBID. O minicurso de Geometria Dinâmica propõe resgatar os níveis de conhecimento da Geometria básica desses bolsistas, a fim de despertar o interesse pelo ensino e aprendizagem da mesma para multiplicarem os conhecimentos adquiridos ministrando cursos de Geometria dinâmica para alunos e professores de Ensino Básico. Tal estudo enfatiza a formação inicial e aprendizagem de geometria por intermédio de uma abordagem qualitativa, que se deu por meio de observação e aplicação de questionário aos estudantes no final do minicurso. Por meio da análise dos resultados, os autores destacaram a relevância do curso para a formação inicial desses futuros professores de Matemática. Além disso, consideram que o curso foi dinâmico, atraente, interessante e essencial para a vida acadêmica e profissional dos cursistas. Os autores ressaltam que os licenciandos demonstraram muito interesse pelo ensino e aprendizagem da Geometria através do software e que os mesmos acreditam que a utilização do software contribuirá para a elaboração de seus planos de aula e, consequentemente, para uma aprendizagem da Matemática mais significativa, atraente e eficaz.

Scheffer, Zanoello, Lopes, Aguiar, Matos, Ronsoni e Battisti (2011) apresentam reflexões e fragmentos da prática desenvolvida dentro do Programa PIBID numa Escola Pública. Destacam-se: a implementação do Laboratório de Ensino de Matemática da escola; a confecção de jogos e materiais concretos; as oficinas de matemática; e as aulas de complementação pedagógica. Durante as aulas regulares, as bolsistas esclareceram dúvidas e muitas vezes explicaram novamente os conteúdos aos alunos da escola. Em turno contrário aos das aulas, ministraram aulas de apoio pedagógico, com atividades de fixação do conteúdo estudado visando auxiliar os alunos com dificuldades de aprendizagem. Como o projeto se encontrava em andamento, foram apresentados resultados parciais após um semestre de atuação e as acadêmicas avaliaram que o trabalho possibilitou a implantação do Laboratório de Matemática e a confecção de jogos e recursos didáticos. Além disso, as atividades semanais realizadas na escola, segundo as professoras supervisoras, contribuíram para melhorar o índice de aprovação. Os autores ressaltam que esta experiência teve grande valor significativo às bolsistas pois, como futuras professoras, a inserção no contexto escolar durante a formação promoveu a relação entre teoria e prática atingindo, assim, os objetivos previsto pelo programa PIBID.

Tendo como base esses artigos apresentados, iremos resumir alguns dos principais resultados alcançados através do PIBID. Destacam-se principalmente as suas contribuições na formação inicial dos licenciandos bolsistas, na formação continuada dos professores supervisores e na melhoria da qualidade do processo de aprendizagem dos alunos das escolas envolvidas. Destacamos que vários artigos foram escritos pelos licenciandos em conjunto com seus coordenadores. Seguem os resultados apontados pelos artigos em relação:

À formação inicial dos professores:

- Construção de um educador matemático reflexivo e investigativo.
- Enriquecimento da formação inicial dos bolsistas através da vivência do cotidiano escolar.
- Identificação de alguns problemas atuais no processo de ensino e aprendizagem.
- Aumento da participação dos licenciandos em eventos científicos.
- Aperfeiçoamento de técnicas didáticas, pedagógicas e metodológicas a fim de tornar os conteúdos interessantes e promover uma aprendizagem interdisciplinar, contextualizada e significativa.
- Aumento da produção de atividades pedagógicas, confecção de jogos e recursos didáticos.
- Realização de diversas oficinas de matemáticas.
- Vivência da relação entre teoria e prática.
- Valorização dos cursos de licenciaturas e dos licenciandos perante a comunidade acadêmica.

À formação continuada dos Professores:

- Aumento da motivação dos professores a participarem de curso de formação continuada.
- Atualização dos professores em relação às técnicas didáticas, pedagógicas e metodológicas.
- Identificação da necessidade de mudança de postura do educador, já que inovações e reflexões foram instigadas, abrangendo desde o currículo até o planejamento diário.
- Aumento da produção de atividades pedagógicas, confecção de jogos e recursos didáticos.
- Valorização profissional do professor perante a comunidade escolar e acadêmica.

Às escolas públicas vinculadas ao projeto e aos seus alunos:

- Aquisição do gosto pela matemática, pois os alunos se sentem motivados com as aulas e atividades diversificadas propostas pelo programa.
- Obtenção de uma aprendizagem significativa, por parte dos alunos, firmada na contextualização e na interdisciplinaridade.

- Valorização dos conhecimentos prévios dos alunos.
- Elevação da qualidade de ensino nas escolas vinculadas ao projeto.
- Melhoria do índice de aprovação dos alunos nas escolas participantes.

2.2 O PIBID na Matemática da UFRJ

O PIBID teve início no curso de Licenciatura em Matemática da UFRJ em março de 2009. Durante este tempo de participação foram desenvolvidas as seguintes atividades: aulas nas escolas, participação em feiras de ciências nas escolas, produção de recursos didáticos, confecção de jogos, aperfeiçoamento de técnicas didáticas, pedagógicas e metodológicas; participação dos bolsistas (supervisores e licenciandos) em seminários na UFRJ; visitas mensais dos supervisores à UFRJ para decidir os rumos do projeto; visitas dos alunos das escolas à UFRJ para conhecerem laboratórios de pesquisa, participarem de atividades lúdicas ou gincanas ou para exporem projetos que eles desenvolveram.

No segundo semestre de 2011, período que este trabalho acompanhou o PIBID no IM/UFRJ, fizeram parte do projeto dezesseis bolsistas licenciandos, sendo feita a seleção via editais que incluíam o histórico escolar e a carta de interesse em se que levava em conta a disponibilidade de horários que pudessem atender às atividades previstas. Esta seleção foi divulgada pelo SIGA, Sistema Integrado de Gestão Acadêmica.

Três foram as escolas públicas contempladas pelo PIBID-IM-UFRJ. Essas escolas foram selecionadas atendendo ao quesito índice do IDEB abaixo da média nacional. Não houve edital de seleção. Havia no período da seleção e mantém-se até o momento atual um total de três professores supervisores, um de cada escola, e esses foram selecionados de acordo com os seguintes critérios: currículo, carta de interesse e parecer do diretor da escola.

Para as atividades desenvolvidas na UFRJ, os licenciandos foram separados inicialmente por tema, Geometria, Função e Matemática Financeira, com cada grupo tendo a responsabilidade de planejar e desenvolver os materiais que seriam utilizados nas aulas do PIBID realizadas para os alunos das escolas públicas participantes do projeto.

Cada grupo se subdividia em subgrupos, com determinadas atividades a serem desenvolvidas: pesquisar o conteúdo, exercícios e atividades que poderiam ser trabalhados; reunir o material dessas pesquisas para planejar a aula, produzir o material para ministrar a aula e o material para o aluno e pesquisar e desenvolver os recursos pedagógicos de acordo com o conteúdo específico da aula que está sendo planejada.

Todas essas atividades eram realizadas no decorrer de uma semana e todas as informações eram trocadas por e-mails supervisionados pela coordenadora do subprojeto da Matemática e pelos professores supervisores das escolas públicas.

Após esta etapa de pesquisa, troca de ideias, planejamento e confecção, eram realizadas reuniões semanais com a presença de todos os licenciandos bolsistas e com a coordenadora do subprojeto da Matemática, professora Maria Fernanda Elbert Guimarães, da UFRJ. Essas reuniões tinham as seguintes finalidades, no primeiro momento:

- Compartilhar experiências vividas na escola e na aula fazendo uma reflexão da prática desenvolvida, revendo o que deu certo ou que não atendeu os objetivos fixados para verificar o que deveria ser mudado.
- Descrever o desenvolvimento dos alunos durante as aulas.
- Informar qual é a aula que está sendo dada em cada turma do PIBID.
- Estimar o número de aulas necessárias para ensinar um determinando assunto respeitando o ritmo dos alunos.
- Informar os problemas vivenciados dentro das escolas e dentro do PIBID.

No segundo momento:

- Discutir, avaliar e corrigir o material que foi elaborado para as aulas das turmas do PIBID nas escolas. Cada grupo apresentava o que tinha desenvolvido no decorrer da semana anterior para os demais grupos e esses opinavam sobre o material.
- Concluir o planejamento das aulas, a confecção do material do professor e do aluno, e a seleção e produção dos recursos pedagógicos que seriam utilizados nas escolas na próxima semana.
- Informar a necessidade de comprar algum material a ser utilizado nas próximas aulas.

Além desses encontros semanais eram realizados encontros mensais com os licenciandos, supervisores e a coordenadora do subprojeto. Esses encontros eram divididos em dois momentos. No primeiro, acontecia a reunião semanal dos licenciandos e em uma sala separada se reuniam a coordenadora com os professores supervisores. Estes últimos discutiam e avaliavam o trabalho que foi desenvolvido no decorrer daquele mês, o que deveria ser realizado para o próximo mês, o desempenho dos licenciandos e a participação dos alunos.

Em um segundo momento era feita uma reunião com todos, licenciandos, supervisores e a coordenadora, a fim de discutir as atividades desenvolvidas e planejar as próximas atividades.

Outra atividade desenvolvida no segundo semestre de 2011 foi a criação de um projeto, “A Matemática do Lixo”, realizada em conjunto com o subprojeto de Biologia. Um dos objetivos era mostrar que é possível gerar renda através do lixo. Foram realizadas oficinas de reciclagem e pesquisas sobre as estatísticas do lixo (quais são os materiais mais recolhidos). A culminância foi a apresentação do trabalho no pátio do colégio e na UFRJ com a participação das escolas vinculadas.

Após o término do conteúdo de Geometria e Função os licenciandos foram divididos em grupos que trabalhariam com Probabilidade, Matemática Financeira e Trigonometria. Faziam parte do Grupo de Probabilidade cinco licenciandos, dos quais quatro foram acompanhados por esta pesquisa. Foram esses quatro licenciandos que aplicaram a sequência didática sobre Probabilidade nas turmas de segundo ano do PIBID em um único colégio (o colégio no qual trabalho).

De um modo geral, todas as aulas eram pensadas e planejadas de acordo com o conteúdo visto pelos alunos em suas aulas regulares. As aulas aconteciam semanalmente no contraturno. Essas aulas não se resumiam em monitorias, não eram para tirar possíveis dúvidas das aulas regulares e resolver exercícios. É claro, que havendo necessidade, os licenciandos esclareciam eventuais dúvidas e ajudavam os alunos nas resoluções de exercícios, mas não apenas isso. As aulas eram planejadas a fim de construir os principais conceitos matemáticos de acordo com o conteúdo abordado de uma forma dinâmica, envolvendo atividades diversificadas e recursos pedagógicos com o intuito de promover uma aprendizagem mais significativa e prazerosa para os alunos.

Em todas as atividades realizadas pelos licenciandos no PIBID, a preocupação em tornar o ensino prazeroso e dinâmico era uma constante sempre evidenciada. Esta era a essência das aulas, pois as mesmas precisavam ser atrativas para que os alunos pudessem se interessar em participar de aulas que não eram obrigados, e ainda no turno em que não precisavam estar na escola.

Na escola em que foi feito o acompanhamento das atividades dos licenciandos, as aulas aconteciam às terças e sextas nos turnos da manhã e da tarde. Eram duas turmas de primeiro ano na terça-feira, uma no turno da manhã e outra no turno da tarde. Às sextas-feiras havia uma turma de primeiro ano e uma turma de segundo ano nos dois turnos, manhã e tarde.

Cada aula tinha duração de duas horas. Segue um esquema dos horários e das turmas para melhor visualização.

Terça-feira	Turma de 1º ano 10h40min às 12h40min (Alunos da tarde)	Turma de 1º ano 13h às 15h (Alunos da manhã)
Sexta-feira	Turma de 2º ano 08h30min às 10h30min (Alunos da tarde)	Turma de 1º ano 10h40min às 12h40min (Alunos da manhã)
	Turma de 1º ano 13h às 15h (Alunos da tarde)	Turma de 2º anos 15h às 17h (Alunos da manhã)

Tabela 2.1: Horário

Nessas turmas os licenciados se dividiam em duplas: uma dupla para as aulas de terças; duas duplas para as aulas de sextas; uma dupla no turno da manhã; e outra dupla no turno da tarde. Em cada turma um licenciando dava aula e o outro tinha o papel de auxiliar. Na aula seguinte aquele que havia auxiliado dava a aula e aquele que havia dado a aula anterior auxiliava. Esta dinâmica se manteve apenas no início do trabalho, em agosto de 2011. No decorrer eles se dividiram de acordo com as séries, o que dava aula pra o segundo ano auxiliava o que dava aula para o primeiro ano e vice-versa.

3. ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE O ENSINO DE PROBABILIDADE E CONHECIMENTO PARA A DOCÊNCIA

Este capítulo visa tecer algumas discussões sobre o ensino de Probabilidade para dar suporte na elaboração da sequência didática. Além disso, estudaremos a categorização dos conhecimentos docentes por Shulman (1986, 1987) a fim de identificar as possíveis contribuições do PIBID para os licenciandos, em relação a esses conhecimentos.

3.1 O Ensino de Probabilidade

Iremos tecer algumas discussões sobre o ensino de Probabilidade incluindo uma pequena revisão de literatura, algumas considerações sobre as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, e sobre o Currículo Mínimo do Estado do Rio de Janeiro, e uma análise do livro didático adotado pela escola estadual em que se deu a pesquisa, restrita ao conteúdo de Probabilidade.

3.1.1 Significados da Probabilidade e Algumas Implicações Didáticas

Discutiremos alguns artigos que tratam dos significados da Probabilidade. Dentre esses, apresentaremos um estudo realizado por Batanero (2005) no qual foi utilizado um modelo teórico sobre os objetos matemáticos, em que se distingue entre o significado institucional do objeto e o adquirido pelo aluno dentro da instituição. Para Batanero (2005), o mesmo objeto matemático pode ser ensinado com diferentes níveis de complexidade, e consequentemente o seu significado pode ser diferente em diferentes instituições de ensino. Com estas ideias analisa os distintos significados históricos da probabilidade e como esses têm sido apresentados nos Ensinos Fundamental e Médio.

A autora destaca que as primeiras ideias intuitivas da Probabilidade partiram dos jogos de azar e que essas são comuns às crianças e às pessoas que ainda não tiveram acesso ao ensino formal (escolarizado) da Probabilidade. Discute, ainda, a interpretação objetiva (o conceito da Probabilidade visto como uma propriedade de um evento) e a subjetiva (o conceito visto como o grau de crença pessoal).

Ortiz (2002), Stadelmanns (2003) e Batanero (2005) apresentam os significados da Probabilidade, Laplaciano/Clássico, Frequentista, Subjetivo e Formal, discutindo as restrições e expansões de aplicação que cada significado oferece. Com base nesses três autores, apresentamos as principais discussões dessas abordagens e seus pontos controversos.

O significado Clássico da Probabilidade:

- não oferece uma resposta do que é efetivamente probabilidade, apenas um método prático para calcular a probabilidade de alguns eventos simples, e desta forma acaba sendo uma concepção circular e restritiva;
- não pode ser aplicado em espaços amostrais infinitos;
- não pode ser aplicado em espaços finitos e não equiprováveis;
- é o mais fácil se o universo (espaço amostral) for finito e equiprovável.

Quanto ao significado Frequentista da Probabilidade:

- define probabilidade como um número hipotético em que a frequência relativa tende a estabilizar admitindo a existência teórica de tal limite;
- nunca chega a um valor exato da probabilidade, apenas a uma estimativa;
- às vezes é impossível realizar os experimentos, em um grande número de vezes, exatamente nas mesmas condições;
- existe a dificuldade em estabelecer a quantidade de repetições necessária para obter uma boa estimativa da probabilidade;
- devemos considerar que o limite de uma sequência infinita não depende dos primeiros n elementos;
- não pode ser aplicada em uma experiência individual. Determinados eventos (por exemplo, no campo da economia ou da história) não são possíveis de serem repetidos;
- o conceito de "limite" não é dado rigorosamente;
- estabelece uma ligação entre Estatística e Probabilidade;
- permite a simulação de experimentos.

Quanto ao significado Subjetivo da Probabilidade:

- define probabilidade como o grau de crença que a pessoa atribui em um determinado evento, com base em conhecimento pessoal e na experiência;
- não requer repetir os experimentos sob as mesmas condições;

- amplia a sua aplicação no estudo de decisões em Economia ou diagnóstico médico e em áreas humanas;
- a probabilidade só deve obedecer aos axiomas, mas não necessariamente corresponde à realidade de forma absolutamente objetiva (é claro, na prática, que a conexão com a realidade deve ser mantida);
- atribuir uma probabilidade subjetiva de um evento que também corresponde à realidade pode ser particularmente difícil devido à falta de informação;
- é muito provável que a estimativa da probabilidade varie entre pessoas diferentes.

Batanero (2005) apresenta o significado Formal da Probabilidade como sendo a axiomatização de Kolmogorov. Ressalta que o mesmo utilizou a ideia de Borel ao olhar a Probabilidade como um tipo especial de medição. Kolmogorov uniu esta ideia com a Teoria de Conjuntos e a Teoria da Medida para estabelecer os axiomas da probabilidade.

Quanto ao significado Formal/Axiomático:

- é aceito por todos, independente do significado dado à natureza da probabilidade;
- surgiu para suprimir os inconvenientes das definições anteriores;
- a probabilidade passou a ser um modelo matemático para descrever e interpretar os fenômenos aleatórios;
- engloba todas as concepções;
- é inadequado para o Ensino Médio devido a sua complexidade.

Ortiz (2002) destaca outros aspectos conceituais da Probabilidade, como o conceito de Probabilidade Geométrica. Afirma que não é um conceito novo, mas um caso particular da definição geral de Probabilidade como Medida, e que este permite resolver problemas de Probabilidades Geométricas.

Batanero (2005) defende que os diferentes significados da Probabilidade devem ser incluídos progressivamente a partir das ideias intuitivas dos alunos sobre acaso e probabilidade, e que o ensino não pode limitar-se a uma dessas perspectivas, pois elas estão ligadas dialeticamente. Conclui que a Probabilidade deve ser vista como:

- uma razão entre o número de possibilidades a favor do evento e o número de casos possível;

- a partir dos dados das frequências relativas;
- o grau de crença pessoal;
- como um modelo matemático que ajuda a compreender a realidade.

Batanero (2005) conclui também que as controvérsias que têm acompanhado a história da probabilidade também influenciaram o ensino. Ressalta que o cálculo combinatório é muito complexo para ser dado junto com a probabilidade num curso introdutório. Além disso, destaca que um conhecimento genuíno de Probabilidade é alcançado apenas com algum estudo formal, embora deva ser gradual e apoiado na experiência estocástica do aluno. Portanto, para ela são necessárias mais pesquisas para esclarecer quais são os componentes fundamentais do significado de Probabilidade (e, em geral, qualquer conceito matemático), e afirma também que níveis adequados de abstração em que cada componente devem ser ensinados para ajudar os alunos a superar as dificuldades.

Em nossa pesquisa trabalharemos as concepções que julgamos adequadas a serem tratadas no Ensino Médio: Clássica, Frequentista, Formal restrita à concepção Clássica, Geométrica, Subjetiva propondo questões estruturais embrionárias a seu respeito (acrescentada após a análise a posteriori no Capítulo 6), e Condicional. As demais são mais apropriadas ao Ensino Superior. É importante ressaltar que para Ortiz (2002), a probabilidade formal não deve ser tratada entre os 14 e 15 anos. Mas acreditamos em um currículo em espiral, em que nesta faixa haveria apenas uma apresentação de forma embrionária, sem grande aprofundamento, ou seja, ao contrário de Ortiz, acreditamos que seja possível apresentar alguns dos axiomas restritos ao conceito Clássico nesta faixa etária.

Focar apenas em um significado da Probabilidade pode provocar nos alunos distorções conceituais. Bebbett e Anway (2004) em seus estudos destacam dois equívocos comuns em Probabilidade, o equívoco da equiprobabilidade e o da representatividade.

O equívoco da equiprobabilidade é a tendência dos alunos em ver os resultados de um experimento como igualmente prováveis. Por exemplo, os alunos tendem a achar que quando dois dados são lançados, todas as somas de resultados são igualmente prováveis.

O equívoco da representatividade se refere à tendência dos alunos em pensar que a amostra terá, pelo menos aproximadamente, a mesma distribuição de resultados como a distribuição da população. Por exemplo, os alunos acham que uma sequência de lançamentos de uma moeda que tem aproximadamente o mesmo número de caras e coroas é mais provável que uma sequência com muito mais caras do que coroas.

Cabral e Traldi (2010) ressaltam que o equívoco da equiprobabilidade pode ser amenizado de acordo com escolhas didáticas do professor, caso este adote um enfoque para a introdução ao conceito de Probabilidade por meio de problemas que envolvam situações de não equiprobabilidade. Acreditamos que, da mesma forma, possa ser possível amenizar o equívoco da representatividade fazendo escolhas de atividades que comprovem através do cálculo probabilístico que esta tendência está errada.

O trabalho de Silva (2002), Cabral e Traldi (2002) propõe a integração dos conceitos Frequentista e Clássico com o intuito de tornar a aprendizagem significativa e abrangente. A pesquisa de Cabral e Traldi (2010) mostra que os três professores que participaram do estudo que realizaram têm conhecimento da abordagem Laplaciana na introdução do conceito de probabilidade, no entanto falta embasamento teórico sobre a possibilidade de confrontação dos enfoques Frequentista e Clássico.

Assim como Batanero, Cabral e Traldi consideram que o estudo da Combinatória não é um pré-requisito para uma introdução com as ideias probabilísticas, podendo acrescentar dificuldade à aprendizagem dos alunos, evitaremos em nossa sequência didática situações que envolvam cálculos complexos em Combinatória.

O artigo de Viali e Oliveira (2009) analisa o conteúdo de Probabilidade de uma amostra com 5 livros didáticos do Ensino Médio, tomando como referência as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais PCN+ (Brasil, 2003). Resumidamente, conclui que:

- os espaços infinitos são ignorados por todos os autores e o caso contínuo também;
- nenhum dos textos analisados explora a relação entre conceitos probabilísticos e estatísticos;
- todos os autores se limitam a uma abordagem algorítmica e fechada sobre si mesma, sem nenhuma ligação com os demais ramos do conhecimento;
- a ideia de não equiprobabilidade é ignorada pela maioria;
- a Probabilidade é apresentada unicamente pela definição Clássica;
- as definições Frequentista e Axiomática não são explorada;
- as diversas propriedades do cálculo de probabilidades de eventos compostos são exploradas;
- poucos livros apresentam a Probabilidade do ponto de vista geométrico;
- a Probabilidade Condicional é apresentada apenas formalmente, sem nenhuma introdução, motivação ou justificativa e sem relação com os demais conceitos;

- a abordagem dos conceitos de dependência e independência de eventos é estritamente algorítmica.

Outro estudo a respeito dos livros didáticos foi realizado por Ortiz (2002). Ele analisa os conceitos teóricos apresentados por Godino e Batanero (1994, 1997) e aplica esses conceitos na análise de livros didáticos numa amostra de textos de bacharelado. Dentre as conclusões do seu estudo, apresentaremos a seguir as que consideramos úteis para a criação da nossa sequência didática:

- Nenhum livro texto trata todas as concepções.
- Todos tratam a concepção Clássica, não mencionam o problema da circularidade e não insistem o suficiente que esta só se aplica em casos equiprováveis e finitos.
- Quanto à concepção Frequentista deve-se explicar melhor a forma com que as frequências relativas tendem a um valor determinado e discutir o problema associado ao número necessário de realizações para a determinação da probabilidade.
- A Probabilidade Geométrica poderia ser mais usada.
- O cuidado na caracterização de expressões verbais envolvendo a Probabilidade Condicional, a fim de evitar interpretações equivocadas com respeito à influência do evento condicionado na probabilidade do eventos de interesse.

Os pontos controversos de cada conceito apresentado, junto com as falhas dos livros didáticos apontados pelas pesquisas abordadas acima, poderão estar diretamente ligados às causas das principais concepções errôneas da Probabilidade na educação. Entre elas podemos citar os seguintes equívocos veiculados:

- o espaço amostral Ω é único para o experimento;
- só existe espaço amostral finito;
- só existe um modelo para um dado experimento;
- o equívoco da equiprobabilidade;
- o equívoco da representatividade;
- dois eventos aleatórios são independentes se eles não têm resultados comuns, ou seja, confundem os conceitos de eventos independentes com eventos excludentes;
- $\mathrm{P}(A|B) = P(B|A)$.

Em nossa proposta de ensino de Probabilidade tentaremos amenizar esses equívocos com a sugestão de Cabral e Traldi (2010) procurando fazer as escolhas didáticas corretas necessárias a cada uma dessas questões.

Nos artigos estudados é possível notar uma tendência em renovar o ensino de Probabilidade, no intuito de torná-lo mais experimental possível e proporcionar aos alunos uma experiência estocástica desde a infância e, desta forma, possibilitar uma aprendizagem mais significativa. Todos os autores concordam que os significados da Probabilidade são inerentes ao conceito e limitar-se em apenas um enfoque reduz o conceito e o distancia do seu verdadeiro significado. Por isso, defendem a institucionalização dos demais significados de acordo com cada nível de ensino. Diante desta problemática, a necessidade de institucionalização é de fato necessária. Entretanto, os professores de uma forma geral não estão preparados para ensinar esta nova visão e nem os livros estão adequados a esta tendência de renovação do ensino de Probabilidade, havendo assim a necessidade de um número maior de pesquisas sobre quais são os conceitos fundamentais para o ensino adequado deste conteúdo e para a capacitação dos professores de acordo com essas mudanças necessárias.

3.1.2 Probabilidade nas Orientações Curriculares Nacionais

As Orientações Curriculares Nacionais (BRASIL, 2006) formam um documento que trata de três aspectos a respeito do currículo: a escolha de conteúdo; a forma de trabalhar os conteúdos; o projeto pedagógico e a organização curricular. Além disso, a Secretária de Educação básica ressalta que este não é um manual ou uma cartilha a ser seguida, mas um instrumento de apoio à reflexão do professor a ser utilizado em favor do aprendizado.

Este documento sugere que as questões de escolha de conteúdo devem ser cuidadosas e criteriosas a fim de propiciar ao aluno meio para auxiliar na apropriação de conhecimento. Este apresenta os conteúdos básicos em quatro blocos (Números e Operações; Geometria; Análise de Dados e Probabilidade) e ressalta que esses devem ser trabalhados de forma articulada e não isolados.

Nesta pesquisa iremos focar no bloco de Probabilidade. Tal bloco explica que a Probabilidade é recomendada para todos os níveis de educação básica, em especial para o Ensino Médio, devido às ideias de incertezas e de probabilidade estarem associadas aos fenômenos aleatórios presentes no mundo natural e no mundo social. (BRASIL; VOLUME 2, 2006).

> *"Para dar aos alunos uma visão apropriada da importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje, é importante que os alunos tenham oportunidade de ver esses modelos em ação. Por exemplo, é possível simular o que ocorre em certa pesquisa de opinião estimando, com base em uma amostra, a fração de balas de determinada cor em uma caixa.*" (BRASIL; VOLUME 2, 2006, p.78)

A citação acima salienta a importância dos modelos probabilísticos no mundo de hoje e tenta apresentar um exemplo de aplicação para o qual os alunos possam ver esses modelos em ação, entretanto, aos nossos olhos, o exemplo não representa um modelo probabilístico em ação no cotidiano.

Ressaltam ainda que os alunos devem aprender a avaliar e criticar alguns resultados probabilísticos utilizando argumentos que fazem uso da terminologia estatística e probabilística.

> *"O estudo da combinatória e da probabilidade é essencial nesse bloco de conteúdo, pois os alunos precisam adquirir conhecimentos sobre o levantamento de possibilidades e a medida da chance de cada uma delas. A combinatória não tem apenas a função de auxiliar o cálculo das probabilidades, mas tem inter-relação estreita entre as ideias de experimento composto a partir de um espaço amostral discreto e as operações combinatórias. Por exemplo, ao extrair aleatoriamente três bolas de uma urna com quatro possibilidades, esse experimento aleatório tem três fases, que podem ser interpretadas significativamente no espaço amostral das variações."* (BRASIL; VOLUME 2, 2006, p.79)

Destacam ainda que o diagrama de árvores pode ser usado para relacionar os experimentos compostos com a Combinatória. Ao contrário do que está escrito nas Orientações Curriculares em relação ao estudo de Combinatória relacionada ao estudo de Probabilidade, os autores mencionados anteriormente acreditam que o estudo de Combinatória não é um pré-requisito para o primeiro contato com a Probabilidade, podendo até acrescentar dificuldades à aprendizagem.

Talvez essas sugestões possam ser utilizadas para um aprofundamento do conteúdo, não em um momento introdutório. Além disso, para que o conteúdo de Probabilidade seja trabalhado no Ensino Médio, há necessidade de se repensar a reestruturação dos conteúdos distribuídos no currículo. Desta forma será possível aprofundar os conceitos probabilísticos vinculando-os com as ideias combinatórias ainda no Ensino Médio.

São apresentadas também orientações a respeito do que o aluno precisa saber em relação a esse conteúdo: entender conceitos e palavras relacionados à chance, incerteza e probabilidade presentes no cotidiano; compreender que a probabilidade é uma medida de incerteza e que os modelos são úteis para caracterizar eventos e estimar probabilidades.

Ressalta ainda que os alunos precisam descrever as experiências aleatórias em termos de eventualidades e associá-las a um espaço amostral. Exibe a questão da equiprobabilidade, mas não menciona a não equiprobabilidade. Aponta, também, a utilização da Estatística no uso de frequências para estimar a probabilidade de um evento dado.

Os momentos descritos acima são aqueles em que se falou da simulação de eventos e estimativas de probabilidade. Entendemos que estes momentos visam a um ensino mais experimental, a fim de trabalhar com o significado Frequentista da Probabilidade. Entretanto apenas essas considerações são escassas no que diz respeito à importância das diversas abordagens probabilísticas que apresentamos anteriormente, já que não menciona a questão de espaços infinitos e não equiprováveis, a Probabilidade Geométrica e a Probabilidade Condicional.

Outra discussão interessante apresentada nas Orientações Curriculares concernente ao ensino de Probabilidade é o exemplo da aplicação desta fazendo uso de tecnologias. Sugere apresentar as planilhas eletrônicas como uma possibilidade para introduzir a noção de simulação probabilística. Para isto, orienta usar a função “ALEATÓRIO( )”, para simular experimentos aleatórios de variados níveis de complexidade, para que o aluno atribua um significado intuitivo à noção de probabilidade como frequência relativa observada em uma infinidade de repetições (BRASIL, 2006).

Além dessas questões levantam também algumas questões metodológicas. A questão relacionada à nossa pesquisa refere-se ao papel do livro didático nas aulas de Matemática, uma vez que este estabelece o que é importante a ser estudado e a forma mais eficaz de se trabalhar os conceitos matemáticos.

O livro didático é reconhecido por assumir o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado. Justamente por isso, salienta a importância de que seja visto não como um substituto de Orientações Curriculares, mas como um recurso adicional.

Por essas considerações a respeito da importância do livro didático, apresentaremos a seguir algumas observações do livro didático adotado pela escola em que se deu a pesquisa, a fim de identificar o que o livro deixa de trabalhar considerando tanto as orientações curriculares, quanto às considerações tecidas à respeito das diversas abordagens da

Probabilidade. Antes, estudaremos o que o currículo mínimo apresenta a respeito do conteúdo de Probabilidade.

Observamos que as Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino Médio apresentam uma série de considerações sobre o que o aluno deverá saber de acordo com o seu bloco de conhecimento, porém não esmiúçam os conteúdos que de fato deverão ser trabalhados e nem apresentam exemplos de como trabalhar esses conteúdo de forma a desenvolver todas as considerações citadas. O documento se exime desta responsabilidade quando diz que não é um manual ou uma cartilha a ser seguida, mas um instrumento de apoio à reflexão do professor a ser utilizado em favor do aprendizado.

3.1.3 Probabilidade no Currículo Mínimo

O Currículo Mínimo (SEDUCRJ, 2011) é um documento elaborado pela Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro que serve como referência a todas as escolas da rede estadual. Apresenta as competências, habilidades e conteúdos básicos que devem estar nos planos de curso e nas aulas. Desta forma, o Estado pretende garantir os conteúdos essenciais básicos comuns a todas as escolas da rede, de modo que esses estejam alinhados com as atuais necessidades de ensino identificadas nas legislações vigentes, nas Diretrizes e Parâmetros Curriculares Nacionais e nas matrizes de referência dos principais exames nacionais e estaduais.

Em sua apresentação, a Secretária Estadual de Educação esclarece que este currículo propõe um ponto de partida mínimo que precisa ser elaborado e preenchido em cada escola, por cada professor, com aquilo que lhe é específico, peculiar ou lhe for apropriado. Desta forma, ressalta que estará ampliando a autonomia do professor (SEDUCRJ, 2011, p.5).

Reconhece, ainda, que o estabelecimento de um Currículo Mínimo é uma ação norteadora que não soluciona as dificuldades da Educação Básica em 2011, mas que permite criar um solo firme para o desenvolvimento de um conjunto de boas práticas educacionais a fim de construir uma escola e um ensino de qualidade.

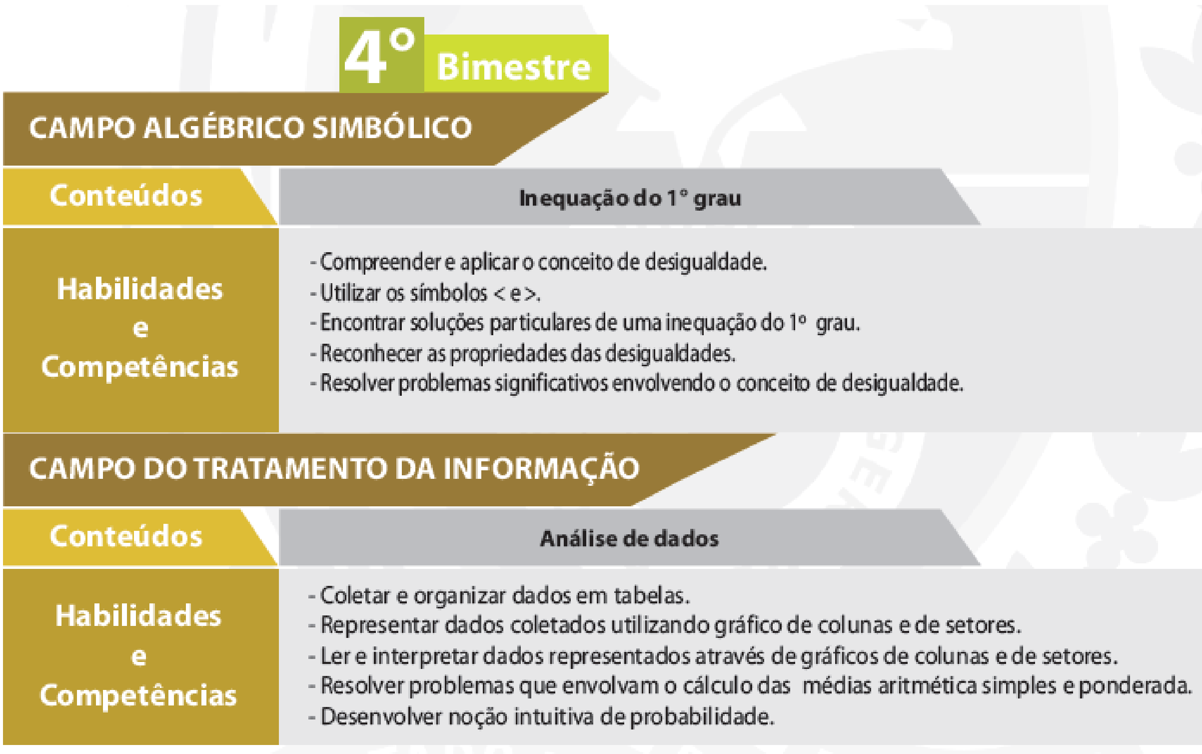
O Currículo Mínimo apresenta o conhecimento distribuído em quatro campos: Numérico-Aritmético, Algébrico-Simbólico, Geométrico e da Informação, os quais vêm planejados por bimestre, destacando as competências e habilidades que devem ser desenvolvidas ao longo de cada série.

> *"É muito importante ressaltar que os conhecimentos elencados neste documento são aqueles considerados fundamentais, sem os quais os estudantes não teriam condições de cursar a série seguinte. Assim, cabe ao professor, além de desenvolver as competências e habilidades aqui sugeridas, aprofundar e/ou avançar mais, respeitando sempre as características e peculiaridades das suas turmas."* (SEDUCRJ, 2011, p 5)

Analisando o conteúdo de Probabilidade no Currículo Mínimo, observamos que os alunos têm o primeiro contato com o tema no sétimo ano do Ensino Fundamental. Porém, este é trabalhado numa visão muito restrita, apenas para construir uma noção intuitiva de Probabilidade. O outro momento em que terão contato com a Probabilidade é o terceiro ano do Ensino Médio.

No sétimo ano, o currículo deixa claro que é apenas para desenvolver uma noção intuitiva da Probabilidade. Porém, no terceiro ano, não avança como deveria, mencionando apenas que o aluno deverá calcular a probabilidade de um evento.

Segue um recorte do layout de como os conteúdos, as habilidades e competências são apresentados neste currículo mínimo. Apresentamos as únicas páginas que apresentam os conteúdos de Probabilidade. No sétimo ano do Ensino Fundamental, a Probabilidade é trabalhada no último bimestre, quando é apresentado o conteúdo de análise de dados.



4° Bimestre

CAMPO ALGÉBRICO SIMBÓLICO

Conteúdos: Inequação do 1° grau

Habilidades e Competências:
- Compreender e aplicar o conceito de desigualdade.
- Utilizar os símbolos < e >.
- Encontrar soluções particulares de uma inequação do 1° grau.
- Reconhecer as propriedades das desigualdades.
- Resolver problemas significativos envolvendo o conceito de desigualdade.

CAMPO DO TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Conteúdos: Análise de dados

Habilidades e Competências:
- Coletar e organizar dados em tabelas.
- Representar dados coletados utilizando gráfico de colunas e de setores.
- Ler e interpretar dados representados através de gráficos de colunas e de setores.
- Resolver problemas que envolvam o cálculo das médias aritmética simples e ponderada.
- Desenvolver noção intuitiva de probabilidade.

Figura 3.1: Recorte do layout do Currículo Mínimo, sétimo ano do Ensino Fundamental

No Ensino Médio, a Probabilidade é estudada no primeiro bimestre do terceiro ano, quando são apresentados os conteúdos de Probabilidade e Combinatória.

Matemática — **3ª SÉRIE / ENSINO MÉDIO**

1° Bimestre

CAMPO NUMÉRICO ARITMÉTICO	
Conteúdos	**Combinatória e probabilidade**
Habilidades e Competências	- Resolver problemas de contagem utilizando o princípio multiplicativo ou noções de permutação simples e/ou combinação simples. - Utilizar o princípio multiplicativo e o princípio aditivo da contagem na resolução de problemas. - Identificar e diferenciar os diversos tipos de agrupamentos. - Calcular a probabilidade de um evento.
CAMPO DO TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO	
Conteúdos	**Estatística: medidas de centralidade e dispersão**
Habilidades e Competências	- Compreender os conceitos básicos de estatística: população, amostra, frequência absoluta e frequência relativa. - Construir, ler e interpretar histogramas, gráficos de linhas, de barras e de setores. - Resolver problemas envolvendo o cálculo da média aritmética, mediana e moda. - Resolver problemas envolvendo cálculo de desvio-padrão.

Figura 3.2: Recorte do layout do Currículo Mínimo, 3ª série do Ensino Médio

Não encontramos nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio os conteúdos esmiuçados que devem ser vistos em cada série. Além disso, as exemplificações de como trabalhar todas as considerações mencionadas em relação a esses conteúdos foram escassas. Ficamos na expectativa de que pudéssemos encontrar os conteúdos esmiuçados (cada conceito relacionado) no currículo mínimo e também não encontramos.

Da mesma forma que as Orientações Curriculares se eximem da responsabilidade citada acima, o currículo das escolas estaduais também menciona que se trata de um ponto mínimo de partida em que cabe ao professor terminá-lo de preencher de acordo com a realidade de sua turma. Desta maneira, fica isento desta responsabilidade, passando-a para o professor. O professor, por sua vez, terá o livro didático como um meio de pesquisar os conteúdos esmiuçados e os exemplos de como ensinar esses conteúdos.

Para termos uma ideia de como o conteúdo de Probabilidade está sendo apresentado, discutiremos a seguir o que o livro didático da escola estadual em que se deu a pesquisa apresenta a respeito deste conteúdo.

3.1.4 Probabilidade no Livro Didático

Com base nos estudos apresentados acima faremos algumas considerações em relação ao livro didático adotado pela escola em que se deu a aplicação de nossa pesquisa.

Pressupostos para análise do livro didático

Nesta etapa, a pretensão não é realizar uma análise do livro didático, e, sim, verificar como o conteúdo de Probabilidade está sendo apresentado no livro didático do Ensino Médio adotado pela escola em que se deu a pesquisa no ano de 2011. Mais especificamente, como é tratada a construção dos diversos significados da Probabilidade neste livro e, com isso, ter uma noção sobre quais conceitos de Probabilidade são apresentados aos alunos deste colégio.

O livro adotado é *Matemática, volume único*, Manuel Paiva. 1ª Ed., São Paulo, Moderna, 2005.

Para auxiliar esta verificação, elaboramos alguns pressupostos que julgamos essenciais no ensino da Probabilidade. Tais pressupostos foram escritos com base nas leituras dos diversos pesquisadores de que nos valemos como referência: Batanero (2005); Cabral e Traldi (2010); Viali e Oliveira (2009); Ortiz (2002); Silva (2002); Bebbett e Anway (2004). Os pressupostos que iremos verificar são apresentados a seguir.

1. Como é tratada a concepção de acaso (aleatoriedade), analisando se o livro identifica eventos determinísticos e aleatórios; se apresenta exemplos do cotidiano; e se explora essas concepções nos exercícios.
2. De que maneira é trabalhada a ideia de espaço amostral e evento, investigando se é evidenciada a não singularidade do espaço amostral; se exibe exemplos de espaços amostrais finitos e infinitos; e se essas questões são cobradas nos exercícios.
3. Se as concepções Frequentista, Clássica, Formal, Geométrica e Condicional da Probabilidade são apresentadas e se tais concepções são utilizadas nos exemplos e exploradas nos exercícios.
4. Se há existência ou não da discussão de espaços equiprováveis e não equiprováveis; se essa questão é explorada nos exemplos e empregada nos exercícios.
5. Como é explorada a concepção Frequentista da Probabilidade, analisando se o livro propõe a execução de atividades experimentais de coleta de dados; se trabalha a questão da frequência relativa e absoluta de determinados eventos

aleatórios; e se ressalta, de alguma maneira, a impossibilidade de repetir experimentos aleatórios indefinidamente nas mesmas condições.

6. Se o livro esclarece que a concepção Clássica é um método prático de calcular a probabilidade de alguns eventos que, obrigatoriamente, vêm de espaços amostrais finitos e equiprováveis; além disso, se discute o motivo da impossibilidade de aplicação deste método em espaços amostrais infinitos ou não equiprováveis.
7. Se há exemplos nos quais as concepções Clássica e Frequentista não podem ser aplicadas, evidenciando como essas concepções se completam.
8. Em relação à abordagem Formal da Probabilidade, quais são os axiomas apresentados. Examinaremos também se o livro discute a coerência dos axiomas ou se estes são apenas apresentados como verdades absolutas, sem nenhum esforço de tentar convencer os alunos de sua razoabilidade.
9. Se o livro apresenta exemplos ou exercícios que envolvem o conceito de Probabilidade como uma Medida que permite resolver problemas de Probabilidade Geométrica.
10. Como é realizada a discussão de união e interseção de eventos e se é ressaltada a diferença entre o uso dos conectivos "e" e "ou".
11. De que modo é estudada a vinculação da Probabilidade Condicional com a multiplicação de probabilidades, analisando como é definido o conceito de dependência e independência dos eventos, como são ressaltadas as diferenças entre $\mathrm{P}(A|B)$ e $\mathrm{P}(B|A)$, e se essas questões são aplicadas nos exemplos e exploradas nos exercícios.

Constatamos que o livro didático não salienta a diferenciação entre experimento determinístico e aleatório; sequer apresenta o conceito de experimento determinístico. Apenas apresenta o conceito de experimento aleatório e sua exemplificação não vai além dos exemplos clássicos de moedas, dados e sorteios.

Verificamos que não são trabalhadas as ideias da não unicidade do espaço amostral, e os exemplos se restringem a espaços finitos e equiprováveis.

A definição de Probabilidade foi feita através de um sorteio de um automóvel a fim de que este exemplo ajude entender que probabilidade é um número que mede a factibilidade de ocorrência de um certo resultado.

A concepção Frequentista é apresentada apenas para caracterizar equiprobabilidade, necessária na definição clássica. Não faz a confrontação do enfoque Clássico com o Frequentista. Não propõe a realização de experimentos, exceto em nível mental. Além disso, apresenta uma única questão que explora o conceito Geométrico.

Não discute a existência de espaços não equiprováveis e todas as questões se restringem a espaços amostrais finitos e equiprováveis, sequer menciona o exemplo clássico da moeda viciada ou do dado viciado.

Em relação ao conceito Clássico, o livro o apresenta com as devidas restrições, mas não discute a impossibilidade de aplicação em espaços amostrais infinitos e/ou não equiprováveis.

Consideramos que a Probabilidade Formal é complexa para ser tratada no Ensino Médio, porém é viável apresentar os axiomas restritos à concepção Clássica, a partir dos quais se pode derivar as propriedades. Desta forma, o livro didático apresenta as devidas propriedades. Além disso, explora exercícios para calcular a probabilidade da interseção e da união de eventos. Ressalta, também que o conectivo "*ou*" indica união de eventos e o conectivo "*e*" indica interseção de eventos.

O livro texto apresenta o conceito de dependência e independência apenas algoritimizado, como consequência da Probabilidade Condicional. Além disso, não salienta a diferença entre $\mathrm{P}(A|B)$ e $\mathrm{P}(B|A)$. Exibe em uma leitura extra o conceito de Valor Esperado em Estatística, através de um problema que calcula o valor mínimo de uma apólice de seguros de carros para cobrir os custos.

Observamos que algumas considerações essenciais sobre o conteúdo de Probabilidade não são mencionadas nas orientações curriculares para o Ensino Médio, não se encontram no Currículo Mínimo e nem nos livros didáticos. Citamos como exemplo, o conceito de experimento determinístico, que é o não exemplo do experimento aleatório; a não singularidade do espaço amostral; o espaço amostral infinito; o espaço amostral de elementos não equiprováveis; a confrontação dos conceitos Frequentista e Clássico; e uma melhor exploração do conceito Geométrico.

Além disso, os dois documentos (as Orientações Curriculares e o Currículo Mínimo) não exemplificam de forma completa quais conteúdos devem ser trabalhados (esmiuçando cada conceito) e muito menos a forma que devem ser ensinados, são dados apenas exemplos e sugestões pontuais. Portanto, fica a cargo do professor escolher o conceito que deve ser trabalhado de cada conteúdo e a maneira de como trabalhar esses conceitos, considerando as Orientações Curriculares e o Currículo Mínimo.

As análises preliminares citadas nos itens 3.1.1 a 3.1.4 são as que consideramos necessárias para elaboração da sequência didática.

3.2 Conhecimentos Para a Docência

Pretendemos nesta parte estudar os conhecimentos que os professores necessitam para a docência, a fim de, posteriormente, termos condições teóricas para identificar as possíveis contribuições do PIBID na formação profissional dos licenciandos em Matemática vinculados ao projeto. Para isso, recorremos aos estudos de Lee Shulman (1986, 1987) referentes à categorização dos conhecimentos docentes (os tipos de conhecimentos necessários para a docência).

Shulman trabalha com a hipótese de que há uma base de conhecimento elaborado para o ensino. Examina as fontes da base de conhecimento necessárias para o ensino e fornece uma visão geral desta base examinando as áreas de conhecimento acadêmico e experiências a partir das quais os professores podem extrair o seu conhecimento.

Shulman inicia seu estudo fazendo algumas indagações a respeito da possibilidade da existência de algo essencial que deve ser aprendido, e do acervo de conhecimentos e habilidades que um professor deve ter para ensinar bem. Ele se questiona em relação à forma de adquirir um extenso corpo de conhecimentos sobre o ensino durante o breve tempo destinado para a formação de professores.

O Pesquisador argumenta ainda que uma base de conhecimento para o ensino não tem caráter fixo e definitivo; quanto mais se aprende, mais chances há de descobrir novas categorias que caracterizam esta base, havendo assim a necessidade de repensá-la e redefini-la.

As categorias definidas por Shulman são destacadas a seguir.

- “Conhecimento do conteúdo.
- Conhecimento geral pedagógico, levando em conta os princípios e estratégias de gestão e organização da classe para além do âmbito do assunto.

- Conhecimento do currículo, com domínio de materiais e programas que servem como "ferramentas para o ofício" do professor.
- Conhecimento pedagógico do conteúdo: a ligação entre a matéria e a pedagogia que é um domínio exclusivo dos professores, sua própria forma especial de entendimento profissional.
- Conhecimento dos alunos e suas características.
- Conhecimento dos contextos educativos, que vão desde o funcionamento do grupo ou classe, gestão e financiamento dos distritos escolares, para o caráter de comunidades e culturas.
- Conhecimento dos objetivos, metas e valores educacionais, seus fundamentos filosóficos e históricos."
(SHULMAN, 1987, p.8, tradução nossa).

Daremos ênfase às categorias de conhecimento do conteúdo específico, conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento curricular.

O Conhecimento do Conteúdo

Diz respeito à organização e à compreensão do conhecimento em si na mente do professor, ou seja, são conteúdos específicos da matéria que o professor leciona. Este conhecimento inclui a relação entre os tópicos do conteúdo e a relação do conteúdo com as outras disciplinas. Inclui também, as compreensões de fatos, conceitos, processos e procedimentos de uma área específica de conhecimento, além das relativas à construção dessa área.

O professor deve ser capaz de definir as verdades, explicar por que uma proposição é considerada justificada e sob quais circunstâncias a crença na sua justificação pode ser enfraquecida ou até mesmo negada. Além disso, espera-se que o professor possa perceber por que um determinado tema é considerado central para uma disciplina enquanto outro pode ser julgado como periférico. Este conhecimento será importante para as tomadas de decisões pedagógicas em relação ao currículo.

O Conhecimento Pedagógico do Conteúdo

É o conhecimento do conteúdo para o ensino, são as formas que tornam o assunto compreensível para os alunos. Shulman (1986) inclui neste conhecimento:

- os aspectos do conteúdo mais pertinentes ao seu ensino;
- os tópicos mais regularmente ensinados de uma área específica do assunto;
- as formas mais úteis de representar as ideias relacionadas ao conteúdo;
- as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações;
- as formas de representar e formular o assunto para torná-lo compreensível para os alunos;
- uma compreensão do que torna a aprendizagem de tópicos específicos fácil ou difícil;
- as concepções, preconcepções e as concepções errôneas que estudantes de diferentes idades trazem para as situações de aprendizagem;
- as estratégias para reorganizar o entendimento dos alunos em relação a essas concepções errôneas.

Este conhecimento é construído constantemente pelo professor ao ensinar a matéria. Ele é enriquecido e melhorado quando o professor o vincula aos outros tipos de conhecimentos. Trata-se de um conhecimento pelo qual o professor estabelece uma relação de protagonismo.

O Conhecimento Curricular

Para Shulman (1986) o currículo é constituído por toda a gama de programas concebidos para o ensino de assuntos específicos de um determinado nível, ou seja, é um conjunto de conteúdos que devem ser ensinados nos diferentes graus da educação. Também é constituido pela variedade de materiais didáticos disponíveis em relação a esses programas, bem como do conjunto de características que servem de indicações e contraindicações para o uso de um currículo especial ou para o uso de materiais do programa em circunstâncias específicas. Além disso, o professor precisa possuir entendimentos sobre as alternativas curriculares disponíveis para a instrução e precisa estar familiarizado com os materiais didáticos utilizados pelos seus alunos em outros assuntos que estejam estudando concomitantemente.

Poderiam ser destacados ainda outros conhecimentos considerados importantes para a formação profissional do professor. Entretanto, diante do problema da pesquisa a ser investigado, nos restringiremos a essas três categorias: conhecimento do conteúdo específico;

conhecimento pedagógico do conteúdo; e o conhecimento curricular, como fundamentação principal.

4. METODOLOGIA DE PESQUISA

O objetivo deste capítulo é apresentar e justificar a escolha metodológica desta pesquisa. Descrevemos a metodologia que foi utilizada e apresentamos os pontos mais relevantes do referencial teórico que subsidiou a nossa metodologia.

4.1 Desenho Metodológico

A abordagem metodológica será fundamentada em uma análise qualitativa dos dados coletados. O objetivo do trabalho é trazer contribuições para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Probabilidade por parte dos alunos, bem como ser um meio que possibilite recolher dados para tentar identificar quais são as contribuições do PIBID na formação profissional dos licenciandos e na formação dos alunos, no nosso caso daqueles acompanhados pela pesquisa. Desta forma, sem um desenho metodológico de caráter qualitativo, seria impossível analisar as contribuições do PIBID na vida de cada participante.

A realização da pesquisa envolveu as seguintes atividades:

- Levantamento bibliográfico com leitura de artigos, teses e livros sobre temas envolvendo Probabilidade.
- Estudos teóricos que auxiliaram a fundamentar e justificar o trabalho.
- Análise do livro didático do Ensino Médio em relação ao conteúdo de Probabilidade, levando em conta os significados da Probabilidade segundo Ortiz (2002), Stadelmanns (2003) e Batanero (2005).
- Criação da sequência didática com base nos estudos teóricos (principalmente nos significados da Probabilidade, segundo Ortiz (2002), Stadelmanns (2003) e Batanero (2005)) e nos resultados da análise do livro didático. A elaboração e aplicação da sequência didática bem como a análise dos resultados se basearam nos princípios da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1992; MACHADO, 2002). Esta sequência didática foi aplicada pelos licenciandos nas turmas do PIBID e tive apenas o papel de observadora, podendo auxiliar eventualmente.
- Entrevista inicial com os licenciandos para conhecer o perfil de cada um dos participantes, ter acesso às suas concepções sobre Probabilidade e às

concepções a respeito das suas atividades desenvolvidas no PIBID, objetivando descobrir o quanto isto influencia na sua formação profissional.

