Universidade Federal do Rio de Janeiro

AS CÔNICAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR BRASILEIRA: HISTÓRIA, PRESENTE E FUTURO

por
Mirella Bordallo

2011

Mirella Bordallo

AS CÔNICAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR BRASILEIRA: HISTÓRIA, PRESENTE E FUTURO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho.

Rio de Janeiro
2011

Bordallo, Mirella
B727c As Cônicas na matemática escolar brasileira: história, presente e futuro/ Mirella Bordallo. – Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011.
ix, 71f.: 30 cm.

Orientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho
Dissertação (mestrado) – UFRJ/ IM. Programa de Pós-graduação em Ensino da Matemática, 2011.
Referências: f.35-37.

1. Seções cônicas - Tese 2. Matemática - Estudo e ensino 3. Matemática - História I. Carvalho, João Bosco Pitombeira de. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. I. Instituto de Matemática III. Título.

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação:
aos meus pais, por tudo o que fizeram
e fazem por mim, por terem me dado
educação, a oportunidade de chegar até
aqui e por estarem sempre ao meu lado.
Ao meu avô Eurico por ter sido um exemplo
como pessoa, marido, pai e avô e a minha
avó Mathildes, por ser um exemplo de força
e superação, um exemplo de vida.

Agradecimentos

Aos meus pais, ao meu irmão, à tia Rô, à tia Maria Clara e à toda família e agregados pelo carinho, atenção, paciência e compreensão nos momentos de ausência.

A todos os meus professores e amigos do Dínamis, Colégio Santo Agostinho e UFRJ que, juntos com a família, me permitiram chegar até aqui; em especial aos professores e amigos Luiz Roberto e Anselmo pela amizade, aos professores Márcia, Chaaya, Pardal e Vinícius por tudo o que me ensinaram, por terem minha admiração e por serem exemplos de amizade e caráter e agradeço aos dois grandes amigos Júlia e Gabriel pelo apoio, paciência e amizade.

Ao professor Pitombeira por ter me orientado com paciência e dedicação. Sem ele, nada disso seria possível. Agradeço, também, aos professores da banca Bruno, Tatiana e Victor, pelas valiosas sugestões e pelo tempo que dedicaram ao meu trabalho.

Ao CPII, em especial ao NUDOM e suas funcionárias pelo material, ajuda e atenção, aos colégios Santo Agostinho (Leblon), São Bento e CAP UFRJ por permitir que eu pesquisasse na biblioteca, aos colegas professores Ana Cristina, Chaaya e Daniella pelo empréstimo de livros, à Julie pela ajuda com o abstract e aos funcionários das bibliotecas da UFRJ pela atenção.

Obrigada a todos, pois esse trabalho é resultado de tudo que eu já vivi e, portanto, todos os que fazem ou fizeram parte da minha vida contribuíram de alguma forma com ele.

A todos, a minha admiração e profundo agradecimento.

Resumo

AS CÔNICAS NA MATEMÁTICA ESCOLAR BRASILEIRA: HISTÓRIA, PRESENTE E FUTURO

por
Mirella Bordallo

Orientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho

O objetivo desse trabalho é contribuir com o estudo da história do ensino de matemática no Brasil, especialmente nos últimos anos escolares, atualmente chamados de ensino médio. A pesquisa tem por objeto a investigação das seções cônicas na matemática escolar, das transformações ocorridas na apresentação dessas curvas nos programas de ensino, nas leis e nos livros didáticos desde 1892 até os dias de hoje. O trabalho busca encontrar na trajetória das seções cônicas e na história do seu ensino a resposta para a seguinte questão e seu desdobramento: como ensinar seções cônicas com unidade nos dias de hoje, como mostrar para os alunos que elipse, parábola e hipérbole pertencem a uma mesma família? Para responder a esta questão, utilizamos, como principais fontes de pesquisa, livros didáticos desse período, programas de ensino e legislações de ensino.

Palavras-chave: Seções Cônicas, Ensino Médio, História de Educação Matemática, Livros Didáticos.

Rio de Janeiro
Outubro de 2011

Abstract

THE CONICS IN BRAZILIAN SCHOOL MATHEMATICS: HISTORY, PRESENT AND FUTURE

by
Mirella Bordallo

Orientador: João Bosco Pitombeira de Carvalho

The goal of this work is to contribute to the study of the history of mathematics education in Brazil, especially in the final years (currently called "Ensino Medio"). The objective of this research is to investigate the Conic Sections in school mathematics, including the transformations in presentation of these curves in teaching programs, textbooks and laws from 1892 to the present day. This work seeks to find the trajectory of the Conic Sections, the history of their teaching and answer the following questions. How do you teach Conic sections as one entity nowadays? How do you show the students that the ellipse, the parabola and the Hyperbola belong to the same family? To answer these questions, we will use as major sources, historic textbooks, education programs and education laws.

Key-words: Conic Sections, High School, History of Mathematics Education, Textbooks.

Rio de Janeiro
Outubro de 2011

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Essa dissertação foi a oportunidade que encontramos para tentar responder algumas dúvidas e angústias, tais como a queda na qualidade do ensino público, as mudanças curriculares de matemática e suas consequências, o domínio do vestibular sobre o currículo do ensino médio, a preferência por alguns assuntos da matemática em detrimento de outros e, ainda, a redução do currículo de matemática, apesar do aumento da carga horária e de dias letivos.

As angústias aqui citadas foram motivações iniciais aparentemente simples, mas que na verdade são muito amplas. Era preciso formular um tema, então decidi focar essas angústias nas seções cônicas, por serem elas um tema que me desperta interesse desde o ensino médio. A graduação acrescentou pouco a esta reflexão, a qual julgo ser, atualmente, preterida pelos vestibulares e, consequentemente, pelos livros didáticos e professores do ensino médio. Encontrei nesse trabalho, portanto, a possibilidade de aprender mais sobre elas, sua história e a de seu ensino nos anos escolares finais.

Então, partindo dessas inquietações iniciais, buscaremos entender como foi o progresso do ensino de seções cônicas no Brasil, assunto que, em 2004, no Colégio Santo Agostinho, era lecionado no terceiro ano do ensino médio, analiticamente, a partir da definição focal, sem tirar o centro e o vértice da origem e os eixos das curvas eram sempre os eixos cartesianos. No presente estudo, tentaremos encontrar uma sugestão para tornar o ensino dessas curvas justificável, para que o aluno consiga entender que elipse, hipérbole e parábola pertencem a uma mesma família.

Acreditamos que a escola tem um papel que vai muito além de ensinar só o que é útil - no sentido de consumo imediato - e que o ensino médio deve ter um caráter de formação geral e cultural. O objetivo da escola precisa estar voltado a formar cidadãos, seres pensantes, capazes de argumentar, inventar, fazer críticas com fundamentos, dar sugestões construtivas e solucionar problemas. Mas a realidade do atual ensino médio é bem diferente, seu objetivo limita-se a preparar o aluno para passar no vestibular. Pensando nessa realidade e no que acreditamos, fomos buscar soluções para o ensino das seções cônicas na sua história e na história do seu ensino no Brasil, conforme enfatizamos ao longo dessa introdução.

1.1 Organização da Pesquisa

Nosso objetivo é conhecer o desenvolvimento do ensino de seções cônicas, no Brasil, nos anos escolares finais, sob a perspectiva de em qual campo da matemática elas já foram ensinadas e se eram apresentadas de forma unificada ou fragmentada. Sendo que consideraremos a apresentação fragmentada quando não houver qualquer relação entre elipse, hipérbole e parábola e unificada quando se mostrar que essas três curvas formam a família das cônicas.

Acreditamos que a apresentação fragmentada atual não faz sentido aos alunos, tornando-se uma "decoreba" que não terá qualquer serventia enquanto uma apresentação unificada, que é o que defendemos, resgata o caráter de formação geral e cultural que o ensino médio deve ter e mostra o sentido das cônicas aos alunos.

Dessa maneira organizaremos nosso trabalho em quatro capítulos. Nesse primeiro capítulo introduzimos nosso objetivo, nossa metodologia e um resumo do desenvolvimento histórico das seções cônicas.

No capítulo 2 vamos estudar o desenvolvimento de ensino das cônicas no Brasil por meio dos programas de ensino de matemática, das leis de ensino e orientações curriculares. Nele, buscaremos delimitar um período para reconstruir a história do ensino, utilizando os programas de ensino do Colégio Pedro II. Nossa análise começou com o ano de 1854, "quando os exames preparatórios passaram a seguir os programas desse colégio".[1] Sendo nosso interesse as seções cônicas, partiremos, na verdade, do ano de 1892, primeiro programa analisado que possui cônicas. Logo, nosso estudo abrange o período compreendido entre 1892 e 2011.

Veremos, ainda no segundo capítulo, como o ensino de 1892 até 2011 pode ser periodizado; referimo-nos aos anos em que as cônicas eram ensinadas, em qual série, em qual campo da matemática e como elas foram ficando fragmentadas nesses programas, leis e orientações. O histórico nos dará o contexto de inserção de cada livro analisado no terceiro capítulo.

Com essas informações, vamos para foco desse trabalho que é o capítulo 3, no qual analisaremos o progresso do ensino de cônicas por meio dos livros didáticos para saber: se esse ensino já foi unificado; em que momento este deixou de ser; e, ainda, se encontramos no passado alguma sugestão para reunificá-las no presente. Aqui, listaremos todos os livros que serão analisados, mostraremos como as cônicas eram apresentadas por períodos e analisaremos alguns livros mais detalhadamente.

Ao final temos a conclusão com os resultados da nossa pesquisa e uma proposta para recuperar a unificação das cônicas no ensino atual e seu caráter formativo, pois defendemos que o ensino médio tenha o papel de dar ao aluno uma formação geral e cultural.

O leitor que tiver interesse nas seções cônicas, se não achar neste trabalho exatamente o que procura, encontrará, pelo menos, algumas informações que lhe poderá ajudar a formular ideias e sinalizar caminhos a seguir, pesquisas a desenvolver.

1.2 Desenvolvimento Histórico

Nossa pesquisa nos indicou que o estudo do desenvolvimento histórico das seções cônicas é importante para mostrar que a forma como as cônicas são apresentadas nos livros didáticos modernos, resultam no distanciamento da maneira como foram concebidas.

Pelo que se conhece atualmente, as cônicas foram estudadas pela primeira vez pelos gregos[2] na resolução do problema de duplicação do cubo. O primeiro a estudá-las foi Menêcmo, sobre quem se tem poucas informações. A razão pela qual ele recebe o crédito é que Eratóstenes,

[1] Vechia, Ariclê e Lorenz, Karl Michael, *Programa de Ensino da Escola Secundária 1850-1951*, p. vii

[2] O melhor relato, visto por Julian Lowell Coolidge, do início da história das cônicas está na parte introdutória de Apolônio, 262-200 B.C., *A Treatise on Conic Sections*, editado por Thomas Little Heath, Cambridge, 1896. Ele encontrou um estudo ainda mais completo em Zeuthen, Hieronimus Georg, 1839-1920, *Die Lehre von den Kegelscknitten im Altertum*, Kopenhagen, 1886.

citado por Eutocio em seu comentário sobre o tratado de Arquimedes “Sobre a Esfera e o Cilindro”, explica como os geômetras gregos estavam confusos com o problema da duplicação do cubo:

> “Enquanto, por um longo tempo, ninguém sabia o que fazer, Hipócrates de Quios foi o primeiro a observar que, se entre duas retas em que a maior é o dobro da menor, fosse descoberto como encontrar duas médias proporcionais, em proporção contínua, o cubo seria duplicado, e assim ele transformou a dificuldade do problema original em uma outra, não menor do que a anterior.”

Eutocio continua, afirmando que Menêcmo encontrou duas soluções: uma pela interseção de uma hipérbole retangular e uma determinada parábola e, outra, achando a intersecção de duas parábolas.[3] Proclus também se refere a ele como o descobridor das seções cônicas.

Para Menêcmo cada cônica era obtida de um tipo diferente de cone. Logo, as cônicas surgem com tratamento sintético mas fragmentadas, elas só são unificadas com Apolônio.

O escritor seguinte a lidar com o tema foi Aristeu, o Ancião, que se pode colocar entre Menêcmo e Euclides. Seu trabalho foi intitulado ‘*Solid Loci*’. Todas as informações sobre ele são obtidas nos trabalhos de Pappus, cujo relato será encontrado em Pappus, 300-?, *La Collection Mathématique*, traduzido por Ver Ecke, Bruges, 1933, vol. ii, pp. 503 ff. Um resumo é encontrado em Apolônio, 262-200 B.C., *A Treatise on Conic Sections*, editado por Thomas Little Heath, Cambridge, 1896, pp. XXXI, XXXII.

> “Os quatro livros de Cônicas de Euclides foram concluídos por Apolônio, que acrescentou mais quatro, e produziu oito livros de cônicas. Aristeu, que escreveu os cinco livros existentes de lugares geométricos sólidos, chamou uma das seções cônicas a seção do cone acutângulo, uma outra, a seção do cone de ângulo reto, e a terceira, a seção do cone obtusângulo...”

Até Apolônio cada cônica era seção de um plano perpendicular à geratriz de um tipo de cone: a elipse era obtida a partir de um cone acutângulo, a parábola de um cone retângulo e a hipérbole de um cone obtusângulo. Apolônio deu, portanto, um grande passo no desenvolvimento das cônicas; em outras palavras, ele as unificou obtendo-as de um mesmo cone, que pode ser qualquer um com seções circulares. Esse grande geômetra tornou as três curvas ainda mais próximas - uma família -, mas essa visão unificada se perdeu no ensino das cônicas ao longo dos séculos.

A abordagem feita por Apolônio foi a utilizada no desenvolvimento das cônicas até o século XVII. Muitos tentaram superá-lo e alguns, como Claude Mydorge, por exemplo, conseguiram encontrar algo mais simples, mas raramente produziram algo comparável ao seu melhor. Veremos, agora, algumas contribuições de outros estudiosos que partiram dos trabalhos de Apolônio.

Pappus escreveu a obra *Coleção Matemática* que é um comentário sobre todos os matemáticos gregos conhecidos no seu tempo. É impossível definir o que é copiado diretamente dos escritores anteriores e o que é original em seu trabalho. Sua contribuição mais importante para o conhecimento das cônicas foram os seus resultados sobre foco, diretriz e excentricidade. Pappus dá a mesma definição às três curvas, que variam de acordo com o valor da excentricidade.

[3] Apolônio, 262-200 B.C., *A Treatise on Conic Sections*, editado por Thomas Little Heath, Cambridge, 1896, pp. xviii, xix.

Claude Mydorge (1585-1647) segue a tradição clássica mais estreita, e não faz nada além de tentar cobrir todos os fatos conhecidos sobre as cônicas. Sua contribuição é salientar temas pelos quais tem um interesse especial. Seu trabalho[4] é dividido em quatro livros.

Para Mydorge, cone é qualquer um com seções circulares, e o plano secante não precisa ser perpendicular a qualquer elemento. Os trabalhos de Mydorge são abundantes em teoremas, mas oferecem pouco em termos de métodos gerais.

Não mais que seis anos após a publicação de Mydorge, outro grande trabalho apareceu lidando com o mesmo assunto, em 1647, a grande obra de St. Vincent de Bruges, *Opus quadraturae circuli et sectionum coni*. St. Vincent segue a tradição clássica, deduzindo as propriedades das curvas a partir de suas equações. Ele tenta melhorar Apolônio, mas não se propõe a fazer uma ruptura completa. Cada cônica tem seu próprio livro, a elipse produz 204 teoremas, a parábola 364 e 249, a hipérbole.

No século XVII, Fermat e Descartes desenvolvem, de forma independente, a geometria analítica, única abordagem dada às cônicas no ensino moderno. Com a criação da geometria analítica muitos optaram por essa nova metodologia, outros continuaram preferindo a abordagem sintética e alguns contribuíram para o desenvolvimento das cônicas nesses dois campos da matemática. Historicamente, tivemos, a partir do século XVII, a geometria analítica e sintética convivendo harmoniosamente no desenvolvimento dessas curvas. Inclusive, com nosso conhecimento analítico é possível extrair, dos sintomas das curvas descritas por Apolônio, a equação dessas curvas; por esta razão, alguns defendem que ele fez um estudo analítico das cônicas, mas Michael N. Fried e Sabetai Unguru[5] argumentam corretamente que isso não é verdade. Desta forma, até a invenção da geometria analítica, que só ocorreu no século XVII com Fermat e Descartes, as cônicas se desenvolveram por meio do tratamento sintético, sendo notável o avanço que proporcionaram à geometria projetiva.

A contribuição de Fermat às cônicas é encontrada principalmente no seu tratado *Ad locos Planos et Solidos Isagoge*, que está contido no vol. 1 de Fermat, Pierre, 1608-1665, Œuvres, traduzido por Tannery and Henry, Paris, 1886-1932. O principal problema é descobrir que tipo de lugar é determinado por uma equação da primeira ou segunda ordem, a ferramenta essencial usada por Fermat era mudança de coordenadas.

Fermat mostrou que qualquer equação do segundo grau pode ser tratada por métodos similares, e que quaisquer destas equações representam uma cônica, um par de retas ou uma reta contada duas vezes. Ele também estudou a solução de equações cúbicas e quárticas, reduzindo-as à procura da interseção de duas cônicas.

O outro inventor da geometria analítica, René Descartes, não tinha seu interesse principal voltado para as seções cônicas. O seu contato mais próximo com elas veio em sua solução para o famoso problema de Pappus, para o caso de quatro linhas. Escolhamos o cruzamento de duas das linhas dadas como origem, e uma das quatro distâncias como y. Isto dá a equação do lugar geométrico na forma[6]

$$y^2 = 2my - \frac{2n}{z}xy + \frac{bcfg(lx - x^2)}{ez^3 - cgz^2}.$$

[4]Mydorge, Claude, 1585-1647, *Glaudi Mydorgi patricii Parisini Prodromi catopticorum et diopticorum rive conicorum*, Paris, 1641

[5]Michael N. Fried e Sabetai Unguru. *Apollonius of Perga's conica: Text, context, subtext.* (Mnemosyne. Supplementum. 222). Leiden: Brill. 2001.

[6]Descartes, Réné, 1596-1650, *La géométrie*, edition Hermann, 2nd ed., Paris, 1927, p. 22.

Sendo C o ponto (x, y), Descartes mostra que C descreve uma cônica. Ele discute em detalhes os diversos casos que podem surgir.

O primeiro passo em direção ao tratamento puramente focal, presente no ensino atual das cônicas e que tornou a fragmentar as cônicas, foi dado no século XVII por Philippe de La Hire que, em seu primeiro trabalho sobre o assunto, o *Nouvelle méthode en géometrie pour les sections et les superficies coniques* de 1673, considera cada tipo de curva separadamente, começando com propriedades características e introduzindo cada curva a partir de sua definição focal.

Os trabalhos de La Hire sobre as cônicas não se resumiram a isso, mas infelizmente, foi essa contribuição que se destacou na história das cônicas que, conforme vimos mencionando, começaram a ficar fragmentadas. É exatamente por não expor a relação destas curvas que Lebesgue critica, em seu livro *Les Coniques*[7], o estudo das cônicas pela definição focal.

Para La Hire cada tipo de curva é considerado separadamente: a elipse, por exemplo, aparece como a curva em que a soma das distâncias entre os dois focos é constante. Ele segue com *Les lieux geometriques*, que é uma continuação do *Nouvelle méthode en géometrie pour les sections et les superficies coniques* publicada no mesmo ano, e apresenta uma simples discussão cartesiana das cônicas.

Uma tentativa de reunificar as cônicas foi feita por Dandelin no século XIX, com um teorema mostrando que as seções do cone que geram cada cônica coincidem com a definição focal delas. Veremos, porém, que, no ensino, essa tentativa se perde com o fim do tratamento sintético das cônicas. No ensino moderno essa unificação foi totalmente perdida, mas do ponto de vista geral e cultural da matemática ela deve ser resgatada.

