UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

Valéria Moura da Luz

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO:
UMA PROPOSTA ASSOCIANDO PESQUISA E INTERVENÇÃO

Rio de Janeiro
Setembro/2011

Valéria Moura da Luz

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO:
UMA PROPOSTA ASSOCIANDO PESQUISA E INTERVENÇÃO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Ângela Rocha dos Santos.

Rio de Janeiro
Setembro/2011

L979i

Luz, Valéria Moura da

Introdução ao cálculo: uma proposta associando pesquisa e intervenção / Valéria Moura da Luz. – Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2011.

xi, 149f. ;30 cm.

Orientador: Ângela Rocha dos Santos.

Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2011.

Referências: f.128 -132.

Anexos: f.133 -149

1.Cálculo - Tese 2. Matemática - Estudo e ensino 3.Tecnologia da informação I. Santos, Ângela Rocha dos. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro. I. Instituto de Matemática III.Título.

INTRODUÇÃO AO CÁLCULO:
UMA PROPOSTA ASSOCIANDO PESQUISA E INTERVENÇÃO

Valéria Moura da Luz

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Profª. Dra. Ângela Rocha dos Santos - UFRJ

____

Profª. Dra. Elizabeth Belfort da Silva Moren - UFRJ

____

Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende - UFF

Rio de Janeiro
Setembro/2011

“No fundo, o ato de conhecer dá-se contra um conhecimento anterior, destruindo conhecimentos mal estabelecidos, superando o que, no próprio espírito, é obstáculo à espiritualização”

Gaston Bachelar

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao Rodrigo e à Juliana, pelo amor e apoio incondicionais.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio de Janeiro pela confiança depositada.

À minha orientadora Ângela Rocha dos Santos pela sugestão do tema, por tantas outras sugestões e por estimulado o trabalho autônomo e criativo, bem como pela serenidade, competência e engajamento que viabilizaram o encerramento desta dissertação.

Aos professores do programa Victor Giraldo, Márcia Fusaro, Cláudia Segadas, Gerard Grimberg, Nei Rocha, João Bosco Pitombeira e Ana Tereza Oliveira por tantos ensinamentos inesquecíveis. Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática. Aos alunos da turma de Introdução ao Cálculo do curso de Ciências Matemáticas e da Terra do ano de 2010, pelos valiosos momentos compartilhados durante a pesquisa de campo.

Ao Prof. Dr. Wanderley Moura Rezende e à Profa. Dra. Gilda de La Roque Palis, que generosamente, com suas observações tão oportunas quando do exame de qualificação, trouxeram efetivas contribuições para o enriquecimento e aprimoramento desta dissertação. Aos membros da banca pelas valiosas sugestões, apontamentos e correções propostas.

Aos amigos do mestrado da UFRJ, a convivência com vocês fez essa passagem ainda mais divertida e rica. Em especial, à minha amiga Gaya Marinho por todos os momentos de estudo, suor e lágrimas “nacionais e internacionais”.

Aos meus pais, Olegário (*in memoriam*) e Norma, e aos meus irmãos Octávio e Adriana, pelo amor incondicional e por sempre acreditarem em mim. Especialmente à minha irmã Adriana Luz, pela permanente postura encorajadora. Aos meus sobrinhos lindos, Rebecca, Paulo e Pedro, pela alegria de suas juventudes. Ao meu primo Alexander Luz, pelas palavras de estímulo.

Ao Colégio Militar do Rio de Janeiro pela liberação para frequentar as aulas do mestrado, permitindo a realização deste sonho. Ao Coronel Túlio e ao Major Nicácio que me proporcionaram a tranquilidade necessária para concluir esta conquista. Aos companheiros professores do “Prevest” do Colégio Militar. Em especial, aos professores Élcio Pereira, Benjamin César, Marcelo Cabral, Claudete Daflon, Alexandre Antunes, Cátia Valério, Ana Guida, Leonardo Leite, Suely Shibao e Mirian Loureiro. A todos os meus antigos e atuais alunos.

À Vevila Junqueira, pela eterna amizade e as palavras de ânimo e perseverança em momentos de muita aflição. Aos amigos, Augusto Rodrigues, André Carvalho, Wagner Soares, Verônica Prudêncio, Rose Ramos, Allan Gaban, Jaqueline Nobre e L.F. Sobral, por compreender a necessidade da minha ausência. Ao amigo Cláudio Zamith, pelas palavras de incentivo e o apoio “logístico”.

À Juliana Zamith, pela presença constante e dedicada nesta jornada.

Ao meu filho Rodrigo por aceitar, com calma, minha ausência e meu choro em tempos de dificuldade.

Ao meu lindo Rio de Janeiro.

A Deus.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa foi investigar uma proposta de intervenção, avaliando seus resultados qualitativos, em uma disciplina de Introdução ao Cálculo, concomitantemente com o curso de Cálculo Diferencial e Integral I, sob a perspectiva da Resolução de Problemas em um ambiente computacional. Um aspecto motivou este estudo: os altos índices de reprovação na disciplina de Cálculo. Os dados empíricos da pesquisa foram levantados segundo a metodologia estudo de caso. Para análise dos dados utilizamos as teorias de Imagem de Conceito (Tall & Vinner, 1981) e os Registros de Representações Semióticas (Duval, 2009). A análise final sugere que a visualização e a articulação das múltiplas representações proporcionadas por um ambiente em que as interações entre participantes e as mídias foram constantes podem favorecer o enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes relativos aos objetos sobre os quais se está operando, explicitando propriedades inerentes aos mesmos. Após nossa análise, destacamos também os aspectos negativos e positivos observados, tendo estes últimos predominado com relação à proposta de ensino implementada.

Palavras-Chave: Introdução ao Cálculo; Resolução de Problemas; Tecnologia da Informação e Comunicação; Visualização; Múltiplas Representações.

ABSTRACT

The aim of this research was to investigate a proposed intervention, evaluating its quality results in a subject Calculus Introduction, concomitant with the course of Differential and Integral Calculus I, under the perspective of Problems Solving in a computing environment. One aspect has motivated the study: the high repetition rates in the discipline of Calculus. The empirical data of research were raised according to case study methodology. For data analysis we use the theories of Concept Image (Tall & Vinner, 1981) and the Registers of Semiotic Representations (Duval, 2009). The final analysis suggests that visualization and coordination between multiple representations provided in an environment in which interactions between participants and the media were constant have contributed to enrich the students' concept images related to the objects on which they are operating, highlighting properties inherent to them. The data revealed positive and negative aspects. However our analysis suggested that the positive aspects prevailed upon negative ones.

Key-words: Calculus Introduction; Problems Solving; Information and Communication Technologies; Visualization; Multiple Representations.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente estudo sintetiza os principais resultados de uma pesquisa cujo foco de interesse é a Educação Matemática, no Ensino Superior. A pesquisa é embasada na metodologia de resolução de problemas em um ambiente computacional.

Por muitas vezes, ao pensarmos em sua redação, ou mesmo ao tentar iniciar a sua escrita deparávamo-nos frente ao grande desafio de redigir um texto que seria o percurso desta trajetória de muito estudo e pesquisa, dentro do curso de Mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino da Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT/UFRJ). Neste sentido, concordamos com Allevato (2005, p.3) de que não é uma tarefa nada fácil relatar tudo, começando com a formulação e justificativa do problema de pesquisa, passando pela revisão da literatura, pela escolha da metodologia, pela pesquisa de campo, até chegar à análise dos dados coletados e, finalmente, a este relatório final. Assim como a pesquisadora citada anteriormente, confessamos que enquanto escrevíamos este trabalho, sentíamos o peso da responsabilidade de buscar fatos e aspectos de uma caminhada que durou bem mais que esses dois anos. Diante deste pensamento, remetemo-nos às palavras de Fiorentini e Lorenzato (2007, p. 147): "Escrever, de fato, não é tarefa fácil. Exige esforço, disciplina e decisão para começar de maneira efetiva e contínua. Não é um desafio só para novatos, mas também para pesquisadores experientes".

Ao tecer reflexões sobre o ato de pesquisar, André e Ludke (1986, p.3) afirmam: "É igualmente importante lembrar que, como atividade humana e social, a pesquisa traz consigo, inevitavelmente, a carga de valores, preferências, interesses e princípios que orientaram o pesquisador". No nosso caso, acreditamos que tal carga de interesses tem raízes em experiências antecedentes que motivaram o desenvolvimento desta pesquisa. Assim, neste capítulo propomos, inicialmente, resgatar algumas dessas experiências, organizá-las e apresentá-las, acreditando firmemente que isso seja importante, embora não suficiente, para atingir a consistência desejada que justifique a escolha deste tema (Allevato, 2005). Em seguida, faremos uma sucinta apresentação de algumas pesquisas que justificam a escolha do estudo com relação à sua pertinência e urgência. Então, são apresentados o objetivo geral e a questão norteadora desta pesquisa e, finalmente, a forma como está organizada esta dissertação.

1.1 Trajetória Profissional[1] e a Gênese da Pesquisa

Minha primeira experiência no magistério como regente de turma ocorreu em 1996, para os cursos superiores de Economia, Matemática e Análise de Sistemas, ao substituir um professor que estava se afastando para fazer seu pós-doutorado e outra professora que estava saindo de licença-maternidade, ambos professores da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS). Ser professora universitária foi uma experiência atraente e, ao mesmo tempo, desafiadora. Como professora substituta, ministrei, entre outros, um curso de Cálculo Diferencial e Integral I. No meio acadêmico os altos índices de reprovações e evasão na disciplina de Cálculo eram considerados comuns e bem aceitáveis. Entretanto, permito-me confessar, aqui, que foi desmotivador presenciar tantas reprovações e, mesmo que pela distância no tempo, não saiba mais quantificá-las com exatidão, recordo que os índices de aprovação foram muito aquém das minhas inexperientes expectativas.

Após esta breve passagem pelo magistério superior, em 1997, iniciei a minha carreira como professora de Ensino Fundamental e Médio no Colégio Militar de Campo Grande – MS (CMCG). Após cinco anos ocorreu a minha remoção para o Colégio Militar do Rio Janeiro (CMRJ), localizado na cidade do Rio de janeiro – RJ, onde trabalho até os dias de hoje. Nestes dois colégios, minha experiência se concentrou na última série do ensino médio, a conhecida turma "pré-vestibular", ministrando diversos tópicos de matemática. Até o ano de 1998, limite, derivada e integral pertenciam ao conjunto de tópicos que integravam o conteúdo programático de matemática dessa série de ensino e, só, após esse ano, tais conceitos deixaram de ser obrigatórios e foram retirados do currículo do ensino médio destas instituições de ensino. Entretanto, no CMRJ passaram a ser oferecidas aulas extras de Cálculo, objetivando preparar os alunos que prestam concurso para duas escolas militares de ensino superior, que "cobram", em seus respectivos editais de concurso, os assuntos de limite, continuidade, derivada e integral. Após alguns anos trabalhando no Colégio Militar do Rio de Janeiro, surgiu o convite para

[1] No decorrer desta sessão, optamos pelo uso da primeira pessoa quando for feito referência à experiência profissional da autora desta presente dissertação.

lecionar nestas aulas extras de Cálculo. Foi outro desafio: como planejar aulas de Cálculo para alunos de Ensino Médio? Antes de iniciar o planejamento, me direcionei para o seu público alvo. Este é composto por estudantes que prestam concurso para a Escola Naval (EN) e a Escola de Formação de Oficiais da Marinha Mercante (EFOMM). Cabe ressaltar que esta classe é composta também por alunos que prestam concurso para o Instituto Militar de Engenharia (IME), Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA) e Academia da Força Aérea (AFA), além das escolas militares já citadas, EN e EFOMM. Embora, o Cálculo não faça parte da lista de tópicos exigidos pelos vestibulares do IME e do ITA, os alunos que prestam concurso só para estas duas escolas militares são fortemente orientados a freqüentar estas aulas, pois os conceitos de limites, derivadas e integrais serão aplicados concomitantemente pelos professores de Química e Física nos seus respectivos programas.

No que se refere à organização, por ser uma disciplina extra, não ocorrem aplicações de provas e não existe a obrigatoriedade quanto à presença. Sobre a metodologia de ensino, tinha em mente que não poderia ensinar da forma como aprendi, durante a minha formação, por meio de épsilons e deltas. Porém, mesmo optando por trabalhar com a idéia “intuitiva” de limites, sempre comecei esta disciplina escrevendo no quadro a definição formal de limites, por meio de épsilons e deltas, embora com o cuidado de informar aos alunos que foram necessários em torno de duzentos anos para que os matemáticos chegassem àquela importante definição de limite. A partir da análise do tipo de questões dos vestibulares da EN e da EFOMM optei em estruturar as aulas a partir da seqüência limite, continuidade, derivada e, por fim, integral, reproduzindo, dessa maneira, o modo como aprendi estes conteúdos durante a minha formação. Embora o nosso trabalho tenha sido bem avaliado pelos alunos e pela direção da escola, sempre levantei algumas questões: os estudantes conhecem o sentido matemático do limite ou apenas são adestrados para o seu cálculo, utilizando técnicas elaboradas de fatoração de polinômios e identidades trigonométricas? Eles conhecem o significado da derivada ou sabem apenas aplicar as técnicas de derivação? Quanto às integrais, a técnica de calcular a antiderivada prevalece sobre o seu significado? Infelizmente, nunca obtive respostas para estas questões, mas sempre acreditei que o correto entendimento dessas questões pudesse torná-los aptos a ter um melhor desempenho no concurso e, por seguinte, nas disciplinas de conteúdo matemático de 1º período de seus futuros cursos superiores. De qualquer forma, permito-me confessar, aqui, que não saberia ensinar esses assuntos de maneira diferente da forma que aprendi nos bancos universitários, ou seja, seguindo a seqüência limite – continuidade – derivada – integral, pelo menos até o início do processo de construção deste estudo.

Assim, ao iniciar o primeiro ano de mestrado no Programa de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ, tinha em mente desenvolver um trabalho sobre o ensino de Cálculo. Mas, como quase todo aluno ou aluna de mestrado, me sentia ainda insegura para tomar tal decisão, era preciso ainda muitas leituras para que enfim escolhesse o meu foco de interesse.