- Entrevista final com os licenciandos com o objetivo de analisar quais foram os conhecimentos adquiridos durante a aplicação da proposta didática e o quanto estes conhecimentos influenciam no seu perfil profissional.

De acordo com as análises preliminares realizadas em relação ao conteúdo de Probabilidade foi elaborado um rascunho do planejamento inicial de cada aula da sequência didática, sendo enviado por e-mail para os cinco licenciandos, do subgrupo de Probabilidade, incluindo as atividades que eles deveriam realizar, dentre as quais citamos: leitura do planejamento inicial; pesquisa de materiais pedagógicos a serem utilizados na aula; pesquisa e seleção de exercícios e atividades a serem inseridos no planejamento; sugestões de modificação no planejamento a fim de adequá-los à realidade dos alunos, ao tempo de aula ou ao que julgassem necessário.

No decorrer da semana trocávamos e-mails referentes ao planejamento inicial e discutíamos possíveis dúvidas em relação ao conteúdo específico de Probabilidade, aos procedimentos que seriam realizados no decorrer da aula, aos exercícios selecionados e às atividades propostas.

Após esta etapa de pesquisa, ou seja, troca de ideias, planejamento e confecção, foram realizadas reuniões semanais com a presença dos licenciandos e da coordenadora do subprojeto da Matemática. Essas reuniões tinham as mesmas finalidades das reuniões semanais descritas anteriormente na Seção 2.2 que exemplifica as atividades desenvolvidas dentro do PIBID. Finalizávamos o planejamento e discutíamos as dúvidas que ainda não tinham sido sanadas em relação ao conteúdo específico, à realização da aula e à utilização dos recursos pedagógicos. Infelizmente nem sempre era possível manter esta dinâmica, havia atrasos e os materiais eram finalizados em cima da hora de serem utilizados em sala de aula.

Devemos ressaltar que as entrevistas foram estruturadas, realizadas individualmente e gravadas em áudio. Em seguida, foram transcritas e conferidas comparando-se a transcrição com a gravação. Os critérios utilizados para transcrever e analisar os testemunhos, bem como com para os procedimentos para a realização das entrevistas, foram estabelecidos a partir do trabalho de Duarte (2011).

4.2 Engenharia Didática

A Engenharia Didática é tanto uma metodologia de pesquisa com a finalidade de analisar as situações didáticas, quanto uma produção para o ensino. Douady (1993), apud Machado (2002, p.198) entende o termo engenharia didática como sendo:

> *"(...) uma sequência de aulas concebidas, organizadas e articuladas no tempo de forma coerente, por um professor engenheiro para realizar um projeto de aprendizagem para uma certa população de alunos. No decurso das trocas entre professor e aluno, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor."*

A noção de Engenharia Didática surgiu nas pesquisas da Didática da Matemática no início dos anos 80. Artigue (1998) apud Machado (2002, p.198) diz que:

> *"Esse termo foi cunhado para o trabalho didático que é aquele comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apoia sobre conhecimentos científicos de seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se vê obrigado a trabalhar sobre objetos bem mais complexos que os objetos depurados da ciência e, portanto a enfrentar praticamente, com todos os meios que dispõe, problemas que a ciência não quer ou não pode levar em conta". (p. 283)*

A Engenharia Didática é uma concepção que considera tanto a dimensão teórica quanto a dimensão experimental da pesquisa em didática. Propõe uma estruturação que visa organizar a realização prática da pesquisa interligando a teoria (o aspecto científico, o saber acadêmico, a academia) com as práticas pedagógicas e assim, desta forma o saber acadêmico acaba influenciando o sistema de ensino.

Podemos justificar o uso de uma Engenharia Didática devido ao fato de que as técnicas tradicionais (questionários, observações diretas, entrevistas, análises de livros, análise documental) são insuficientes para atingir a complexidade do fenômeno didático dentro da sala de aula. Assim, a utilização de uma Engenharia Didática reforça a confiabilidade da pesquisa e sua potencialidade se deve à sua ligação entre a teoria com a realidade da sala de aula (PAIS, 2002).

Características Gerais da Engenharia Didática Como Metodologia de Pesquisa

A Engenharia Didática se caracteriza por dois níveis:

- Microengenharia: quando se tem por objetivo o estudo de um determinado assunto e quando se realiza um estudo localizado que leva em conta a complexidade dos fenômenos em sala de aula. São as pesquisas associadas a situações mais particulares do ensino.

- Macroengenharia: quando a Engenharia Didática é realizada para compor a complexidade das pesquisas em microengenharia; quando se realiza um estudo que não leva em conta apenas a complexidade dos fenômenos em sala de aula, mas também a complexidade de toda a instituição escolar. São pesquisas associadas a uma visão mais ampla do sistema de ensino, o que implicaria que numa macroengenharia podem ser consideradas diferentes microengenherarias e as relações entre elas.

Além disso, a Engenharia Didática se caracteriza como pesquisa experimental pelo registro em que se situa e pela validação. A validação se baseia na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori. A singularidade da Engenharia Didática está em algumas características fundamentais do seu funcionamento metodológico: o pesquisador se insere no local da investigação; a análise a priori é uma fase fundamental (algumas metodologias não admitem uma análise a priori, como por exemplo, a de tipo etnográfico); e a validação é interna.

Fases da Metodologia da Engenharia Didática

O processo experimental da Engenharia Didática compõe-se de quatro fases:

1. Análises preliminares.
2. Concepção e análise a priori.
3. Experimentação.
4. Análises a posteriori e validação.

A seguir abordaremos detalhadamente cada uma dessas fases.

Primeira Fase: Análises Preliminares.

As análises preliminares são feitas para embasar a concepção da engenharia e compreender as condições da realidade sobre a qual a experiência será realizada. Elas podem ser retomadas durante todo o decorrer da pesquisa.

Segundo Machado (2002) esta fase é realizada através de considerações sobre o quadro didático geral e sobre os conhecimentos já adquiridos sobre o assunto em questão. Dependendo dos objetivos específicos da pesquisa, esta fase poderá conter uma análise epistemológica dos conteúdos que serão utilizados no ensino; da realidade do ensino atual e suas consequências; das concepções, preconcepções e das concepções errôneas dos alunos; e dos obstáculos no qual vai se situar a efetiva realização didática. Essas análises são feitas para dar subsídios ao desenvolvimento da análise a priori.

Segunda Fase: Concepção e Análise a Priori das Situações Didática.

De acordo com as análises preliminares deve-se delimitar um certo número de variáveis pertinentes ao sistema sobre os quais o ensino pode atuar. As variáveis de comando: que são variáveis macrodidáticas ou globais relativas à organização global da engenharia e variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma seção ou uma fase.

Almouloud (2008, p.67) descreve:

> *"Esses dois tipos de variáveis podem ser de ordem geral ou dependente do conteúdo matemático estudado e suas análises serão realizadas em três dimensões: a dimensão epistemológica (associada às características do saber), a dimensão cognitiva (associada às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem) e dimensão didática (associada às características do sistema de ensino, no qual os sujeitos estão inseridos)".*

As escolhas de ordem geral ou global precedem a descrição de cada fase da engenharia quando influem as escolhas locais. Embora as escolhas globais possam aparecer separadamente das escolhas locais, elas são interdependentes como afirma Brousseau (1981), apud Machado, (2002, p.204):

> *"(...) é necessário assegurar-se constantemente que a concepção geral é capaz de permitir a invenção, a organização e o desenvolvimento de situações locais." (p.55)*

Na Engenharia Didática a validação é interna e este processo se estabelece desde a fase de concepção e da análise a priori. A análise a priori se baseia em hipóteses e são essas hipóteses que serão validadas na confrontação da análise a priori com a análise posteriori.

A análise a priori contém uma parte de descrição, ou seja, deve-se descrever cada escolha local feita e as características da situação a-didática que estão relacionadas com cada escolha. A outra parte é formada pela previsão que consiste em analisar qual o desafio da situação para o aluno, prever comportamentos possíveis dos alunos e assegurar que tais comportamentos são decorrentes do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

A análise a priori considera o aluno sob dois aspectos: o descritivo e o previsivo. O aluno é considerado o ator principal e o papel do professor é recuperado nas situações de institucionalização.

Terceira Fase: Experimentação.

É a fase da realização da pesquisa com uma certa população de alunos. Inicia no momento em que se dá o contato pesquisador / professor / observador com a população de alunos, ou seja, é a aplicação, propriamente dita, da sequência didática**:** é uma etapa de suma importância para garantir a proximidade dos resultados práticos com a análise teórica.

É nesta fase que se coloca em funcionamento tudo que foi construído, suprindo as falhas quando as análises locais desta etapa experimental identificam essa necessidade, o que implica um retorno à análise a priori em um processo de complementação.

Segundo Machado (2002, p.206), na fase experimental da sequência didática é necessário deixar claro os seguintes pontos:

- *a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;*
- *o estabelecimento do contrato didático;*
- *a aplicação dos instrumentos de pesquisa;*
- *o registro das observações feitas durante a experimentação (observação cuidadosa descrita em relatório, transcrição dos registros audiovisuais, etc.).*

Nesta fase é necessário que o pesquisador esteja atento ao transcorrer da aula, levando em consideração todas as informações que estão relacionadas à pesquisa. Esta postura do pesquisador é importante para que o relatório seja fiel ao transcorrido nas aulas. Ela é seguida de uma fase de análise a posteriori que se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação.

Quarta fase: Análise a Posteriori e Validação.

Esta fase se apoia sobre todos os dados colhidos durante a experimentação, sobre as observações realizadas durante cada sessão de ensino e sobre as populações dos alunos em classe ou fora dela.

Segundo Machado (2002, p.207):

> *"Muitas vezes, para uma melhor compreensão do ocorrido, tornam-se necessários dados complementares como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, realizadas tanto durante a experimentação, quanto no final dela. Isto é, as fases 3 e 4 não são excludentes, mas complementares".*

A validação dos resultados é obtida pela confrontação entre os dados obtidos na análise a priori e a posteriori, verificando as hipóteses feitas no início da pesquisa. A validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada.

5. A ENGENHARIA DIDÁTICA NESTA PESQUISA

Neste capítulo iremos descrever cada fase da Engenharia aplicada nesta pesquisa.

5.1 Análise Preliminar

O primeiro momento da Engenharia refere-se às análises prévias. O trabalho foi organizado com o objetivo de analisar os livros didáticos, os Parâmetros Curriculares Nacionais, o que há sobre o Ensino de Probabilidade na literatura, como se encontra o ensino de Probabilidade e seus principais entraves.

Nesta fase, investigamos os conteúdos de Probabilidade que pretendíamos desenvolver junto aos alunos, e a maneira como estes vêm sendo trabalhados. Esta análise foi feita no Capítulo 3 visando dar subsídios ao desenvolvimento da próxima fase, a análise a priori.

5.2 Análise a Priori e a Posteriori

De acordo com as análises preliminares delimitamos as variáveis pertinentes à nossa proposta de ensino, as variáveis macrodidáticas. Além disso, apresentamos a sequência didática descrevendo cada escolha local (as variáveis microdidáticas) e a previsão dos possíveis comportamentos dos alunos em relação a cada atividade proposta.

5.2.1 Variáveis Macrodidáticas

A fim de ter o controle das situações de ensino e aprendizagem em relação ao conteúdo de Probabilidade durante a aplicação da sequência didática, definimos em nossa análise a priori um certo número de variáveis. Seguem as variáveis macrodidáticas associadas à dimensão:

1. Epistemológica, ou seja, relacionadas às características do saber probabilístico:
    a) Ensino da Probabilidade enfatizando os conceitos: Frequentista, Clássico, Geométrico e Condicional.
    b) Ampliação do conceito de espaço amostral abordando os espaços infinitos, equiprováveis e não equiprováveis.

c) Integração dos conteúdos de Probabilidade e Geometria (Probabilidade Geométrica).

2. Cognitiva, ou seja, relacionadas às dimensões cognitivas dos alunos sujeitos da aprendizagem: os alunos do 2º ano do ensino médio.

3. Didática, ou seja, relacionadas às características do sistema de ensino vigente, no qual os sujeitos estão inseridos. No nosso estudo, cada aula da sequência didática se caracteriza por:

   a) Utilização do projetor a fim de otimizar o tempo de aula.

   b) O uso de uma apostila contendo todo o conteúdo e as atividades que irão ser estudados no decorrer de cada aula com o propósito de otimizar o tempo de aula.

   c) Discussão inicial para que os alunos possam expor seus conhecimentos.

   d) Valorização dos conhecimentos prévios dos alunos sobre cada conceito abordado no decorrer da sequência.

   e) Revisão dos conceitos trabalhados nas aulas anteriores através da correção dos exercícios de fixação da aula passada. Ou seja, a correção dos exercícios de sempre será feita no início da próxima aula. Caso não tenha ficado nada pendente, será feita uma revisão rápida, por intermédio de uma conversa informal.

   f) Os alunos deverão resolver sozinhos os exercícios, aplicando os conceitos que já foram trabalhados no decorrer da sequência.

   g) Os licenciandos deverão aplicar a sequência didática acompanhando de perto as atividades desenvolvidas pelos alunos a fim de orientá-los e tirar possíveis dúvidas.

5.2.2 A Sequência Didática

Com o intuito de dar continuidade ao desenvolvimento da nossa pesquisa e analisar algumas das nossas propostas de hipótese, elaboramos uma sequência didática para o desenvolvimento do conteúdo de Probabilidade no Ensino Médio. Esta sequência tem como objetivo trazer contribuições para o processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de

Probabilidade por parte dos alunos, e ser um meio que possibilite recolher dados para tentar verificar quais são as contribuições do PIBID na formação profissional dos licenciandos.

A sequência didática é composta de seis planejamentos e foi aplicada, pelos licenciandos, aos alunos do segundo ano do Ensino Médio que participaram do PIBID, oferecido no colégio, no segundo semestre de 2011.

A sequência é uma introdução ao conteúdo de probabilidade, ou seja, será o primeiro contato dos alunos com este conteúdo, pois de acordo com o Currículo Mínimo de 2011 dos Colégios Estaduais do Rio de Janeiro, o conteúdo de Probabilidade só é oferecido para o terceiro ano do Ensino Médio.

Estrutura da Sequência Didática

A seguir apresentaremos um quadro contendo os planejamentos da nossa sequência didática e os temas desenvolvidos.

Planejamento	**Conteúdo**
Aula 1	• Ideia do aleatório e acaso. • Experimento aleatório e determinístico. • Espaço amostral. • Evento.
Aula 2	• Tipos de eventos. • Revisão das operações entre os eventos: união, interseção e complementar. • Espaço amostral equiprovável e não equiprovável; • Probabilidade Frequentista. • Probabilidade Clássica.
Aula 3	• Base Axiomática da Probabilidade: 1. $0 \leq P(A) \leq 1$ 2. $P(S) = 1$ 3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(AUB) = P(A) + P(B)$ • Consequências: 1. $P(\emptyset) = 0$ 2. $P(A) + P(A^C) = 1$ 3. $P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

	• Fixação dos conceitos de probabilidade: Frequentista, Clássica e Geométrica, por intermédio de exercícios e atividades.
Aula 4	• Probabilidade Condicional
Aula 5	• Eventos independentes e dependentes. • Revisão dos principais conceitos trabalhados nas aulas anteriores.
Aula 6	• Teste composto com questões que abordam os principais conceitos trabalhados nas aulas anteriores.

Tabela 5.2: Planejamento/Conteúdo

Apresentaremos uma análise a priori de cada aula da nossa sequência didática, mais especificamente de cada atividade. Descreveremos: as atividades, justificativas sobre suas escolhas e a previsão dos possíveis comportamentos dos alunos.

A seguir, construímos um quadro que resume a estrutura de cada aula da nossa sequência didática. A cada novo conceito a ser introduzido, o esquema abaixo é retomado.

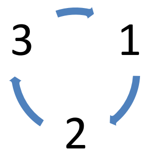
Resumo da Estruturação de cada Aula	
1. Introdução	Qualquer atividade inicial ou um conjunto de atividades que permitam estimular e preparar o raciocínio dos alunos para o conceito formal. Como exemplo: uma discussão informal sobre o conceito a ser trabalhado; correção da lista de atividades da aula anterior; e a revisão da aula anterior.
2. Formalização	Apresentação formal do conceito.
3. Aplicação	Qualquer atividade ou um conjunto de atividades de aplicação direta do conceito.
4. Retomada dos itens anteriores	A cada novo conceito a ser estudado, os itens anteriores serão revistos. 
5. Revisão	Lista de atividades que abordem os conceitos trabalhados no decorrer da aula.

Tabela 5.3: Estrutura de cada aula

5.2.3 Análise a Priori da Aula 1

Nesta seção apresentamos as variáveis microdidáticas e a descrição de cada atividade juntamente com as previsões dos possíveis comportamentos dos alunos em relação à Aula 1.

Variáveis Microdidáticas Associadas à Dimensão:

1. Epistemológica
   a) A integração dos conceitos de experimento aleatório e determinístico.
   b) Ampliação do conceito de espaço amostral abordando a não singularidade do espaço amostral e espaços infinitos.
2. Didática
   a) A utilização de dois vídeos (reportagens), um que evidencia o acaso em nosso cotidiano e o outro para ilustrar o tempo de vida útil de uma lâmpada.
   b) Uso de matérias que facilitem a compreensão dos experimentos aleatórios, por exemplo: dados e moedas.

Nesta aula iremos introduzir: a ideia da aleatoriedade e do acaso; os conceitos de: experimento aleatório, experimento determinístico, espaço amostral e evento. Nossa intenção é permitir que os alunos consigam:

1. Expor o que entendem das palavras aleatório e acaso.
2. Identificar situações do acaso (aleatoriedade) no cotidiano.
3. Diferenciar experimento aleatório de experimento determinístico.
4. Escrever alguns espaços amostrais de determinados experimentos aleatórios.
5. Perceber a não singularidade dos espaços amostrais.
6. Saber que existem espaços amostrais finitos e infinitos.
7. Identificar os subconjuntos dos espaços amostrais como eventos.
8. Diferenciar os conceitos: experimento determinístico, experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Ao elaborar a **Aula 1** tentamos valorizar os conhecimentos prévios dos alunos sobre as palavras aleatoriedade e acaso. Nesta primeira atividade nossa intenção é permitir que possam: refletir sobre o que significa aleatoriedade e acaso; discutir, entre eles, o significado dessas duas palavras; e expor suas observações.

Descrição da Atividade 1 (Introdução)
Utilizando o projetor, os licenciandos, apresentarão as palavras <u>aleatoriedade</u> e <u>acaso</u> e perguntarão: o

que significam essas duas palavras?

A escolha desta atividade se deve ao fato de ela ser simples e motivar a participação oral dos alunos. Além disso, os alunos poderão respondê-la utilizando apenas a sua intuição.

Acreditamos que possa haver um momento inicial de silêncio, pois cada aluno poderá ficar receoso em ser o primeiro a responder, mas como já havia uma convivência entre os alunos e os licenciandos, além de estarem acostumados com a minha presença e de apresentarem uma participação oral bem significativa, esperamos que este momento de silêncio venha a ser pequeno.

Após a discussão, os licenciandos apresentarão as definições formais das palavras aleatoriedade e acaso por intermédio do projetor.

Formalização - Definição formal retirada da Wikipédia:

A palavra **aleatoriedade** é utilizada para exprimir quebra de ordem, propósito, causa, ou imprevisibilidade.

Acaso é algo que surge ou acontece sem motivo ou explicação aparente. Algo que acontece sem ser explicado por nenhuma relação com outra(s) coisa(s), nem simultânea(s) nem precedente(s), isto é, sem qualquer determinação. Neste sentido, o acaso se opõe ao determinismo.

Neste momento, nossa intenção é reforçar a credibilidade do que possivelmente os alunos falaram na discussão oral. Caso algum aluno venha apresentar qualquer significado equivocado dessas duas palavras, cabe aos licenciandos a sensibilidade de tentar sanar este equívoco. Desta maneira, estaremos preparando o raciocínio que será utilizado ao longo da aula. Além disso, estaremos criando condições, por meio da discussão, para que os alunos alcancem o objetivo 1: expor o que entendem das palavras aleatório e acaso.

Descrição da Atividade 2 (Aplicação)

Será projetada uma reportagem que apresenta uma situação da aleatoriedade no cotidiano. A reportagem será exposta por intermédio de um vídeo. Após, os licenciandos abrirão um espaço para que os alunos possam comentar sobre ela, caso desejem.

Apenas para título de ilustração, segue uma pequena introdução do que se trata a reportagem: "*Ninguém sabe exatamente a hora e muito menos o local. Um satélite espacial de 5 toneladas, do tamanho de um ônibus, vai cair na Terra nas próximas horas. Vamos ver qual a probabilidade dele cair aqui no Brasil...".* A reportagem foi exibida pelo Jornal Hoje, no dia 23 de setembro de 2011.

A escolha desta reportagem se deve ao fato de tratar claramente de uma situação aleatória, pois é impossível prever com exatidão a hora e local que o satélite vai cair na Terra.

Além disso, foi uma reportagem recorrente nos principais telejornais do Brasil (se não, mundialmente) e divulgada na imprensa na ocasião da aplicação da sequência didática.

Esta atividade exige que os alunos apenas prestem atenção ao vídeo. Supomos que talvez possam surgir alguns comentários: se lembram ou não de terem assistido à reportagem; onde caiu; se acertou alguém, ou qualquer outro comentário curioso a respeito do vídeo.

Acreditamos que, por intermédio da reportagem, os alunos possam chegar à conclusão de que a aleatoriedade está presente em nosso cotidiano e tenham condições para realizar a próxima atividade.

Descrição da Atividade 3 (Introdução)

Os licenciandos pedirão aos alunos que apresentem exemplos de situações do dia a dia em que a aleatoriedade está presente. Isso será feito da seguinte forma:

- Com essa reportagem o que podemos observar?
- Vocês podem dar outros exemplos da aleatoriedade no nosso dia a dia?

A escolha desta atividade se deve ao fato de ser simples e, mais uma vez, motivar a participação oral dos alunos, valorizando assim a participação deles na aula. Nosso objetivo é permitir que possam identificar situações aleatórias presentes no cotidiano deles e expor essas situações oralmente para a turma. Acreditamos que não apresentem dificuldade em realizar a atividade e que surja exemplo da mega sena na fala deles.

Continuação da Atividade 3

Durante a discussão, os licenciandos escreverão no quadro os exemplos apresentados pelos alunos e também alguns exemplos de experimentos determinísticos. Seguem alguns exemplos do que deverá ser escrito:

- Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima (experimento aleatório).
- Se o litro da gasolina está custando R$ 2,65 e vou comprar *x* litros, quanto irei pagar? (experimento determinístico).
- Lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima (experimento aleatório).
- Sortear uma bolinha no bingo e verificar o número sorteado (experimento aleatório).
- Abandonar um corpo no vácuo em queda livre a partir de uma altura conhecida e estimar o tempo gasto para este corpo atingir o solo (experimento determinístico).

Os licenciandos lerão em voz alta os exemplos escritos no quadro. Caso os alunos ainda não tenham percebido que não existem apenas situações aleatórias, ou mesmo que tenham percebido e exposto algum comentário, a intenção mais uma vez é evidenciar esta diferença com a leitura dos exemplos e permitir que eles discutam. Mesmo depois da leitura, caso ninguém tenha identificado algum problema, perguntaremos:

- Esta situação tem algo de errado?

- O que está errado?

Nossa intenção é, por intermédio desta atividade, instigar a percepção dos alunos para que possam, sozinhos, perceber que alguns destes não representam situações aleatórias. Desta maneira, estaremos preparando-os para a discussão sobre experimentos determinísticos e aleatórios.

Após a discussão, projetaremos definições de experimento aleatório e determinístico. Destacaremos, também, as suas devidas características. Nosso objetivo é formalizar as ideias introduzidas e discutidas nas Atividades 1, 2 e 3.

Definição Formal:

Experimentos aleatórios: experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados variados, não sendo possível, portanto, a previsão lógica dos resultados do experimento. Sabemos quais são os possíveis resultados do experimento, mas não sabemos qual resultado particular ocorrerá. É um modelo, sobre o qual, de antemão não é possível explicitar ou definir um resultado particular.

Ao descrever um experimento aleatório deve-se especificar não somente que operação ou procedimento deve ser realizado, mas também o que deve ser observado.

Após a formalização, os alunos irão realizar a seguinte atividade:

Descrição da Atividade 4 (Aplicação)

Os licenciados distribuirão dados e moedas para que os alunos possam realizar os experimentos nos exemplos abaixo:

Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se o número de caras obtidas.

Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se a sequência de caras e coroas.

Logo em seguida, os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, algumas características dos experimentos aleatórios.

Observando-se os exemplos acima pode-se destacar algumas características comuns:

1. não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;
2. podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;
3. quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de frequências.

Nossa intenção é permitir que os alunos realizem esses exemplos (ou experimentos) para que tenham condições de comprovar algumas características dos experimentos aleatórios que foram apresentadas anteriormente.

Consideramos que os alunos possam realizar os 3 exemplos sem problemas, pois se trata de uma atividade experimental, envolvendo material concreto, lúdica e de fácil execução. Além disso, acreditamos que alguns alunos possam ficar animados em realizar as atividades, motivados para continuar estudando o assunto, mas ao mesmo tempo, possam existir outros que poderão achar a atividade pouco motivadora, infantil para a idade deles e talvez, mesmo que tenham o material em suas mãos, não queiram realizar o experimento, pois isso já aconteceu em aulas anteriores de outros conteúdos envolvendo os licenciandos.

Formalização

Experimentos determinísticos: experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados constantes, isto é, os resultados podem ser previstos. Nestes experimentos existe a possibilidade de se fazer a previsão lógica e precisa de qual será o resultado do experimento.

Exemplos:

1. Se o litro da gasolina está custando R$ 2,65 e vou comprar *x* litros, quanto irei pagar?
2. Abandonar um corpo, no vácuo, em queda livre, a partir de uma altura conhecida e estimar o tempo gasto para este corpo atingir o solo.
3. Certa massa de gás ideal está inicialmente à temperatura de 400k e pressão de 4,0 atm. Mantendo-se o volume constante, a temperatura é reduzida para 320k. Qual será o novo valor de pressão?

A atividade a seguir tem a finalidade de fixar os conceitos formalizados anteriormente.

Descrição da Atividade 5 (aplicação)

Após a formalização dos conceitos, os licenciandos retomarão os exemplos escritos no quadro e pedirão que os alunos os classifiquem, oralmente, em experimento determinístico e aleatório.

Julgamos que com esta atividade os alunos possam classificar corretamente os exemplos em aleatório e determinístico, expondo suas respostas oralmente, sem apresentar dificuldades. Mais uma vez, estamos valorizando a participação oral dos alunos.

Descrição da Atividade 6 (Introdução)

Considere os seguintes experimentos aleatórios:

A: Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima.

B: Lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima.

A cada experimento aleatório podemos associar um conjunto de resultados.

a) Apresente um conjunto que contém todos os resultados possíveis do experimento aleatório "**A**".
b) Apresente um conjunto que contém todos os resultados possíveis do experimento aleatório "**B**".

Nosso intuito é introduzir, por intermédio desta atividade, o conceito de espaço associado ao experimento aleatório e a não unicidade do espaço amostral. Além disso, acreditamos que os alunos consigam associar os resultados possíveis a cada um dos experimentos aleatórios, mas suspeitamos que talvez a grande maioria dos alunos não venha utilizar uma notação de conjunto no momento de responder por meio da escrita esta atividade.

Os licenciandos, após a execução da atividade, deverão pedir aos alunos que exponham suas respostas e, caso apareçam respostas diferentes, deverão escrevê-las no quadro utilizando a notação devida de conjunto.

Em seguida os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, o conceito de espaço amostral e alguns exemplos. Neste momento, deverão pedir aos alunos que fechem as apostilas para que não se antecipem e possam ler o que será trabalhado.

Definição formal:

O Espaço Amostral

A cada experimento aleatório podemos associar **um** conjunto de resultados. O **espaço amostral** é o conjunto que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

A: Lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima.

Podemos associar a este experimento aleatório **A,** alguns dos seguintes conjuntos de resultados:

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $S_3 = [1, 6]$ e $S_4 = (0, +\infty)$

Após a formalização, os alunos farão a próxima atividade.

Descrição da Atividade 7 (Aplicação)

Os licenciandos farão a seguinte pergunta: o que podemos observar nesses espaços associados ao experimento aleatório A?

Os licenciandos deverão deixar os alunos falar por um momento e, caso mencionam algo equivocado, farão as devidas interrupções.

Queremos que os alunos identifiquem oralmente algumas diferenças entre os conjuntos S_1, S_2, S_3 e S_4. As diferenças são muitas e por isso acreditamos que identificarão apenas algumas delas, as mais óbvias. Talvez possam aparecer comentários do tipo: “apenas o conjunto S_1 é o espaço amostral associado ao experimento **A,** os demais não são”. Neste caso, caberá aos licenciandos fazer as devidas interrupções.

Naturalmente, a intenção por trás dessa atividade não é acrescentar de maneira gratuita uma problematização e dificuldade aparentemente sem sentido. Nosso objetivo foi prepará-los cognitivamente para situações em que não há espaço amostral minimal do tipo S_1 para determinados fenômenos aleatórios, daí a importância de reconhecer possíveis escolhas dentre várias disponíveis na descrição probabilística do fenômeno em estudo.

A seguir os licenciandos apresentarão por intermédio do projetor as seguintes observações sobre os conjuntos S_1, S_2 e S_3:

Observações:

Para S_1: observamos que ele é o espaço amostral mais enxuto, econômico.

Para S_2: observamos que apresenta um elemento a mais que o conjunto anterior, porém a chance de ocorrer o número 7 no experimento em questão é zero. Nem por isso, este conjunto deixa de ser um espaço amostral que podemos associar ao experimento em questão.

Para S_3: observamos que é composto de todos os números reais entre os números 1 e 6, inclusive o número 1 e o número 6. Por exemplo, o número 1,2 pertence ao conjunto S_3. Este conjunto é infinito, contém infinitos números reais. Porém a chance de ocorrer, por exemplo, o número 2,8 no experimento em questão é zero. Mesmo com tudo isso, S_3 continua sendo um espaço amostral associado ao experimento em questão.

Descrição da Atividade 8 (Aplicação)

Os licenciandos pedirão aos alunos que apresentem oralmente as observações para o conjunto S_4, de acordo com o que foi exposto para os conjuntos S_1, S_2 e S_3.

Acreditamos que os alunos irão apresentar inúmeras dificuldades devido à notação de intervalo e ao símbolo do infinito. Talvez não consigam expor observação alguma, por não se lembrarem da notação de intervalo usada. Caso isto ocorra, os licenciandos deverão utilizar as dúvidas para relembrar as notações de intervalos necessárias. Provavelmente, após os esclarecimentos das dúvidas apresentadas, os alunos poderão expor algumas observações. Caso apresentem alguma observação errada, os licenciandos deverão fazer as devidas interrupções com a finalidade de sanar o equívoco.

Após, os licenciandos apresentarão algumas observações do conjunto S_4 e outros exemplos.

Para S_4: observamos que é composto de todos os números reais não negativos. Por exemplo, os números π, $\sqrt{2}$, e 235,021 pertencem ao conjunto S_4. Este conjunto é infinito e contém todos os conjuntos anteriores. Porém a chance de ocorrer, por exemplo, o número π no experimento em questão é zero. Mesmo com tudo isso, S_4 continua sendo um espaço amostral associado ao experimento em questão.

Exemplos:

B: O tempo de reação dos pacientes ao medicamento;

$S = (0, +\infty)$

D: Um elemento radioativo emite partículas alfa. Queremos saber quantas partículas são emitidas em certo intervalo de tempo.

Temos como espaço amostral todos os números naturais maiores que zero, ou seja, S=ℕ.

A intenção por trás desses exemplos e observações é evidenciar a não singularidade do espaço amostral; a existência de espaço amostral finito e infinito; a importância de, ao descrevermos um espaço amostral, ficarmos atentos ao que estamos observando e mensurando. Além de tudo isto, tentarmos, com a utilização dos diferentes exemplos, evitar que os alunos possam apresentar concepções errôneas, como por exemplo: o espaço amostral é único para o experimento; só existem espaços amostrais finitos; seus elementos são sempre números.

Mais uma vez, acreditamos que os alunos possam apresentar dificuldade em relembrar a notação de intervalo, o símbolo do infinito e a notação de conjunto dos números naturais. Desta maneira, os licenciandos deverão intervir de acordo com as dúvidas apresentadas.

Descrição da Atividade 9 (Aplicação e Introdução)

Considere o experimento aleatório: lançamento simultâneo de duas moedas comuns distintas e observação de cada uma das figuras das faces voltadas para cima.

a) Determine o espaço amostral do experimento aleatório acima.

b) Determine os subconjuntos "E" do espaço amostral que satisfaçam as condições a seguir:

i) Ocorrência de duas caras.

ii) Ocorrência de duas coroas.

iii) Ocorrência de uma cara.

iv) Ocorrência de uma coroa.

v) Ocorrência de pelo menos uma cara.

vi) Ocorrência de pelo menos uma coroa.

Na Atividade 9, o item (a) tem a finalidade de fixar o conceito de espaço amostral e o item (b) tem a intenção de facilitar a introdução do conceito de evento. Acreditamos que os alunos poderão apresentar dificuldade para escrever os elementos do espaço amostral, visto que cada elemento é formado por um par de resultados. Além disso, poderão não perceber a diferença entre o elemento (cara, coroa) e o elemento (coroa, cara) deixando assim de listar algum deles.

Desta forma os licenciandos deverão estar atentos para tirar as possíveis dúvidas, pois acreditamos que alguns alunos venham perguntar como se escreve cada elemento durante a execução da atividade e se o que fizeram está correto.

Descrição da Atividade 10 (Aplicação)

Considere o experimento aleatório: Uma fábrica produz um determinado tipo de lâmpada. Deseja-se saber o tempo de vida útil desta. Ela é colocada em um ensaio em que se determina o seu tempo t de duração. Determine o espaço amostral do experimento aleatório acima.

Queremos fixar a ideia de espaço amostral infinito e trabalhar indiretamente a notação de intervalo. Acreditamos que os alunos responderão corretamente, visto que foi trabalhado nos exemplos um experimento com o mesmo tipo de raciocínio.

Nesta etapa, os licenciandos farão a correção das duas atividades anteriores e apresentarão uma reportagem, por intermédio do projetor, da lâmpada que não se apaga apenas para ilustrar a Atividade 10. Esta reportagem também servirá para justificar o motivo pelo qual atribuímos um intervalo de tempo infinito.

Em seguida, os licenciandos apresentarão a formalização da definição de evento e utilizarão a Atividade 9 para exibir exemplos de eventos.

Definição Formal:

Evento: É qualquer subconjunto de um espaço amostral ao qual se pode atribuir uma probabilidade de ocorrência.

Nossa intenção é apenas formalizar o conceito de evento introduzido na Atividade 9. Logo em seguida, os alunos irão elaborar uma lista de atividades para fixar os conceitos e especificidades do que foi trabalhado nesta Aula 1. As atividades deverão ser feitas até o término de duração da aula e a lista será recolhida como material de análise.

Lista 1 (Exercícios de Revisão)

1) Classifique os experimentos abaixo em aleatório ou determinístico.
   a) Lançar uma moeda e anotar a face voltada para cima.
   b) Retirar uma carta de um baralho com 52 cartas e anotar o naipe.
   c) Observar a temperatura em que a água entra em ebulição.
   d) Em uma linha de produção, após 24h de trabalho, contar o número de peças defeituosas produzidas.
   e) No alto de um prédio soltamos uma bola, anotar a velocidade que ela atinge o chão.

2) Dê o que se pede de acordo com cada situação:
   - Três moedas foram lançadas uma após a outra e foi realizada a observação do lado da moeda voltada para cima. Determine:
     a) O espaço amostral.
     b) O evento A, da ocorrência de lados distintos.
     c) O evento D, da ocorrência do primeiro sendo cara e os outros dois sendo distintos.

   - Dois dados foram lançados simultaneamente, e foi realizada a observação da face voltada para cima, determine:
     a) O espaço amostral.
     b) O evento A, da ocorrência de números pares.
     c) O evento B, da ocorrência de números iguais.
     d) O evento C, da a diferença entre eles ser menor que 4.

3) Lançamos um dado uma vez e observamos o número que aparece na face superior. Com isso, determine os eventos abaixo:
    a) O evento A, ocorrência de um número maior que 5.
    b) O evento B, ocorrência de um número menor que 7.
    c) O evento C, ocorrência de um número maior que 6.
    d) O evento D, ocorrência de um número par.
    e) O evento E, ocorrência de um número que não seja par.
    f) O evento F, ocorrência de um número múltiplo de 3.
    g) O evento G, ocorrência de um número par **ou** múltiplo de 3.
    h) O evento H, ocorrência de um número par **e** múltiplo de 3.
    i) O evento I, ocorrência de um número que não seja par e também não seja múltiplo de 3.
    j) O evento $D \cup E$.
    k) O evento $D \cap E$.
    l) O evento D^C.

Desafio: Determine um espaço amostral para o tempo de vida útil de um componente eletrônico.

Com esta lista queremos fixar os conceitos de experimento aleatório e determinístico; de espaço amostral e evento; introduzir os tipos de eventos (certo, impossível, elementar ou simples e mutuamente exclusivos) e iremos também trabalhar com a noção de espaço amostral infinito por intermédio das Questões 1, 2, 3 e do desafio respectivamente.

Acreditamos que os alunos talvez tenham dificuldade na Questão 2 quando forem escrever o espaço amostral, por se tratar de ternos e pares de resultados. Na Questão 3, nos itens (g) e (h), poderão ter dificuldade em vincular os conectivos “e” e “ou” com as operações de interseção e união respectivamente e no item (l) poderão ter esquecido a notação de conjunto complementar. Nas demais questões julgamos que consigam responder corretamente, pois são questões que utilizam raciocínios utilizados anteriormente.

Optamos por manter esta aula longa, pois apesar de termos explorado muitos conceitos, julgamos que estes são mais fáceis. Com isso teremos mais tempo para trabalhar conceitos que consideramos mais complexos nas próximas aulas como, por exemplo, o conceito de probabilidade condicional.

5.2.4 Análise a Posteriori e Validação da Aula 1

Nesta etapa faremos uma pequena descrição da experimentação da Aula 1 e em seguida, passaremos para a análise a posteriori desta aula.

Experimentação da Aula 1

A aplicação da primeira aula ocorreu no dia 14 de outubro de 2011. Na turma da manhã no horário de 8h20 às 12h com 20 minutos de intervalo para o recreio, estando presentes 11 alunos. Na turma da tarde, no horário de 15h às 17h, estando presentes 4 alunos.

No início da aula, foi relembrado aos alunos que as aulas de probabilidade fariam parte de uma pesquisa de mestrado, já havíamos conversado sobre a pesquisa quando se iniciou o projeto PIBID em agosto de 2011.

Análise a Posteriori e Validação da Aula 1

Atividade 1 (Introdução)

Nas duas aulas, os alunos conseguiram expor suas observações oralmente. Seguem-se algumas respostas que indicam que alguns alunos ao invés de falarem os significados das palavras aleatoriedade e acaso deram exemplos da aleatoriedade e acaso no dia a dia.

- *“Escolha ao acaso”;*
- *“Eu sei o que é, mas não sei explicar”;*
- *“Algo que acontece sem explicação”;*
- *“Algo que acontece sem motivo”;*
- *“Uma palavra sorteada”;*
- *“Surgir alguém sem explicação, encontrar alguém que você conhece na rua”.*

Após a discussão, os licenciandos apresentaram as definições formais das palavras aleatoriedade e acaso por intermédio do projetor.

Atividade 2

Os alunos prestaram atenção ao vídeo e, como previsto na análise a priori, comentaram que já haviam visto a reportagem e, perguntaram também onde caiu o satélite. O vídeo permitiu que os alunos percebessem a presença da aleatoriedade em nosso cotidiano e os motivou para a realização da Atividade 3. Vale ressaltar que uma das nossas variáveis microdidáticas associada à dimensão didática era utilizar o vídeo para evidenciar o acaso em nosso cotidiano.

Atividade 3

Nas duas aulas, os alunos conseguiram expor suas observações oralmente. Seguem-se algumas respostas:

- *“Uma palavra sorteada”.*
- *“Surgir alguém sem explicação, encontrar alguém que você conhece na rua”.*
- *“Jogar uma moeda”.*
- *“Sortear uma bolinha do bingo”.*

“Quando você pula de paraquedas ele pode abrir ou não abrir”.

- *“A bala perdida”.*

Podemos observar um exemplo atípico: "*o paraquedas pode abrir ou não abrir*". Outro, infelizmente recorrente nos telejornais, foi mencionado: "*a bala perdida*". Surgiram também dois exemplos que já haviam sidos utilizados na Atividade 1 e outros dois mais comuns. Além disso, contrariando a previsão feita na análise a priori, a mega sena não foi um exemplo recorrente.

Conseguimos alcançar os objetivos previstos na análise a priori: permitir que os alunos possam identificar situações aleatórias presentes no cotidiano deles e expor essas situações oralmente para a turma.

Continuação da Atividade 3.

Os alunos conseguiram perceber que existem situações aleatórias e não aleatórias, porém um aluno da turma da tarde teve dificuldade em entender o segundo exemplo. Segue o diálogo ocorrido:

O licenciando Bernardo, para auxiliá-lo perguntou:

- *"Vou comprar 2 litros, quanto irei pagar? Vou comprar 15 litros quanto irei pagar?"*

Nessas duas questões o aluno respondeu corretamente o valor a pagar e as classificou como situações não aleatórias. Entretanto, Bernardo perguntou:

- *"Vou comprar x litros, quanto irei pagar?"*

A resposta foi: não sei. Novamente Bernardo tornou a repetir as duas primeiras questões, acrescentando a seguinte pergunta:

- *"Que conta você fez para calcular o valor a pagar?"*

O aluno respondeu e o licenciando registrou no quadro: $\rightarrow 2{,}65 \cdot 2 = 5{,}30$

$\rightarrow 2{,}65 \cdot 15 = 39{,}75$

Em seguida, repetiu a questão:

- *"Se o litro da gasolina está custando R$ 2,65 e vou comprar x litros, quanto irei pagar?"*

Desta vez, o aluno respondeu corretamente: "$2{,}65 \cdot x = 2{,}65x$."

A dificuldade não estava em classificar a situação em aleatória e não aleatória, mas sim em usar o conceito de função implícito no exemplo, evidenciando o obstáculo em generalizar utilizando variável. Devemos ressaltar que estávamos trabalhando com alunos do 2º ano do ensino médio e que função (afim e quadrática) é estudada no 9º ano do ensino fundamental e no 1º ano do ensino médio, ou seja, os alunos já haviam estudado o conceito.

Não podemos deixar de evidenciar a estratégia utilizada pelo licenciando Bernardo que vimos manifestar neste diálogo. A pergunta "*Que conta você fez para calcular o valor a pagar*" associada ao registro feito no quadro, permitiu que aluno respondesse corretamente, talvez o aluno tenha superado sua dificuldade de entender o exemplo, ou pode ter sido induzido sem de fato entender que estava generalizando. O fato é que o aluno respondeu corretamente em decorrência da estratégia utilizada pelo licenciando na tentativa de reorganizar o entendimento do aluno.

Atividade 4

Nas duas turmas, manhã e tarde, tivemos um momento de euforia dos alunos, a empolgação de uns foi contagiando os outros e os alunos não jogavam os dados e as moedas em cima de suas mesas e, sim, em qualquer parte da sala. Houve, na turma da manhã, por ter um número maior de alunos, a necessidade de chamar a atenção deles explicando a importância de realizar os experimentos com seriedade e sem exageros.

Não previmos este comportamento dos alunos. É claro que qualquer uso de material concreto necessita de um momento inicial de reconhecimento e manipulação, mas acreditávamos que, por ser um material corriqueiro, eles iriam realizar a atividade sem grandes problemas.

Contrariando a previsão de que alguns alunos poderiam achar a atividade sem graça, infantil para a idade deles e talvez não quisessem realizar o experimento, todos os alunos realizaram os experimentos, estimulados provavelmente pela empolgação inicial da turma.

Acreditamos que conseguimos alcançar nosso objetivo, que era permitir que os alunos realizassem esses exemplos (ou experimentos) para comprovarem algumas características dos experimentos aleatórios, além de validarmos a seguinte variável microdidática associada à dimensão didática: o uso de materiais que facilitam a compreensão dos experimentos aleatórios, como por exemplo, dados e moedas.

Atividade 5

Como havíamos previsto, os alunos conseguiram classificar os experimentos em aleatório e determinístico. Esta atividade valida as variáveis microdidáticas por meio da integração dos conceitos de experimento aleatório e determinístico.

Atividade 6

Os alunos responderam corretamente os itens (a) e (b), mas como havíamos previsto, representaram os resultados sem utilizar a notação de intervalo. Escreveram para o item (a): *Cara e coroa; C/K,* e para o item (b): *1, 2, 3, 4, 5, 6.*

Os licenciandos Bernardo e Solange corrigiram utilizando as respostas orais dos alunos fazendo a devida utilização da notação e destacando o que o enunciado pedia para apresentar um conjunto que contenha todos os resultados possíveis.

Em seguida os licenciandos apresentaram o conceito de espaço amostral e alguns exemplos.

Atividade 7 (Aplicação).

Durante as observações feitas pelos alunos, os alunos não mencionaram o conjunto S_1, acreditamos que isto se deve ao fato de que eles não tiveram dúvida que S_1 é um conjunto que podemos associar ao experimento aleatório **A**. Em relação ao conjunto S_2 eles perguntaram por que tem o número 7 e não fizeram mais nenhum comentário.

Na turma da manhã a licencianda Solange perguntou: "*O conjunto S_3 é igual ao conjunto S_1?"* A turma respondeu que sim. Por conta desta resposta, podemos supor que eles não fizeram nenhum comentário a respeito do conjunto S_3 pois julgaram que fosse igual ao conjunto S_1. Talvez o mesmo tenha acontecido em relação ao conjunto S_4, por não entenderem o conjunto (a notação de intervalo), não fizeram nenhum comentário.

Após os comentários expostos pelos alunos, os licenciandos apresentaram as observações previstas no planejamento da Aula 1 que se encontra na análise a priori da Aula 1 referente a esta atividade. Seguem-se as observações apresentadas sobre o conjunto S_3: é composto de todos os números reais entre os números 1 e 6, inclusive o número 1 e o número 6. Assim, o número 1,2 pertence ao conjunto S_3. Este conjunto é infinito, contém infinitos números reais, porém a chance de ocorrer, por exemplo, o número 2,8 no experimento em questão é zero. Mesmo com tudo isso, S_3 continua sendo um espaço amostral associado ao experimento em questão.

Além disso, na turma da manhã a licencianda Solange acrescentou o seguinte exemplo: $S_5=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Perguntou ainda se podemos associar este conjunto ao experimento aleatório. Os alunos responderam que não, pois estava faltando um número. Com isso, houve alguns comentários do tipo: *"está faltando o número 6"*; *"então pode sobrar; podem sobrar números, mas não pode faltar".*

Julgamos que este exemplo acrescentado na turma da manhã foi essencial para a conclusão que os alunos fizeram. Por conta disto, antes do início da aula da tarde, informamos aos licenciandos este fato. Assim, durante as explicações feitas na aula da tarde foi utilizado o seguinte conjunto: S_5={1, 2, 3, 5, 6}. Observamos os mesmos tipos de comentários realizados pelos alunos da turma da manhã.

Nesta atividade vimos manifestar, em dois momentos, o conhecimento pedagógico do conteúdo e o conhecimento do conteúdo pela licencianda Solange. O primeiro se revela quando questionou a equivalência entre S_3 e S_1. Esta pergunta foi essencial para percebermos como os alunos estavam interpretando os conjuntos apresentados e serviu também para direcionar a maneira com que os licenciandos conduziram as devidas observações referentes aos conjuntos desta atividade, de acordo com os equívocos que os alunos expuseram em suas colocações. O segundo foi quando os licenciandos criaram o exemplo S_5= {1, 2, 3, 4, 5} e propiciaram um entendimento mais completo das propriedades que tornam um dado conjunto um espaço amostral. Julgamos que este exemplo acrescentado foi essencial para a conclusão que os alunos fizeram. Além disso, demonstra tanto o conhecimento específico que os licenciandos tiveram em relação ao conceito de espaço amostral quanto à sua habilidade em criar exemplos a fim de promover o conhecimento dos alunos.

Atividade 8

Antes de iniciar a Atividade 8, como previsto na análise a priori, os licenciandos relembraram as notações de intervalo e o símbolo de infinito para que os alunos pudessem ter condições de entender o exemplo e expor suas observações. As duas turmas apresentaram as seguintes observações:

- *"É infinito."*
- *"Contém todos os números reais maiores que zero."*
- *"É um espaço amostral do experimento **A**."*

Observamos que o fato dos licenciandos relembrarem primeiro a notação de intervalo, facilitou a natureza das respostas. Vale ressaltar que os alunos já haviam concluído que podem sobrar elementos, mas não faltar. Seguem-se os demais exemplos estudados:

Os alunos não apresentaram dificuldade em entender os experimentos **B** e **D**. O único comentário que surgiu na turma da manhã foi: *"Se for Advil, de acordo com o comercial leva 15 min".* A licencianda Solange perguntou: *"Este é o tempo previsto para começar a ter a* *reação. Quando termina a reação?"* Com esta pergunta os alunos conseguiram concluir que é mais seguro utilizar o tempo infinito, sabendo que no espaço amostral podem sobrar elementos, mas não faltar.

Julgamos que esses exemplos validaram a variável microdidática associada à dimensão epistemológica: ampliação do conceito de espaço amostral abordando a não singularidade do espaço amostral e espaços infinitos.

Vale ressaltar o comentário do aluno da manhã, o que nos evidencia que o mesmo já estava fazendo uso do conceito de espaço amostral dando um exemplo do seu dia a dia. Além disso, a resposta da licencianda nos revela o seu conhecimento de conteúdo específico sobre espaço amostral infinito e a sua habilidade em saber aproveitar uma situação para reorganizar o entendimento deste mesmo aluno através da sua pergunta.

Atividade 9

Conforme previmos na análise a priori, os alunos apresentaram muita dificuldade em escrever os elementos do espaço amostral, mas conseguiam listar os elementos através da fala, embora tivessem escrito errado. Escreveram:

- *{CC, CK, KK, ...};*
- *{CC/ CK/ KK, ...}.*

A dificuldade foi escrever um par de resultados. Como esta dificuldade foi apresentada por todos os alunos, os licenciandos relembraram a notação de par ordenado para que eles conseguissem escrever corretamente.

Outra dificuldade apresentada, mas não por todos, foi a diferença entre o elemento (C, K) e o elemento (K, C). Alguns alunos listaram apenas um deles. Dois alunos, um da manhã e outro da tarde, não conseguiram se convencer de que esses elementos são diferentes mesmo com as explicações dos licenciandos. Assim, o licenciando Claudio pegou quatro moedas, duas de R$ 0,10 centavos e duas de R$ 0,05 centavos e fizeram as combinações:

Figura 5.3: Elemento coroa e cara

Figura 5.4: Elemento cara e coroa

A partir da visualização das moedas, os alunos se convenceram. Com todas as observações e explicações dadas pelos licenciandos, os alunos conseguiram fazer o item (b) corretamente. A única dificuldade se deu nos itens (v) e (vi) por conta da expressão “pelo menos uma”. Mais uma vez os licenciandos interviram para explicar o que significa. Os licenciandos apresentaram a formalização da definição de evento utilizando a Atividade 9 para exibir exemplos, o que facilitou a compreensão pelos alunos deste assunto.

Atividade 10

A grande maioria dos alunos conseguiu responder esta atividade corretamente e para os que apresentaram dificuldade, os licenciandos auxiliaram revendo os espaços amostrais estudados anteriormente.

Após a correção da Atividade 10, os licenciandos apresentaram a reportagem da lâmpada que não se apaga. Os alunos gostaram muito do vídeo exibido e ficaram impressionados pelo tempo que a lâmpada continua acesa. Julgamos que a reportagem permitiu justificar o motivo pelo qual atribuímos um intervalo de tempo infinito. Esta atividade finaliza a validação das seguintes variáveis macrodidáticas associada à dimensão epistemológica e à dimensão didática: ampliação do conceito de espaço amostral abordando a não singularidade do espaço amostral e espaços infinitos; a utilização do vídeo para ilustrar o tempo de vida útil de uma lâmpada.

Terminada a discussão e comentários sobre o vídeo, a aula foi finalizada com a entrega da lista de exercícios. Esta aula foi muito longa e não houve tempo para que os alunos da turma da manhã pudessem terminar a resolução da lista. A mesma foi recolhida para que continuassem na próxima aula, Aula 2. Já os alunos da turma da tarde conseguiram resolver a tempo de terminar a aula. A análise a posteriori desta lista ficou para ser feita na aula em que a mesma foi corrigida. Optamos por fazer desta forma para vincular as respostas dos alunos com o momento da discussão da correção.

Julgamos que no decorrer desta aula conseguimos validar as seguintes variáveis macrodidáticas associadas à dimensão didática: promover uma discussão inicial para que os alunos possam expor seus conhecimentos; valorizar os conhecimentos prévios dos alunos sobre cada conceito abordado no decorrer da sequência; permitir que os alunos resolvam sozinhos a lista de exercícios entregue ao final da aula; e permitir que os licenciandos apliquem a sequência didática acompanhando de perto as atividades desenvolvidas pelos alunos a fim de orientá-los e tirar possíveis dúvidas.

5.2.5 Análise a Priori da Aula 2

Nesta seção apresentamos as variáveis microdidáticas e a descrição de cada atividade juntamente com as previsões dos possíveis comportamentos dos alunos em relação à Aula 2.