O primeiro escritor a colocar o estudo algébrico das cônicas em algo que se pode chamar de uma base moderna foi o Marquês de L'Hospital. Ball, Walter William Rouse, 1852-1925, *A Short Account of the History of Mathematics*, London, 1901, p. 380 afirma que: "Ele escreveu um tratado sobre as cônicas analíticas que foi publicado em 1707, e durante quase um século foi considerado uma obra de referência sobre o assunto". L'Hospital combinou os métodos sintéticos e analíticos. Principia o trabalho com a parábola definida pela propriedade do foco-diretriz, e inicialmente estabelece a equação padrão

$$y^2 = px.$$

Define a elipse pela propriedade dos dois focos e encontra a forma padrão

$$y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2}.$$

A hipérbole é inicialmente tratada como a elipse; a equação padrão, exceto pelos expoentes, é escrita

$$y^2 = \frac{c^2x^2}{t^2} - c^2.$$

[7]Lebesgue, Henri: *Les Coniques*. Paris: Gauthier-Villars, 1942.

Ele é um pouco vago quanto ao fato de se os dois ramos devem ser contados como parte da mesma curva ou não. As retas

$$y = \frac{cx}{t}, y = -\frac{cx}{t}$$

são definidas como assíntotas, e as suas propriedades facilmente encontradas.

O capítulo especialmente dedicado à hipérbole é seguido por outro em que as três cônicas são tratadas juntas. A maioria dos livros didáticos que apresentam as cônicas unificadas o fazem dessa maneira, ou seja, estudam as três curvas separadamente e depois as três juntas.

L'Hospital definiu o padrão na exposição da teoria por muitos anos, embora alguns escritores tenham feito melhorias em alguns detalhes.

Leonhard Euler, gênio universal da matemática, não parece ter contribuído muito para o conhecimento das cônicas, mas sua abordagem foi diferente da de seus predecessores, e por isso merece alguma atenção. Ele não tinha, como L'Hospital, intenção de produzir um bom livro sobre curvas particulares, mas estava escrevendo sobre as aplicações do cálculo em geral, e aplicações às curvas, em particular. Uma cônica era uma curva cuja equação cartesiana era quadrática. No entanto, estranhamente, quando ele trata dessas curvas particulares, deixa de lado o cálculo. Sua equação geral é[8]

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy,$$

$$yy + \frac{\varepsilon x + \gamma}{\zeta} y + \frac{\delta xx + \beta x + \alpha}{\zeta} = 0.$$

No sexto capítulo do vol. ii, as três cônicas são tratadas em detalhe. A equação geral é

$$yy = \alpha + \beta x + \gamma xx;$$

$\gamma = 0$ dá uma parábola; $\gamma > 0$ uma hipérbole; $\gamma < 0$ uma elipse. A elipse

$$yy = \alpha + \beta x - \gamma xx$$

torna-se

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2);$$

[8]Euler, Leonhard, 1707-1783, *Introductio ad analysin infinitorum*, Lausanne, 1748, Vol. II, p. 65; Euler, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, traduzido por J. B. Labey, Paris, 1796, Vol. II, p. 40

$$\alpha = b^2, \beta = 0, \gamma = \frac{b^2}{a^2}.$$

A passagem da elipse para a parábola é feita em um processo como este. Modernizando a notação, Euler trabalha como segue:

A equação na forma grega é

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x(2a - x).$$

Isto pode ser escrito

$$y^2 = 2(1+e)dx - (1-e^2)x^2,$$

onde e é a excentricidade e d a distância do foco ao vértice. Agora mantendo d constante e passando ao caso limite, onde $e = 1$,

$$y^2 = 4dx.$$

O tratamento da hipérbole segue as mesmas linhas que o da elipse.

Euler não faz nenhuma menção à diretriz. Na verdade, o teorema foco-diretriz de Pappus praticamente desaparece por séculos após sua publicação.

Então, de maneira resumida, podemos observar que, historicamente, as seções cônicas surgem com Menêcmo, sinteticamente fragmentadas e seu desenvolvimento segue assim até Apolônio, que, ainda sinteticamente unifica as cônicas. No século XVII, Fermat e Descartes inventam a geometria analítica e a partir de então as cônicas passam a se desenvolver sintética e analiticamente unificadas até de La Hire, que desenvolveu o tratamento puramente focal que fragmentou o estudo das cônicas. No século XIX, Dandelin tentou reunificar essas curvas com um teorema que relaciona a definição focal com as seções de um cone.

Capítulo 2

As Cônicas nos Programas de Ensino, nas Leis e Orientações Curriculares

Nosso objetivo inicial era buscar respostas na evolução do ensino das seções cônicas no Brasil apenas por meio dos livros didáticos mas, no decorrer do trabalho, percebemos que não seria possível um estudo adequado sem analisar os programas de ensino, as leis, as orientações curriculares, ou seja, sem pesquisar o contexto educacional em que o livro está inserido. Decidimos, então, dedicar um capítulo a essa pesquisa, fundamental para entender a evolução das cônicas e para periodizar a análise dos livros que será feita no capítulo seguinte.

De 1892, primeiro ano em que as seções cônicas aparecem no programa do Colégio Pedro II, até 1930, último ano antes da Reforma Campos, nossa pesquisa se baseia nos programas de ensino de matemática do Colégio Pedro II por ser este, nessa época, o colégio modelo.

Em 1931, com um conjunto de decretos conhecido como Reforma Francisco Campos, temos a primeira legislação de ensino de âmbito nacional. Então, de 1931 a 1941, ano que antecedeu a Reforma Capanema, nosso objeto de análise é o programa determinado por essa mesma reforma, como pode ser visto no Anexo A.

Já em 1942, um novo conjunto de decretos ficou conhecido como Reforma Capanema; logo, de 1942 até 1950, um ano antes de outra mudança, vamos analisar o programa desta nova reforma, apresentado no Anexo B. Em 1951, mais uma nova mudança, conhecida como ajuste de 51 estabeleceu um programa mínimo, que pode ser encontrado no Anexo C. Baseado nesse programa, iremos analisar o período de 1951 até 1960, ano que antecede a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação.

Em 1961, temos a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira que estabeleceu como responsabilidade do Conselho Federal de Educação definir o programa mínimo a ser seguido pelos estabelecimentos de educação. Mas, na prática, o Conselho Federal de Educação não cumpriu com essa determinação da lei, não definiu nenhum programa mínimo, o que representou uma autonomia das escolas em relação ao programa de ensino a ser adotado.

Essa autonomia torna praticamente inviável basear nossa pesquisa em programas, a partir de 1961. Mas como as décadas de 1960 e 1970 são marcadas pelo Movimento da Matemática Moderna, achamos importante analisar um programa desse período para entendermos as mudanças que esse movimento defendia. Optamos por analisar a sugestão de programa do Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM), discutida no IV Congresso Nacional de Ensino da Matemática, em Belém do Pará, no ano de 1962 - exatamente por ser uma sugestão que foi discutida em âmbito nacional. Tal sugestão pode ser vista no anexo D.

Já a partir da década de 1980 até os dias atuais, a única referência que encontramos são os Parâmetros Curriculares do ensino médio de 2000. Por isso, no período de 1980 até 2011, analisaremos apenas os livros didáticos.

Para alcançar o objetivo deste capítulo, ou seja, analisar a evolução do ensino das seções cônicas no Brasil, nos anos escolares finais, por meio dos programas de ensino, leis e orientações curriculares, buscando descobrir se a unificação das cônicas já esteve presente no ensino e em que momento ela se perdeu, foram analisados os programas do Colégio Pedro II de 1850 a 1930, obtidos na dissertação BELTRAMI, Josilene. *Os Programas de Matemática do Colégio Pedro II: 1837- 1931*. Rio de Janeiro: PUC-Rio, dissertação de mestrado, 2000; os programas da Reforma Campos, que podem ser visto no anexo A, da Reforma Capanema, que podem ser encontrado no anexo B, do Ajuste de 51, apresentado no anexo C, e da sugestão de 1965 do GEEM, presente no anexo D.

Em 1892 as seções cônicas são ensinadas apenas superficialmente na primeira cadeira do segundo ano no curso de geometria e trigonometria, dentro de geometria especial. Já em 1893 e em 1894, na primeira cadeira do terceiro ano e no quarto ano, também no curso de geometria e trigonometria eram ensinadas elipse, parábola e hipérbole, ou seja, nesses programas as cônicas já não eram apresentadas de forma unificada, o nome “cônicas” nem sequer era mencionado. Os livros adotados nesses três anos eram os compêndios de Ottoni, que não apresentam nada sobre o assunto, o que nos deixa sem saber se o assunto era tratado em sala de aula, de que forma e qual era a fonte utilizada pelos professores e pelos alunos.

Em 1895 aparece, pela primeira vez, o curso de geometria analítica, na primeira cadeira do quarto ano, em geometria geral, cálculo e geometria descritiva. A partir desse ano até 1898, as cônicas aparecem na primeira cadeira do terceiro ano no curso de geometria e trigonometria em geometria especial, em que são ensinadas noções sobre as seções cônicas; ressaltamos que o livro adotado, que é de Timótheo Pereira, não apresenta cônicas. Além disso, temos, na primeira cadeira do quarto ano em geometria analítica, o ensino das equações das três curvas referidas a seus eixos (no caso da parábola, a seu eixo e à tangente por seu vértice) e o ensino da equação polar de cada uma das três curvas. No programa do quarto ano a unificação das cônicas também é inexistente, mas temos o primeiro livro didático a ser adotado pelo Colégio Pedro II, que é o *Elementos de Geometria Analítica* de Sonnet e Frontera, que possui alguns capítulos dedicados às seções cônicas. Pelos estudos, 1895 é o primeiro ano em que podemos ter uma ideia de como as cônicas eram ensinadas.

Em 1898, com os mesmos livros, um estudo superficial das cônicas passou a ser feito no curso realista do quinto ano, na terceira cadeira, de geometria e trigonometria em geometria especial. Um estudo das equações, semelhante ao que era feito no quarto ano dos três anos anteriores, passou a ser feito na quarta cadeira, de cálculo e geometria descritiva em geometria analítica, do quinto ano.

De 1899 a 1906, no quarto ano, o ensino de geometria abrange o estudo das seções cônicas, com o traçado e as principais propriedades das curvas correspondentes. Aparentemente, é o período em que essas curvas são apresentadas da forma mais unificada até então. Não há indicação de livros no programa. De 1912 até 1914, as seções cônicas são ensinadas na quarta série.

De 1915 a 1918, noções sobre elipse, hipérbole e parábola aparecem no programa do primeiro ano, no curso de geometria no espaço e trigonometria retilínea, em geometria no espaço; mas nesse programa, mais uma vez volta a ser ignorado que as três curvas pertencem a uma mesma família.

Em 1919 entramos num longo período sem cônicas e sem geometria analítica no programa do Colégio Pedro II, período que só termina em 1929, com o ensino de noções sucintas e elementares sobre as curvas de segundo grau: elipse, hipérbole e parábola no curso de geometria do quarto ano; e com o estudo da elipse, da hipérbole, da parábola e delas como seções cônicas no curso de geometria elementar, em geometria de três dimensões, do sexto ano. Aqui observamos um resgate da unificação dessas curvas, no quarto ano temos a unificação algébrica, as três estudadas como curvas do segundo grau e no sexto ano a unificação geométrica, as três estudadas como seções do cone. A geometria analítica também reaparece nesse ano, mas não com o ensino de cônicas. Em 1930, essas curvas são novamente excluídas do programa.

Em 1931, houve a Reforma Campos, que criou a disciplina matemática, juntando as disciplinas aritmética, álgebra e geometria. Na prática a reforma ocorreu de forma gradativa, havendo um período de transição. Essa reforma estabeleceu as regras de funcionamento do ensino secundário compondo-o de duas etapas, a primeira etapa eram cinco anos de curso fundamental, que tinha caráter formativo, e a segunda etapa eram dois anos de curso complementar, que objetivava preparar o aluno para a graduação. O programa estabelecido pela Reforma Campos apresentava, de maneira fragmentada, o estudo da elipse, hipérbole e parábola, suas equações cartesianas e polares no curso complementar Pré-Médico. Já o curso complementar Pré-Politécnico, apresentava, na primeira série, em geometria, o estudo, aparentemente unificado, das principais propriedades das cônicas e, na segunda série, em geometria analítica, o mesmo estudo fragmentado que era feito no complementar Pré-Médico.

Em 1942, uma nova reforma, a Reforma Capanema, estabeleceu uma nova divisão para o ensino secundário, que a partir de então foi dividido em dois ciclos, o primeiro, chamado curso ginasial, tinha duração de quatro anos, destinados a dar aos estudantes os elementos fundamentais do ensino secundário e o segundo, era formado por duas opções, o curso clássico ou científico, cada qual com a duração de três anos, destinados a consolidar a educação ministrada no curso ginasial e bem assim desenvolvê-la e aprofundá-la. O curso clássico, aprofundava a formação intelectual, além de um maior conhecimento de filosofia e um acentuado estudo das letras antigas; e o curso científico, aprofundava a formação científica dos estudantes.

Esta reforma possuía um programa que apresentava cônicas na terceira série do curso clássico e científico em geometria e em geometria analítica. Em geometria, na unidade que estudava Curvas Usuais, era estudada a definição e as propriedades fundamentais da elipse, hipérbole e parábola e, depois, era feito o estudo dessas como seções do cone, ou seja, era mostrado que as três curvas estudadas inicialmente separadas pertencem a uma mesma família. Já em geometria analítica, na unidade que estudava os lugares geométricos, eram estudadas as equações reduzidas das três curvas, nesse ponto a unificação dessas curvas é ignorada.

Um ajuste feito em 1951, teve como objetivo simplificar os programas e dar maior flexibilidade ao currículo, já que a década de 1950 marcou o início da popularização do ensino. Para alcançar esse objetivo transformou os cursos clássico ou científico da Reforma Capanema em um só, em três anos de curso colegial e estabeleceu um programa mínimo que possuía seções cônicas na matéria de geometria do primeiro ano do colegial, na última unidade do progama. Segundo esse programa, cada curva tinha uma seção, de forma que as três curvas eram estudadas separadamente, com ênfase em: definição, traçado e tangente, círculos principal e diretores e excentricidade (só na elipse e na hipérbole), além das assíntotas, no caso da hipérbole, e da diretriz, no caso da parábola. Após esse estudo, uma seção estudava as três curvas juntas, como seções determinadas por um plano numa superfície cônica de revolução, onde era visto o teorema de Dandelin, que mostra que essas curvas pertencem à mesma família.

Em julho de 1962, no IV Congresso Nacional de Ensino da Matemática discutiu-se uma proposta que atendesse às ideias do Movimento da Matemática Moderna (M.M.M.). Para ilustrar a tendência desse movimento optamos por analisar nesse capítulo uma sugestão de programa elaborada pelo GEEM, publicada em 1965. Esta sugestão apresenta noções sobre cônicas no terceiro ano do colegial, na unidade III, de geometria analítica. Na teoria esse programa apresenta as cônicas unificadas.

Veremos no próximo capítulo que a abordagem analítica sugerida pelo GEEM se concretizou nos livros de matemática moderna que abordavam cônicas, mas a escolha do terceiro ano colegial não foi seguida por todos. Era de se esperar uma abordagem puramente analítica nesse período já que o Movimento da Matemática Moderna era a favor da algebrização da geometria, com uma valorização da geometria analítica em detrimento da geometria sintética.

Mas o que observamos foi que o Movimento da Matemática Moderna marcou o fim da abordagem sintética. Mesmo com o fim do movimento, a abordagem continuou a ser apenas analítica e, como veremos no próximo capítulo, sempre nos livros do último ano do ensino médio.

Observamos na tabela abaixo como foi a evolução do ensino das seções cônicas nos períodos analisados acima, no que diz respeito ao campo da matemática em que elas eram apresentadas e se a maneira como eram apresentadas era unificada ou fragmentada.

PERÍODO	ANOS	FORMA COMO AS CÔNICAS ERAM ENSINADAS
1892 à 1930	1892	Geometricamente unificada
	1893 e 1894	Geometricamente fragmentada
	1895 à 1898	Geometricamente unificada e Analiticamente fragmentada
	1899 à 1914	Geometricamente unificada
	1915 à 1918	Geometricamente fragmentada
	1919 à 1928	Não há Cônicas
	1929	Geometricamente unificada
	1930	Não há Cônicas
REFORMA CAMPOS	1931 à 1941	Geometricamente unificada e Analiticamente fragmentada
REFORMA CAPANEMA	1942 à 1950	Geometricamente unificada e Analiticamente fragmentada
AJUSTE DE 51	1951 à 1960	Geometricamente unificada
M.M.M.	1961 à 1979	Analiticamente unificada

Podemos observar, na análise dos programas, leis e orientações curriculares e evidenciar, na tabela acima, que a unificação das cônicas nunca foi muito valorizada, já que ela não esteve sempre presente no ensino. Percebemos que o tratamento dispensado às cônicas, na maioria das vezes definia a existência ou não da unificação com que eram trabalhadas. Ou seja, em geral, quando o tratamento era geométrico, as cônicas eram unificadas; quando analítico, fragmentadas. Veremos, agora, que a abordagem exclusivamente analítica trouxe ao ensino das seções cônicas o fim definitivo da apresentação unificada.

Voltamos, então, a uma das nossas questões centrais: como resgatar uma unificação que nunca teve muita força nos programas de ensino? Vamos tentar encontrar uma resposta nos livros didáticos que serão analisados no próximo capítulo.

Capítulo 3

As Cônicas nos Livros Didáticos

Após analisar e periodizar a história do ensino das seções cônicas por meio de programas de ensino, leis e orientações curriculares, vamos analisar como evoluiu a apresentação das cônicas nos livros didáticos e buscar uma ideia para dar unidade ao ensino atual dessas curvas.

Seria humanamente impossível analisar todas as obras publicadas desde 1892, então como escolher os livros para a nossa pesquisa? Como nossa fonte para analisar o período de 1892 a 1930 no capítulo anterior foram os programas do Colégio Pedro II, por este ser, na época, o colégio modelo, achamos conveniente que, neste capítulo, esse período tivesse os livros adotados por essa escola no período em questão analisados nessa pesquisa.

Mas e os outros períodos, que no capítulo anterior tiveram como objeto de análise leis de ensino e orientações curriculares, como escolher os livros para analisar nesse capítulo? Pensando nesse problema resolvemos buscar a solução nas produções do Grupo de História do Ensino de Matemática (GHEMAT), por ser um grupo que pesquisa sobre a história do ensino de matemática, o mesmo que estamos pesquisando. Este grupo produziu um DVD com livros didáticos de 1930 à 1980, o DVD A MATEMÁTICA DO COLÉGIO: LIVROS DIDÁTICOS PARA A HISTÓRIA DE UMA DISCIPLINA. Após 1980, nossas referências de livros didáticos são os Programas Nacionais do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) de 2006, 2009 e 2012, então no período de 1981 à 2006 pesquisamos livros didáticos de autores já mencionados até 1980 e dos autores presentes nos PNLEM.

Inicialmente nossa pesquisa também incluiu livros de álgebra linear, vetores e matrizes, mas como esses livros analisados não apresentavam cônicas, eles não serão objeto de nosso trabalho. Além disso, optamos por separar, após a criação dos cursos clássico e científico em 1942, com a Reforma Capanema, os livros seriados dos não seriados. Os primeiros são compostos pelas coleções ou volumes únicos produzidas para atender completamente os últimos anos escolares, conhecidos hoje como ensino médio. Já os últimos, ou seja, os livros não seriados, não cobrem todo o conteúdo de matemática escolar, apenas um conteúdo específico que, no caso desse trabalho, será de geometria ou geometria analítica.