Numa das disciplinas que cursei – Seminários III – tive meu primeiro contato com Profa. Dra. Ângela Rocha dos Santos, naquele momento Decana do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e, posteriormente àquele encontro, orientadora deste trabalho. Assisti a uma apresentação desta pesquisadora intitulada "O problema do ensino de Cálculo: o que fazer para melhorar?" Dados estatísticos alarmantes ilustraram uma realidade preocupante na maioria das Universidades Brasileiras e, em particular, na UFRJ. A partir desta constatação, fui apresentada a uma visão da resolução de problemas como metodologia de ensino em um ambiente computacional. A proposta era aplicar esta metodologia de resolução de problemas, utilizando o ambiente informatizado, na disciplina de Introdução ao Cálculo concomitantemente com o curso de Cálculo I, visando melhorar a reprovação neste último.

Por acreditar na importância do registro de ações como essa é que me tornei a pesquisadora que faria o relato de tal experiência. O público alvo seriam alunos que ingressaram na UFRJ no curso de Bacharelado em Ciências Matemáticas e da Terra, pelo Concurso Vestibular do ano de 2010. Todas as aulas deste curso de Introdução ao Cálculo aconteceriam no Laboratório de Ensino e Programação (LEP n.02) do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza da Universidade Federal do Rio de Janeiro, utilizando *mathlets*[2], como iremos descrever no capítulo 4 deste relatório.

[2] Um *mathlet*, segundo o *Journal Online of Mathematics and its Applications (JOMA),* é "uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática", que iremos descrever detalhadamente no capítulo 4.

Na próxima seção, apresentamos algumas estatísticas sobre os índices de aprovação/reprovação no ensino de Cálculo em algumas universidades brasileiras que nos motivaram sobre a importância e urgência desta investigação.

1.2 O Problema

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral vem se configurando, ao longo dos anos, em praticamente em todas as Instituições do Ensino Superior (IES) do país, dentre aquelas que mais reprovam. Os índices de reprovação nesta disciplina são, em geral, muito altos, prejudicando o rendimento dos estudantes e atrasando seu curso universitário.

Barufi (1999), Reis (2001), Rezende (2003), Olimpio Junior (2006) e Pereira (2009) estão entre os pesquisadores brasileiros que se preocuparam com o baixo desempenho dos alunos em Cálculo. Barufi (1999), por exemplo, em sua tese de doutorado, citou dados estatísticos alarmantes da realidade do ensino de Cálculo dos cursos de graduação da Universidade de São Paulo (USP), no período de 1990 a 1995, em relação aos dados específicos do Instituto de Matemática e Estatística da USP (IME). Segundo o levantamento desta autora:

> De fato verificamos que no ano de 1995, a taxa de não aprovação – isto é, reprovação por nota ou por falta, ou desistência em MAT 135 (Cálculo para Funções de uma Variável Real) foi de 66,9 %, e, em MAT 131 (Cálculo Diferencial e Integral), de 43,8%. De modo geral, o mesmo se observa fora do IME, como na Escola Politécnica, com dados que, embora denotando uma condição um pouco mais confortável, com médias relativamente mais altas, ainda mostram elevados números de alunos reprovados. [...] Em outras unidades, a conclusão é semelhante, mesmo naquelas em que os cursos de Cálculo são mais adaptados à realidade local, como por exemplo, no Instituto de Geociências, onde, em 1995, a taxa de reprovação na disciplina foi de apenas 35,1%. (Barufi, 1999, p. 3 - 4)

Rezende (2003) apontou taxas ainda mais preocupantes sobre a Universidade Federal Fluminense (UFF). De acordo com este pesquisador, no que diz respeito à UFF, no período de 1996 a 2000, “a variação do índice de não-aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o curso de Matemática, este não é inferior a 65%”.

Diante de tais realidades, concordamos com Olimpio Junior (2006) que:

> Uma reação natural a esses dados por um educador ou educadora que não transite com freqüência pelos contextos do ensino universitário de Matemática seria inferir que tais números se referem a uma

> singularidade localizada num determinado período, e gerada, talvez por acidente, no interior de uma das mais prestigiosas universidades brasileiras. Entretanto, caso este educador ou educadora continue a pesquisar um pouco mais sobre o assunto, começará a perceber que sua conjectura terá cada vez menos chances de ser verdadeira. (p. 1-2)

Tomemos, por exemplo, o caso da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), segundo os dados[3] divulgados pelo seu Instituto de Matemática os índices de não aprovação já estiveram na faixa “alarmante” de 58,7% a 38,2% no período entre 1995 e 1998, respectivamente. A partir do 1º semestre de 2003, diversas medidas, que mencionaremos mais adiante, foram tomadas por variados setores desta Universidade com o objetivo de reverter aquele quadro preocupante.

Os índices estatísticos foram tão inquietantes na USP e na UFF que motivaram Pereira (2009) a fazer um levantamento da realidade de não-aprovação na Universidade Federal do Rio de Janeiro, até o ano de 2005. Segundo esse autor, em sua dissertação de mestrado:

> Na UFRJ, os índices de não-aprovação, em 2005, são altos. Embora tenha existido uma turma com apenas 7% de não-aprovação, encontramos também turmas com esta taxa chegando a 73%. No curso de Matemática, 58% dos alunos que fizeram Cálculo I, no 1º semestre de 2005, não foram aprovados. De forma semelhante, os alunos dos cursos de Química, Geologia, Astronomia e Meteorologia que fizeram Cálculo I, neste período, tiveram um desempenho parecido com os alunos de Matemática: o índice de não-aprovação foi de 54%. Entretanto, observamos que o índice de não-aprovação diminui quando consideramos os alunos dos cursos de Engenharia. No primeiro semestre de 2005, o índice de não-aprovação nos cursos de Cálculo I, entre esses alunos, foi de 42%. Já no segundo semestre desse mesmo ano, tal índice subiu para 48%. Outro fato interessante é que, considerando todas as turmas, a taxa de aprovação no primeiro semestre de 2005 é praticamente a mesma daquela observada no segundo semestre desse mesmo ano. (p.2)

Segundo Olimpio Junior (2006) surge, então, uma questão natural:

> Seria este fenômeno encontrado apenas nos domínios das universidades brasileiras?A resposta é não, pelo menos no que se refere ao ensino e à aprendizagem de Cálculo o fenômeno transcende os limites nacionais e tem motivado as mais variadas reações na comunidade acadêmica [internacional]. (p.2-3, grifo nosso.)

[3]Para maiores detalhes, estes dados estão disponíveis na página: <http://www.ufrgs.br/sai/arquivos/4_ciclo/2006/Matematica/Rel_Avaliacao.pdf>. Acesso em: 03 de setembro de 2010.

O professor David Tall, um dos principais articuladores da área de pesquisa Pensamento Matemático Avançado, é um exemplo internacional deste fenômeno. Foram por ele definidas e profundamente estudadas questões que giram em torno das dificuldades encontradas nas aprendizagens dos conceitos básicos do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas (Rezende, 2003). Desde logo cabe ressaltar que a teoria desenvolvida pelo professor David Tall constitui-se um dos suportes teóricos para o nosso trabalho, como veremos no decorrer dessa dissertação.

Ainda segundo Rezende (2003), outro exemplo internacional desta inquietação foi o movimento a favor da reforma do ensino de Cálculo, iniciado na década de 80, e que ficou conhecido por "Calculus Reform". Uma das características básicas desse movimento é o uso da tecnologia, aqui entendida como programas computacionais específicos e calculadora gráfica tanto para o aprendizado de conceitos quanto para resoluções de problemas. Todas as atividades são baseadas na chamada "Regra dos Três", isto é, todos os problemas devem ser abordados numericamente, geometricamente e analiticamente, estimulando a interlocução das várias representações matemáticas. No entanto, a partir do ano de 1998, uma nova Reforma no Cálculo se reinicia, a chamada "*Trends in Calculus Reform*"[4]. Se antes a orientação era resolver todos os problemas pela "regra dos três", a partir desta nova reforma a tendência é a "Regra dos Cinco", com a escrita e a comunicação oral em "pé" de igualdade com as outras formas de representações. Segundo esta reforma, os alunos devem experimentar os conceitos do cálculo em uma rica relação entre as múltiplas representações e as múltiplas atividades. Essas atividades acontecem em salas de aula e/ou laboratórios que envolvem experimentação, descoberta, problemas abertos ou fechados desafiando os estudantes a usar todas as ferramentas que estejam ao seu alcance: lápis & papel, calculadora (com ou sem gráficos), computador (definitivamente incluindo gráficos), e mais, a experiência prévia dos alunos com conceitos matemáticos e técnicas para atacar os problemas não resolvidos anteriormente, seja pelos próprios alunos organizados em grupos, com a ajuda do instrutor ou, ainda, do professor.

[4] Smith, D. A. Trends Calculus Reform. NSF Conference/Workshop. *Preparing for a New Calculus*. Monticello, IL, 1998. Disponível em: <http://www.math.duke.edu/~das/essays/trends/index.html> Acesso em: 13 de julho de 2011.

Assim, após tudo que foi posto até aqui, e a fim de que não nos afastemos dos objetivos desta introdução, tomemos como verdadeira a seguinte proposição: a situação de uma parte significativa dos cursos de Cálculo, no que se refere aos índices de não aprovação é, de fato, bastante preocupante no Brasil, e em boa parte de outros países. Desta forma, com base na problemática aqui apresentada surgem algumas perguntas: Qual é razão de tantas reprovações? O problema se concentra no professor e na sua metodologia de ensino? Ou no aluno que chega aos “bancos” universitários com muitas deficiências na matemática do ensino médio? Ou ambos são facetas, causa e conseqüência, de um mesmo problema?

Com relação às causas que ocasionam tantas reprovações em Cálculo, Barreto (1995, apud Reis, 2001) afirma categoricamente que:

> As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e conseqüentemente, bastante inseguros. (p. 4)

Está aí retratada uma visão muito comum entre os professores de Cálculo de que a causa dos altos índices de reprovação em Cálculo é, em grande parte, a falta de base dos alunos recém egressos do Ensino Médio.

Por outro lado, e os estudantes? O que pensam sobre suas dificuldades na aprendizagem de Cálculo?

Cabral (1992, apud Reis, 2001), ao questionar estudantes de um curso de Cálculo com respeito as suas próprias dificuldades, obteve as seguintes respostas:

> - Já trabalham e nada do que é ensinado tem aplicação ou ligação.
> - As aulas são monótonas.
> - O professor não demonstra segurança na matéria.
> - O professor se esforça, mas não expõe bem. (p.6)

Entendemos, então, que na visão dos estudantes entrevistados, o problema está relacionado à forma como o professor conduz sua prática pedagógica. Entretanto, na visão de alguns professores de Cálculo, o problema é fruto do baixo conhecimento de matemática básica por parte dos calouros. De fato, concordamos que a formação matemática dos alunos da escola básica é muito deficiente, como comprovam os dados estatísticos de avaliações institucionais, tais como o Sistema de Avaliação de Educação

Brasileira (SAEB), a Prova Brasil, o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) e o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA).

Independente do ângulo por que se enxerga a questão, o problema existe e muitas respostas e encaminhamentos têm sido apresentados, em vários países, por diversos e importantes pesquisadores da área no âmbito de solucioná-lo.

Nesta busca por respostas e encaminhamentos, Rezende (2003) em seu trabalho de pesquisa afirma que: “as raízes do problema estão além dos métodos e das técnicas, sendo inclusive anteriores ao próprio espaço-tempo local do ensino do Cálculo”. De fato, o referido autor, em seu relatório de doutorado, ratifica este pensamento a partir do entrelaçamento de fatos históricos, pedagógicos e um mapeamento das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica e, então, conclui em sua pesquisa:

> [...] um único lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Calculo: o da omissão/evitação das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.
> De fato, a ausência das idéias e problemas essenciais do Calculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, e, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Calculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do ‘esconderijo forcado’ a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo. [...] (Rezende, 2003, p.402. Grifos do autor.)

Para Rezende (2003a):

> É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. O Cálculo é, metaforicamente falando, a espinha dorsal do conhecimento matemático.

Sobre a preparação para o ensino do Cálculo, Rezende (ibid.) acrescenta mais adiante:

> [...] Mantendo-se o Cálculo em cativeiro, alguns dos problemas fundamentais da geometria e da aritmética continuarão a ser “mal resolvidos” através de “fórmulas” e “regras” mágicas, e “convenções” unilaterais. Não se trata de antecipar a disciplina de Cálculo para o ensino médio – como, inclusive, já sugeriram alguns autores -, mas, sobretudo, de se iniciar, desde cedo, uma preparação para o Cálculo.

Nascimento (2000), de forma semelhante, afirma que:

> [...] podemos dizer que a construção da base conceitual dos alunos para o aprendizado do Cálculo Diferencial e Integral inicia-se ainda no 1º

> grau. Caso esta base não seja construída no ensino fundamental, o problema tenderá a se agravar no 2º grau, na medida em que o aluno não consegue acompanhar bem os tópicos específicos. [...] Assim, a metodologia adotada nos segmentos de 1º e 2º graus possui diferenças gritantes em relação às dos cursos superiores e, praticamente, impede que a base conceitual para o cálculo seja desenvolvida. Totalmente incompatível com o ensino na universidade, ela acaba prejudicando o desempenho do aluno em todas as demais disciplinas do curso universitário devido a um adestramento recebido durante 11 anos através deste processo equivocado. O resultado é que isto, não só, contribui para a redução dos conhecimentos básicos necessário ao estudante que ingressa na universidade, como também, dificulta a sua recuperação.

Embora não seja o objetivo deste trabalho discutir amplamente sobre as diferenças metodológicas entre o ensino básico e o superior, concordamos com Nascimento que as diferenças são realmente grandes. Além disso, quando observamos os resultados referentes ao desempenho dos alunos brasileiros do ensino básico nos exames PISA– Programme for International Student Assessment e no SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, temos um quadro que confirma as deficiências na qualidade do ensino de matemática que é oferecido na maioria das escolas brasileiras. Estes dados indicam que, possivelmente, as deficiências na formação dos professores da escola básica têm uma contribuição importante nestes resultados.

Analisando os pontos de vista descritos anteriormente, parece que chegamos a um processo cíclico, já que os argumentos docentes tropeçam na seguinte barreira: os próprios professores universitários são os responsáveis pela formação dos professores da escola básica que, por sua vez, são os responsáveis pela formação dos alunos que (mal preparados) ingressam na universidade (Reis, 2001). Sob este ângulo, esse debate traz à tona a questão dos saberes docentes, tema que tem sido objeto de muitos trabalhos e pesquisas.

Com relação à formação necessária ao professor, Schulman (1986) introduziu o termo “Compreensão dos Conteúdos Pedagógicos”, apontando para pesquisas em ensino e formação de professores que explorem a ligação entre a compreensão dos conteúdos e pedagogia. Esta autora propõe, então, três formas de conhecimento ao professor: do conteúdo, do currículo e conhecimento pedagógico. Neste sentido, corroborando com Schulman, Frota (2007) vai além e acrescenta:

> Proponho que seja acrescentada uma quarta forma: o conhecimento da pesquisa em educação, de modo particular em Educação Matemática.