Variáveis microdidáticas associadas à dimensão:

1. Epistemológica
   a) Ampliação do conceito de espaço amostral abordando espaços equiprováveis e não equiprováveis.
   b) Integração dos conceitos de probabilidade Clássica e Frequentista vinculados com espaço amostral equiprovável e não equiprovável.
2. Didática
   a) Utilização de dados, moedas e tachinhas durante a exploração de experimentos aleatórios, para trabalhar o conceito de probabilidade a partir das frequências relativas dos eventos do experimento.

Nesta aula iremos introduzir as definições sobre: tipos de eventos (certo, impossível, elementar ou simples e mutuamente exclusivos); espaços amostral equiprovável e não equiprovável; conceitos Frequentista e Clássico de Probabilidade. Além disso, vamos revisar as operações de união, interseção e complementar entre os eventos. Nossa intenção é permitir que os alunos consigam:

1. Relembrar as operações entre os conjuntos: união, interseção e complementar.
2. Recordar a relação entre o uso do conectivo “e” com a operação de interseção, o uso do conectivo “ou” com a operação de união e o uso do conector “não” às vezes tomado como “nem” = “também não”, com a operação de complementar de conjunto.
3. Classificar os eventos em certo, impossível, elementar e mutuamente exclusivos.
4. Perceber que existem espaços amostrais em que seus eventos elementares possuem as mesmas chances de ocorrer e espaços amostrais em que seus eventos elementares possuem chances diferentes de ocorrer.
5. Avaliar quando um espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável.
6. Intuir o valor da probabilidade de alguns eventos.
7. Realizar alguns experimentos aleatórios e calcular as frequências absolutas e relativas dos resultados.
8. Comparar o resultado da frequência relativa do evento, calculada na atividade experimental, com o valor teórico da probabilidade.

9. Observar que à medida que se aumenta o número de repetições do experimento, a frequência relativa tende a se aproximar cada vez mais do valor teórico da probabilidade do evento estudado (Lei dos Grandes Números).
10. Calcular a probabilidade de determinados experimentos aleatórios pela definição Clássica.
11. Observar que a definição Clássica só pode ser aplicada em espaços amostrais finitos e equiprováveis.

Ao elaborar a Aula 2, planejamos iniciar pela correção dos exercícios da aula anterior, que será realizada por intermédio de um projetor. Optamos por usar o projetor, pois nos ajudará a economizar o tempo que gastaríamos escrevendo no quadro negro.

Acreditamos que após a correção e tendo destacado as especificidades de alguns eventos teremos condições de dar continuidade ao conteúdo de Probabilidade. Com isso, os licenciandos apresentarão as definições dos tipos de eventos: certo, impossível, elementar ou simples e mutuamente exclusivos, por intermédio de um projetor.

Formalização dos tipos de eventos

Evento certo: Quando um evento é representado pelo próprio espaço amostral associado ao experimento realizado.

Evento impossível: Quando um evento é caracterizado pelo conjunto vazio, ele é chamado de evento impossível.

Evento elementar ou simples: É aquele formado por um (único) elemento do espaço amostral.

Eventos mutuamente exclusivos: Quando a interseção de dois eventos é o conjunto vazio.

Após a formalização, seguirá a seguinte atividade:

Descrição da Atividade 1
Os licenciandos retomarão os exercícios corrigidos da Aula 1, mais especificamente os eventos que já haviam sidos destacados durante a correção pelas suas características para que os alunos possam classificá-los em eventos certo, impossível, simples e mutuamente exclusivos.

Nossa intenção é permitir que os alunos apliquem os conceitos sobre os tipos de eventos. Optamos por esta atividade pois a consideramos simples e acreditamos que os alunos a realizarão com grande facilidade. Não daremos mais ênfase a essas definições, pois julgamos que se tratam apenas de nomenclaturas.

Em seguida, os licenciandos passarão duas atividades, bem simples, com a intenção de introduzir uma pequena discussão de espaço amostral equiprovável e não equiprovável.

Descrição da Atividade 2

Em uma turma com 50 alunos existem 32 meninas e 18 meninos. Escreveremos os nomes dos alunos em fichas todas iguais e as mesmas serão colocadas em uma urna. Sortearemos uma única ficha e observaremos se sorteamos uma menina ou um menino.

a) Escreva um espaço amostral para este experimento aleatório.
b) O que tem mais chance de ocorrer:
   ( ) O sorteio de uma menina
   ( ) O sorteio de um menino
   ( ) Ambos têm as mesmas chances de ocorrer
c) Justifique a sua resposta ao item anterior.

(Adaptada de SILVA, 2002)

Descrição da Atividade 3

No lançamento de uma moeda, observa-se a face voltada para cima.

a) Escreva um espaço amostral para este experimento.
b) O que tem mais chance de ocorrer:
   ( ) A face cara
   ( ) A face coroa
   ( ) Ambas possuem a mesma chance de ocorrer.
c) Justifique a sua resposta ao item anterior.

Os licenciandos pedirão que os alunos apresentem suas respostas oralmente. Em seguida, a fim de ressaltar as diferenças entre os espaços amostrais, farão as seguintes perguntas:

- O que podemos observar nos espaços amostrais das duas atividades anteriores?
- O que eles têm de diferente?
- O que podemos concluir das chances de ocorrer os eventos elementares de cada um dos espaços amostrais?

Escolhemos essas atividades para evidenciar a existência de espaços amostrais nos quais seus eventos elementares possuem as mesmas chances de ocorrer e outros espaços nos quais seus eventos elementares possuem chances diferentes de ocorrer. Além disso, durante nossa análise do livro didático, percebemos que este conceito não é tratado pelos livros analisados.

Acreditamos que os alunos responderão sem apresentar dificuldade, pois se trata de uma atividade simples, apenas para introduzir o conceito de espaço amostral equiprovável e não equiprovável. Após a discussão das respostas, os licenciando apresentarão, por intermédio do projetor, o conceito de espaço amostral equiprovável e não equiprovável.

Formalização do conceito

Espaço amostral equiprovável: quando todos os seus eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer.

Espaço amostral não equiprovável: quando entre seus eventos elementares existe algum com uma maior chance de ocorrer, ou seja, possuem chances diferentes de acorrer.

Descrição da Atividade 4

Os licenciandos retomarão as duas últimas atividades para que os alunos possam classificar os espaços amostrais em equiprovável e não equiprovável.

Exemplo

Considere o lançamento de uma moeda viciada e a observação da face voltada para cima. Nesta moeda a chance de ocorrer cara é duas vezes maior que a chance de ocorrer coroa.

a) Determine um espaço amostral para este experimento.

Sendo C= cara e K = coroa, temos: $\Omega = \{C, K\}$

b) Este espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.

Não equiprovável, pois a chance de ocorrer o evento E={C} é duas vezes maior que a chance de ocorrer o evento E'= {K}

Descrição da Atividade 5

Observe os espaços amostrais referentes aos experimentos aleatórios abaixo e classifique- os em espaço equiprovável ou não equiprovável.

a) Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso na urna.
Ω = *{branca, vermelha, azul}*

b) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso.
Ω = *{ preta, banca, amarela}*

c) Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados e observados os números das faces de cima.
$\Omega = \{ (1, 1), (1, 2), ..., (1, 6), ..., (6, 1), (6, 2), ..., (6, 6)\}$

Escolhemos o exemplo e Atividades 4 e 5 com a intenção de que os alunos apliquem os conceitos de espaço amostral equiprovável e não equiprovável. Acreditamos que os alunos realizarão está atividade com muita facilidade.

Neste momento, já foram trabalhados os conceitos iniciais, ou seja, experimento determinístico, aleatório, espaço amostral (finito, infinito, equiprovável e não equiprovável) e eventos (tipos de eventos), por isso julgamos que podemos introduzir a noção de mensurar o acaso. Para isso, os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, as seguintes perguntas:

Descrição da Atividade 6

1. Como podemos medir o acaso?
2. Como podemos atribuir um valor numérico para as chances de ocorrer um determinado evento?
3. Vocês conseguem responder:
   a) Qual é a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda comum? Justifique.
   b) Qual é a probabilidade de sair coroa no lançamento de uma moeda comum? Justifique.
   c) Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado comum? Justifique.
   d) Qual é a probabilidade de sair um número ímpar no lançamento de um dado comum? Justifique.
   e) Qual a probabilidade de sair um número maior que 6 no lançamento de um dado comum? Justifique.
   f) Qual a probabilidade de sair um número menor que 7 no lançamento de um dado comum? Justifique.
   g) Qual é a probabilidade de sair o número 3 no lançamento de um dado comum? Justifique.

Nossa intenção com as Questões 1 e 2 é aguçar a curiosidade dos alunos para que possam pensar como podemos medir as chances de ocorrer determinados eventos. No item 3 queremos que os alunos utilizem as suas intuições ao atribuírem valores numéricos à chance de ocorrer um determinado evento. Além disso, acreditamos que eles possam responder corretamente visto que a maioria das questões refere-se a 50% = $\frac{1}{2}$ = metade, 0% e 100% de chances de ocorrerem.

Em seguida, os alunos realizarão a seguinte atividade:

Descrição da Atividade 7

Os licenciandos pedirão que os alunos realizem, em duplas, o seguinte experimento: lançar uma moeda comum 10 vezes e anotar a face obtida em cada lançamento em uma tabela com as frequências absolutas e relativas.

Tabela das frequências em 10 lançamentos

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara		
Coroa		

Tabela 5.4: Frequências em 10 lançamentos

Neste momento, os licenciandos darão, por intermédio do projetor, uma rápida explicação de frequência relativa e absoluta para a execução da Atividade 7.

Frequência

Consideramos um experimento aleatório com um espaço amostral finito qualquer. Suponhamos que o experimento seja repetido n vezes em condições semelhantes. Seja m o número de vezes que ocorre o evento A (m é a frequência absoluta).

A **frequência relativa** do evento “A” é: $f = \frac{m}{n}$

Após a realização do experimento os licenciandos utilizarão os resultados de todas as duplas para montar uma tabela com as frequências relativas e absolutas no quadro branco.

Tabela das frequências em “todos os” lançamentos

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara		
Coroa		

Tabela 5.5: Frequências em “todos os” lançamentos

Nesta atividade os alunos realizarão empiricamente o experimento e calcularão as frequências relativas e absolutas dos eventos em questão, com isso queremos prepará-los para trabalharem os conceitos Frequentista e Clássico de Probabilidade.

Os licenciandos apresentarão os resultados obtidos nos estudos realizados por Kerrich e Buffon (HOWARD, 2010).

Tabela das frequências em 1.000 lançamentos:

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara	529	
Coroa	471	

Tabela 5.6: Frequências em 1.000 lançamentos

Tabela das frequências em 4.040 lançamentos

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara	2.048	
Coroa	1.992	

Tabela 5.7: Frequências em 4.040 lançamentos

Esses dois últimos experimentos foram realizados por Kerrich e Buffon.

Nossa intenção é permitir que os alunos possam comparar os valores obtidos em 10 lançamentos, “todos os” lançamentos em 1.000 lançamentos e em 4.040 lançamentos. Farão para isso as seguintes perguntas:

Descrição da Atividade 8

O que podemos observar em relação aos valores das frequências relativas à medida que aumentamos o número de lançamentos?

Se aumentarmos a lançamento para 100.000, o que acontecerá?

Nosso propósito é que os alunos possam perceber que, à medida que aumenta o número de repetições do experimento, a frequência relativa se aproxima da probabilidade intuída anteriormente na Atividade 6.

Após a discussão, os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, a formalização das definições Clássica e Frequentista de Probabilidade associada ao evento equiprovável e ao não equiprovável.

Formalização

Existe uma definição que permite calcular teoricamente a probabilidade de um evento sem realizar o experimento e que se aplica apenas quando o espaço amostral é finito e equiprovável.

Definição Clássica da Probabilidade

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral Ω finito e equiprovável. A probabilidade de ocorrer o evento $A \subset \Omega$ é:

$$P(A) = \frac{número\ de\ elementos\ de\ A}{número\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

Após a apresentação formal, os licenciandos retomarão algumas das probabilidades que os alunos intuíram na Atividade 6 e a seguir será apresentada a definição Frequentista de Probabilidade

Descrição da Atividade 9

a) Qual é a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda comum?
b) Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado comum?
c) Qual a probabilidade de sair um número maior que 6 no lançamento de um dado comum?
d) Qual a probabilidade de sair um número menor que 7 no lançamento de um dado comum?
e) Qual é a probabilidade de sair o número 3 no lançamento de um dado comum?

Definição Frequentista da Probabilidade:

Consideremos um experimento aleatório com um espaço amostral finito qualquer. Suponhamos que o experimento seja repetido *n* vezes em condições semelhantes.

Seja *m* o número de vezes que ocorre o evento A (*m* é a frequência absoluta).

A **frequência relativa** do evento "A" é $f = \frac{m}{n}$

A frequência relativa é uma aproximação da probabilidade, quando se realizarem número considerável de experimento.

A frequência relativa se iguala à **probabilidade do evento** “A” quando o número de repetições do experimento “*n*” tende ao infinito.

Os licenciandos deverão retornar ao experimento realizado empiricamente, o lançamento da moeda, para novamente comparar as frequências com o resultado da probabilidade da definição Clássica. Em seguida, realizarão o seguinte experimento:

Descrição da Atividade 10

Considere o lançamento de uma tachinha e a observação da sua posição no chão:

a) Determine um espaço amostral.

b) Realizando o experimento, lançamento da tachinha, 5, 15, e 20 vezes foi obtido o seguinte resultado expresso na tabela. Determine a frequência relativa expressando os resultados em porcentagem.

Número de jogadas	Ponta e cabeça da tachinha tocando no chão	Só cabeça no chão	Frequência relativa
5			
10			
15			
20			

Tabela 5.8: Frequências dos lançamentos da tachinha

c) Em sua opinião, o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.

d) Posso aplicar a definição Clássica de probabilidade neste experimento? Justifique.

(Adaptado de SILVA, 2002)

Nosso objetivo é fixar os conceitos Frequentista e Clássico de Probabilidade vinculados ao espaço amostral equiprovável e não equiprovável. Escolhemos esta questão, por se trata de um objeto não convencional nas aulas de Probabilidade, visto que, em geral, são utilizados moedas e dados. Por outro lado, nos livros didáticos analisados não se trabalha a questão do espaço amostral não equiprovável e também não se discute a questão de quando podemos usar o conceito Clássico e quando não podemos usá-lo.

No item (a) queremos que os alunos escrevam um espaço amostral associado ao experimento em questão. Acreditamos que conseguirão responder com facilidade.

Nossa intenção no item (b) é fixar o conceito Frequentista de Probabilidade, trabalhando com as frequências relativa e absoluta. Além disso, os alunos precisarão transformar as frações em porcentagem. Presumimos que respondam sem problemas e permitiremos, caso queiram, a utilização da calculadora.

No item (c) exploramos a questão do espaço amostral equiprovável e não equiprovável, acreditamos que os alunos respondam corretamente analisando tanto a geometria da tachinha quanto os resultados da tabela.

O nosso propósito com o item (d) é levantar a discussão da aplicabilidade do conceito Clássico em relação ao espaço amostral equiprovável e não equiprovável. Como esta questão foi ressaltada durante a formalização desses conceitos, julgamos que os alunos respondam corretamente. Logo em seguida, os alunos farão uma lista de exercícios.

Lista 2 (Exercícios de Revisão)

1) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 boas amarelas. Determine:
   a) Um espaço amostral para este experimento.
   b) Se este espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável.
   c) A chance da bola retirada ser da cor verde.

2) Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a chance dele também estar cursando espanhol?

3) Um objeto será sorteado de cada urna das urnas representadas pelas figuras abaixo. Descreva e classifique os espaços amostrais em equiprovável ou não equiprovável, segundo a natureza dos objetos, e justifique sua resposta.

a)

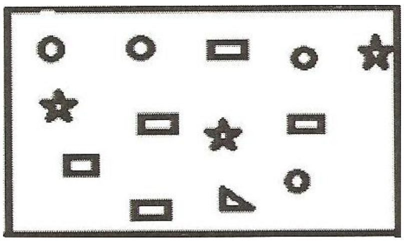


Figura 5.5: Espaço amostral 1

b)

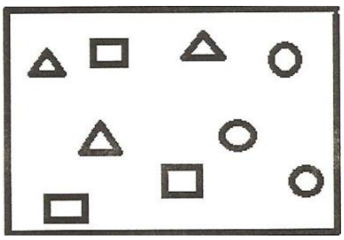


Figura 5.6: Espaço amostral 2

4) Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso na urna. Determine.
   a) Um espaço amostral para este experimento.
   b) A bola que tem mais chance de ser escolhida.
   c) Se este espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável. Justifique sua resposta.

5) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Determine:
   a) um espaço amostral para este experimento;
   b) a bola de maior chance de ser escolhida;
   c) se o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável, justificando sua resposta;
   d) a chance de a bola não ser amarela.

6) Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados e observados os números das faces de

cima. Qual é a chance de ocorrerem os números iguais?

Com esta lista queremos: fixar os conceitos de espaço amostral equiprovável e não equiprovável por intermédio das Questões 1, 3, 4 e 5; explorar o cálculo de algumas probabilidades bem simples por intermédio das Questões 1, 2, 4, 5 e 6.

Acreditamos que os alunos talvez tenham dificuldade na Questão 2 pois sua resolução envolve a noção de diagramas conexos (noção de conjuntos) e nas demais questões julgamos que consigam responder corretamente, pois utilizam raciocínios explorados anteriormente.

5.2.6 Análise a Posteriori e Validação da Aula 2

Nesta etapa faremos uma pequena descrição da experimentação da Aula 2 e em seguida, passaremos para a análise a posteriori desta aula.

Experimentação da Aula 2

A aplicação da segunda aula acorreu no dia 21 de outubro de 2011. Na turma da manhã no horário de 9h às 12h com 20 minutos de intervalo para o recreio, estando presentes 11 alunos. Na turma da tarde, no horário de 15h às 17h, sem intervalo e estando presentes 4 alunos.

Tínhamos previsto que iríamos fazer a correção da lista de exercícios da **Aula 1** anterior, mas os alunos da manhã não tiveram tempo de responder todas as questões. Assim a aula da turma da manhã iniciou-se com a entrega da lista para que os alunos terminassem de resolvê-la, o que não ocorreu na turma da tarde.

Na turma da manhã tínhamos o mesmo número de alunos que na aula anterior, mas não eram exatamente os mesmos alunos. Na Aula 2 vieram dois alunos que não tinham participado da Aula 1 e faltaram dois alunos que tinham participado da Aula 1. Para inseri-los na atividade (término da resolução da Lista 1), pedimos aos que faltaram à aula anterior que se sentassem ao lado dos alunos que participaram da Aula 1 para que esses os auxiliassem nas resoluções dos exercícios.

Na turma da tarde vieram exatamente os mesmos alunos que participaram da Aula 1. Diferentemente da turma da manhã, a Aula 2 se iniciou com uma pequena revisão dos conceitos discutidos na Aula 1 através de uma conversa informal.

Todas essas decisões locais de iniciar a aula com a entrega das listas, orientar os alunos que faltaram a sentar-se com os demais, iniciar com uma conversar informal a fim de adequar o planejamento inicial à realidade da experimentação foram decididas pelos licenciandos.

Tivemos um imprevisto em relação ao projetor que, embora tivesse sido reservado, estava sendo usado por outro professor da escola e por este motivo a aula da manhã se iniciou com atraso e sem o projetor.

Por conta deste imprevisto, fizemos novamente uma análise local desta etapa experimental e identificamos a necessidade de retornar à análise a priori para adaptar o nosso planejamento. Desta forma optamos, licenciandos da manhã, da tarde e eu, por deixar a correção da Lista 1 para o início da Aula 3. Além disso, tínhamos planejado introduzir e formalizar os tipos de eventos durante a correção da Lista 1, o que também combinamos de ser realizado no início da Aula 3.

Análise a Posteriori e Validação da Aula 2

Atividade 2

Seguem as respostas orais das duas turmas:

a) *"Menina, menina, menina,... 32 duas vezes e menino 18 vezes." (*turma da manhã)
   "Meninas e meninos." (turma da tarde)
b) *"O sorteio de uma menina."* (turma da manhã e da tarde)
c) *"Tem mais meninas do que meninos."* (turma da manhã e da tarde)

De acordo com as respostas dos alunos os licenciandos fizeram o seguinte registro no quadro do item (a): **Ω**={Ma, Ma,..., Ma, Mo, Mo,..., Mo}={Ma, Mo} (Turma da manhã). **Ω** = {Meninas, Meninos} (turma da tarde).

Observamos que nesta etapa, deveríamos ter explorado os diferentes espaços amostrais que poderiam ser utilizados como respostas ao item (a) da Atividade 2, mas não o fizemos, pois ficamos presos às respostas orais dos alunos. Por conta desta falha, sugerimos que as seguintes observações sejam colocadas no texto do material do aluno e do professor:

Ω_1 = {Ma_1, Ma_2,..., Ma_{32}, Mo_1, Mo_2,..., Mo_{18}}, espaço amostral equiprovável.

Ω_2 = {Ma, Ma,..., Ma, Mo, Mo,..., Mo} = {Ma, Mo}, espaço amostral não equiprovável.

Ω_3 = {Meninas, Meninos}, espaços amostral não equiprovável.

Atividade 3

Nas duas turmas os alunos responderam oralmente:

a) *“Cara e coroa.”* (turma da manhã e da tarde)
b) *“Ambas possuem a mesma chance de ocorrer.”* (turma da manhã)
“Nenhuma das duas, porque têm a mesma chance de ocorrer.” (turma da tarde)
c) *“Só existe uma cara e uma coroa.”* (turma da manhã e da tarde)

Os licenciandos fizeram o registro no quadro da seguinte forma*:* Ω = {cara, coroa}. Outro problema que talvez possa ter ocorrido é o da incongruência entre as respostas orais dos alunos e a maneira como eles registraram na escrita, não utilizando talvez a devida notação de conjunto. Infelizmente, não nos atentamos a isso durante a aplicação da sequência didática.

Em seguida, a fim de ressaltar as diferenças entre os espaços amostrais, os licenciandos fizeram as seguintes perguntas:

- O que podemos observar nos espaços amostrais das duas atividades anteriores?
- O que eles têm de diferentes?
- O que podemos concluir das chances de ocorrer os eventos elementares de cada um dos espaços amostrais?

Nas duas turmas os alunos responderam:

- *“Um tem mais quantidade.”*
- *“Tem muito mais meninas do que meninos.”*

Em seguida, os licenciandos formalizaram o conceito de espaço amostral equiprovável e não equiprovável e, para isso, foi necessário definir evento elementar. No planejamento inicial esta definição deveria ter sido feita durante a correção da lista de exercícios, mas tivemos que fazer uma pequena adaptação, em decorrência do imprevisto do projetor.

Atividade 4

Nos dois turnos, os alunos classificaram o espaço amostral da Atividade 2 em não equiprovável e o espaço amostral da Atividade 3 em equiprovável. Julgamos que alcançamos o objetivo da análise a priori que era de aplicar o conceito de equiprovável e não equiprovável. Porém falhamos ao deixar de explorar melhor as atividades como já mencionadas anteriormente.

Exemplo 5

A discussão se concentrou em diferenciar o espaço amostral da moeda comum do espaço da moeda viciada, comparando a Atividade 3 com este exemplo. Durante a discussão na turma da manhã dois alunos se manifestaram fazendo uma analogia com a Atividade 2.

Um deles disse que seria o mesmo caso das meninas, enquanto o outro disse que como havia mais meninas, a chance seria maior. Na turma da tarde, o seguinte diálogo ocorreu entre dois alunos durante a correção:

Aluno A: *"Fiquei em dúvida! Cara e coroa é equiprovável."*
Aluno B: *"Mas esta moeda é viciada."*
Aluno B: *"Cara e coroa é equiprovável na moeda comum. Na moeda viciada é não equiprovável."*
Aluno A: *"Ah, tá! Entendi!"*

Através deste diálogo podemos perceber a dificuldade do aluno A em diferenciar os espaços amostrais das moedas comum e viciada. Já o aluno B conseguiu perceber esta diferença e esclarecer a dúvida do aluno A sem a necessidade de interferência do licenciando.

Atividade 5

Seguem as respostas e os comentários orais dos alunos (manhã e tarde) em relação ao item:

a) *"Não equiprovável, azul têm mais chance de ocorrer."*
b) *"A que tem mais chance de ocorrer é azul e a que tem menos chance é vermelha. "*
c) *"Não equiprovável."*

No item (c) ocorreu o seguinte diálogo (turma da manhã):

Aluno A: "*Equiprovável, porque tem as mesmas chances."*
Aluno B: "*Hum! Estou começando a entender!"*
Aluno C: "*Agora que você está começando?"*
Aluno B: "*É! Minha mente está começando a funcionar."*

Através deste diálogo percebemos a necessidade da aplicação dos conceitos em diversos exemplos, pois enquanto uns alunos assimilam com facilidade, outros alunos precisam de vários exemplos e exercícios para entender os conceitos trabalhados. Julgamos que os alunos aplicaram a definição de equiprovável e não equiprovável corretamente. Desta forma, as Atividades 2, 3, 4, 5 e o Exemplo 5, nos permitiram validar a seguinte variável microdidática associada à dimensão epistemológica: ampliação do conceito de espaço amostral abordando espaços equiprováveis e não equiprováveis.

Atividade 6

Seguem as respostas orais dos alunos em relação à pergunta:

(1) e (2) "*Fazendo uma macumbinha!"* (Turma da manhã)
"*Analisando as possibilidades dos resultados*." (Turma da manhã)
"De acordo com os possíveis resultados." (turma da tarde)

a) *"50%¨. É meio a meio."* (Turma da manhã)
"Só tem duas faces e têm a mesma chance de ocorrer." (Turma da manhã)
"*½ ou 50%, porque entre duas possibilidades tem uma."* (Turma da tarde)

b) *"50%, só repetir a resposta da primeira*." (Turma da manhã)
"Idem à primeira." (Turma da manhã)
"A mesma da primeira." (Turma da manhã)
"50% para um e 50% para o outro." (Turma da tarde)

c) *"50%, porque são três ímpares e três pares."* (Turma da manhã)
"Par: 2, 4, e 6. Ímpar: 1, 3, e 5." (Turma da manhã)
"Quais as chances que a gente tem? 2, 4 e 6. Então são 3/6." (Turma da Tarde)

d) *"Idem. A mesma resposta da de cima."* (Turma da manhã)
"Essa não teve graça, é igual à anterior." (Turma da manhã)
"É a mesma coisa." (Turma da tarde)

e) *"0%, porque o dado comum só vai até 6."* (Turma da manhã)
"Nenhuma, zero, só vai até 6." (turma da tarde)

f) *"100%. De 1 a 6 todos os números são menores que sete."* (Turma da manhã)
"6/6, 100%." (Turma da tarde)

g) *"16,66666... . Eu dividi 100 por 6 porque tem a mesma chance de ocorrer, deu 16,666... aproximadamente 16,6%. Se tivessem 5 números seria 20%."* (Turma da manhã).
"Só tem um número 3, então é um sexto." (Turma da tarde).

De acordo com as respostas podemos perceber que os alunos utilizaram seus conhecimentos sobre porcentagem, proporção e frações para responderem corretamente as questões. Discutimos como podemos medir o acaso, mas falhamos ao deixarmos de discutir para que medir o acaso. Esta é outra sugestão para ser acrescentada à sequência didática. Em seguida, os licenciandos leram e explicaram as definições de frequência absoluta e relativa para que os alunos pudessem fazer a Atividade 7.

Atividade 7

Na turma da tarde cada dupla de alunos lançou 15 vezes uma moeda, pois eram poucos presentes, o que deu um total de 75 lançamentos. Após a realização do experimento, os licenciandos utilizaram os resultados de todas as duplas para montar uma tabela com as frequências relativas e absolutas no quadro branco, apresentaram os resultados obtidos por Kerrich (1964) e Buffon (1707 - 1788).

Atividade 8

Nas duas turmas os alunos responderam oralmente:

- *"Os valores estão próximos de 50%."*
- *"Está se aproximando de 50%."*

Acreditamos que através destas últimas atividades preparamos o raciocínio dos alunos para os conceitos Frequencial e Clássico de Probabilidade. Após a formalização desses conceitos, os alunos deveriam responder a Atividade 9 utilizando corretamente a definição clássica da Probabilidade.

Atividade 9

Na correção, os alunos apresentaram as suas respostas oralmente e os licenciandos foram fazendo os devidos registros no quadro, como se segue no item (e). Na turma da manhã todos acertaram, mas não temos certeza de como escreveram. Na turma da tarde apenas um determinado aluno apresentou dificuldade no item (e), confundindo o elemento em si deste conjunto com o seu número de elementos. Segue-se um exemplo de como os licenciandos fizeram o registro no quadro e a discussão entre este aluno e o licenciando a respeito do item (e):

e) $\Omega = \{1, 2, ..., 6\}$
E: sair o número 3.
$E = \{3\}$
$P(E) = \frac{1}{6}$

Licenciando: "*Quantos elementos tem o conjunto E?"*
Aluno: "*3 elementos."*
Licenciando: "*Quantos elementos tem o espaço amostral?"*
Aluno: "*6 elementos."*
Licenciando: "*Quantos elementos tem o conjunto E?"*
Aluno: "*3 elementos."*

O licenciando escreveu o seguinte conjunto no quadro: B={ □}

Licenciando: "*Quantos elementos tem o conjunto B?"*
Aluno: *1 elemento.*
Licenciando: *"Quantos elementos tem o conjunto E?"*
Aluno: "*3 elementos."*
Licenciando: "*Eu sou o número três! Sou o elemento do conjunto E! Quantos elementos tem o conjunto E?"*
Aluno: "*1 elemento. Ah! Entendi!"*

O licenciando ainda escreveu o seguinte conjunto no quadro A= {1003}. Fez a seguinte pergunta:

Licenciando: "*Quantos elementos tem o conjunto A?"*
Aluno: "*1 elemento. Entendi!"*

Esta atividade ilustra bem a forma com que o licenciando faz uso de seu saber pedagógico de conteúdo de maneira a desfazer um equívoco relativamente delicado da noção entre número e cardinalidade de conjunto. Este diálogo nos revela a forma que o licenciando encontrou para ilustrar, exemplificar, explicar e reorganizar o entendimento do aluno, tornando o assunto compreensível para o mesmo.

O licenciando da turma da tarde, por conta desta dúvida em relação ao número de elementos de um conjunto unitário cujo elemento é um número, criou outros exemplos para tratar em sala de aula.

1º) Considere o evento C: sair um número que não é o número 3.
2º) No lançamento de um dado comum, considere os seguintes eventos: A: sair o número 1; B: sair o número 2; C: sair o número 3; D: sair o número 4; E: sair o número 5; F: sair o número 6.
P(A) + P(B) + P(C) + P(D) + P(E) + P(F) = $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1=100\%$.

Este mesmo licenciando afirmou que gostou de dar aula sem o *slide*. Para ele o *slide* o deixa preso e ele acaba reproduzindo as explicações do slide e, sem a utilização dele, consegue criar outros exemplos e formas alternativas de explicações.

Em seguida, nas duas turmas, os licenciandos formalizaram a definição Frequentista de Probabilidade e para exemplificar, retornaram ao experimento realizado empiricamente, o lançamento da moeda, para compararem as frequências com o resultado da probabilidade da definição Laplaciana.

Atividade 10

De forma geral os alunos responderam:

a) *"Ω = {ponta e cabeça da tachinha tocando no chão, só cabeça da tachinha tocando no chão}."*
b) *"Não equiprovável. O formato da tachinha."*
c) "Laplaciana não pode. Se fosse equiprovável sim. Como é não equiprovável, não podemos usar a definição Laplaciana."

Julgamos que a tabela auxiliou os alunos a responderem o item (a). Além disso, acreditamos que fixamos o conceito Frequentista de Probabilidade, exploramos os conceitos de equiprovável e não equiprovável vinculando-os com a definição Clássica e Frequentista da Probabilidade. No item (c) os alunos responderam recorrendo ao formato da tachinha e não aos resultados do experimento. Por esta razão, era necessário ter realizado um número maior de lançamentos para que pudessem fazer uso dos resultados do experimento.

Acreditamos que por intermédio desta atividade validamos a seguinte variável microdidática associada à dimensão epistemológica: integração dos conceitos Clássico e Frequentista de Probabilidade vinculados com espaço amostral equiprovável e não equiprovável. Em seguida, a aula foi finalizada com a lista de exercícios. Como previsto na análise a priori, a lista foi deixada para ser corrigida no início da Aula 3.

Presumimos que no decorrer desta aula conseguimos validar as seguintes variáveis macrodidáticas associadas à dimensão didática: promover uma discussão inicial para que os alunos pudessem expor seus conhecimentos e valorizar os conhecimentos prévios dos alunos sobre Probabilidade.

5.2.7 Análise a Priori da Aula 3

Nesta seção apresentamos as variáveis microdidáticas e a descrição de cada atividade juntamente com as previsões dos possíveis comportamentos dos alunos em relação à Aula 3.

Variáveis Microdidáticas Associadas à Dimensão:

1. Epistemológica
   a) Estudo dos axiomas da probabilidade restrita à concepção Clássica.
2. Didática
   a) Utilização de exemplos para ilustrar as propriedades da Probabilidade que serão apresentadas a fim de dar inteligibilidade aos mesmos.
   b) Lista de exercícios envolvendo as propriedades, os conceitos Frequentista, Clássico e Geométrico de Probabilidade, a fim de melhor fixá-los.

Nesta aula iremos introduzir algumas das propriedades importantes no cálculo da probabilidade e explorar os conceitos Frequentista, Clássico e Geométrico de Probabilidade por intermédio de alguns exercícios. Nosso desejo é permitir que os alunos consigam:

1. Acompanhar as discussões das propriedades que serão apresentadas.
2. Perceber a razoabilidade de cada propriedade.
3. Aplicar nos exercícios, quando necessário, as propriedades; o conceito Clássico; o conceito Frequentista; e o conceito Geométrico.

Após o momento inicial previsto como variável macrodidática, os licenciandos deverão apresentar algumas das propriedades da probabilidade por intermédio do projetor e, caso seja necessário, utilizarão o quadro branco. Devido à complexidade do assunto, daremos ênfase à justificativa dos resultados através de alguns exemplos, com forte apelo à concepção clássica. Claro que essas justificativas não têm valor de prova, pois os resultados são válidos, qualquer que seja o conceito de probabilidade tomado. Fazemos isso tão somente para tornar os axiomas inteligíveis aos alunos, bem como algumas das propriedade importantes no cálculo da probabilidade que deles emanam. Os axiomas comumente apresentados nos livros didáticos são:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(AUB) = P(A) + P(B)$

Estes geram as seguintes propriedades:

4. $P(\emptyset) = 0$
5. $P(A) + P(A^C) = 1$
6. Se $A \cap B \neq \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

A seguir, o conteúdo que será apresentado aos alunos pelos licenciandos.

Axiomas e Algumas Propriedades Importantes da Probabilidade:

Seja E um experimento aleatório com um espaço amostral associado S. A cada evento $A \subseteq S$, associa-se um numero real representado por P(A) e denominado “probabilidade de A”, que satisfaz as seguintes axiomas (1,2,3) e propriedades (4,5,6):

1. **$0 \leq P(A) \leq 1$**
2. **$P(S) = 1$**
3. **Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(AUB) = P(A) + P(B)$**

Sendo S um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento de S, têm-se:

4. **$P(\emptyset) = 0$**

Justificativa: $P(\emptyset) = \dfrac{n(\emptyset)}{n(S)} = \dfrac{0}{n(S)} = 0$

2. **$P(S) = 1$**

Justificativa: $P(S) = \dfrac{n(S)}{n(S)} = 1$

1. **$0 \leq P(A) \leq 1$**

Justificativa: Temos que

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$$

$$\Rightarrow n(\emptyset) \leq n(A) \leq n(\Omega)$$

$$\Rightarrow \frac{n(\emptyset)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{n(\Omega)} \leq P(A) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

3. Se A∩B = Ø então P(AUB) = P(A) + P(B)

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral S. Diz que ocorre o evento A união B, denotado por AUB, se e somente se A ocorre **ou** B ocorre.

Como n(AUB) = n(A) + n(B), pois A∩B= Ø.

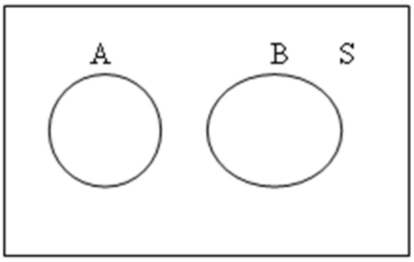


Figura 5.7: $A \cap B = \emptyset$

Então, $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = P(A) + P(B)$

6. **Se $A \cap B \neq \emptyset$ então P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B)**

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral S. Diz-se que ocorre o evento A união B, denotado por AUB, se e somente se A ocorre **ou** B ocorre.

Temos que: (AUB) = n(A) + n(B) - (A∩B), pois A∩B ≠Ø.

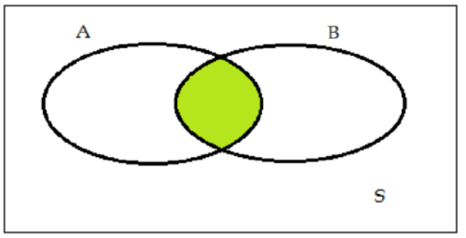


Figura 5.8: $A \cap B \neq \emptyset$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} =$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Optamos por apresentar as propriedades com a noção de conjunto, pois julgamos que assim as justificamos de uma forma mais intuitiva e consequentemente torná-las mais acessíveis aos alunos. Daremos, por isso mais ênfase aos exemplos com o intuito de fixar as propriedades apresentadas.

Exemplo: No lançamento de um dado comum, observa-se a face superior. Qual é a probabilidade de sair um número par ou um múltiplo de três?

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6},

n(S) = 6

- **A: sair um número par.**

A= {2, 4, 6},

n(A) = 3

$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

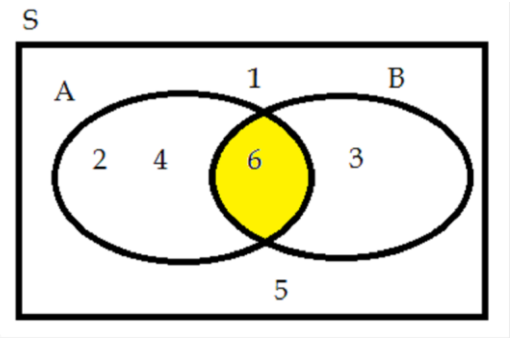


Figura 5.9: $A\cap B = \{6\}$

- **B: sair um múltiplo de 3.**

B= {3, 6}, n(B) = 2

$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

- **A∩B= {6}**

$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$

- **P(A∪B)= P(A) + P(B) - P(A∩B)**

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **ou**

A∪B= {2, 4, 6} ∪{3, 6} = {2, 3, 4, 6}, n(A∪B) = 4.

$P(A \cup B) = \frac{4}{6}$

5. **$P(A) + P(A^C) = 1$**

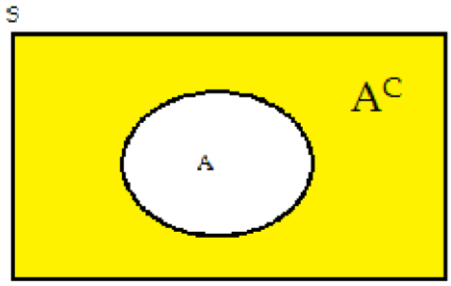


Figura 5.10: A^C

Temos que $A \cup A^C = S$ e $A \cap A^C = \emptyset$

$\Rightarrow n(A \cup A^C) = n(S)$

$\Rightarrow n(A) + n(A^C) = n(S)$

$\Rightarrow \frac{n(A) + n(A^C)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)}$

$\Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(A^C)}{n(S)} = 1$

$\Rightarrow P(A) + P(A^C) = 1$

A probabilidade de um evento A não ocorrer, indicado por $P(A^C)$, é igual a 1, menos a probabilidade de ele ocorrer, isto é, $P(A^C) = 1 - P(A)$.

Exemplos:

a) No lançamento de um dado comum não viciado, qual é a probabilidade de não sair o número 2?

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6},

n (S) =6

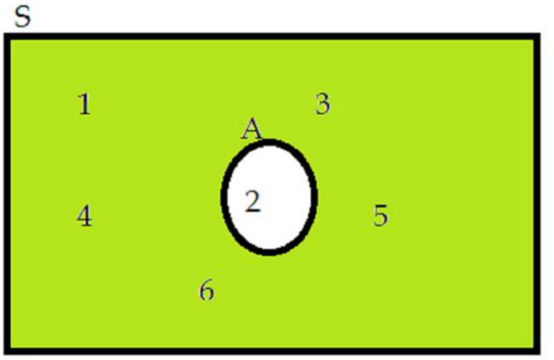


Figura 5.11: A={2}

- **A: sair o número 2**

A= {2},

n(A) =1.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

- **A^C: não sair o número 2**

$P(A^C) = 1 – P(A)$.

$$P(A^C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

- **Ou A^C: não sair o número 2**

$A^C = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $n(A^C) =5$

$$P(A^C) = \frac{5}{6}$$

b) (PAIVA, 2005) Uma urna contém bolas coloridas. Retirando-se uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é 0,64. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha?

- **A: obter uma bola vermelha**

P(A) =0,64

- **A^C: Obter uma bola que não seja vermelha**

$P(A^C) = 1 – P(A)$.

$P(A^C) = 1 – 0{,}64 = 0{,}36$

Escolhemos esses exemplos pois acreditamos que devemos apresentar modelos fáceis inicialmente, com o intuito de ilustrar as propriedades que consideramos mais complexas. Acreditamos que desta maneira, os alunos não apresentarão dificuldade em entender a aplicação da propriedade nos exemplos. Além disso, optamos por apresentar várias formas de resolução, sempre que possível, a fim de fixar ainda mais as propriedades da Probabilidade.

Após a apresentação formal das propriedades e suas exemplificações, os licenciandos passarão uma lista de exercícios a fim de fixar os conceitos trabalhados nesta aula e nas aulas anteriores. Segue a lista:

Lista 3 (Exercícios de Revisão)

1) Um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central.

Figura 5.12: Alvo

(Adaptado da COLEÇÃO Explorando o ensino)

2) (UFRGS, 1998) A figura representa uma parede quadrada na qual estão pintados discos de raio R. Se uma bola é lançada totalmente ao acaso contra a parede, a probabilidade de ela tocar fora dos discos está entre:

a)14% e 16% b) 17% e 19%
c) 20% e 22% d) 23% e 25%
e) 26% e 28%

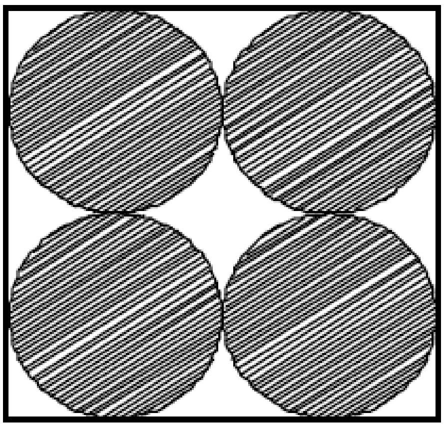


Figura 5.13: Parede quadrada com discos

3) Precisamos escolher um ponto de uma determinada "linha". Se X e Y são pontos de uma linha de extremos A e B, qual a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha XY (contida em AB)?

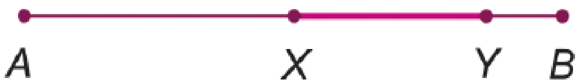


Figura 5.14: Linha AB

(Adaptado da COLEÇÃO Explorando o ensino)

4) (ENEM, 2001) Um município de $628Km^2$ é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançaram um raio de 10 km do município conforme mostra a figura ao lado. Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20% b) 25% c) 30% d) 35% e) 40%

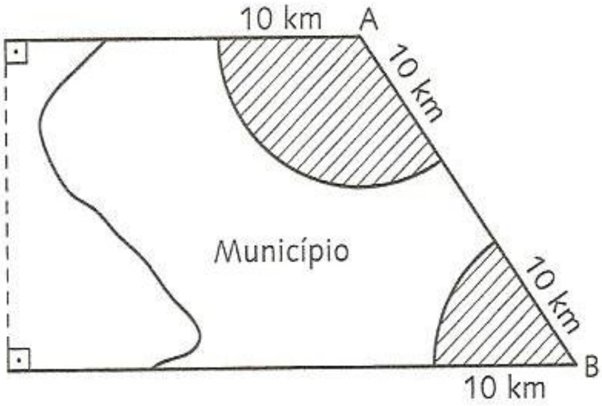


Figura 5.15: Município

5) Uma moeda é viciada de tal modo que sair cara é duas vezes mais provável do que sair coroa. Calcule a probabilidade de:

   a) Ocorrer cara no lançamento dessa moeda.
   b) Ocorrer coroa no lançamento dessa moeda.

6) Temos duas moedas, das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomadas ao acaso, é lançada. Qual é a probabilidade de se obter cara?

7) No sorteio de um número natural de 1 a 20, determine as probabilidades:

   a) De ocorrer um número par.
   b) De ocorrer um múltiplo de 3.
   c) De ocorrer um número primo.
   d) De ocorrer um divisor de 12.

8) Qual a probabilidade de lançar um dado branco e outro azul e se obter:

   a) A soma dos pontos igual a 7?
   b) 2 pontos no dado azul?

9) Tira-se, ao acaso, uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de ser a carta retirada:

   a) Um ás?
   b) Uma figura, isto é, valete, dama, ou rei?
   c) Do naipe de espada?
   d) Uma figura de espada?

10) Se $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}3$ e $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calcule:

   a) $P(A \cup B)$.
   b) $P(A^C \cup B)$, onde A^C é o complementar de A.

11) Um colégio tem 400 alunos e destes: 100 estudam Matemática; 80 estudam Física; 100 estudam Química; 20 estudam Matemática, Física e Química; 30 estudam Matemática e Física; 30 estudam Física e Química; 50 estudam somente Química. A probabilidade de um alunos, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

   a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{3}$

12) Uma pesquisa ouviu 500 pessoas, 230 disseram ler o jornal A, 134 disseram ler o jornal B e 54, o jornal C. 86 leem tanto o jornal A quanto o jornal B, 20 leem tanto o jornal A quanto o jornal C e 5 leem tanto o B quanto o C, 3 disseram ler os três jornais. Se uma pessoa for escolhida ao acaso entre essas 500, qual a probabilidade de que ela:

a) Leia apenas o jornal A?
b) Leia pelo menos um dos três jornais?
c) Não leia nenhum dos três jornais?
d) Leia exatamente um dos 3 jornais?

Optamos por colocar as Questões 1, 2, 3 e 4 sobre Probabilidade Geométrica, pois verificamos que é pouco explorada nos livros didáticos e a julgamos de grande importância, porque há a necessidade de calcular algumas áreas para determinar a probabilidade. Acreditamos que os alunos apresentarão muita dificuldade nos exercícios de Probabilidade Geométrica, pois envolve cálculo de área e comprimento de algumas figuras geométricas, apesar de terem trabalhado com geometria no início das aulas do projeto PIBID no ano de 2011.

As Questões 5 e 6 exploram o cálculo da probabilidade de espaços não equiprováveis. Por isso julgamos que os alunos poderão ter dificuldade em escrever os espaços amostrais e consequentemente calcular a probabilidade de forma equivocada.

Questão 10 envolve a manipulação das propriedades de união, interseção e complementar entre eventos. Por isso julgamos que eles apresentarão dificuldade na sua resolução. Já nas Questões 11 e 12 acreditamos que os alunos talvez não tenham dificuldade, pois sua resolução envolve a noção de Diagramas de Venn (noção de conjuntos) e este tipo de raciocínio já foi explorado na lista de exercícios da aula anterior (Aula 02). Nas demais Questões (7, 8, 9), julgamos que consigam responder corretamente, pois são questões que envolvem o cálculo de probabilidade simples.

5.2.8 Análise a Posteriori e Validação da Aula 3

Nesta etapa faremos uma pequena descrição da experimentação da Aula 3 e em seguida, passaremos para a análise a posteriori desta aula.

Experimentação da Aula 3

A Aula 3 foi aplicada no dia 04 de novembro de 2011. A sexta-feira anterior foi o feriado do servidor público, ou seja, já haviam passado 15 dias da Aula 2.

Não pude acompanhar o desenvolvimento da aula na turma da manhã, por isso as anotações foram realizadas pelos licenciandos. Eles não escreveram nome dos alunos que participaram, não mencionaram como se deu o desenvolvimento da aula, registraram somente algumas dúvidas e comentários dos alunos no decorrer das atividades.

Na turma da tarde a aula ocorreu no horário de 15h às 17h, estando presentes quatro alunos. A aula iniciou com uma conversa informal relembrando os assuntos estudados. Observamos que os alunos não se lembravam dos conceitos estudados nas duas aulas anteriores. Isso se deve ao fato que ficaram muito tempo sem ter a aula sobre probabilidade, por conta do feriado.

Análise a Posteriori e Validação da Aula 3

Nas duas turmas foram realizadas a correção das Listas 1 e 2, os alunos respondiam oralmente as questões e a seguir os licenciandos projetavam as respostas. Caso houvesse alguma dúvida, os licenciandos recorriam ao quadro para esclarecê-la.

Lista 1 – Questão 1

Nos dois turnos os alunos responderam a Questão 1 corretamente e sem dificuldade. O que valida a seguinte variável macrodidática associada à dimensão epistemológica: integração dos conceitos de experimento aleatório e determinístico.

Lista 1 – Questão 2

Os alunos apresentaram muita dificuldade nesta questão, alguns começavam a responder, não conseguiam e pulavam para outra questão. Outros, não conseguiram enumerar todos os resultados possíveis. Quando conseguiam, não representavam os resultados em ternos ordenados com a devida notação de conjunto. Seguem-se algumas respostas do item (a):


a) O espaço amostral: {(KKK), (CCC), (KCC), (KKC), (CKK), (CKC), (KCK), (CCK), (KKC)}

Figura 5.16: Resposta 1 da Lista 1, questão 2, item (a)

Neste caso, o aluno escreveu o elemento (KKC) duas vezes, talvez por falta de atenção, o que em termos de conjunto não está errado, embora seja inadequado. Outro problema foi a falta da vírgula para separar os elementos de cada terno.

Nas duas respostas a seguir o problema foi a não utilização da devida notação de conjunto.


a) O espaço amostral: KKK/CCC/KCC/CCK/CKK/CKC/KCK/KKC

Figura 5.17: Resposta 2 da Lista 1, questão 2, item (a)

Figura 5.18: Resposta 3 da Lista 1, questão 2, item (a)

Nas respostas a seguir desconfiamos que talvez não conseguiram perceber qual elemento faltava ser incluído, pois não fecharam as chaves. Outros desistiram mesmo de responder:

Figura 5.19: Resposta 4 da Lista 1, questão 2, item (a)

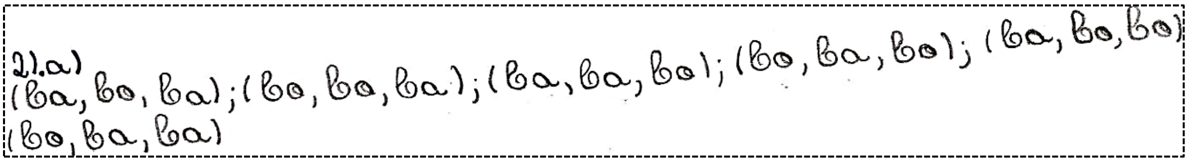


Figura 5.20: Resposta 5 da Lista 1, questão 2, item (a)

Figura 5.21: Resposta 6 da Lista 1, questão 2, item (a)

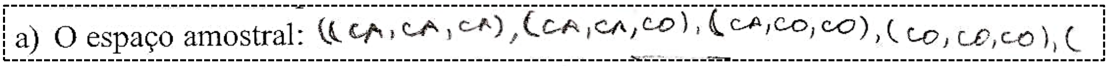


Figura 5.22: Resposta 7 da Lista 1, questão 2, item (a)

Nesta última, enumeraram e separaram os elementos, só não utilizaram a notação de terno ordenado.

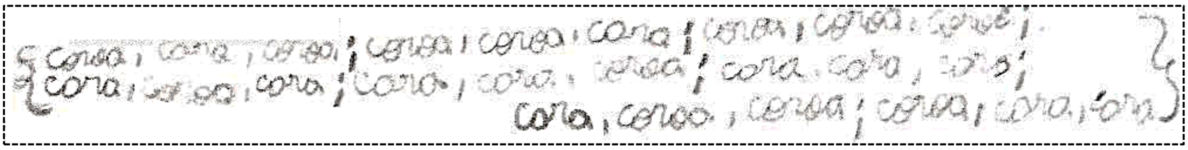


Figura 5.23: Resposta 8 da Lista 1, questão 2, item (a)

Responderam os demais itens (b) e (c) repetindo os mesmos erros de notação. Havíamos previsto este obstáculo na análise a priori. Tínhamos chamado a atenção para a notação durante as aulas, mas o erro continuou presente na resolução da lista. Acreditamos que ao responder não se preocuparam em relembrar as notações utilizadas nas aulas anteriores.

Lista 1 – Questão 2.1

Seguem-se duas respostas do item (a), uma do item (b) e (c). Podemos observar que novamente o problema foi em utilizar a notação de conjunto, o seu não uso ou a tentativa de uso do par ordenado.