Os livros seriados[1] se tornaram nacionalmente obrigatórios na década de 1930, após a Reforma Campos, para atender o curso fundamental do ensino secundário e os não seriados continuam sendo produzidos para atender aos cursos complementares, mas como na Reforma Campos as seções cônicas estão presentes apenas nos cursos complementares, só vamos separar os livros seriados dos não seriados a partir da Reforma Capanema.

A análise dos livros seriados será realizada em três etapas: primeiramente uma tabela com os livros analisados, em que ano foram escritos, em que período estão inseridos, onde foram en-

[1] Antes da Reforma Campos já existiam alguns livros seriados, dentre os quais temos, por exemplo, uma coleção escrita por Euclides Roxo para o Colégio Pedro II

contrados e se apresentam cônicas ou não, analítica ou geometricamente, com ou sem unidade; posteriormente, uma tabela mostrando como as cônicas são apresentadas em cada período; e, por último, analisamos mais detalhadamente um livro de cada período. Nessa última etapa analisamos os livros aos quais tivemos mais fácil acesso.

Já a análise dos livros não seriados será feita em duas etapas: uma tabela com os livros analisados, em que ano foram escritos, em que período estão inseridos, onde foram encontrados e se apresentam cônicas ou não e depois uma análise detalhada de um livro de geometria e um de geometria analítica. Esses dois livros também foram escolhidos pela facilidade de acesso.

A autora deste trabalho possui alguns dos livros analisados; outros ela conseguiu emprestado, um deles foi encontrado na internet, no Google Books e os outros foram encontrados em bibliotecas, sendo elas, a biblioteca de obras raras do Instituto de Matemática da UFRJ (BOR), a biblioteca do Instituto de Matemática da UFRJ (IM), a biblioteca do Centro de Tecnologia da UFRJ (CT), a biblioteca do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da UFRJ (CCMN), a biblioteca da Reitoria da UFRJ (FAU), a biblioteca da Escola de Belas Artes da UFRJ (EBA), a biblioteca do Colégio de Aplicação da UFRJ (CAP UFRJ), a bibloteca do Colégio São Bento (SÃO BENTO) e a Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro (BN)

3.1 Livros Seriados

Os livros seriados pesquisados são apresentados na tabela abaixo:

PERÍODO	ANO	LIVRO	LOCALIZAÇÃO	COMO AS CÔNICAS SÃO APRESENTADAS?
1892 à 1930	1892 à 1894	OTTONI, C. B.	BOR	Não possui cônicas
	1895 à 1898	PEREIRA, T. - Geometria	BOR	Não possui cônicas
		SONNET, H. e FRONTERA, G. - Geometria Analítica	Google	Analiticamente unificada
	1929	THIRÉ, C. e MELLO e SOUZA, J. C. - Exercícios e Formulários de Geometria	BN	Não possui cônicas
		COSTA, ROXO e CASTRO - Exercícios de Geometria	BOR	Não possui cônicas
REFORMA CAMPOS	1938	MELLO E SOUZA, J. C. - Geometria Analítica (não seriado)	V1 - BN VI - 87, 5, 22	Analiticamente fragmentada
	1940		V2 - EBA 516 M527	Não possui cônicas

1931 à 1941	1938	PEIXOTO, R. - Elementos de Geometria Analítica (não seriado)	V1 - BN II - 340, 2, 5	Analiticamente unificada
	1941	PEIXOTO, R. - Problemas de Geometria Analítica (não seriado)	BN	Analiticamente
REFORMA CAPANEMA 1942 à 1950	1944	ROXO; PEIXOTO; CUNHA; DACORSO NETTO - Matemática 2º Ciclo	V3 - BOR 510. R886m 1944	Geometricamente unificada e analiticamente fragmentada
	1948	CARVALHO, T. M. - Matemática para Clássico e Científico	V3 - BN	Geometricamente unificada e analiticamente fragmentada
	1948	MAEDER, A. M. - Curso de Matemática	V3 - FAU 510.2 M184 1948	Geometricamente unificada e analiticamente fragmentada
AJUSTE DE 51 1951 à 1960	1953	MAEDER, A. M. - Curso de Matemática	V1 - BN I-313,1,12	Geometricamente com unificada
		ROXO. E; PEIXOTO, R; CUNHA, H; DACORSO NETTO, C. - Matemática 2º Ciclo	V1 - AUTORA	Geometricamente unificada
		CARVALHO, T. M. - Matemática para Clássico e Científico	V1 - BN I-321,3,6	Geometricamente unificada
M.M.M. 1961 à 1979	1964	SMSG. - Matemática Curso Colegial	V1 - EMPRESTADO	Analiticamente unificada
	1970	QUINTELA, A. - Matemática	BN II-21,1,30	Não possui cônicas
	1972	FLETCHER, T. J. - Ensino Moderno de Matemática	BN	Não possui cônicas
	1976	CASTRUCCI, B.; ROSA NETO, E.; MENDONÇA, E. R.; SMITH, M. L. - Matemática 2° Grau	V3 - AUTORA	Analiticamente fragmentada
	1979	BOULOS, P.; WATANABE, R. - Matemática 2° Grau	V3 - BN ANEXO II-690,2,18	Analiticamente fragmentada
1980 à 2011	1985	IEZZI E OUTROS, Fundamentos de Matemática Elementar	V7 - EMPRESTADO	Analiticamente fragmentada
	1996	BIANCHINI, E. e PACCOLA, H. - Matemática	V3 - CAP UFRJ	Analiticamente fragmentada

	1999	DANTE, L. R. - Matematica Contexto e Aplicações	V3 - SÃO BENTO	Analiticamente fragmentada
	2001	GIOVANNI, J. R. e BONJORNO, J. R. - Matemática Uma Nova Abordagem	V3 - AUTORA	Analiticamente fragmentada
	2005	GOULART, M. C. - Matematica no Ensino Médio	V3 - AUTORA	Analiticamente fragmentada
	2006	IEZZI, G. - Matematica: Ciência e Aplicações	V3 - AUTORA	Analiticamente fragmentada
	2008	DANTE, L. R. - Matematica	AUTORA	Analiticamente fragmentada
		PAIVA, M. - Matemática	V3 - CAP 510 P149m	Analiticamente fragmentada
		SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. - Matemática Ensino Médio	V3 - AUTORA	Analiticamente fragmentada
	2009	YOUSSEF, A. N.; SOARES, E. e FERNANDEZ, V. P. - Matematica	AUTORA	Analiticamente fragmentada
	2011	RIBEIRO, J. - Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia 3 Volumes	V3 - AUTORA	Analiticamente fragmentada

A próxima tabela trás o resultado da análise dos livros didáticos pesquisados, separados por períodos, indicando como as seções cônicas eram apresentadas pelos livros didáticos em cada período.

ÉPOCA	PERÍODO	ANO	LIVROS ANALISADOS	COMO AS CÔNICAS SÃO APRESENTADAS?
1892 à 1930	1895 à 1898	1865	Sonnet e Frontera	As seções cônicas aparecem analiticamente; No estudo dos lugares geométricos: definição focal; equação.

				No estudo algébrico da equação do segundo grau em duas variáveis: discussão da equação geral; centro, diâmetro e eixos das curvas de segundo grau; redução da equação do segundo grau em duas variáveis à sua expressão mais simples pela troca dos eixos coordenados. As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: centro (vértice), eixos, ordenadas, foco e diretriz; tangente e normal; diâmetros e cordas suplementares; assíntotas no caso da hipérbole; área. No estudo de coordenadas polares: eixos de simetria, assíntotas e tangentes em coordenadas polares; equações das três cônicas em coordenadas polares. No final as três são estudadas como seções do cone: Teorema de Dandelin e a recíproca do Teorema.
REFORMA CAMPOS	1931 à 1941		Mello e Souza	As seções cônicas aparecem apenas dentro de geometria analítica;
		1938	Peixoto	As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: definição focal; excentricidade; equação reduzida; equação polar; As cônicas são estudadas da seguinte forma: definição em termos de foco, diretriz e excentricidade; equação reduzida; equação polar; mostra-se que as três seções estudadas anteriormente separadamente são cônicas. Estudo algébrico da equação do segundo grau em duas variáveis: discussão da equação geral;
REFORMA CAPANEMA	1942 à 1950	1948	Carvalho	As seções cônicas aparecem geometricamente e analiticamente;
			Maeder	Geometricamente:

				As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: definição focal; eixos e centro (vértice no caso da parábola); relação entre eixos e distância focal; excentricidade; círculos diretores e principal; área da elipse, assíntotas da hipérbole, subtangente e subnormal da parábola. No final as três são estudadas como seções do cone: Teorema de Dandelin e a recíproca do Teorema; cônicas semelhantes; definição pela diretriz; excentricidade; Analiticamente: As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos; equação com centro e vértice fora da origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos;
AJUSTE DE 1951	1951 à 1960	1953	Roxo	As seções cônicas aparecem apenas dentro de geometria; As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: definição focal; elementos principais; traçado por movimento contínuo e por pontos; simetria da curva; vértices da curva; região interior e exterior à curva e sua convexidade; as propriedades e o traçado de tangentes a curva; excentricidade da curva; círculos diretores e principal. No final as três são estudadas como seções do cone: Teorema de Dandelin.
			Maeder	
			Carvalho	
M.M.M.	1961 à 1979	1964	SMSG	As seções cônicas aparecem apenas dentro de geometria analítica; As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: definição focal;
		1976	Castrucci, Neto, Mendonça e Smith	

		1979	Boulos	elementos principais; equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos;
ATUAL	1980 à 1989	1985	Iezzi	As seções cônicas aparecem apenas dentro de geometria analítica; As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: definição focal; elementos principais; equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos; equação com centro e vértice fora da origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos; reconhecimento de uma cônica; interseções de uma cônica; tangentes a uma cônica.
	1990 à 1998	1996	Bianchini	As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: definição focal; equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos; elementos principais; o corte do cone que gera a cônica; um estudo mais detalhado da parábola, relacionando sua equação analítica com a forma da função do 2º grau.
	1999 à 2011	1999	Dante	As seções cônicas aparecem apenas dentro de geometria analítica; As três seções são estudadas separadamente da seguinte forma: o corte do cone que gera a cônica; definição focal; elementos principais; equação reduzida com centro e vértice na origem e eixos cartesianos como eixos; equação com centro e vértice fora da origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos.
		2001	Giovani	
		2005	Smole e Diniz	
		2006	Iezzi	
		2008	Dante	
			Paiva	
			Goulart	
		2009	Youssef, Soares e Fernandez	
		2011	Ribeiro	

Para concluir esta seção, analisaremos, mais detalhadamente, como as seções cônicas aparecem em alguns dos livros didáticos que foram utilizados na construção da tabela acima.

3.1.1 "Elementos de Geometria Analítica" de Sonnet e Frontera

A tradução para o espanhol da última edição francesa do livro *Elementos de Geometria Analítica*, de Sonnet, H. e Frontera, G. feita por D. Manuel Maria Barbery, escrita em 1865 é dividido em duas partes: a Parte I, que possui treze capítulos é sobre geometria analítica de duas dimensões; e a Parte II, sobre geometria analítica de três dimensões, que possui onze capítulos. O estudo das cônicas aparece na primeira parte, tendo seis capítulos dedicados a elas. O livro é composto por 577 páginas, incluindo teoria e exercícios, das quais 374 integram a Parte I e 203 a Parte II, sendo que das 374 da primeira parte, 198 são reservadas ao estudo das cônicas.

Os seis capítulos que estudam as cônicas, são: o sexto sobre equação do segundo grau em duas variáveis, o sétimo sobre as propriedades principais da elipse, o oitavo sobre as propriedades principais da hipérbole, o nono sobre as propriedades principais da parábola, o décimo sobre coordenadas polares e o décimo terceiro sobre seções cônicas e cilíndricas.

No capítulo sobre equação do segundo grau em duas variáveis são discutidas as condições algébricas para que uma equação do segundo grau represente uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Há um estudo algébrico das representações geométricas da elipse, da hipérbole e as equações de suas assíntotas e da parábola, seguido por uma análise algébrica de algumas propriedades dessas curvas, como centro, diâmetros, eixos e, por fim, ensina a reduzir uma equação do segundo grau em duas variáveis à sua expressão mais simples, trocando os eixos coordenados. Ou seja, esse capítulo apresenta um estudo exclusivamente algébrico bem detalhado das cônicas, do que acontece com cada cônica, sua representação geométrica, seu centro, diâmetro e eixos e as assíntotas, para cada combinação de valores dos coeficientes. Neste capítulo as cônicas são estudadas com unidade.

Os três capítulos seguintes apresentam o estudo fragmentado das cônicas, dedicando um capítulo à elipse, um à hipérbole e um à parábola, cada um desses estuda detalhadamente as principais propriedades dessas curvas, os eixos, centro e vértice, ordenadas, focos e diretrizes, tangente e normal, diâmetros e cordas suplementares, assíntotas, no caso da hipérbole, e a área dessas curvas.

Já o décimo capítulo traz o estudo de coordenadas polares, apresentando, dentre outros itens, as equações das cônicas nessas coordenadas; o capítulo treze, por sua vez, traz o estudo das seções do cone, demonstrando, analítica e geometricamente (Dandelin), que essas seções coincidem com as curvas do segundo grau estudadas nos capítulos anteriores, elipse, hipérbole e parábola.

3.1.2 “Elementos de Geometria Analítica” de Roberto Peixoto

O livro *Elementos de Geometria Analítica* de Roberto Peixoto, escrito em 1938, é dividido em duas partes, a Parte I, que possui 167 páginas de teoria distribuídas em 15 capítulos, é sobre geometria analítica de duas dimensões e a Parte II, é sobre geometria analítica de três dimensões.

Dos 15 capítulos que integram a Parte I, 2 são reservados ao estudo das cônicas, o capítulo sete e o quatorze. Esse livro não contém exercícios.

O sétimo capítulo possui 33 páginas, sendo 22 dedicadas ao estudo das cônicas. Dessas 22, as 17 primeiras estudam a elipse, a hipérbole e a parábola separadamente como lugar geométrico dos pontos que atendam a suas definições focais, apresentando as equações geradas pelas definições, deduzindo suas equações reduzidas e suas equações polares com centro e vértice na origem e eixos coincidindo com os eixos cartesianos. No caso da elipse e da hipérbole, ainda há a definição de excentricidade e, no estudo da hipérbole, ainda são definidas a hipérbole equilátera e as conjugadas.

Já nas cinco últimas páginas do mesmo capítulo, temos o estudo das cônicas como lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão das distâncias a um ponto fixo (foco) e a uma reta fixa (diretriz), do mesmo plano, é constante. Ou seja, encontramos a apresentação das cônicas por sua definição em termos de foco, diretriz e excentricidade. A partir dessa definição é apresentada sua equação espontânea, sua equação retilínea com eixo y coincidindo com a diretriz e eixo x passando pelo foco e sua equação polar. Em seguida, é dito que a parábola é uma cônica pela própria definição, mostra-se que a elipse é uma cônica e se diz que, de forma análoga é possível mostrar que a hipérbole também é uma cônica.

O outro capítulo que apresenta cônicas, o quatorze, traz sob o título curvas do segundo grau; trata-se de uma discussão da equação geral do segundo grau com duas variáveis, apresentando o discriminante da equação do segundo grau e as condições necessárias para que esse tipo de equação represente uma elipse, uma hipérbole, uma parábola ou casos degenerados.

3.1.3 "Curso de Matemática" Ciclo Colegial de Algacir Munhoz Maeder

O terceiro livro do ciclo colegial do *Curso de Matemática* de Algacir Munhoz Maeder, escrito em 1948, dedica três de seus capítulos ao estudo das cônicas. O vigésimo primeiro e o vigésimo segundo estudam as cônicas geometricamente e o vigésimo nono traz o estudo analítico das cônicas.

O capítulo vinte um, chamado Curvas Usuais, possui 17 páginas dedicadas ao estudo da elipse, hipérbole e parábola. Esse capítulo não possui exercícios e estuda as três curvas separadamente apresentando-as a partir de sua definição focal e estudando seus eixos, centros ou vértice. No estudo da elipse e da hipérbole são apresentados as relações entre os eixos e a distância focal, suas excentricidades, seus círculos, diretores e principal e os valores de seus raios vetores. Além disso, são dados teoremas relacionando as curvas com seu círculo principal. No caso da elipse ainda temos o estudo do círculo auxiliar e da sua área, no caso da hipérbole, o estudo da hipérbole equilátera e das assíntotas e no caso da parábola, o estudo da subtangente e da subnormal e um teorema relacionando esta curva com a subnormal e outro relacionando esta curva com a subtangente.

No vigésimo segundo capítulo há 10 páginas dedicadas ao estudo das seções cônicas, curvas obtidas cortando uma superfície cônica. Aqui mostra-se que essas curvas coincidem com a elipse, hipérbole e parábola demonstrando o teorema de Dandelin, define-se cônicas semelhantes, define-se cônicas como lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão das distâncias a um ponto fixo (foco) e a uma reta fixa (diretriz), do mesmo plano, é constante, define-se excentricidade como sendo essa razão e deduz-se que a excentricidade da elipse é menor do que 1, que a da hipérbole é maior do que 1 e que a da parábola é 1.

O vigésimo nono capítulo possui 11 páginas, sendo 7 dedicadas ao estudo das equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola, 2 de exercícios resolvidos e 2 de exercícios propostos. Nesse estudo são deduzidas as equações das três curvas com centro e vértice na origem e eixos coincidindo com os eixos cartesianos e com centro qualquer e eixos paralelos aos eixos cartesianos, a equação da hipérbole equilátera e as equações de duas hipérboles conjugadas. Os exercícios desse capítulo são para calcular os valores dos eixos, a distância focal, a excentricidade, o parâmetro da parábola; achar a posição dos vértices, dos focos, do centro; estabelecer a equação da hipérbole equilátera e da parábola.

3.1.4 "Matemática Segundo Ciclo" de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Dacorso Netto

A sétima edição do livro da primeira série, *Matemática Segundo Ciclo* de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Dacorso Netto, escrito em 1953, é dividido em duas partes: a Parte I, que possui três seções é de Aritmética e Álgebra e a Parte II, de Geometria, possui duas seções, a última dedicada ao estudo das cônicas, suas definições e propriedades fundamentais. O livro é composto por 376 páginas, incluindo teoria e exercícios, das quais 98 integram a Parte I e 276 a Parte II, destas 41 são reservadas ao estudo das cônicas.

O livro começa a última seção definindo termos que serão usados no estudo das cônicas, como pode ser visto no anexo E. Depois, apresenta as três cônicas, como curvas planas, dedicando a cada uma um capítulo. E encerra com um capítulo, que estuda as três curvas juntas, como seções de uma superfície cônica.

Nos capítulos que ensinam as cônicas como curvas planas são dados a definição focal, os elementos da curva, o traçado por movimento contínuo e por pontos, a simetria da curva e seus vértices. Ainda são estudados a região interior e exterior à curva e sua convexidade, as propriedades e o traçado de tangentes a curva.

Os exercícios propostos nesses três capítulos são de construção e demonstração. Nos capítulos dedicados a elipse e hipérbole há itens que são ensinados que ainda não foram mencionados, pois não aparecem no estudo da parábola. São eles o comprimento dos eixos, a excentricidade da curva, a definição pelos círculos diretores, a propriedade da normal à curva e os círculos diretores e principal como lugares geométricos.

Os itens apresentados no livro que são características individuais da hipérbole ou da parábola, que só aparecem no capítulo que estuda essas curvas, serão dados a seguir:

Na hipérbole, temos o estudo da hipérbole conjugada e equilátera e das assíntotas e sua determinação pelos eixos. Já na parábola, a entendemos como limite da elipse, estudamos a diretriz e a tangente no vértice como lugares geométricos e a sub-tangente e a sub-normal. Ao final deste capítulo há um pequeno item fazendo uma introdução ao próximo capítulo e uma breve analogia entre as três curvas.