> Esse conhecimento, nascido por vezes de questões surgidas no exercício da docência, motiva pesquisas, que então retornam à sala de aula na forma de propostas educacionais. Cria-se um movimento circular cuja recursividade pode trazer um constante repensar da pesquisa e da prática e das investigações sobre a própria prática. (p. 11)

Ball & Bass (2000, apud Mattos 2007)[5] ressaltam que:

> [...] a compreensão dos conteúdos pedagógicos é uma forma especial de domínio do conhecimento que ajusta o conhecimento matemático com conhecimento do aluno, aprendizagem e pedagogia. Segundo este ponto de vista, o domínio de um conjunto de saberes permite aos professores atuarem de modo antecipado, identificando possíveis problemas na aprendizagem dos alunos. A compreensão dos conteúdos possibilita a elaboração de modelos alternativos e ações pedagógicas visando a eliminação destas dificuldades. (p. 4)

Assim, sob estas perspectivas, pensamos que a participação dos professores de ensino fundamental e médio em cursos de formação continuada, mestrado ou doutorado na área de educação matemática seja um importante caminho para alcançamos o padrão de qualidade que tanto almejamos nas escolas brasileiras de ensino básico.

Diante de todo este panorama, surge uma importante questão: o que fazer com os alunos que terminam a escola básica e que ingressam no ensino superior na área de exatas sem os conhecimentos das idéias básicas e construtoras do Cálculo?

Ora, de um modo geral, os discursos dos professores universitários remetem, como constatamos, a críticas em relação à qualidade de ensino nos níveis Fundamental e Médio. Mas, temos um importante ponto que não devemos e nem podemos desconsiderar: ainda que fossem propostas alterações significativas nos níveis fundamental e médio, teríamos toda uma geração de estudantes em déficit com a aprendizagem. Neste sentido nos aliamos a Gomes et al. (2005, p.7), quando estes ao se reportarem ao aluno iniciante de cursos superiores da área de Ciências Exatas, especialmente de Engenharia, comentam: "É certo que uma reforma deveria ser iniciada nos ensinos fundamental e médio, no entanto, esse aluno está chegando ao curso superior e nós, professores universitários, não podemos enviá-los de volta".

Segundo Rezende (2003), uma solução bastante usual nas instituições de ensino superior para o enfrentamento dos resultados catastróficos no ensino de Cálculo é a realização de cursos preparatórios para um curso inicial de Cálculo I. É o caso, por

[5] BALL, D. L., BASS, H., "Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics", In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics, pp. 83-104. Westport, CT: Ablex, 2000.

exemplo, dos cursos de Cálculo Zero, Pré-Cálculo, Matemática Básica, Matemática Instrumental ou Introdução ao Cálculo, já tão comuns no meio acadêmico. “Tais cursos, independentemente do nome que tenham, têm como meta principal resolver o problema da ‘falta de base’ do aluno, ponto, aliás, que parece consensual entre os professores de Cálculo” (Rezende, 2003, p.17. Grifo do autor).

Sobre o conteúdo programático e a organização didática destes cursos de “introdução ao cálculo”, Rezende (ibid.) relata:

> [...] ensina-se costumeiramente, [...] toda aquela parte da matemática básica necessária à realização técnica do Cálculo: polinômios, fatoração, relações e identidades trigonométricas, funções reais usuais (modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas), produtos notáveis, simplificações e cálculos algébricos em geral etc. (Rezende, 2003, p.17)

Desta forma, diante do relato deste pesquisador, observamos, então, uma característica não muito incomum em alguns cursos de “pré-cálculo”: a prevalência da técnica sobre o significado.

Entretanto, se a técnica tem prevalecido com relação ao significado, conforme nos relata Rezende, então o embasamento esperado se refere puramente aos procedimentos algébricos? Na nossa visão, acreditamos firmemente que não, e vamos além: pensamos que é necessário muito além de habilidades e técnicas algébricas para que se alcance a base tão esperada. Afinal, este mesmo autor destaca que o campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de infinito, de infinitésimos, de variáveis, do que com fatoração de polinômios, relações trigonométricas, cálculos algébricos e etc.

Por outro lado, concordamos que faltam técnicas algébricas para maioria dos nossos alunos de ensino básico. Mas do que adianta, por exemplo, um aluno ter conhecimentos sobre diversas técnicas algébricas (fatorações, produtos notáveis, identidades trigonométricas etc) se não lhe for ensinado, na escola básica, sobre o dinamismo das funções de 1º e 2º graus? Como entender como se dá a variação dessas funções se o que foi ensinado restringe-se apenas ao fato delas crescerem ou decrescerem? Como os alunos conseguirão visualizar, por exemplo, uma função que modela um determinado fenômeno se o que eles estudaram a respeito das funções, durante todo o ensino básico, resume-se a propriedades algébricas da função como, por exemplo, o cálculo dos zeros da função? (Pereira, 2009). Neste sentido, nos aliamos a

Pereira (2009) quando afirma que é imprescindível não somente ensinar se a função cresce ou decresce, mas de que forma ocorrem essas variações.

Então, a questão central que se levanta é: como planejar um curso de Introdução ao Cálculo que ajude a superar as dificuldades em Matemática evidenciadas pelos alunos ingressantes em cursos que têm em suas grades curriculares a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I?

Ainda neste contexto, mas sob outro eixo, uma proposta que deve ser considerada como uma busca de resposta a esta questão é com relação ao uso de computadores em sala de aulas de matemática. Rezende (2003) relata, em seu relatório final de doutorado, que são inúmeros os exemplos de pesquisas que usam os laboratórios de informática como apoio às disciplinas de matemática, sobretudo em cursos de Cálculo.

Para este pesquisador:

> A utilização dos computadores é inevitável e irreversível. O uso dos computadores como ferramenta didática tem aparecido com freqüência nas pesquisas sobre o ensino de Cálculo. A questão que se apresenta então não é se "se deve usar ou não o computador para o ensino de Cálculo", mas '**como**' e '**quando**' usar esta ferramenta. Além disso, não podemos perder de vista que o computador, assim como qualquer outra máquina, possui suas limitações, sejam estas de naturezas técnicas ou mesmo pedagógicas. Portanto, ao trabalharmos com tal instrumento, precisamos, assim como os cientistas em seus laboratórios de pesquisa, ter a noção exata do seu uso, de sua finalidade, de suas potencialidades e limitações. (Rezende, 2003, pp.19 - 20. Grifo do autor)

De forma semelhante, desde 1995, Palis (2009) relata que já procurava refletir sobre o porquê da proposta de uso de computadores em Cálculo e quais necessidades educativas seriam potencialmente supridas:

> Como tudo indicava que as diversas tecnologias computacionais seriam parte integrante do trabalho acadêmico e profissional futuro de nossos alunos, a utilização de novas tecnologias computacionais se configurava como uma das possibilidades de ação pedagógica para enfrentar alguns dos desafios educacionais encontrados. No entanto, o computador, por si só, não traria soluções, pois não há nenhum efeito benéfico automático ligado ao seu uso; muitos estudos ainda seriam necessários para mostrar em que circunstâncias o seu emprego poderia promover ou facilitar a aquisição de habilidades e conceitos matemáticos específicos. (p.2)

Giraldo & Carvalho (2008), em seu artigo *Uma Breve Revisão Bibliográfica sobre o Uso de Tecnologia Computacional no Ensino de Matemática Avançada*, enfocam "o papel atribuído à natureza das potencialidades e limitações de tecnologia computacional nos resultados de pesquisa, objetivando contribuir para a discussão sobre como fazer uso das características particulares de recursos computacionais a favor da aprendizagem de matemática" (p. 145).

Segundo estes autores, com a entrada dos computadores, calculadoras e outras tecnologias digitais (a partir do final da década de 1980, pelo menos nos países desenvolvidos) em salas de aula de matemática, se tornaram comuns manifestações de incerteza como:

> [...] o computador tornaria o professor obsoleto e o substituiria na sala de aula, ou o computador atrofiaria as habilidades dos estudantes em matemática, ou o computador teria efeitos negativos para o ensino de matemática, ou ainda restringiram-se a analisar os efeitos e concluir sobre sucesso ou fracasso do uso de ferramentas computacionais comparando-as com outras ferramentas de ensino, sem considerar o contexto pedagógico em que estão inseridas. (p. 145)

Conforme observado por estes autores, "este tipo de análise nos fornece não apenas uma visão limitada do possível enriquecimento de abordagens tradicionais trazido pela tecnologia no ensino de matemática, mas, sobretudo, não nos permite vislumbrar que potencialidades podem ser inauguradas pelo seu uso".

Citando Tall (2001)[6], Giraldo & Carvalho (2008) prosseguem mais adiante:

> Como sugerido por Tall, os efeitos do uso de tecnologia no ensino de matemática não parecem ser determinados por qualquer atributo intrínseco aos recursos computacionais empregados, mas sim pela forma como estes são usados. (p. 155)

Assim, concordamos com Giraldo & Carvalho (ibid.): a questão a ser investigada não deve ser se a tecnologia é positiva ao ensino, mas como planejar o ensino de forma a explorá-la de forma positiva, fazendo uso de suas potencialidades e limitações.

Desta forma, diante do reconhecimento de tais potencialidades, um importante aspecto que deve ser considerado sobre a escolha desses ambientes computacionais, para a presente investigação, vem ao encontro de uma proposta de Educação, em que o conhecimento é resultado de um processo de construção. Além do mais, na aprendizagem Matemática, este suporte tecnológico relaciona-se à possibilidade do aluno experimentar, formular conjecturas, argumentar, refutar, explicar conceitos e resultados,

[6] D. Tall. Cognitive development in advanced mathematics using technology. Mathematics Education Research Journal, 12 (3):196–218, 2001.

dando espaço, portanto à reflexão; fugindo da seqüência tradicional definições, teorema, corolários (aplicações).

Certamente, pensamos que à luz de toda problemática que foi posta até aqui, seria uma temeridade pretender oferecer uma solução final ao problema do fracasso no ensino de Cálculo. No entanto, como observa Olímpio Júnior (2006), "dado que os problemas existentes são graves e que uma atitude passiva somente contribuiria para agravá-los, resta-nos um caminho natural: a pesquisa".

1.3 Objetivos e Questão de Pesquisa

O objetivo geral desta pesquisa foi investigar uma proposta de intervenção, avaliando os resultados qualitativos, em uma disciplina de Introdução ao Cálculo, concomitantemente com o curso de Cálculo Diferencial e Integral I, por meio da metodologia de Resolução de Problemas em um ambiente computacional.

Com base neste objetivo, propusemos a seguinte questão de pesquisa:

Como uma proposta de ensino pautada em uma abordagem por resolução de problemas, utilizando como recurso a visualização e a coordenação de múltiplas representações proporcionadas pelo ambiente computacional, pode contribuir para o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes, no que se refere aos conceitos de funções elementares, equações e inequações lineares em duas variáveis em um curso de Introdução ao Cálculo?

Especificamente, na busca por respostas para esta questão proposta, analisamos não só a aprendizagem qualitativa dos alunos (ingressantes no curso de Bacharelado em Ciências Matemáticas e da Terra da UFRJ no ano de 2010), mas também a escolha da metodologia de resolução de problemas em um ambiente computacional, utilizada nesta intervenção, bem como a elaboração de um roteiro de atividades visando o enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes envolvidos nesta pesquisa.

Para isso, procuramos criar e desenvolver - em parceria com a professora de Introdução ao Cálculo - uma proposta de ensino na qual o ambiente informatizado ofereceu o contexto propício para a realização de atividades voltadas para a visualização e a coordenação de múltiplas representações, referentes aos conceitos supracitados. Entretanto, é importante destacar que esta parceria professor/pesquisador, presente durante toda a fase de planejamento, sofreu mudança durante a fase de intervenção na sala de aula. Ou seja, foi atribuída ao professor da disciplina a tarefa de aplicar o roteiro de atividades, e, consequentemente, promover de forma efetiva a interferência no contexto educacional. Por outro lado, ao pesquisador coube a tarefa de fazer o relato de tal experiência, por meio da modalidade de estudo de caso de observação (Biklen & Bodgan, 1994).

Desta forma, nos propusemos as seguintes tarefas:

1. Observar o desempenho dos estudantes ao longo das atividades que envolviam a resolução de problemas e o ambiente informatizado (no nosso caso, a tecnologia de *mathlets)*, no que se refere aos conceitos de funções elementares, equações e inequações na disciplina de Introdução ao Cálculo;
2. Analisar os registros produzidos pelos alunos ao longo da sequência de atividades, buscando investigar se a visualização e a coordenação de múltiplas representações proporcionadas pelo ambiente computacional favorecem o enriquecimento das imagens conceituais desenvolvidas pelos estudantes relacionadas aos conceitos envolvidos.

1.4 O Encaminhamento da Pesquisa

Colocados o problema, o objetivo geral e a questão de pesquisa, no capítulo 2, a seguir, abordamos importantes características do Cálculo Diferencial e Integral I e seu ensino, apresentando algumas pesquisas publicadas que trazem sugestões de atividades para superar o problema. Em seguida, situamos a disciplina de Introdução ao Cálculo como campo de estudo da Educação Matemática, fazendo um breve relato sobre algumas experiências relativas à adoção desse curso na grade curricular de cinco universidades brasileiras.

O capítulo 3 apresenta o contexto teórico que fundamenta o uso das TIC em uma sala de aula de matemática, bem como, também, a fundamentação teórica que embasa esta dissertação, revendo as teorias de imagens de conceito e os registros de representações semióticas.

Em seguida, o capítulo 4 diz respeito ao contexto do estudo, ao planejamento da intervenção e, por fim, às nossas opções metodológicas. No capítulo 5 apresentamos as atividades desenvolvidas com análise dos resultados à luz da literatura referenciada.

E, finalmente, no capítulo 6 são apresentadas as conclusões, as contribuições que a nossa pesquisa procura trazer à Educação Matemática, assinalando suas limitações, além de sugestões de novos trabalhos que podem aprofundar a presente pesquisa.

2. O ENSINO DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Neste capítulo, faremos uma breve revisão da literatura com o objetivo de situar alguns cursos de Cálculo no contexto do ensino Universitário. Apresentamos também algumas pesquisas publicadas que trazem sugestões de atividades que buscaram alternativas para superar questões relacionadas aos problemas do ensino de Cálculo.