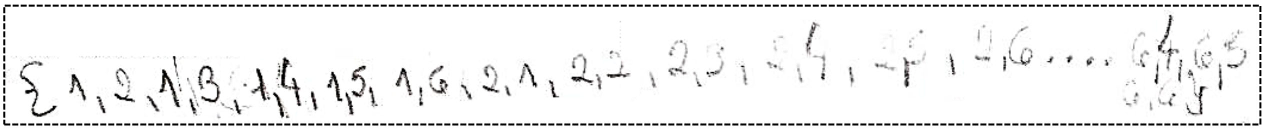
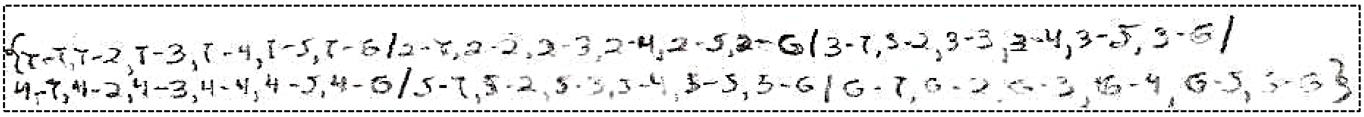


Figura 5.24: Resposta 1 da Lista 1, questão 2.1, item (a)

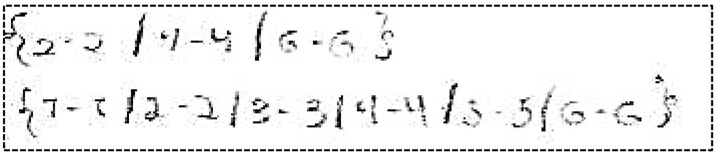


{1-1,1-2,1-3,1-4,1-5,1-6/2-1,2-2,2-3,2-4,2-5,2-6/3-1,3-2,3-3,3-4,3-5,3-6/
4-1,4-2,4-3,4-4,4-5,4-6/5-1,5-2,5-3,5-4,5-5,5-6/6-1,6-2,6-3,6-4,6-5,6-6}

Figura 5.25: Resposta 2 da Lista 1, questão 2.1, item (a)

Itens (b)

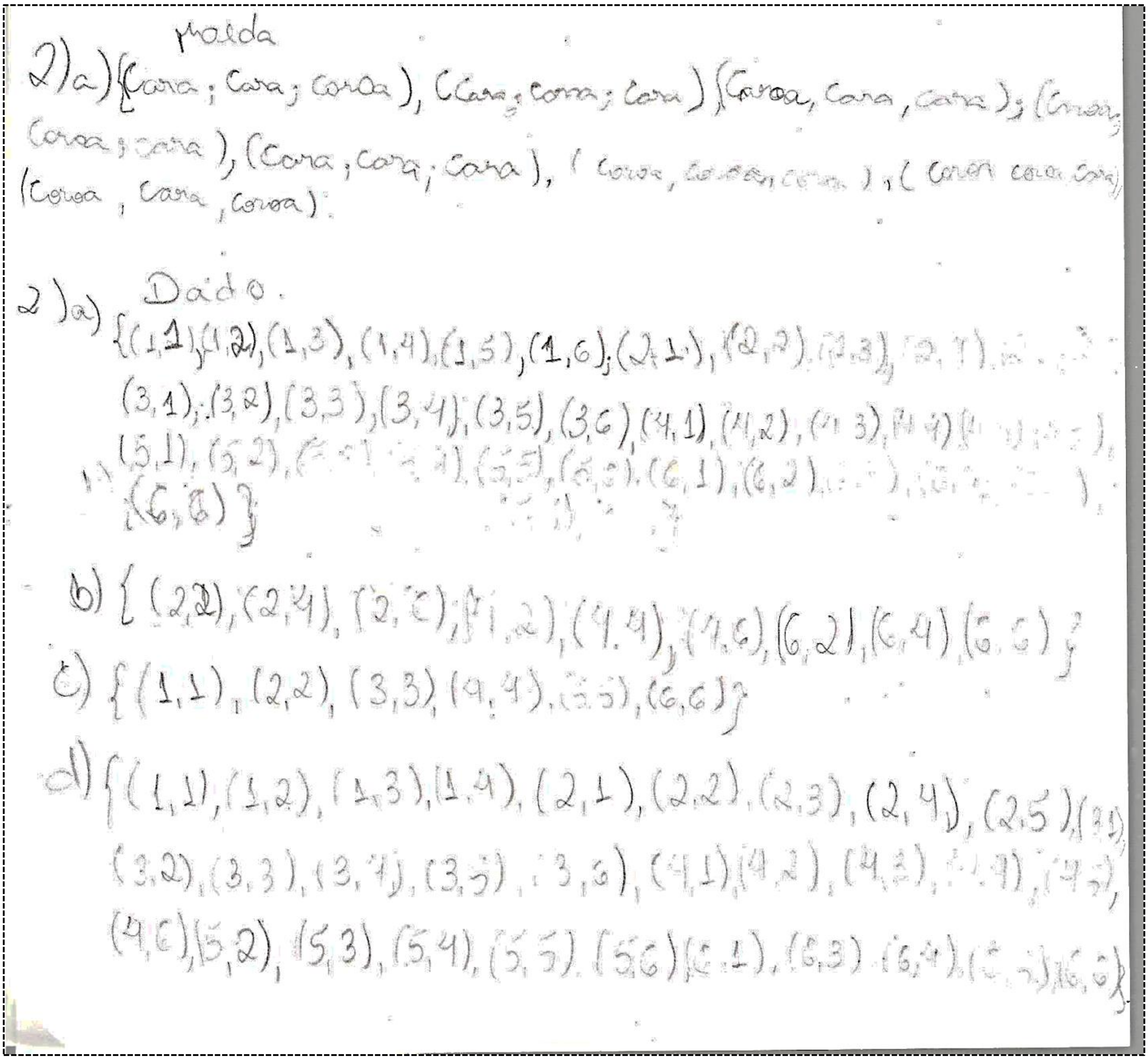
(c)



{2-2 / 4-4 / 6-6}
{1-1 /2-2/3-3/4-4/5-5/6-6}

Figura 5.26: Resposta 1 da Lista 1, questão 2.1, itens (b) e (c)

No item (b), a resposta acima indica que o aluno respondeu pares iguais ao invés de fazer as combinações de todos os pares. No item (c), com exceção do erro de notação, o aluno respondeu utilizando as devidas combinações de resultados. Tivemos também respostas corretas com a devida notação, como segue:



Moeda
2)a) {(Cara; Cara; Coroa), (Cara; Coroa; Cara), (Coroa, Cara, Cara); (Coroa, Coroa; Cara), (Cara, Cara; Cara), (Coroa, Coroa, Coroa), (Coroa, Coroa, Coroa) (Coroa, Cara, Coroa)

2)a) Dado.
{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4), ...
(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4) ...
(5,1),(5,2), ... (5,5),(5,6),(6,1),(6,2), ...
(6,6)}

b) {(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)}
c) {(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)}
d) {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),
(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),
(4,6),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}

Figura 5.27: Resposta da Lista 1, questão 2

Lista 1 - Questão 3

Na Questão 3, as dificuldades apresentadas ocorreram a partir do item (g). Nos itens (g) e (h) desconfiamos que talvez o problema tenha sido as trocas dos significados dos conectivos "e" e "*ou*". Nos itens (j), (k) e (l) os obstáculos foram a compreensão das notações de união, interseção e complementar de conjuntos, ou seja, a utilização da notação continua sendo a maior dificuldade. Seguem-se algumas respostas corretas e outras que comprovam as observações acima.

f) O vento F, ocorrência de um numero múltiplo de 3.

{3;6}

g) O evento G, ocorrência de um número par ou número múltiplo de 3.

{2;3;4;6}

Figura 5.28: Resposta 1 da Lista 1, questão 3, itens, (f) e (g)

g) O evento G, ocorrência de um número par ou número múltiplo de 3.

{6}

Figura 5.29: Resposta 2 da Lista 1, questão 3, item (g)

h) O evento H, ocorrência de um número par e múltiplo de 3.

H={2,3,4,6}

i) O evento I, ocorrência de um número que não seja par nem múltiplo de 3.

{1,5}

j) O evento D∪E

k) O evento D∩E

l) O evento D^c

Figura 5.30: Resposta 3 da Lista 1, questão 3, itens (h), (i), (j), (k) e (l)

j) O evento D∪E

D∪E(1,2,3,4,5,6)

k) O evento D∩E

D∩E:(∅)

l) O evento D^c

(1,3,5)

Figura 5.31: Resposta 4 da Lista 1, questão 3, itens (j), (k) e (l)

Os licenciandos aproveitaram para introduzir os tipos de eventos (certo, impossível, elementar ou simples e mutuamente exclusivos) e, logo após, corrigiram a o Desafio.

Lista 1 - Desafio

Nesta questão, os alunos responderam corretamente. Julgamos que isso se deve ao fato de que este tipo de conjunto não é utilizado com frequência. Desta forma suspeitamos que talvez possam ter recorrido aos exemplos de espaços amostrais infinitos que foram abordados e assim responderam fazendo uso da devida notação.

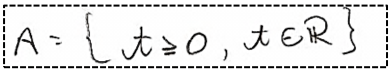


Figura 5.32: Resposta Lista 1, questão desafio

Terminada a correção da Lista 1, foi iniciada a correção da Lista 2.

Lista 2 – Questão 1

Como já havíamos comentado na análise a posteriori da Aula 2, falhamos em não explorar melhor as possíveis caracterizações de espaços amostrais. Segue-se um recorte do *slide* que projetamos durante a correção.

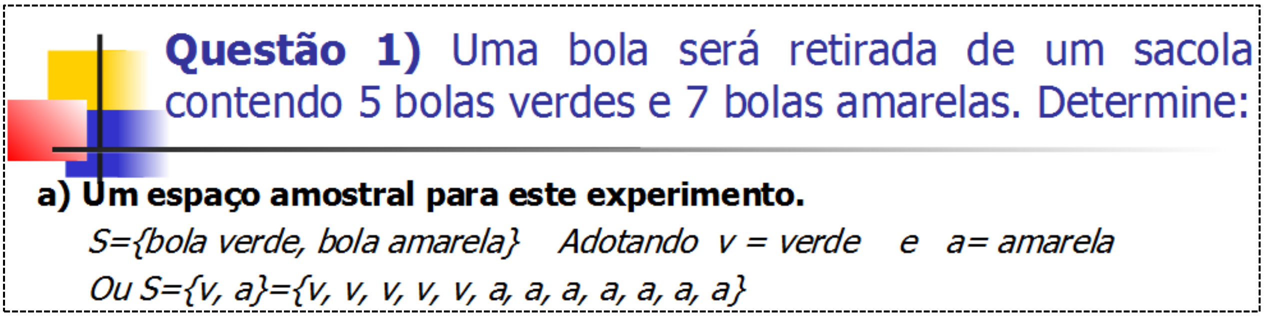


Figura 5.33: Recorte do slide de correção da Lista 2, questão 1

Seguem-se as observações que deveríamos ter realizado durante a correção, como já havíamos sugerido na análise a posteriori da Aula 2.

Ω_1 = {V, A}. Temos que Ω_1 não é composto de elementos equiprováveis.

Ω_2 = {V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7}. Temos que Ω_2 é composto de elementos equiprováveis.

Ω_3 = {V, V, V, V, V, A, A, A, A, A, A, A}={V, A}Temos que Ω_3 não é composto de elementos equiprováveis.

Abaixo, apresentamos um recorte da resposta que a maioria dos alunos apresentaram. Como podemos ver, os alunos não apresentaram dificuldade em responder.

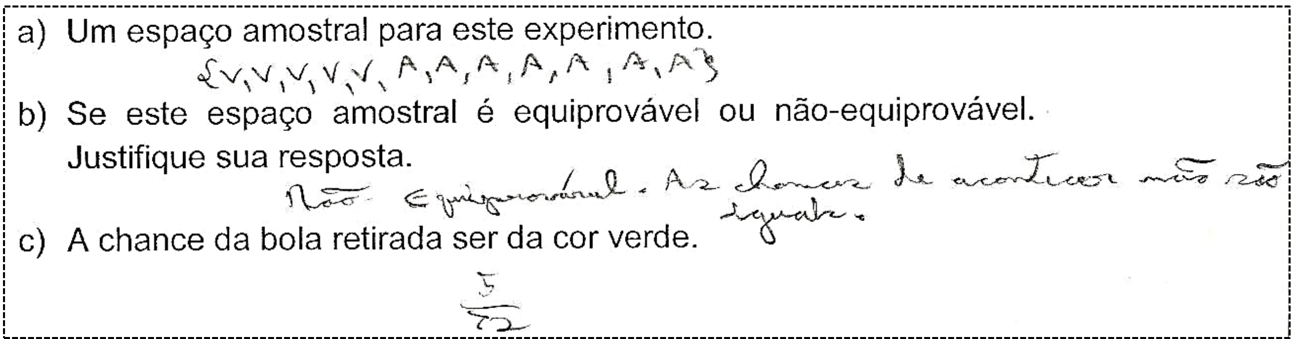


Figura 5.34: Resposta 1 da Lista 2, questão 1, itens (a), (a) e (c)

c) A chance da bola retirada ser da cor verde.

$P(c)\ \frac{A}{\Omega} = \frac{5}{12} = 0{,}4166\ 4\%$

Figura 5.35: Resposta 2 da Lista 1, questão 3, item (c)

Lista 2 – Questão 2

Como tínhamos previsto na análise a priori, os alunos apresentaram muita dificuldade neste item. Todos deixaram esta questão em branco. Durante a correção, eles até consideraram a resolução fácil e lembraram que já haviam estudado este tipo de problema no primeiro ano do ensino médio.

Lista 2 – Questões 3, 4 e 5

As Questões 3, 4, e os alunos responderam corretamente.

Lista 2 – Questão 6

Nesta questão, alguns alunos consideraram o espaço amostral com 12 elementos ao invés de 36 elementos.

Aula 3

Finalizadas as correções que tomaram a metade da aula, foi iniciado o conteúdo da Aula 3. Na turma da manhã, como já mencionado, os licenciandos não registraram como se deu a aula. Os comentários a seguir são referentes à turma da tarde.

Propriedade 4

Os licenciandos ao perceberem a dificuldade que os alunos tiveram para acompanhar as justificativas apresentadas, decidiram apresentar um exemplo relacionado a cada propriedade. Segue o exemplo relacionado com a propriedade (4) apresentada na turma da tarde:

- *No lançamento de um dado comum, Considere os seguintes eventos:*

a) A: sair um número maior que 6.

$A=\{\ \}\qquad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{0}{6} = 0$

Propriedade 2

Nesta justificativa a dificuldade foi concluir que $\frac{n(S)}{n(S)} = 1$. Para isto, os licenciandos registraram no quadro: a) $\frac{4}{4} = ?$ b) $\frac{15}{15} = ?$ c) $\frac{x}{x} = ?$ c) $\frac{n(S)}{n(S)} = ?$ Desta forma, os alunos foram respondendo item a item e conseguiram responder corretamente o item (c) Não podemos deixar de evidenciar a estratégia utilizada pelo licenciando que vimos manifestar neste diálogo, talvez o aluno tenha superado sua dificuldade em entender que qualquer fração com o mesmo numerador e denominador é igual a 1, ou pode ter sido induzido sem de fato entender que estava generalizando. Em seguida, se deu a continuidade da aula com o seguinte exemplo:

b) *B: sair um número menor que 7.*
$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{6} = 1$

Propriedade 1

Nesta justificativa vemos que os alunos conseguiram acompanhar com mais facilidade, pois utilizaram os dois itens já apresentados. Por conta disto, os licenciandos deram prosseguimento ao planejamento, passando para as propriedades seguintes.

Propriedade 3

A dificuldade neste item foi em associar $\frac{\mathrm{n(A)}}{\mathrm{n(S)}}$ com P(A) e $\frac{\mathrm{n(B)}}{\mathrm{n(S)}}$ com P(B). Desconfiamos que talvez esses alunos não estejam acostumados em justificar (ou demonstrar) os resultados matemáticos, devido à extrema dificuldade que eles apresentaram em acompanhar essas atividades.

Demais Propriedade 5 e 6 e exemplos

Percebemos que apesar de tencionarmos enfatizar as justificativas dos resultados com apelo à concepção clássica a fim de tornar os axiomas e os teoremas inteligíveis aos alunos, eles apresentaram muita dificuldade em acompanhar as justificativas e alguns expressaram que tinham entendido apenas após os exemplos.

Após a etapa de formalização das propriedades com seus exemplos, os licenciandos da manhã entregaram a Lista 3 dos exercícios e, por falta de tempo, os licenciandos da tarde encerraram a aula sem a entrega da lista. Na turma da manhã os alunos tiveram tempo apenas para resolverem as Questões 7, 8, 9, 10, 11 e 12 sem grandes dificuldades e, à medida que foram resolvendo, os licenciandos foram corrigindo no quadro. Desta forma o término da resolução da Lista 3 foi deixado para próxima aula, ou seja, para o dia 11 de novembro de 2012.

Vale ressaltar que no dia 10 de novembro de 2011 (quinta-feira) foi dado como ponto facultativo. Devido a este fato, no dia 11 na turma da manhã apareceram apenas sete alunos, e estes informaram que os demais colegas decidiram enforcar a sexta feira, tanto as aulas do PIBID quanto as aulas regulares. Na turma da tarde porém, estiveram presentes os mesmo quatros alunos de sempre.

No dia 11, para os alunos da turma da manhã e da tarde, foi devolvida a Lista 3 para que continuassem a resolução e os licenciandos ficaram tirando dúvidas individualmente indo de mesa em mesa. Os alunos apresentaram muitas dificuldades em calcular as áreas de figuras planas, como por exemplo, a área do circulo. À medida que os alunos conseguiam chegar a um resultado, os licenciandos foram fazendo as correções no quadro.

Lista 3 – Questão 1

Nesta questão, na turma da manhã os licenciandos escreveram no quadro: Área Possível e Área Favorável; efetuaram os devidos cálculos de área junto à turma e fizeram a primeira pergunta com o intuito que os alunos participassem da correção, o que originou o seguinte diálogo:

- Licencianda Solange: *"O que eu faço com para calcular a probabilidade?"*
- Aluno A: *"Divide 2500π por 100π."*
- Aluno B: *"É o contrário 100π por 2500π."*
- Licenciando Claudio: *"Se fosse 2500π por 100π a probabilidade daria maior que 1."*
- Aluno C: *"Probabilidade é um número menor que 1."*

Neste diálogo percebemos a sensibilidade do licenciando Claudio em aproveitar a situação a fim de confrontar o conhecimento do aluno.

Na turma da tarde o licenciando Bernardo criou um exemplo similar envolvendo probabilidade geométrica e resolveu este exemplo com os alunos. Relembrou algumas áreas de figuras, como a do quadrado e do círculo. Após estas explicações disse: "*Agora vocês têm condições de fazer as questões 1 e 2. Tentem ai*". Dos quatro alunos presentes, um conseguiu resolver tudo sozinho e corretamente e os outros três fizeram com o auxílio dos licenciandos.

Lista 3 – Questão 2

Novamente, na turma da manhã os licenciandos escreveram no quadro: Área possível e Área favorável e fizeram a primeira pergunta com o intuito que os alunos participassem da correção, o que originou o seguinte diálogo:

- Licencianda Solange: *"Como que eu calculo a área da parede?"*
- Aluno A: *"É a área do quadrado?"*
- Licencianda Solange: *"Qual é a área do quadrado?"*
- Aluno A: *"Lado ao quadrado."*
- Licencianda Solange: *"Qual é a medida do lado da parede?"*
- Aluno B: *"Quatro."*
- Licencianda Solange: *"Quatro o que?"*

- Aluno B: *“Quatro.”*
- Licencianda Solange: *“Digamos que o raio do circulo é 1. Qual é a medida do lado da parede?”*
- Alunos: *“4.”*
- Licencianda Solange: “*Se o raio fosse 3. Qual seria a medida do lado da parede?”*
- Alunos: *“12.”*
- Licencianda Solange: Agora o raio vale r, quanto mede o lado da parede?
- Alunos: 4r.
- Licencianda Solange: *“Então, qual é a área possível?”*
- Alunos: *“$16r^2$”*
- Licencianda Solange: *“Como vou calcular a área favorável?”*

Nesta última questão dois alunos responderam: “*Área do quadrado menos as áreas dos círculos”*. Neste diálogo, percebemos a sensibilidade do licenciando em aproveitar a situação estimulando a participação dos alunos. Revela-nos também as formas que encontrou para exemplificar e explicar, criando condições para que os alunos respondessem corretamente. Talvez os alunos tenham superado suas dificuldades de entender o exemplo, ou podem ter sidos induzidos sem de fato entender que estavam generalizando. O fato é que os alunos responderam corretamente em decorrência da estratégia utilizada pelo licenciando na tentativa de reorganizar o entendimento dos alunos.

Os licenciandos terminaram a correção desta questão e encerraram a aula, pois os alunos, os licenciandos e o professor supervisor iriam realizar as oficinas do projeto: “A matemática do lixo”. Por conta disto, a Lista 3 foi novamente recolhida para ser entregue na próxima aula.

A aula da turma da tarde prosseguiu e assim que o primeiro aluno terminou de resolver as Questões 1 e 2 os licenciandos disseram o seguinte: “ajuda para fazer a questão 3”.

Lista 3 – Questão 3

Para esta questão o licenciando desenhou uma régua de 20 cm no quadro e perguntou: *“Vou escolher um ponto desta régua. Qual é a probabilidade de estar entre 10 cm e 13 cm?”* Neste exemplo os quatros alunos responderam corretamente o valor da probabilidade, mas apenas um aluno respondeu a questão três corretamente, o mesmo que já havia respondido às Questões 1 e 2.

Lista 3 – Questão 4

Na turma da tarde, assim que o licenciando fez o desenho no quadro, e perguntou o valor da área de alcance das emissoras, o mesmo aluno que já havia respondido as outras questões respondeu que era a metade da área do círculo. O licenciando confirmou e chamou a atenção para os ângulos das figuras explicando por que dá a metade da área do círculo.

Novamente esse mesmo aluno fez todos os cálculos corretamente e os demais precisaram do auxílio dos licenciandos.

Para finalizar a aula os licenciandos resolveram a primeira questão no quadro e recolheram as listas para que os alunos continuarem na próxima aula, o que ocorreu no dia 18 de novembro de 2011.

No dia 18 de novembro de 2011, na turma da manhã, a aula iniciou às 9h com a presença de 16 alunos, sendo que três ainda não tinham participado de nenhuma aula sobre probabilidade. Os licenciandos tiveram dificuldade para iniciar a aula. Eles estavam eufóricos para dar prosseguimento às oficinas do projeto que haviam começado na semana passada. Os licenciandos tiveram que conversar com os alunos, avisando que a oficina iria ocorrer após a aula.

Lista 3 – Questão 3

Na turma da manhã eles iriam resolver a terceira questão da lista. Para isso, os licenciandos desenharam um segmento no quadro partindo de 3 cm até 11 cm e fizeram a primeira pergunta que originou no seguinte diálogo:

> - Licencianda Solange: *"Vamos pensar! Quero escolher um ponto deste segmento. Qual é a probabilidade de estar ente 7 e 9?"*
> - Licencianda Solange: *"Qual a distância entre 3 e 11? Entre 7 e 9?"*
> - Alunos: *"2 e 8?"*
> - Aluno A: *"25%."*
> - Licencianda Solange: *"Isso mesmo, você pensou certinho."*
> - Aluno A: *"Está na cara, é só olhar que dá pra ver que são 25%."*
> - Licencianda Solange: *"Se eu marquei um ponto do segmento $\overline{AB}$, qual vai ser a distância possível?"*
> - Alunos: *"Todo AB."*
> - Licencianda solange: *"Segmento favorável?"*
> - Alunos: *"XY"*
> - Licencianda Solange: *"Então a probabilidade será:"*
> - Alunos: *"XY sobre AB."*

Lista 3 – Questões 4 e 5

Da mesma maneira, neste estilo de perguntas e respostas, os licenciandos resolveram juntos com os alunos as Questões 4 e 5. As outras eles já haviam resolvido e corrigido na primeira aula.

Na turma da tarde, no dia 18 de novembro, estiveram presentes os quatro alunos que participam do PIBID. O licenciando Bernardo iniciou a aula revisando as propriedades da probabilidade que já haviam estudado e criou exemplos para que os alunos aplicassem essas propriedades. Em seguida, as listas foram entregues para que continuassem a resolução e correção da mesma. O licenciando pediu para o aluno que havia respondido corretamente as questões nas aulas anteriores que fosse ao quadro resolver a segunda questão. Ele resolveu a questão no quadro, mas ficou nervoso, se perdeu e só conseguiu terminar olhando para o seu caderno, onde se encontrava a resolução da questão.

Porém, o licenciando Bernardo percebeu que os demais alunos não haviam entendido e voltou a refazer a questão. De uma forma geral, mesmo com as explicações das aulas anteriores e com a revisão dos cálculos das áreas das figuras, os alunos apresentaram muita dificuldade nas resoluções, até para lembrarem soluções de questões que eles mesmos já tinham resolvido, acreditamos que isso se deve ao fato de que eles só estudam no momento das aulas (que acontecem apenas uma vez por semana).

Lista 3 – Questão 5

Enquanto os demais alunos estavam dando prosseguimento às questões da lista, o aluno que foi ao quadro disse que estava com dúvida na Questão 5.

Este aluno disse o seguinte:

- Aluno: *"Uma moeda comum tem 50% de sair cara. Numa moeda onde a chance de sair cara é duas vezes mais provável então é 100%."*

- Licenciando Bernardo: *"50% é na moeda comum. Numa moeda viciada, você não sabe a princípio qual é a probabilidade de sair cara ou de sair coroa. Nesta questão, você só tem a informação que sair cara é duas mais provável do que sair coroa."*

- Aluno: *"Hum, acho que entendi. Vou tentar."*

Depois deste diálogo, fiquei curiosa para saber se o aluno realmente tinha entendido e fui checar. Ele já havia feito os seguintes registros: X= cara, Y= coroa, Y= 2X e X+Y= 1 e já estava resolvendo o sistema. Assim que terminou de responder, demostrando estar muito impressionado com a resposta disse: "*É sério mesmo, isso dá um número, que maneiro*".

O licenciando continuou tirando dúvida de mesa em mesa e à medida que os alunos resolviam as questões, ele realizava a correção no quadro, sempre estimulando a participação oral dos alunos.

Lista 3 – Questão 6

A Questão 6 foi anulada por envolver Probabilidade Condicional. Este conteúdo será trabalhado na Aula 4.

Lista 3 – Questões 7 , 8 e 9

O item (c) desta questão foi o mais difícil. Os alunos chamavam os licenciandos e perguntavam: “O que é número primo?” Na Questão 8 não apresentaram dificuldade. Na Questão 9, a dificuldade foi por conta do desconhecimento das cartas do baralho. Os licenciandos explicaram como eram as cartas, os naipes, as figuras e as suas respectivas quantidades. Enquanto isso, entregaram um jogo de baralho para que os alunos manipulassem.

Lista 3 – Questões 10, 11 e 12

Os alunos não conseguiram resolver a Questão 10. Os licenciandos a fizeram no quadro utilizando diagramas. Os alunos somente fizeram as Questões 11 e 12 com o auxílio dos licenciandos. Depois das correções, o Planejamento 3 finalmente foi encerrado.

O Planejamento 3 ocorreu em três aulas, julgamos que isso foi em decorrência do problema do projetor, das dificuldades dos alunos em acompanhar as justificativas das propriedades e dos problemas que envolviam a Probabilidade Geométrica. Os licenciandos perceberam todos esses entraves e a necessidade de disponibilizar mais tempo para cada questão, permitindo que os alunos se dedicassem às resoluções antes de fazer as devidas correções.

5.2.9 Análise a Priori da Aula 4

Nesta seção apresentamos as variáveis microdidáticas e a descrição de cada atividade juntamente com as previsões dos possíveis comportamentos dos alunos em relação à Aula 4.

Variáveis Microdidáticas Associadas à Dimensão:

1. Epistemológica
   a) Estudo do conceito da Probabilidade Condicional através da vivência de duas situações: os sorteios de dois prêmios.

Nesta aula iremos introduzir o conceito da Probabilidade Condicional. Os objetivos são:

1. Calcular união e interseção de probabilidades fazendo as devidas diferenças entre o uso dos conectivos “e” e “ou”.
2. Entender a Probabilidade Condicional como uma condição que restringe o espaço amostral.

3. Aplicar o conceito de Probabilidade Condicional nas atividades propostas.
4. Perceber a diferença entre $P(A|B)$ E $P(B|A)$.
5. Entender a vinculação da interseção de probabilidade com a multiplicação de probabilidades.

Após o momento inicial, os licenciandos explicarão como será realizada a Atividade 1 desta aula.

Descrição da Atividade 1
Os licenciandos pedirão que cada aluno escolha um número de 1 a 99. Um único prêmio será entregue ao portador do bilhete que for escolhido por sorteio. Esse sorteio será realizado em duas etapas utilizando-se uma urna com dez bolas numeradas de 0 a 9. Na primeira etapa, uma bola é escolhida ao acaso, obtendo-se assim o algarismo das unidades do número premiado; em seguida, essa bola é devolvida à urna, e repete-se o processo para que seja obtido o algarismo das dezenas.
(Adaptada da COLEÇÃO Explorando o ensino)

Selecionamos esta atividade, pois acreditamos que com ela os alunos terão condições de entender a probabilidade condicional como uma condição que restringe o espaço amostral. Ela permite, por outro lado, que os alunos vivenciem as condições que irão interferir em suas chances de ganhar o sorteio e por outro, julgamos que ela possa envolvê-los e motivá-los a estudar a conceito da Probabilidade Condicional.

Continuação da descrição da Atividade 1
Após os alunos terem escolhidos seus números, os licenciandos farão a seguinte pergunta: antes de ser iniciado o sorteio (e supondo-se que ele seja honesto), qual é a probabilidade de você (aluno) ganhar o prêmio?

Os licenciandos deverão conduzir a resolução desta questão utilizando as respostas orais dos alunos e registrando-as no quadro. Presumimos que estes consigam responder com grande facilidade, pois se trata de uma probabilidade simples. Segue uma solução:

$S_1 = \{0, 1, 2, \ldots, 97, 98, 99\}$

$n(S_1) = 100$

A= $\{k\}$, onde “k” é qualquer número entre 0 e 99.

$n(A) = 1$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S_1)} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Esta questão se faz necessária, pois nosso intuito é criar condições para que os alunos percebam que, após o sorteio, esta probabilidade, calculada inicialmente, irá mudar devida à redução do espaço amostral.

Neste momento será realizada a primeira etapa do sorteio: uma bola é escolhida ao acaso, obtendo-se assim o algarismo das unidades do número premiado. Supondo que o número sorteado seja o número 7, os licenciandos irão analisar a situação de dois alunos como na situação descrita abaixo:

Continuação da descrição da Atividade 1
Vamos analisar a situação dos alunos, João e Paulo, cujos bilhetes têm os números 25 e 47, respectivamente.

Os licenciandos conduzirão a situação: a primeira bola sorteada foi o número 7, o conjunto dos resultados possíveis do sorteio se reduz a um conjunto com dez elementos, a saber: {7, 17,..., 97}. Farão as seguintes perguntas aos alunos:

Continuação da descrição da Atividade 1
Após o sorteio da unidade, quais são as chances de João ganhar o prêmio? E de Paulo ganhar o prêmio?

Mais uma vez, os licenciandos conduzirão a resolução desta questão utilizando as respostas orais dos alunos e registrando-as no quadro. Acreditamos que os alunos consigam responder com grande facilidade. Segue uma solução e as devidas observações que os licenciandos deverão fazer:

Seja C o evento "o número sorteado termina em 7".

S_1= {0, 1, 2,…, 97, 98, 99}

n(S) = 100

C= {7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97}

n(C) = 10

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S_1)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\%$$

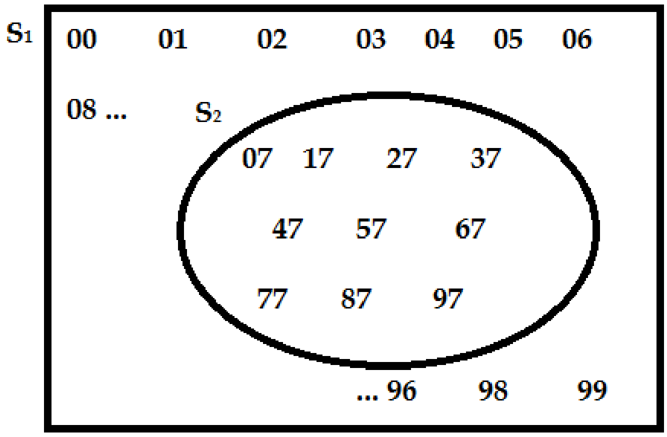


Figura 5.36: Espaço amostral S_1 e S_2

Seja B o evento "João ganha o prêmio sabendo que ocorreu o evento C".

S_2= {7, 17,..., 97}, n(S_2)= 10 e

B= {25}, $B \not\subset S_2$

$$P(B|C) = \frac{n(B)}{n(S_2)} = \frac{0}{10} = 0$$

João então já pode rasgar o seu bilhete, pois, suas chances de vitória se reduziriam de $\frac{1}{100} = 1\%$ para 0 %.

Seja A o evento "Paulo ganha o prêmio sabendo que ocorreu o evento C".

S_2={7, 17,…, 97,},

n(S_2)= 10

A={47},

n(A) = 1

$$P(A/C) = \frac{n(B)}{n(S_2)} = \frac{1}{10} = 10\%$$

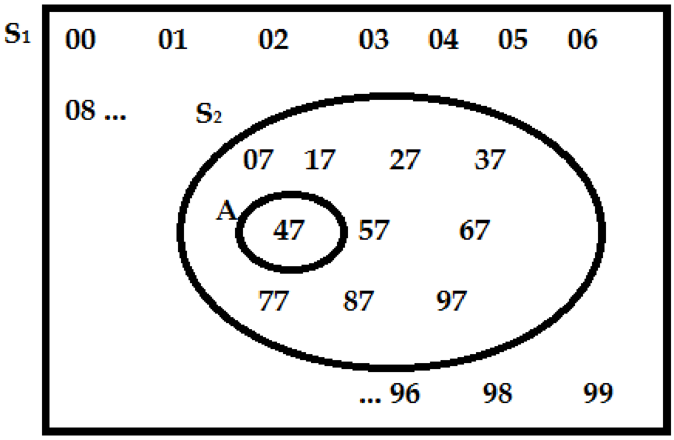


Figura 5.37: Espaço amostral S_1 , S_2 e o conjunto A

Por outro lado, Paulo viu sua chance passando de $\frac{1}{100} = 1\%$ para $\frac{1}{10} = 10\%$.

Seguem algumas observações que os licenciando deverão fazer após a resolução da última atividade a fim de introduzir o conceito de probabilidade condicional.

Antes da realização da primeira etapa, tínhamos: $P(A) = P(B) = \frac{1}{100} = 1\%$ e P(C) = 1/10.

As probabilidades, 0 e $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$, calculadas após a realização da primeira etapa, são denominadas probabilidades condicionais de B e A, respectivamente, dado que ocorreu o evento C, ou seja, $P(B|C) = 0$ e $P(A|C) = \frac{1}{10}$.

No exemplo acima, as probabilidades condicionais foram calculadas por meio da redução do espaço amostral ao conjunto S_2 = C, que passou a ser o espaço associado à segunda etapa do sorteio.

Após a realização da Atividade 1, supomos que os alunos tenham entendido que a probabilidade condicional é uma condição que restringe o espaço amostral, e estejam motivados para a próxima atividade.

Descrição da Atividade 2

Cartões numerados de 1 a (quantidade de alunos) serão distribuídos aos alunos que concorrerão ao prêmio (único). Suponhamos que haja 10 alunos na aula. Após os alunos terem recebido seus cartões, os licenciandos proporão a seguinte questão: "Antes de ser iniciado o sorteio (e supondo-se que ele seja honesto), todos têm esperança de ganhar. Qual é a probabilidade de você (aluno) ganhar o prêmio?"

(Adaptada de PAIVA, 2005)

Optamos por esta atividade, pois ela permite que os alunos vivenciem as condições que irão interferir em suas chances de ganhar o sorteio, possibilitando, mais uma vez, que possam entender a probabilidade condicional como uma condição que restringe o espaço amostral.

Cabe aos licenciandos guiar a solução desta atividade fazendo uso das respostas orais dos alunos e transcrevendo-as no quadro. Presumimos que os alunos consigam responder sem apresentar dificuldade, pois se trata de uma probabilidade simples. Segue uma possível solução:

Seja G o evento "um determinado aluno ganha o Prêmio".

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

n(S) = 10

G={ k }, onde "k" é qualquer número entre 1 e 10 (inclusive).

n(G) =1

$$P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$$

Continuação da descrição da Atividade 2

Os licenciandos sortearão de uma urna um desses números e, para criar "suspense" (supondo que este número seja par) afirmem: "O número sorteado é par". Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja maior que 4?

Novamente, os licenciandos deverão conduzir a resolução desta questão utilizando as respostas orais dos alunos e registrando-as no quadro. Entendemos que os alunos conseguirão responder com grande facilidade a cada indagação dos licenciandos, pois se trata de uma probabilidade simples. Segue uma solução e as observações que os licenciandos deverão apresentar aos alunos:

O espaço amostral ficou reduzido ao evento A ={2, 4, 6, 8, 10}. Vamos esquematizar esse problema, considerando ainda o evento B formado pelos elementos do espaço amostral S que são maiores que 4: B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}. A garantia de que o número sorteado é "par" reduz o espaço amostral ao evento A. Logo, um elemento de B só pode ocorrer na interseção de A e B. Assim, a probabilidade de ocorrer B, dado que já ocorreu A, é:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$$

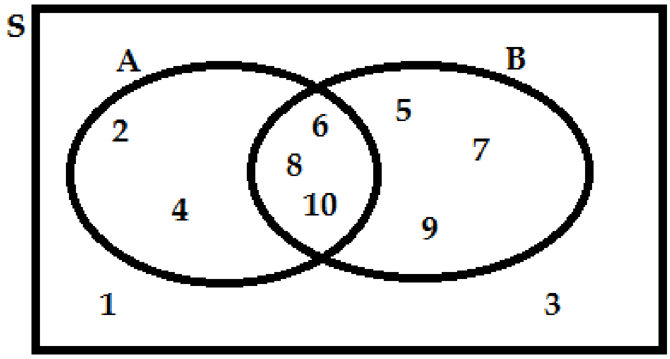


Figura 5.38: Espaço amostral S, conjunto A e B definidos

Continuação da descrição da Atividade 2
Outra situação: supondo que o número seja maior que 4, qual a probabilidade de o número sorteado ser par?

Mais uma vez, cabe aos licenciandos guiar a solução desta questão, como na atividade anterior. Imaginamos que os alunos consigam responder a todas as indagações feitas pelos licenciandos, pois consideramos o cálculo desta probabilidade simples. Segue uma solução e as observações que os licenciandos deverão fazer aos alunos:

O espaço amostral ficou reduzido ao evento B ={5, 6, 7, 8, 9, 10}. Vamos esquematizar esse problema, considerando ainda o evento A formado pelos números do espaço amostral S que são pares.

A garantia de que o número sorteado seja maior que 4 reduz o espaço amostral ao evento B. Logo um elemento de A só pode ocorrer na interseção de A e B. Assim, a probabilidade de ocorrer A, dado que já ocorreu B, é:

$$P(A/B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5 = 50\%$$

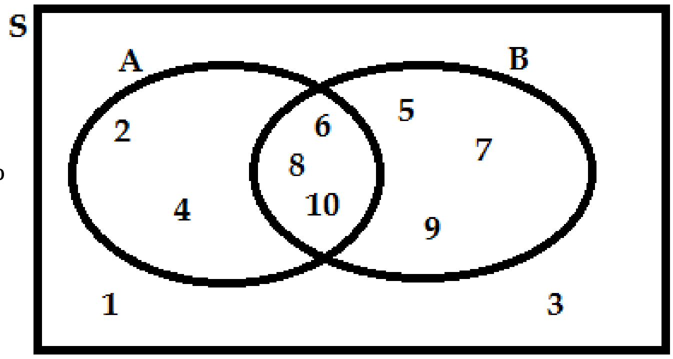


Figura 5.38: Espaço amostral S, conjunto A e B definidos

Após as duas atividades, os licenciandos apresentarão a formalização do conceito de Probabilidade Condicional introduzido nas Atividades 1 e 2 desta aula.

Formalização

Consideremos um experimento aleatório com um espaço amostral equiprovável S, finito e não vazio. Ao realizar o experimento, constatou-se que ocorreu um evento não vazio A. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido também algum elemento de outro evento B?

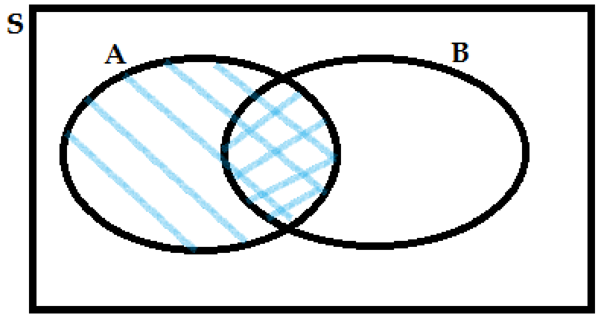


Figura 5.39: Espaço amostral S, conjunto A e B

A probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A, é indicada por $P(B|A)$, lê-se: "probabilidade de B dado A", e é calculada em espaços amostrais equiprováveis, com $P(B|A) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$

O número $P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrer B, condicionada à ocorrência de A.

Essa relação também pode ser expressa de outra forma. Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da igualdade por n(S), temos:

$$P(B|A) = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\dfrac{n(A)}{n(S)}} = \frac{p(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pode-se discutir com os alunos que a fórmula $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ vale para qualquer outro conceito de probabilidade.

Após a formalização os licenciandos apresentarão as seguintes observações, com o intuito de aplicar a última fórmula apresentada:

Podemos utilizar essa relação na Atividade 2 e verificar que obtemos os mesmos resultados, ou seja:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} \qquad P(B|A)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{5}=\frac{3}{5}=0{,}6=60\%$$

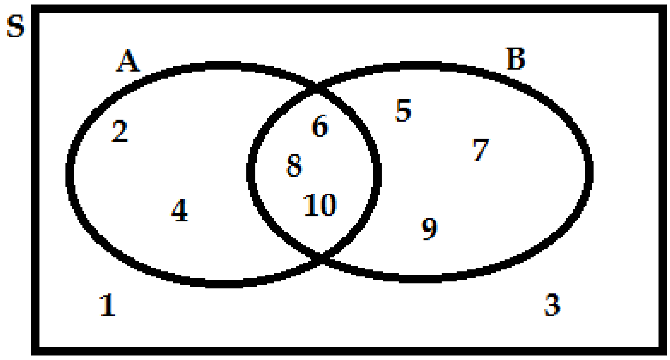


Figura 5.38: Espaço amostral S, conjunto A e B definidos

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A\cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \qquad P(A|B)=\frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{3}{10}\cdot\frac{10}{6}=\frac{3}{6}=0{,}5=50\%$$

Vimos anteriormente que $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ é a probabilidade de ocorrer o evento B já tendo ocorrido o evento A. Dessa razão, segue que $P(A\cap B)=P(B|A)\cdot P(A)$

Isso quer dizer que a probabilidade de ocorrerem dois eventos A e B simultâneos (ou sucessivos) é dada pela multiplicação da probabilidade de ocorrer um deles pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu.

O número $P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$ é a probabilidade de ocorrer B condicionada à ocorrência de A e o número $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ é a probabilidade de ocorrer A condicionada à ocorrência de B.

A seguir os alunos farão os exercícios com o objetivo de fixar os conceitos trabalhados. Segue a lista de exercícios:

Lista 4 (Exercícios de Revisão)

1) No lançamento de dois dados, um preto e outro vermelho, considere os eventos:
   A: “a soma dos números obtidos é menor que 7”.
   B: “sair o número 4 em, pelo menos, um dado”.
   Calcule a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser menor que 7, sabendo que em um dos dados pelo menos saiu o número 4, ou seja, $P(A|B)$.

2) Numa classe com 60 alunos, 40 estudam inglês, 10 estudam só Francês e 5 estudam Inglês e Francês. Determinar a probabilidade de um aluno que estuda Inglês estudar também Francês.

3) Ao lançarmos um dado, qual é a probabilidade de obtermos um número primo ou um número ímpar?

4) Em uma caixa há 2 fichas amarelas, 5 fichas azuis e 7 fichas verdes. Se retirarmos uma única ficha, qual a probabilidade dessa ser verde ou amarela?

5) De uma sacola contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15 retira-se uma bola. Qual é a probabilidade desta bola ser divisível por 3 ou divisível por 4?

As duas primeiras questões da lista trabalham com o conceito de Probabilidade Condicional, porém a resolução da segunda questão envolve a utilização de diagramas conexos. As Questões 3, 4 e 5 exploram probabilidade da união de eventos. Acreditamos que os alunos não apresentarão dificuldades em resolver essas questões.

5.2.10 Análise a Posteriori e Validação da Aula 4

Nesta etapa faremos uma pequena descrição da experimentação da Aula 4 e em seguida, passaremos para a análise a posteriori desta aula.

Experimentação da Aula 4

A aplicação da aula ocorreu no dia 25 de novembro de 2011. Na turma da manhã no horário de 8h20 às 12h com 20 minutos de intervalo para o recreio, estando presentes 9 alunos. Na aula da tarde no horário de 15h às 17h, estando presentes 4 alunos.

Análise a Posteriori e Validação da Aula 4

Atividade 1

Nas duas turmas, a aula iniciou com a explicação de como se daria a Atividade 1 e como seria realizado o sorteio utilizando o bingo.

Depois da explicação, os licenciandos apresentaram uma barra de chocolate como prêmio do sorteio, o que estimulou os alunos a participarem da atividade com muito entusiasmo.

Na turma da tarde, por serem poucos alunos, o sorteio foi realizado entre todos os presentes (alunos, licenciandos e eu). Nesta etapa, ocorreram questionamentos semelhantes nas duas turmas e por isso, optamos por descrever apenas o diálogo na turma da manhã.

Após os alunos terem escolhidos seus números (o aluno A escolheu o número 69; o aluno T escolheu o número 12; e assim por diante, R – 7; E – 10; D – 32; I – 55; L – 25; W –

24; H – 2), os licenciandos ressaltaram que estávamos supondo que existiam 100 alunos na turma para realização da atividade. Após as devidas explicações, a licencianda Solange conduziu o seguinte diálogo:

- Licencianda Solange: *"Qual é o espaço amostral?"*
- Alunos: *"de 0 a 99; 0, 1, 2, 3, até 99."*
- Licencianda Solange: *"É um espaço amostral equiprovável ou não equiprovável?"*
- Alunos: *"Equiprovável."*
- Licencianda Solange: "*A chance de fulano ganhar é a mesma de beltrano ganhar?"*
- Alunos: *"Sim".*
- Licencianda Solange: *"Qual é a probabilidade de você, aluno, ganhar o prêmio?"*
- Aluno I: *"1%."*
- Licencianda Solange: *"Certo! Vamos calcular!"*

Este diálogo nos revela a forma que o licenciando encontrou para explicar a situação e conduzir o raciocínio dos alunos a fim de calcular a probabilidade envolvida no sorteio.

Em seguida o licenciando realizou os cálculos, nomeando o espaço amostral, o evento e calculando o valor da probabilidade junto com os alunos. Terminado os cálculos, realizou a primeira etapa do sorteio obtendo o número 2, o algarismo das unidades do número premiado. Para analisar a situação fez algumas perguntas que deram origem ao seguinte diálogo com a turma:

- Licencianda Solange: *"Quem tem chance de ganhar?"*
- Alunos: *"T, D, e H."*
- Licencianda Solange: *"Qual é a chance do aluno A ganhar?"*
- Alunos: *"Nenhuma; Zero."*
- Licencianda Solange: *"Qual é a chance de ganhar o aluno T?"*
- Alunos: *"Não sei"; "Tem que calcular."*
- Licencianda Solange: "*Sabendo que o algarismo das unidades é o dois, quais são os resultados possíveis do sorteio?"*
- Alunos: *"2, 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82 e 92."*
- Licencianda Solange: *"Seja B o evento do aluno T ganhar o prêmio sabendo que ocorreu o número 2 na casa das unidades. "Qual é a chance do aluno T Ganhar?"*
- Alunos: *"10%."*
- Licencianda Solange: *"Qual é a chance do aluno D Ganhar?"*
- Alunos: *"10%."*
- Licencianda Solange: *"Qual é a chance do aluno H Ganhar?"*
- Alunos: *"10%."*
- Licencianda Solange: *"Qual é a chance do aluno A Ganhar?"*
- Alunos: *"Zero."*
- Licencianda Solange: *"O que aconteceu com o espaço amostral quando sorteamos o número 2?"*
- Alunos: *"Diminuiu."*
- Licencianda Solange: *"O que aconteceu com as chances de vocês ganharem o sorteio?"*
- Alunos: *"Aumentaram para T, D e H e diminuíram para o restante."*

Novamente, os licenciandos fizeram o uso de perguntas e respostas a fim de conduzir o raciocínio dos alunos com o objetivo de facilitar os cálculos da probabilidade envolvida na questão, sem a necessidade da formalização do conceito da Probabilidade Condicional.

Neste diálogo percebemos que os cálculos foram realizados para a situação do aluno

T, porém os alunos conseguiram associar diretamente com as situações dos demais alunos D e H. Além disso, eles perceberam sozinhos e sem dificuldade, a diminuição do espaço amostral, o aumento e a diminuição das chances devido à ocorrência do primeiro sorteio. Segue-se o restante do diálogo:

> - Licencianda Solange: *"Vamos recapitular! Seja C o evento de ocorrência do número 2 na casa das unidades. Qual a probabilidade de ocorrer B sabendo que ocorreu C."*
> - Alunos: *"10%."*

(Nesta etapa o licenciando explicou a notação $P(B|C)=\frac{1}{10}=10\%$ fazendo associação do valor do denominador com a cardinalidade do conjunto C e registrando, simultaneamente, no quadro: $P(B|C)=\frac{\quad}{n(C)}=\frac{}{10}$).

> - Licencianda Solange: "*O elemento que o aluno T escolheu está em Be em C. Então está?"*
> - Alunos: "*Na interseção."*

(Nesta etapa o licenciando fez o seguinte registro no quadro: $P(B|C)=\frac{n(B\cap C)}{n(C)}$).

Este diálogo nos revela a forma que o licenciando encontrou para explicar e conduzir o raciocínio dos alunos até a notação e a fórmula da probabilidade condicional. Associou as situações da atividade a fim de tentar dar uma justificativa tanto para notação quanto para a fórmula da probabilidade condicional. Devemos ressaltar que o licenciando induziu, excessivamente, a resposta dos alunos.

Os alunos já estavam empolgados com a atividade e querendo realizar o próximo sorteio. Após a realização do segundo sorteio, eles ficaram decepcionados porque não houve ganhador entre os nove alunos existentes, pois supusemos que havia 100 alunos na turma. Sugeriram que sorteássemos até obtermos um ganhador. Na turma da tarde, tivemos de fato um ganhador entre os alunos.

Antes de ser dada a segunda atividade, o licenciando da tarde criou um exemplo e resolveu com a turma, fazendo uso da notação de Probabilidade Condicional. Esta mesma situação não ocorreu na turma da tarde. Julgamos que este licenciando sentiu necessidade de aplicar num exercício a notação e a fórmula dadas anteriormente. Segue-se o exemplo: ao sortearmos um número de 1 a 10, qual a probabilidade de ele ser maior que 5, sabendo que o número sorteado foi par?

Atividade 2

Nas turmas da manhã e da tarde o comportamento foi o mesmo, por isso, nesta etapa optamos em descrever apenas o diálogo na turma da manhã para realizarmos a análise, pela mesma razão da Atividade 1.

Após a explicação da atividade 02 e os alunos terem escolhidos seus cartões (aluno A – 4; T – 8; R – 7; E – 9; D – 1; I – 3; L – 5; W – 6; H – 2), o licenciando conduziu o seguinte diálogo:

- Licencianda Solange: "*Quem é o espaço amostral?"*
- Alunos: *"1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9."*
- Licencianda Solange: "*Qual é a probabilidade de você aluno (ganhar) o sorteio?"*
- Alunos: "*Um nono";" Um sobre nove."*
- Licencianda Solange: "*Seja B o evento do aluno A ganhar o sorteio, então B= {4}."*

(Nesta etapa, o licenciando, junto com a turma, efetuou os devidos cálculos, nomeando o espaço amostral e o evento, e por fim realizou o sorteio, sem revelar o número sorteado).

- Licencianda Solange: "*O número sorteado é par. Quais são os resultados possíveis do sorteio?"*
- Alunos: "*2, 4, 6 e 8."*
- Licencianda solange: "*Seja C o evento sair número par. Qual é a probabilidade de B ocorrer sabendo que ocorreu C?"*
- Alunos: *"Um quarto."*

(Nesta etapa, o licenciando registrou no quadro as respostas orais dos alunos fazendo uso da devida notação).

A seguir disse que o número sorteado foi 6.

Neste momento, o aluno ganhador (aluno W) comemorou muito, brincando com os demais alunos. Após a comemoração, o licenciando deu prosseguimento às outras atividades previstas na análise a priori.

Julgamos que conseguimos de uma forma bem divertida introduzir o conceito de Probabilidade Condicional, permitindo que os alunos vivenciassem situações em que uma determinada condição restringisse o espaço amostral, interferindo nos valores da probabilidade calculados a priori, validando assim a seguinte variável microdidática associada à dimensão epistemológica: estudo do conceito da Probabilidade Condicional através dos sorteios de dois prêmios.

Continuação da Atividade 2

Novamente, os alunos responderam corretamente as questões realizadas pelos licenciandos. Em seguida, os licenciandos formalizaram o conceito de Probabilidade Condicional introduzido nas Atividades 1 e 2, dando prosseguimento ao planejamento, ressaltando a fórmula $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ e associando-a ao seu significado. Lembraram ainda que dela decorre a fórmula $P(A \cap B) = P(A)..P(B|A)$, explicando em seguida os conceitos envolvidos a ela. Ressaltaram também as diferenças entre $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ e $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Lista 4

Em seguida, os alunos realizaram os exercícios da lista. Na turma da tarde, o licenciando relembrou a propriedade da probabilidade da união de eventos vinculando-a com os conectivos "*e*" e "*ou*" antes da entrega da lista de exercícios.

Novamente os licenciandos finalizaram a lista sem o tempo hábil para tratá-la adequadamente. Julgamos que foram poucos problemas de Probabilidade Condicional. Faltou explorar a ocorrência de eventos simultâneos ou sucessivos. Os licenciandos foram corrigindo as questões à medida que os alunos as resolviam.

5.2.11 Análise a priori da Aula 5

Nesta seção apresentamos as variáveis microdidáticas e a descrição de cada atividade juntamente com as previsões dos possíveis comportamentos dos alunos em relação à Aula 5.