O último capítulo desta seção é o que mostra a unificação dessas três curvas, o que, por sua vez, explica por que essas são agrupadas sobre o nome de seções cônicas, ou seja, estuda as três como seções do cone, definindo as seções que geram cada cônica. Seguindo com o Teorema de Dandelin para mostrar que as seções definidas neste capítulo coincidem com as curvas apresentadas nos capítulos anteriores desta seção. Depois se estudam as cônicas definidas como lugar geométrico, conforme o Anexo E. Finalmente, há uma análise da elipse como projeção do círculo. Todos os exercícios deste capítulo são de construção.

3.1.5 "Matemática Curso Colegial" de School Mathematics Study Group

A edição preliminar da tradução do volume I do livro *Matemática Curso Colegial* de School Mathematics Study Group (SMSG), escrito em 1964, é um livro que atende às ideias do Movimento da Matemática Moderna, mas, que por ser um livro americano, ou seja, escrito para uma outra realidade "difere dos textos tradicionais dedicados ao primeiro ano do Curso Colegial"[2]. A orientação do Movimento da Matemática Moderna para o ensino de geometria é de reuni-la a álgebra sempre que possível e buscando isso esse livro já apresenta a geometria analítica na primeira série e não deixa para a última como a maioria dos livros e como sugere o GEEM em 1965. Exatamente por ser um livro que foge do padrão dos livros de seu período que este foi escolhido para ser analisado mais detalhadamente.

Dividido em onze capítulos, sendo um chamado "geometria analítica plana", que introduz a geometria analítica e um, que é o último, chamado "equações do primeiro e segundo grau em duas variáveis", que possui sete seções, sendo uma de exercícios suplementares e quatro dedicadas ao estudo analítico das cônicas. Das 254 páginas do livro, 40 compõem o décimo primeiro capítulo, sendo 27 reservadas ao estudo das cônicas.

[2]SMSG, *Matemática Curso Colegial*, vol.1, Prefácio da Edição Brasileira

A seção três desse capítulo, primeira a estudar cônicas, é dedicada à parábola. Tendo estudado nas duas primeiras seções o gráfico da equação do primeiro grau, sabendo então que é uma reta e que o conjunto de pontos equidistantes a dois pontos fixos é uma reta, se julga natural que o leitor queira saber qual é o conjunto de pontos equidistantes de um ponto e uma reta, por isso a opção de começar pela parábola.

No estudo desta curva, temos a definição focal e a apresentação de seus elementos principais, seguidas de exemplos para encontrar a equação. Depois de alguns exemplos, temos a forma geral da equação com vértice na origem e com eixo coincidindo com um dos eixos cartesianos e uma propriedade física da curva. Os exercícios desta seção são para achar a equação da curva, as coordendas do foco e do vértice, a equação da diretriz e do eixo, construir o gráfico da curva e para demonstrar algumas propriedades.

A seção quatro, chamada "definição geral de cônica" apresenta a definição de cônica em termos de diretriz, foco e excentricidade, dando um exemplo gerando uma elipse e um gerando uma hipérbole para, em seguida, ir para a forma geral e discutir as condições para ser uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola. Como a parábola já foi estudada, só é dito em que caso que é uma parábola, para em seguida se discutir mais detalhadamente as outras possibilidades e chegar à definição de elipse e hipérbole pelo valor da excentricidade. No final desta seção se diz porque estas três curvas recebem o nome de cônicas e que toda equação do segundo grau tem por gráfico uma seção cônica (ou uma de suas formas limites que são uma circunferência, uma reta ou duas retas que se interceptam) e vice versa. Os exercícios desta seção são para achar a equação de conjuntos de pontos com propriedades dadas, identificar a cônica, escrever sua equação e desenhar o seu gráfico, discutir a cônica de uma dada equação.

A seção cinco estuda o círculo e a elipse, sendo que, na elipse, parte-se da definição e da equação dada na seção anterior e fazendo duas substituições encontra-se outra equação da elipse com centro na origem e eixos cartesianos que é a obtida quando se parte da definição focal. Definem-se ainda seus elementos principais e após um exemplo se enuncia a definição focal. Ainda temos a explicação da construção do jardineiro, a relação entre o círculo e a elipse e uma propriedade física da elipse. Os exercícios sobre elipse são para achar a equação da curva, as coordendas dos focos, dos vértices, a excentricidade, o comprimento dos eixos e a equação da diretriz, construir o gráfico da curva e demonstrar algumas propriedades.

A sexta e última seção dedicada ao estudo das cônicas ficou reservada para a hipérbole e segue a mesma linha de desenvolvimento da elipse, só que aqui temos ainda o estudo das assíntotas e a apresentação da hipérbole equilátera. Os exercícios aqui também são semelhantes, sendo que em alguns é preciso achar as equações das assíntotas.

3.1.6 "Fundamentos de Matemática Elementar" de Gelson Iezzi

A terceira edição do sétimo volume do livro *Fundamentos de Matemática Elementar* de Gelson Iezzi, sobre geometria analítica, escrito em 1985, é dividido em oito capítulos, sendo o sétimo dedicado as seções cônicas. O livro é composto por 245 páginas, incluindo teoria e exercícios, das quais 28 são reservadas ao estudo das cônicas, além de oito com 44 questões de vestibular sobre cônicas.

O livro começa o capítulo sobre cônicas estudando elipse, hipérbole e parábola separadamente, dando sua definição focal, seus elementos principais e sua equação reduzida. Os exercícios propostos ao fim do estudo de cada cônica são para determinar a equação da curva e da diretriz, as coordenadas dos focos e do vértice, construir o gráfico da curva e calcular a distância focal e a excentricidade.

Após esse estudo das cônicas, há uma análise de como reconhecer uma cônica dada sua equação. Aqui os exercícios são caracterizar a cônica representada por uma equação dada e determinar seus focos e sua excentricidade. Em seguida há uma explicação de como encontrar as interseções de cônicas e exercícios para calcular o comprimento da corda que uma dada reta faz com uma elipse dada e para achar a interseção de uma curva dada com uma cônica também dada.

Encerrando o capítulo, vem o estudo das tangentes a uma cônica, ensinando a resolver dois problemas: o de obter as retas tangentes a uma dada cônica que são paralelas a uma dada reta e o de obter as retas tangentes a uma dada cônica que passm por um dado ponto. Os exercícios são aplicações desses dois problemas e outros três de vestibular.

No capítulo oito, que é sobre lugares geométricos, se ensina a interpretar uma equação do segundo grau, mostrando, sem demonstrar, como saber se uma equação representa uma cônica e qual cônica, usando fórmulas que só dependem dos coeficientes da equação. Aqui encontramos exercícios para caracterizar a cônica dada, descobrir qual é a curva representada pela equação dada e qual é o gráfico da relação dada.

Portanto, verificamos que esta obra estuda as cônicas de maneira fragmentada.

3.1.7 “Matemática” de Luiz Roberto Dante

A primeira edição do livro *Matemática*, de Luiz Roberto Dante, escrito em 2008, é um único volume para as três séries do ensino médio, dividido em oito unidades, sendo três dedicadas à álgebra, uma à geometria plana, outra à geometria espacial, uma à trigonometria, uma à estatística e uma à geometria analítica.

As cônicas são encontradas na unidade sete - de geometria analítica. Essa unidade está dividida em três capítulos, sendo um totalmente dedicado às cônicas. Das 504 páginas do livro, onde 455 são de teoria e exercícios sobre a teoria, 36 são reservadas para geometria analítica e dessas 10 são dedicadas às seções cônicas.

O livro começa o estudo das cônicas com uma breve introdução histórica que não será mais mencionada nem utilizada, ou seja, se ela não estivesse presente isso não impediria o entendimento do conteúdo que é dado em seguida. Além disso, na tentativa de contextualizar as cônicas, temos três exemplos de situações, cada um gerando uma das três cônicas.

Após a introdução do assunto, nos é apresentada a parábola como uma determinada seção do cone, corretamente definida, depois, sem qualquer relação com tal seção é dada a definição focal. Somos apresentados aos seus elementos principais e em seguida à sua equação com vértice na origem. Os exercícios sobre a parábola são para determinar sua equação ou o foco, o vértice e a diretriz.

Depois, temos a Elipse, apresentada de maneira semelhante, sendo que aqui nos é apresentada, junto com os elementos principais da elipse, a excentricidade. Os exercícios sobre a elipse também são para determinar sua equação ou seus focos, mas também há exercícios para determinar as extremidades ou a medida dos eixos e a excentricidade.

Por último, somos apresentados à hipérbole de maneira semelhante às outras duas curvas, principalmente a elipse, diferindo desta apenas pelo estudo das assíntotas. Os exercícios sobre a hipérbole cobram as mesmas coisas que os sobre a elipse. Mas cabe ressaltar, no caso dessa cônica, que, na sua apresentação como seção do cone - mesmo apesar de a definição estar correta -, a figura induz a um erro cometido por vários autores, inclusive pelo próprio Dante em obras anteriores. Na figura, o plano que secciona o cone é paralelo ao eixo e não há essa obrigatoriedade para que a curva seja uma hipérbole.

Portanto, verificamos que esta obra estuda as cônicas de maneira fragmentada.

3.2 Livros Não Seriados

Com a criação da matemática como disciplina, em 1931, começaram a surgir os livros de matemática seriados, mas até a Reforma Capanema, os anos escolares finais ainda adotavam principalmente os livros não seriados, escritos por assunto. Com a criação dos cursos clássico e científico, em 1942, os livros seriados se tornaram presentes também nos anos escolares finais. Mas de 1942 até a década de 1980, alguns autores julgavam o conteúdo dos livros seriados insuficiente para preparar o aluno a ingressar na Universidade e, por isso, os livros não seriados continuaram a ser produzidos, ou seja, autores continuaram a escrever livros de álgebra, geometria, trigonometria, geometria analítica, e outros assuntos da matemática. Da década de 1980 aos dias de hoje (2011), só encontramos livros não seriados sendo adotados na Graduação e não mais no ensino médio; isso porque os livros seriados do período atual se adaptaram ao vestibular e são feitos para preparar o aluno para entrar na faculdade, sem demandar a necessidade de aprofundar em outro livro o estudo de algum tema.

Os livros não seriados pesquisados são apresentados na tabela abaixo:

PERÍODO	ANO	LIVRO	LOCALIZAÇÃO	AS CÔNICAS SÃO APRESENTADAS DE FORMA UNIFICADA?
REFORMA CAMPOS 1931 à 1941	1938	MELLO E SOUZA, J. C. - Geometria	V1 - BN VI - 87, 5, 22	NÃO
	1938	PEIXOTO, R. - Elementos de Geometria Analítica	V1 - BN II - 340, 2, 5	SIM
	1941	PEIXOTO, R. - Problemas de Geometria Analítica	BN	
1942 à 1950		SONNINO, S. Elementos de Geometria Analítica	BN II-264,3,21	
1951 à 1960	1951	LACAZ NETTO, F.A. Lugares Geométricos Planos	BN II-270,5,1	SIM
	1953	MAURER, W.A. Lições de Geometria Analítica	BN II-310,6,21	NÃO
	1955	PEIXOTO, R. Geometria Analítica - Geometria de uma e duas dimensões	BN II-340,2,5	SIM
	1959	ROCHA, L.M. Geometria Analítica	IM 516.3 R672G 1959	NÃO

1961	1964	CASTRUCCI, B. Lições de Geometria Elementar	BN IV-406,5,13	SIM
à	1967	CASTRUCCI, B. Geometria Curso Moderno	V2 BN IV-411,5,2	SIM
1979	1975	BARBOSA, R.M. Geometria Analítica Moderna (Plana)	BN II-53,5,5	NÃO
1980	1980	FAINGUELERNT, E.K. e BORDINHÃO, N. de C. Álgebra Linear e Geometria Analítica	Emprestado	NÃO

Para concluir esta seção, analisaremos, mais detalhadamente, como as seções cônicas aparecem em um livro de geometria e em um outro de geometria analítica.

3.2.1 "Geometria Curso Moderno" de Benedito Castrucci

O livro *Geometria Curso Moderno* de Benedito Castrucci possui três volumes, sendo que as seções cônicas estão presentes no volume II, escrito em 1967. Este volume é dividido em quatro capítulos, dos quais o quarto é sobre seções cônicas. Das 195 páginas que compõem esse volume, 49 são dedicadas às cônicas.

O capítulo das cônicas estuda separadamente as três cônicas dando a definição focal, definindo foco, explicando a construção por pontos. Além disso, enuncia e demonstra teoremas relacionados aos eixos de simetria da curva, define eixos, pontos internos e externos à curva, retas tangentes, normais, externas e secantes à curva. Explica a construção de tangentes à curva por um ponto externo, enuncia e demonstra teoremas relacionados a tangentes e estuda a interseção da curva e uma reta.

No caso da hipérbole e da elipse, há a definição da distância focal e da excentricidade, dos eixos, do centro e do diâmetro, da circunferência diretriz e da circunferência principal, com teoremas relacionados a essas duas circunferências. Na elipse ainda há a construção de tangentes paralelas a uma reta dada e, na hipérbole, a definição das assíntotas e o enunciado e a demonstração de teoremas relacionados a essas retas. No caso da parábola há a definição de diretriz.

Após estudar as curvas separadamente, há o estudo das seções planas das superfícies cilíndricas e cônicas, onde se enuncia e demonstra o teorema de Dandelin, o que demonstra, por sua vez, que as cônicas são unificadas. Os exercícios deste capítulo são de construção e verificação.

3.2.2 "Álgebra Linear e Geometria Analítica" de Estela Kaufman Fainguelernt e Noelir de Carvalho Bordinhão

A primeira edição do livro *Álgebra Linear e Geometria Analítica*, de Estela Kaufman Fainguelernt e Noelir de Carvalho Bordinhão, escrito em 1980, foi produzido, como explicado pelas autoras no prefácio, para ser utilizado no ensino médio. Para atender esse objetivo ele foi dividido em sete capítulos, sendo o quarto reservado à geometria analítica no $\mathbf{R}^2$, e neste uma unidade inteiramente dedicada às cônicas, suas definições e elementos principais, suas equações e identificações. O livro é composto por 390 páginas, incluindo teoria e exercícios, das quais 83 integram o quarto capítulo, destas, 41 são reservadas ao estudo das cônicas.

A unidade das cônicas começa explicando que nela serão estudadas as curvas planas que podem ser representadas por equações do segundo grau em x e y e que estas podem ser obtidas da interseção de uma superfície cônica com um plano. Depois, define superfície cônica e estuda as interseções de um plano com uma superfície cônica fechada e regular, obtendo assim as seções cônicas, incluindo a circunferência, e as seções degeneradas. Cabe ressaltar aqui que as figuras que representam as seções não induzem o leitor ao erro no caso da hipérbole, como pode ser visto no Anexo F. Em seguida apresenta um estudo analítico de cada seção cônica.

Quando o estudo de cada cônica é feito separadamente, o fato de que elas são obtidas de um cone mostrado anteriormente é totalmente esquecido. Algo muito parecido ocorre em alguns livros seriados atuais, só que além disso, eles apresentam um estudo das cônicas muito mais superficial.

Neste livro, para cada cônica é dada a definição focal, os elementos principais, a equação gerada pela definição focal e a equação cartesiana e a identificação da cônica a partir de uma equação do segundo grau em x e y, tudo acompanhado de exemplos, no fim da unidade, define corda focal e dá vários exercícios resolvidos. Os exercícios propostos sobre essa unidade, aparecem apenas na unidade seguinte e são para calcular, determinar ou estabelecer condições.

No estudo da circunferência ainda temos a equação geral e as equações paramétricas, as condições para que uma equação do segundo grau em x e y represente uma circunferência, a obtenção da equação de uma circunferência determinada por três pontos analítica e geometricamente e o estudo da posição de um ponto, de uma reta e de uma circunferência em relação a uma circunferência.

No caso da elipse, hipérbole e parábola só são vistas as equações cartesianas com centro ou vértice na origem e eixos sobre os eixos cartesianos. Já na elipse e na hipérbole encontramos o aspecto da curva, sua excentricidade e suas diretrizes. Na elipse ainda temos as equações paramétricas, na hipérbole, as assíntotas. Na parábola também temos o aspecto da curva.

Capítulo 4

Conclusão

Acreditando que o papel da escola vai muito além de ensinar só o que é útil, que o ensino médio deve ter um caráter formativo e deve dar ao aluno uma noção geral e cultural da matemática, buscamos neste trabalho entender a história do ensino das seções cônicas, procuramos respostas para o ensino de cônicas atual ser completamente fragmentado e encontrar sugestões para reunificar as cônicas no ensino moderno.

Nossa pesquisa nos mostrou que, historicamente, as cônicas surgiram com tratamento sintético de forma fragmentada, cada uma obtida de um cone diferente. Seu tratamento foi unificado por Apolônio, para quem todas eram obtidas de um mesmo cone. Com a invenção da geometria analítica as cônicas continuaram se desenvolvendo de forma unificada nos dois campos até o trabalho de La Hire, que colocou as cônicas na direção de um tratamento puramente focal, tornando o estudo novamente fragmentado. Dandelin desenvolveu um teorema tentando reunificá-las. Mas no ensino atual prevalece o tratamento puramente analítico e focal, totalmente fragmentado.

Essa pesquisa também nos evidenciou, na confecção da tabela que mostra como os livros seriados abordam as cônicas por período, o empobrecimento do estudo das cônicas, com o passar dos períodos, vários assuntos a respeito das cônicas foram deixando de ser ensinadas, inclusive o que as tornam unificadas, o que relaciona as três curvas. Detalhes foram se perdendo até chegarmos à abordagem atual, na qual se encontra apenas a definição focal e a equação com centro e vértice na origem e os eixos sendo os eixos cartesianos. O título cônicas não parece mais fazer sentido. Alguns livros apresentam uma introdução histórica das cônicas, mas que é ignorada no estudo das curvas, sendo na verdade um falso enfoque histórico. Outros mostram os cortes ou apenas citam que as três curvas são seções de um cone apenas para justificar esse título.

Além disso observamos o domínio da definição focal nos livros, independente da abordagem ser analítica ou geométrica. Todas as obras analisadas apresentam a definição focal; um número bem reduzido, apesar de introduzir, conforme citamos, as cônicas por sua definição focal, no decorrer do estudo apresenta alguma outra definição. E um número ainda menor introduz as cônicas com outra definição e só durante o estudo das curvas apresenta sua definição focal.

O predomínio da abordagem pela definição focal nos chamou a atenção e nos indicou que seria interessante trazer aos leitores a crítica que Lebesgue faz a esse tipo de abordagem em seu livro *Les Coniques*[1].

Lebesgue julga infeliz a apresentação das cônicas no ensino com a definição usual, por distâncias, mais conhecida como definição focal. Para ele, esta definição torna o assunto totalmente fragmentado. Como ver, pelas definições, que a elipse, a hipérbole e a parábola pertencem à

[1] Lebesgue, Henri: *Les Coniques*. Paris: Gauthier-Villars, 1942.

mesma família? Se estuda o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante, depois cuja diferença das distâncias é constante, e em seguida, em vez de, por exemplo, estudar o caso em que o produto das distâncias é constante, se passa ao caso em que as distâncias a uma reta fixa e a um ponto fixo são iguais.

Para ele, seria melhor dar a definição em termos de diretriz, foco e excentricidade. Nessa definição se vê que as curvas pertencem a uma mesma família, pois a curva obtida depende da excentricidade ser positiva, menor, igual ou maior do que 1.

Cabe lembrar aqui que esta falta de unificação foi exatamente o que norteou nosso trabalho e o que percebemos na análise dos livros, principalmente nos mais modernos. Nos livros não há uma relação entre a elipse, a hipérbole e a parábola, que parecem três curvas sem qualquer relação. Mesmo os livros que mostram que as três são seções do cone o fazem separadamente, como se fosse algo independente e, muitas vezes, como se fosse apenas uma curiosidade.