Em seguida, situaremos a disciplina de Introdução ao Cálculo como campo de estudo da Educação Matemática por meio do relato de algumas experiências brasileiras, encontradas em dissertações, teses, artigos e livros, buscando elementos que, além de nos ajudar a compreender os caminhos já trilhados, forneçam sugestões/bases teóricas para a construção de atividades e a implementação de nossa proposta.

2.1 Algumas Características do Cálculo e de seu Ensino

O ensino do Cálculo Diferencial e Integral tem sido foco de diversas investigações sob o prisma da Educação Matemática Superior, tanto no que se refere aos currículos quanto à sua metodologia de ensino. Entretanto, uma questão prevalece sobre as demais: a prática pedagógica do professor de Cálculo deve se pautar, primeiramente, na reflexão e compreensão sobre o papel que a disciplina representa na formação matemática dos estudantes (Reis, 2009). Segundo Reis (ibid.), é somente a partir da reflexão sobre a real função do Cálculo na formação dos estudantes que o professor poderá traçar objetivos, escolhendo os conteúdos programáticos, desenhando a metodologia, enfim, decidindo que práticas pedagógicas desenvolver no ensino desta disciplina.

Para Reis (2001, 2009), as aplicações do Cálculo abrangem diversas áreas da Engenharia, Física, Economia, Biologia e Farmácia, além, obviamente, da Matemática. Neste contexto, esta disciplina assume um papel importante para a formação de vários profissionais (Barufi, 1999).

Reis (ibid.) observa que, de uma forma geral:

> Uma prática muito comum, entre os professores de Cálculo, é ministrar esta disciplina sempre da mesma forma (mesmos conteúdos, mesma metodologia, mesmos exemplos, mesmas aplicações), sem levar em

> consideração a natureza do curso. Não concordando com essa prática, entendemos que cada um desses cursos exige do professor uma transposição didática[7], de modo a garantir que a produção de significados das idéias conceituais do Cálculo esteja em estreita relação com a realidade profissional de cada curso. (p.81)

Já com relação à metodologia, Reis (2001) afirma que "a 'tradição' dos limites é, indiscutivelmente, a tendência predominante no ensino atual de Cálculo". Ainda neste contexto, Rezende (2003, p.429, grifos do autor) acrescenta e vai além:

> A disciplina inicial de Cálculo, tal como está estruturada, se encontra, semanticamente, muito mais próxima da Análise do que do próprio Cálculo. Não é à toa que esta disciplina é considerada por um grande número de professores como uma pré-Análise, ou, mais especificamente, como uma abordagem 'mais intuitiva' da Análise de Cauchy-Weierstrass em que se põe evidência nas técnicas de calcular limites, derivadas e integrais. Essa atitude predominante no ensino de Cálculo é caracterizada então por uma posição híbrida: por um lado, dá-se ênfase à organização e à justificação lógica dos resultados do Cálculo, e, por outro, realiza-se um treinamento exacerbado nas técnicas de integração, no cálculo de derivadas e de limites. Esta formatação analítica e algébrica da disciplina de Cálculo no ensino superior é, sem dúvida, uma das principais fontes da crise de identidade [...].

De forma geral, para Barufi (1999) e Reis (2001), a realização didática do ensino de Cálculo e os seus livros textos seguem basicamente o princípio e o padrão de sistematização propostos por Cauchy e Weierstrass (Limite – Continuidade - Derivada – Diferencial – Integral), a qual não se caracteriza segundo a ordem histórica, mas segundo a ordem formal. Segundo Reis (ibid.), o desenvolvimento histórico da idéias centrais do Cálculo se deu na seguinte ordem: "Cálculo Integral, Cálculo Diferencial, Cálculo de limites e noção de número real". E, em decorrência deste fato, as dificuldades epistemológicas do Cálculo, encontradas historicamente, antecipariam em determinados momentos algumas dificuldades encontradas pelos estudantes (Rezende, 2003). Assim sendo, a observação de como se deu a construção dos principais conceitos do Cálculo se torna, a nosso ver, imprescindível. Todavia, acreditamos, hoje, que esta seqüência, tradicionalmente trabalhada em alguns cursos de Cálculo, seja muito mais adequada em um curso de Análise do que propriamente em um curso de Cálculo.

[7]Para Chevallard (1991, apud Pais, 2008): Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que de, um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.

Outra importante e marcante característica na maioria dos cursos de Cálculo se dá em relação à organização e à justificação lógica formal das definições dos conceitos básicos e das demonstrações dos teoremas e proposições. Assim, a significação dos conceitos e dos resultados é realizada no âmbito da justificação lógica formal dos resultados, como se estes não tivessem nada a ver com a origem histórica do conceito definido. Desse modo, concordamos com Rezende (2003a) que "não é simplesmente demonstrando um teorema/proposição - ou o que é pior: apenas assistindo a sua demonstração que o aluno constrói a sua rede de significações".

A fim de ilustrar o nosso ponto de vista a respeito da questão, achamos oportuno trazer uma ilustração muito interessante relatada pelo Professor Roberto Baldino (1998, apud Rezende, 2003):

> Um professor, ao terminar a demonstração de que "se uma função f possui derivada nula em todos os pontos de um intervalo aberto I então é constante em I", vê-se interpelado por um aluno que lhe faz a seguinte pergunta:
> A_ "Professor, o que o senhor está querendo mostrar é que um objeto que tem velocidade nula, não se move e, portanto, sua posição permanece constante?"
> O professor depois de meditar algum tempo, responde, meio desorientado:
> P_ "Sim, é isto mesmo."
> Então o aluno dá o golpe final:
> A_ "E precisa?" (p.12)

Para Rezende (ibid.), "este exemplo caracteriza bem o que se quer dizer com o 'sentido' ou 'essência' de um resultado matemático". Como podemos observar neste pitoresco exemplo, o aluno deixou claro que entendeu completamente o sentido do teorema e, ainda, questionou, com muita propriedade, segundo a nossa visão, a necessidade de sua demonstração para que alcançasse a sua compreensão.

Desde logo cabe lembrar que refletir especificamente sobre a necessidade ou não do rigor no ensino do Cálculo foge do escopo deste trabalho. Entretanto, não podemos deixar de concordar com Rezende, que nem sempre a demonstração revela, por si só a essência do resultado e, que, existem outras formas para se alcançar à compreensão de uma proposição ou conceito matemático. Além do mais, a demonstração de um teorema não explicita, necessariamente, como o problema em questão foi resolvido. Por isso, se torna muito importante observarmos, historicamente, como os conceitos do Cálculo foram evoluindo, com o propósito de compreendermos melhor quais foram as dificuldades encontradas durante o processo de construção desses conceitos.

Com efeito, a partir das reflexões trazidas no decorrer de toda esta seção, observamos duas características bastante comuns nos cursos de Cálculo: prevalência do significado lógico sobre o sentido dos resultados do Cálculo e a prevalência da técnica sobre o significado.

Para Rezende (2004, p.32):

> [...] resta saber então qual é o curso de Cálculo que se almeja? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção dos significados? E, isto posto, definir qual deve ser então a melhor forma de preparação para um curso superior de Cálculo [...].

Vale lembrar, como já citamos na introdução deste trabalho, que fazer emergir o conhecimento do Cálculo do esconderijo forçado a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro importante passo para se resolver efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo (Rezende 2003).

Além disso, conforme nos sinaliza Rezende (ibid.), no próprio ensino superior de Cálculo também sentimos falta de certas idéias e problemas construtores do Cálculo. Em verdade, concordamos com este autor que “este esvaziamento semântico da disciplina de Cálculo é, ao mesmo tempo, causa e efeito da crise de identidade pela qual passa o ensino superior de Cálculo”. E, portanto, o lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem do ensino de Cálculo está presente em ambos os níveis de ensino.

Diante de toda esta problemática, ressalva Rezende (2004):

> [...] é preciso “re-calibrar” a disciplina de Cálculo em relação ao par técnica/significado. Mas também é preciso “re-calibrar” a disciplina de Cálculo em relação ao par sistematização/construção. [...] em vez de se construir os resultados e conceitos do Cálculo no nível do conhecimento já sistematizado, deve-se ter em mente a construção das redes de significações das idéias básicas para, num momento posterior, buscar a sistematização dos elementos dessa rede”.

Ora, refletir especificamente sobre estas questões (técnica/significado e sistematização/construção) foge do escopo desta dissertação. Mas de um modo geral, como vimos no decorrer de toda esta seção, tradicionalmente o estudo do cálculo acaba sendo, na maioria das vezes, altamente técnico e simbólico. Desta forma, esse método de estudo quase sempre possibilita uma compreensão procedimental, muitas vezes, sem obter uma compreensão conceitual dos conceitos relacionados à disciplina de Cálculo.

Rezende (2003), referindo-se sobre as soluções “normais” para o ensino do Cálculo, observa que:

> A produção de listas de exercícios é sem dúvida a solução ‘normal’ mais usual em nossas universidades: já faz parte da tradição de um curso de Cálculo a presença de extensas listas de exercícios, com gabarito, para que os alunos possam realizar o seu ‘treinamento’ com segurança. A tal lista tem ainda o papel de prenunciar o contexto em que se dará a avaliação, fato, aliás, que muito interessa aos estudantes, e que poderá, inclusive, ser usado por eles em um momento futuro, numa contra argumentação de uma ‘questão da prova’ que fuja aos parâmetros da lista (p.15, grifos do autor).

Apesar das pesquisas de Reis e Rezende terem sido concluídas em 2001 e 2003 respectivamente, acreditamos que, muito provavelmente, seus trabalhos ainda retratem de forma muito atual a realidade vivida pelos nossos alunos, nos dias de hoje, em muitos cursos de Cálculo I espalhados pelos diversos centros universitários do nosso país. Entretanto, por outro lado, não podemos desprezar a ação de diversos grupos formados por professores de Cálculo de universidades brasileiras que, por meio de inovações pedagógicas, vêm buscando elementos que possam contribuir efetivamente para tal discussão.

2.2 Inovações Pedagógicas: Experiências com o uso do Computador nas Universidades Brasileiras

Exemplos de pesquisas que relacionam ensino e aprendizagem em Cálculo e o uso de computadores podem ser encontrados em Meyer e Souza Júnior (2002), que citam os seguintes estudos: SAMPEDRO (1977); CARRILLO (1980); SILVA (1980); PALIS (1995); FRANCHI (1993); GOMES DA SILVA (1997); SOUZA JR (2000) e VILARREAL (1999); entre outros. Meyer e Souza Júnior (ibid.) observam, ainda, que uma discussão interessante sobre informática e educação pode ser um momento importante de reflexão do professor. Neste sentido, Ponte[8] (1988, apud Meyer & Souza Júnior, 2002) nos alerta que:

> [...] não de deve esperar grandes efeitos da tecnologia, ignorando as perspectivas pedagógicas que estão subjacentes à sua utilização. O professor terá sempre que ter um papel chave e será sempre o responsável pela orientação de atividades. (p.17)

[8] PONTE, J. P. O computador como ferramenta; Uma Aposta Bem Sucedida? Lisboa: Projecto Minerva, Pólo DEFCUL. 1988.

Para Meyer & Souza Júnior (ibid.), este artigo além de relacionar um breve histórico de trabalhos e análises de experiências, sobretudo brasileiras, relacionadas com o ensino de e aprendizagem de cálculo e o uso de computadores em diversos ambientes, exibe o que se verificou ser um diferencial marcante na obtenção de resultados positivos: as negociações necessárias dentro do grupo de professores, auxiliares e monitores, em termos da definição de estratégicas didáticas, de posturas pedagógicas e de ênfases docentes.

Figueiredo & Santos (1997) e Araújo (2002) são, também, exemplos de estudos nos quais o computador é utilizado, porém, com focos diferentes. Figueiredo e Santos (1997) trabalharam com o desenvolvimento de projetos nos quais os alunos eram auxiliados pelo *sistema de computação algébrica (SCA) Mathematica*[9], integrando os conceitos do Cálculo a projetos envolvendo um tema relacionado com a questão ambiental. Para as autoras Figueiredo e Santos (ibid.), o uso do computador na disciplina introdutória de Cálculo pode ser benéfico, pois possibilita ao aluno participar de forma ativa e crítica do seu processo de aprendizagem. Já Araújo (ibid.) focalizou, em seu relatório final de doutorado, as discussões entre os alunos nas salas de aula de Cálculo, ao trabalhar com projetos de modelagem auxiliados pelo *SCA Maple*[10]. Segundo esta autora, novas possibilidade de investigação foram proporcionadas pela interação entres seres humanos e informática.

Villarreal (1999), na sua tese de doutorado, procurou caracterizar os processos de pensamento dos estudantes de Cálculo, em um ambiente computacional. Esta autora desenvolveu a sua pesquisa com três duplas de estudantes de Biologia e explorou profundamente a visualização de gráficos articulando-a com a oralidade. A autora contribuiu no sentido de oferecer descrições do pensamento matemático, das dificuldades dos estudantes e das possibilidades do trabalho coletivo onde seres humanos e computadores interagem. Para esta autora, o pensamento matemático é permeado e

[9] O software Mathematica é um software do tipo CAS (Computer Algebra System), em português chamado de Sistema de Computação Algébrica (SCA). Ver: http://www.wolfram.com/company/mathematica-history.pt-br.html

10 O Maple é um software do tipo CAS (Computer Algebra System), em português chamado de Sistema de Computação Algébrica (SCA). Ver www.maplesoft.com.

reorganizado pelas mídias utilizadas que constituem, com os estudantes e a pesquisadora, uma ecologia cognitiva[11] particular. A autora observou que:

> A partir do estudo desenvolvido, é possível afirmar que o computador pode ser tanto um reorganizador quanto um suplemento nas atividades dos estudantes ao aprender matemática, dependendo da abordagem que eles desenvolvam nesse ambiente computacional, do tipo de atividades propostas, da relação que foi estabelecida com o computador, da freqüência no uso e na familiaridade que se tenha com ele. (p. 362)

Pinto & Kawasaki (2002) discutem, em seu artigo *Tecnologia e o Ensino de Cálculo*, um projeto em desenvolvimento na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), na época da publicação deste artigo, do *programa Visual Calculus 1.0* (*VCalc 1.0 foi idealizado pelo Professor David Tall no ano de 1986*), incorporando aplicativos (*applets*) em linguagem *Java* para trabalhar conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de modo significativo para o aluno. A intenção maior foi possibilitar ao aluno interagir e investigar representações gráficas de funções de uma variável e conceitos fundamentais do Cálculo. Segundo estas autoras, a concepção de tal programa propõe "a visualização como ponto de partida para a construção dos conceitos de derivada e integral, a partir de duas idéias centrais: a noção de retificação local[12] e a noção de área sob uma curva". As autoras ainda concluem, mais adiante, que tal forma de tratar o assunto apresenta-se como alternativa à abordagem formal ou simbólica proposicional para o ensino do Cálculo, fundamentadas tanto do ponto de vista matemático como da educação matemática.