Variáveis Microdidáticas Associadas à Dimensão:

1. Epistemológica
    a) Estudo do conceito de eventos dependentes e independentes através de exemplos.

Nesta aula iremos introduzir o conceito de eventos independentes e dependentes e revisar os principais conceitos trabalhados nas aulas anteriores. Os objetivos desta aula são:

1. Aplicar o conceito de Probabilidade Condicional nas atividades propostas.
2. Reconhecer quando dois eventos **A** e **B** de um mesmo espaço amostral são independentes ou dependentes.
3. Utilizar os conceitos trabalhados nas aulas anteriores para a resolução dos exercícios propostos.

Após o momento inicial previsto, os licenciandos irão introduzir o conceito de eventos independentes por intermédio de um exemplo.

Exemplo 1: Considere o experimento "lançar dois dados perfeitos de cores diferentes". Observe que:

- S={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
  (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
  (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
  (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
  (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
  (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}
  n(S) = 36

- **Seja A o evento "sair 3 no 1º dado".**

A={(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}, n(A) = 6

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **Seja B o evento "sair 4 no 2º dado".**

B={(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)}. n(B) = 6

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **Considere o evento A∩B, ou seja, "sair 3 no 1º dado e 4 no 2º dado".**

A∩B={(3,4)}, n(A∩B)= 1

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

- **Considere o evento "sair 4 no 2º dado, sabendo que saiu 3 no 1º dado", ou seja, queremos calcular $P(B|A)$.**

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6}$$ ou

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6 \div 6}{36 \div 6} = \frac{1}{6}$$

Assim, $P(B) = P(B|A) = \frac{1}{6}$, ou seja, a probabilidade de 'sair 4 no 2º dado", não foi afetada pelo fato de "sair 3 no 1º dado", ou ainda a probabilidade de ocorrer *B* não dependeu da ocorrência de ***A*.**

Além disso, temos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Neste caso dizemos que *A* e *B* são **eventos independentes**. A probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de ter ou não ocorrido o outro.

Optamos por iniciar com um exemplo com a intenção de introduzir e ilustrar o conceito de eventos independentes. Ressaltamos que neste momento, os alunos já estudaram o conceito de Probabilidade Condicional. Além disso, já tiveram o primeiro contato com a probabilidade da interseção de eventos na aula anterior. Julgamos por isso que os alunos não terão problemas em acompanhar a apresentação e explicação do exemplo.

Em seguida, os licenciandos apresentarão o conceito de eventos independentes.

Formalização

Independência de dois eventos: sejam *A* e *B* dois eventos de um mesmo espaço amostral S com P(A)≠0 e P(B)≠0. *A* **e** *B* são ditos **independentes** se a ocorrência de um deles não afetar a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se:

- $P(B|A) = P(B)$ ou
- $P(A|B) = P(A)$ ou ainda se
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Qualquer uma das três relações acima pode ser usada como definição de independência.

Com isso, podemos afirmar que dois eventos *A* e *B* são **dependentes** quando P(A∩B)≠P(A).P(B).

Nosso propósito é apenas de formalizar o conceito introduzido no exemplo anterior. Logo em seguida, os licenciandos apresentarão outro exemplo de eventos dependentes e independentes a fim de fixar o conceito.

Exemplo 2: Consideremos o experimento "lançar um dado honesto". Observemos que:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6}, n(S) = 6

- **Seja A o evento "sair um número par";**

A= {2, 4, 6} $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

- **Seja B o evento "sair um número maior do que 4";**

B= {5, 6} $P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- **Seja C, o evento "sair um múltiplo de 3".**

C= {3, 6} $P(C) = \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

- **Considere os eventos A e B (sair um número par e um número maior que 4).**

A∩B= {6} $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

A comparação desses valores com os produtos das probabilidades individuais mostra que A e B são independentes, ou seja, $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} = P(A \cap B)$

- **Considere os eventos B e C (sair um número maior que 4 e um número múltiplo de 3)**

B∩C= {6} $P(B \cap C) = \dfrac{n(B \cap C)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

A comparação desses valores com os produtos das probabilidades individuais mostra que B e C são dependentes, ou seja, $P(B) \cdot P(C) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} \neq P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

A seguir os alunos farão uma lista de exercícios a fim de fixar os conceitos trabalhados nesta aula e nas aulas anteriores.

Lista 5 (Exercícios de Revisão)

1) Se P(A∪B) = 0,8 , P(A) = 0,6 e P(B) = 0,5 então A e B são independentes?

2) Em uma urna há três bolas com os números 1, 2, 3. São retiradas duas bolas, uma após a outra, sem reposição.
   a) Se saiu “1” na primeira retirada, qual é a probabilidade de ocorrer número par na segunda?
   b) Se saiu “2” na primeira retirada, qual é a probabilidade de ocorrer número par na segunda?
   c) Se saiu “2” na primeira retirada, qual é a probabilidade de ocorrer número ímpar na segunda?

3) Numa urna existem apenas 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis. As bolas vermelhas são numeradas de 1 a 6 e as azuis, de 1 a 4. Retirando aleatoriamente uma bola dessa urna, verificar se os eventos “bola vermelha” e “número par” são independentes.

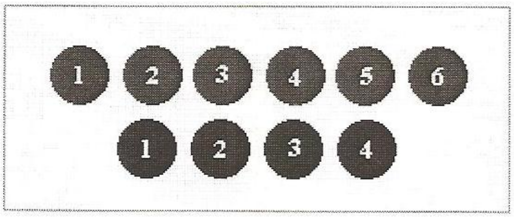


Figura 5.40: Bolas numeradas

(Cola da Web)

4) (UEG, 2006) Em um supermercado estão expostas 10 melancias. Três delas estão estragadas e um freguês não sabe isto. O freguês escolheu aleatoriamente duas melancias. Qual é a probabilidade de que ele tenha escolhido duas melancias não estragadas?

5) (UNIRIO, 1996) As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando um pênalti

são, respectivamente, 1/2, 2/5 e 5/6. Se cada um bater um único pênalti, a probabilidade de todos errarem é igual a:

a) 3% b) 5% c) 17% d) 20% e) 25%

(Cola da Web)

6) A probabilidade de um jogador de basquete acertar a cesta em um lance livre é ¾. Se ele arremessou duas vezes, determine as probabilidades:

a) Que tenha acertado os dois lançamentos;

b) Que tenha errado os dois lançamentos;

c) Que tenha acertado só um deles.

7) (PUC CAMPINAS/SP) Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma nos dois dados é 8, então a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles é:

a) 1/5 b) 2/5 c) 4/5 d) 1/5 e) n.d.a.

8) (UEL/PR, 2006) No diagrama a seguir, o espaço amostral S representa um grupo de amigos que farão uma viagem. O conjunto A indica a quantidade de pessoas que foram a Maceió e o conjunto B a quantidade de pessoas que já foram a Fortaleza.

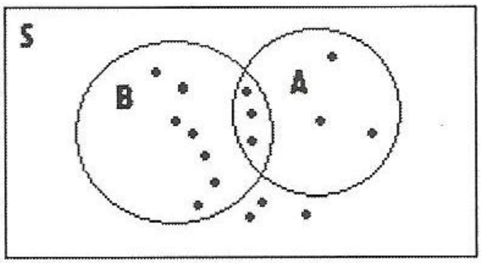


Figura 5.41: Espaço amostral das pessoas que foram para Maceió ou Fortaleza

A empresa de turismo que está organizando a viagem fará o sorteio de uma passagem gratuita. Considerando que a pessoa sorteada já tenha ido para Fortaleza, assinale a alternativa que indica a probabilidade de que ele também já tenha ido para Maceió.

a) 18,75% b) 30% c) 33,33% d) 50% e) 60%

9) A empresa M&B têm 15.800 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo.

	Sexo		
Idade	**Homens**	**Mulheres**	**Total**
< 25 anos	2.000	800	2.800
25 a 40 anos	4.500	2.500	7.000
> 40 anos	1.800	4.200	6.000
Total	8.300	7.500	15.800

Tabela 5.9: Empregados da empresa M&B

Se um empregado é selecionado ao acaso, calcular a probabilidade de ele ser :

a) Um empregado com 40 anos de idade ou menos;

b) Um empregado com 40 anos de idade ou menos, e uma mulher;
c) Um empregado com mais de 40 e que seja homem;
d) Uma mulher, dado que é um empregado com menos de 25 anos.

(Adaptado da Lista de exercícios de Estatística)

10) (PROJETO FUNDÃO) Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas). Determine a probabilidade de sortearmos uma carta e sair um rei, sabendo que a carta sorteada foi de ouros.

11) (MAUÁ, SP) Uma caixa contém 11 bolas de 1 a 11. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que a mesma traz um número impar. Determine a probabilidade de que esse seja menor que 5.

Os alunos poderão ter dificuldade na Questão 1, pois acreditamos que ficarão presos apenas aos conceitos de eventos independentes e não perceberão que para resolver terão que utilizar a fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para descobrir $P(A \cap B)$. Julgamos, também que poderão ter dificuldade nas questões 5 e 6, itens (b) e (c), pois envolve probabilidades de eventos complementares. Nas demais questões (2, 3, 4, 8, 9, 10 e 11) acreditamos que conseguirão resolver sem grandes problemas, pois são questões que envolvem cálculos simples de Probabilidade Condicional e interseção de eventos independentes.

5.2.12 Análise a Posteriori e Validação da Aula 5

Nesta etapa faremos uma pequena descrição da experimentação da Aula 5 e em seguida, passaremos para a análise a posteriori desta aula.

Experimentação da Aula 5

A Aula 5 foi aplicada no dia 02 de dezembro de 2011. Na turma da manhã a aula iniciou com atraso, pois a sala reservada para o PIBID estava lotada de cadeiras do auditório que estava em reforma. Tivemos assim que improvisar um local. A aula aconteceu na biblioteca, que também estava com pouquíssimo espaço por conta dos novos livros didáticos, e tivemos que afastar estes livros com auxilio dos alunos. Na turma da manhã a aula ocorreu de 9h às 12h com 20 min de intervalo, estando 11 alunos. Na turma da tarde no horário de 15 ás 17h, estando presentes 3 alunos.

Análise a Posteriori e Validação da Aula 5

Nas duas turmas os licenciandos começaram as aulas relembrando o sorteio da aula passada a fim de que os alunos revissem o conceito de Probabilidade Condicional. Criaram exemplos baseados nos sorteios e resolveram estes com os alunos aplicando tal conceito. Relembraram também a notação e as fórmulas da Probabilidade Condicional. Em seguida, deram prosseguimento ao planejamento.

Exemplo 1

Na turma da manhã, durante a resolução do exemplo, alguns alunos observaram sozinhos que P(B) = $P(B|A)$. O licenciando aproveitou a observação para explicar que quando isso acontece, dizemos que os eventos são independentes, ou seja, a ocorrência do evento A não afetou a probabilidade do evento B. Na turma da tarde foi o licenciando quem chamou a atenção para o fato de que P(B) = $P(B|A)$ na situação descrita no exemplo acima.

Em seguida, os licenciandos formalizaram o conceito de independência de dois eventos e apresentaram mais exemplos para que os alunos aplicassem o conceito formalizado.

Exemplo 2

Durante a resolução deste exemplo, um aluno descreveu o espaço amostral do evento B da seguinte forma: {(5,6), (5,5), ..., (6,6)} e quando outro aluno percebeu o que ele estava escrevendo, disse: “Não, é um dado só”. Acreditamos que seja a falta de atenção na leitura do exemplo, o aluno não percebeu que o experimento envolvia o lançamento de um dado.

Lista 5

Após as explicações dos exemplos, os alunos receberam a lista de exercícios. Antes que os alunos começassem a solução da lista, os licenciandos relembraram alguns conceitos que seriam utilizados nas questões, tais como: probabilidade da união de eventos; ocorrência de eventos simultâneos; e probabilidade do evento complementar.

Mesmo relembrando alguns conceitos, os alunos apresentaram muita dificuldade em resolver a lista, principalmente as Questões 1, 5 e 6, como havíamos previsto na análise a priori. Alguns resolveram a lista toda e outros apenas até a Questão 5, mas o tempo todo pediam auxílio aos licenciandos.

Devido à falta de tempo, tivemos que encerrar a aula sem que todos pudessem terminar a lista. Por isso a correção no quadro foi feita até a Questão 5. Na turma da manhã tínhamos a possibilidade de estender a aula e por isso conseguimos cumprir o planejamento prévio. No final da aula avisamos que a aula seguinte ocorreria às 9h para os dois turnos e que haveria um teste.

Nesta aula observamos que não houve nenhum diálogo relevante para análise. Acreditamos que isso ocorreu pela ausência de atividades fora do convencional. Nas aulas com essas atividades, os diálogos sugiram naturalmente e os alunos participaram mais.

5.2.13 Análise a Priori da Aula 6

Nesta seção apresentamos as variáveis microdidáticas e a descrição de cada atividade juntamente com as previsões dos possíveis comportamentos dos alunos em relação à Aula 6.

Variáveis Microdidáticas Associadas à Dimensão:

1. Didática

   a) Utilização de uma lista de exercícios envolvendo os conceitos trabalhados nas aulas anteriores a fim de colhermos informações para a análise a posteriori.

A Aula 6 foi deixada para os licenciandos planejarem sozinhos. A ideia inicial seria permitir que os alunos pudessem revisar os conceitos trabalhados nas aulas anteriores por intermédio de uma lista de exercícios.

Os conteúdos abordados nesta aula são os que já foram estudados, ou seja: experimento aleatório e determinístico; espaço amostral infinito, equiprovável e não equiprovável; conceitos Frequentista, Clássico, Geométrico e Condicional de Probabilidade; probabilidade da união, interseção e complementar de eventos; e eventos dependentes e independentes. Assim, o objetivo da aula é aplicar os conceitos trabalhados anteriormente nas atividades propostas.

A ideia é iniciar a aula, por intermédio de uma conversa informal sobre os conceitos já estudados com a intenção de verificar se os alunos lembram-se deles das aulas anteriores.

Após este momento inicial, os licenciandos irão distribuir uma lista de exercícios e dirão que esta será resolvida individualmente, como se fosse um teste, pois este material será recolhido. Segue a lista de exercícios realizada pelos licenciandos:

Lista 6 (Exercícios de Revisão)

1) Uma urna contém 15 bolas: 5 azuis, 5 vermelhas e 5 pretas. Responda o que se pede.

   a) Diga se o espaço amostral é composto de elementos equiprováveis ou não equiprováveis. Justifique sua resposta.

b) Qual a probabilidade de sair uma bola vermelha?

2) Uma moeda "viciada" é lançada 4000 vezes, ocorrendo 2800 caras. A probabilidade de ocorrer cara nesta moeda é de?

3) Uma moeda foi lançada 200 vezes e forneceu 102 caras, então a frequência relativa de caras é de?

(VIALI, adaptação da APOSTILA IV)

4) Um dado foi lançado 100 vezes e a face 6 apareceu 18 vezes, então a frequência relativa do evento é de?

(VIALI, adaptação da APOSTILA IV)

5) Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter pelo menos duas caras?

6) A probabilidade de um atirador acertar o alvo é de 2/5. Sabe-se que os raios das circunferências estão ordenados do maior para o menor e que os mesmos são R_1=1 cm (parte dos 500 pontos), R_2=3 cm (parte de 400 pontos), R_3= 5 cm (parte dos 300 pontos), R_4= 8 cm (parte de 200 pontos), R_5= 12 cm (parte de 100 pontos). Como mostra a figura:

a) Calcule a probabilidade do atirador fazer 500 pontos.
b) Qual a probabilidade do atirador errar o alvo?
c) Qual é a probabilidade do atirador errar o alvo correspondente à região de 500 pontos?

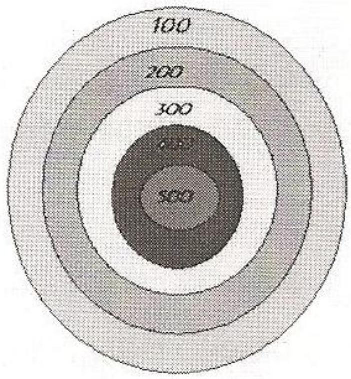


Figura 5.42: Alvo ordenado

7) No experimento de registrar o número de peças defeituosas fabricadas por uma máquina, num determinado dia, determine o espaço amostral e os eventos "número de peças defeituosas num determinado dia é 8" e "número de peças defeituosas num dia é menor que 5".

8) Classifique os experimentos abaixo em aleatório e determinístico:

a) Joga-se um dado e observa-se o número obtido na face superior.
b) Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se o número de caras obtido.
c) Anotar a velocidade de um corpo atingir o solo, após cair em queda livre de certa altura.
d) Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma sem reposição até que a ultima defeituosa seja encontrada. Conta-se o número de peças retiradas.
e) Uma lâmpada nova é ligada, e observa-se o tempo gasto até queimar.

f) A velocidade máxima para um veículo realizar uma curva de raio R.

9) Lançado sucessivamente um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter o resultado (cara, 5)? Qual a probabilidade de se obter (coroa, nº par)?

10) Retirando-se duas cartas ao acaso, sem reposição, de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade do naipe da primeira ser de paus e da segunda ser copa?

11) Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual é a probabilidade de sair pelo menos uma cara?

12) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.

a) Qual a probabilidade de o número ser par?
b) Qual a probabilidade de o número ser par, dado que é menor que 50?
c) Qual a probabilidade de o número ser divisível por 5 dado que é par?

Todas as listas de exercícios foram preparadas pelos licenciandos, porém, nesta lista eles se atrapalharam por ser final de período na faculdade, fizeram em cima da hora e não tivemos tempo de discutir as questões e fazer possíveis mudanças para adequar a lista de acordo com a proposta inicial (ajustar enunciados, retirar ou acrescentar questões, analisar o nível de dificuldade das questões e discutir as resoluções).

As questões:

- 1, 5 e 9 trabalham com um cálculo simples de probabilidade. O item (a) da questão 1 explora o conceito de espaço amostral equiprovável;
- 2, 3 e 4 abrangem o conceito Frequentista de Probabilidade;
- 10 e 12 compreende o conceito de Probabilidade Condicional;
- 8 explora o conceito de experimentos aleatório e determinístico;

Julgamos essas questões fáceis e por isso acreditamos que os alunos não terão dificuldades de respondê-las, uma vez que se lembrem de todos os conceitos envolvidos.

A Questão 11 envolve um cálculo simples de probabilidade, mas talvez os alunos poderão ter dificuldade para enumerar os elementos do espaço amostral do evento, pois cada elemento é um quatérnio de resultados.

O enunciado da Questão 6 é um pouco diferente da primeira questão trabalhada na lista de exercício da Aula 3. Talvez os alunos não percebam esta diferença e resolvam com o mesmo raciocínio utilizado na Questão 1 da Aula 3. Seguindo este raciocínio, resolverão de forma equivocada, pois no item (a) é necessário considerar a probabilidade do atirador acertar o alvo (sabendo que o atirador acertou o alvo, calcular a probabilidade de ele fazer 500 pontos). O item (b) envolve a probabilidade de eventos complementares e o item (c) explora a probabilidade complementar da calculada no item (a). Acreditamos que, por tudo isso os alunos terão muita dificuldade em responder está questão.

A Questão 7 compreende o conceito de espaço amostral e evento. É uma questão fácil, mas o seu enunciado está confuso, talvez, por isso os alunos não consigam respondê-la por não entenderem o enunciado.

Se tivéssemos tido tempo para discutir as questões da lista teríamos feito as modificações necessárias nas Questões 6 e 7 a fim de facilitar a sua leitura e resolução.

5.2.14 Análise a Posteriori e Validação da Aula 6

Nesta etapa faremos uma pequena descrição da experimentação da Aula 6. Em seguida, passaremos para a análise a posteriori da Aula 6.

Experimentação da Aula 6

A Aula 6 foi aplicada no dia 09 de dezembro de 2011 em um único horário para os alunos da manhã e da tarde, pois os alunos já haviam encerrado as suas aulas regulares, era semana de segunda chamada das provas e estiveram presentes 11 alunos.

Havíamos avisado aos alunos na aula anterior que, após a aula, iríamos festejar o encerramento das atividades. Quatro alunos não fizeram o teste, mas chegaram a tempo para a comemoração.

Análise a Posteriori e Validação da Aula 6

Os licenciandos começaram a aula através de uma conversa informal, a fim de que os alunos pudessem relembrar os conceitos já estudados. Após este momento inicial, distribuíram a lista com as questões e explicaram que a mesma era para ser resolvida individualmente, sem qualquer tipo de auxilio, com a seriedade de uma prova.

Lista 6 – Questão 1

Segue uma pequena análise das respostas dadas pelos alunos e ao final um quadro resumo dos resultados.

No item (a), dois alunos cometeram erros conceituais, classificando em não equiprovável, mas para justificarem utilizaram argumentos que se aplicariam a experimentos equiprováveis, ou seja, confundiram as definições. Dentre os alunos que fizeram corretamente, alguns cometeram erros processuais, acreditamos que por falta de atenção, como por exemplo, erros na simplificação do resultado. Segue um resumo das respostas dadas pelos alunos:

	Acertos	Erros conceituais	Erros processuais.	Deixou em branco.
(1a)	5	2		4
(1b)	9		3	1

Tabela 5.10: Acerto x erros da questão 1

Lista 6 – Questão 2

Analisando a Questão 2 o termo "Probabilidade" foi empregado de forma incorreta. O certo seria substituir "probabilidade" por "frequência relativa". O erro ocorreu devido à falta de tempo hábil para a análise de adequações e correção das questões. Porém, pelas respostas, acreditamos que este erro não tenha interferido na interpretação da questão.

Observamos vários tipos de registros nas respostas corretas. Tivemos respostas utilizando a notação de porcentagem, números decimais e de fração, assim percebemos que os alunos não ficaram condicionados em utilizar apenas um único tipo de registro. Novamente apareceram erros na simplificação do resultado.

Vale ressaltar respostas de dois alunos, nos quais descrevem o raciocínio utilizado para chegar ao resultado. Embora a questão não exigisse justificativas, esses alunos tentaram explicar a maneira que resolveram a questão.

- Aluno E**:** *"Se cada 1000 for considerado 25%, saindo 2000 caras obtemos 50%. Sem fazer esforço, como temos 800 que é quase 1000, temos mais 20%. Resultado 70%."*
- Aluno I: $\frac{2800}{4000} = 70\%$. *"Se tivesse ocorrido 2000 caras seria 50% porque é a metade de 4000".*

Segue um resumo do resultado:

Acertos	Erros processuais	Deixou em branco.
10	1	1

Tabela 5.11: Acerto x erros da questão 2

Lista 6 – Questão 3

Um aluno resolveu a questão dividindo o número de lançamentos pela frequência absoluta. Desta forma, obteve um número maior que 1 e, mesmo assim, não percebeu o equívoco. Acreditamos que o erro foi devido à falta de atenção, pois nas questões anteriores e na próxima questão este mesmo aluno fez o cálculo corretamente. Outro equívoco foi confundir a frequência relativa com o valor da probabilidade, pois usou a notação de probabilidade.

Outro aluno atribuiu ao numerador o número 100, ao invés de 102. Talvez tenha sido por falta de atenção ou por associar a ideia de probabilidade ao número 100 como porcentagem.

Tivemos apenas um resultado em branco, acreditamos que o aluno não respondeu esta questão por não saber o que significava frequência relativa, pois a diferença desta questão para a anterior, a qual respondeu corretamente, é a substituição do termo probabilidade por frequência relativa. Segue um resumo das respostas dadas pelos alunos:

Acertos	Erros conceituais	Erros processuais	Em branco
8	1	2	1

Tabela 5.12: Acerto x erros da questão 3

Lista 6 – Questão 4

Tivemos duas respostas em branco, e em uma delas acreditamos que o aluno não respondeu por não saber o que significava frequência relativa, pois se trata do aluno que respondeu corretamente a Questão 2 e deixou em branco às Questões 3 e 4, cuja única diferença entre as elas foi o termo frequência relativa.

Observamos um erro processual no momento em que foi expressar sua resposta em porcentagem. Acreditamos que, por falta de atenção, confundiu o número 18 com 12 e escreveu 12%. Segue um resumo do resultado:

Acertos	Erros processuais	Em branco
8	1	2

Tabela 5.13: Acerto x erros da questão 4

Lista 6 – Questão 5

Devemos ressaltar que neste tipo de questão e na Questão 11 deveriam ter sido exploradas na Aula 4 e não foram, pelos motivos já mencionados na análise a posteriori da Aula 4. Embora os licenciandos não tivessem trabalhado este tipo de questão anteriormente com os alunos, resolveram incluí-las nesta lista (avaliação final). Não tivemos tempo de avaliar as listas antes da aplicação, pois foram preparadas sem tempo hábil para a adequação e correção, o mesmo motivo que impossibilitou a adequação da Lista 4.

Sete alunos cometeram uma sequência de erros:

(1) não descreveram o espaço amostral;
(2) consideraram a cardinalidade do espaço amostral como sendo três, ou seja, relacionaram a quantidade de moedas à cardinalidade do espaço amostral;
(3) associaram a quantidade de caras à cardinalidade do evento;
(4) não souberam interpretar a expressão “pelo menos”.

Um aluno marcou a opção (c). Embora ele tenha determinado corretamente o número de elementos do espaço amostral, não soube precisar o número de elementos do evento. Acreditamos que tenha interpretado errado a expressão “pelo menos 2 caras”, deixando de contar a ocorrência de três caras.

Três alunos marcaram a opção correta, porém apenas dois responderam corretamente. Embora a questão não tenha exigido justificativa, um aluno a forneceu, mostrando que acertou por coincidência. Descreveu o seguinte: “*Uma moeda com 2 faces, a possibilidade de ocorrer cara é* $\frac{1}{2}$.” Acreditamos que talvez possa ter considerado apenas o lançamento de uma única moeda e a probabilidade de se obter cara. Segue um resumo das respostas dadas pelos alunos:

Acertos	Marcaram a opção (e)	Marcaram a opção (c)	Acertou por coincidência
2	7	1	1

Tabela 5.14: Acerto x erros da questão 5

Lista 6 – Questão 6

No item (a) seis alunos responderam incorretamente, conforme previmos na análise a priori. Utilizaram o mesmo raciocínio da questão realizada em sala. Se a situação fosse a mesma, teriam acertado. Na questão trabalhada anteriormente, discutia-se o seguinte: “Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos, qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central”. Na questão atual, eles não consideraram a probabilidade do atirador acertar o alvo, calcularam a área total do alvo e a área da região de 500 pontos e escreveram: $P = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{1}{144}$.

Os mesmos seis alunos mencionados no item (a) foram os que acertaram o item (b). Dentre esses, apenas dois utilizaram o raciocínio correto no item (c), porém como haviam errado o valor da probabilidade do item (a), não acertaram o valor correto do item (c), respondendo $\frac{143}{144}$. Os demais não souberam responder deixando em branco ou respondendo errado ao tentar calcular algumas áreas. Segue um resumo do resultado:

	Acertos	Utilizou o raciocínio realizado em sala	Errou em decorrência do erro do item (a)	Erros	Em branco
(6a)		6		4	1
(6b)	6			3	2
(6c)			2	4	5

Tabela 5.15: Acerto x erros da questão 6

Lista 6 – Questão 7

Tínhamos previsto que o enunciado por estar confuso prejudicaria a resolução da questão. Acreditamos que isso de fato aconteceu devido ao grande número de alunos que a deixaram em branco. Um único aluno descreveu corretamente os eventos pedidos, mas não escreveu o espaço amostral. Outro aluno registrou {8; 2}. Acreditamos que o número 8 esteja relacionado ao evento: número de peças defeituosas num dia é 8, e o número 2 esteja relacionado ao evento: número de peças defeituosas num dia é menor que 5, demonstrando que não soube interpretar a expressão “é menor que cinco”. Segue um resumo das respostas dadas pelos alunos:

	Acertos	Erros conceituais	Erros de notação	Em branco
(7a)				11
(7b)	1		1	9
(7c)	1	1		9

Tabela 5.16: Acerto x erros da questão 7

Lista 6 – Questão 8

Seis alunos classificaram o item (d) como experimento determinístico. Talvez tenham interpretado o enunciado errado, entendendo que o experimento seria contar o número de peças defeituosas.

Desconfiamos que dois alunos, talvez por não se lembrarem dos conceitos, tenham classificado os experimentos de forma aleatória, pois experimentos parecidos foram classificados de formas diferentes. Assim, por exemplo, classificaram o item (a) em aleatório e o item (b) em determinístico.

Um único aluno deixou esta questão inteira em branco. Porém, como fez todas as outras questões e esta estava atrás da folha, provavelmente não a viu. Apenas um aluno acertou todos os itens. Segue um resumo do resultado:

(8)	Acertos	Erros	Em branco
(a)	10		1
(b)	6	4	1

(c)	9	1	1
(d)	3	6	2
(e)	7	2	2
(f)	5	4	2
(g)	7	2	2
(h)	7	2	2

Tabela 5.17: Acerto x erros da questão 8

Lista 6 – Questão 9

Nesta questão um aluno escreveu apenas $\frac{2}{8}$. Talvez tenha somado o número de possibilidades de resultados da moeda com do dado para obter os valores tanto do numerador quanto do denominador, ao invés de ter multiplicado essas possibilidades.

Dois alunos consideram os eventos separadamente um do outro, calculando a probabilidade de se obter cara e a probabilidade de se obter o número 5, porém não uniram essas duas informações. Da mesma forma fizeram com a probabilidade de se obter o resultado (coroa, par). Segue um resumo das respostas dadas pelos alunos:

Acertos	Considerou os eventos separadamente, sem unir os valores obtidos	Erro de cálculo.	Em branco
3	2	1	5

Tabela 5.18: Acerto x erros da questão 9

Lista 6 – Questão 10

Um aluno considerou um único evento com 2 elementos, atribuindo a valor $\frac{2}{52}$ para a probabilidade. Outro escreveu os valores corretamente, ou seja, $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51}$, porém multiplicou denominador com numerador, não soube fazer multiplicação de frações. Da mesma forma, um terceiro aluno raciocinou corretamente, mas escreveu os seguintes valores: $\frac{13}{52} \cdot \frac{13}{51} = \frac{1}{16}$. Não sabemos o que fez para chegar à fração $\frac{1}{16}$. Segue um resumo do resultado:

Acertos	Erros conceituais	Erro processual	Em branco
3	2	3	3

Tabela 5.19: Acerto x erros da questão 10

Lista 6 – Questão 11

Nesta questão, sete alunos repetiram o erro conforme na questão 5. Não conseguiram determinar o espaço amostral e o evento quando se trata de lançamentos simultâneos de um mesmo elemento ou lançamento com mais de um elemento, além da dificuldade de interpretação da expressão “pelo menos”. Porém, dentre esses sete alunos, dois acertaram a Questão 5, que é similar. Acreditamos que tenham errado a questão 11 por falta de atenção. Apesar da diferença entre os enunciados, o raciocínio envolvido é o mesmo. Na Questão 5, três moedas são jogadas simultaneamente, enquanto, nesta, uma única moeda é lançada 4 vezes.

Um único aluno escreveu o valor correto, mas não nomeou o espaço amostral nem o exemplo. Como errou a Questão 5 cujo raciocínio é similar, talvez tenha acertado o valor por coincidência, ou desta vez prestou atenção e interpretou corretamente.

Outro aluno considerou o espaço amostral apenas com 8 elementos. Talvez tenha somado o número de possibilidades de cada lançamento para obter o número 8. Associou ao numerador o número 4, relacionando-o ao número de lançamentos. Escreveu o seguinte: $\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 50\%$. Segue um resumo das respostas dadas pelos alunos:

Acertos	Associou o nº de lançamentos e o de caras com as $\#$ (espaço amostral) e $\#$ (evento)	Errou o cálculo	Em branco
1	7	2	1

Tabela 5.20: Acerto x erros da questão 11

Lista 6 – Questão 12

Nesta questão o problema foi a interpretação dos itens (b) e (c). No item (b), dois alunos não souberam interpretar a expressão dado que é menor que 50, interpretaram menor ou igual a 50.

Ninguém conseguiu fazer o item (c) corretamente. Um aluno respondeu de forma equivocada o evento, pois interpretou divisível por 5 ***e*** par, chegando ao valor de 10%. A questão principal é a expressão “dado que”, significando que tal evento já ocorreu.

Outros dois alunos acertaram a cardinalidade do espaço amostral, mas erraram na cardinalidade do evento. Um deles considerou o evento com 30 elementos e o outro com 5, talvez o 5 esteja associado aos resultados dos pares divisíveis por cinco até o número 50. Segue um resumo do resultado:

	Acertos	Considerou os números menores ou iguais a 50	Não soube interpretar a expressão “dado que”	Errou o cálculo	Em branco
(a)	8			2	1
(b)	5	2		2	3
(c)			3	3	6

Tabela 5.21: Acerto x erros da questão 12

Para ter uma visão melhor do que cada aluno acertou, resolvemos atribuir uma nota para cada um. Ao atribuirmos as notas, não levamos em consideração os erros de simplificação, arredondamentos e erros de cálculo. Segue um quadro contendo a pontuação de cada questão (Q1 vale 0,59, ..., Q12 vale 1,77), a pontuação conseguida por cada aluno, sua nota total e a média do percentual de acertos por questão.

Aluno /Quest.	Q1 0,59	Q2 0,59	Q3 0,59	Q4 0,59	Q5 0,59	Q6 1,77	Q7 0,59	Q8 1,18	Q9 0,59	Q10 0,59	Q11 0,59	Q12 1,77	Nota 10,03
TS	0,3	0,59	0	0,59	0	0	0,19	1,03	0	0	0	0,59	3,29
N	0,3	0,59	0,59	0,59	0,59	1,18	0	1,18	0,59	0,59	0	1,18	7,38
W	0,3	0,59	0,59	0,59	0	0	0	1,03	0	0	0,59	0	3,69
D	0	0,59	0	0	0	1,18	0	0,29	0	0,59	0	0,59	3,24
MP	0,59	0,59	0,59	0,59	0	0	0	0	0,59	0	0	1,18	4,13
E	0,3	0,59	0,59	0,59	0	0,59	0	1,03	0	0,59	0	1,18	5,46
EV	0,59	0,59	0,59	0,59	0	0,59	0	0,73	0,29	0,59	0	0,59	5,15
TA	0,3	0,59	0,59	0,59	0	0	0	0,59	0	0	0	0	2,66
B	0	0	0	0	0	0,59	0	1,03	0	0	0	0,59	2,21
I	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0,59	0	0,73	0,29	0,59	0	1,18	6,04
L	0,3	0,59	0,59	0,59	0,59	0	0,39	0,44	0,59	0	0	0	4,08
Média do percentual de acertos	55%	91%	73%	82%	27%	24%	9%	70%	36%	45%	9%	36%	43%

Tabela 5.22: Acerto x erros da Lista 6

Ficamos um pouco decepcionados com as notas. Foram abaixo do que esperávamos. Porém devemos ressaltar que os alunos estavam estudando este conteúdo apenas nas aulas do

PIBID, ou seja, não estavam estudando em concomitância com suas aulas regulares. Além disso, apesar de ter sido uma avaliação, para eles foi uma avaliação que não valia nota e assim não estudaram para tal. Participavam das aulas, mas o comprometimento com elas terminava no horário das aulas. Podemos perceber que não havia um estudo fora do horário de aula.

Relembrar os conceitos que foram estudados há um mês, dois meses ou uma semana sem nenhum estudo fora do horário da aula é realmente complicado. Levando tudo isso em consideração, não dá para avaliar o desempenho dos alunos somente por este questionário.

As Questões 5, 6, 7, 9, 11 e 12 foram as que tiveram piores notas. As Questões 5, 9 e 11 exploram experimentos com lançamentos simultâneos e lançamentos sucessivos e esses conteúdos foram cobrados nesta lista sem uma exploração anterior durante as aulas. Acreditamos que isso explique o baixo rendimento.

A Questão 6 foi aquela em que a maioria dos alunos resolveu utilizando o raciocínio similar à outra realizada durante as aulas. O que poderia ter evitado esta confusão seria explorar esta questão nas várias situações (sabendo que o atirador acertou o alvo, e sabendo a probabilidade de ele acertar o alvo) durante as aulas.

A Questão 7 tinha o enunciado confuso e teria sido uma questão fácil se o enunciado estivesse mais claro. Atribuímos o baixo rendimento da Questão 11 à má interpretação por parte dos alunos, o que poderia ter sido amenizado se tivéssemos trabalhado com um número maior de questões similares durante as aulas. Porém o tempo não nos permitiu trabalhar com todas essas variedades de questões.

De uma forma geral, avaliando as aulas, as participações e os resultados em cada aula, acreditamos que tenha sido positivo e que tenha acrescentado aos alunos muito mais do que essas notas expressam. Em outra oportunidade de revisão desses conceitos em suas aulas regulares, acreditamos que os alunos terão condições de aprender muito mais a partir dessa pequena introdução que tiveram sobre Probabilidade.

6. REFLEXÕES E APRIMORAMENTO DA PROPOSTA INICIAL

O resultado principal da engenharia didática é avaliar a sequência didática, a fim de sugerir modificações decorrentes da aplicação e da análise a posteriori com o propósito de aprimorá-la. Tentaremos recuperar os erros e os problemas identificados pela banca de qualificação e os não previstos surgidos durante a aplicação. Algumas sugestões foram realizadas durante a análise a posteriori, porém iremos retomá-las a fim de apresentar de uma única vez as correções que consideramos necessárias para aprimorar a nossa proposta inicial. Seguem as modificações referentes ao planejamento da Aula 2, que se encontra inicialmente na análise a priori, páginas 63, 64 e 65.

A Atividade 4 fazia menção às Atividades 2 e 3. Nestas, os alunos deveriam associar um espaço amostral a dois experimentos diferentes. Com o intuito de melhor explorarmos o conceito de espaço amostral equiprovável e não equiprovável inserimos os itens (b) e (c) na Atividade 4 e alguns espaços amostrais na Atividade 5.

Descrição da Atividade 04: Os licenciandos retomarão as duas últimas atividades para que os alunos possam:

a) classificar os espaços amostrais que associaram ao experimento em equiprovável e não equiprovável.

b) associar um espaço amostral de elementos equiprováveis.

c) associar um espaço amostral de elementos não equiprováveis.

Descrição da Atividade 5: Observe os espaços amostrais referentes aos experimentos aleatórios abaixo e classifique-os em espaço equiprovável ou não equiprovável.

a) Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso na urna.

Ω_1 = {branca, vermelha, azul}.

Ω_2 = {b_1, b_2, b_3, v_1, v_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5}

Onde b= bola branca, v = bola vermelha e a= bola azul.

b) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso.

Ω_1 = {preta, banca, amarela}.

Ω_2 = {p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}}

Onde p= bola preta, b = bola branca e a= bola amarela.

Ω_3 = {preta, preta, preta, preta, preta, preta, branca, branca, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela}.

Ω_4 = {p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, v_1}

Onde p= bola preta, b = bola branca, a= bola amarela e v = boa verde.

c) Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados e observados os números das faces de cima.

$\Omega_1 = \{(1, 1), (1, 2),..., (1, 6),..., (6, 6)\}$

$\Omega_2 = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\}$

Além disso, sugerimos alterar uma questão da lista de exercícios a fim de explorar o conceito de espaço amostral equiprovável e não equiprovável vinculando com os conceitos Frequentista e Clássico. Tal questão se encontra inicialmente na análise a priori, página 70.

Lista 2 (Exercícios de Revisão)

4) Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso na urna. Determine.

   a) **Um espaço amostral associado a este experimento que seja equiprovável. Posso aplicar a definição Clássica de probabilidade neste experimento? Justifique.**

   b) **Um espaço amostral associado para este experimento que seja não equiprovável. Posso aplicar a definição Clássica de probabilidade neste experimento? Justifique.**

Além das modificações acimas, verificamos a necessidade de inserirmos uma pequena consideração no planejamento da Aula 3, que se encontra inicialmente, na análise a priori, na página 79, como segue:

Axiomas e Algumas Propriedades Importantes da Probabilidade:

Seja E um experimento aleatório com um espaço amostral associado S. A cada evento $A \subseteq S$, associa-se um numero real, representado por P(A) e denominado “probabilidade de A”, que satisfaz as seguintes axiomas (1, 2, 3) e propriedades (4, 5, 6):

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(AUB) = P(A) + P(B)$

Devido à complexidade do assunto, daremos ênfase à justificativa dos resultados através de alguns exemplos com forte apelo à concepção clássica. Sendo S um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento de S, têm-se:

4. $P(\emptyset) = 0$

Justificativa: $P(\emptyset) = \dfrac{n(\emptyset)}{n(S)} = \dfrac{0}{n(S)} = 0$

Sugerimos também acrescentar, à lista de exercício da Aula 3, a seguinte questão:

Seja E= {1, x, 2} um epaço amostral. Define-se uma função P em E do seguinte modo:

a) $P(\{1\}) = P(\{x\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{3}$

b) $P(\{1\}) = P(\{x\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{2\}) = -1$

c) $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{x\}) = \frac{1}{4}$; $P(\{2\}) = \frac{1}{4}$;

d) $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{x\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{2\}) = \frac{1}{2}$;

Em qual desses casos P é uma probabilidade?

(Questão adaptada de Caruncho, J. et al. (1988) apud Ortiz (2002, p.181)).

Sentimos a necessidade de criarmos um planejamento de uma aula, para inserir entre as Aulas 4 e 5, com atividades que permitissem os alunos interpretar dados e tomar decisões sob incerteza utilizando o raciocínio probabilístico. Além disso, considerávamos inicialmente que a Probabilidade Subjetiva não cabia de forma adequada no Ensino Médio. Porém, quando questionados durante o exame de qualificação sobre o conceito Subjetivo, ficamos tentados a incorporá-lo em um nível simples de conscientização. Avaliamos que uma possibilidade de tratarmos a Probabilidade Subjetiva seria propondo questões filosóficas a seu respeito.

Como esta aula surgiu em decorrência de nossas análises a posteriori e pela tentativa de adequar nossa proposta inicial às sugestões da Banca de Qualificação, elaboramos uma sequência didática que nomeamos de “4.1”, como segue.

Sequência Didática da Aula 4.1

Nesta seção apresentamos as variáveis microdidáticas e a descrição de cada atividade juntamente com as previsões dos possíveis comportamentos dos alunos em relação à Aula 4.1.

Variáveis Microdidáticas Associadas à Dimensão:

1. Epistemológica

    a) Estudo da Probabilidade aplicada à tomada de decisão sob incerteza.
    b) Aplicação dos conceitos Frequentista e Condicional.
    c) Considerações de ordem filosófica a respeito do conceito de Probabilidade Subjetiva.
    d) Confrontação entre os conceitos Subjetivo, Clássico e Frequentista da probabilidade, apenas em nível filosófico.

2. Didática

    a) Realização de um experimento empiricamente que permite dar inteligibilidade ao cálculo probabilístico associado a esse experimento.

b) Utilização de exemplos a fim de dar inteligibilidade às questões filosóficas referentes ao conceito Subjetivo.
c) Utilização de exemplos a fim de confrontar a aplicabilidade dos conceitos Clássico, Frequentista e Subjetivo da probabilidade.

Nesta aula iremos propor uma situação que permite os alunos a tomar decisão sob incerteza. Os objetivos são apresentados a seguir.

1. Interpretar dados e tomar decisões sob incerteza utilizando o raciocínio probabilístico.
2. Simular os experimentos sob as mesmas condições em certo número de vezes e calcular a frequência relativa do evento em questão.
3. Perceber que o conceito de Probabilidade Condicional está subjacente na questão.
4. Entender que a probabilidade teórica estudada na situação-problema pode ser inteligível à luz das simulações propostas em sala de aula com um grande número de realizações.
5. Entender que na prática há apenas a avaliação da chance, e que nesta, mesmo se baseando em um raciocínio probabilístico, não garante a certeza do evento, ou seja, não é possível garantir o sucesso de um evento, porém há maior chance de sucesso se baseando em um raciocínio probabilístico correto.
6. Refletir as considerações apresentadas num nível filosófico a respeito do conceito de Probabilidade Subjetiva.
7. Entender a confrontação entre os conceitos Subjetivo, Clássico e Frequentista da probabilidade, essencialmente em nível filosófico ou através de exemplificações.

Após o momento inicial, propõe-se apresentar a Atividade 1 para os alunos e expor situações que ensejem discussões e considerações sobre tomadas de decisão e suas justificativas. Além de discutir sobre a regularidade que o experimento aleatório apresenta ao ser (realizado) observado num grande número de vezes, e que a probabilidade não garante a ocorrência de um dado evento como "fazer sol". Porém, há mais chance de fazer sol do que chover.

Descrição da Atividade 1: Se a meteorologia nos disse que a probabilidade de que amanhã faça sol é de 80%, significa que, por 100 dias, com as condições climáticas observadas hoje, para o dia seguinte, em 80 dos 100 casos, fez sol. Como você pode ver esta informação não te dá certeza do que vai acontecer amanhã, mas não deixa de ser útil. Você pode preparar sua viagem com alguma confiança de que não acontecerá chuva amanhã? Justifique.

(Adaptada de Guzmán, M. et al. (1988) apud Ortiz (2002, p.175))

Após as discussões referentes à tomada de decisão sob incerteza utilizando o raciocínio probabilístico na primeira atividade, propomos a segunda atividade.

Descrição da Atividade 2: Você está participando de um jogo chamado "Porta da Felicidade", da seguinte forma: O apresentador do programa mostra a você três portas e uma delas esconde um carro como prêmio e as outras duas não oferecem nada e o colocam fora do jogo. O que acontece? Você escolhe uma porta e o apresentador abre uma outra porta vazia não escolhida por você. Assim ainda há a chance de você ganhar o carro. Mas ele agora lhe oferece a oportunidade de mudar de porta.

a) O que você faz? Fica com a mesma porta escolhida ou muda para a outra porta?

b) Determine a probabilidade inicial de você ganhar o prêmio antes do apresentador abrir uma porta vazia não escolhida por você.

c) Determine a probabilidade de você ganhar o prêmio considerando a sua resposta no item (a).

(Adaptada de Rocha e Fernandes, 2012)

Deve-se propor um debate sobre qual a decisão a ser tomada à luz da incerteza por meio das respostas apresentadas pelos alunos. Esperamos que alguns alunos respondam o item (a) de forma aleatória ou se baseiem em um raciocínio equivocado de que não faria diferença trocar de porta, ou seja, atribuir equivocadamente um valor de 50% para o item (c), o que é muito mais intuitivo, embora errôneo.

A ideia inicialmente é apenas discutir as possíveis respostas apresentadas pelos alunos sem corrigi-las como com certas ou erradas. Porém o professor deve estar atento aos equívocos, para que possa retomá-los após a Atividade 3.

Descrição da atividade 03: Três cartas de cartolina, das quais uma tem o desenho de um carro e as outras duas o vazio representando as “portas”, são dadas a cada par de alunos. Um será responsável pelo embaralhamento das cartas, tendo a visualização de onde se encontra o carro para si, ou seja, fará o papel do apresentador do programa. O outro aluno, fazendo o papel de jogador, deve inicialmente escolher uma carta. Em seguida o que tem acesso à informação deve mostrar uma outra carta sem o carro, excluí-la, e o aluno jogador deve então escolher a estratégia de mudar de carta. Se na mudança da carta o aluno-jogador ganha o carro então registra-se um acerto, caso contrário registra-se zero. Finalmente mudam-se os papéis exercidos, o apresentador da primeira fase torna-se o jogador e o jogador da primeira fase torna-se o apresentador, e o aluno jogador deve então escolher a estratégia de não mudar de carta.

Após a realização dos experimentos, deve-se reunir os resultados de cada dupla a fim de calcular as frequências relativas dos eventos em questão.

a) Qual a taxa empírica de acertos da estratégia adotada pela mudança da primeira escolha da "porta"?

b) Qual a taxa empírica de acertos da estratégia adotada pela **não** mudança da primeira escolha da "porta"?

c) De acordo com os itens (a) e (b) retome os itens da Atividade 2.

(Adaptada de Rocha e Fernandes, 2012)

Escolhemos a atividade acima, pois os alunos realizarão empiricamente o experimento equivalente à Atividade 2. Além disso, consideramos este problema difícil de ser estudado formalmente. Justamente por isso optamos pelo conceito Frequentista da probabilidade a fim de dar melhor inteligibilidade a esses questionamentos.

Novamente, cabe aqui a discussão proposta na Atividade 1, ou seja, que a probabilidade estudada na situação problema atribui um valor numérico da factibilidade de um evento baseado na taxa de ocorrência que o experimento aleatório apresenta ao ser repetido em um grande número de vezes. Além disso, discutir que em geral há uma única realização, mesmo se baseando em um raciocínio probabilístico, trocar de porta não oferece garantia de que ganhará o prêmio, porém oferece mais chance de ganhá-lo.

Talvez, mesmo depois de todas as discussões é possível que permaneça algum aluno com alguma dúvida sobre os resultados obtidos. Para tentar sanar alguns equívocos provocados pela intuição o professor poderá fazer as seguintes observações:

"Existem três portas, A, B e C. Quando você escolheu uma delas, digamos a A, a chance de que ela seja a premiada é de $\frac{1}{3}$. Consequentemente, as chances de que você tenha errado, ou seja, de que o prêmio esteja nas outras duas portas B ou C são de $\frac{2}{3}$. O importante é considerar que a chance de que o prêmio esteja nas outras portas que você não escolheu são de $\frac{2}{3}$.

Basta notar que o apresentador abrirá sem erro uma dessas outras duas portas que não contém o prêmio. Ao fazer isso, ele está lhe dando uma informação valiosa: se o prêmio estava em uma das portas que você não escolheu, então agora ele só pode estar na porta que você não escolheu e não foi aberta. Ou seja, se você errou ao escolher uma porta, e as chances disto são de $\frac{2}{3}$, então toda vez que você tiver escolhido inicialmente uma porta errada, ao trocar de porta você irá com certeza ganhar**.**

Como as chances de que você tenha errado em sua escolha inicial são de $\frac{2}{3}$, se você trocar de porta suas chances de ganhar serão de $\frac{2}{3}$. Inversamente, a chance de que você ganhe se não trocar de porta continua sendo de apenas $\frac{1}{3}$. Portanto, a probabilidade nos diz que é mais vantajoso trocar de porta."

Se, mesmo assim, as dúvidas permanecerem, o professor poderá propor que se tente imaginar o problema com 1.000 portas. Você escolhe uma porta, e então o apresentador abre todas às outras 998 portas não premiada. Restam apenas duas portas, a que você escolheu inicialmente e a outra oferecida para troca, em apenas uma delas tem o prêmio.

Com 1.000 portas, suas chances iniciais de ganhar o prêmio eram de $\frac{1}{1000}$ = 0,001. Você pode ter quase certeza (ou mais precisamente, 99,9% de "certeza") que o prêmio estava em alguma das outras portas. E depois de ter aberto as 998 portas não premiadas, se o prêmio estava em alguma das outras portas, ele só pode estar naquela porta que ele oferece para troca. Com 99,9% de chance, se você trocar, irá ganhar o prêmio (Pereira de Sá, I. e Pereira de Sá, V. G., 2007 e 2008).

Após essas questões de tomada de decisão sob incerteza, iniciaremos a apresentação das questões filosóficas relacionadas ao conceito Subjetivo que julgamos adequadas ao nível médio.

Descrição da Atividade 4: Deve-se iniciar uma discussão a respeito da aplicabilidade dos conceitos Clássicos e Frequentistas. Para isso, pode-se perguntar, por exemplo:

- Quando podemos aplicar a probabilidade Clássica?
- Realizamos um experimento do lançamento da tachinha e observamos a sua posição ao cair tocar o chão. Neste experimento, estimamos a probabilidade da tachinha tocar o chão com a ponta e cabeça, e o evento de só tocar a cabeça. Por que não podemos aplicar o conceito Clássico neste experimento?
- Qual conceito pode ser aplicado em um espaço amostral não equiprovável e cujos experimentos não possam ser realizados em um grande número de vezes sob as mesmas condições?
- Por exemplo: amanhã você fará uma entrevista de emprego. Qual é a probabilidade de que tenha sucesso nesta entrevista?

Observemos que o avaliador terá os seus critérios para avaliar. Além disso, a entrevista amanhã é única.

Para responder questões como essa, a ciência sentiu a necessidade de criar um novo conceito de probabilidade, o conceito Subjetivo. Este conceito tem grandes implicações em áreas amplas de estudos hoje na Estatística, e apenas o citaremos como ilustração para uma nova interpretação de probabilidade.

Escolhemos a Atividades 4 a fim de confrontarmos as especificidades dos conceitos Clássico, Frequentista e Subjetivo da Probabilidade, fazendo uso de exemplos trabalhados em aulas anteriores. Esperamos que os alunos se lembrem das restrições dos conceitos Clássico e Frequentista, ou então que o professor os relembre utilizando os experimentos já realizados em sala. Após esses questionamentos de ordem filosófica, referentes aos conceitos Clássico, Frequentista e Subjetivo, apresentaremos uma definição do conceito Subjetivo e suas devidas exemplificações de aplicação.

Formalização

Define probabilidade como o grau de crença, com base em conhecimento pessoal e na experiência, que a pessoa atribui em um determinado evento.

A probabilidade subjetiva é frequentemente empregada naquelas situações em que a repetição do experimento não pode ser realizada ou que não pode ser realizada em idênticas condições, como por exemplo em algumas decisões em Economia ou diagnóstico médico.

Demais exemplos:

1. Estimar a probabilidade de que o time de futebol da Ponte Preta disputará a final do campeonato nacional.
2. Estimar a probabilidade de que você obtenha conceito 10 neste curso.
3. Qual é a probabilidade de que a situação da economia de nosso país esteja melhor ao fim do próximo ano?
4. Qual é a probabilidade da existência de vida orgânica em Saturno?
5. Um paciente é submetido a um novo tipo de cirurgia e deseja-se saber se ele ficará bom.
6. Num jogo de futebol entre dois times, deseja-se saber quem vencerá.
7. Uma pessoa deseja saber se seu relacionamento afetivo terá ou não sucesso.

Problemas como esse não são solucionados nem pela abordagem Clássica nem pela abordagem Frequentista. Entretanto, são abrangidos pela interpretação Subjetiva de probabilidade e constituem parte legítima da Teoria da Probabilidade.