Mesmo os livros que trazem o Teorema de Dandelin - que mostra que as três seções do cone e as três curvas geradas pelas três definições focais são as mesmas -, ainda o fazem separadamente. Partindo da definição focal é o que mostra melhor que as três curvas pertencem a mesma família; mas o estudo das três ainda é muito independente, pois não há relação entre as definições.

Também podemos observar que o Movimento da Matemática Moderna, que defendia a algebrização da geometria, marcou o fim da abordagem sintética. Desde então a abordagem é exclusivamente analítica. Perde-se muita coisa com o fim da abordagem sintética, mas a meu ver a maior perda é o Teorema de Dandelin. Sempre presente nas abordagens sintéticas analisadas e raramente presente nas analíticas, o que é compreensível já que, como veremos no apêndice A, a demonstração analítica de tal teorema é muito mais complexa, - esse teorema foi a forma mais adotada pelos livros que traziam alguma relação entre as cônicas. Ainda mais sendo a definição focal a preferência dos livros.

Podemos observar que num período de quase 120 anos de ensino das cônicas, nos primeiros 70 anos sua unificação tentou se estabelecer, indo e vindo nos programas e nos livros, mas não conseguiu, desaparecendo totalmente durante o Movimento da Matemática Moderna. Nos momentos em que se fez presente, ela se apresentou de duas maneiras. A forma mais encontrada nesses 70 anos foi no tratamento geométrico por meio do teorema de Dandelin. Mas ela também apareceu algumas vezes no tratamento analítico com a definição em termos de diretriz, foco e excentricidade.

As duas maneiras são viáveis no ensino moderno e representam boas sugestões para resgatar a unificação perdida. Com as novas tecnologias seria muito mais fácil, para os alunos de hoje em dia, visualizar e compreender a demonstração e o significado do teorema de Dandelin, inclusive o manual do professor do livro do Paiva[2] sugere que se possível o professor mostre ao aluno a demonstração desse teorema. Mas, julgamos que a melhor forma de unificar as cônicas no ensino atual, mantendo o tratamento puramente analítico, seria a que as apresentam pela definição em termos de diretriz, foco e excentricidade.

Esta é a sugestão de Lebesgue em seu livro *Les Coniques* para mostrar que elipse, parábola e hipérbole pertencem à mesma família e a maneira escolhida pelo livro do SMSG, aqui analisado, para apresentar as cônicas. Por ser sugestão de Lebesgue, ter sido a escolha de alguns autores na apresentação das cônicas e por a julgarmos perfeitamente adaptável e aplicável ao ensino puramente analítico atual, nós a recomendamos como a melhor para resgatar a unificação das cônicas. Por outro lado, o teorema de Dandelin constitui uma ponte entre o tratamento sintético e o analítico, essencial para o aluno perceber que as curvas estudadas algebricamente são as mesmas obtidas pela seção de uma superfície cônica.

[2]PAIVA, M. *Matemática*, Manual do Professor, São Paulo: Moderna, 2011.

Apresentaremos, agora, o conteúdo matemático de uma proposta para resgatar a unificação das cônicas, ficando para trabalhos posteriores adaptar esse conteúdo a sala de aula e aos livros didáticos, construindo uma abordagem unificada das cônicas para o ensino médio atual, capaz de fazer mais sentido aos alunos e um pouco de justiça a todo o seu desenvolvimento e de dar ao ensino das cônicas o caráter formativo e cultural que o ensino médio deve ter.

Conteúdo Matemático de uma Proposta

Definição: Lugar geométrico dos pontos de um plano cuja razão das distâncias a um ponto fixo F e uma reta fixa d ($F \notin d$) no mesmo plano seja constante.

Seja $F = (c, 0)$ e d a reta de equação $x = d$. Ora, se $P = (x, y)$ é o ponto genérico do lugar e $e > 0$ a razão constante das distâncias, a equação natural do lugar procurado é

$$\frac{|\overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PD}|} = e$$

Chamando-se D a projeção do ponto P sobre a reta d.

Da equação natural, temos

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-d)^2}} = e$$

e, portanto

$$(x-c)^2 + y^2 = (x-d)^2 e^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2dx + d^2)$$

$$x^2 - e^2x^2 + y^2 = 2cx - 2de^2x + e^2d^2 - c^2$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = 2x(c - de^2) + e^2d^2 - c^2 \tag{4.1}$$

Cada caso possível vai gerar uma cônica diferente, como são três casos, temos três cônicas:
1)$e < 1$ gera uma elipse
2)$e = 1$ gera uma parábola
3)$e > 1$ gera uma hipérbole

Vamos estudar cada caso, a forma de sua equação e aprender outra forma e outra equação em termos de outros parâmetros.

Começaremos pelo segundo caso que é o mais fácil.

Se $e = 1$, temos

$$\frac{|\overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PD}|} = 1$$

$$|\overrightarrow{PF}| = |\overrightarrow{PD}|.$$

Daí podemos definir a parábola como o lugar geométrico dos pontos de um plano equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta fixa d ($F \notin d$) nesse plano.

Sem perda de generalidade podemos fazer $c = p/2$ e $d = -p/2$. Então substituindo esses valores na equação 4.1

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = 2x(c - de^2) + e^2d^2 - c^2$$

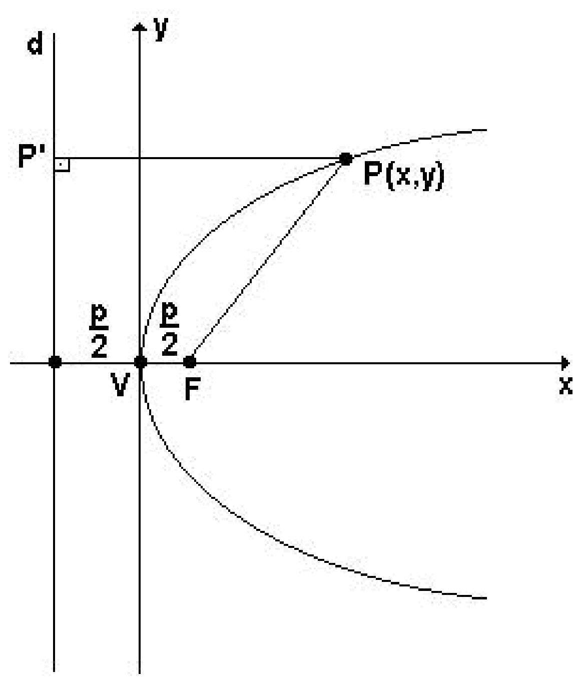
obtida acima temos:

$$(1-1)x^2 + y^2 = 2x(\frac{p}{2} + \frac{p}{2}) + (-\frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2$$

$$y^2 = 2px$$

que é a equação da parábola com vértice na origem, foco $F = (p/2; 0)$ e diretriz de equação $x = -p/2$.

A representação geométrica dessa parábola seria:



Parábola

No primeiro e terceiro caso vamos considerar, sem perda de generalidade, $d = \frac{c}{e^2}$. Com isso a equação 4.1 fica

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = 2x(c - \frac{c}{e^2}e^2) + e^2(\frac{c}{e^2})^2 - c^2$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = 2x(c-c) + \frac{c^2}{e^2} - c^2$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = \frac{c^2}{e^2} - \frac{e^2c^2}{e^2}$$

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = \frac{c^2}{e^2}(1-e^2)$$

$$\frac{e^2}{c^2}x^2 + \frac{c^2}{e^2}\frac{y^2}{1-e^2} = 1 \tag{4.2}$$

No primeiro caso, em que $e < 1$, substituindo na equação 4.2 $\frac{c}{e}$ por a e $\frac{c}{e}(\sqrt{1-e^2})$ por b teremos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta é a equação da elipse obtida quando a analisamos como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é a constante $2a$.

Seja $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Se $P = (x, y)$ é o ponto genérico do lugar e $2a$ a soma constante das distâncias, a equação natural do lugar procurado é

$$|\overrightarrow{PF_1}| + |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

Da equação natural, temos

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

e, portanto

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$a^2[(x-c)^2+y^2] = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

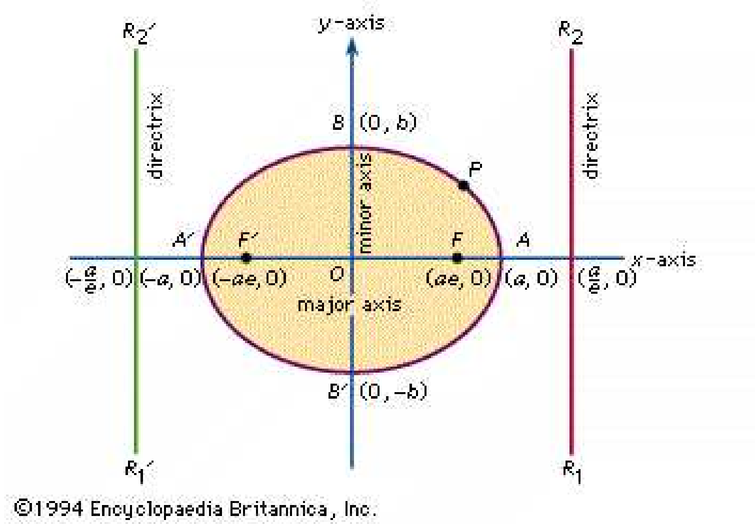
Substituindo $a^2 - c^2$ por b^2, temos

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo os dois membros por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A representação geométrica da elipse seria:



Elipse

No terceiro caso, em que $e > 1$, substituindo na equação 4.2 $\frac{c}{e}$ por a e $\frac{c}{e}(\sqrt{e^2-1})$ por b teremos:

$$\frac{e^2}{c^2}x^2 + \frac{c^2}{e^2}\frac{y^2}{-(e^2-1)} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta é a equação da hipérbole obtida quando a analisamos como o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos desse plano é a constante $2a$.

Sejam $F_1 = (-c,0)$ e $F_2 = (c,0)$. Se $P = (x,y)$ é o ponto genérico do lugar e $2a$ a diferença constante das distâncias, a equação natural do lugar procurado é

$$|\overrightarrow{PF_1}| - |\overrightarrow{PF_2}| = 2a$$

Da equação natural, temos

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

e, portanto

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2$$

$$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4cx-4a^2$$

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = cx-a^2$$

$$a^2[(x-c)^2+y^2] = a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2 = a^2-2cx+\frac{c^2x^2}{a^2}$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2 = a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$$

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$$

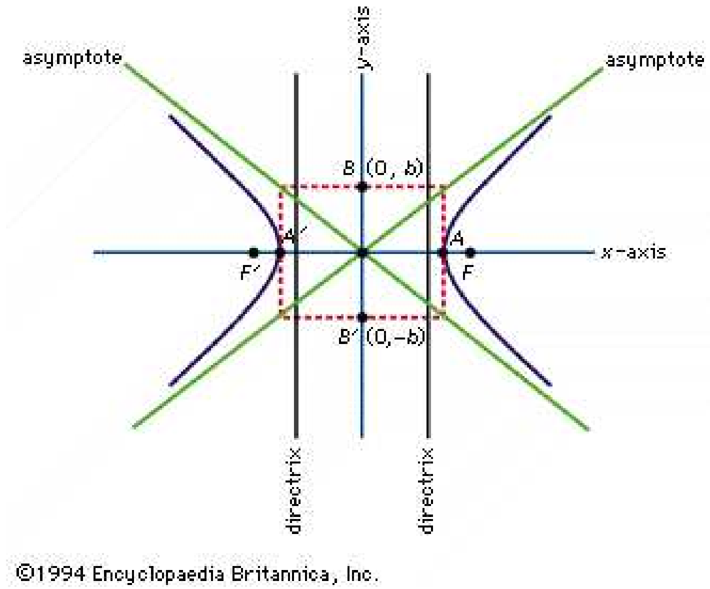
Substituindo c^2-a^2 por b^2, temos

$$b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo os dois membros por a^2b^2, obtemos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1$$

A representação geométrica da hipérbole seria:



Hipérbole

Observe que, desta maneira, as cônicas são reunificadas, sem que os conhecimentos ensinados hoje sejam perdidos, sem a necessidade de um aumento inviável de aulas dedicadas ao assunto e sem troca de tratamento, que permanece puramente analítico. Acreditamos que a exposição acima adaptada a sala de aula daria um complemento ao que é feito atualmente, dando sentido e unificação ao estudo das cônicas.

Acreditando nisso nos perguntamos porque essa forma foi pouco utilizada pelos livros nesses 120 anos? Porque que ela não é usada no ensino atual? Será que os professores atuais do ensino médio conhecem essa abordagem? Qual seria o resultado dessa abordagem em sala de aula? Será que as cônicas fariam mais sentido para os alunos? Essas perguntas surgiram ao final desse trabalho e ficam para desenvolvimento a posteriori, como sugestão para trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, C. P., *Geometria Espacial*. v.3.

[2] APOLÔNIO, 262-200 B.C., *A Treatise on Conic Sections*, editado por Thomas Little Heath, Cambridge, 1896.

[3] Ball, Walter William Rouse, 1852-1925, *A Short Account of the History of Mathematics*, London, 1901.

[4] BARBOSA, R. M., *Geometria Analítica Moderna (Plana)*. São Paulo: Livraria Nobel, 1975.

[5] BELTRAMI, Josilene. Os Programas de Matemática do Colégio Pedro II: 1837- 1931. Rio de Janeiro: PUC-Rio, dissertação de mestrado, 2000.

[6] BIANCHINI, E.; PACCOLA, H., *Matemática*. v.3. São Paulo: Moderna, 1996.

[7] BOULOS, P.; WATANABE, R., *Matemática - 2° Grau*. v.3. 2.ed. São Paulo: Nacional, 1979.

[8] BOYER, C. B., *History of analytic geometry*. New York: Dover, 2004.

[9] CARVALHO, T. M., *Matemática para Clássico e Científico*. v.3. 2.ed. São Paulo: Nacional, 1948.

[10] CARVALHO, T. M., *Matemática para Clássico e Científico*. v.1. São Paulo: Nacional, 1953.

[11] CASTRUCCI, B., *Lições de Geometria Elementar*. São Paulo: Nobel, 1964.

[12] CASTRUCCI, B., *Geometria Curso Moderno*. v.2. São Paulo: Nobel, 1967.

[13] CASTRUCCI, B.; ROSA NETO, E.; MENDONÇA, E. R.; SMITH, M. L., *Matemática 2° Grau*. v.3. São Paulo: FTD, 1976.

[14] Catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2005: Matemática, [coordenação Paulo Figueiredo Lima]. Brasília: MEC, SEMTEC, FNDE, 2004.

[15] COOLIDGE, J. L., *A history of the conic sections and quadric surfaces*. New York: Dover, 1968.

[16] DANTE, L. R.,*Matemática Contexto e Aplicações*. v.3. São Paulo: Ática, 1999.

[17] DANTE, L. R., *Matemática*. 1.ed. São Paulo: Ática, 2008.

[18] DESCARTES, R., 1596-1650, *La géométrie*, edition Hermann, 2nd ed., Paris, 1927.

[19] EULER, L., 1707-1783, *Introductio ad analysin infinitorum*, v.2. Lausanne, 1748.

[20] EULER, L., 1707-1783, *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, traduzido por J. B. Labey, Paris, 1796.

[21] FERMAT, P., 1608-1665, Œuvres, traduzido por Tannery and Henry, Paris, 1886-1932.

[22] FRIED, M. N. e UNGURU, S. *Apollonius of Perga's conica: Text, context, subtext*. (Mnemosyne. Supplementum. 222). Leiden: Brill, 2001.

[23] GHEMAT, DVD - A MATEMÁTICA DO COLÉGIO: LIVROS DIDÁTICOS PARA A HISTÓRIA DE UMA DISCIPLINA. Disponível em: $http : //www.unifesp.br/centros/ghemat/DVD_s/HISTORIA/inicio.html$.

[24] GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R., *Matemática Uma Nova Abordagem*. v.3. São Paulo: FTD, 2001.

[25] GOULART, M. C., *Matemática no Ensino Médio*. v.3. 3. ed. rev. e atual. São Paulo: Scipione, 2005.

[26] Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2011.

[27] IEZZI, G., *Fundamentos de Matemática Elementar*. v.7. 3.ed. São Paulo: Atual, 1985.

[28] IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R.; ALMEIDA, N., *Matemática: Ciência e Aplicações*. v.3. 4.ed. São Paulo: Atual, 2006.

[29] KAUFMAN, E.; BORDINHÃO, N.C., *Algebra Linear e Geometria Analítica*. 1.ed. São Paulo: Moderna, 1980.

[30] LACAZ NETTO, F.A., *Lugares Geométricos Planos*. São Paulo: Bandeirantes, 1951.

[31] LEBESGUE, H. *Les Coniques*. Paris: Gauthier-Villars, 1942.

[32] MAEDER, A. M., *Curso de Matemática* 3^o *Livro Ciclo Colegial*. São Paulo: Melhoramentos, 1948.

[33] MAEDER, A. M., *Curso de Matemática*. v.1. São Paulo: Melhoramentos, 1953.

[34] MAURER, W. A., *Lições de Geometria Analítica*. São Paulo: Livraria Nobel, 1953.

[35] Matemática: catálogo do Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio: PNLEM/2009, Secretaria de Educação Básica, Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

[36] MELLO E SOUZA, J. C., *Geometria Analítica*. v.1. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1938.

[37] MURNAGHAN, F. D., *Analytic Geometry*. New York: Prentice-Hall,.

[38] MYDORGE, C., 1585-1647, *Glaudi Mydorgi patricii Parisini Prodromi catopticorum et diopticorum rive conicorum*, Paris, 1641.

[39] PAIVA, M., *Matemática*. v.3. São Paulo: Moderna, 2008.

[40] PAIVA, M., *Matemática*. Manual do professor. São Paulo: Moderna, 2008.

[41] PAPPUS, 300-?, *La Collection Mathématique*, traduzido por Ver Ecke, Bruges, 1933.

[42] PEIXOTO, R., *Elementos de Geometria Analítica*. v.1. Rio de Janeiro: O. Mano, 1938.

[43] PEIXOTO, R., *Geometria Analítica - Geometria de uma e duas dimensões*. Rio de Janeiro: O. Mano, 1955.

[44] RIBEIRO, Denise F. C., Dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico: A Mudança na Organização dos Ensinos de Matemática. São Paulo: PUC/SP, dissertação de mestrado, 2006.

[45] RIBEIRO, J., *Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia*, v.3. 1.ed. São Paulo: Scipione, 2011.

[46] ROCHA, L. M., *Geometria Analítica*. 3.ed. São Paulo: Nobel, 1959.

[47] ROXO, E.; PEIXOTO, R; CUNHA, H; DACORSO NETTO, *Matemática,* 2° *Ciclo* - 1ª *Série*. 7.ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1953.

[48] SILVA, Givanildo F. A Reorganização da Matemática Escolar do Colégio em Tempos do Movimento da Matemática Moderna. São Paulo: PUC/SP, dissertação de mestrado, 2008.

[49] SMOLE, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V., *Matemática Ensino Médio*. v.3. 5.ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

[50] SMSG, *Matemática Curso Colegial*. v.1. Rio de Janeiro: Universidade de Brasília, 1964.

[51] SONNET, H.; FRONTERA, G., *Elementos de Geometria Analítica*. Madrid, 1865.

[52] SONNINO, S., *Elementos de Geometria Analítica*. São Paulo: Clássico Científica, 1944.

[53] VECHIA, A. e LORENZ, K. M., *Programa de Ensino da Escola Secundária 1850-1951*.

[54] YOUSSEF, A. N.; SOARES, E.; FERNANDEZ, V. P., *Matemática*. 1.ed. São Paulo: Scipione, 2009.