Santos & Bianchini (2003) divulgam, em seu *artigo Incorporando o Computador no Ensino do Cálculo: Um Novo Desafio,* uma experiência que foi realizada no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (IM – UFRJ) no "sentido de incorporar o uso do computador e de sistemas computacionais algébricos, no caso o *MAPLE*, em disciplinas de cálculo". Segundo os autores, a experiência foi desenvolvida em laboratórios de informática, no decorrer de cinco anos. Os alunos trabalhavam em pequenos grupos, com dois alunos por máquina e as aulas expositivas foram realizadas com o apoio de projetores de multimídia.

[11] Para Levy (2008), "a ecologia cognitiva é o estudo das dimensões técnicas e coletivas da cognição" (p. 137)

12 No original, em inglês, local straightness - Esta noção é baseada no fato que uma curva, quando suficientemente magnificada, se assemelha a uma reta.

Segundo estes autores, o foco deste artigo foi voltado tanto para a descrição da filosofia, objetivos e estratégias que norteiam o trabalho desenvolvido no IM – UFRJ; quanto para ilustrar, por meio de exemplos, como se pode fazer uso das características particulares de recursos computacionais a favor da aprendizagem de matemática, durante um curso de Cálculo.

Para os pesquisadores, tanto no Brasil, como no exterior, o ensino de Cálculo ocupa uma porção considerável do currículo dos cursos das mais diversas áreas. Tal fato se justifica, pois:

> [...] desde o século XVII, o cálculo tem se revelado a principal ferramenta matemática para aplicações científicas e tecnológicas. Talvez porque as origens e aplicações do cálculo sejam tão antigas e tradicionais, os textos que utilizamos hoje para o seu ensino, com pequenas diferenças de conteúdo no mundo inteiro, seguem uma filosofia educacional iniciada no século XIX, originária na concepção de um modelo de ensino estruturado e institucionalizado em torno da 'École Polytechnique' de Paris cujos diversos 'cursos' escritos e editados serviram, mais tarde, para o modelo de ensino de ciências e matemática em todo mundo. Estes textos e nossas aulas, neles baseadas, seguem a metodologia sumarizada na cadeia definição $\rightarrow$ teorema $\rightarrow$ demonstração $\rightarrow$ corolário (aplicações). (Santos & Bianchini, 2004, p.1. Grifos dos autores)

Acrescentam, ainda, mais adiante:

> Esta forma de apresentação da matemática como um corpo de conhecimento pronto e acabado é resultado de um processo de filtragem que esconde os esforços criativos existentes por detrás de cada resultado obtido, oferecendo pouca margem de indagação e análise e impedindo, em última análise, que o aluno seja colocado diante do desafio de conduzir um processo de investigação científica ou de apreciá-lo com visão crítica.
> Por outro lado, muito se tem falado das inúmeras possibilidades potenciais que se abrem no processo ensino-aprendizagem, a partir da introdução do computador como um novo e poderoso recurso didático. Desde sua popularização, o problema-desafio que enfrentamos, é descobrir a maneira adequada de canalizar este potencial de modo a obtermos um salto qualitativo na aprendizagem de matemática, de um modo geral, e do cálculo, em particular. (Santos & Bianchini, 2004, p.1)

Conforme Santos & Bianchini (ibid.) observam, o uso de sistemas de computação algébrica como o *Maple*, por exemplo, podem conduzir a novas formas de lidar com problemas permitindo,

> [...] o desenvolvimento de dezenas e interessantes 'experiências matemáticas' que ajudam os estudantes a visualizar, experimentar, fazer conjecturas razoáveis, idealizar como provar estas conjecturas, obter

> novas provas, perceber conexões entre conceitos e teorias e até mesmo, chegar a novas definições. (p.1)

De forma semelhante ao constatado por Giraldo & Carvalho (2008) e Rezende (2003), Santos & Bianchini (2003) observam que quando as tecnologias computacionais (neste caso, SCA) são usadas para ensinar cálculo, "investigações sobre qualidades típicas da ferramenta - o que elas podem, ou não podem, fazer e como fazem - devem ser incluídas entre os conteúdos abordados".

A partir deste tipo de investigação, Santos & Bianchini (ibid.) sinalizam, e ilustram por meio de exemplos simples no decorrer do artigo, sobre como o uso da ferramenta computacional pode e deve definir o tipo de atividade desenvolvida em uma sala de aula de Cálculo informatizada. Assim, sob este contexto, um planejamento cuidadoso das atividades no laboratório, visando desenvolver uma postura investigativa por parte dos alunos tem um papel fundamental, suscitando questões sobre o controle e o entendimento dos resultados de saída (na tela do computador) em resposta a determinados comandos.

Segundo estes mesmos autores, o trabalho desenvolvido no IM-UFRJ explora pelo menos cinco aspectos nos quais a abordagem computacional pode ser usada para "apresentar a matemática como um assunto vivo, em constante construção, transformando a tarefa de ensinar-aprender cálculo numa atividade criativa, que exige, necessariamente, a participação ativa tanto de alunos como de professores". Conforme apontam Santos & Bianchini (2003, p.3) estes aspectos são:

> (a) desenvolvimento de modos alternativos para a introdução dos conceitos;
> (b) desenvolvimento de "experiências matemáticas" baseadas no tripé explorar - conjecturar - concluir/demonstrar;
> (c) integração dos aspectos gráfico-geométricos, analíticos e numéricos, incluindo a visualização e interpretação geométrica de resultados e teoremas;
> (d) apresentação e desenvolvimento de projetos de modo a permitir a aplicação dos conceitos e resultados a situações e problemas que os alunos nunca tenham visto antes;
> (e) realização de trabalhos rotineiros de cálculo longos, tediosos ou cansativos, liberando o tempo de alunos e professores para pensarem criativamente.

Os autores ainda destacam que os projetos desenvolvidos em grupo, além de desenvolver a atividade de comunicação oral e escrita, visam também ao desenvolvimento de habilidades para a modelagem de situações reais e, por fugirem do padrão usual dos exercícios, exigem um nível mais alto de dedução, análise e crítica por parte dos alunos. Desta forma, segundo estes autores:

> Tanto os projetos como as atividades em laboratório estimulam o trabalho colaborativo tão importante na sociedade super especializada em que vivemos, onde equipes interdisciplinares são cada vez mais imprescindíveis para o desenvolvimento de projetos complexos. Dessa forma, experiências que incorporem o raciocínio e a forma de pensar de outra pessoa à sua própria forma de pensar e raciocinar, são um ingrediente importante e essencial na formação do profissional do século XXI. (p.3)

Nas conclusões do trabalho, os autores apontam para as novas possibilidades que se vislumbram a partir da utilização de um sistema computacional. Eles comentam que:

> A utilização de sistemas computacionais algébricos no ensino de cálculo permite a realização de 'experiências matemáticas' que facilitam o surgimento de conjecturas, promovem a integração de aspectos geométricos e analíticos e, valorizando o pensamento matemático, podem ter um impacto significativo na qualidade do ensino que ministramos. Freqüentemente, os experimentos e projetos com o computador sobre passam, em muito, as aulas expositivas e, especialmente os projetos, devem estar relacionados a situações reais clarificando para o aluno a relação íntima matemática-natureza.
> [...] Essas novas possibilidades devem ser consideradas na (re) definição de currículos, na atualização das ementas e no estabelecimento de novas metodologias de aprendizagem, sem detrimento de uma sólida formação matemática, ao contrário, desvendando para o aluno, o prazer, a beleza e o verdadeiro significado de 'fazer matemática'. Os professores devem estar preparados para responder e explorar as questões matemáticas que surgem no decorrer das experiências, assim como aproveitar características específicas do programa utilizado para diminuir a ênfase no desenvolvimento de habilidades mecânicas e em técnicas algébricas, deslocando o foco das aulas do 'como' para o 'por quê'. (p.5, grifos dos autores)

Olímpio Júnior (2006) discute, em sua investigação, compreensões emergentes sobre os conceitos de função, limite, continuidade e derivada, produzidos em um ambiente formado por alunos ingressantes em um curso de Matemática, oralidade, escrita e informática. A pesquisa do autor também propõe uma maior e mais intensiva exploração da natureza dinâmica dos conceitos do Cálculo. O autor, em suas conclusões, sugere que os conflitos emergentes na transição da Matemática do Ensino Médio para o Ensino Superior têm suas raízes em uma limitada compreensão do conceito de função.

Em Nasser (2009), encontramos mais um exemplo de iniciativa do uso da tecnologia no ensino de matemática. A autora desenvolveu um trabalho sobre traçado de gráficos com oito alunos de Cálculo de um curso de Engenharia, usando o programa *Winplot*[13]. O foco deste estudo foi concentrado nas deficiências e dificuldades de estudantes de Cálculo no traçado de gráficos de funções em uma ou duas variáveis no IR², entre outras; objetivando analisar o progresso dos alunos envolvidos no estudo. Esta autora observou que os alunos chegam à Universidade com muitas deficiências, provenientes da falta de experiências prévias com traçado e análise de gráficos nos ensino fundamental e médio, gerando insegurança nos primeiros períodos do ensino superior.

Sobre o conceito de gráficos, Nasser (2009) explica que para Sierpinska (1992), este conceito é difícil para os estudantes, pois alguns alunos não conseguem aceitar um gráfico bi-dimensional como representação para uma relação funcional, mas preferem uma representação que apresente “tudo no mesmo eixo”. Sierpinska, ainda, afirma que o gráfico é uma representação estática que esconde todo o dinamismo das funções:

> O gráfico não mostra diretamente como e quando um determinado ponto foi representado. O ponto e sua imagem são representados em eixos independentes [...]. Não é como as representações de simetrias ou homotetias, onde se pode ver como um ponto está sendo transformado. Ao contrário, no gráfico de uma função, um único ponto (x,y) é um símbolo que contém em si mesmo o argumento, o valor e a lei de associação. (p. 52)

Barufi e Lauro (2001, apud Nasser 2009)[14] apresentam uma abordagem do estudo do gráfico de funções, equações e inequações utilizando o computador, e observam que:

> A leitura e a interpretação de um gráfico tornam-se fundamentais, pois possibilitam a compreensão do problema ou da questão tratada. A problematização realizada a partir dos gráficos obtidos no microcomputador é muito importante, pois possibilita ao aprendiz buscar respostas aos questionamentos formulados. (p. 8)

Ainda, segundo Nasser (2009), com a estratégia de ensino apropriada aplicada a transformações no plano, os alunos da amostra sentiram segurança para traçar gráficos de retas, parábolas e curvas do tipo exponencial e logarítmica. Nasser (ibid.), conclui que esta pesquisa sugere ações que podem ser usadas por docentes para superar as

---

[13] O *Winplot* é um programa livre, disponível em várias línguas (inglês, alemão, francês, português, espanhol, etc). Ele pode ser encontrado no site Peanut Softwares, endereço http://math.exeter.edu/rparris.

[14] BARUFI, M.C.B. LAURO, M. M. Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador. CAEM, IME/USP, 2001.

dificuldades nas disciplinas de Cálculo, enfatizando os exercícios sobre transformações de gráficos.

Bortolossi (2010) relata no V Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro, mais uma experiência em lecionar Cálculo I com o uso do computador, por meio do programa Geogebra[15], dentro da Universidade Federal Fluminense do Rio de Janeiro (UFF). Esta experiência foi realizada em seis turmas de Cálculo I, ao longo de quatro semestres, com alunos de Engenharia Química, Estatística e Engenharia de Recursos Híbridos.

Segundo este autor, o ensino de Cálculo enfrenta várias dificuldades, entre elas: alunos com deficiência na matemática no ensino médio, a cultura em apenas estudar na semana da prova e a grande quantidade de conteúdo a ser desenvolvido.

Conforme relatado por este autor, foram adotadas ações integradas em suas aulas de Cálculo, objetivando criar mecanismos que permitam identificar mais rapidamente os problemas de aprendizagem dos alunos e integrar ações para solucioná-los. Segundo Bortolossi (2010, p.1), foram adotadas as três seguintes ações:

> (1) o uso de um computador acoplado a um projetor multimídia para conduzir as atividades em sala de aula, (2) o uso de softwares educacionais para ilustrar idéias e conceitos e (3) a presença do monitor em sala de aula para auxílio nas sessões de exercícios com os alunos.

Para este autor, se comparada a uma aula tradicional, uma aula com computador e projetor de multimídia permite que um conteúdo seja apresentado em menos tempo e, desta forma, com o tempo que sobra, é possível fazer com que os alunos resolvam exercícios durante a própria aula; facilitando o trabalho de identificação e correção dos problemas de aprendizagem bem antes da prova.

Uma destas medidas, segundo Bortolossi, que se mostrou bem eficaz, foi de detectar os erros freqüentes nos exercícios e registrá-los nos arquivos em PDF para posterior apresentação[16] em sala de aula.

Este autor destaca outras vantagens deste estilo de apresentação:

> 1. Os passos importantes de um argumento ganham destaque com recursos de cores e demonstrações passo a passo (algo difícil de fazer mesmo com transparências e retroprojetor).

---

[15] O *Geogebra* é um software livre de matemática dinâmica, e pode ser encontrado em http://www.geogebra.org/.

[16] Segundo este autor, os alunos não se sentem constrangidos com esta exposição em sala de aula, pois eles percebem o objetivo do método e seus nomes são removidos da imagem digitalizada.

> 2. O aluno se familiariza, ao longo do curso, com o nível de rigor, organização e a maneira de expor o raciocínio exigidos pelo professor.
> 3. Evitam-se erros de cópia. (p.3)

Outra vantagem do uso de tecnologia é apontada por Bortolossi (2010): “Assuntos como transformações em gráficos, limites, derivadas e taxas relacionadas ganham uma nova dimensão quando apresentados em sala de aula com o auxílio do Geogebra”.