Queremos, apenas, que os alunos consigam acompanhar a discussão do conceito e seus exemplos, entendendo que os mesmos não podem ser solucionados pela abordagem Clássica e nem Frequentista, pois são situações que não podem ser repetidas ou que não podem ser realizadas em idênticas condições.

Nessa medida, não pretendemos esgotar todas as potencialidades de tratamento deste conceito, porém foi o que consideramos adequado a este nível de ensino. Esperamos que com esta aula os alunos reconheçam a especificidade do raciocínio probabilístico como mecanismo de inteligibilidade ao mundo de incertezas em que vivemos.

7. ENTREVISTAS COM OS LICENCIANDOS

Realizamos duas entrevistas, uma no início das atividades do PIBID, em agosto de 2011 e uma entrevista final em maio de 2012. Para a realização destas, criamos um roteiro, que se encontra nos anexos, porém não utilizamos todas as falas. Analisamos essas entrevistas de acordo com os seguintes critérios:

1) experiências adquiridas pelos licenciandos, considerando as expectativas iniciais, as expectativas alcançadas, o conhecimento de conteúdo, o conhecimento pedagógico de conteúdo e o conhecimento curricular;
2) dificuldades vivenciadas dentro do PIBID nas reuniões e em sala de aula;
3) aprendizagem dos alunos;
4) aplicabilidade da sequência didática sobre probabilidade.

Antes de analisarmos as entrevistas, apresentaremos algumas características dos quatro licenciandos acompanhados por esta pesquisa. Iremos nos referir a esses licenciandos por nomes fictícios, com a finalidade de preservar as suas identidades. Dois licenciandos (Claudio e Bernardo) tinham 18 anos e estavam cursando o segundo período de licenciatura, ou seja, tinham acabado de entrar na UFRJ. Outros dois, com 24 anos (Solange e Ana), se encontravam no último período de licenciatura, com ingresso na UFRJ em 2006 e 2007, respectivamente.

Conforme relatado no capítulo referente à dinâmica do PIBID-UFRJ, esses licenciandos foram divididos em duplas, de modo que um calouro na universidade trabalhasse em conjunto com um veterano. Apresentaremos a seguir os principais pontos das entrevistas divididos de acordo com os critérios já discutidos.

1) Experiências adquiridas

a. Expectativas iniciais

De uma forma geral, todos quiseram participar do PIBID por acreditar que seria uma oportunidade de adquirirem experiência inicial ou mais experiência em sala de aula, por ser importante para o currículo e para amadurecerem profissionalmente. Um licenciando em especial diferenciou o PIBID de outros projetos mencionando a importância de ter uma turma sob sua responsabilidade e não apenas auxiliar um professor. Seguem-se duas falas que ilustram o que mencionamos:

> "*Quis participar do PIBID por ser diferente de outros projetos, ele coloca o licenciando direto em sala de aula para cuidar de uma turma, os outros projetos a gente apoia um professor e no PIBID a gente fica direto com a turma.*" (Solange)

> *"Eu acho que é uma oportunidade que a gente tem de crescer, no caso assim, como professor né? Profissionalmente. Eu acredito que vale muito, tanto no currículo quanto em sala de aula. Posso adquirir muita prática, assim me tornar uma melhor profissional."* (Ana)

Os licenciandos relataram que a expectativa que tinham ao serem selecionados para o PIBID era trabalhar com conteúdos e métodos diferentes dos usuais e ensinar de uma maneira mais dinâmica para despertar nos alunos o gosto pela Matemática. Mencionaram também que através do PIBID iriam aprender a dar aula durante a sua formação e não somente depois de formado.

> *"Eu tenho expectativa de aprender métodos, jogos, transmitir a matemática de uma maneira mais dinâmica e que os alunos gostem de estar indo à sala de aula aprender de uma maneira diferente." (Ana)*

Em relação à fala dessas expectativas, uma em especial vale ser transcrita pela emoção exposta, e pela demonstração de uma realização profissional:

> "*Como eu já tenho um tempo de PIBID, então a expectativa pra mim ela já apareceu, que é a questão de experiência, de estar em contato com os alunos diretamente e ver a realidade da educação do Rio de Janeiro. Então ela já vem acontecendo, não é que eu já sei tudo, não é isso, mas as dúvidas vão mudando. Eu gosto de continuar por isso, não é mesma coisa todo ano, as coisas mudam. Agora, a expectativa maior é com os alunos mesmos. A gente vê neles o que a gente está conseguindo fazer, a gente consegue fazer com que eles entendam certas coisas. Vê aquilo ali evoluir que é o melhor. Sair daqui dizendo: 'ah entendi!' É o melhor de tudo, eu consegui!*" (Solange)

Em geral, pudemos perceber quão importante é para os licenciandos a participação em projetos como o PIBID na formação inicial de um professor de matemática. Esperam também obter aprendizagem na utilização de uma linguagem adequada ao nível da turma e na aquisição do conteúdo e do saber pedagógico do conteúdo para uma melhor condução das aulas.

> *"Bom, eu acho que professor de matemática tem que ter vocação. Tem que saber passar. Tem quer ter um bom dialeto." (Claudio)*

> "*Tem muita gente muito boa em matemática, mas que não tem sensibilidade de ver o que o aluno precisa.*" (Solange)

> *"Acho que como professor mesmo é participar desses projetos, acho que é muito interessante, acho que dá para aprender bastante. Igual o que o nosso supervisor falou com a gente uma vez, que ele saiu da faculdade, não teve preparo nenhum e foi dar aula, teve que se virar. A gente não, a gente já esta aprendendo, tem mais*

> *três anos ainda para aprender um pouco mais. Não só para matemática, mas para qualquer professor também, é importante."* (Bernardo)

Ao serem questionados em relação ao papel que lhes cabia dentro do PIBID, os licenciandos citaram que deveriam se esforçar ao máximo para ajudar os alunos; mostrar para eles que podem aprender matemática; transmitir o conhecimento da melhor maneira possível; esclarecer as dúvidas de uma forma melhor e de uma maneira dinâmica, promovendo assim o crescimento da sua experiência profissional. Dos quatro licenciandos entrevistados, apenas Solange mencionou que deveria trabalhar em equipe. Discutiremos adiante a dificuldade que encontraram ao trabalhar em equipe.

Conforme disseram os licenciandos, o PIBID auxiliará na formação profissional por propiciar experiências em sala de aula e estudos de estratégias para ensinar determinados conteúdos, avaliando o quanto estas facilitam ou não no processo de ensino e aprendizagem. Esta observação pode ser ilustrada pelo testemunho de Claudio.

> *"Eu acho que o PIBID vai ser muito importante na minha formação porque é uma experiência a mais que eu vou ter em sala de aula, saber lidar com os alunos, saber o que passar e como me organizar." (Claudio)*

Nesse sentido, uma fala vale a pena ser destacada por novamente distinguir o PIBID de outros projetos, diferenciando-o do estágio supervisionado e reforçando os ganhos para além do currículo acadêmico:

> *"Em questão de formação, porque é o único projeto que deixa a gente de frente com a realidade. Então a gente não vai para uma sala de aula sem saber o que vai acontecer lá. Então, em relação à minha formação, é estar em sala de aula mesmo. Porque conhecimento matemático, isso a gente tem a rodo na faculdade, agora sensibilidade de sala de aula só nos projetos mesmo, só na experiência a gente tem possibilidade de ter isso antes de se formar e tem muita gente que não tem."* (Solange)

b. Expectativas alcançadas

Sobre as expectativas alcançadas no PIBID, os licenciandos citaram:

- o trabalho com métodos e maneiras diferentes de transmitir o conteúdo a fim de facilitar a aprendizagem dos alunos;
- o trabalho em grupo com o diferencial de facilitar o desenvolvimento das atividades e auxiliar na superação das dificuldades.

Mencionaram também que:

- foi necessário estudar mais os conteúdos para melhor ensinar;

- conseguiram esclarecer as dúvidas dos alunos;
- adquiriram um banco de atividades sobre diversos conteúdos para serem utilizados em sala de aula.

> *"Sim, ajudou porque a gente trabalhou com métodos diferentes de dar aula. A gente trabalhou em grupo, que era mais fácil, porque se você tivesse dificuldade em alguma coisa, tinha alguém para te apoiar, então ajudou sim." (Bernardo)*

> *"A respeito de desenvolver mais a minha capacidade, melhorei bastante, alguns aspectos procurei estudar um pouco mais até para passar melhor. A relação dos alunos comigo foi boa e eu acho que eu consegui ajudar, pelo menos alguns deles eu acho que consegui ajudar até em relação às provas de final do ano." (Claudio)*

c) Conhecimentos de conteúdo (entrevista inicial)

Os licenciandos foram questionados em relação ao que sabiam dos conceitos propostos na sequência didática antes de terem acesso aos planejamentos. O primeiro conceito que mencionaram não terem estudado foi o de "experimento determinístico". Não souberam definir o que é e nem citar exemplos relativos a esse conceito.

Quanto ao conceito de "experimento aleatório", Ana o confundiu com "espaço amostral", Claudio e Bernardo não souberam defini-lo e apenas Solange o definiu e deu um exemplo corretamente. Seguem as definições de Ana e Claudio:

> *"Seriam as possibilidades de acontecer um determinado evento. O número de possibilidades que ele pode ocorrer." (Ana)*

> *"É exatamente um experimento, ou seja, você está fazendo, pegando relações em determinada coisa que está querendo achar." (Claudio)*

Em relação ao espaço amostral, souberam dar exemplos, mas as definições foram falhas. Ana, Solange e Bernardo definiram espaço amostral através de evento (quando na verdade o evento é definido a partir do espaço amostral). Já Claudio não diz quais são os elementos que ele está considerando em relação ao seu experimento.

> *"Seria o que pode ocorrer no evento, o que pode ocorrer de modo geral." (Ana)*

> *"Espaço amostral é o conjunto de todos os eventos possíveis para um determinado experimento." (Solange)*

> *"Espaço amostral é exatamente a quantidade total de elementos que a gente vai ter para ser analisado." (Claudio)*

Em todos os exemplos eles usaram moedas e dados, o que demonstra que são os exemplos triviais que ficam na memória. Além disso, este fato evidencia a falta de exemplos não convencionais nos livros didáticos que possam ser trabalhados na introdução de

Probabilidade. Em geram, esses exemplos utilizam conceitos mais sofisticados que não cabem numa introdução à Probabilidade.

Em relação ao conceito de "evento", apenas Claudio não soube dar um exemplo, mas comentou que se lembrava de ter calculado união e interseção de eventos. Bernardo não apresentou nenhuma definição e os demais apresentaram definições equivocadas. Como, por exemplo: Solange, que havia definido espaço amostral através do evento, definiu evento através do espaço amostral. Além disso, tinha uma ideia errônea do conceito de evento, pois acreditava que evento só poderia ser unitário e não como um subconjunto do espaço amostral qualquer ao qual se possa atribuir um medida de probabilidade.

> *"Evento, eu acho que a maneira, a forma com que aquilo acontece." (Claudio)*
>
> *"Evento é uma determinada situação acontecer. Algumas situações dentro do espaço amostral. Não é um subconjunto, né? Porque é meio uma coisa só, é meio um subconjunto. Só que é meio que unitário, né?" (Solange)*
>
> *"No caso, o que eu quero saber." (Ana)*

Quanto às definições apresentadas para os eventos elementares equiprováveis e não equiprováveis, apenas Ana não soube definir corretamente e nem exibir algum exemplo. Os que definiram, expressaram que recorreram ao significado da própria palavra. Além disso, não mencionaram a cardinalidade dos eventos, pois os mesmos deveriam ser elementares (unitários). Os exemplos usados foram dados e moedas, viciadas e não viciadas.

> *"Equiprovável de igual probabilidade." (Bernardo)*
>
> *"Equiprovável vem da própria palavra mesmo." (Claudio)*

Em relação ao conceito Clássico de Probabilidade, todos lembraram o que era. Quanto ao conceito Frequentista, apenas Solange conseguiu defini-lo e exemplificá-lo, os demais disseram que não se lembravam de terem estudado. Nenhum havia estudado o conceito Formal (ou Axiomático) de Probabilidade e sequer ouvido falar nele. Solange afirmou que não foi apresentada a nenhum axioma de probabilidade; vale ressaltar que ela estava concluindo o curso, ou seja, a Probabilidade Axiomática não foi vista na graduação.

> *"Eu vi teoremas e tal, mas axiomas mesmo não, alguma verdade sem ter como ser provado. Axioma não, eu vou ate ver." (Solange)*

Quanto à definição de Probabilidade Condicional, Bernardo e Ana não apresentaram nem a definição e nem algum exemplo. Claudio confundiu este conceito com eventos dependentes, e apenas Solange deu a definição correta.

> *"Alguma coisa que depende. Por exemplo, se eu tenho dois eventos, tenho dois conjuntos. Tenho interseção e tal, mas tenho os conjuntos separados. Os conjuntos eles podem depender ou não um do outro. Porque se dependem, eu vou ter uma probabilidade diferente do que a probabilidade comum. Vamos supor, se eu tenho um conjunto que não tem interseção entre os conjuntos, então na verdade os conjuntos não dependem um do outro, mas se eu tenho uma interseção, então eu tenho uma condição, ou seja, um depende do outro de algum fator para eu calcular a probabilidade." (Claudio)*

Dizer que quando há interseção não vazia entre dois eventos então eles são dependentes, não é verdade, necessariamente, pois dois eventos de interseção não vazia podem ser independentes. Segue uma definição correta. Nela podemos perceber a insatisfação de terem que recorrer repetidamente aos dados para apresentar exemplos:

> *"É a probabilidade de um determinado evento ocorrer sabendo que outro já aconteceu. Como se alguém viesse e me desse uma cola de que alguma coisa já aconteceu. Aí, no caso, a possibilidade disso acontecer vai depender de um novo espaço amostral, vai diminuir. Usando o dado novamente, só para variar, a probabilidade de sair um número menor do que 5, dado que saiu foi par, então as possibilidades são 2, 4 e 6 e ser menor que 5, seriam 2 em 4." (Solange)*

c. Conhecimentos de conteúdo (entrevista final)

Muito mais do que verificar o que os licenciandos não sabiam antes e mesmo após a aplicação da sequência didática, queremos identificar as concepções errôneas que tinham e foram esclarecidas e as que permaneceram, mesmo com a aplicação da sequência didática. Queremos também saber por que estas permaneceram, pois assim poderemos ter ciência dos conceitos que necessitam de maior cuidado ao serem apresentados.

Entre os quatro licenciandos que foram entrevistados, dois deles, Bernardo e Solange foram os que de fato aplicaram a sequência didática. Esses na entrevista final deram as definições e exemplos sem apresentar nenhuma concepção errônea. Porém, os outros dois licenciandos, Ana e Claudio, que auxiliaram durante a aplicação da sequência didática, apresentaram ainda algumas concepções errôneas. Este fato nos indicou que os que tinham a responsabilidade de dar a aula estudaram com mais detalhes o assunto. Por outro lado, os que auxiliavam apenas participando das aulas e fazendo as pesquisas para sugerir as atividades, não estudaram com a mesma dedicação dos outros dois. Por isso, durante as entrevistas, nas partes que tinham que apresentar as definições e exemplos, cometeram erros que comentaremos a seguir. Justamente por isso, nesta seção apresentaremos apenas os conceitos apresentados pelos licenciandos que não aplicaram a sequência didática.

Ana não se lembrou da definição de experimento aleatório e determinístico; definiu o espaço amostral utilizando a noção de evento e não soube definir o que é evento; não soube definir e nem dar exemplo do que é espaço amostral equiprovável e não equiprovável; apresentou uma ideia bem simples da probabilidade frequentista; não se lembrou de nenhuma das propriedades da Probabilidade, da Probabilidade Condicional e de eventos independentes. Seguem as definições apresentadas por Ana, nas quais podemos comprovar as observações acima:

> *"Eu posso responder depois, o que são experimentos aleatório e determinístico."*
>
> *"Espaço amostral são todos os eventos que podem acontecer. Jogando uma moeda, pode ser cara ou coroa. Jogando duas moedas pode ser cara e cara, cara e cora, coroa e coroa, e coroa e cara."*
>
> *"Evento é o que está pedindo, determinando, no exemplo do dado, o evento de mostrar um número par."*
>
> *"A concepção Frequentista da Probabilidade era meio difícil de encontrar. Eu imagino que tem a ver com frequência, a frequência que o evento ocorre, mas eu não lembro a definição."*
>
> *" Na probabilidade condicional tem a questão do (ou) e do (e)."*
>
> *" Evento dependente é quando depende de um determinado fator, independente quando não depende de um determinado fator, pior que eu vi isso. Não lembro."*

Claudio confundiu experimento aleatório e determinístico com evento certo e evento não certo. Não se lembrou de nenhuma propriedade da probabilidade vista na sequência didática e apresentou uma definição falha do que seriam eventos dependentes, como podemos comprovar em suas falas em relação aos conceitos de:

> *"Experimento aleatório é quando você tem um determinado número de bolas você tem tantas de tantas cores, aí você vai escolher uma dessas bolas, você escolhe aleatoriamente uma dessas bolas, não é uma coisa determinada. Como não é uma probabilidade certa de acontecer, nem sempre vai acontecer daquela forma, então torna o espaço ser aleatório."*
>
> *"Experimento determinístico é quando você tem certeza do que aquilo vai gerar. Por exemplo, se eu tenho um saco cheio de bolas vermelhas, então a probabilidade de eu tirar bola vermelha, não sei... é tipo um evento certo. Bem, experimento determinístico, deixa ver se eu lembro. Estou confundindo determinístico com evento certo, não me lembro."*
>
> *"Evento dependente é quando tenho um evento e esse evento para eu determinar a probabilidade de outra qualquer eu dependo desse evento primeiro. Para eu saber a probabilidade de uma determinada coisa ocorrer."*

Pelas dificuldades apresentadas, percebemos que devemos ter mais atenção ao exibir e explorar os experimentos aleatório e determinístico, já que eles não conseguiram assimilar esses conceitos, a fim de deixar clara a diferença entre esses experimentos e os eventos certos. Além disso, uma dificuldade que permaneceu foi a definição de espaço amostral através da ideia de evento e a definição de evento através da ideia do espaço amostral.

O PIBID acrescentou muito mais em conhecimento de conteúdo quando o licenciando atuou como professor. Quando se envolveu em atividades apenas de auxílio, a aquisição deste conteúdo ficou falha. Ao contrário, os licenciandos que aplicaram de fato a sequência didática (Bernardo e Solange) apresentaram definições e exemplos corretamente. Uma sugestão para que isso não aconteça é que haja uma troca de papéis entre os licenciandos, em que a cada semana eles se permutariam entre as turmas.

d. Conhecimento Pedagógico de Conteúdo

Em relação ao **Conhecimento Pedagógico de Conteúdo,** os licenciandos relataram que por meio do PIBID puderam: aprender métodos diferentes de dar aulas, com atividades diversificadas e jogos; adquirir um conjunto de atividades durante a sua formação que possa ser aplicado futuramente e de cuja elaboração e aplicação eles participaram; aprender a utilizar os "jogos" como um instrumento para o ensino. Por fim, também tiveram a oportunidade de aprender algumas maneiras de ensinar os conteúdos sobre função (afim, quadrática, exponencial, logarítmica) e também sobre trigonometria, sequências, geometria (plana e espacial) e probabilidade.

> *"Na maneira diferente de transmitir alguns conceitos que eu transmiti, eu ensinei no PIPIB através de jogos, através de ferramentas e instrumentos para facilitar aprendizagem do aluno." (Ana)*

> *"Eu adquirir em questão de aplicação de atividades, por exemplo, função exponencial e função logarítmica. Se eu tivesse que entrar em uma sala eu daria aquela aula, giz, que é cansativa, um conteúdo cansativo. Agora eu já conheço algumas atividades para aplicar, uns joguinhos e tal, umas coisas que vão distrair eles e eles vão pegar mais rápido, umas coisas que antes eu não tinha, eu saio do PIBID com várias ideias para fazer em sala de aula." (Solange)*

O licenciando que prefere a linha mais tradicional de ensino disse que tem dificuldade em trabalhar com atividades diversificadas. Entretanto, em sua fala reconheceu a importância dessas atividades para os alunos:

> *"Por mais que eu não goste daquela parte que você tem que fazer as tarefas, acho que isso é importante para o aluno, porque ele consegue ver de uma forma melhor, quando você dá uma tarefa boa, que vai além da teoria. O aluno consegue enxergar aquilo melhor e se ele for interessado ele na hora que ele for colocar no papel ele vai conseguir fazer, acho que isso é importante para o aluno, mas aí também tem que ser um bom professor que consiga lidar com isso." (Bernardo)*

Este conhecimento adquirido, dos quais eles foram coautores, é o que Shulman (1986) denomina "conhecimento pedagógico de conteúdo".

e. Conhecimento Curricular

Para Shulman (1986), o currículo é um conjunto de conteúdos que devem ser ensinados nos diferentes graus da educação, acrescido das variedades de materiais didáticos disponíveis em relação a esses programas. Pala ele, o professor precisa possuir entendimentos sobre as alternativas curriculares disponíveis para a instrução dos conteúdos e precisa estar familiarizado com esses materiais didáticos.

Shulman não menciona o plano de aula ao definir o conhecimento curricular. Porém incorporamos os conhecimentos mobilizados para a elaboração do plano de aula ao conhecimento curricular, uma vez que para sua elaboração é preciso saber selecionar os conceitos essenciais relacionados a um determinado conteúdo para dar suporte ao avanço curricular.

Não foi realizado um estudo dos conteúdos considerando os Parâmetros Curriculares Nacionais. Porém todos os conteúdos trabalhados no PIBID foram selecionados de acordo com o Currículo Mínimo estipulado pela Secretaria Estadual Educação do Rio de Janeiro.

Além disso, pudemos identificar também os conhecimentos adquiridos na elaboração dos planejamentos de aula: elaboração das atividades e dos roteiros seguidos durante a aplicação dessas atividades; organização que este material deve ter e reavaliação deste planejamento após a sua aplicação.

O essencial a ser ressaltado nesta experiência foi a conscientização da importância de se planejar a aula, fazendo com que esta prática seja uma constante no trabalho. Pudemos identificar este tipo de conhecimento presente nas seguintes falas:

> *"A gente faz planejamento de aula, a gente não faz plano de aula, aí dentro do planejamento se tem alguma atividade, aí a atividade tem um plano de aula, metodologia, os recursos e tal. É realmente pensar na hora de produzir material didático. Faz uma diferença danada, porque você tem que escrever o material e se outro professor pegar ele tem que entender o que vai fazer, o momento certo de aplicar atividade, recurso, como ele vai dividir a turma, o melhor para fazer, então para escrever isso foi o diferencial, eu não tinha prática em escrever material didático." (Solange)*

> *"Aprendi a fazer plano de aula, fiz muitos planos de aula, aprendi a pegar aquele plano, ler novamente, a revisar, aplicar aquele plano ver os pontos positivos, os pontos negativos e mudar aqueles pontos negativos. Foi bem legal e interessante esta parte." (Ana)*

> *"A questão da escrita mesmo de material didático, eu ainda erro muito coisa, escrever aquilo para mim está mega claro, outra pessoa quando vai ler, oi? Quando vai desenvolver a atividade, eu montei a atividade então pra mim, eu entendo tudo rapidão. Então tem que escrever e dar para outra pessoa ler, ou até mesmo escrever alguma teoria a gente falha em conteúdo, tem acontecido bastante de pegar apostila da gente para revisar e pegar, não erro mais coisas faltando e algumas coisas inconsistentes." (Solange)*

Todos em geral, comentaram que adquiriram mais organização em relação aos planejamentos das aulas e mencionaram a importância de se realizar este planejamento. Mencionaram também a interferência de um planejamento na relação professor-aluno, como expresso na fala abaixo:

> *"Eu acho que mais pela parte de organização, porque você não pode chegar lá pra dar aula, falando que eu sei o conteúdo e escrever o que vier na minha cabeça. Para mim tem que ser tudo certinho, se não eu vou chegar lá e ficar perdido e não vou conseguir fazer. Por mais que eu saiba, vou gaguejar, vou mostrar que eu estou nervoso, e se o aluno vê que você está nervoso ele não vai ganhar confiança em você." (Bernardo)*

2) Dificuldades vivenciadas no PIBID: nas reuniões e em sala de aula

Os licenciandos relataram as dificuldades que eles encontraram e foi-lhes solicitado que sugerissem soluções. Eis as principais dificuldades:

- Dificuldade na produção de exercícios.

Observamos que nem todos produziam o quanto deveriam e os planejamentos eram finalizados sem tempo hábil para a devida correção. Além disso, alguns licenciandos trabalhavam mais que outros, que não entregavam suas atividades em tempo.

> *"Dentro do grupo a gente teve dificuldade em produzir exercícios e apesar do grupo ser grande, nem todo mundo produzia tanto quanto deveria, mas esta dificuldade a gente conseguia ultrapassar. Às vezes a aula poderia ser preparada com muita antecedência, a gente ficava em cima da hora, porque os exercícios demoravam a chegar, essa foi a maior dificuldade". (Solange)*

A solução sugerida foi administrar o tempo entre as tarefas do projeto e as disciplinas cursadas na universidade. Segue uma fala interessante em relação ao motivo pelos quais muitas vezes não conseguiram conciliar bem as atividades do PIBID:

> "*Se o pessoal tiver que escolher estudar por alguma matéria, ele vai estudar para a matéria e não fazer o negócio do projeto." (Solange)*

- Dificuldade em criar atividades diferentes das convencionais. Todos reconheceram que este problema é inerente à situação.

> *"Quanto ao grupo, eu encontrei dificuldade na parte que a gente tinha que desenvolver uma tarefa extra, a gente tinha que trazer uma novidade. Como minha mente para isso não é uma das melhores, eu encontrei um pouco de dificuldade nisso. Agora, quanto à parte tradicional, levar o conteúdo, chegava a ter dificuldade na hora de desenvolver, mas depois que eu dava uma estudada aí ficava mais tranquilo". (Bernardo)*

- Dificuldade em lidar com a insatisfação de ter que seguir um roteiro do qual discorde quanto a algumas atividades, mas que foram aprovadas pelo maior número de licenciandos.

> *"O problema é quando você vai montar a aula com o pessoal, você tem que seguir um roteiro, cada um dar a ideia de um roteiro e você acaba seguindo algo que não é você que planeja. Você tem quer dar a aula que foi planejada pelo maior número de pessoas que decidiram aquilo. Isso não satisfaz você, mas tem que seguir." (Bernardo)*

Bernardo e Claudio foram os licenciandos que mencionaram este obstáculo. Vale ressaltar que Bernardo disse preferir a linha tradicional, afirmando ter dificuldade em aplicar atividades diferenciadas. Porém, durante o período que o acompanhei, não deixou transparecer nenhum problema em aplicar quaisquer atividades.

- Preparar as aulas em um nível adequado para que os alunos pudessem aprender a matéria.

> *"A dificuldade mesmo era mais preparar a aula e saber como que estaria o nível dos alunos". (Claudio)*

- Esperar os outros grupos do PIBID, nas outras escolas, para dar prosseguimento na matéria, o que fez com que um grupo atrasasse o outro.

> *"Fora o que você tem que saber tudo certinho para poder passar para os alunos, tinha que esperar os outros alunos das outras escolas acompanhar tudo certo, acho que isso dificultou um pouco". (Claudio)*

- As divergências na hora de finalizar o planejamento, cada um preferindo fazer de um jeito, cada um sugerindo uma atividade. Muitas vezes as ligações das atividades não apresentavam coerência e coesão, já que cada um sugeria uma atividade.

Os mesmos licenciandos (Bernardo e Cláudio), que mencionaram insatisfação em ter que seguir um roteiro com o qual não concordavam totalmente, relataram dificuldade em finalizar o planejamento. Eles sugeriram cada um fazer o seu planejamento, aplicar e depois discutir com o grupo os resultados da aplicação. Porém, quando foram questionados em relação à essência do trabalho a ser desenvolvido em equipe, eles concordaram e disseram que teriam que aprender a conviver com essa insatisfação.

- Dificuldade em encontrar questões sobre conceitos de probabilidade que não são muitos abordados.

- Poucos alunos interessados em participar do PIBID, talvez por ser no contraturno.

> *"Dentro da escola foram poucos alunos interessados em participar do PIBID, talvez pelo contraturno, porque eles tinham que estudar de manhã e a tarde, aí poucos alunos quiseram participar." (Bernardo)*

Sugeriram que se criasse alguma estratégia para chamar atenção desses alunos para o projeto.

- Timidez dos alunos durantes as aulas.

> *"A dificuldade foi em probabilidade, em achar questões de conceitos que não são muitos abordados e a outra dificuldade que eu encontrei foi um pouco a timidez dos alunos, porque tinham alunos que eram meio tímidos." (Ana)*

Dentre as dificuldades, tivemos apenas duas referentes à escola e uma referente à pouca a participação dos alunos. Os alunos participam porque querem, já que não têm o dever de frequentar o PIBID como exigido para as aulas regulares.

Em relação às reuniões, a principal questão levantada foi a finalização dos planejamentos. Acredito que falta conscientização do que é um trabalho de equipe e saber aceitar o voto majoritário para uma determinada atividade, que não a sua proposta para a aplicação.

3) Aprendizagem dos alunos

Os professores da escola perceberam que os alunos melhoraram o desempenho quando o conteúdo é trabalhado simultaneamente no PIBID e nas aulas regulares. Quando o conteúdo é trabalhado apenas no PIBID, os professores não têm como avaliar. Não tivemos por esta razão um retorno dos professores em relação ao conteúdo de Probabilidade, pois este foi estudado apenas no PIBID, ou seja, os resultados identificados foram os produzidos na sala de aula do PIBID.

> *"Quando a gente trabalha com um conteúdo que os professores estão trabalhando simultaneamente em sala de aula, a gente recebe notícias que eles melhoram, eles pegam mais rápido. Quando a gente não está trabalhando, a gente vê aquela produção em sala mesmo. E a questão de trabalhar em grupo eles melhoraram muito com isso, na questão de ajudar o colega, ir ao quadro explicar o que fez para resolver o exercício, eles melhoraram, eles conseguem se expressar melhor agora." (Solange)*

Uma fala ressalta o lado empático do ser professor, e o fato de ensinar muito mais do que a matéria:

> *"Tinha alunos interessados, que queriam realmente estudar, os queriam realmente estudar aprenderam com certeza, porque quando a gente quer estudar ninguém segura. Tinha aluno que precisava mais de apoio moral também, sei lá por algum motivo quisesse desistir de alguma coisa, então por estar ali, ajudando incentivando, passávamos a conversar com os alunos dando conselho também ajudou, não só o conteúdo matemático." (Bernardo)*

Podemos observar através da primeira fala que a aprendizagem é mais notada quando se trata de um conteúdo que eles estão estudando simultaneamente no PIBID e em suas aulas regulares. Quando não há simultaneidade, a aprendizagem é notada apenas no momento das aulas do PIBID.

Julgamos que isso se deve ao fato de que nas aulas regulares eles têm obrigações a cumprir, como estudar para o teste ou para a prova. Caso não estudem, poderão receber uma nota baixa. No PIBID eles não têm obrigação e nem punição, participam porque desejam e nem sempre se dedicam aos estudos como deveriam, já que não há uma cobrança efetiva.

4) Aplicabilidade da sequência didática sobre Probabilidade

Os licenciandos reconheceram que o conceito mais explorado é, em geral, o Laplaciano (Probabilidade Clássica) e que a sequência didática proposta propiciou a aquisição de mais conceitos que aqueles tratados nos livros didáticos. Justamente por isso, justificaram a dificuldade de encontrar questões nos livros didáticos que envolvessem espaço amostral infinito, exemplos de experimentos determinísticos e Probabilidade Geométrica.

> *"Foi em questão de probabilidade mesmo que era a parte que eu não conhecia. Aquele vídeo de espaço amostral infinito, experimento determinístico, essas coisas eu realmente nunca tinha escutado falar." (Solange)*

Citaram também dificuldade em encontrar questões para serem trabalhadas na introdução dos conceitos que não utilizassem apenas de dados e moedas.

Ao serem questionados em relação às dificuldades que os alunos apresentaram durante a aplicação da sequência didática, todos disseram que as complicações não foram tanto nos conceitos e sim, mais na manipulação de frações durante os cálculos. Quanto aos conceitos, o problema foi devido ao esquecimento desses, pois eles não estudavam com frequência.

> *"Em probabilidade a gente usa números entre zero e um, tem dificuldade em fazer conta com fração, tem dificuldade em trabalhar com frações, acho que foi o que mais dava problema, que aparecia, até na questão com probabilidade condicional, que mexe com divisão de fração, aí tem que parar, voltar e explicar como que é. É mais uma deficiência na base mesmo." (Solange)*

> *"Era tudo novo pra eles, a dificuldade foi mais de cálculo matemático e não dos conceitos. Talvez por eles não estarem estudando, porque eu percebi que eles não*

> *estudavam frequentemente, quando vinha um conceito novo que precisava de um conceito anterior, eles apresentavam dificuldade. Tinham esquecido, as aulas eram só uma vez por semana e não tinha uma cobrança rígida, então eles não estudavam frequentemente.” (Bernardo)*

Todos disseram que a sequência didática foi viável e que a aplicariam em suas futuras aulas, apenas adequando o tempo. Solange mencionou que já utilizou, com seus alunos, os conceitos de experimento determinístico, espaço amostral infinito e Probabilidade Geométrica. Eram conceitos que não utilizavam antes porque não os conheciam.

> *“A gente aplicou aqui no Ensino Médio com alunos com dificuldades em matérias anteriores e eles conseguiram acompanhar a gente. Só que tem que ser trabalhado com mais horas, né? Porque o tempo que a gente trabalhou foi pouco.” (Bernardo)*

> *“Não mudaria nada, só a questão de adequar o tempo; aumentaria o número de aulas, mas mudar não.” (Solange)*

Disseram que além de terem conhecido novos conceitos, de terem visto uma maneira de ensinar esses conceitos, aprenderam a ser mais organizados, pois para eles a sequência didática estava bem organizada.

Consideramos que demos visibilidade, através dos depoimentos dos próprios licenciandos, das práticas formativas que ocorreram no âmbito do PIBID. Destacamos as experiências adquiridas pelos licenciandos, identificamos as dificuldades vivenciadas dentro do PIBID no ano de 2011, fizemos uma breve discussão quanto à aprendizagem dos alunos e uma avaliação da viabilidade da sequência didática e suas contribuições.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa inicialmente buscamos investigar formas de como desenvolver o ensino de Probabilidade para alunos do Ensino Médio. Para isto, fizemos um estudo teórico de alguns artigos que tratam deste assunto e realizamos uma análise preliminar dos principais conceitos probabilísticos que pretendíamos trabalhar com os alunos. Verificamos também as Orientações Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio (2006), o Currículo Mínimo (2011) do Estado do Rio de Janeiro, e o livro didático adotado pela escola em relação ao conteúdo de Probabilidade. Nossa preocupação durante a elaboração da sequência didática foi propor situações que favorecessem a construção dos conceitos probabilísticos, em um nível introdutório, com atividades que pudessem tentar evitar os equívocos conceituais sobre probabilidade descritos nas análises preliminares.

O estudo foi realizado em duas vertentes, uma refere-se à análise da sequência didática com a proposta de inserir os conceitos da Probabilidade identificados no estudo teórico e julgados adequados para serem trabalhados no Ensino Médio. As reflexões desta parte ensejaram a condução da outra vertente, a saber, a identificação de alguns conhecimentos adquiridos ou explorados pelos licenciandos durante o período em que foram acompanhados pelo estudo, no âmbito do PIBID.

Eis, a seguir, o resumo das principais considerações discutidas em detalhe ao longo dos capítulos, para posterior apresentação das contribuições do nosso estudo, as suas implicações para a educação e linhas de pesquisa.

8.1 Os principais resultados

Na Introdução foram apresentados os objetivos de investigação. Faremos a seguir, de forma resumida, considerações sobre cada objetivo mencionado.

1) **Criar uma proposta para iniciar o conteúdo de Probabilidade para o Ensino Médio que possa ser aplicada pelos licenciandos vinculados ao PIBID. Para isto, nos valemos dos vários conceitos que permeiam a Probabilidade, dos conhecimentos de conteúdo e pedagógico de conteúdo (SHULMAN, 1986, 1987) e da análise do conteúdo de Probabilidade apresentado no livro didático do Ensino Médio adotado na escola em que se dará o acompanhamento da pesquisa.**

Para a elaboração da sequência didática, fizemos estudos sobre o ensino de probabilidade, e reconhecemos o que todos os autores estudados reiteram de forma categórica, isto é, que os significados da Probabilidade são inerentes aos conceitos e limitar-se a apenas um enfoque reduz o caráter polissêmico deste conteúdo. Defendem para isso a institucionalização dos demais significados de acordo com cada nível de ensino.

Um dos objetivos da utilização da Engenharia Didática nesta pesquisa foi avaliar a sequência didática a fim de sugerir modificações decorrentes da aplicação e da análise a posteriori, com o propósito de aprimorá-la. Os erros e os problemas identificados na sequência, bem como os não previstos, surgidos durante a aplicação, foram reconhecidos durante a análise a posteriori, e para estes foram sugeridas alterações de forma a superá-los.

Apesar de termos realizado uma pesquisa sobre as mais variadas concepções da Probabilidade com o objetivo de proporcionar ao aluno um sentido mais amplo deste conceito, observamos que as questões e atividades propostas na sequência se limitaram a aplicações nos jogos de azar (dados, moedas, baralho e sorteios). Entendemos que poderia ser pensada uma aula na qual fossem abordadas as diferentes aplicações dos conceitos, com atividades que propusessem tomadas de decisão em um nível introdutório, sem envolver estruturas mais avançadas como o conceito Bayesiano de probabilidade (Subjetivo). Essas questões são ricas para auxiliar na revelação dos principais motivos por que estudamos Probabilidade. Tais questões se encontram no Capítulo 6 como sugestões a serem acrescidas na sequência didática.

Em relação à sequência didática, a abordagem dos conceitos tratados levou os alunos à compreensão mais ampla da Probabilidade do que a proposta pelo livro didático adotado pela escola. Entretanto, não veio totalmente ao encontro das expectativas que desejávamos a priori, pois falhas na sequência didática foram identificadas durante a análise a posteriori.

Quanto às ideias propostas na sequência didática, constatamos pelos resultados obtidos em cada aula da experimentação e pelas entrevistas dos licenciandos, que foram significativas para o ensino de Probabilidade. Talvez teríamos tido melhores resultados na aula final se tivéssemos aplicado a sequência didática concomitantemente com as aulas regulares de Probabilidade ou se as aulas do PIBID tivessem tido a possibilidade de exigir uma cobrança efetiva, como, por exemplo, se pudessem valer como uma forma de avaliação.

Os resultados da experimentação permitiram que chegássemos a algumas conclusões em relação aos alunos. Dentre essas podemos citar que eles:

- identificaram, em relação aos conceitos de experimento determinístico e aleatório, algumas de suas características, realizando experimentos, citando exemplos e classificando-os;
- entenderam que espaços amostrais associados a experimentos não necessitam ser minimais, ou seja, pode haver mais elementos que o necessário, porém a chance de ocorrência desses elementos em excesso é nula. Com isso, perceberam a não unicidade do espaço amostral e trabalharam também com espaços amostrais infinitos. Finalmente, estudaram alguns espaços de elementos equiprováveis e não equiprováveis;
- apresentaram dificuldade em caracterizar elementos de experimentos com lançamentos simultâneos, e apresentaram também deficiências em conteúdos anteriores, tais como, notação de intervalo, símbolo de infinito, notação de conjunto; interpretação de expressões do tipo “pelo menos um”;
- confrontaram os conceitos Frequentista e Clássico de Probabilidade;
- resolveram questões de Probabilidade Geométrica, embora apresentassem dificuldades em Geometria plana;
- e construíram intuitivamente o conceito de Probabilidade Condicional, através de uma situação didática.

Percebemos, ainda, que os alunos que frequentavam as aulas estavam motivados, visto que participaram ativamente das mesmas, mesmo essas sendo no contraturno e sem nenhuma obrigatoriedade. Além disso, o aproveitamento por atividade em cada aula foi significativo, embora na última aula o índice de acertos tenha sido abaixo do esperado. Reconhecemos que talvez este resultado seja consequência da falta de mecanismo para uma cobrança efetiva nas aulas do PIBID. Desta forma, os alunos participantes acabam não se dedicando aos estudos fora do horário da aula. Por outro lado, verificamos que as aulas do PIBID, por serem no contraturno, se tornam pouco atrativas, haja vista que o número de alunos que frequentam o PIBID em comparação aos alunos das classes na escola é muito pequeno.

Devido às considerações acima, julgamos que as atividades da sequência didática facilitaram o ensino de Probabilidade em um nível introdutório. Gostaríamos de explorar melhor os conceitos com mais atividades e exercícios, mas por falta de tempo tivemos que restringi-los.

Acreditamos que a sequência didática proposta neste trabalho (acrescida das sugestões finais) possa ser um guia na construção do raciocínio probabilístico e na elaboração de planos de aula sobre o conteúdo de Probabilidade. Além disso, esperamos que ela possa servir também como exemplo de base para a criação de outras sequências didáticas destinadas à introdução de outro conteúdo, ou até mesmo desse conteúdo aprimorando a nossa proposta inicial.

O estudo do livro didático nos forneceu dados sobre os conceitos discutidos, e nos revelou tendências e limitações do tratamento dado a esses conceitos. Este estudo nos permitiu comparar conceitos explorados pelo livro e pela sequência didática. A proposta de inserir novos conceitos não abordados no livro didático adotado pela escola em que se deu a pesquisa foi o principal foco da nossa pesquisa.

Em relação aos conceitos iniciais de Probabilidade, o livro didático não apresenta a definição de experimentos determinísticos em contraponto aos experimentos aleatórios. Nele também não são trabalhadas as ideias da não unicidade do espaço amostral, e os exemplos se restringem a espaços finitos e equiprováveis, sequer mencionando o exemplo clássico da moeda viciada ou do dado viciado.

Em relação às definições de Probabilidade, percebemos que a concepção Frequentista é apresentada apenas para caracterizar equiprobabilidade, necessária na definição Clássica. Além disso, o livro não propõe a realização na prática de experimentos, apenas em nível mental. A concepção Clássica é a única apresentada, porém não se discute a impossibilidade de sua aplicação em espaços amostrais infinitos (que não os relacionados à Probabilidade Geométrica) ou não equiprováveis. A concepção Geométrica é explorada em uma única questão.

O livro apresenta as devidas propriedades da Probabilidade, explora exercícios de Probabilidade Condicional, de probabilidade de interseções e uniões de eventos. Porém, não salienta a diferença entre $\mathrm{P}(A|B)$ e $\mathrm{P}(B|A)$. Finalmente, os conceitos de dependência e independência de eventos são apresentados apenas através de algoritmos a serem memorizados.

Finalizamos evidenciando a necessidade de adequar os livros didáticos aos diversos conceitos probabilísticos, possibilitando assim que se removam as concepções errôneas da probabilidade na educação. Muitos equívocos são gerados por se enfatizar um único aspecto de um determinado conceito, daí a premência em se conscientizar e capacitar o professor sobre a necessidade de incorporar os diversos significados da probabilidade no Ensino Médio.

2) **Identificar, via a proposta criada, algumas das contribuições do PIBID na formação profissional dos licenciados em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.**

A fim de alcançarmos este objetivo, estudamos os conceitos teóricos apresentados por Shulman (1986, 1987) em relação aos tipos de conhecimento necessários para a docência. Presumimos que deve haver uma riqueza de conhecimentos a serem revelados no trabalho desenvolvido pelos licenciandos no âmbito do PIBID.

O PIBID em comparação a outros projetos para a licenciatura apresenta uma característica distinta. No PIBID o convívio do licenciando com toda a unidade escolar é contínuo. Além disso, este licenciando é o professor da turma e os alunos o enxergam como tal. Este fato foi destacado pelos licenciandos como positivo para sua formação profissional.

No PIBID, de uma forma geral, os licenciandos se questionavam sobre como inserir determinado conceito por intermédio de uma atividade que poderia tornar a aula mais atrativa e facilitar a construção e aquisição do conceito a ser estudado. Identificamos a iniciação de um hábito investigativo e reflexivo sobre esta prática e sobre as suas próprias práticas. Além disso, no trabalho de elaboração de atividades, eles mobilizaram tanto conhecimento de conteúdo quanto conhecimento pedagógico do conteúdo. Esta foi uma atividade recorrente na prática dos licenciandos no período que os acompanhamos e foi um fator diferencial no processo de iniciação à docência dos mesmos.

Durante a análise a posteriori da sequência didática, tentamos dar visibilidade aos conhecimentos que os licenciandos manifestaram durante a aplicação da sequência. Podemos citar a criação de exemplos que facilitaram o entendimento dos alunos, exemplos esses que foram essenciais na construção de alguns conceitos. Demonstraram habilidade em aproveitar algum comentário do aluno para criar uma situação didática, com a finalidade de reorganizar o seu entendimento, muitas vezes exibindo questionamentos que permitiram ao aluno confrontar o conhecimento sobre o conteúdo em questão. Tiveram sensibilidade de disponibilizar mais tempo para o desenvolvimento do conteúdo quando perceberam que isto se fazia necessário, permitindo que os alunos se dedicassem às resoluções das questões. Criaram perguntas que ajudaram os alunos a resolver as atividades, embora em alguns momentos essas perguntas tenham sido excessivas, induzindo-os demais. Criaram estratégias para estimular a participação dos alunos, como, por exemplo, “jogo” de perguntas e respostas.

As entrevistas nos permitiram considerar que o PIBID acrescentou muito mais em conhecimento de conteúdo quando os licenciandos aplicaram os planejamentos. Quando se envolveram em atividades apenas de auxílio, a aquisição deste conteúdo se mostrou deficitária. Por outro lado, aprenderam métodos diferentes, com atividades diversificadas e jogos como instrumentos para o ensino. Adquiriram um conjunto de atividades durante a sua formação de cuja elaboração e aplicação participaram, e que podem ser utilizadas futuramente. Não podemos também nos furtar de mencionar que aprenderam algumas maneiras de ensinar os conteúdos trabalhados. Este conhecimento adquirido, do qual foram coautores, é o que Shulman (1986, 1987) chama de conhecimento pedagógico de conteúdo.

Além disso, em relação ao conhecimento curricular, os licenciandos elaboraram atividades e roteiros que foram seguidos durante a aplicação dessas atividades, aprenderam a organizar este material e reavaliaram os planejamentos após a sua aplicação.

Temos fortes evidências de que os licenciandos que aplicaram os planejamentos adquririram conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico de conteúdo e conhecimento curricular no âmbito do PIBID. Em geral, percebemos que a experiência obtida foi bastante positiva, principalmente para ministrarem aulas plenas de significado para os alunos, evitando assim a repetição dos conceitos e exemplos do livro didático.

8.2 Sugestões para futuras investigações

Ortiz (2002) apresenta em seus estudos uma implicação didática do seu trabalho. Implicação esta, a nosso ver, que cabe também ser apresentada aqui, pois compartilhamos da mesma ideia. Como Ortiz, consideramos que os conceitos probabilísticos, todos, não apenas os que trabalhamos, apresentam grande complexidade para o nível introdutório. Assim, é necessário ampliar o tempo dedicado à introdução e aprendizagem da probabilidade. Faz-se, portanto, necessário um estudo com a finalidade de replanejar um currículo em que a Probabilidade possa começar a ser ensinada desde o Ensino Fundamental até o Ensino Médio, apresentando os diversos conceitos sucessivamente, com níveis crescentes de complexidade, seguindo a ideia de um currículo em espiral.

Nosso estudo centrou-se unicamente em um tema, Probabilidade, no Ensino Médio, no âmbito do PIBID. É claro que cada um desses parâmetros (tema, nível e contexto) pode ser alterado e dar lugar a um estudo complementar ou a um novo estudo. Neste sentido, por exemplo, poder-se-ia pensar em uma sequência didática voltada para o Ensino Fundamental, realizando um estudo preliminar dos conceitos de probabilidade que podem ser adequados a este nível.

Como a pesquisa foi no âmbito do PIBID (um laboratório real que reúne os alunos do Ensino Médio e os licenciandos em Matemática), sugerimos que o PIBID possa ser utilizado como campo de pesquisa ou objeto de pesquisa para diversos estudos vinculados aos saberes docentes e à aprendizagem matemática.

Além disso, nossa "análise" em relação ao livro didático foi restrita ao livro adotado pela escola em que se deu a pesquisa. Outro estudo possível é o da análise dos diversos conceitos de Probabilidade em uma amostra de livros didáticos, tanto para o Ensino Médio quanto para o Ensino Superior.

Outro aspecto não aprofundado em nossa pesquisa, e de grande relevância para a Educação Matemática, é a discussão filosófica sobre as diferentes interpretações do conceito de Probabilidade e seus contextos históricos, e a implicação desses conceitos na prática em sala de aula.

Outro estudo relevante para a Educação Matemática é a análise das principais concepções errôneas da Probabilidade, sob um ponto de vista cognitivo, que levam à má tradução por parte dos alunos de certos resultados de pesquisas divulgados na mídia, comprometendo assim uma plena literacia estatística no mundo imerso em incertezas em que vivemos.

Finalmente, sugerimos o enfoque de exploração do tronco comum da análise Combinatória e da Probabilidade via Teoria da Medida, de forma a discutir aspectos cognitivos e psicopedagógicos no tratamento dessas duas disciplinas da Matemática, revelando o que há de similaridades e diferenças entre elas, em especial o cotejo dos significados de contar e medir na Matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A.; COUTINHO, C. D. Q. E. S. **Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd**. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática, Florianópolis, SC, v. 3, p. 62-77, 2008.

ANWAY, D; BENNETT, E. **Common Misperceptions in Probability among Students in an Elementary Statistics Class**. Paper presented at the ARTIST Roundtable Conference on Assessment in Statistics Held at Lawrence University, August 1-4, 2004

ALVES, R. M.; REIS, D. L.; FRANCO, D. C. C. **O uso de softwares no ensino de geometria em um programa institucional de bolsa de incentivo a docência-PIBID**. In: Anais do XIII CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

ARTIGUE, M. **Didactic Engineering**. Dans Douady, R. & Mercier, A. (eds.), Research in Didactics of Mathematics. La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 41-65, 1992.

BANCO de questões de matemática. Disponível em: <http://www.professor.bio.br/matematica/provas_vestibular_detalhe.asp?universidade=Uel-2006>. Acesso em: 10 abr. 2012.

BATANERO, C**. Significados de La Probabilidad em la Educación Secundaria**. RELIME: Revista Latinoamericana de Investigacion en Matemática Educativa, vol. 8, Num. 3, pp. 247-263, noviembre, 2005.

BELTRAME, R.S. Lista de exercícios sobre probabilidade do Colégio estadual José Alfredo de Almeida. Disponível em: <http://dc357.4shared.com/doc/WvnbdxcN/preview.html>. Acesso em: 10 abr. 2012.

BRASIL, MEC, SEB. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEB, 2006.

CABRAL Jr, R. S.; TRALDI Jr, A. **Abordagem das Noções Iniciais de Probabilidade em uma Perspectiva Construtivista.** In: Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática Comunicação Científica, Salvador, 2010.

CARRANZA, P.; FUENTEALBA, J. **Dualidad de la probabilidad y enseñanza de la estadística.** UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Num. 24, pp. 57-58, Dezembro, 2010.

CARVALHO, T. F. M. A. **Impactos e desafios do projeto PIBID** - Matemática da UEL (Universidade Estadual de Londrina). In: Anais do XIII CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

COLA da Web. Exercícios resolvidos de matemática, Probabilidade. Disponível em: <http://www.coladaweb.com/exercicios-resolvidos/exercicios-resolvidos-de-matematica/probabilidade>. Acesso em: 7 abr. 2012.

COLEÇÃO Explorando o Ensino. Matemática: Contagem, Probabilidade e Estatística. Curiosidades, vol. 3. Cap. 4 e 5. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12583%3Aensino-medio&Itemid=859>. Acesso em: 6 abr. 2012.

CUNHA, C. Lista de exercícios sobre probabilidade. Disponível em: <http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=8&ved=0CGMQFjAH&url=http%3A%2F%2Ffiles.matematicanoenem.com.br%2F200000086-196b019c39%2FPROBABILIDADE%2520II.pdf&ei=836ET4yOGKbd0QGg1_W5Bw&usg=AFQjCNFWe6w2HwKSxIz4JN7XQlVRt0Kleg&sig2=-Bp-4-LfUPEJuT1c35VIeQ>. Acesso em: 10 abr. 2012.

DANTE, L. R. **Matemática - Contexto e Aplicações, vol. 2.** 1ª Ed. Ática, São Paulo, 2011.

DUARTE, R. **Entrevistas em pesquisas qualitativas**. Educar em Revista. 2004. Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=155017717012.>. Acesso em: 15 set. 2012.

EVANGELISTA, C. D.; JOSÉ, P. M.; BARBOSA, P. W. **Educação Matemática: Influências do PIBID nas Práticas de Ensino**. In: Anais do XIII CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

EXERCÍCIOS sobre probabilidade. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/50145528/probabilidades01>. Acesso em: 10 abr. 2012.

HOWARD L. ROLF. **Finite Mathematics, Enhanced Edition** (with Enhanced WebAssign with EBook for One Term Math and Science Printed Access Card). 7 ª Ed., Cengage Learning, 2010. Disponível em: <http://books.google.com.br/books?id=5Azz4_O9cggC&pg=PA499&dq=Kerrich+e+Buffon&hl=pt-BR&sa=X&ei=PWKAT6aPJabb0QGZu7GACA&ved=0CDIQ6AEwAA#v=onepage&q=Kerrich%20e%20Buffon&f=false>. Acesso em: 4 abr. 2012.

LISTA de exercícios de Estatística, 2º semestre de 2011. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/67752016/lista-01-estatistica>. Acesso em: 7 abr. 2012

MACHADO, S. D. A. et al. **Engenharia didática in: Educação Matemática: uma introdução.** São Paulo: EDUC, 2002, p. 197-208.

MARIM, V.; ANDRAUS, C. C. N. **Os desafios da formação docente em Matemática no âmbito do PIBID**. In: Anais do XIII CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

MIZUKAMI, N. G. M. **Aprendizagem da docência: algumas contribuições de L. S. Shulman.** Revista Educação. Edição: 2004 - Vol. 29 - N° 02. Disponível em: <http://coralx.ufsm.br/revce/revce/2004/02/a3.htm>. Acesso em: 6 abr. 2012.