[55] ZEUTHEN, H. G., 1839-1920, *Die Lehre von den Kegelscknitten im Altertum*, Kopenhagen, 1886.

Enunciado e Demonstração Geométrica e Analítica do Teorema de Dandelin

O teorema que relaciona as três seções de um cone com a definição focal da elipse, hipérbole e parábola, mostrando que essas coincidem é conhecido como teorema de Dandelin. Nesse apêndice vamos enunciá-lo e demonstrá-lo geometricamente e analiticamente.

Teorema de Dandelin

Quando se secciona uma superfície cônica de revolução por um plano não pertencente ao vértice da superfície, nem perpendicular ao seu eixo, a seção produzida é uma elipse, uma hipérbole ou uma parábola conforme, respectivamente, o plano:

1^o)corte todas as geratrizes de uma só folha;

2^o)corte as duas folhas;

3^o)seja paralelo a apenas uma geratriz da superfície.

Demonstração Geométrica

1^a parte: seção elíptica

Consideremos uma superfície cônica de revolução e um plano α que, sendo exterior ao vértice V da superfície e oblíquo ao seu eixo, corta todas as geratrizes de uma das folhas da superfície.

Consideremos ainda, as duas esferas inscritas na superfície cônica e tangentes ao plano α respectivamente nos pontos F e F'(fig.4.1).

Para estudar a seção, tomemos um de seus pontos M qualquer e o unimos a F, a F' e a V, criando, então, a geratriz VM da superfície, a qual encontra os paralelos de contato das superfícies esféricas com a cônica respectivamente nos pontos R e S (fig.4.1).

Como tangentes respectivamente iguais de M a cada uma das esferas, temos:

$$\overline{MF} = \overline{MR}$$

$$\overline{MF'} = \overline{MS}$$

Somando membro a membro:

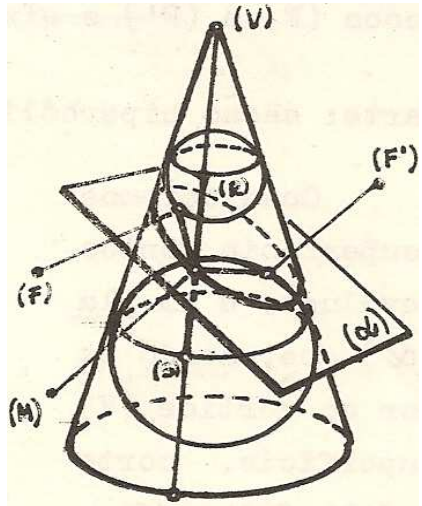


Figura 4.1: Seção Elíptica

$$\overline{\overline{MF} + \overline{MF'} = \overline{MR} + \overline{MS} = \overline{RS}}$$

E como $\overline{RS}$ é o valor constante da geratriz do tronco de cone de revolução de primeira espécie limitado, na superfície dada, pelos paralelos de contato das esferas consideradas (fig.4.1), concluímos, da própria definição, que a seção é uma elipse de focos F e F' e eixo transverso igual a $\overline{RS}$.

2^a **parte: seção hiperbólica**

Consideremos uma superfície cônica de revolução e um plano α que, sendo exterior ao vértice V da superfície, corte suas duas folhas (fig. 4.2).

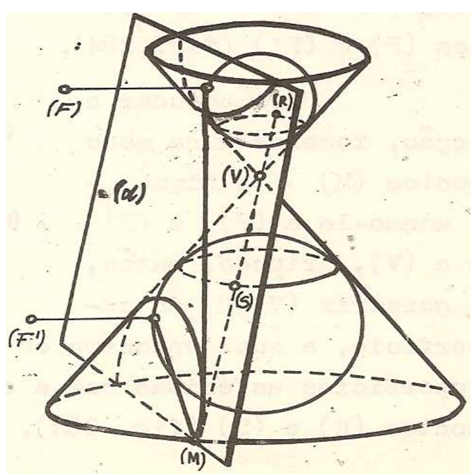


Figura 4.2: Seção Hiperbólica

Consideremos ainda, as duas esferas inscritas em cada uma das folhas da superfície tangentes ao plano secante, respectivamente nos pontos F e F' (fig. 4.2).

Para estudar a seção, tomemos um de seus pontos M qualquer e o unimos a F, a F' e a V, criando, então, a geratriz VM da superfície, a qual encontra os paralelos de contato das duas superfícies esféricas com a cônica respectivamente nos pontos R e S (fig. 4.2).

Como tangentes respectivamente iguais de M a cada uma das esferas, temos:

$$\overline{MF} = \overline{MR}$$

$$\overline{MF'} = \overline{MS}$$

Subtraindo membro a membro:

$$\overline{\overline{MF} - \overline{MF'} = \overline{MR} - \overline{MS} = \overline{RS}}$$

E como $\overline{RS}$ é o valor constante da geratriz do tronco de cone de revolução de segunda espécie limitado, na superfície cônica, pelos paralelos de contato das esferas consideradas (fig.4.2), concluimos, da própria definição, que a seção é uma hipérbole de focos F e F' e eixo transverso igual a $\overline{RS}$.

3^a parte: seção parabólica

Consideremos uma superfície cônica de revolução, de vértice V, e o plano α, secante a superfície e paralelo à sua geratriz VJ (e apenas a esta) (fig. 4.3).

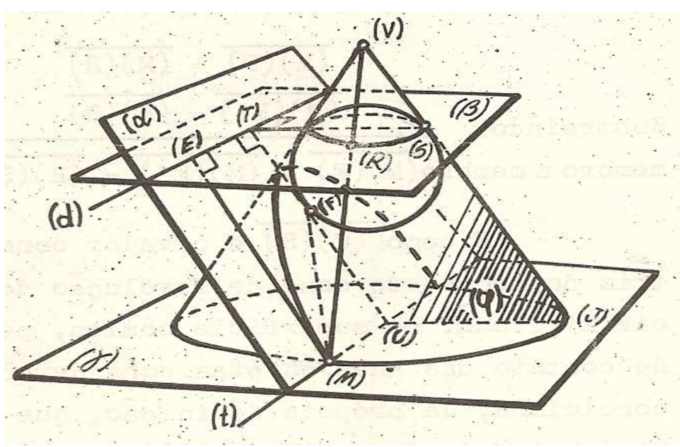


Figura 4.3: Seção Parabólica

Consideremos ainda, a esfera inscrita na superfície cônica e tangente ao plano secante no ponto F, bem como o plano β, do paralelo de contato existente entre a superfície dessa esfera e a cônica(fig.4.3), o qual corta o plano α segundo a reta d.

Para estudar a seção, tomemos um de seus pontos M qualquer e consideremos o plano γ, pertencente a M e perpendicular ao eixo da superfície, o qual corta o plano α, segundo a reta t (fig. 4.3).

Unimos M a F e a V, criando, então, a geratriz VM da superfície cônica, que corta o paralelo de contato da superfície esférica considerada com a cônica no ponto R (fig. 4.3).

Consideremos ainda, o plano meridiano φ da superfície cônica, perpendicular a α, dando-se origem ao quadrilátero $JSTU$ (fig. 4.3), que é um paralelogramo, já que β é paralelo a γ e, por hipótese α é paralelo à geratriz VSJ.

E porque as retas d e t são paralelas, como interseções dos planos paralelos β e γ com α, a perpendicular ME à reta d dá origem ao retângulo $METU$ (fig. 4.3).

Como tangentes de M à esfera inscrita, temos:

$$\overline{MF} = \overline{MR} \tag{4.3}$$

Como geratrizes do tronco de cone de revolução de primeira espécie limitado na superfície cônica pelos planos β e γ, vem:

$$\overline{MR} = \overline{JS} \tag{4.4}$$

Como lados opostos do paralelogramo $JSTU$ (fig.4.3), temos:

$$\overline{JS} = \overline{UT} \tag{4.5}$$

E como lados opostos do retângulo $METU$, vem:

$$\overline{UT} = \overline{ME} \tag{4.6}$$

Reunindo as relações 4.3, 4.4, 4.5 e 4.6, temos:

$$\overline{MF} = \overline{MR} = \overline{JS} = \overline{UT} = \overline{ME}$$

Ou, simplesmente:

$$\overline{MF} = \overline{ME}$$

Assim, porque um ponto M qualquer da seção equidista do ponto fixo F e da reta fixa d, concluimos, pela própria definição, que a seção é uma parábola de foco F e diretriz d (fig.4.3).

Demonstração Analítica

Na demonstração analítica vamos considerar o cone gerado pela rotação da reta $(-sen\alpha)z + (cos\alpha)x = 0,\ y = 0\ (0 < \alpha < 90^\circ)$ em torno do eixo z, a equação desse cone é dada por $(-sen\alpha)^2 z^2 - (cos\alpha)^2(x^2 + y^2) = 0$.

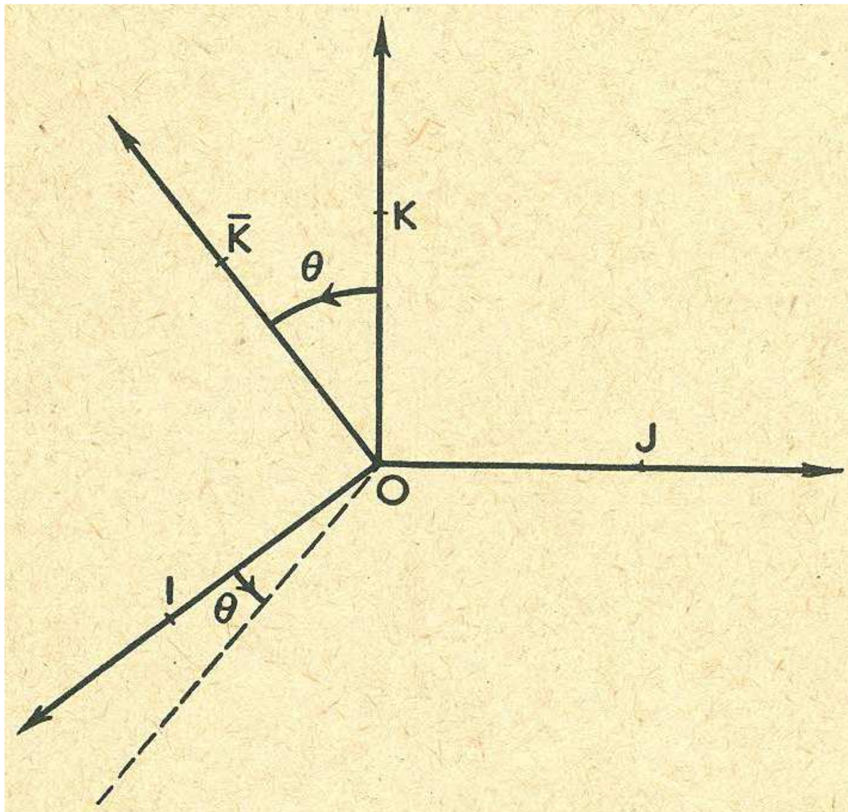


Figura 4.4: Rotação

Para provar o teorema de Dandelin vamos girar o eixo desse cone um ângulo $\theta(0 < \theta < 180^\circ)$ no plano y (fig. 4.4), deixando o plano que gera a seção parado.

Para obter a equação do cone gerado por essa rotação precisamos fazer uma transformação de coordenadas usando a matriz de rotação

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

A transformação de coordenadas obtida por essa rotação é

$$x = cos\theta\overline{x} + sen\theta\overline{z}$$

$$y = \overline{y}$$

$$z = -sen\theta\overline{x} + cos\theta\overline{z}$$

e a nova equação do cone é

$$(-sen\alpha)^2(cos\theta\overline{z} - sen\theta\overline{x})^2 - cos^2\alpha(cos\theta\overline{x} + sen\theta\overline{z})^2 + \overline{y}^2 = 0$$

equivalente a

$$(sen^2\theta - cos^2\alpha)\overline{x}^2 - cos^2\alpha\overline{y}^2 + (cos^2\theta - cos^2\alpha)\overline{z}^2 - 2sen\theta cos\theta\overline{zx} = 0$$

A interseção desse cone com o plano $\overline{z} - k = 0$ é dada pela curva do segundo grau

$$(sen^2\theta - cos^2\alpha)\overline{x}^2 - cos^2\alpha\overline{y}^2 + (cos^2\theta - cos^2\alpha)k^2 - 2ksen\theta cos\theta\overline{x} = 0 \tag{4.7}$$

Observe que quando $k = 0$, o plano intersepta o vértice do cone e portanto vamos considerar $k \neq 0$.

Se a equação geral do segundo grau em duas variáveis for dada por

$$ax^2 + by^2 + c + dxy + 2ex + 2fy = 0$$

os valores dos coeficientes da equação 4.7 serão:

$$a = sen^2\theta - cos^2\alpha$$

$$b = -cos^2\alpha$$

$$c = (cos^2\theta - cos^2\alpha)k^2$$

$$d = 0$$

$$e = -ksen\theta cos\theta$$

$$f = 0$$

Por isso,

$$\mathbf{A_2} = \begin{pmatrix} sen^2\theta - cos^2\alpha & 0 \\ 0 & -cos^2\alpha \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{A_3} = \begin{pmatrix} sen^2\theta - cos^2\alpha & 0 & -ksen\theta cos\theta \\ 0 & -cos^2\alpha & 0 \\ -ksen\theta cos\theta & 0 & (cos^2\theta - cos^2\alpha)k^2 \end{pmatrix}$$

então

$$C = Det(A_2) = cos^2\alpha(cos^2\alpha - sen^2\theta)$$

e

$$D = Det(A_3) = k^2cos^4\alpha(1 - cos^2\alpha)$$

1° **caso:** $C = 0$

$C = 0$ implica em $cos^2\alpha = sen^2\theta$, a menos que $D = 0$, mas isso só ocorre quando $k = 0$, caso que não nos interessa nessa discussão. Como $0 < \alpha < 90^\circ$ e $0 < \theta < 180^\circ$ $cos\alpha$ e $sen\theta$ são sempre positivos, logo $cos^2\alpha = sen^2\theta$ implica em $cos\alpha = sen\theta$, assim $\theta = 90^\circ + \alpha$. Então, quando $C = 0$ o plano $\bar{z} - k = 0$ é paralelo a uma geratriz do cone, por isso é uma parábola.

2° **caso:** $C > 0$

$C > 0$ implica em $cos^2\alpha > sen^2\theta$. Como $0 < \alpha < 90^\circ$ e $0 < \theta < 180^\circ$ $cos\alpha$ e $sen\theta$ são sempre positivos, logo $cos^2\alpha = sen^2\theta$ implica em $cos\alpha > sen\theta$, assim $\theta > 90^\circ + \alpha$ ou $\theta < 90^\circ - \alpha$. Então, quando $C > 0$ o plano $\bar{z} - k = 0$ corta todas as geratrizes de uma só folha do cone, por isso é uma elipse.

3° **caso:** $C < 0$

$C < 0$ implica em $cos^2\alpha < sen^2\theta$. Como $0 < \alpha < 90^\circ$ e $0 < \theta < 180^\circ$ $cos\alpha$ e $sen\theta$ são sempre positivos, logo $cos^2\alpha < sen^2\theta$ implica em $cos\alpha < sen\theta$, assim $90^\circ - \alpha < \theta < 90^\circ + \alpha$. Então, quando $C < 0$ o plano $\bar{z} - k = 0$ corta as duas folhas do cone, por isso é uma hipérbole.

Anexo A - Programa de Ensino de Matemática dos Cursos Complementares Pré-Médico e Pré-Politécnico Estabelecido pela Reforma Campos de 1931

Retirado da Dissertação do Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP *Dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico: a mudança na organização dos ensinos de matemática* da Denise Franco Capello Ribeiro.

Programa de Matemática do Curso Complementar Pré-Médico (Medicina, Farmácia, Odontologia)

1. Números irracionais; operações. Aplicações. 2. Noções de cálculo numérico. Valores exatos e aproximados. Erro absoluto; erro relativo. Operações efetuadas com uma dada aproximação. Aplicações. 3. Noções de cálculo gráfico. Operações gráficas. Representações gráficas das expressões algébricas. Aplicações. 4. Noções de cálculo instrumental. Régua de cálculo; seu emprego. Máquinas da calcular. 5. Complementos de análise combinatória e noções de teoria dos determinantes. Aplicações. 6. Aplicações lineares. 7. Noções de cálculo vetorial. Operações sobre escalares e vetores. Aplicações. 8. Estudo complementar das séries. Caracteres de convergência. Séries de termos positivos, séries e alternadas séries de termos quaisquer. 9. O número e. Limite $(1+1/m)^m$, quando m tende para o infinito; $a-1/h$ quando h tende para zero; $(1+x/m)^m$ quando m tende para infinito. 9.a. Homogeneidade das fórmulas. Sistemas de unidades. Unidades derivados. Equações de dimensão. 10. Concepção de Descartes. Sistemas de coordenadas, no plano e no espaço de três dimensões; coordenadas retilíneas e polares. 11. Representação geométrica das equações de duas e de três variáveis. Representação algébrica das linhas e das superfícies. Feixe de linhas e de superfícies. 12. Transformação de coordenadas no plano. 13. Teoria da linha reta no plano: problemas. **14.** Circunferência, **elipse, hipérbole e parábola; suas equações retilíneas e polares**. 15. Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões. 16. Teoria do plano e da linha reta; problemas. 17. Esfera. Superfícies do 2° grau; suas equações reduzidas. 18. Funções. Evoluções do conceito de função; ponto de vista atual. Continuidade. Classificação das funções; pontos de vista que podem ser adotados. Estudo elementar das funções exponencial e logarítmica. Funções circulares, diretas e inversas. 19. Derivadas e diferenciais das funções de uma variável; definições, notações e interpretação geométrica. 20. Funções de mais de uma variável. Derivadas e diferenças parciais. Diferença total. 21. Derivadas e diferenciais sucessivas. 22. Desenvolvimento em série das funções de uma só variável. Fórmula de Taylor. Resto da fórmula de Taylor; expressão de Lagrange. Fórmula de Mac-Laurin. Aplicações às funções elementares. 23. Formas indeterminadas. Regra de

L'Hopital. 24. Estudo das curvas definidas por equação de duas variáveis resolvidas em relação a uma delas. Tangentes e normais. Assíntotas. Concavidade. Máxima e mínima. Pontos de inflexão. Pontos notáveis. 25. Indagação das raízes numéricas das equações com uma aproximação dada. Métodos usuais. Processos gráficos. 26. Integrais definidas e indefinidas. Integrais imediatas. Integração por partes, por substituição. 27. Equações diferenciais, ordinárias e de derivadas parciais; sua formação. 28. Principais tipos integráveis, por quadraturas, de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem. 29. Equações diferenciais ordinárias lineares de coeficientes constantes. 30. Equações de derivadas parciais. 31. Interpolação. Diferenças finitas sucessivas. Fórmula de Newton. Fórmula de interpolação de Lagrange. Aplição da fórmula de Taylor à interpolação. Cálculo da função interpolatriz no caso dos fenômenos periódicos; aplicação da fórmula de Fourier. Extrapolação. 32. Noções de cálculo das probabilidades e teoria dos erros. 33. Noções de estatística; suas aplicações à biologia e à medicina. 34. Movimento e força. Velocidade e aceleração. Composição de forças de equilíbrio. 35. Movimento retilíneo. Movimento Curvilíneo. Composição de translações e rotações. Problema e aplicação.