Sobre a adoção de monitores presentes em sala de aula, o autor destaca as seguintes vantagens:

> 1. O monitor fica em sintonia constante com o professor orientador: ele sabe exatamente qual matéria já foi dada, quais foram os exemplos dados, quais foram as dúvidas que aparecem durante as aulas, etc. Com isto, sua interação com os alunos é mais precisa e adequada.
> 2. O convívio entre monitor e aluno é mais intenso: sua presença desde o primeiro dia de aula estimula sua interação com os alunos, criando um vínculo de amizade e cooperação (tipicamente, com um monitor convencional, o aluno só tem contato com este na semana ou mesmo na véspera de uma prova).
> 3. O monitor pode vivenciar uma prática de ensino mais próxima da sala de aula, tendo a oportunidade de acompanhar a atuação do professor e os vários aspectos que compõem uma disciplina do início ao fim. (p.4).

Nas suas conclusões, Bortolossi relata que com o objetivo de conhecer a opinião dos alunos, aplicou um formulário de avaliação que foi respondido por 157 alunos, ao longo dos quatro semestres. Do total destes 157 formulários respondidos, foram destacados, por este autor os seguintes itens, entre outros:

> - 95,5% dos alunos preferem ter aulas com projetor multimídia e recursos computacionais;
> - 100% dos alunos acham importante a realização de exercícios (que eles próprios fazem) em sala de aula sob a supervisão do professor e dos monitores;
> - 94,9% acham importantes a atuação e a presença dos monitores em sala de aula;
> - 89,8% procuraram os monitores presenciais pelo menos uma vez;
> - 28,7% procuraram os monitores convencionais pelo menos uma vez;
> - 8,3% não procuraram nenhum tipo de monitor. (p.5)

Como vimos no decorrer desta seção e, também, ao longo de boa parte desta dissertação, os professores de Cálculo reclamam, de uma forma geral, que os alunos entram na universidade com falta de conhecimentos prévios (conteúdos básicos) e de habilidades básicas (leitura, interpretação, escrita e argumentação). Concordamos, mais uma vez, que essas “faltas” são incontestáveis. Entretanto, se estas lacunas são percebidas, comprovadas e propaladas no meio universitário, pensamos que uma atitude passiva diante deste problema só pioraria a situação, uma vez que uma melhora significativa na educação básica demandará certo tempo.

Desta forma, na nossa visão, reconhecemos que é de suma importância considerar esses fatores no planejamento da disciplina de Cálculo ou, se for o caso, de qualquer outra disciplina que vise a recuperação das deficiências trazidas pelos recém egressos do ensino médio, que é tão imprescindível para a formação de qualidade de qualquer estudante que ingressa no ensino superior na área de exatas.

Neste contexto, faremos, a seguir, uma síntese de trabalhos publicados que relatam tentativas efetivas de contribuições na transição do ensino básico ao superior, dentro de algumas prestigiadas universidades brasileiras. Essas experiências discorrem, em sua ampla maioria, sobre a adoção de um curso de preparação à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

2.3 Introdução ao Cálculo: algumas soluções encontradas

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I está presente no primeiro ano de diversos cursos superiores e os índices de reprovação registrados, em geral, são elevados, como vimos na introdução deste trabalho.

Uma proposta pedagógica bastante utilizada por diversas universidades brasileiras para se enfrentar o problema é oferecer uma disciplina nos moldes de “Pré-Cálculo”, “Matemática Básica” ou “Introdução ao Cálculo”, não importando o nome que se dê a este curso, aos alunos que ingressam no ensino universitário que tenham em sua grade esta disciplina. Tal curso de “Introdução ao Cálculo” tem como objetivo possibilitar ao aluno rever conceitos importantes da matemática da escola básica, reconstruí-los, quando necessário, e, conseqüentemente, aprofundá-los.

Rezende (2003), por exemplo, relata a criação de uma disciplina com o nome de Matemática Básica introduzida na grade curricular obrigatória do curso de Matemática/Niterói da UFF a partir do segundo semestre de 1997, que teve como objetivo auxiliar e dar um embasamento à disciplina de Cálculo I. Como já ressaltamos na introdução deste trabalho, neste curso ensinou-se toda aquela parte da matemática básica[17] necessária à realização técnica do Cálculo. Ainda segundo este autor, esta disciplina, no caso da UFF, não atingiu sua principal meta que é reduzir o quantitativo de não-aprovados em Cálculo I (o índice de não-aprovados permaneceu na faixa de 70% a 90%, chegando a ultrapassar a barreira dos 90% no segundo semestre de 1998).

No caso da UFF, em 1997/1998, os índices de não aprovação nessa disciplina de preparação para o Cálculo foram bem parecidos que os respectivos índices das disciplinas de Cálculo, conforme relatou Rezende (2003). Note que, desta forma, o que ocorreu foi uma antecipação do problema. E mais: esta disciplina de Matemática Básica que deveria auxiliar os alunos na transição do ensino básico para o ensino superior, na verdade, acabou tornando-se mais uma "tormenta" para o aluno, conforme foi observado por este mesmo autor em seu trabalho final de doutorado.

Assim, na nossa visão, um importante questionamento se levanta: enfocar somente os pré-requisitos do Cálculo em uma disciplina de introdução ao cálculo ou pré-cálculo é o melhor procedimento? Responder a esta pergunta, sabemos que não é uma tarefa fácil e, exibir um encaminhamento que resolva de vez o problema do Cálculo seria pura pretensão de nossa parte. Mas nos aliamos com Rezende (2003), que ao refletir sobre a base do aluno recém egresso da escola básica, comenta:

> É verdade que falta tudo isto ao nosso aluno recém-egresso do ensino médio. Mas também é verdade que a tal 'falta de base' não é um problema específico do ensino de Cálculo. A 'base' que falta aqui, para o ensino de Cálculo, também faz falta para o ensino de outras disciplinas do curso superior, e nem por isso os seus resultados são tão catastróficos como os do Cálculo.
> [...] Note ainda que os resultados de Matemática Básica são bem parecidos com os de Cálculo 1, o que dá a falsa impressão de que o problema de Cálculo está condicionado realmente pela 'falta de base' do aluno. O que não é verdade. O que se pode concluir tão somente, a partir desses resultados, é o que todos já sabiam: que os alunos de matemática carecem de uma formação 'básica' de matemática, e que os professores da disciplina não conseguiram resolver tal problema. (p. 17 – 18, grifos do autor)

E este mesmo autor, nos chama atenção mais adiante:

> O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de 'infinito', de 'infinitésimos', de 'variáveis', do que com 'fatoração de polinômios', 'relações trigonométricas', 'cálculos

[17] A matemática básica necessária à realização técnica do Cálculo que é, em geral, trabalhada segundo este autor são: polinômios, fatoração, relações e identidades trigonométricas, funções reais usuais (modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas), produtos notáveis, simplificações e cálculos algébricos em geral etc.

> algébricos' etc. É bem verdade que o conhecimento destes últimos auxilia na árdua tarefa de calcular limites (derivadas, integrais e etc), mas é exatamente aí que se coloca a nossa primeira questão fundamental: Qual é o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção dos significados? Quando se fala de 'falta de base', de que 'base' se está falando? (Rezende, 2003, p.18. Grifos do autor)

Diante da complexidade do problema, nos reportamos ao foco desta pesquisa: Como planejar um curso de Introdução ao Cálculo que trabalhe as dificuldades matemáticas trazidas pelos alunos que chegam ao curso superior, visando a uma aprendizagem significativa na disciplina de Cálculo I? É claro que obter esta resposta é uma tarefa difícil, afinal, como já nos referimos em parágrafos anteriores, não temos a pretensão de fornecer uma solução final ao problema do Cálculo. O que pretendemos, pelo menos neste primeiro momento, é contribuir de forma qualitativa sobre tal reflexão buscando em outras experiências, que antecederam a nossa, elementos que nos ajudem a compreender tanto os caminhos já trilhados, como a vislumbrar novos.

Em quase todos os eventos relacionados com ensino de Matemática ou Engenharia têm-se encontrado diversos trabalhos relacionados com as dificuldades demonstradas pelos alunos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, por vezes com sugestões de atividades na tentativa de modificar tal situação. Também em artigos ou livros publicados nos últimos anos observa-se uma forte preocupação com o ensino da disciplina de Cálculo e as propostas de mudanças (Azambuja et al., 2008).

Nascimento (2000), por exemplo, relata, no VI Encontro de Educação em Engenharia, na UFRJ, várias pesquisas e experimentos, realizados em salas de aula da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, para reduzir as dificuldades intrínsecas desta disciplina. No decorrer de cinco experimentos, este autor observou várias turmas de licenciatura em Biologia, Química e Geografia, totalizando, ao final da pesquisa, cerca de 270 alunos. Segundo este autor, a escolha por turmas de licenciatura se justifica, pois "estas classes se caracterizam como ambientes propícios para estas investigações, havendo sempre uma perspectiva de maior interatividade dos alunos no processo de ensino e na própria pesquisa realizada". Foram adotados métodos de trabalho individuais e em grupo buscando manter um processo de troca e construção coletiva, aplicados principalmente com os pré-requisitos e com os pré-conceitos do Cálculo.

Para Nascimento (2000), a metodologia de pesquisa empregada busca não só a identificação mais precisa das causas, como também a avaliação de técnicas que impliquem na melhoria do ensino/aprendizado. O campo para a coleta de dados é a interação aluno x professor, dentro e fora de sala de aula, além de análises sobre as atividades realizadas com os alunos (avaliações da disciplina). Adicionalmente, para a questão das diferenças metodológicas entre o ensino básico e superior, procurou-se também observar, em maiores detalhes, os métodos empregados no ensino da escola básica. Durante estes experimentos, segundo Nascimento, esperava-se obter as seguintes respostas: o que realmente deve ser recuperado na base de conhecimento dos alunos; como minimizar as diferenças metodológicas existentes entre o curso de nível médio e o curso superior; e, por último, como reduzir as dificuldades intrínsecas da matéria Cálculo Diferencial e Integral I.

Ao término das experimentações, os resultados indicaram que a questão metodológica do trabalho em grupo e a abordagem dos “Pré-conceitos do Cálculo Diferencial” se caracterizam como os fatores mais importantes em todo o processo. A questão da predisposição para o aprendizado só ficou evidente no último experimento, onde ocorreram diversas manifestações explícitas do fenômeno. Segundo este autor, “o método de pesquisa serviu a dois propósitos: realizar a investigação proposta e corrigir as deficiências observadas”.

Na conclusão deste trabalho, o autor destaca que, para os cursos em que foram aplicados os experimentos (disciplinas), ficou evidente que é possível melhorar os resultados na disciplina de Cálculo I, por meio da adoção de metodologia apropriada que considere a heterogeneidade dos alunos, a falta de base de parte deles e as dificuldades próprias da disciplina. Pode-se perceber, também, que a questão metodológica prevalece sobre outros fatores, inclusive sobre o problema da predisposição negativa ao estudo da matemática; e finaliza apontando que com este novo tratamento, os alunos demonstraram maior interesse e obtiveram, de forma geral, melhores índices de aprovação.

Barbosa & Concordido (2009) relatam uma experiência de implementação de uma disciplina de Pré-Cálculo com ensino colaborativo para calouros da Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ) (Castro Barbosa et al., 2004). Essa disciplina foi oferecida nos dois períodos de 2003 com o nome de Matemática Instrumental através do

Programa de Apoio ao Estudante de Graduação (PAE/UERJ). Esse programa foi criado na época devido à implantação na UERJ do sistema de cotas.

Conforme estes autores, a escolha pelo ensino colaborativo, como metodologia, na implantação da disciplina Matemática Instrumental foi baseada na observação de outros tipos de dificuldades, comuns aos alunos da primeira disciplina de Cálculo. São elas: "baixa motivação, valorização da memorização em detrimento da compreensão, pouca participação em aula e isolamento dos alunos" (Barbosa & Concordido, 2009). Assim, Barbosa & Concordido (2009) apontam que Castro Barbosa et al., (2004) buscaram com essa abordagem "colaborar para a criação de um espírito coletivo, visando uma maior independência por parte do estudante, o desenvolvimento do hábito de estudo e o aumento de sua habilidade de comunicação".

Em relação à organização, em cada semestre, cada uma das duas turmas era dividida, a partir de uma avaliação inicial, em pequenos grupos de quatro ou cinco alunos, de forma a se obter um alto grau de heterogeneidade. Os encontros aconteciam três vezes por semana com duração de 110 minutos cada. A exposição da matéria era feita pelo instrutor (um aluno bolsista de final de curso de Licenciatura em Matemática) e tinha a duração em torno de 25 minutos, sendo seguida de uma lista de exercícios de fixação que deveria ser feita em grupo e corrigida em sala.

Para Barbosa et al. (2009), a receptividade do esquema colaborativo adotado foi muito boa. Isto pode ser verificado através do acompanhamento do interesse dos alunos feito pelos instrutores durante todo o curso e por meio de uma avaliação que foi feita em cooperação com o Núcleo de Gestão e Avaliação da Faculdade de Educação da UERJ. No entanto, houve problemas ligados à estrutura oferecida para o desenvolvimento do curso. Segundo estes autores, dois problemas ocorridos levaram a um número muito grande de desistências: ao contrário da proposta inicial – a disciplina ser oferecida nas férias ou, pelo menos, com metade do programa sendo abordado neste período – a disciplina se desenvolveu praticamente ao mesmo tempo de Cálculo I e a falta de recursos para que o estudante fosse mantido um turno a mais na Instituição (havendo, desta forma, incompatibilidade de carga horária, especialmente para os estudantes que trabalhavam durante o dia).

Doering et al. (2004) relatam a criação do programa Pró-Cálculo, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, para "implementar ações visando reduzir o desnível existente entre a bagagem de Matemática que o aluno traz do Ensino Básico e a que se necessita para um bom desempenho no Cálculo".

Conforme o relato destes autores, a primeira edição do Curso de Extensão de Pré-Cálculo aconteceu no segundo semestre de 2002 quando foram oferecidas quatro turmas, exclusivamente dirigidas a alunos de Cálculo e Geometria Analítica. O projeto previa turmas de, no máximo, 20 alunos, com trinta horas semanais. A metodologia de trabalho proposta foi a abordagem dos assuntos via resolução de problemas, com os alunos trabalhando em pequenos grupos, na sala de aula, orientados pelo professor.

"Apesar de os alunos demonstrarem interesse e sentirem a relevância desta revisão assistida, a evasão foi muito grande, devido principalmente ao aumento das exigências de dedicação por parte das disciplinas do currículo normal" (Doering et al., ibid.).