NEVES, C. M. **Apresentação da diretora de Educação Básica Presencial**. **II Encontro de Coordenadores Institucionais do PIBID**. Brasília, 2011. Disponível em: < http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid/ii-encontro-de-coordenadores-institucionais-do-pibid>. Acesso em: 6 abr. 2012.

NOGUEIRA, K. C. P. A. et al. **A Contribuição do PIBID/CAPES para a Formação de Professores: a Experiência da FEG/UNESP**. In: Anais do XIII CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

ORTIZ, J. J. **La probabilidad en los libros de texto. Grupo de Investigación en Educación Estadística.** Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, 2002.

PAIS, L.C. **Didática da Matemática: uma Análise da Influência Francesa**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2002, p. 99 – 108.

PAIVA. M. **Matemática, volume único**. 1ª Ed., São Paulo, Moderna, 2005.

PEREIRA, S. I; PEREIRA, S.V.G. **A porta dos Desesperados (parte 1)**. Boletim GEPEM, V51, p.102 e 103, 2007.

______________________________ **A porta dos Desesperados (parte 2)**. Boletim GEPEM, V52, p.105 e 107, 2008.

PORTARIA nº 260, de 30 de dezembro de 2010 - **Normas Gerais – PIBID**. Disponível em: <http://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid>. Acesso em: 6 abr. 2012.

PRANKE, A.; et al**. Matemática e interdisciplinaridade no Ensino Médio: experienciando possibilidades no projeto PIBID/UFPel**. In: Anais do XIII CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

PROCESSO seletivo da Universidades Estadual de Goiás. **Prova de matemática**. Disponível em: <http://www.vestibular.ueg.br/PDFs/ps/14/provas/Matematica.pdf>. Acesso em: 10 abr. 2012.

PROJETO Fundão, Matemática, UFRJ. **Grupo de Tecnologias Aplicadas ao Ensino de Matemática**. Portal do professor. Disponível em: <http://www.projetofundao.ufrj.br/matematica/atividades/portaldoprofessor/pdf/ProbCondProfessor.pdf>. Acesso em: 7 abr. 2012.

REPORTAGEM da Lâmpada que não se apaga. Disponível em : <http://mitologiasemisterios.blogspot.com/2010/08/lampada-que-nao-queima.html>. Acesso em: 30 set. 2011.

RIBEIRO, J. **Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 2**: Ensino Médio. São Paulo: Scipione, 2010.

ROCHA, N. C. S; FERNANDES, V. L**. Oficina, Probabilidade e Estatística.** Firjan, 2012.

SATÉLITE que deve cair na terra tem mais de cinco toneladas. **Jornal Hoje**, Rio de janeiro, 23 set. 2011. Disponível em: <http://g1.globo.com/videos/jornal-hoje/t/edicoes/v/satelite-que-deve-cair-na-terra-tem-mais-de-cinco-toneladas/1639944/>. Acesso em: 30 set. 2011.

SCHEFFER, F. N. et al. **Implementação do laboratório de matemática numa escola pública: uma atividade do PIBID**. In: Anais do XIII CIAEM. Recife, Brasil, 2011.

SEDUCRJ. Secretaria de Estado de Educação do Rio de Janeiro. **Currículo Mínimo**, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2011.

SHULMAN, L. S. **Knowledge and teaching: Foundations of the new reform**. Harvard Educational Review Feb. 1987: 1-22.

______________. **Those who understand: Knowledge growth in teaching**. Educational Researcher Feb. 1986: 4-14.

SILVA, A. I. **Probabilidades: a visão laplaciana e a visão frequentista na introdução do conceito**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifica Universidade Católica se São Paulo (PUC – SP), 2002.

STADELMANN, D. **Les conceptions de la probabilité: Comparaison des différentes approches.** Travail de séminaire. Université de Fribourg / Universität Freiburg Faculté des sciences économiques et sociales, Département d'économie quantitative. Av. Beauregard 9, 1700 Fribourg, Juillet 2003.

VIALI, L.; OLIVEIRA, P. I. F. **Uma Análise de Conteúdos de Probabilidade em Livros Didáticos do Ensino Médio**. In: Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Brasília, 2009.

VIALI, L. Apostila IV – **Elementos de Probabilidade**. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~viali/sociais/mat02214/material/apostilas/apostila.htm>. Acesso em: 7 abr. 2012

WIKIPÉDIA. Enciclopédia livre. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Aleatoriedade>. Acesso em: 20 agos. 2011

____________. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Acaso>. Acesso em: 20 agos. 2011.

Anexos

ANEXO 1. ROTEIRO DE ENTREVISTA INICIAL COM OS LICENCIANDOS

Dados Pessoais

1. Nome: ____
2. Idade: ____
3. E-mail: ____
4. Curso: ____
5. Período: ____
6. Ano de ingresso na UFRJ: ____

Informações sobre o PIBID

7. Você tem alguma experiência com aulas particulares? Sim ( ) Não ( )

Se sim, há quanto tempo? ____

8. Você tem alguma experiência em sala de aula? Sim ( ) Não ( )

Se sim, há quanto tempo? ____

Em quais instituições? ____

9. Por que você quis participar do PIBID? ___________________________________

10. Quais são as suas expectativas em relação ao PIBID? ______________________

11. Como você se sente, hoje, para entrar em uma sala de aula na posição de professor de Matemática? ____

12. O que você considera importante na formação inicial de um professor de Matemática? ____

13. Em sua opinião, qual deve ser o seu papel no PIBID? ______________________

14. Em sua opinião, de que maneira o PIBID poderá ajudar na sua formação? __________

Informações gerais:

15. Qual a fonte que utiliza para preparar as aulas do PIBID, ou seja, de onde retira o conteúdo a ser dado em sala de aula? ____

A pergunta está no singular para não induzir, obrigatoriamente, uma resposta no plural. Caso responda que tem varias fontes, estas serão registradas e, caso não, perguntar, se usa outra fonte.[1]

Se a fonte citada for algum livro didático:

Em qual livro (nome e autor)?____

Se a fonte citada for algum site:

Em qual site? ____

16. Dessas fontes que citou anteriormente, tem alguma que você utiliza com mais frequência? Não ( ) Sim ( ) Se sim, qual? ______________________________________

Informações sobre como situa o conteúdo de probabilidade no ensino

17. Qual a importância de se trabalhar com probabilidade no ensino? __________

Aonde você acha que Probabilidade será utilizada na vida escolar, na vida profissional e no cotidiano do aluno? ____

18. Quais são os conceitos sobre probabilidade que você considera essenciais para serem trabalhados em sala de aula?_______________________________________

A intenção é que eles consigam citar alguns dos principais tópicos em probabilidade, como por exemplo: experimento aleatório; experimento determinístico; espaço amostral; evento; evento equiprovável; evento não equiprovável; algumas das concepções de probabilidade; probabilidade da união, interseção, condicional e alguns axiomas.

Mesmo que tenham respondido à questão anterior, perguntarei se desejam consultar algum livro didático. Caso desejem, disponibilizarei para consulta os três livros que seriam utilizados na análise do livro didático:

- *Matemática, volume único. Manuel Paiva. 1ª Ed., São Paulo, Moderna, 2005;*
- *Matemática - Contexto e Aplicações, vol. 2. Dante. 1ª Ed. Ática, São Paulo, 2011.*
- *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 2: Ensino Médio. Jackson Ribeiro. São Paulo: Scipione, 2010.*

19. Ao folhear o livro, ler os tópicos sobre probabilidade, você sentiu falta de algum tópico que julga importante de ser trabalhado em sala de aula e que não achou nesses livros? Sim ( ) Não ( )

    Se sim, qual tópico? ____

    Caso tenha citado algum tópico:

    Por que julga este tópico importante? ____

[1] Os trechos em itálico são para orientar o entrevistador na condução da entrevista.

20. Já deu aula sobre probabilidade alguma vez? Sim ( ) Não ( )

    Se sim, quais foram os conceitos que trabalhou? ________________________________

    Retirou o conteúdo de qual fonte de informação? ________________________________

    Caso tenha retirado de algum livro:

    Em qual livro? ____________________________

    Caso tenha retirado de algum site:

    Em qual site? ______________________________

21. Enquanto aluno, você lembra se teve alguma dificuldade de entender alguns dos tópicos que citou anteriormente? Sim ( ) Não ( )

    Se sim, qual tópico? ____

Informações específicas sobre o conteúdo de Probabilidade

22. Já estudou os assuntos abaixo?

    a) Experimento aleatório: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

    Caso sim, em que série? ____

    Em que ano? ____

    Em qual livro didático? ____

    Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo?______________

    b) Experimento determinístico: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

    Caso sim, em que série? ____

    Em que ano? ____

    Em qual livro didático? ____

    Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo?______________

    c) Espaço amostral: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

    Caso sim, em que série? ____

    Em que ano? ____

    Em qual livro didático? ____

    Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo?______________

    d) Evento: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

    Caso sim, em que série? ____

Em que ano? ____

Em qual livro didático? ____

Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo?______________

e) Evento equiprovável: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

Caso sim, em que série? ____

Em que ano? ____

Em qual livro didático? ____

Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo?______________

f) Evento não equiprovável: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

Caso sim, em que série? ____

Em que ano? ____

Em qual livro didático? ____

Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo?______________

g) Concepção Clássica (Laplaciana) da Probabilidade: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

Caso sim, em que série? ____

Em que ano? ____

Em qual livro didático? ____

Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo? _____________

h) Concepção Frequentista de Probabilidade: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

Caso sim, em que série? ____

Em que ano? ____

Em qual livro didático?____

Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo? _____________

i) Base Axiomática: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

Caso sim, em que série? ____

Em que ano? ____

Em qual livro didático?____

Em relação a este assunto, você consegue dar um exemplo? ______________________

j) Probabilidade Condicional: Sim ( ) Não ( ) Não lembra se viu ( )

Caso sim, em que série? ____

Em que ano? ____

Em qual livro didático? ____

Em relação a este assunto, você consegue defini-lo e dar um exemplo?______________

Informação adicional.

____

Data: / / .

ANEXO 2. ROTEIRO DE ENTREVISTA FINAL COM OS LICENCIANDOS

Dados Pessoais

1. Nome: ____

Informações sobre o PIBID

2. Na entrevista inicial você afirmou que tinha/não tinha experiência em sala de aula. Depois deste semestre participando do PIBID, você considera que adquiriu (mais) experiência em sala de aula? Sim ( ) Não ( )

Consegue citar alguma experiência relevante? __________________________________

3. Em relação à entrevista inicial, você comentou sobre as suas expectativas em relação ao PIBID. Suas expectativas foram alcançadas? Sim ( ) Não ( )

Se sim, quais? ____
Se não, por quê? ____

4. Como você se sente, hoje (depois deste semestre participando do PIBID), para entrar em uma sala de aula na posição de professor de Matemática?____________________

5. Terminado o último semestre de 2011, como você qualificaria o seu papel no PIBID neste período?____

6. Em sua opinião, de que maneira este semestre no PIBID ajudou em sua formação? ____

7. Quais foram as dificuldades vivenciadas **pelo PIBID** (dentro da escola, dentro da universidade, dentro do próprio grupo dos bolsistas)? ___________________________

   O que você sugere para contornar esta situação? ______________________________

8. Quais foram as dificuldades **que você** encontrou ao desenvolver suas atividades no PIBID (escola, universidade e grupo dos bolsistas)? ___________________________

   O que você sugere para contornar esta situação? ______________________________

9. O que você vê de mais positivo no grupo (todos os bolsistas do subprojeto da Matemática) do PIBID ? ____

10. Quais são, no seu ponto de vista, as deficiências do grupo (todos os bolsistas do

subprojeto da Matemática) PIBID? ____

O que você sugere para contornar esta situação? ________________________________

11. Quais foram os materiais (recursos didáticos) desenvolvidos pelo PIBID? __________

12. Quais foram os conteúdos trabalhados nas turmas do PIBID? _____________________

13. Você adquiriu algum conhecimento novo em relação a esses conteúdos?

    Sim ( ) Não ( )

    Caso sim, qual? ____

14. Desses conteúdos que você citou, existia algum que não dominava muito bem e mesmo assim teve que dar aula sobre ele?

    Sim ( ) Não ( )

    Caso sim, quais? ____

    O que fez para contornar esta dificuldade? ______________________________________

15. Quais os conteúdos ou conceitos que os alunos apresentaram mais dificuldades? _____

16. Você poderia identificar as contribuições do PIBID para os alunos? ________________

17. O que o PIBID acrescentou nos seus conhecimentos de conteúdos específicos da matemática? ____

18. O que o PIBID acrescentou nos seus conhecimentos pedagógicos e metodológicos? ____

19. O que o PIBID acrescentou em relação aos planejamentos realizados, planos de aula, de ensino, do currículo? ____

20. Você teve alguma dificuldade para cumprir as tarefas desenvolvidas no PIBID? _____

    A que você atribui esta dificuldade? ____

21. O PIBID atrapalhou o seu desenvolvimento nas matérias cursadas na universidade? __

    Justifique. ____

22. Quais as experiências que a universidade ofereceu para a sua formação profissional de professor de matemática (sem incluir o PIBID)? ________________________________

    E especificamente em relação ao PIBID? ______________________________________

Informações sobre como situa o conteúdo de probabilidade no ensino

23. Qual a importância de se trabalhar com probabilidade no ensino? ________________ Onde você acha que este conteúdo será utilizado na vida escolar, na vida profissional e no cotidiano do aluno? ____

24. Quais são os conceitos de probabilidade que você considera essenciais para serem trabalhados em sala de aula?____

Neste momento disponibilizarei os três livros que a princípio seriam utilizados na análise do livro didático:

5. *Matemática, volume único. Manuel Paiva. 1ª Ed., São Paulo, Moderna, 2005;*
6. *Matemática - Contexto e Aplicações, vol. 2. Dante. 1ª Ed. Ática, São Paulo, 2011.*
7. *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 2: Ensino Médio. Jackson Ribeiro. São Paulo: Scipione, 2010.*

Nosso propósito é que eles possam observar quais são os conceitos de probabilidade trabalhados nos livros didáticos do Ensino Médio.

25. Ao folhear o livro, ler os tópicos sobre probabilidade, você sentiu falta de algum tópico que julga importante ser trabalhado em sala de aula e que não achou nesses livros?

    Sim (   )   Não ( )

    Se sim, qual tópico?____

    Caso tenha citado algum tópico, por que julga este tópico importante?_____________

Informações específicas sobre o conteúdo de Probabilidade

26. O que tornou este tópico fácil ou difícil para você ensiná-lo? ____________________

27. O que os estudantes trouxeram para as situações de aprendizagem (concepções, preconcepções e concepções errôneas)? _______________________________________

28. Quais as dificuldades você observou que os alunos apresentaram? ________________

29. Na sequência didática trabalhamos alguns conceitos sobre probabilidade. Você consegue **definir** e dar **exemplo** dos seguintes conceitos:

    a) Experimento aleatório; ____

b) Experimento determinístico; ____

c) Espaço amostral; ____

d) Evento; ____

e) Espaço amostral equiprovável e não equiprovável; __________________________

f) Concepção Clássica (Laplaciana) da Probabilidade; __________________________

g) Concepção Clássica da Probabilidade;_____________________________________

h) Axiomas da Probabilidade____

i) Probabilidade Condicional; ____

j) Eventos Dependentes e Independentes; ____________________________________

Informações sobre a sequência didática e o PIBID

30. Comparando os conceitos da probabilidade trabalhados na sequência didática e os conceitos trabalhados nos livros, o que você observa? __________________________

31. Deixo a seguinte pergunta para reflexão: Será que o mesmo não acontece com os demais conteúdos do Ensino Médio? ____

    Comente sobre este fato. ____

    Diante desta realidade o que cabe a você fazer como profissional?________________

32. Se você tivesse que aplicar em outra oportunidade esta mesma sequência didática o que você mudaria?____

33. A proposta de se trabalhar com todos esses conceitos no ensino médio foi viável ou não? ____

34. O que a sequência didática do conteúdo de probabilidade acrescentou na sua formação? ____

Informação adicional

____

Data: / / .

ANEXO 3. PLANEJAMENTO DA AULA 1

Nesta aula iremos introduzir: a ideia da aleatoriedade e do acaso; os conceitos de: experimento aleatório, experimento determinístico, espaço amostral e evento. Nossa intenção é permitir que os alunos consigam:

1. Expor o que entendem das palavras aleatório e acaso.
2. Identificar situações do acaso (aleatoriedade) no cotidiano.
3. Diferenciar experimento aleatório de experimento determinístico.
4. Escrever alguns espaços amostrais de determinados experimentos aleatórios.
5. Perceber a não singularidade dos espaços amostrais.
6. Saber que existem espaços amostrais finitos e infinitos.
7. Identificar os subconjuntos dos espaços amostrais como eventos.
8. Diferenciar os conceitos: experimento determinístico, experimento aleatório, espaço amostral e evento.

Ao elaborar a **Aula 1** tentamos valorizar os conhecimentos prévios dos alunos sobre as palavras aleatoriedade e acaso. Nesta primeira atividade nossa intenção é permitir que possam: refletir sobre o que significa aleatoriedade e acaso; discutir, entre eles, o significado dessas duas palavras; e expor suas observações.

Descrição da Atividade 1 (Introdução)
Utilizando o projetor, os licenciandos, apresentarão as palavras <u>aleatoriedade</u> e <u>acaso</u> e perguntarão: o que significam essas duas palavras?

Após a discussão, os licenciandos apresentarão as definições formais das palavras aleatoriedade e acaso por intermédio do projetor.

Formalização - Definição formal retirada da Wikipédia:
A palavra **aleatoriedade** é utilizada para exprimir quebra de ordem, propósito, causa, ou imprevisibilidade.
Acaso é algo que surge ou acontece sem motivo ou explicação aparente. Algo que acontece sem ser explicado por nenhuma relação com outra(s) coisa(s), nem simultânea(s) nem precedente(s), isto é, sem qualquer determinação. Neste sentido, o acaso se opõe ao determinismo.

Neste momento, nossa intenção é reforçar a credibilidade do que possivelmente os alunos falaram na discussão oral. Caso algum aluno venha apresentar qualquer significado equivocado dessas duas palavras, cabe aos licenciandos a sensibilidade de tentar sanar este equívoco. Desta maneira, estaremos preparando o raciocínio que será utilizado ao longo da aula. Além disso, estaremos criando condições, por meio da discussão, para que os alunos alcancem o objetivo 1: expor o que entendem das palavras aleatório e acaso.

Descrição da Atividade 2 (Aplicação)
Será projetada uma reportagem que apresenta uma situação da aleatoriedade no cotidiano. A reportagem será exposta por intermédio de um vídeo. Após, os licenciandos abrirão um espaço para que os alunos possam comentar sobre ela, caso desejem.

Apenas para título de ilustração, segue uma pequena introdução do que se trata a reportagem: "*Ninguém sabe exatamente a hora e muito menos o local. Um satélite espacial de 5 toneladas, do tamanho de um ônibus, vai cair na Terra nas próximas horas. Vamos ver qual a probabilidade dele cair aqui no Brasil...".* A reportagem foi exibida pelo Jornal Hoje, no dia 23 de setembro de 2011.

Acreditamos que, por intermédio da reportagem, os alunos possam chegar à conclusão de que a aleatoriedade está presente em nosso cotidiano e tenham condições para realizar a próxima atividade.

Descrição da Atividade 3 (Introdução)
Os licenciandos pedirão aos alunos que apresentem exemplos de situações do dia a dia em que a aleatoriedade está presente. Isso será feito da seguinte forma: • Com essa reportagem o que podemos observar? • Vocês podem dar outros exemplos da aleatoriedade no nosso dia a dia?

Nosso objetivo é permitir que possam identificar situações aleatórias presentes no cotidiano deles e expor essas situações oralmente para a turma.

Continuação da Atividade 3
Durante a discussão, os licenciandos escreverão no quadro os exemplos apresentados pelos alunos e também alguns exemplos de experimentos determinísticos. Seguem alguns exemplos do que deverá ser escrito: • Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima (experimento aleatório). • Se o litro da gasolina está custando R$ 2,65 e vou comprar *x* litros, quanto irei pagar? (experimento determinístico). • Lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima (experimento aleatório). • Sortear uma bolinha no bingo e verificar o número sorteado (experimento aleatório). • Abandonar um corpo no vácuo em queda livre a partir de uma altura conhecida e estimar o tempo gasto para este corpo atingir o solo (experimento determinístico). Os licenciandos lerão em voz alta os exemplos escritos no quadro. Caso os alunos ainda não tenham

percebido que não existem apenas situações aleatórias, ou mesmo que tenham percebido e exposto algum comentário, a intenção mais uma vez é evidenciar esta diferença com a leitura dos exemplos e permitir que eles discutam. Mesmo depois da leitura, caso ninguém tenha identificado algum problema, perguntaremos:

- Esta situação tem algo de errado?
- O que está errado?

Nossa intenção é, por intermédio desta atividade, instigar a percepção dos alunos para que possam, sozinhos, perceber que alguns destes não representam situações aleatórias. Desta maneira, estaremos preparando-os para a discussão sobre experimentos determinísticos e aleatórios.

Após a discussão, projetaremos definições de experimento aleatório e determinístico. Destacaremos, também, as suas devidas características. Nosso objetivo é formalizar as ideias introduzidas e discutidas nas Atividades 1, 2 e 3.

Definição Formal:

Experimentos aleatórios: experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados variados, não sendo possível, portanto, a previsão lógica dos resultados do experimento. Sabemos quais são os possíveis resultados do experimento, mas não sabemos qual resultado particular ocorrerá. É um modelo, sobre o qual, de antemão não é possível explicitar ou definir um resultado particular.

Ao descrever um experimento aleatório deve-se especificar não somente que operação ou procedimento deve ser realizado, mas também o que deve ser observado.

Após a formalização, os alunos irão realizar a seguinte atividade:

Descrição da Atividade 4 (Aplicação)

Os licenciados distribuirão dados e moedas para que os alunos possam realizar os experimentos nos exemplos abaixo:

Joga-se um dado e observa-se o número da face superior.

Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se o número de caras obtidas.

Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se a sequência de caras e coroas.

Logo em seguida, os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, algumas características dos experimentos aleatórios.

Observando-se os exemplos acima pode-se destacar algumas características comuns:

1. não é possível prever um resultado particular, mas pode-se enumerar todos os possíveis;
2. podem ser repetidos inúmeras vezes sob as mesmas condições;
3. quando repetidos um grande número de vezes apresentam regularidade em termos de frequências.

Nossa intenção é permitir que os alunos realizem esses exemplos (ou experimentos) para que tenham condições de comprovar algumas características dos experimentos aleatórios que foram apresentadas anteriormente.

Formalização

Experimentos determinísticos: experimentos que ao serem repetidos várias vezes, em condições semelhantes, apresentam resultados constantes, isto é, os resultados podem ser previstos. Nestes experimentos existe a possibilidade de se fazer a previsão lógica e precisa de qual será o resultado do experimento.

Exemplos:

1. Se o litro da gasolina está custando R$ 2,65 e vou comprar *x* litros, quanto irei pagar?
2. Abandonar um corpo, no vácuo, em queda livre, a partir de uma altura conhecida e estimar o tempo gasto para este corpo atingir o solo.
3. Certa massa de gás ideal está inicialmente à temperatura de 400k e pressão de 4,0 atm. Mantendo-se o volume constante, a temperatura é reduzida para 320k. Qual será o novo valor de pressão?

A atividade a seguir tem a finalidade de fixar os conceitos formalizados anteriormente.

Descrição da Atividade 5 (aplicação)

Após a formalização dos conceitos, os licenciandos retomarão os exemplos escritos no quadro e pedirão que os alunos os classifiquem, oralmente, em experimento determinístico e aleatório.

Descrição da Atividade 6 (Introdução)

Considere os seguintes experimentos aleatórios:

A: Lançamento de uma moeda e observação da face voltada para cima.

B: Lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima.

A cada experimento aleatório podemos associar um conjunto de resultados.

c) Apresente um conjunto que contém todos os resultados possíveis do experimento aleatório "**A**".

d) Apresente um conjunto que contém todos os resultados possíveis do experimento aleatório "**B**".

Nosso intuito é introduzir, por intermédio desta atividade, o conceito de espaço associado ao experimento aleatório e a não unicidade do espaço amostral. Além disso, acreditamos que os alunos consigam associar os resultados possíveis a cada um dos experimentos aleatórios, mas suspeitamos que talvez a grande maioria dos alunos não venha utilizar uma notação de conjunto no momento de responder por meio da escrita esta atividade.

Os licenciandos, após a execução da atividade, deverão pedir aos alunos que exponham suas respostas e, caso apareçam respostas diferentes, deverão escrevê-las no quadro utilizando a notação devida de conjunto.

Em seguida os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, o conceito de espaço amostral e alguns exemplos. Neste momento, deverão pedir aos alunos que fechem as apostilas para que não se antecipem e possam ler o que será trabalhado.

Definição formal:

O Espaço Amostral

A cada experimento aleatório podemos associar **um** conjunto de resultados. O **espaço amostral** é o conjunto que contém todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

A: Lançamento de um dado e observação do número da face voltada para cima.

Podemos associar a este experimento aleatório **A,** alguns dos seguintes conjuntos de resultados:

$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $S_3 = [1, 6]$ e $S_4 = (0, +\infty)$

Após a formalização, os alunos farão a próxima atividade.

Descrição da Atividade 7 (Aplicação)

Os licenciandos farão a seguinte pergunta: o que podemos observar nesses espaços associados ao experimento aleatório A?

Os licenciandos deverão deixar os alunos falar por um momento e, caso mencionam algo equivocado, farão as devidas interrupções.

Queremos que os alunos identifiquem oralmente algumas diferenças entre os conjuntos S_1, S_2, S_3 e S_4. As diferenças são muitas e por isso acreditamos que identificarão apenas algumas delas, as mais óbvias. Talvez possam aparecer comentários do tipo: "apenas o conjunto S_1 é o espaço amostral associado ao experimento **A,** os demais não são". Neste caso, caberá aos licenciandos fazer as devidas interrupções.

A seguir os licenciandos apresentarão por intermédio do projetor as seguintes observações sobre os conjuntos S_1, S_2 e S_3:

Observações:

Para S_1: observamos que ele é o espaço amostral mais enxuto, econômico.

Para S_2: observamos que apresenta um elemento a mais que o conjunto anterior, porém a chance de ocorrer o número 7 no experimento em questão é zero. Nem por isso, este conjunto deixa de ser um espaço amostral que podemos associar ao experimento em questão.

Para S_3: observamos que é composto de todos os números reais entre os números 1 e 6, inclusive o número 1 e o número 6. Por exemplo, o número 1,2 pertence ao conjunto S_3. Este conjunto é infinito, contém infinitos números reais. Porém a chance de ocorrer, por exemplo, o número 2,8 no experimento em questão é zero. Mesmo com tudo isso, S_3 continua sendo um espaço amostral associado ao experimento em questão.

Descrição da Atividade 8 (Aplicação)

Os licenciandos pedirão aos alunos que apresentem oralmente as observações para o conjunto S_4, de acordo com o que foi exposto para os conjuntos S_1, S_2 e S_3.

Acreditamos que os alunos irão apresentar inúmeras dificuldades devido à notação de intervalo e ao símbolo do infinito. Talvez não consigam expor observação alguma, por não se lembrarem da notação de intervalo usada. Caso isto ocorra, os licenciandos deverão utilizar as dúvidas para relembrar as notações de intervalos necessárias. Provavelmente, após os esclarecimentos das dúvidas apresentadas, os alunos poderão expor algumas observações. Caso apresentem alguma observação errada, os licenciandos deverão fazer as devidas interrupções com a finalidade de sanar o equívoco.

Após, os licenciandos apresentarão algumas observações do conjunto S_4 e outros exemplos.

Para S_4: observamos que é composto de todos os números reais não negativos. Por exemplo, os números π, $\sqrt{2}$, e 235,021 pertencem ao conjunto S_4. Este conjunto é infinito e contém todos os conjuntos anteriores. Porém a chance de ocorrer, por exemplo, o número π no experimento em questão é zero. Mesmo com tudo isso, S_4 continua sendo um espaço amostral associado ao experimento em questão.

Exemplos:

B: O tempo de reação dos pacientes ao medicamento;

$S = (0, +\infty)$

D: Um elemento radioativo emite partículas alfa. Queremos saber quantas partículas são emitidas em certo intervalo de tempo.

Temos como espaço amostral todos os números naturais maiores que zero, ou seja, $S=\mathbb{N}$.

A intenção por trás desses exemplos e observações é evidenciar a não singularidade do espaço amostral; a existência de espaço amostral finito e infinito; a importância de, ao descrevermos um espaço amostral, ficarmos atentos ao que estamos observando e mensurando. Além de tudo isto, tentarmos, com a utilização dos diferentes exemplos, evitar que os alunos possam apresentar concepções errôneas, como por exemplo: o espaço amostral é único para o experimento; só existem espaços amostrais finitos; seus elementos são sempre números.

Mais uma vez, acreditamos que os alunos possam apresentar dificuldade em relembrar a notação de intervalo, o símbolo do infinito e a notação de conjunto dos números naturais. Desta maneira, os licenciandos deverão intervir de acordo com as dúvidas apresentadas.

Descrição da Atividade 9 (Aplicação e Introdução)

Considere o experimento aleatório: lançamento simultâneo de duas moedas comuns distintas e observação de cada uma das figuras das faces voltadas para cima.

a) Determine o espaço amostral do experimento aleatório acima.

b) Determine os subconjuntos "E" do espaço amostral que satisfaçam as condições a seguir:

i) Ocorrência de duas caras.

ii) Ocorrência de duas coroas.

iii) Ocorrência de uma cara.

iv) Ocorrência de uma coroa.

v) Ocorrência de pelo menos uma cara.

vi) Ocorrência de pelo menos uma coroa.

Na Atividade 9, o item (a) tem a finalidade de fixar o conceito de espaço amostral e o item (b) tem a intenção de facilitar a introdução do conceito de evento. Acreditamos que os alunos poderão apresentar dificuldade para escrever os elementos do espaço amostral, visto que cada elemento é formado por um par de resultados. Além disso, poderão não perceber a diferença entre o elemento (cara, coroa) e o elemento (coroa, cara) deixando assim de listar algum deles.

Desta forma os licenciandos deverão estar atentos para tirar as possíveis dúvidas, pois acreditamos que alguns alunos venham perguntar como se escreve cada elemento durante a execução da atividade e se o que fizeram está correto.

Descrição da Atividade 10 (Aplicação)

Considere o experimento aleatório: Uma fábrica produz um determinado tipo de lâmpada. Deseja-se saber o tempo de vida útil desta. Ela é colocada em um ensaio em que se determina o seu tempo t de duração. Determine o espaço amostral do experimento aleatório acima.

Queremos fixar a ideia de espaço amostral infinito e trabalhar indiretamente a notação de intervalo. Nesta etapa, os licenciandos farão a correção das duas atividades anteriores e apresentarão uma reportagem, por intermédio do projetor, da lâmpada que não se apaga apenas para ilustrar a Atividade 10. Esta reportagem também servirá para justificar o motivo pelo qual atribuímos um intervalo de tempo infinito.

Em seguida, os licenciandos apresentarão a formalização da definição de evento e utilizarão a Atividade 9 para exibir exemplos de eventos.

<u>Definição Formal:</u>

Evento: É qualquer subconjunto de um espaço amostral ao qual se pode atribuir uma probabilidade de ocorrência.

Nossa intenção é apenas formalizar o conceito de evento introduzido na Atividade 9. Logo em seguida, os alunos irão elaborar uma lista de atividades para fixar os conceitos e especificidades do que foi trabalhado nesta Aula 1. As atividades deverão ser feitas até o término de duração da aula e a lista será recolhida como material de análise.

Lista 1 (Exercícios de Revisão)

1) Classifique os experimentos abaixo em aleatório ou determinístico.
   a) Lançar uma moeda e anotar a face voltada para cima.
   b) Retirar uma carta de um baralho com 52 cartas e anotar o naipe.
   c) Observar a temperatura em que a água entra em ebulição.
   d) Em uma linha de produção, após 24h de trabalho, contar o número de peças defeituosas produzidas.
   e) No alto de um prédio soltamos uma bola, anotar a velocidade que ela atinge o chão.

2) Dê o que se pede de acordo com cada situação:
   - Três moedas foram lançadas uma após a outra e foi realizada a observação do lado da moeda voltada para cima. Determine:
     a) O espaço amostral.
     b) O evento A, da ocorrência de lados distintos.
     c) O evento D, da ocorrência do primeiro sendo cara e os outros dois sendo distintos.

   - Dois dados foram lançados simultaneamente, e foi realizada a observação da face voltada para cima, determine:
     a) O espaço amostral.
     b) O evento A, da ocorrência de números pares.
     c) O evento B, da ocorrência de números iguais.
     d) O evento C, da a diferença entre eles ser menor que 4.

3) Lançamos um dado uma vez e observamos o número que aparece na face superior. Com isso, determine os eventos abaixo:
   a) O evento A, ocorrência de um número maior que 5.
   b) O evento B, ocorrência de um número menor que 7.
   c) O evento C, ocorrência de um número maior que 6.
   d) O evento D, ocorrência de um número par.
   e) O evento E, ocorrência de um número que não seja par.
   f) O evento F, ocorrência de um número múltiplo de 3.
   g) O evento G, ocorrência de um número par **ou** múltiplo de 3.
   h) O evento H, ocorrência de um número par **e** múltiplo de 3.
   i) O evento I, ocorrência de um número que não seja par e também não seja múltiplo de 3.
   j) O evento $D \cup E$.
   k) O evento $D \cap E$.
   l) O evento D^C.

Desafio: Determine um espaço amostral para o tempo de vida útil de um componente eletrônico.

Com esta lista queremos fixar os conceitos de experimento aleatório e determinístico; de espaço amostral e evento; introduzir os tipos de eventos (certo, impossível, elementar ou simples e mutuamente exclusivos) e iremos também trabalhar com a noção de espaço amostral infinito por intermédio das Questões 1, 2, 3 e do desafio respectivamente.

Optamos por manter esta aula longa, pois apesar de termos explorado muitos conceitos, julgamos que estes são mais fáceis. Com isso teremos mais tempo para trabalhar conceitos que consideramos mais complexos nas próximas aulas como, por exemplo, o conceito de probabilidade condicional.

ANEXO 4. PLANEJAMENTO DA AULA 2 (COM MODIFICAÇÕES SUGERIDAS PELA BANCA)

Nesta aula iremos introduzir as definições sobre: tipos de eventos (certo, impossível, elementar ou simples e mutuamente exclusivos); espaços amostral equiprovável e não equiprovável; conceitos Frequentista e Clássico de Probabilidade. Além disso, vamos revisar as operações de união, interseção e complementar entre os eventos. Nossa intenção é permitir que os alunos consigam:

1. Relembrar as operações entre os conjuntos: união, interseção e complementar.
2. Recordar a relação entre o uso do conectivo “e” com a operação de interseção, o uso do conectivo “ou” com a operação de união e o uso do conector “não” às vezes tomado como “nem” = “também não”, com a operação de complementar de conjunto.
3. Classificar os eventos em certo, impossível, elementar e mutuamente exclusivos.
4. Perceber que existem espaços amostrais em que seus eventos elementares possuem as mesmas chances de ocorrer e espaços amostrais em que seus eventos elementares possuem chances diferentes de ocorrer.
5. Avaliar quando um espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável.
6. Intuir o valor da probabilidade de alguns eventos.
7. Realizar alguns experimentos aleatórios e calcular as frequências absolutas e relativas dos resultados.
8. Comparar o resultado da frequência relativa do evento, calculada na atividade experimental, com o valor teórico da probabilidade.
9. Observar que à medida que se aumenta o número de repetições do experimento, a frequência relativa tende a se aproximar cada vez mais do valor teórico da probabilidade do evento estudado (Lei dos Grandes Números).
10. Calcular a probabilidade de determinados experimentos aleatórios pela definição Clássica.
11. Observar que a definição Clássica só pode ser aplicada em espaços amostrais finitos e equiprováveis.

Ao elaborar a Aula 2, planejamos iniciar pela correção dos exercícios da aula anterior, que será realizada por intermédio de um projetor. Optamos por usar o projetor, pois nos ajudará a economizar o tempo que gastaríamos escrevendo no quadro negro.

Acreditamos que após a correção e tendo destacado as especificidades de alguns eventos teremos condições de dar continuidade ao conteúdo de Probabilidade. Com isso, os licenciandos apresentarão as definições dos tipos de eventos: certo, impossível, elementar ou simples e mutuamente exclusivos, por intermédio de um projetor.

Formalização dos tipos de eventos

Evento certo: Quando um evento é representado pelo próprio espaço amostral associado ao experimento realizado.

Evento impossível: Quando um evento é caracterizado pelo conjunto vazio, ele é chamado de evento impossível.

Evento elementar ou simples: É aquele formado por um (único) elemento do espaço amostral.

Eventos mutuamente exclusivos: Quando a interseção de dois eventos é o conjunto vazio.

Após a formalização, seguirá a seguinte atividade:

Descrição da Atividade 1

Os licenciandos retomarão os exercícios corrigidos da Aula 1, mais especificamente os eventos que já haviam sidos destacados durante a correção pelas suas características para que os alunos possam classificá-los em eventos certo, impossível, simples e mutuamente exclusivos.

Nossa intenção é permitir que os alunos apliquem os conceitos sobre os tipos de eventos. Não daremos mais ênfase a essas definições, pois julgamos que se tratam apenas de nomenclaturas.

Em seguida, os licenciandos passarão duas atividades com a intenção de introduzir uma pequena discussão de espaço amostral equiprovável e não equiprovável.

Descrição da Atividade 2

Em uma turma com 50 alunos existem 32 meninas e 18 meninos. Escreveremos os nomes dos alunos em fichas todas iguais e as mesmas serão colocadas em uma urna. Sortearemos uma única ficha e observaremos se sorteamos uma menina ou um menino.

a) Escreva um espaço amostral para este experimento aleatório.
b) O que tem mais chance de ocorrer:
   ( ) O sorteio de uma menina
   ( ) O sorteio de um menino
   ( ) Ambos têm as mesmas chances de ocorrer
c) Justifique a sua resposta ao item anterior.

(Adaptada de SILVA, 2002)

Descrição da Atividade 3

No lançamento de uma moeda, observa-se a face voltada para cima.

a) Escreva um espaço amostral para este experimento.
b) O que tem mais chance de ocorrer:
   ( ) A face cara
   ( ) A face coroa

( ) Ambas possuem a mesma chance de ocorrer.

c) Justifique a sua resposta ao item anterior.

Os licenciandos pedirão que os alunos apresentem suas respostas oralmente. Em seguida, a fim de ressaltar as diferenças entre os espaços amostrais, farão as seguintes perguntas:

- O que podemos observar nos espaços amostrais das duas atividades anteriores?
- O que eles têm de diferentes?
- O que podemos concluir das chances de ocorrer os eventos elementares de cada um dos espaços amostrais?

Escolhemos essas atividades para evidenciar a existência de espaços amostrais nos quais seus eventos elementares possuem as mesmas chances de ocorrer e outros espaços nos quais seus eventos elementares possuem chances diferentes de ocorrer. Além disso, durante nossa análise do livro didático, percebemos que este conceito não é tratado pelos livros analisados.

Após a discussão das respostas, os licenciando apresentarão, por intermédio do projetor, o conceito de espaço amostral equiprovável e não equiprovável.

Formalização do conceito

Espaço amostral equiprovável: quando todos os seus eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer.

Espaço amostral não equiprovável: quando entre seus eventos elementares existe algum com uma maior chance de ocorrer, ou seja, possuem chances diferentes de acorrer.

Descrição da Atividade 04

Os licenciandos retomarão as duas últimas atividades para que os alunos possam:

a) classificar os espaços amostrais que associaram ao experimento em equiprovável e não equiprovável.

b) associar um espaço amostral de elementos equiprováveis.

c) associar um espaço amostral de elementos não equiprováveis.

Exemplo

Considere o lançamento de uma moeda viciada e a observação da face voltada para cima. Nesta moeda a chance de ocorrer cara é duas vezes maior que a chance de ocorrer coroa.

a) Determine um espaço amostral para este experimento.

Sendo C= cara e K = coroa, temos: $\Omega = \{C, K\}$

b) Este espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.

Não equiprovável, pois a chance de ocorrer o evento E={C} é duas vezes maior que a chance de *ocorrer o evento E'= {K}*

Descrição da Atividade 5

Descrição da Atividade 5: Observe os espaços amostrais referentes aos experimentos aleatórios abaixo e classifique-os em espaço equiprovável ou não equiprovável.

a) Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso na urna.

Ω_1 = {branca, vermelha, azul}.

$\Omega_2 = \{b_1, b_2, b_3, v_1, v_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$

Onde b= bola branca, v = bola vermelha e a= bola azul.

b) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2 bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso.

Ω_1 = {preta, banca, amarela}.

$\Omega_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\ a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}\}$

Onde p= bola preta, b = bola branca e a= bola amarela.

Ω_3 = {preta, preta, preta, preta, preta, preta, branca, branca, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela, amarela}.

$\Omega_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\ a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}, v_1\}$

Onde p= bola preta, b = bola branca, a= bola amarela e v = boa verde.

c) Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados e observados os números das faces de cima.

$\Omega_1 = \{(1, 1), (1, 2),..., (1, 6),..., (6, 6)\}$

$\Omega_2 = \{(a, b): a, b \in \mathbb{R}\}$

Escolhemos o exemplo e Atividades 4 e 5 com a intenção de que os alunos apliquem os conceitos de espaço amostral equiprovável e não equiprovável.

Neste momento, já foram trabalhados os conceitos iniciais, ou seja, experimento determinístico, aleatório, espaço amostral (finito, infinito, equiprovável e não equiprovável) e eventos (tipos de eventos), por isso julgamos que podemos introduzir a noção de mensurar o acaso. Para isso, os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, as seguintes perguntas:

Descrição da Atividade 6

1. Como podemos medir o acaso?
2. Como podemos atribuir um valor numérico para as chances de ocorrer um determinado evento?
3. Vocês conseguem responder:

a) Qual é a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda comum? Justifique.
b) Qual é a probabilidade de sair coroa no lançamento de uma moeda comum? Justifique.
c) Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado comum? Justifique.
d) Qual é a probabilidade de sair um número ímpar no lançamento de um dado comum? Justifique.
e) Qual a probabilidade de sair um número maior que 6 no lançamento de um dado comum? Justifique.
f) Qual a probabilidade de sair um número menor que 7 no lançamento de um dado comum? Justifique.
g) Qual é a probabilidade de sair o número 3 no lançamento de um dado comum? Justifique.

Nossa intenção com as Questões 1 e 2 é aguçar a curiosidade dos alunos para que possam pensar como podemos medir as chances de ocorrer determinados eventos. No item 3 queremos que os alunos utilizem as suas intuições ao atribuírem valores numéricos à chance de ocorrer um determinado evento. Em seguida, os alunos realizarão a seguinte atividade:

Descrição da Atividade 7

Os licenciandos pedirão que os alunos realizem, em duplas, o seguinte experimento: lançar uma moeda comum 10 vezes e anotar a face obtida em cada lançamento em uma tabela com as frequências absolutas e relativas.

Tabela das frequências em 10 lançamentos

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara		
Coroa		

Neste momento, os licenciandos darão, por intermédio do projetor, uma rápida explicação de frequência relativa e absoluta para a execução da Atividade 7.

Frequência

Consideramos um experimento aleatório com um espaço amostral finito qualquer. Suponhamos que o experimento seja repetido *n* vezes em condições semelhantes. Seja *m* o número de vezes que ocorre o evento A (*m* é a frequência absoluta).

A **frequência relativa** do evento “A” é: $f = \frac{m}{n}$

Após a realização do experimento os licenciandos utilizarão os resultados de todas as duplas para montar uma tabela com as frequências relativas e absolutas no quadro branco.

Tabela das frequências em “todos os” lançamentos

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara		
Coroa		

Nesta atividade os alunos realizarão empiricamente o experimento e calcularão as frequências relativas e absolutas dos eventos em questão, com isso queremos prepará-los para trabalharem os conceitos Frequentista e Clássico de Probabilidade.

Os licenciandos apresentarão os resultados obtidos nos estudos realizados por Kerrich e Buffon (HOWARD, 2010).

Tabela das frequências em 1.000 lançamentos:

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara	529	
Coroa	471	

Tabela das frequências em 4.040 lançamentos

Face	Frequência absoluta	Frequência relativa
Cara	2.048	
Coroa	1.992	

Esses dois últimos experimentos foram realizados por Kerrich e Buffon.

Nossa intenção é permitir que os alunos possam comparar os valores obtidos em 10 lançamentos, “todos os” lançamentos em 1.000 lançamentos e em 4.040 lançamentos. Farão para isso as seguintes perguntas:

Descrição da Atividade 8

O que podemos observar em relação aos valores das frequências relativas à medida que aumentamos o número de lançamentos?

Se aumentarmos a lançamento para 100.000, o que acontecerá?

Nosso propósito é que os alunos possam perceber que, à medida que aumenta o número de repetições do experimento, a frequência relativa se aproxima da probabilidade intuída anteriormente na Atividade 6.

Após a discussão, os licenciandos apresentarão, por intermédio do projetor, a formalização das definições Clássica e Frequentista de Probabibilidade associada ao evento equiprovável e ao não equiprovável.

Formalização

Existe uma definição que permite calcular teoricamente a probabilidade de um evento sem realizar o experimento e que se aplica apenas quando o espaço amostral é finito e equiprovável.

Definição Clássica da Probabilidade

Consideremos um experimento aleatório com espaço amostral Ω finito e equiprovável. A probabilidade de ocorrer o evento $A \subset \Omega$ é:

$$P(A) = \frac{\textit{número de elementos de } A}{\textit{número de elementos de } \Omega}$$

Após a apresentação formal, os licenciandos retomarão algumas das probabilidades que os alunos intuíram na Atividade 6 e a seguir será apresentada a definição Frequentista de probabilidade.

Descrição da Atividade 9

f) Qual é a probabilidade de sair cara no lançamento de uma moeda comum?

g) Qual é a probabilidade de sair um número par no lançamento de um dado comum?

h) Qual a probabilidade de sair um número maior que 6 no lançamento de um dado comum?

i) Qual a probabilidade de sair um número menor que 7 no lançamento de um dado comum?

j) Qual é a probabilidade de sair o número 3 no lançamento de um dado comum?

Definição Frequentista da Probabilidade:

Consideremos um experimento aleatório com um espaço amostral finito qualquer. Suponhamos que o experimento seja repetido *n* vezes em condições semelhantes.

Seja *m* o número de vezes que ocorre o evento A (*m* é a frequência absoluta).

A **frequência relativa** do evento "A" é $f = \frac{m}{n}$

A frequência relativa é uma aproximação da probabilidade, quando se realizarem número considerável de experimento.

A frequência relativa se iguala à **probabilidade do evento** "A" quando o número de repetições do experimento "*n*" tende ao infinito.

Os licenciandos deverão retornar ao experimento realizado empiricamente, o lançamento da moeda, para novamente comparar as frequências com o resultado da probabilidade da definição Clássica. Em seguida, realizarão o seguinte experimento:

Descrição da Atividade 10

Considere o lançamento de uma tachinha e a observação da sua posição no chão:

c) Determine um espaço amostral.

d) Realizando o experimento, lançamento da tachinha, 5, 15, e 20 vezes foi obtido o seguinte resultado expresso na tabela. Determine a frequência relativa expressando os resultados em porcentagem.

Número de jogadas	Ponta e cabeça da tachinha tocando no chão	Só cabeça no chão	Frequência relativa
5			
10			
15			
20			

c) Em sua opinião, o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.

d) Posso aplicar a definição Clássica de probabilidade neste experimento? Justifique.

(Adaptado de SILVA, 2002)

Nosso objetivo é fixar os conceitos Frequentista e Clássico de Probabilidade vinculados ao espaço amostral equiprovável e não equiprovável. Escolhemos esta questão, por se trata de um objeto não convencional nas aulas de Probabilidade, visto que, em geral, são utilizados moedas e dados. Por outro lado, no livro didático analisado não se trabalha a questão do espaço amostral não equiprovável e também não se discute a questão de quando podemos usar o conceito Clássico e quando não podemos usá-lo. Logo em seguida, os alunos farão uma lista de exercícios.

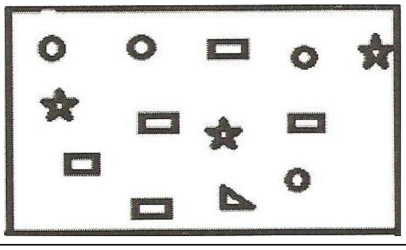
Lista 2 (Exercícios de Revisão)

1) Uma bola será retirada de uma sacola contendo 5 bolas verdes e 7 boas amarelas. Determine:
   a) Um espaço amostral para este experimento.
   b) Se este espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável.
   c) A chance da bola retirada ser da cor verde.

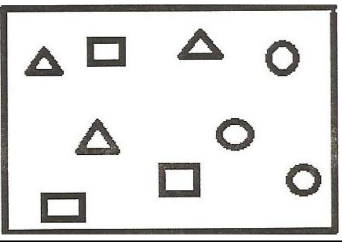
2) Em uma escola de idiomas com 2000 alunos, 500 alunos fazem o curso de inglês, 300 fazem o curso de espanhol e 200 cursam ambos os cursos. Selecionando-se um estudante do curso de inglês, qual a chance dele também estar cursando o curso de espanhol?

3) Um objeto será sorteado de cada urna das urnas representadas pelas figuras abaixo. Descreva e classifique os espaços amostrais em equiprovável ou não equiprovável, segundo a natureza dos objetos, e justifique sua resposta.

b)



b)



4. Uma urna contém 3 bolas brancas, 2 vermelhas e 5 azuis. Uma bola é escolhida ao acaso na urna. Determine.
    a) Um espaço amostral associado a este experimento que seja equiprovável. Posso aplicar a definição Clássica de probabilidade neste experimento? Justifique.
    b) Um espaço amostral associado para este experimento que seja não equiprovável. Posso aplicar a definição Clássica de probabilidade neste experimento? Justifique.

5) Uma urna contém 6 bolas pretas, 2bolas brancas e 10 amarelas. Uma bola é escolhida ao acaso. Determine:
    a) um espaço amostral para este experimento;
    b) a bola de maior chance de ser escolhida;
    c) se o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável, justifique sua resposta;
    d) a chance da bola não ser amarela.

6) Dois dados, um verde e um vermelho, são lançados e observados os números das faces de cima. Qual é a chance de ocorrerem os números iguais?

Com esta lista queremos: fixar os conceitos de espaço amostral equiprovável e não equiprovável por intermédio das Questões 1, 3, 4 e 5; explorar o cálculo de algumas probabilidades bem simples por intermédio das Questões 1, 2, 4, 5 e 6.

ANEXO 5. PLANEJAMENTO DA AULA 3 (COM MODIFICAÇÕES SUGERIDAS PELA BANCA)

Nesta aula iremos introduzir algumas das propriedades importantes no cálculo da Probabilidade e explorar os conceitos Frequentista, Clássico e Geométrico de Probabilidade por intermédio de alguns exercícios. Nosso desejo é permitir que os alunos consigam:

1. Acompanhar as discussões das propriedades que serão apresentadas.
2. Perceber a razoabilidade de cada propriedade.
3. Aplicar nos exercícios, quando necessário, as propriedades; o conceito Clássico; o conceito Frequentista; e o conceito Geométrico de Probabilidade.

Os licenciandos deverão apresentar algumas das propriedades da Probabilidade por intermédio do projetor e, caso seja necessário, utilizarão o quadro branco. Devido à complexidade do assunto, daremos ênfase à justificativa dos resultados através de alguns exemplos, com forte apelo à concepção clássica. Claro que essas justificativas não têm valor de prova, pois os resultados são válidos, qualquer que seja o conceito de probabilidade tomado. Fazemos isso tão somente para tornar os axiomas inteligíveis aos alunos, bem como algumas das propriedade importantes no cálculo da probabilidade que deles emanam. Os axiomas comumente apresentados nos livros didáticos são:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Se $A \cap B = \emptyset$ então $P(AUB) = P(A) + P(B)$

Estes geram as seguintes propriedades:

4. $P(\emptyset) = 0$
5. $P(A) + P(A^C) = 1$
6. Se $A \cap B \neq \emptyset$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Segue o conteúdo que será apresentado aos alunos pelos licenciandos:

Axiomas e Algumas Propriedades Importantes da Probabilidade:

Seja E um experimento aleatório com um espaço amostral associado S. A cada evento $A \subseteq S$, associa-se um numero real representado por P(A) e denominado "probabilidade de A", que satisfaz as seguintes axiomas (1,2,3) e propriedades (4,5,6):

1. $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$
2. $\mathbf{P(S) = 1}$
3. **Se** $\mathbf{A \cap B = \emptyset}$ **então** $\mathbf{P(AUB) = P(A) + P(B)}$

Devido à complexidade do assunto, daremos ênfase à justificativa dos resultados através de alguns exemplos com forte apelo à concepção clássica. Sendo S um espaço amostral equiprovável, finito e não vazio, e A um evento de S, têm-se:

4. P(Ø) = 0

Justificativa: $P(Ø) = \frac{n(Ø)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$

3. P(S) = 1

Justificativa: $P(S) = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$

2. $0 \leq P(A) \leq 1$

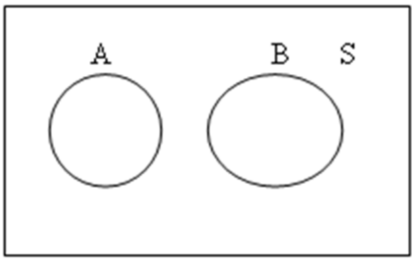
Justificativa: Temos que

$$\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$$
$$\Rightarrow n(\emptyset) \leq n(A) \leq n(\Omega)$$
$$\Rightarrow \frac{n(\emptyset)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(A)}{n(\Omega)} \leq \frac{n(\Omega)}{n(\Omega)}$$
$$\Rightarrow \frac{0}{n(\Omega)} \leq P(A) \leq 1$$
$$\Rightarrow 0 \leq P(A) \leq 1$$

3. Se A∩B = Ø então P(AUB) = P(A) + P(B)

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espa amostral S. Diz que ocorre o evento A união denotado por AUB, se e somente se A ocorre **ou** ocorre.