Programa de Matemática do Curso Complementar Pré-Politécnico (Engenharia, Química Industrial, Arquitetura)

Primeira Série

Álgebra:

Números irracionais. Operações. Expoente irracional. Logaritmos. Teoria. Prática do sistema decimal. Linhas trigonométricas. Número. Operações sobre linhas trigonométricas. Equações trigonométricas. Resolução de triângulos. Números complexos. Operações. Expoente imaginário. Representações trigonométricas e exponenciais. Logaritmos e linhas trigonométricas de números complexos. Aplicação às operações vetoriais no plano. Análise combinatória. Teoria e aplicações. Determinantes. Teoria e aplicações. Formas lineares. Equações lineares. Frações contínuas. Aplicação à representação dos números irracionais. Frações contínuas periódicas. Séries numéricas. Principais caracteres de convergência. Operações sobre séries. Cálculo numérico. Noções sobre conjuntos lineares. Teorema de Bolzano-Weierstrass. Extremos superior e inferior. Limites máximos e mínimos. Funções de uma variável real. Teorema de Weierstrass. Limites Número e limite de U; tipo 1 x infinito. Funções contínuas. Noção de continuidade uniforme. Propriedades fundamentais. Operações sobre funções contínuas. Funções elementares. Diferença finita, derivada, diferencial. Cálculo das derivadas e das diferenciais. Aplicação às funções elementares. Diferenças, derivadas e diferenciais sucessivos. Aplicação às funções elementares. Teorema de Rolle. Fórmulas dos acréscimos finitos e de Cauchy. Fórmulas de Taylor e Maclaurin. Aplicação ao cálculo numérico aproximado. Desenvolvimento em série. Séries de potência. Aplicação às funções elementares. Formas indeterminadas. Regra de L'Hopital. Comparação das funções exponenciais e logarítmicas com os polinômios. Cálculo numérico das raízes de equações algébricas ou transcendentes. Métodos clássicos de aproximação. Máximos e mínimos. Estudo da variação de uma função. Representação cartesiana. Funções elementares. Funções primitivas. Aplicações elementares.

Geometria:

Relações métricas nos polígonos, no círculo, nos poliedros e nos corpos redondos. Quadratura e cubatura. Transformação de figuras. Homotetia e semelhança. Relação harmônica. Homografia. Involução. **Propriedades principais das cônicas.** Pólos e polares.

Álgebra vetorial:

Escalares e vetores. Adição e subtração de vetores. Produtos escalares, vetoriais e mixtos. Aplicações.

Segunda Série

Álgebra superior:

Propriedades gerais dos polinômios. Princípio fundamental da teoria das equações. Composição das equações. Noções sobre a teoria das funções simétricas. Cálculo das raízes comuns de duas equações. Teoria das raízes iguais. Eliminação. Separação das raízes reais. Limites das raízes de uma equação. Cálculo das raízes reais. Cálculo das raízes imaginárias.

Elementos de geometria analítica:

Concepção de Descartes. Coordenadas retilíneas e polares no plano. Transformação de coordenadas no plano. Lugares geométricos no plano; problemas. Teoria da linha reta no plano: problemas. Circunferência, **elipse, hipérbole e parábola; suas equações retilíneas e polares**. Coordenadas retilíneas e polares no espaço de três dimensões. Transformação de coordenadas no espaço de três dimensões. Lugares geométricos. Generalidades sobre linhas e superfícies. Teoria da linha reta e do plano; problema. Esfera. Superfícies do 2° grau (equações simplificadas).

Anexo B - Programa de Ensino de Matemática dos Cursos Clássico e Científico Estabelecido pela Reforma Capanema de 1942

Também foi retirado da Dissertação do Mestrado em Educação Matemática da PUC/SP *Dos Cursos Complementares aos Cursos Clássico e Científico: a mudança na organização dos ensinos de matemática* da Denise Franco Capello Ribeiro.

Em 16 de Março de 1943, foi expedida a Portaria Ministerial n° 177, publicada no Diário Oficial em 18 de março da referido ano, que continha os programas de matemática para os cursos clássico e científico.

Programa de Matemática do Curso Clássico

Primeira Série

Aritmética Teórica

Unidade I - A divisibilidade numérica; 1- Teoremas gerais sobre a divisibilidade. 2- Caracteres de divisibilidade. 3- Teorias do m.m.c. e do m.d.c. 4- Teoria dos números primos; aplicações.

Álgebra

Unidade II - Os polinômios: 1- Operações algébricas sobre polinômios. 2- Teoria da divisão de polinômios. 3- Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini. Unidade III - O trinômio do 2° grau: 1- Decomposição em fatores do 1° grau; sinais do trinômio do 2° grau; representação gráfica.

Geometria

Unidade IV - O plano e a reta no espaço: 1- Determinação de um plano. 2- Intersecção de planos e retas. 3- Paralelismo de retas e planos. 4- Reta e plano perpendiculares. 5- Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6- Diedros; planos perpendiculares entre si. 7- Noções sobre ângulos poliédricos. Unidade V - Os poliedros: 1- Noções gerais. 2- Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos.

Segunda Série

Álgebra

Unidade I - Progressões e logaritmos: 1- Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2- Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 3- Resolução de algumas equações exponenciais simples. Unidade II - Binômio de Newton: 1- Noções sobre análise combinatória. 2- Binômio de Newton.

Geometria

Unidade III - Os corpos redondos: 1- Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2- Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3- Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

Trigonometria

Unidade IV - Vetor: 1- Grandezas escalares e vetoriais. 2- Noção de vetor; eqüipolência. 3- Resultante ou soma geométrica de vetores. 4- Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles. Unidade V - Projeções: 1- Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2- Teorema de Carnot. 3- Valor de projeção de um vetor. Unidade VI - Funções circulares: 1- Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2- Funções circulares ou trigonométricas; definição, variação, redução ao primeiro quadrante. 3- Relações entre funções circulares de um mesmo arco. 4- Cálculo das funções circulares dos arcos de 30°, 45° e 60°. Unidade VII - Resolução de triângulos: 1- Relações entre os elementos de um triângulo. 2- Uso das tábuas trigonométricas. 3- Resolução de triângulos retângulos.

Terceira série

Álgebra

Unidade I - Funções: 1- Noção de função de variável real. 2- Representação cartesiana. 3- Noção de limite e de continuidade. Unidade II - Derivadas: 1- Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2- Cálculo das derivadas. 3- Derivação das funções elementares. 4- Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples.

Geometria

Unidade III - Curvas usuais: 1- Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2- As secções cônicas. 3- Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

Geometria Analítica

Unidade IV - Noções fundamentais: 1- Concepção de Descartes. 2- Coordenadas; abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3- Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4- Determinação de uma direção; ângulo de duas direções. **Unidade V - Lugares geométricos:** 1- Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2- Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3- Equação da reta. 4- Equação do círculo. **5- Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.**

Programa de Matemática do Curso Científico

Primeira Série

Aritmética Teórica

Unidade I - As operações aritméticas fundamentais: 1- Teoria da adição, da subtração, da multiplicação e da divisão, da potenciação e da radiciação de inteiros. 2- Sistemas de numeração. Unidade II - A divisibilidade numérica: 1- Teoremas gerais sobre a divisibilidade. 2- Caracteres de divisibilidade. 3- Teorias do m.m.c. e do m.d.c. 4- Teoria dos números primos; aplicações. Unidade III - Os números fracionários: 1- Teoria das operações aritméticas sobre números fracionários. 2- Noções sobre cálculo numérico aproximado. Erros. Operações abreviadas.

Álgebra

Unidade IV - Os polinômios: 1- Operações algébricas sobre polinômios. 2- Teoria da divisão de polinômios. 3- Identidade de polinômios; método dos coeficientes a determinar; identidades clássicas. 4- Divisão de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Briot-Ruffini. Unidade III - O trinômio do 2° grau: 1- Decomposição em fatores do 1° grau; sinais do trinômio; inequações do 2° grau. 2- Noção de variável e de função; variação do trinômio do 2° grau; representação gráfica. 3- Noções elementares sobre continuidade e sobre máximos e mínimos.

Geometria

Unidade VI - O plano e a reta no espaço: 1- Determinação de um plano. 2- Intersecção de planos e retas. 3- Paralelismo de retas e planos. 4- Reta e plano perpendiculares. 5- Perpendiculares e oblíquas de um ponto a um plano. 6- Diedros; planos perpendiculares entre si. 7- Ângulos poliédricos; estudo especial dos triedros. Unidade VI - Os poliedros: 1- Noções gerais. 2- Estudo dos prismas e pirâmides e respectivos troncos; áreas e volumes desses sólidos; Teorema de Euler; noções sobre os poliedros regulares.

Segunda Série

Álgebra

Unidade I - A função exponencial: 1- Estudo das progressões aritméticas e geométricas. 2- Noção de função exponencial e de sua função inversa. 3- Teoria dos logaritmos; uso das tábuas; aplicações. 4- Resolução de algumas equações exponenciais. Unidade II - O binômio de Newton: 1- Noções sobre análise combinatória. 2- Binômio de Newton. Unidade III - Determinantes: 1- Teoria dos determinantes. 2- Aplicação aos sistemas de equações lineares; regra de Crammer; teorema de Rouché. Unidade IV - Frações contínuas: Noções sobre frações contínuas.

Geometria

Unidade V - Os corpos redondos: 1- Noções sobre geração e classificação das superfícies. 2- Estudo do cilindro e do cone; áreas e volumes desses sólidos. 3- Estudo da esfera; área da esfera, da zona e do fuso esférico; volume da esfera.

Trigonometria

Unidade VI - Vetor: 1- Grandezas escalares e vetoriais. 2- Noção de vetor; eqüipolência. 3- Resultante ou soma geométrica de vetores. 4- Vetores deslizantes sobre um eixo; medida algébrica; teorema de Chasles. Unidade VII - Projeções: 1- Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. 2- Teorema de Carnot. 3- Valor de projeção de um vetor. Unidade VIII - Funções circulares: 1- Generalização das noções de arco e de ângulo; arcos côngruos; arcos de mesma origem e extremidades associadas. 2- Funções circulares ou trigonométricas: definição, variação, redução ao primeiro quadrante. 3- Relações entre funções circulares de um mesmo arco. 4- Cálculo das funções circulares dos arcos $\frac{\pi}{n}$. Unidade IX - Tranformações trigonométricas: 1- Fórmulas de adição, subtração, multiplicação e divisão de arcos: aplicações. 2- Tranformação de soma em produtos; aplicação ao cálculo numérico. 3- Uso das tábuas trigonométricas. Unidade X - Equações trigonométricas: Resolução e discussão de algumas equações trigonométricas simples. Unidade XI - Resolução de triângulos: 1- Relações entre os elementos de um triângulo. 2- Resolução de triângulos retângulos. 3- Resolução de triângulos obliquângulos. 4- Aplicações imediatas à Topografia.

Terceira série

Álgebra

Unidade I - Séries: 1- Sucessões. 2- Cálculo aritmético dos limites. 3- Séries numéricas. 4- Principais caracteres de convergência. Unidade II - Funções: 1- Função de uma variável real. 2- Representação cartesiana. 3- Continuidade; pontos de descontinuidade; descontinuidades de uma função racional. Unidade III - Derivadas: 1- Definição; interpretação geométrica e cinemática. 2- Cálculo de derivadas. 3- Derivação de funções elementares. 4- Aplicação à determinação dos máximos e mínimos e ao estudo da variação de algumas funções simples. Unidade IV - Números complexos: 1- Definição; operações fundamentais. 2- Representação trigonométrica e exponencial. 3- Aplicação à resolução das equações binômias. Unidade V - Equações algébricas: 1- Propriedades gerais dos polinômios. 2- Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica; aplicação à composição das equações. 3- Noções sobre transformações das equações; equações recíprocas; equações de raízes iguais.

Geometria

Unidade VI - Relações métricas: 1- Teorema de Sewtart e suas aplicações no cálculo de linhas notáveis no triângulo. 2- Relações métricas nos quadriláteros; teorema de Ptolomeu ou Hiparco. 3- Potência de um ponto; eixos radicais; planos radicais. Unidade VII - Tranformações de figuras: 1- Deslocamentos, translação, rotação, simetria. 2- Homotetia e semelhança nos espaços de duas e de três dimensões. 3- Inversão pelos raios vetores recíprocos. **Unidade VIII - Curvas usuais: 1- Definição e propriedades fundamentais da elipse, da hipérbole e da parábola. 2- As secções cônicas.** 3- Definição e propriedades fundamentais da hélice cilíndrica.

Geometria Analítica

Unidade IX - Noções fundamentais: 1- Concepção de Descartes. 2- Coordenadas; abscissas sobre a reta; coordenadas retilíneas no plano. 3- Distância de dois pontos; ponto que divide um segmento numa razão dada. 4- Determinação de uma direção; ângulo de duas direções. **Unidade X - Lugares geométricos:** 1- Equação natural de um lugar geométrico; sua interpretação. 2- Passagem da equação natural para a equação retilínea retangular. 3- Equação da reta. 4- Equação do círculo. **5- Equações reduzidas da elipse, da hipérbole e da parábola.**

Anexo C - Programa de Ensino de Matemática do Segundo Ciclo Estabelecido pelo Ajuste de 1951

Retirado da Dissertação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP *A Reorganização da Matemática Escolar do Colégio em Tempos do Movimento da Matemática Moderna* do Givanildo Farias da Silva.

Desenvolvimento dos Programas Mínimos de Ensino Secundário

Primeira Série

I- Noções sobre o cálculo aritmético aproximado; erros. 1. Aproximação e erro. Valor por falta ou por excesso. Erro absoluto e erro relativo. Algarismos exatos de um número aproximado. Erro de arredondamento. 2. Adição, subtração, multiplicação e divisão com números aproximados. O cálculo da aproximação dos resultados e seu problema inverso; método dos erros absolutos. II- Progressões: 1. Progressões aritméticas; termo geral; soma dos termos. Interpolação aritmética. 2. Progressões geométricas; termo geral; soma e produto dos termos. Interpolação geométrica. III- Logaritmos: 1. O cálculo logaritmo como operação inversa da potenciação. Propriedades gerais dos logaritmos; mudança de base. Característica e mantissa. Cologaritmo. 2. Logaritmos decimais; propriedades. Disposição e uso das tábuas de logaritmos. Aplicação ao cálculo numérico. 3. Equações exponenciais simples; sua resolução com o emprego de logaritmos. IV- Retas e planos; superfícies e poliedros em geral; corpos redondos usuais; definições e propriedades; áreas e volumes. 1. Reta e plano; postulados; determinação; interseção; paralelismo; distância; inclinação e perpendicularismo. Diedros e triedros. Ângulos sólidos em geral. 2. Generalidades sobre os poliedros em geral. Poliedros regulares; indicações gerais. 3. Prismas; propriedades gerais e, em especial dos paralelepípedos; área lateral; área total; volume. 4. Pirâmides; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de prisma e troncos de pirâmide. 5. Estudo sucinto das superfícies em geral. Superfícies retilíneas e superfícies curvilíneas. Superfícies desenvolvíveis e superfícies reversas. Superfícies de revolução. Exemplos elementares dos principais tipos da classificação de Monge. 6. Cilindros; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de cilindro. 7. Cones; propriedades gerais; área lateral; área total; volume. Troncos de cone de bases paralelas. 8. Esfera; propriedades gerais. Área e volume da esfera e das suas diversas partes. **V- Seções cônicas; definições e propriedades fundamentai. 1. Elipse; definição e traçado; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente. 2. Hipérbole; definição e traçado; assíntotas; círculo principal e círculos diretores; excentricidade; tangente. 3. Parábola; definição e traçado; diretriz; tangente. 4. As seções determinadas por um plano numa**

superfície cônica de revolução; teorema de Dandelin.

Segunda Série

I- Análise combinatória simples: 1. Arranjos de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. 2. Permutações de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. Inversão. Classe de uma permutação; teorema de Bézout. 3. Permutação simples com objetos repetidos; cálculo do número de grupamentos. 4. Combinações de objetos distintos; formação e cálculo do número de grupamentos. Relação de Stifel; triângulo aritmético de Pascal. II- Binômio de Newton: 1. Lei de formação do produto de binômios distintos. Fórmula para o desenvolvimento binomial no caso de expoente inteiro e positivo; lei recorrente formação dos termos. 2. Aplicação do desenvolvimento binomial ao problema da somação de potências semelhantes de uma sucessão de números naturais. III- Determinantes; sistemas lineares: 1. Determinantes e matrizes quadradas; propriedades fundamentais. Regra de Sarrus. Determinantes menores. Desenvolvimento de um determinante segundo os elementos de uma linha ou coluna. Transformação dos determinantes. Abaixamento da ordem de um determinante pela regra de Chio. 2. Sistemas de n equações lineares com n incógnitas. Regra de Cramer. 3. Sistemas de m equações lineares com n incógnitas; teorema de Rouché. IV- Noções sobre vetores; projeções; arcos e ângulos; linhas e relações trigonométricas. 1. Grandezas escalares e vetoriais. Vetores; propriedades. Operações elementares com vetores. Relação de Chasles. 2. Projeção ortogonal de um vetor sobre um eixo. Teorema de Carnot. 3. Generalização dos conceitos de arco e de ângulo. Arcos côngruos. Arcos da mesma origem e de extremidades associadas. 4. Linhas e funções trigonométricas diretas; definições e variação. Arcos correspondentes à mesma linha trigonométrica. Relações entre as linhas trigonométricas de um mesmo arco. Problema geral da redução ao 1° quadrante. Cálculo das linhas trigonométricas dos arcos expressos pela relação π/n. V- Transformações trigonométricas em geral; equações trigonométricas simples. 1. Adição, subtração e multiplicação de arcos. Bissecção de arcos. Transformação de somas de linhas trigonométricas em produtos. 2. Disposição e uso de tábuas trigonométricas naturais e logarítmicas. 3. Equações trigonométricas simples, tipos clássicos. VI- Resolução trigonométrica de triângulos. 1. Relações entre os elementos de um triângulo retângulo. 2. Casos clássicos de resolução de triângulos retângulos. 3. Relações entre os elementos de um triângulo qualquer, Lei dos senos. Relações dos cossenos. Expressão trigonométrica da área. 4. Casos clássicos de resolução de triângulos quaisquer.

Terceira Série

I- Conceito de função; representação cartesiana; reta e círculo; noção intuitiva de limite e de continuidade. 1. Conceito elementar de variável e de função. Variável progressiva e variável contínua; intervalos. Noção intuitiva de limite de uma sucessão; exemplos clássicos elementares; convergência. 2. Funções elementares; classificação. Representação cartesiana de uma função e equação de uma curva. Curvas geométricas e curvas empíricas; noção intuitiva de continuidade. Representação gráfica de funções usuais; função exponencial, função logarítmica e funções trigonométricas diretas. Acréscimo de uma função num ponto; funções crescentes e funções decrescentes. Tangente; inclinação da tangente. 3. Limite de variáveis e de funções;

limites infinitos. Propriedades fundamentais. Exemplos elementares de descontinuidade de uma função em um ponto. Descontinuidade das funções racionais fracionárias. 4. A função linear e a linha reta em coordenadas cartesianas. Parâmetros ângulares e parâmetro linear. Formas diversas de equação da linha reta. Representação paramétrica; área de um triângulo em função das coordenadas dos vértices. Os problemas clássicos de inclinação, interseção, passagem e distância, relativos à linha reta. 5. A equação geral do 2° grau com duas variáveis e a circunferência de círculo em coordenadas cartesianas. Formas diversas da equação da circunferência de círculo. Interseção de retas e circunferências. II- Noções sobre derivadas e primitivas; interpretações; aplicações. 1. Definição da derivada em um ponto; notações; derivada infinita. Interpretação geométrica e cinemática da derivada. Diferença e diferencial; interpretação geométrica. Funções derivadas. Derivação sucessiva. 2. Regras de derivação; derivadas de uma constante; de uma função de função; de funções inversas; da soma, do produto e do quociente de funções. Aplicação à derivação de funções elementares. 3. Aplicação da teoria das derivadas ao estudo da variação de uma função. Funções crescentes e funções decrescentes; máximos e mínimos relativos; interpretação geométrica. 4. Funções primitivas; integral indefinida; constante de integração. Primitivas imediatas; regras simples de integração. 5. Integral definida. Aplicação ao cálculo de áreas e de volumes; exemplos elementares. III- Introdução à teoria das equações; polinômios; propriedades, divisibilidade por $x \pm a$; problemas de composição, transformações e pesquisa de raízes; equações de tipos especiais. 1. Polinômios de uma variável; identidade. Aplicação ao método dos coeficientes a determinar. Divisibilidade de um polinômio inteiro em x por $x \pm a$; regra e dispositivo prático de Ruffini. Fórmula de Taylor para os polinômios; algoritmo de Ruffini-Horner. 2. Polinômios e equações algébricas em geral; raízes ou zeros. Conceito elementar de número complexo; forma binomial; complexos conjugados; módulo; representação geométrica. Operações racionais. Decomposição de um polinômio em fatores binômios; número de raízes de uma equação; raízes múltiplas e raízes nulas. Raízes complexas conjugadas. Indicação sobre o número de raízes reais contidas em um dado intervalo: teorema de Bolzano; consequências. 3. Relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação; aplicação à composição das equações. Propriedades das raízes racionais e fracionárias. 4. Transformação das equações, transformações de primeira ordem: aditivas, multiplicativas e recíprocas. 5. Equações recíprocas; classificação; forma normal; abaixamento do grau. 6. Cálculo das raízes inteiras. Determinação das cotas pelo método de Laguerre-Thibault. Regras de exclusão de Newton. Algoritmo de Peleterius.