A avaliação do curso, feita pelos professores envolvidos, apontou como muito positiva a metodologia de trabalho usada, pois permite aos alunos trabalharem em seu ritmo e, além disso, propicia ao estudante expor suas dificuldades diretamente ao professor, sem precisar expô-las ao grupo todo, o que certamente é um fator inibidor. Por outro lado, também oferece ao professor a oportunidade de avaliar muito bem as reais dificuldades dos alunos. Foram apontados, como pontos negativos, a simultaneidade com o semestre letivo e a heterogeneidade das turmas, que receberam tanto alunos de primeira matrícula em Cálculo e Geometria Analítica, quantos alunos repetentes na disciplina de Cálculo. Depois desta primeira experiência, esses dois pontos foram reavaliados, segundo a visão dos professores participantes do projeto. As mudanças sugeridas foram: o curso de extensão pré-cálculo deveria ser oferecido antes do início do semestre letivo e apenas para calouros, e o problema dos alunos com várias reprovações deveria ser tratado em separado.

Após esta primeira edição do curso de Pré-Cálculo, contando com o apoio da Pró-Reitoria de Graduação da UFRGS e a Pró-Reitoria de Extensão, ocorreu a criação do Programa de Pró-Cálculo. Neste momento, consolidou-se o entendimento que não só os calouros de Cálculo e Geometria Analítica e suas sequenciais deveriam ser alvo dessas ações, mas sim todos os alunos da UFRGS que possuíam alguma das disciplinas de Cálculo na grade curricular de seu curso.

Segundo Doering et al. (ibid.), evidenciou-se também

> a necessidade de um conhecimento mais aprofundado e sistematizado das dificuldades ou barreiras que se interpõem à aprendizagem proposta, considerando de um lado, os conhecimentos prévios e as expectativas dos alunos, e de outro, a interação entre professores e alunos e, sobretudo, a comunicação que se realiza no âmbito da sala de aula. (p. 218)

Conforme este mesmo autor, os objetivos específicos do Programa Pró-Cálculo se dividem em quatro áreas de ações: ações preparatórias, ações terapêuticas, ações exploratórias e ações diagnósticas. De uma forma geral, as ações preparatórias são destinadas aos que ainda não cursaram alguma disciplina de Cálculo e objetivam diminuir o desnível que ocorre entre os pré-requisitos do Cálculo e os conteúdos do Ensino Médio que já foram apropriados pelos alunos. Também ofereceram aos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS uma oportunidade de estarem envolvidos nesta fase do programa atuando como monitores. Já as ações terapêuticas, visam a atingir os alunos com mais de uma reprovação em Cálculo, buscando resgatar seu interesse pela disciplina e, por meio de um contato próximo professor-aluno, proporcionar uma real oportunidade de superação das dificuldades. As ações exploratórias são dirigidas aos alunos que buscam um conhecimento mais aprofundado do Cálculo e visam proporcionar um contato com tópicos que normalmente não são trabalhados em sala de aula. E, por fim, as ações diagnósticas buscam construir um conhecimento sobre as reais necessidades e dificuldades dos alunos, visando ao aprimoramento das abordagens no ensino do Cálculo.

Para Doering et al. (ibid.),

> [...] o conhecimento construído através desses estudos, disponibilizado e discutido pelos professores, poderá contribuir para a elaboração e implementação de estratégias didáticas mais efetivas, onde as noções já construídas e as hipóteses dos alunos sejam objeto de diálogo em sala de aula, permitindo uma articulação entre os conhecimentos prévios e novos, a superação de noções mais ingênuas por noções mais elaboradas e o desenvolvimento das habilidades necessárias ao uso dessas noções na resolução de problemas. (p.220)

Segundo os dados relatados por Doering et al. (ibid.), na segunda edição do Curso de Pré-Cálculo foram atendidos 565 alunos e na terceira edição, 398 alunos. Na segunda edição funcionaram 13 turmas, supervisionadas por nove professores e 18 monitores que atuaram, em média, de dois por turma. Já na terceira edição, funcionaram oito turmas atendidas por sete professores e 14 monitores. Com relação à metodologia de trabalho, foi usada a mesma utilizada na primeira edição do curso (metodologia via resolução de problemas trabalhada em pequenos grupos). O uso do estudo dirigido, com a abordagem em tópicos via resolução de problemas em pequenos grupos, tem se consolidado como o método mais adequado para este curso, pela aprovação que tem recebido da ampla maioria dos professores envolvidos no Programa Pró-Cálculo. No entendimento dos autores, uma medida eficiente do sucesso do Programa Pró-Cálculo será o incremento dos índices de aprovação nas disciplinas de Cálculo, universalmente consideradas grandes reprovadoras, sem que haja perda de qualidade.

Encontramos outra importante iniciativa em Palis (2007) sobre uma investigação no contexto da disciplina de Introdução ao Cálculo (IC daqui em diante), na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC – Rio).

Segundo a autora, esta disciplina, sob a responsabilidade do Departamento de Matemática, foi criada no ano de 1994 e fazia parte do currículo obrigatório dos alunos que tinham um desempenho insuficiente no concurso vestibular para o Centro Tecnológico Científico da PUC Rio. Esta disciplina, segundo Palis, foi planejada para enfrentar as dificuldades de docentes e discentes com a transição do ensino médio para o ensino superior na área técnico científica, em particular para preparar alunos para o estudo na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, disciplinas estas com índices elevados de repetência. Esta autora ressalva que a criação de IC ocasionou a queda da evasão em disciplinas subseqüentes, mas diversos problemas permanecem e novas ações têm sido levantadas. Por este motivo, esta disciplina vem sempre procurando se adaptar às frequentes mudanças dos alunados e às exigências de outras disciplinas da universidade, e, além disso, também visa levar em consideração os aportes da pesquisa em educação matemática relacionados a este segmento de ensino.

O trabalho de campo foi realizado pela autora em questão, no ano de 2006. Do ponto de vista didático - pedagógico, segundo a mesma autora, esta investigação foi influenciada pela já vasta literatura em educação matemática em Cálculo e uso de computadores, “bem como pelo papel de interlocução entre representação gráfica, numérica e algébrica de um mesmo objeto matemático na construção de aprendizagens significativas” (Palis, ibid.).

Esta mesma autora nos chama atenção para as mudanças curriculares e pedagógicas que devem ocorrer devido ao uso de computadores com o emprego de programas de computação algébrica em Cursos de Cálculo Diferencial e Integral:

> O emprego de programas de computação algébrica como o *Maple* em cursos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior deve provocar mudanças curriculares e pedagógicas *se* o que se pretende é explorar a potencialidade destas tecnologias no sentido de uma melhor apropriação conceitual e técnica de certos tópicos matemáticos, bem como desenvolver no alunado estratégias de resolução de problemas e competências para aplicar conhecimentos matemáticos em outras áreas. (p.1)

Ao citar Churchhouse et al. (1986)[18], defende a exploração e a descoberta matemática,

> [...] pela visualização via computação gráfica, pela exploração numérica e gráfica de processos de aproximação de funções complicadas por funções mais simples, aplicando o primeiro passo do paradigma indutivo (calcule, conjecture e prove) em várias situações, usando um sistema de matemática simbólica para descobrir fórmulas matemáticas, desenhando e executando diferentes algoritmos para a mesma atividade ou atividades correlatas. (Churchhouse et al., 1986, apud Palis, 2007)

Ainda neste contexto, e sobre o diálogo entre o papel das representações, Palis compartilhando das hipóteses cognitivas teóricas de Raymond Duval[19], acrescenta que:

> O papel das representações matemáticas semióticas na atividade cognitiva matemática, em particular da representação gráfica, dificilmente pode ser subestimado. A apreensão conceitual de um objeto matemático é inseparável da apreensão e produção de suas representações semióticas[20]. Ser capaz de se mover por diferentes sistemas de representação é uma condição necessária para a discriminação entre o objeto matemático e suas representações e para reconhecer o objeto matemático em cada uma das suas possíveis representações. (Duval, 1993[21], apud Palis, 2007, p.3)

Referindo-se às idéias defendidas por Douady (1986)[22], Palis, ainda, observa que:

> [...] a mudança de quadro (algébrico, numérico, geométrico, língua natural, medida de grandeza, etc.) é uma maneira de obter formulações

[18] Churchhouse, R.F. e outros (Eds) The influence of computers and informatics on mathematics nd its teaching. ICMI Study Series, Cambridge University Press, 1986.
Crowley, L. Cognitive Structures in College Algebra. Tese de doutorado não publicada. Universidade de Warwick, 2000.
[19] Raymond Duval é psicólogo e filósofo de formação e investiga sobre a aprendizagem matemática. Atualmente é professor emérito na Université du Littoral Cote d'Opale, França.
[20] Termo utilizado por Raymond Duval para referir-se aos diferentes signos em matemática, tais como figuras, gráficos, escritas simbólicas, língua natural (Duval, 2009).
[21] Duval, R. Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitive, v. 5, p. 37-65, 1993.
[22] Douady, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherches en didactique des mathématiques, v.7.2, p. 5-31, 1986.

> diferentes do mesmo problema permitindo um novo acesso às dificuldades encontradas e a utilização de técnicas próprias ao novo quadro, que podem levar a conflitos entre o que se esperava e o que se produz e a uma necessidade de explicação e possibilidade de evolução do conhecimento das noções envolvidas. (Douady, 1986, apud Palis, 2007, p.3)

Palis (ibid.) após estas considerações vai além, ao observar que "o aluno deva ser incentivado a desenvolver habilidades de controle de seus processos e resultados, o que pode ser facilitado pelo uso de um SCA[23], em teoria".

Como relatado por esta autora, no contexto da investigação, o uso do *Maple* com o alunado de IC se iniciou em 2004 através de um Projeto de Integração de Disciplinas Introdutórias (Introdução ao Cálculo, Física Introdutória e Informática). Sendo assim, neste contexto interdisciplinar, em 2004 e 2005, o *Maple* foi utilizado em IC apenas como recurso didático de apoio aos professores para demonstrações, enquanto que o trabalho com este software era feito pelos próprios alunos em disciplina de informática. Só a partir de 2006.1, os alunos passaram a trabalhar com este software em aulas de IC durante uma hora semanal, onde o acesso ao software durante as provas passou a ser permitido e incentivado.

A partir de 2006.2, a responsabilidade sobre a apresentação do conteúdo teórico de IC não estava mais dividida com a informática, e a partir de então, esta disciplina de IC passou a ter 4 horas em aulas semanais de laboratório, e as provas continuaram permitindo o uso do *Maple*, ficando a decisão de como usar o software a cargo dos alunos.

Para Palis (2007), a incorporação deste software revelou potencialidades importantes, como por exemplo:

> [...] relacionadas ao desenvolvimento do conceito de função na direção de uma concepção objeto desta noção. Conjecturamos que isto pode ser em parte decorrente da sintaxe do programa para a entrada de funções e que emprega um sinal para igualdade como atribuição, diferenciando-o do sinal de igualdade como equivalência. Por outro lado, as manipulações realizadas com o *Maple* parecem incentivar o aluno a pensar em uma função como um todo enquanto realiza ações sobre ela, somando-a com outra para construir um outro objeto, derivando-a para obter um outro objeto, etc. Além disso, as conexões entre diferentes representações de uma mesma função, facilitadas pelo *Maple*, favorecem o desenvolvimento desta noção. (p.4)

[23] SCA é a sigla em português para Sistema de Computação Algébrica.

Como relata Palis (2007), além das potencialidades do programa, ocorreram surpresas com a evidência de que há uma série de competências algébricas pertinentes ao ensino fundamental e médio que são indispensáveis em um ambiente de ensino-aprendizagem apoiado em sistemas de computação algébrica em uma disciplina de transição ensino médio/superior. Por outro lado, a realização de todas as provas regulares com apoio do *Maple* também suscitou uma série de perguntas tanto ligadas à formulação de questões apropriadas ao contexto tecnológico de apoio como à redação das resoluções das questões pelos alunos neste novo ambiente.

No contexto da Álgebra Básica, uma das primeiras dificuldades encontradas pela professora e pesquisadora foi com o frágil desenvolvimento algébrico de uma parcela expressiva dos alunos, parcela esta para a qual a manipulação algébrica é totalmente desprovida de sentido nada tendo a ver com operações com números, “denotando pouca intimidade com a noção de variável, de igualdade de expressões e de equivalência de equações” (p.4). E prossegue mais adiante observando que, é claro que as dificuldades dos alunos com estes tópicos de álgebra são bem conhecidas por professores e pesquisadores que trabalham com ensino inicial universitário:

> No entanto, este problema foi exacerbado com o uso do *Maple*, pois a entrada dos dados e leitura das respostas fornecidas pelo software ficaram ambas comprometidas desde o início do trabalho com o software na disciplina de IC. Os alunos apresentaram muita dificuldade com a entrada de expressões algébricas e também com a leitura dos resultados de saída, pois eles não conseguiam conciliá-los com o que obtinham com papel e lápis. O uso de sistemas de computação algébrica obriga o aluno a enfrentar questões de simplificação e equivalência sobre as quais ele nunca antes se deteve. É claro que os alunos têm problemas com a extrema precisão da sintaxe em ambiente computacional, mas o problema principal não reside neste aspecto; o problema é de conteúdo algébrico. (p. 5 - 6)

Para lidar com o problema, foi preparada uma lista de exercícios de álgebra básica para ser trabalhada com os alunos no *Maple* ao mesmo tempo em que eles iam aprendendo os primeiros comandos e características da sintaxe do programa. As dificuldades relatadas pela pesquisadora foram diversas. Desta forma, foi necessário que a autora fosse apontando e orientando os erros de sintaxe, já que era a primeira vez que aqueles alunos estavam trabalhando com este tipo de software. Ao final do segundo encontro, com aquela lista de álgebra básica, os alunos já começavam a acertar mais com o *Maple* e mesmo a escolher, já com mais segurança, de acordo com a pergunta, se iam resolvê-la à mão ou à máquina (Palis 2007).

Como nem tudo são flores, durante muitos momentos, os alunos ficaram extremamente “irritados” com o programa, como nos descreve Palis (ibid.), pois “eram fornecidas respostas incorretas (de fato, respostas corretas a perguntas incorretas) e mensagens de erros com freqüência”; além disso, os alunos demoravam a aceitar que uma atividade proposta deveria ser feita de duas formas diferentes.