Como n(AUB) = n(A) + n(B), pois A∩B= Ø.

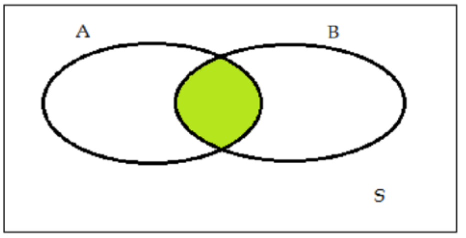


Então, $P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = P(A) + P(B)$

7. Se $A \cap B \neq \emptyset$ então P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A∩B)

Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral S. Diz-se que ocorre o evento A união B, denotado por AUB, se e somente se A ocorre **ou** B ocorre.

Temos que: (AUB) = n(A) + n(B) - (A∩B), pois A∩B ≠Ø.



$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(S)} =$$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} - \frac{n(A \cap B)}{n(S)} =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Optamos por apresentar as propriedades com a noção de conjunto, pois julgamos que assim as justificamos de uma forma mais intuitiva e consequentemente torná-las mais acessíveis aos alunos. Daremos, por isso mais ênfase aos exemplos com o intuito de fixar as propriedades apresentadas.

Exemplo: No lançamento de um dado comum, observa-se a face superior. Qual é a probabilidade de sair um número par ou um múltiplo de três?

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6},

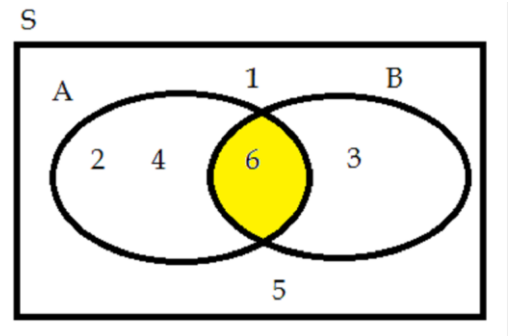
n(S) = 6

- **A: sair um número par.**

A= {2, 4, 6},

n(A) = 3

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



- **B: sair um múltiplo de 3.**

B= {3, 6}, n(B) = 2

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

- **A∩B= {6}**

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

- **P(A∪B)= P(A) + P(B) - P(A∩B)**

$P(A \cup B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ **ou**

A∪B= {2, 4, 6} ∪{3, 6} = {2, 3, 4, 6}, n(A∪B) = 4.

$$P(A \cup B) = \frac{4}{6}$$

5. P(A) + P(A^C) = 1

Temos que $AUA^C = S$ e $A \cap A^C = \emptyset$

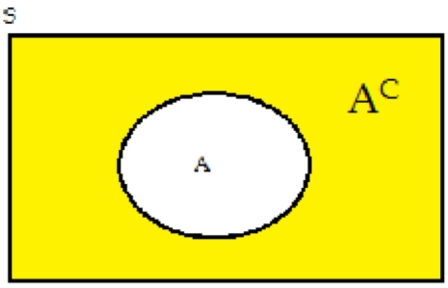
$$\Rightarrow n(A \cup A^C) = n(S)$$

$$\Rightarrow n(A) + n(A^C) = n(S)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A) + n(A^C)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(A^C)}{n(S)} = 1$$

$$\Rightarrow P(A) + P(A^C) = 1$$



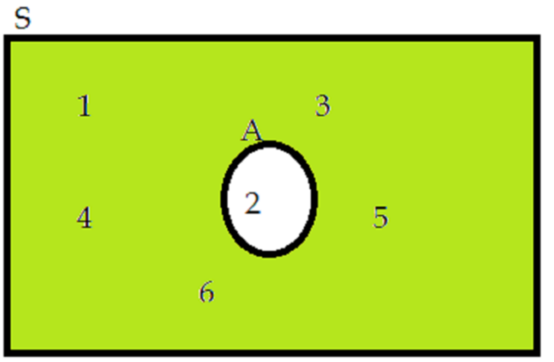
A probabilidade de um evento A não ocorrer, indicado por P(A^C), é igual a 1, menos a probabilidade de ele ocorrer, isto é, P(A^C) = 1 – P(A).

Exemplos:

a) No lançamento de um dado comum não viciado, qual é a probabilidade de não sair o número 2?

S= {1, 2, 3, 4, 5, 6},

n (S) =6



- **A: sair o número 2**

A= {2},

n(A) =1.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{6}$$

- **A^C: não sair o número 2**

P(A^C) = 1 – P(A).

$$P(A^C) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{6-1}{6} = \frac{5}{6}$$

- **Ou A^C: não sair o número 2**

A^C = {1, 3, 4, 5, 6}, n(A^C) =5

$$P(A^C) = \frac{5}{6}$$

b) (PAIVA, 2005) Uma urna contém bolas coloridas. Retirando-se uma bola dessa urna, a probabilidade de se obter uma bola vermelha é 0,64. Qual é a probabilidade de se obter uma bola que não seja vermelha?

- **A: obter uma bola vermelha**

P(A) =0,64

- **A^C: Obter uma bola que não seja vermelha**

$P(A^C) = 1 – P(A)$.

$P(A^C) = 1 – 0,64 = 0,36$

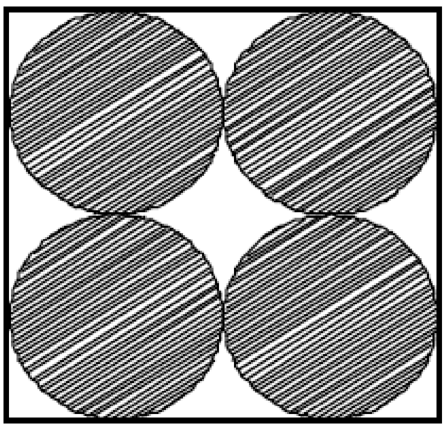
Após a apresentação formal das propriedades e suas exemplificações, os licenciandos passarão uma lista de exercícios a fim de fixar os conceitos trabalhados nesta aula e nas aulas anteriores. Segue a lista:

Lista 3 (Exercícios de Revisão)

1) Um atirador, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular com 50 cm de raio, tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se em certo momento temos a informação de que o atirador acertou o alvo, perguntamos qual deve ser a probabilidade de que tenha atingido o disco central.

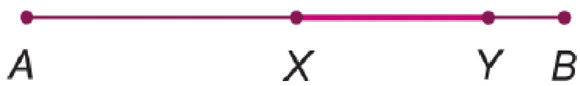
(Adaptado da COLEÇÃO Explorando o ensino)

2) (UFRGS, 1998) A figura representa uma parede quadrada na qual estão pintados discos de raio R. Se uma bola é lançada totalmente ao acaso contra a parede, a probabilidade de ela tocar fora dos discos está entre:



a)14% e 16% b) 17% e 19%
c) 20% e 22% d) 23% e 25%
e) 26% e 28%

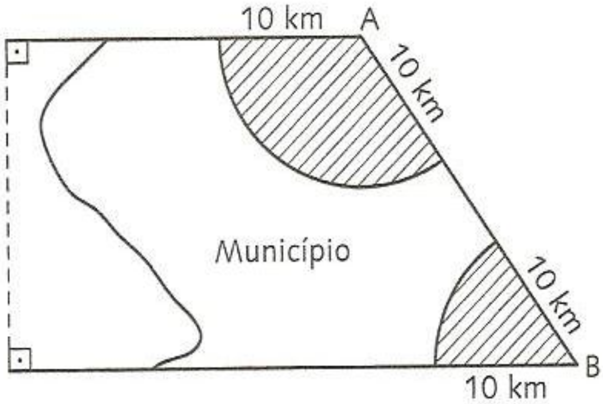
3) Precisamos escolher um ponto de uma determinada “linha”. Se X e Y são pontos de uma linha de extremos A e B, qual a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha XY (contida em AB)?



(Adaptado da COLEÇÃO Explorando o ensino)

4) (ENEM, 2001) Um município de 628Km^2 é atendido por duas emissoras de rádio cujas antenas A e B alcançaram um raio de 10 km do município conforme mostra a figura ao lado. Para orçar um contrato publicitário, uma agência precisa avaliar a probabilidade que um morador tem de, circulando livremente pelo município, encontrar-se na área de alcance de pelo menos uma das emissoras. Essa probabilidade é de, aproximadamente:

a) 20% b) 25% c) 30% d) 35% e) 40%



5) Uma moeda é viciada de tal modo que sair cara é duas vezes mais provável do que sair coroa. Calcule a probabilidade de:

a) Ocorrer cara no lançamento dessa moeda.
b) Ocorrer coroa no lançamento dessa moeda.

6) Temos duas moedas, das quais uma é perfeita e a outra tem duas caras. Uma das moedas, tomadas ao acaso, é lançada. Qual é a probabilidade de se obter cara?

7) No sorteio de um número natural de 1 a 20, determine as probabilidades:

a) De ocorrer um número par.
b) De ocorrer um múltiplo de 3.
c) De ocorrer um número primo.
d) De ocorrer um divisor de 12.

8) Qual a probabilidade de lançar um dado branco e outro azul e se obter:

a) A soma dos pontos igual a 7?
b) 2 pontos no dado azul?

9) Tira-se, ao acaso, uma carta de um baralho de 52 cartas. Qual a probabilidade de ser a carta retirada:

a) Um ás?
b) Uma figura, isto é, valete, dama, ou rei?
c) Do naipe de espada?
d) Uma figura de espada?

10) Se $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,3$ e $P(A \cap B) = 0,1$. Calcule:

a) $P(A \cup B)$.
b) $P(A^C \cup B)$, onde A^C é o complementar de A.

11) Seja E= {1, x, 2} um epaço amostral. Define-se uma função P em E do seguinte modo:
a) $P(\{1\}) = P(\{x\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{3}$
b) $P(\{1\}) = P(\{x\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{2\}) = -1$
c) $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{x\}) = \frac{1}{4}$; $P(\{2\}) = \frac{1}{4}$;
d) $P(\{1\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{x\}) = \frac{1}{2}$; $P(\{2\}) = \frac{1}{2}$;

Em qual desses casos P é uma probabilidade?

(Questão adaptada de Caruncho, J. et al. (1988) apud Ortiz (2002, p.181)).

12) Um colégio tem 400 alunos e destes: 100 estudam Matemática; 80 estudam Física; 100 estudam Química; 20 estudam Matemática, Física e Química; 30 estudam Matemática e Física; 30 estudam Física e Química; 50 estudam somente Química. A probabilidade de um alunos, escolhido ao acaso, estudar Matemática e Química é:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{5}{3}$

13) Uma pesquisa ouviu 500 pessoas, 230 disseram ler o jornal A, 134 disseram ler o jornal B e 54, o jornal C. 86 leem tanto o jornal A quanto o jornal B, 20 leem tanto o jornal A quanto o jornal C e 5 leem tanto o B quanto o C, 3 disseram ler os três jornais. Se uma pessoa for escolhida ao acaso entre essas 500, qual a probabilidade de que ela:

a) Leia apenas o jornal A?
b) Leia pelo menos um dos três jornais?
c) Não leia nenhum dos três jornais?
d) Leia exatamente um dos 3 jornais?

Optamos por colocar as Questões 1, 2, 3 e 4 sobre Probabilidade Geométrica, pois verificamos que é pouco explorada nos livros didáticos e a julgamos de grande importância, porque há a necessidade de calcular algumas áreas para determinar a probabilidade.

As Questões 5 e 6 exploram o cálculo da probabilidade de espaços não equiprováveis. Por isso julgamos que os alunos poderão ter dificuldade em escrever os espaços amostrais e consequentemente calcular a probabilidade de forma equivocada.

Questão 10 envolve a manipulação das propriedades de união, interseção e complementar entre eventos. Já nas Questões 11 e 12 envolve a noção de Diagramas de Venn (noção de conjuntos) e este tipo de raciocínio já foi explorado na lista de exercícios da aula anterior (Aula 02). Nas demais Questões (7, 8, 9), são questões que envolvem o cálculo de probabilidade simples.

ANEXO 6. PLANEJAMENTO DA AULA 4

Nesta aula iremos introduzir o conceito da Probabilidade Condicional. Os objetivos são:

1. Calcular união e interseção de probabilidades fazendo as devidas diferenças entre o uso dos conectivos "e" e "ou".
2. Entender a Probabilidade Condicional como uma condição que restringe o espaço amostral.
3. Aplicar o conceito de Probabilidade Condicional nas atividades propostas;
4. Perceber a diferença entre p$(A|B)$ e p$(B|A)$.
5. Entender a vinculação da interseção de probabilidade com a multiplicação de probabilidades.

Após o momento inicial, os licenciandos explicarão como será realizada a Atividade 1 desta aula.

Descrição da Atividade 1

Os licenciandos pedirão que cada aluno escolha um número de 1 a 99. Um único prêmio será entregue ao portador do bilhete que for escolhido por sorteio. Esse sorteio será realizado em duas etapas utilizando-se uma urna com dez bolas numeradas de 0 a 9. Na primeira etapa, uma bola é escolhida ao acaso, obtendo-se assim o algarismo das unidades do número premiado; em seguida, essa bola é devolvida à urna, e repete-se o processo para que seja obtido o algarismo das dezenas.

(Adaptada da COLEÇÃO Explorando o ensino)

Selecionamos esta atividade, pois acreditamos que com ela os alunos terão condições de entender a probabilidade condicional como uma condição que restringe o espaço amostral. Ela permite, por outro lado, que os alunos vivenciem as condições que irão interferir em suas chances de ganhar o sorteio e por outro, julgamos que ela possa envolvê-los e motivá-los a estudar a conceito da Probabilidade Condicional.

Continuação da descrição da Atividade 1

Após os alunos terem escolhidos seus números, os licenciandos farão a seguinte pergunta: antes de ser iniciado o sorteio (e supondo-se que ele seja honesto), qual é a probabilidade de você (aluno) ganhar o prêmio?

Os licenciandos deverão conduzir a resolução desta questão utilizando as respostas orais dos alunos e registrando-as no quadro. Segue uma solução:

S_1= {0, 1, 2,…, 97, 98,99}, $n(S_1) = 100$

A= $\{k\}$, onde "k" é qualquer número entre 0 e 99.

$$n(A) = 1, \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S_1)} = \frac{1}{100} = 1\%$$

Esta questão se faz necessária, pois nosso intuito é criar condições para que os alunos percebam que, após o sorteio, esta probabilidade, calculada inicialmente, irá mudar devida à redução do espaço amostral.

Neste momento será realizada a primeira etapa do sorteio: uma bola é escolhida ao acaso, obtendo-se assim o algarismo das unidades do número premiado. Supondo que o número sorteado seja o número 7, os licenciandos irão analisar a situação de dois alunos como na situação descrita abaixo:

Continuação da descrição da Atividade 1
Vamos analisar a situação dos alunos, João e Paulo, cujos bilhetes têm os números 25 e 47, respectivamente.

Os licenciandos conduzirão a situação: a primeira bola sorteada foi o número 7, o conjunto dos resultados possíveis do sorteio se reduz a um conjunto com dez elementos, a saber: {7, 17,..., 97}. Farão as seguintes perguntas aos alunos:

Continuação da descrição da Atividade 1
Após o sorteio da unidade, quais são as chances de João ganhar o prêmio? E de Paulo ganhar o prêmio?

Mais uma vez, os licenciandos conduzirão a resolução desta questão utilizando as respostas orais dos alunos e registrando-as no quadro. Segue uma solução e as devidas observações que os licenciandos deverão fazer:

Seja C o evento "o número sorteado termina em 7".

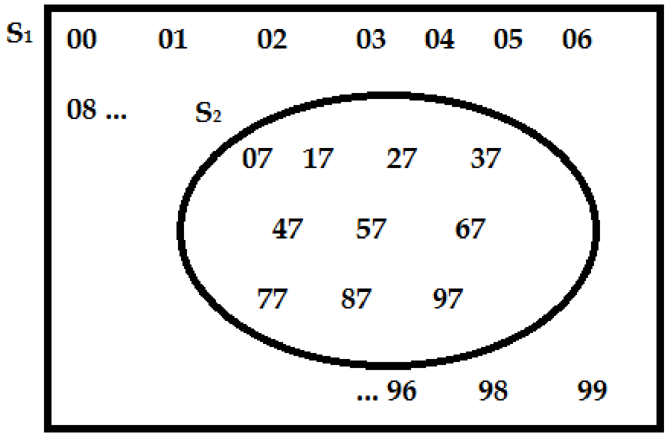
S_1= {0, 1, 2,…, 97, 98, 99}

n(S) = 100

C= {7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97}

n(C) = 10

$$P(C) = \frac{n(C)}{n(S_1)} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 10\%$$



Seja B o evento "João ganha o prêmio sabendo que ocorreu o evento C".

S_2= {7, 17,..., 97}, n(S_2)= 10 e B= {25}, $B \not\subset S_2$, $P(B|C) = \frac{n(B)}{n(S_2)} = \frac{0}{10} = 0$

João então já pode rasgar o seu bilhete, pois, suas chances de vitória se reduziriam de $\frac{1}{100} = 1\%$ para 0 %.

Seja A o evento "Paulo ganha o prêmio sabendo que ocorreu o evento C".

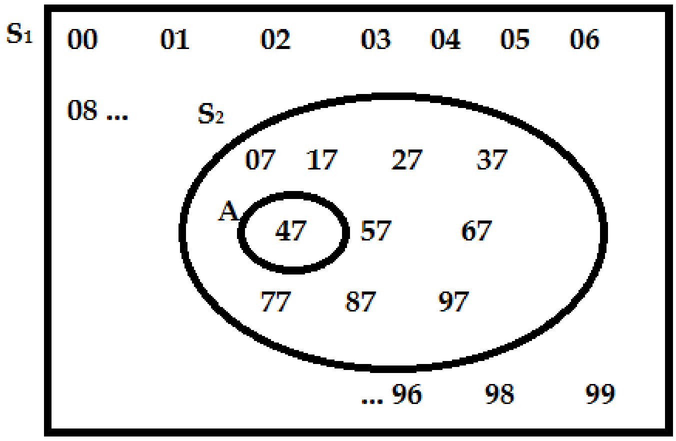
S_2={7, 17,…, 97,},

n(S_2)= 10

A={47},

n(A) = 1

$P(A/C) = \frac{n(B)}{n(S_2)} = \frac{1}{10} = 10\%$



Por outro lado, Paulo viu sua chance passando de $\frac{1}{100} = 1\%$ para $\frac{1}{10} = 10\%$.

Seguem algumas observações que os licenciando deverão fazer após a resolução da última atividade a fim de introduzir o conceito de probabilidade condicional.

Antes da realização da primeira etapa, tínhamos: $P(A) = P(B) = \frac{1}{100} = 1\%$ e P(C) = 1/10. As probabilidades, 0 e $\frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$, calculadas após a realização da primeira etapa, são denominadas probabilidades condicionais de B e A, respectivamente, dado que ocorreu o evento C, ou seja, $P(B|C) = 0$ e $P(A|C) = \frac{1}{10}$. No exemplo acima, as probabilidades condicionais foram calculadas por meio da redução do espaço amostral ao conjunto S_2 = C, que passou a ser o espaço associado à segunda etapa do sorteio.

Após a realização da Atividade 1, supomos que os alunos tenham entendido que a probabilidade condicional é uma condição que restringe o espaço amostral, e estejam motivados para a próxima atividade.

Descrição da Atividade 2 Cartões numerados de 1 a (quantidade de alunos) serão distribuídos aos alunos que concorrerão ao prêmio (único). Suponhamos que haja 10 alunos na aula. Após os alunos terem recebido seus cartões, os licenciandos proporão a seguinte questão: "Antes de ser iniciado o sorteio (e supondo-se que ele seja honesto), todos têm esperança de ganhar. Qual é a probabilidade de você (aluno) ganhar o

prêmio?”

(Adaptada de PAIVA, 2005)

Optamos por esta atividade, pois ela permite que os alunos vivenciem as condições que irão interferir em suas chances de ganhar o sorteio, possibilitando, mais uma vez, que possam entender a probabilidade condicional como uma condição que restringe o espaço amostral.

Cabe aos licenciandos guiar a solução desta atividade fazendo uso das respostas orais dos alunos e transcrevendo-as no quadro. Segue uma possível solução:

Seja G o evento “um determinado aluno ganha o Prêmio”.

S={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}, n(S) = 10

G={ k }, onde “k” é qualquer número entre 1 e 10 (inclusive).

n(G) =1, $P(G) = \frac{n(G)}{n(S)} = \frac{1}{10} = 0{,}1 = 10\%$

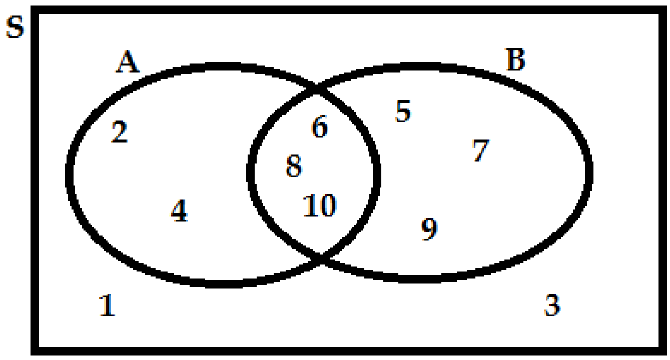
Continuação da descrição da Atividade 2

Os licenciandos sortearão de uma urna um desses números e, para criar “suspense” (supondo que este número seja par) afirmem: “O número sorteado é par”. Qual é a probabilidade de que o número sorteado seja maior que 4?

Novamente, os licenciandos deverão conduzir a resolução desta questão utilizando as respostas orais dos alunos e registrando-as no quadro. Segue uma solução e as observações que os licenciandos deverão apresentar aos alunos:

O espaço amostral ficou reduzido ao evento A ={2, 4, 6, 8, 10}. Vamos esquematizar esse problema, considerando ainda o evento B formado pelos elementos do espaço amostral S que são maiores que 4: B = {5, 6, 7, 8, 9, 10}. A garantia de que o número sorteado é “par” reduz o espaço amostral ao evento A. Logo, um elemento de B só pode ocorrer na interseção de A e B. Assim, a probabilidade de ocorrer B, dado que já ocorreu A, é:

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$$



Continuação da descrição da Atividade 2

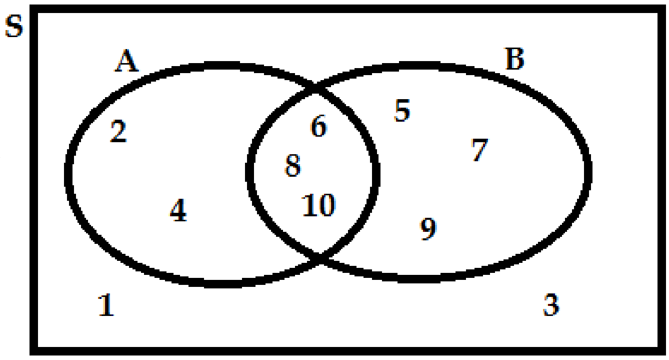
Outra situação: supondo que o número seja maior que 4, qual a probabilidade de o número sorteado ser par?

Mais uma vez, cabe aos licenciandos guiar a solução desta questão, como na atividade anterior. Segue uma solução e as observações que os licenciandos deverão fazer aos alunos:

O espaço amostral ficou reduzido ao evento B ={5, 6, 7, 8, 9, 10}. Vamos esquematizar esse problema, considerando ainda o evento A formado pelos números do espaço amostral S que são pares.

A garantia de que o número sorteado seja maior que 4 reduz o espaço amostral ao evento B. Logo um elemento de A só pode ocorrer na interseção de A e B. Assim, a probabilidade de ocorrer A, dado que já ocorreu B, é:

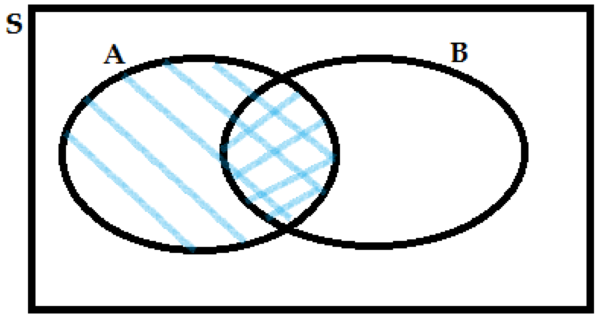
$$P(A/B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5=50\%$$



Após as duas atividades, os licenciandos apresentarão a formalização do conceito de Probabilidade Condicional introduzido nas Atividades 1 e 2 desta aula.

Formalização

Consideremos um experimento aleatório com um espaço amostral equiprovável S, finito e não vazio. Ao realizar o experimento, constatou-se que ocorreu um evento não vazio A. Qual a probabilidade de que tenha ocorrido também algum elemento de outro evento B?



A probabilidade de ocorrer o evento B, dado que ocorreu o evento A, é indicada por $P(B|A)$, lê-se: “probabilidade de B dado A”, e é calculada em espaços amostrais equiprováveis, com $P(B|A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}$

O número $P(B|A)$ é a probabilidade de ocorrer B, condicionada à ocorrência de A.

Essa relação também pode ser expressa de outra forma. Dividindo o numerador e o denominador do segundo membro da igualdade por n(S), temos:

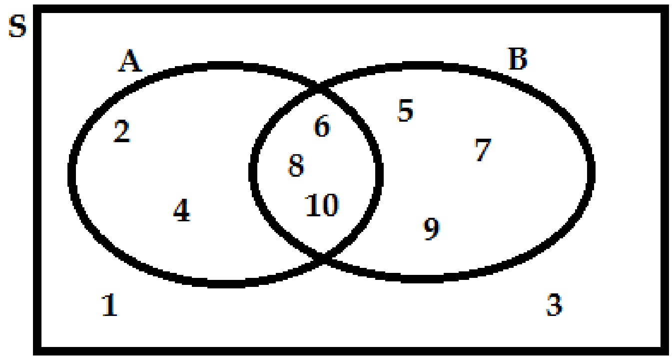
$$P(B|A) = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} = \frac{p(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Pode-se discutir com os alunos que a fórmula $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ vale para qualquer outro conceito de probabilidade.

Após a formalização os licenciandos apresentarão as seguintes observações, com o intuito de aplicar a última fórmula apresentada:

Podemos utilizar essa relação na Atividade 2 e verificar que obtemos os mesmos resultados, ou seja:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(A)}{n(S)}} \qquad P(B|A) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{5}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6 = 60\%$$



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}} \qquad P(A|B) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{6}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{6} = \frac{3}{6} = 0{,}5 = 50\%$$

Vimos anteriormente que $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ é a probabilidade de ocorrer o evento B já tendo ocorrido o evento A. Dessa razão, segue que $P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$

Isso quer dizer que a probabilidade de ocorrerem dois eventos A e B simultâneos (ou sucessivos) é dada pela multiplicação da probabilidade de ocorrer um deles pela probabilidade de ocorrer o outro, sabendo que o primeiro já ocorreu.

O número $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ é a probabilidade de ocorrer B condicionada à ocorrência de A e o número $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ é a probabilidade de ocorrer A condicionada à ocorrência de B.

A seguir os alunos farão os exercícios com o objetivo de fixar os conceitos trabalhados. Segue a lista de exercícios:

Lista 4 (Exercícios de Revisão)

1) No lançamento de dois dados, um preto e outro vermelho, considere os eventos:
   A: "a soma dos números obtidos é menor que 7".
   B: "sair o número 4 em, pelo menos, um dado".
   Calcule a probabilidade de a soma dos pontos obtidos ser menor que 7, sabendo que em um dos dados pelo menos saiu o número 4, ou seja, $P(A|B)$.

2) Numa classe com 60 alunos, 40 estudam inglês, 10 estudam só Francês e 5 estudam Inglês e Francês. Determinar a probabilidade de um aluno que estuda Inglês estudar também Francês.

3) Ao lançarmos um dado, qual é a probabilidade de obtermos um número primo ou um número impar?

4) Em uma caixa há 2 fichas amarelas, 5 fichas azuis e 7 fichas verdes. Se retirarmos uma única ficha, qual a probabilidade dessa ser verde ou amarela?

5) De uma sacola contendo 15 bolas numeradas de 1 a 15 retira-se uma bola. Qual é a probabilidade desta bola ser divisível por 3 ou divisível por 4?

As duas primeiras questões da lista trabalham com o conceito de Probabilidade Condicional, porém a resolução da segunda questão envolve a utilização de diagramas conexos. As Questões 3, 4 e 5 exploram probabilidade da união de eventos.

ANEXO 7. PLANEJAMENTO DA AULA 4.1

Nesta aula iremos propor uma situação que permite os alunos a tomar decisão sob incerteza. Os objetivos são apresentados a seguir.

1. Interpretar dados e tomar decisões sob incerteza utilizando o raciocínio probabilístico.
2. Simular os experimentos sob as mesmas condições em certo número de vezes e calcular a frequência relativa do evento em questão.
3. Perceber que o conceito de Probabilidade Condicional está subjacente na questão.
4. Entender que a probabilidade teórica estudada na situação-problema pode ser inteligível à luz das simulações propostas em sala de aula com um grande número de realizações.
5. Entender que na prática há apenas a avaliação da chance, e que nesta, mesmo se baseando em um raciocínio probabilístico, não garante a certeza do evento, ou seja, não é possível garantir o sucesso de um evento, porém há maior chance de sucesso se baseando em um raciocínio probabilístico correto.
6. Refletir as considerações apresentadas num nível filosófico a respeito do conceito de Probabilidade Subjetiva.
7. Entender a confrontação entre os conceitos Subjetivo, Clássico e Frequentista da Probabilidade, essencialmente em nível filosófico ou através de exemplificações.

Após o momento inicial, propõe-se apresentar a Atividade 1 para os alunos e expor situações que ensejem discussões e considerações sobre tomadas de decisão e suas justificativas. Além de discutir sobre a regularidade que o experimento aleatório apresenta ao ser (realizado) observado num grande número de vezes, e que a probabilidade não garante a ocorrência de um dado evento como "fazer sol". Porém, há mais chance de fazer sol do que chover.

Descrição da Atividade 1: Se a meteorologia nos disse que a probabilidade de que amanhã faça sol é de 80%, significa que, por 100 dias, com as condições climáticas observadas hoje, para o dia seguinte, em 80 dos 100 casos, fez sol. Como você pode ver esta informação não te dá certeza do que vai acontecer amanhã, mas não deixa de ser útil. Você pode preparar sua viagem com alguma confiança de que não acontecerá chuva amanhã? Justifique.

(Adaptada de Guzmán, M. et al. (1988) apud Ortiz (2002, p.175))

Após as discussões referentes à tomada de decisão sob incerteza utilizando o raciocínio probabilístico na primeira atividade, propomos a segunda atividade.

Descrição da Atividade 2: Você está participando de um jogo chamado "Porta da Felicidade", da seguinte forma: O apresentador do programa mostra a você três portas e uma delas esconde um carro como prêmio e as outras duas não oferecem nada e o colocam fora do jogo. O que acontece? Você escolhe uma porta e o apresentador abre uma outra porta vazia não escolhida por você. Assim ainda há a chance de você ganhar o carro. Mas ele agora lhe oferece a oportunidade de mudar de porta.

a) O que você faz? Fica com a mesma porta escolhida ou muda para a outra porta?

b) Determine a probabilidade inicial de você ganhar o premio antes do apresentador abrir uma porta vazia não escolhida por você.

c) Determine a probabilidade de você ganhar de você ganhar o prêmio considerando a sua resposta no item (a).

(Adaptada de Rocha e Fernandes, 2012)

Deve-se propor um debate sobre qual a decisão a ser tomada à luz da incerteza por meio das respostas apresentadas pelos alunos. Esperamos que alguns alunos respondam o item (a) de forma aleatória ou se baseiem em um raciocínio equivocado de que não faria diferença trocar de porta, ou seja, atribuir equivocadamente um valor de 50% para o item (c), o que é muito mais intuitivo, embora errôneo.

A ideia inicialmente é apenas discutir as possíveis respostas apresentadas pelos alunos sem corrigi-las como com certas ou erradas. Porém o professor deve estar atento aos equívocos, para que possa retomá-los após a Atividade 3.

Descrição da atividade 3: Três cartas de cartolina, das quais uma tem o desenho de um carro e as outras duas o vazio representando as "portas", são dadas a cada par de alunos. Um será responsável pelo embaralhamento das cartas, tendo a visualização de onde se encontra o carro para si, ou seja, fará o papel do apresentador do programa. O outro aluno, fazendo o papel de jogador, deve inicialmente escolher uma carta. Em seguida o que tem acesso à informação deve mostrar uma outra carta sem o carro, excluí-la, e o aluno jogador deve então escolher a estratégia de mudar de carta. Se na mudança da carta o aluno-jogador ganha o carro então registra-se um acerto, caso contrário registra-se zero. Finalmente mudam-se os papéis exercidos, o apresentador da primeira fase torna-se o jogador e o jogador da primeira fase torna-se o apresentador, e o aluno jogador deve então escolher a estratégia de não mudar de carta.

Após a realização dos experimentos, deve-se reunir os resultados de cada dupla a fim de calcular as frequências relativas dos eventos em questão.

a) Qual a taxa empírica de acertos da estratégia adotada pela mudança da primeira escolha da "porta"?

b) Qual a taxa empírica de acertos da estratégia adotada pela **não** mudança da primeira escolha da "porta"?

c) De acordo com os itens (a) e (b) retome os itens da Atividade 2.

(Adaptada de Rocha e Fernandes, 2012)

Escolhemos a atividade acima, pois os alunos realizarão empiricamente o experimento equivalente à Atividade 2. Além disso, consideramos este problema difícil de ser estudado formalmente. Justamente por isso optamos pelo conceito Frequentista da probabilidade a fim de dar melhor inteligibilidade a esses questionamentos.

Novamente, cabe aqui a discussão proposta na Atividade 1, ou seja, que a probabilidade estudada na situação problema atribui um valor numérico da factibilidade de um evento baseado na taxa de ocorrência que o experimento aleatório apresenta ao ser repetido em um grande número de vezes. Além disso, discutir que em geral há uma única realização, mesmo se baseando em um raciocínio probabilístico, trocar de porta não oferece garantia de que ganhará o prêmio, porém oferece mais chance de ganhá-lo.

Talvez, mesmo depois de todas as discussões é possível que permaneça algum aluno com alguma dúvida sobre os resultados obtidos. Para tentar sanar alguns equívocos provocados pela intuição o professor poderá fazer as seguintes observações:

"Existem três portas, A, B e C. Quando você escolheu uma delas, digamos a A, a chance de que ela seja a premiada é de $\frac{1}{3}$. Consequentemente, as chances de que você tenha errado, ou seja, de que o prêmio esteja nas outras duas portas B ou C são de $\frac{2}{3}$. O importante é considerar que **a chance de que o prêmio esteja nas outras portas que você não escolheu são de** $\frac{2}{3}$.

Basta notar que o apresentador abrirá sem erro uma dessas outras duas portas que não contém o prêmio. Ao fazer isso, **ele está lhe dando uma informação valiosa**: se o prêmio estava em uma das portas que você não escolheu, então agora ele só pode estar na porta que você não escolheu e não foi aberta. Ou seja, se você errou ao escolher uma porta, e as chances disto são de $\frac{2}{3}$, então t**oda vez que você tiver escolhido inicialmente uma porta errada, ao trocar de porta você irá com certeza ganhar.**

Como as chances de que você tenha errado em sua escolha inicial são de $\frac{2}{3}$, se você trocar de porta suas chances de ganhar serão de $\frac{2}{3}$. Inversamente, a chance de que você ganhe se não trocar de porta continua sendo de apenas $\frac{1}{3}$. Portanto, a probabilidade nos diz que é mais vantajoso trocar de porta."

Se, mesmo assim, as dúvidas permanecerem, o professor poderá propor que se tente imaginar o problema com 1.000 portas. Você escolhe uma porta, e então o apresentador abre todas às outras 998 portas não premiada. Restam apenas duas portas, a que você escolheu inicialmente e a outra oferecida para troca, em apenas uma delas tem o prêmio.

Com 1.000 portas, suas chances iniciais de ganhar o prêmio eram de $\frac{1}{1000}$ = 0,001. Você pode ter quase certeza (ou mais precisamente, 99,9% de "certeza") que **o prêmio estava em alguma das outras portas**. E depois de ter aberto as 998 portas não premiadas e se o prêmio estava em alguma das outras portas, **ele só pode estar naquela porta que ele oferece para troca. C**om 99,9% de chance, se você trocar, irá ganhar o prêmio (Pereira de Sá, I. e Pereira de Sá, V. G., 2007 e 2008).

Após essas questões de tomada de decisão sob incerteza, iniciaremos a apresentação das questões filosóficas relacionadas ao conceito Subjetivo que julgamos adequadas ao nível médio.

Descrição da Atividade 4: Deve-se iniciar uma discussão a respeito da aplicabilidade dos conceitos Clássicos e Frequentistas. Para isso, pode-se perguntar, por exemplo:

- Quando podemos aplicar a probabilidade Clássica?
- Realizamos um experimento do lançamento da tachinha e observamos a sua posição ao cair tocar o chão. Neste experimento, estimamos a probabilidade da tachinha tocar o chão com a ponta e cabeça, e o evento de só tocar a cabeça. Por que não podemos aplicar o conceito Clássico neste experimento?
- Qual conceito pode ser aplicado em um espaço amostral não equiprovável e cujos experimentos não possam ser realizados em um grande número de vezes sob as mesmas condições?
- Por exemplo: amanhã você fará uma entrevista de emprego. Qual é a probabilidade de que tenha sucesso nesta entrevista?

Observemos que o avaliador terá os seus critérios para avaliar. Além disso, a entrevista amanhã é única.

Para responder questões como essa, a ciência sentiu a necessidade de criar um novo conceito de probabilidade, o conceito Subjetivo. Este conceito tem grandes implicações em áreas amplas de estudos hoje na Estatística, e apenas o citaremos como ilustração para uma nova interpretação de probabilidade.

Escolhemos a Atividades 4 a fim de confrontarmos as especificidades dos conceitos Clássico, Frequentista e Subjetivo da Probabilidade, fazendo uso de exemplos trabalhados em aulas anteriores. Esperamos que os alunos se lembrem das restrições dos conceitos Clássico e Frequentista, ou então que o professor os relembre utilizando os experimentos já realizados em sala. Após esses questionamentos de ordem filosófica, referentes aos conceitos Clássico, Frequentista e Subjetivo, apresentaremos uma definição do conceito Subjetivo e suas devidas exemplificações de aplicação.

Formalização

Define probabilidade como o grau de crença, com base em conhecimento pessoal e na experiência, que a pessoa atribui em um determinado evento.

A probabilidade subjetiva é frequentemente empregada naquelas situações em que a repetição do experimento não pode ser realizada ou que não pode ser realizada em idênticas condições, como por exemplo em algumas decisões em Economia ou diagnóstico médico.

Demais exemplos:

1. Estimar a probabilidade de que o time de futebol da Ponte Preta disputará a final do campeonato nacional.
2. Estimar a probabilidade de que você obtenha conceito 10 neste curso.
3. *Qual é a probabilidade de que a situação da economia de nosso país esteja melhor ao fim do próximo ano*?
4. *Qual é a probabilidade da existência de vida orgânica em Saturno*?
5. Um paciente é submetido a um novo tipo de cirurgia e deseja-se saber se ele ficará bom.
6. Num jogo de futebol entre dois times, deseja-se saber quem vencerá.
7. Uma pessoa deseja saber se seu relacionamento afetivo terá ou não sucesso.

Problemas como esse não são solucionados nem pela abordagem Clássica nem pela abordagem Frequentista. Entretanto, são abrangidas pela interpretação Subjetiva de probabilidade e constituem parte legítima da Teoria da Probabilidade.

Queremos, apenas, que os alunos consigam acompanhar a discussão do conceito e seus exemplos, entendendo que os mesmos não podem ser solucionados pela abordagem Clássica e nem Frequentista, pois são situações que não podem ser repetidas ou que não podem ser realizadas em idênticas condições.

Nessa medida, não pretendemos esgotar todas as potencialidades de tratamento deste conceito, porém foi o que consideramos adequado a este nível de ensino. Esperamos que com esta aula os alunos reconheçam a especificidade do raciocínio probabilístico como mecanismo de inteligibilidade ao mundo de incertezas em que vivemos.

ANEXO 8. PLANEJAMENTO DA AULA 5

Nesta aula iremos introduzir o conceito de eventos independentes e dependentes e revisar os principais conceitos trabalhados nas aulas anteriores. Os objetivos desta aula são:

1. Aplicar o conceito de Probabilidade Condicional nas atividades propostas.
2. Reconhecer quando dois eventos **A** e **B** de um mesmo espaço amostral são independentes ou dependentes.
3. Utilizar os conceitos trabalhados nas aulas anteriores para a resolução dos exercícios propostos.

Após o momento inicial previsto, os licenciandos irão introduzir o conceito de eventos independentes por intermédio de um exemplo.

Exemplo 1: Considere o experimento "lançar dois dados perfeitos de cores diferentes". Observe que:

- S={(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),
  (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6),
  (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6),
  (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6),
  (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6),
  (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}
  n(S) = 36

- **Seja A o evento "sair 3 no 1º dado".**

A={(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)}, n(A) = 6

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **Seja B o evento "sair 4 no 2º dado".**

B={(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 4), (5, 4), (6, 4)}. n(B) = 6

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

- **Considere o evento A∩B, ou seja, "sair 3 no 1º dado e 4 no 2º dado".**

A∩B={(3,4)}, n(A∩B)= 1

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

- **Considere o evento "sair 4 no 2º dado, sabendo que saiu 3 no 1º dado", ou seja, queremos calcular $P(B|A)$.**

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{1}{6} \qquad \text{ou}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{36} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6 \div 6}{36 \div 6} = \frac{1}{6}$$

Assim, $P(B) = P(B|A) = \frac{1}{6}$, ou seja, a probabilidade de 'sair 4 no 2º dado", não foi afetada pelo fato de "sair 3 no 1º dado", ou ainda a probabilidade de ocorrer *B* não dependeu da ocorrência de *A*.

Além disso, temos que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Neste caso dizemos que *A* e *B* são **eventos independentes**. A probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de ter ou não ocorrido o outro.

Optamos por iniciar com um exemplo com a intenção de introduzir e ilustrar o conceito de eventos independentes. Em seguida, os licenciandos apresentarão o conceito de eventos independentes.

Formalização

Independência de dois eventos: sejam *A* e *B* dois eventos de um mesmo espaço amostral S com P(A)≠0 e P(B)≠0. *A* **e** *B* são ditos **Independentes** se a ocorrência de um deles não afetar a probabilidade do outro ocorrer, isto é, se:

- $P(B|A) = P(B)$ ou
- $P(A|B) = P(A)$ ou ainda se
- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Qualquer uma das três relações acima pode ser usada como definição de independência.

Com isso, podemos afirmar que dois eventos *A* e *B* são **dependentes** quando P(A∩B)≠P(A).P(B).

Nosso propósito é apenas de formalizar o conceito introduzido no exemplo anterior. Logo em seguida, os licenciandos apresentarão outro exemplo de eventos dependentes e independentes a fim de fixar o conceito.

Exemplo 2: Consideremos o experimento "lançar um dado honesto". Observemos que:

S={1, 2, 3, 4, 5, 6}, n(S) = 6

- **Seja A o evento "sair um número par";**

A= {2, 4, 6} $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

- **Seja B o evento "sair um número maior do que 4";**

B= {5, 6} $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

- **Seja C, o evento "sair um múltiplo de 3".**

C= {3, 6} $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

- **Considere os eventos A e B (sair um número par e um número maior que 4).**

A∩B= {6} $P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

A comparação desses valores com os produtos das probabilidades individuais mostra que A e B são independentes, ou seja, $P(A) \cdot P(B) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6} = P(A \cap B)$

- **Considere os eventos B e C (sair um número maior que 4 e um número múltiplo de 3)**

B∩C= {6} $P(B \cap C) = \dfrac{n(B \cap C)}{n(S)} = \dfrac{1}{6}$

A comparação desses valores com os produtos das probabilidades individuais mostra que B e C são dependentes, ou seja, $P(B) \cdot P(C) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9} \neq P(A \cap B) = \dfrac{1}{6}$

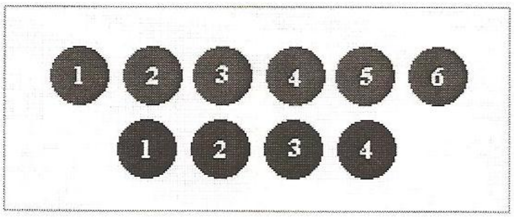
A seguir os alunos farão uma lista de exercícios a fim de fixar os conceitos trabalhados nesta aula e nas aulas anteriores.

Lista 5 (Exercícios de Revisão)

1) Se P(A∪B) = 0,8 , P(A) = 0,6 e P(B) = 0,5 então A e B são independentes?

2) Em uma urna há três bolas com os números 1, 2, 3. São retiradas duas bolas, uma após a outra, sem reposição.
   a) Se saiu "1" na primeira retirada, qual é a probabilidade de ocorrer número par na segunda?
   b) Se saiu "2" na primeira retirada, qual é a probabilidade de ocorrer número par na segunda?
   c) Se saiu "2" na primeira retirada, qual é a probabilidade de ocorrer número ímpar na segunda?

3) Numa urna existem apenas 6 bolas vermelhas e 4 bolas azuis. As bolas vermelhas são numeradas de 1 a 6 e as azuis, de 1 a 4. Retirando aleatoriamente uma bola dessa urna, verificar se os eventos "bola vermelha" e "número par" são independentes.



(Cola da Web)

4) (UEG, 2006) Em um supermercado estão expostas 10 melancias. Três delas estão estragadas e um freguês não sabe isto. O freguês escolheu aleatoriamente duas melancias. Qual é a probabilidade de que ele tenha escolhido duas melancias não estragadas?

5) (UNIRIO, 1996) As probabilidades de três jogadores marcarem um gol cobrando um pênalti são, respectivamente, 1/2, 2/5 e 5/6. Se cada um bater um único pênalti, a probabilidade de todos errarem é igual a:

a) 3% b) 5% c) 17% d) 20% e) 25%

(Cola da Web)

6) A probabilidade de um jogador de basquete acertar a cesta em um lance livre é ¾. Se ele arremessou duas vezes, determine as probabilidades:

a) Que tenha acertado os dois lançamentos;

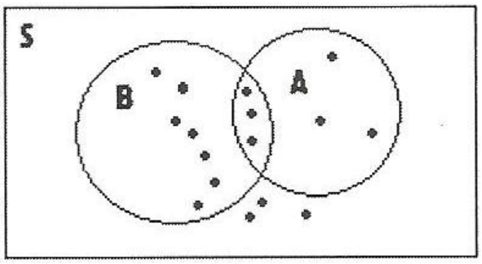
b) Que tenha errado os dois lançamentos;

c) Que tenha acertado só um deles.

7) (PUC CAMPINAS/SP) Lança-se um par de dados não viciados. Se a soma nos dois dados é 8, então a probabilidade de ocorrer a face 5 em um deles é:

a) 1/5 b) 2/5 c) 4/5 d) 1/5 e) n.d.a.

8) (UEL/PR, 2006) No diagrama a seguir, o espaço amostral S representa um grupo de amigos que farão uma viagem. O conjunto A indica a quantidade de pessoas que foram a Maceió e o conjunto B a quantidade de pessoas que já foram a Fortaleza.



A empresa de turismo que está organizando a viagem fará o sorteio de uma passagem gratuita. Considerando que a pessoa sorteada já tenha ido para Fortaleza, assinale a alternativa que indica a probabilidade de que ele também já tenha ido para Maceió.

a) 18,75% b) 30% c) 33,33% d) 50% e) 60%

9) A empresa M&B têm 15.800 empregados, classificados de acordo com a tabela abaixo.

	Sexo		
Idade	**Homens**	**Mulheres**	**Total**
< 25 anos	2.000	800	2.800
25 a 40 anos	4.500	2.500	7.000
> 40 anos	1.800	4.200	6.000
Total	8.300	7.500	15.800

Se um empregado é selecionado ao acaso, calcular a probabilidade de ele ser :

a) Um empregado com 40 anos de idade ou menos;

b) Um empregado com 40 anos de idade ou menos, e uma mulher;
c) Um empregado com mais de 40 e que seja homem;
d) Uma mulher, dado que é um empregado com menos de 25 anos.

(Adaptado da Lista de exercícios de Estatística)

10) (PROJETO FUNDÃO) Uma carta é sorteada de um baralho comum, que possui 13 cartas (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K) de cada naipe (ouros, copas, paus e espadas). Determine a probabilidade de sortearmos uma carta e sair um rei, sabendo que a carta sorteada foi de ouros.

11) (MAUÁ, SP) Uma caixa contém 11 bolas de 1 a 11. Retirando-se uma delas ao acaso, observa-se que a mesma traz um número impar. Determine a probabilidade de que esse seja menor que 5.

Os alunos poderão ter dificuldade na Questão 1, pois acreditamos que ficarão presos apenas aos conceitos de eventos independentes e não perceberão que para resolver terão que utilizar a fórmula $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ para descobrir $P(A \cap B)$. Julgamos, também que poderão ter dificuldade nas questões 5 e 6, itens (b) e (c), pois envolve probabilidades de eventos complementares. Nas demais questões (2, 3, 4, 8, 9, 10 e 11) acreditamos que conseguirão resolver sem grandes problemas, pois são questões que envolvem cálculos simples de Probabilidade Condicional e interseção de eventos independentes.

ANEXO 9. PLANEJAMENTO DA AULA 6

A Aula 6 foi deixada para os licenciandos planejarem sozinhos. A ideia inicial seria permitir que os alunos pudessem revisar os conceitos trabalhados nas aulas anteriores por intermédio de uma lista de exercícios.

Os conteúdos abordados nesta aula são os que já foram estudados, ou seja: experimento aleatório e determinístico; espaço amostral infinito, equiprovável e não equiprovável; conceitos Frequentista, Clássico, Geométrico e Condicional de Probabilidade; probabilidade da união, interseção e complementar de eventos; e eventos dependentes e independentes. Assim, o objetivo da aula é aplicar os conceitos trabalhados anteriormente nas atividades propostas.

A ideia é iniciar a aula, por intermédio de uma conversa informal sobre os conceitos já estudados com a intenção de verificar se os alunos lembram-se deles das aulas anteriores. Após este momento inicial, os licenciandos irão distribuir uma lista de exercícios e dirão que esta será resolvida individualmente, como se fosse um teste, pois este material será recolhido. Segue a lista de exercícios realizada pelos licenciandos:

Lista 6 (Exercícios de Revisão)

1) Uma urna contém 15 bolas: 5 azuis, 5 vermelhas e 5 pretas. Responda o que se pede:
    a) Diga se o espaço amostral é composto de elementos equiprováveis ou não equiprováveis. Justifique sua resposta.
    b) Qual a probabilidade de sair uma bola vermelha?

2) Uma moeda “viciada” é lançada 4000 vezes, ocorrendo 2800 caras. A probabilidade de ocorrer cara nesta moeda é de?

3) Uma moeda foi lançada 200 vezes e forneceu 102 caras, então a frequência relativa de caras é de?

(VIALI, adaptação da APOSTILA IV)

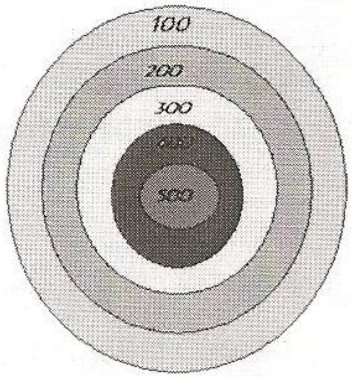
4) Um dado foi lançado 100 vezes e a face 6 apareceu 18 vezes, então a frequência relativa do evento é de?

(VIALI, adaptação da APOSTILA IV)

5) Três moedas são jogadas simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter pelo menos 2 caras?

13) A probabilidade de um atirador acertar o alvo é de 2/5. Sabe-se que os raios das circunferências estão ordenados do maior para o menor e que os mesmos são R_1=1 cm (parte dos 500 pontos), R_2=3 cm (parte de 400 pontos), R_3= 5 cm (parte dos 300 pontos), R_4= 8 cm (parte de 200 pontos), R_5= 12 cm (parte de 100 pontos). Como mostra a figura:

a) Calcule a probabilidade do atirador fazer 500 pontos.
b) Qual a probabilidade do atirador errar o alvo?
c) Qual é a probabilidade do atirador errar o alvo correspondente à região de 500 pontos?



14) No experimento de registrar o número de peças defeituosas fabricadas por uma máquina, num determinado dia, determine o espaço amostral e os eventos "número de peças defeituosas num determinado dia é 8" e "número de peças defeituosas num dia é menor que 5".

15) Classifique os experimentos abaixo em aleatório e determinístico:

a) Joga-se um dado e observa-se o número obtido na face superior.
b) Joga-se uma moeda 4 vezes e observa-se o número de caras obtido.
c) Anotar a velocidade de um corpo atingir o solo, após cair em queda livre de certa altura.
d) Um lote de 10 peças contém 3 defeituosas. As peças são retiradas uma a uma sem reposição até que a ultima defeituosa seja encontrada. Conta-se o número de peças retiradas.
e) Uma lâmpada nova é ligada, e observa-se o tempo gasto até queimar.
f) A velocidade máxima para um veículo realizar uma curva de raio R.

16) Lançado sucessivamente um dado e uma moeda, qual é a probabilidade de se obter o resultado (cara, 5)? Qual a probabilidade de se obter (coroa, nº par)?

17) Retirando-se duas cartas ao acaso, sem reposição, de um baralho de 52 cartas, qual a probabilidade do naipe da primeira ser de paus e da segunda ser copa?

18) Uma moeda é lançada 4 vezes. Qual é a probabilidade de sair pelo menos uma cara?

19) Um número é sorteado ao acaso entre os 100 inteiros de 1 a 100.

a) Qual a probabilidade de o número ser par?
b) Qual a probabilidade de o número ser par, dado que é menor que 50?
c) Qual a probabilidade de o número ser divisível por 5 dado que é par?