Anexo D - Programa de Ensino de Matemática para o Curso Colegial Sugerido pelo GEEM em 1965 para Atender os Objetivos do Movimento da Matemática Moderna

Também foi retirado da Dissertação do Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da PUC/SP *A Reorganização da Matemática Escolar do Colégio em Tempos do Movimento da Matemática Moderna* do Givanildo Farias da Silva.

Primeiro Ano

I- Funções: 1. Noções gerais. 2. Função linear, representação gráfica, estudo da reta. 3. Função trinômio do 2° grau, variação, representação gráfica, inequações do 2° grau. 4. Função exponencial e logarítmica, uso das tábuas. II- Sequências: 1. Exemplos de sequências, princípios da indução. 2. Progressões aritméticas e geométricas. III- Funções trigonométricas: 1. Estudo das funções trigonométricas, periodicidade, simetria, representação gráfica. 2. Relações fundamentais, funções trigonométricas de $a \pm b$, $2a$, $a/2$, onde a e b representam medidas de arcos. 3. Transformação de $sena \pm senb$, $cosa \pm cosb$ em produto. 4. Equações trigonométricas e resolução de triângulos. IV- Introdução à Geometria do Espaço: 1. Axiomas e teoremas fundamentais. 2. Perpendicularismo e paralelismo, projeção e distância. 3. Diedros.

Segundo Ano

I- Análise Combinatória e Binômio de Newton: 1. Análise combinatória simples. 2. Noção de probabilidade. 3. Binômio de Newton. II- Sistemas de Equações Lineares: 1. Matrizes e determinantes. 2. Resolução de sistemas lineares. III- Ângulos Poliédricos e Poliedros: 1. Triedros e ângulos poliédricos. 2. Poliedros regulares. 3. Prismas e pirâmides. IV- Superfícies e Sólidos Redondos: 1. Superfícies elementares: cilíndricas, cônicas e de rotação. 2. Cilindro, cone e esfera. V- Áreas e Volumes dos Principais Sólidos.

Terceiro Ano

I- Conjunto dos Números Complexos: 1. Conceito, representação, operações, propriedades. 2. Raízes da unidade, equações binômias. II- Polinômios e Equações Algébricas: 1. Polinômios, operações, propriedades. 2. Resolução de equações algébricas. **III- Geometria Analítica:** 1. Estudo da reta. 2. Estudo da circunferência. **3. Noções sobre cônicas.** IV- Introdução ao Cálculo Infinitesimal: 1. Noção de limite e continuidade de funções reais de variável real. 2. Derivada de funções racionais e trigonométricas. 3. Propriedades das derivadas e aplicação no estudo da variação das funções. V- Transformações Geométricas: 1. Translação, rotação e simetria, propriedades. 2. Semelhança, homotetia, propriedades.

Anexo E - Ilustrações do Livro Matemática Segundo Ciclo de Euclides Roxo, Roberto Peixoto, Haroldo Cunha e Dacorso Netto

V — SEÇÕES CÔNICAS; DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES FUNDAMENTAIS

247 — Generalidades. Denomina-se *curva* a trajetória de um ponto que se desloca.

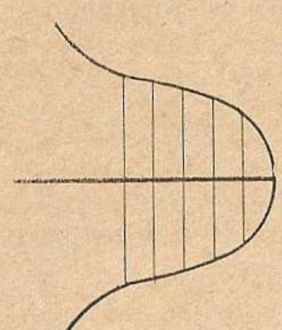
Quando o ponto gerador se move segundo uma lei determinada, a curva fica perfeitamente definida: é o lugar geométrico dos pontos que gozam da propriedade expressa por dita *lei*.

Tais curvas, que se denominam *geométricas*, têm uma forma perfeitamente determinada e outras propriedades que se estabelecem ou se demonstram pelo raciocínio matemático.

Chamam-se *gráficas* as curvas, cuja geração não está sujeita a uma lei conhecida e, portanto, escapam ao exame rigoroso da investigação matemática.

Chama-se *arco* de uma curva a porção da mesma, compreendida entre dois de seus pontos. *Corda* é o segmento retilíneo que liga dois pontos quaisquer de uma curva.

Diâmetro de uma curva é o lugar geométrico dos meios das cordas paralelas a uma direção dada.



Chama-se *eixo* todo diâmetro retilíneo perpendicular às cordas que ele divide ao meio; essa denominação provém do fato de ser a curva simétrica em relação ao suporte de qualquer de seus eixos.

Quando uma curva admite um centro de simetria, êste se denomina simplesmente *centro da curva*. A intersecção de dois eixos retangulares, de uma curva plana, é sempre um centro de simetria da curva.

Tangente a uma curva, em um ponto M, é a posição limite MT, de uma secante MM', que gira em torno de M, de modo que

Como vimos no 1º caso, essa reta é a intersecção, RY, do plano secante e do plano do paralelo de contacto de uma das esferas Σ, Σ' com o cone.

3º *O plano P′ paralelo a P e que passa pelo vértice é tangente ao cone.* A geratriz de contacto se acha, então, por uma razão de simetria, no plano tirado por VX perpendicularmente a P e coincide com uma das retas $V\alpha$, $V\beta$. Consideremos, por exemplo, $V\beta$; seja A o ponto em que a outra geratriz situada no plano da épura encontra P.

Assim $A\beta'$ será o traço, paralelo a $V\beta$, de P sobre o plano da épura. Tracemos o círculo tangente a $A\beta'$, $V\alpha$ e $V\beta$ e cujo centro O se acha sobre o eixo VX; sejam C, D e F seus pontos de contacto.

Por uma rotação em torno de VX, esse círculo gera a esfera Σ, inscrita no cone ao longo de CD e tangente ao plano P em F. Seja RY a intersecção do plano P com o do paralelo CD, isto é, a perpendicular ao plano da épura, traçada por R.

Vemos, como nos corolários dos casos anteriores e conservando as mesmas notações, que a razão das distâncias de um ponto qualquer M da secção ao ponto F e à reta RY é constante.

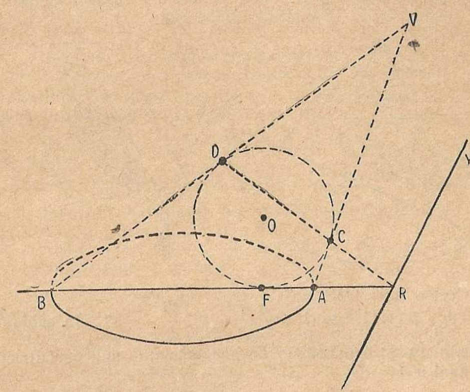
Ora, quando o ponto M se acha em A, sua distância a RY torna-se AR; mas o triângulo RAC é evidentemente semelhante a VCD e, portanto, $AR = AC$ e $AC = AF$, como tangentes de um ponto para um círculo; logo a razão constante das distâncias do ponto M ao ponto F e à reta RY é igual à unidade, o que equivale a dizer que a secção é uma parábola de foco F e diretriz RY.

286 — Cônicas definidas como lugar geométrico. TEOREMA. *O lugar dos pontos de um plano tais, que a razão de suas distâncias a uma reta e a um ponto, dados nesse plano, seja constante, é uma cônica, que tem o ponto dado como foco.*

Seja A um ponto do lugar situado sobre a perpendicular FR baixada do ponto dado, F, sobre a reta dada, RY.

Tracemos, pelo ponto F e num plano perpendicular ao plano dado, um círculo O tangente a FR e seja AC a segunda tangente traçada de A para o círculo O.

Consideremos o cone (ou cilindro) circunscrito à esfera de centro O e de raio OF, segundo seu círculo de intersecção com o plano CRY. A secção meridiana dêste cone está representada no plano da épura pelas geratrizes VC e VD, tangentes traçadas de V para o círculo O. De considerações feitas anteriormente resulta que a secção do cone pelo plano FRY é uma cônica, de foco F e diretriz RY e que, evidentemente passa pelo ponto A. Tal cônica coincide, pois, com o lugar procurado.



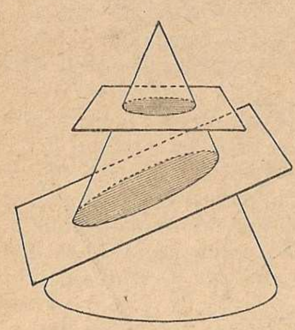
OBSERVAÇÕES. I. A figura nos dá, qualquer que seja a posição de A em relação a AB:

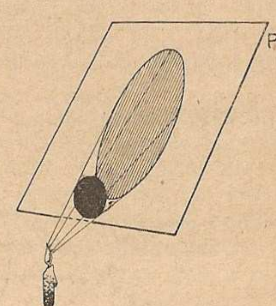
$$\frac{FA}{AR} = \frac{FB}{BR} = \frac{|FA - FB|}{AB} = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$$

II. Conforme se tenha $\frac{FA}{AR} = \frac{c}{a} \lesseqgtr 1$, a curva será uma elipse ou uma hipérbole.

III. *Chama-se* EXCENTRICIDADE *de uma cônica à razão constante das distâncias de um ponto qualquer da curva a um foco e à diretriz correspondente.*

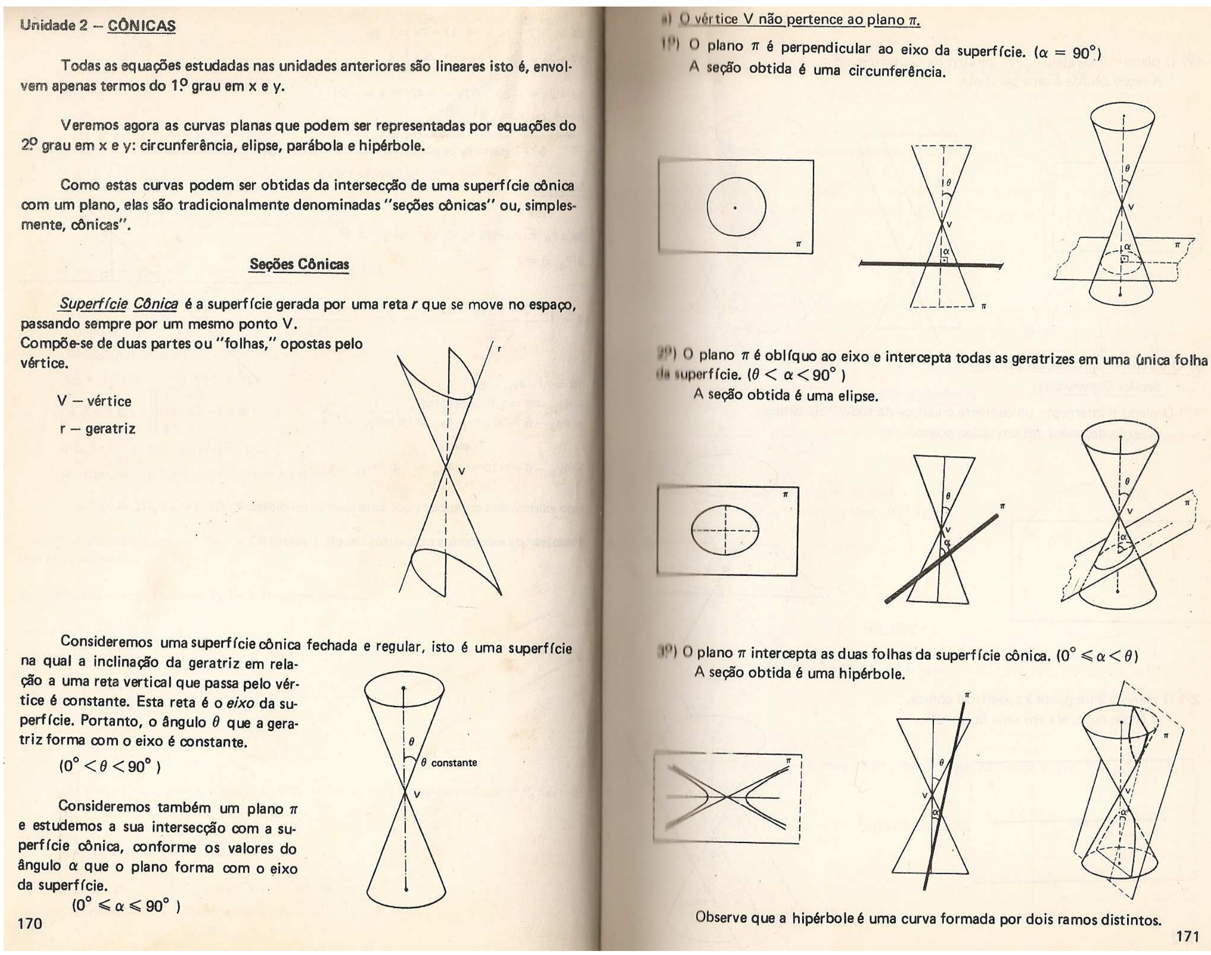
IV. Nos casos da elipse e da hipérbole a excentricidade é igual, como vimos acima, a $\frac{c}{a}$. Quando, numa elipse, um dos focos, F', se afasta ao infinito, ela tende para uma parábola: o ponto B da figura acima também se afasta ao infinito,





$\frac{BF}{BR}$ tende para 1 e portanto $\frac{FA}{AR} = \frac{BF}{BR} = 1$. Já sabíamos, aliás, pela própria definição de parábola que sua excentricidade é igual a 1.

Anexo F - Ilustrações do Livro Álgebra Linear e Geometria Analítica de Estela Kaufman Fainguelernt e Noelir de Carvalho Bordinhão



Unidade 2 — CÔNICAS

Todas as equações estudadas nas unidades anteriores são lineares isto é, envolvem apenas termos do 1º grau em x e y.

Veremos agora as curvas planas que podem ser representadas por equações do 2º grau em x e y: circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Como estas curvas podem ser obtidas da intersecção de uma superfície cônica com um plano, elas são tradicionalmente denominadas "seções cônicas" ou, simplesmente, cônicas".

Seções Cônicas

Superfície Cônica é a superfície gerada por uma reta *r* que se move no espaço, passando sempre por um mesmo ponto V.
Compõe-se de duas partes ou "folhas," opostas pelo vértice.

V — vértice

r — geratriz

Consideremos uma superfície cônica fechada e regular, isto é uma superfície na qual a inclinação da geratriz em relação a uma reta vertical que passa pelo vértice é constante. Esta reta é o *eixo* da superfície. Portanto, o ângulo θ que a geratriz forma com o eixo é constante.

$(0^\circ < \theta < 90^\circ)$

Consideremos também um plano π e estudemos a sua intersecção com a superfície cônica, conforme os valores do ângulo α que o plano forma com o eixo da superfície.

$(0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ)$

170

a) O vértice V não pertence ao plano π.

1º) O plano π é perpendicular ao eixo da superfície. $(\alpha = 90^\circ)$
A seção obtida é uma circunferência.

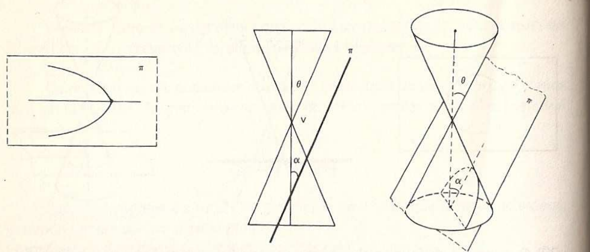
2º) O plano π é oblíquo ao eixo e intercepta todas as geratrizes em uma única folha da superfície. $(\theta < \alpha < 90^\circ)$
A seção obtida é uma elipse.

3º) O plano π intercepta as duas folhas da superfície cônica. $(0^\circ \leqslant \alpha < \theta)$
A seção obtida é uma hipérbole.

Observe que a hipérbole é uma curva formada por dois ramos distintos.

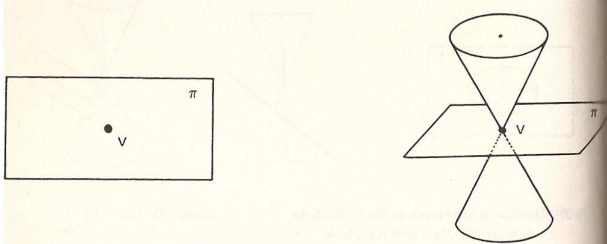
171

4º) O plano π é paralelo a uma geratriz da superfície. $(\alpha = \theta)$
A seção obtida é uma parabola.

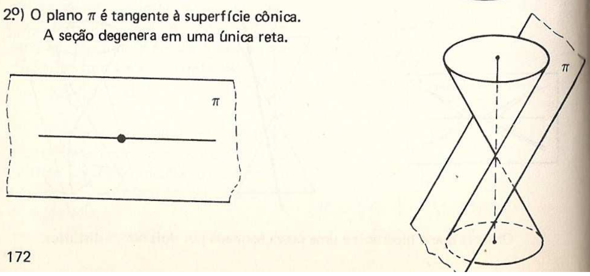


b) O vértice V pertence ao plano π.
Seções Degeneradas

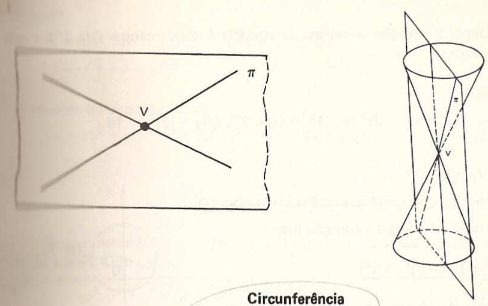
1º) O plano π intercepta unicamente o vértice da superfície cônica.
A seção degenera em um único ponto.



2º) O plano π é tangente à superfície cônica.
A seção degenera em uma única reta.

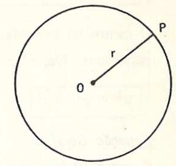


3º) O plano π intercepta apenas duas geratrizes da superfície cônica.
A seção degenera em um par de retas concorrentes no vértice V.



Circunferência

Circunferência é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo do mesmo plano.
Sendo: *O* este ponto fixo,
P um ponto qualquer do plano
e *r* um número real positivo, definimos:



Circunferência $= \{P /\ d(O, P) = r\}$

Círculo $= \{P / d(O, P) \leqslant r\}$

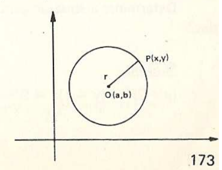
Interior do Círculo $= \{P /\ d(O, P) < r\}$

O ponto *O* é o *centro*. E *r* é o *raio.*

Equação natural da circunferência

Da definição temos, para todo ponto P que pertença à uma circunferência de centro *O* e raio r

$\boxed{|\overrightarrow{OP}| = r}$ Equação natural.



Equação cartesiana

Sejam O(a, b) e P(x, y).