No que refere ao planejamento das provas, Palis ressalva que os seguintes critérios foram respeitados:

> [...] algumas questões teriam que ser resolvidas com lápis e papel pela natureza da questão, outras podiam ser resolvidas a mão ou a máquina e outras podiam ser resolvidas a mão apesar de apresentarem certas dificuldades algébricas, sendo então melhor resolve-las a máquina. No entanto, [...] nada disto era dito aos alunos, eles escolhiam o que usar na prova. (p.9)

A autora ainda aponta que:

> Durante todo o semestre, dúvidas sobre entrada de dados na máquina e dificuldades com manipulações algébricas a mão continuaram a aparecer, mas não de forma tão generalizada como ao início do semestre. Alguns alunos perdiam toda a oportunidade de acertar uma questão de prova [...] nos quais os alunos continuavam a realizar transformações algébricas totalmente desprovidas de sentido. O trabalho realizado foi muito promissor, mas precisa ser aprimorado em uma investigação posterior. (p.7)

Um dos problemas enfrentados pela pesquisadora nas provas foi com a dificuldade de que os alunos indicassem o trabalho que realizaram ao resolver uma questão com o apoio do *Maple*. Para Palis, este fato ocorreu pois os alunos são muito econômicos com as suas justificativas por escrito, quando estas não estão totalmente ausentes. Neste contexto, como afirma Balachef (1991, apud Giraldo e Carvalho, 2008)[24], estudantes frequentemente não se envolvem no processo de construir demonstrações não por que sejam incapazes de fazê-lo, mas por que não vêem razão ou necessidade de fazê-lo.

[24] N. Balacheff. Radical constructivism in mathematics education, chapter Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning, page 89–110. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

A autora também nos chama a atenção para a dificuldade que os estudantes tiveram para manter uma atitude crítica durante todo o trabalho desenvolvido que lhes permitissem realizar algum controle de seus resultados.

Sobre as possibilidades que os programas computacionais oferecerem, Thomas et al.(2004, apud Palis, 2007, p.10)[25], mencionam que o "uso de múltiplas representações ao se estudar um problema ou conceito, este uso não é automático; os alunos não necessariamente usam uma representação adicional para verificar o seu trabalho".

Sob este contexto, Palis (2007) observa:

> Há indicações então da necessidade de busca de estratégias pedagógicas adequadas para dar conta destes problemas para que as apostas cognitivas que se baseiam no papel do diálogo entre representações semióticas possam se realizar. (p.10).

Nas suas conclusões, Palis (2007) observa que o ambiente computacional dá a aos alunos a oportunidade de realizar um exercício crítico de seus cálculos; entretanto, sem a intervenção do professor este fato não se realiza, na maioria das vezes. Desta forma, na análise desta autora, é importante, em uma futura investigação, desenvolver estratégicas didáticas que permitam além de promover uma postura mais ativa por parte dos alunos, o desenvolvimento de habilidades de comunicação que lhes permitam apresentar o raciocínio que sustentaram na resolução de um problema.

Com efeito, essa síntese de trabalhos envolvendo o ensino e a aprendizagem na transição do ensino médio para o superior, na disciplina de Introdução ao Cálculo nos fornece subsídios teóricos para embasar a nossa proposta e mostra que o tema tem sido alvo de estudos e pesquisas na busca por soluções para toda a problemática em questão.

Os pesquisadores acenam para algumas possibilidades de contribuição para um ensino de uma disciplina de Introdução ao Cálculo que alcance um resultado esperado. Podemos destacar, baseados em nossa revisão bibliográfica, a metodologia via resolução de problemas, a aprendizagem em pequenos grupos e a informática como algumas dessas perspectivas/possibilidades de abordagem para um curso de Introdução ao Cálculo. Alertam também para a necessidade de um conhecimento mais aprofundado das dificuldades ou barreiras que se interpõem à aprendizagem da disciplina do cálculo que

[25] Thomas, M., Monaghan, J. e Pierce, R. Computer Algebra Systems and Algebra: Curriculum, assessment, Teaching and Learning. In: Stacey, K e Kendal, M. The Future of the Teaching and Learning of Algebra, p.153-186, Kluwer A P, 2004.

poderá contribuir para a elaboração de estratégias didáticas mais efetivas; como também a importância que deve ser enfatizada sobre a abordagem dos pré-conceitos do Cálculo em detrimento dos procedimentos técnicos.

Como o nosso objetivo é a criação de uma proposta que altere o ambiente da sala de aula, faz-se necessária a construção de uma nova dinâmica. É preciso passar de uma organização em que o professor é o centro para uma em que os alunos interagem com os outros alunos, o professor e as mídias, para que o conhecimento possa ser construído. Desta forma, a busca por uma melhora no ensino de Cálculo passa também pela mudança nas relações entre professor, aluno e conteúdo.

Neste sentido, dentre as alternativas sugeridas pela literatura foi escolhido o uso de uma tecnologia computacional, no nosso caso, baseada no binômio *Java-web Mathlets*[26]. Os *Mathlets* são utilizados como recursos visuais, dinâmicos e interativos para estruturar um ambiente de ensino aprendizagem no qual a construção dos conceitos de funções elementares, tais como retas e parábolas, entre outras, fossem potencializadas.

Antes de apresentarmos o contexto do estudo, o planejamento da intervenção e as nossas opções metodológicas, vamos apresentar no capítulo a seguir, o referencial teórico que dará sustentação a nossa proposta.

[26] Desde já, cabe ressaltar que os *Mathlets* utilizados no nosso trabalho são *applets java* não apenas interativos, mas também gráficos e que podem ser executados dentro de uma página web utilizando-se um navegador qualquer.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

"A visualização é um processo através do qual as representações mentais podem ganhar vida"
Tommy Dreyfus

3.1 O Contexto dos Referenciais Teóricos

Apresentamos neste capítulo a fundamentação teórica da nossa questão de pesquisa formulada nesta dissertação.

O referencial está dividido em dois eixos teóricos, a saber: (1) o primeiro eixo se refere o uso das TIC na sala de aula de Matemática, bem como a visualização proporcionada por estes ambientes informatizados; (2) Já o segundo eixo busca fundamentar a análise dos dados coletados sob a perspectiva dos alunos envolvidos nesta investigação; sendo formado pela teoria das Imagens de Conceito (Tall & Vinner, 1981) e a teoria dos Registros das Representações Semióticas (Duval, 2009).

Objetivamos, ao escolher a teoria desenvolvida por Duval, em concordância com Quintaneiro (2010), ressaltar o papel das representações semióticas como instrumento que possibilita as relações entre os objetos matemáticos e as representações mentais, sendo esta última o foco das investigações de Tall & Vinner. Assim, desta forma, acreditamos fortemente que as teorias de imagem de conceito e dos registros de representações semióticas possam ser complementares no sentido de a primeira direcionar foco nas imagens mentais que o indivíduo tem de objetos e conceitos matemáticos, e a segunda teoria tratar do que entendemos como a mediação entre o objeto e o indivíduo: as múltiplas representações (Quintaneiro, ibid.).

3.1.1 As TIC e a Produção do Conhecimento Matemático

Ao se propor o uso do computador ou de um programa educacional em atividades de ensino e aprendizagem, é preciso considerar que essa mídia, qualitativamente diferente, "contribua para modificar as práticas do ensino tradicional vigente" (Borba & Penteado, 2005, p.51). Nesse sentido, há vários estudos já realizados que visam aprofundar as compreensões acerca da utilização da informática na Educação

Matemática que se apóiam nas noções de Lévy (2008). Dentre eles, Borba (1999; 2001), Villarreal (1999), Borba & Penteado (2005), entre outros.

Sob o ponto de vista de Lévy (2008), a história do desenvolvimento humano sempre esteve entrelaçada com a história das mídias. Ele utiliza a noção de tecnologias da inteligência para caracterizar três grandes técnicas que estão associadas à memória e ao conhecimento: oralidade, escrita e a informática.

Em sociedades sem a adoção da escrita (oralidade primária), a cultura está fundada nas lembranças dos indivíduos. A oralidade, assim, constitui uma forma de estender a memória, ou seja, "na oralidade primária, a palavra tem como função básica a gestão da memória social" (Lévy, ibid., p.77). Assim, segundo este autor, em uma sociedade oral primária, quase todo edifício cultural está fundado sobre as lembranças dos indivíduos, encontra-se muitas vezes identificada com a memória, sobretudo e principalmente com a auditiva. A partir da propagação da escrita nos séculos XVII e XVIII, na Europa, e com a propagação do livro no formato semelhante ao que conhecemos hoje, é que se permitiu que a memória fosse estendida de modo qualitativamente diferente em relação à outra tecnologia da inteligência, a oralidade.

A escrita por sua vez, provoca, com seu surgimento, uma nova forma de comunicação. "A comunicação puramente escrita elimina a mediação humana [...] que adaptava suas mensagens vindas de um outro tempo ou lugar" (Lévy, 2008, p. 89). O saber agora pode ser estocado, consultado e comparado, tornando-se objeto suscetível de análise e exame. Além disso, assim como a oralidade, a escrita consiste em uma forma de estender a memória, embora de maneira diferente. As representações na escrita, diferentemente da narrativa, tendem a perdurar, mais ainda quando se passa dos manuscritos para o impresso, possibilitando uma divulgação mais intensa dos signos na sociedade. Da mesma forma que a escrita, devemos entender a informática. Ela é uma nova extensão da memória, com algumas diferenças em relação às outras tecnologias da inteligência já que permite que a linearidade de raciocínios (conquistadas por meio do livro, lápis e papel, e instrumentos afins) seja desafiada por modos de pensar, baseados na simulação, na experimentação, e em uma nova linguagem que envolve escrita, oralidade, imagens e comunicação instantânea (Borba, 2001).

Neste contexto, Lévy (2008) ressalva:

> Ao analisar tudo aquilo que, em nossa forma de pensar, depende da oralidade, da escrita e da impressão, descobriremos que apreendemos o conhecimento por simulação, típico da informática, com critérios e reflexos mentais ligados às tecnologias intelectuais anteriores (Lévy, 2008, p. 19)

Lévy (2008) considera a simulação como uma imaginação auxiliada por computado*r*, e ao mesmo tempo uma potente ferramenta de ajuda ao raciocínio. Para o autor, o conhecimento por simulação é menos absoluto que o conhecimento teórico, é mais operatório e mais ligado às circunstâncias particulares de uso. Enquanto o conhecimento produzido por teorias está associado à transmissão de informações e processos empíricos, na simulação o conhecimento é produzido por reflexão, tentativa e erro.

Assim, Borba & Penteado (2005, p. 48) fundamentam seu trabalho em Lévy (1993)[27], ao destacarem a importância das diferentes mídias na geração de novos conhecimentos.

De forma semelhante, na presente pesquisa, entendemos a aprendizagem como um processo que envolve a interação constante entre o indivíduo e o ambiente (outros indivíduos e as mídias[28]). Concebemos, assim, o ambiente informatizado, onde aconteceram todas as atividades no laboratório de informática, como um espaço em que as interações entre os diferentes participantes aconteceram.

Segundo Allevato (2005), na Educação Matemática, várias pesquisas que já foram e outras que estão sendo realizadas, tratam da inserção das tecnologias de informação e comunicação (TIC) nos ambientes de ensino e aprendizagem. É bastante extensa e variada a produção científica nesta linha, em particular no ensino do Cálculo. A vasta literatura especializada mostra que a maneira de utilizar as TIC no ensino de Matemática foi gradualmente modificada ao longo do tempo, à medida que os estudos foram fornecendo novos subsídios à sua utilização por alunos e professores.

Ao empreender atividades de ensino com o computador, é preciso tentar compreender o papel desse recurso nos ambientes em que se insere e qual é a sua relação com a atividade que será realizada com a sua mediação (Allevatto, 2005), além de suas potencialidades ou limitações técnicas (Giraldo, 2004). Assim, para utilizar de forma

[27] LEVY, P. As Tecnologias da Inteligência: O Futuro do Pensamento na Era da Informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
[28] Neste presente estudo, designaremos por mídias lápis, papel e o computador.

eficiente o computador visando ensinar Matemática, é preciso ter conhecimento do que estamos fazendo ou pretendemos que o computador faça. É preciso saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino.

Sob esta perspectiva, neste presente estudo, estamos investigando de que forma a visualização e as múltiplas representações proporcionadas pelas TIC podem contribuir para uma melhor compreensão por parte dos estudantes de uma turma de Introdução ao Cálculo na resolução de problemas que envolvam funções elementares, equações e inequações lineares em duas variáveis.

Assim, nesta pesquisa, a concepção adotada para visualização consiste em um processo que associa a compreensão dos estudantes, entre si, e as mídias. Desse modo, consideramos que a visualização é um processo essencial na elaboração de novas conjecturas que podem ser refutadas ou confirmadas. A visualização, realçada pelas TIC, pode alcançar uma nova dimensão, onde a animação, proporcionada pelos recursos computacionais (no caso, os *mathlets*), constitui um elemento primordial, quando as imagens são vistas de forma dinâmica e interpretadas pelos alunos em outras formas de enriquecer o conhecimento acerca dos conceitos envolvidos, integrando as representações gráficas, algébricas e numéricas.

Desta forma, torna-se necessário, no contexto tecnológico, refletirmos sobre a visualização e as múltiplas representações matemáticas, por meio da análise da literatura recente em Educação Matemática.

3.1.2 A Visualização e as Múltiplas Representações Mediadas pelo Computador

Em nossa visão, não é possível conceber a abordagem das representações matemáticas por meio de um programa sem trazer ao debate a necessidade de se utilizar elementos visuais, o que implica dar à visualização um significado no processo de transformação, compreensão e interpretação dos conceitos matemáticos.

Tall (1989) comenta que, em geral, os matemáticos acreditam que a natureza dos objetos com que trabalham é determinada por conceitos imutáveis, cuja realidade independe de fatores culturais. Em Matemática, historicamente, elementos conceituais têm supremacia sobre os observáveis. Entretanto, atualmente o caráter observável dos objetos produzidos ou processados pelas TIC está, cada vez mais, ganhando destaque.

Relacionam-se a isso as percepções de Villarreal (1999) e Borba & Villarreal (2005) no que se refere aos estilos de abordar os conteúdos matemáticos. Segundo estes autores, mesmo na presença do computador, há alunos que se mostram claramente mais propensos a pensar algebricamente, demonstrando que conservam traços de um ensino que, tradicionalmente, enfatiza aspectos algébricos. Essa ênfase no algébrico pode ser associada às compreensões de Tall (1989): elas representam as "velhas" forças que coexistem com as "novas", nesse particular, representadas pelas possibilidades visuais que as tecnologias da informação e comunicação oferecem.

Certamente, este aspecto está relacionado, também, com a possibilidade de "fazer Matemática à mão ou com uma tecnologia computacional". Os estilos, de saber e pensar, característicos da cultura informática, podem ser condenados, ignorados ou não serem percebidos por não satisfazerem aos critérios e definições característicos de um tempo em que prevalecia a escrita. É o caso da imagem, recurso fundamental das tecnologias informáticas, das quais o computador ocupa, neste trabalho, posição de destaque. A abordagem visual de um conceito ou objeto, em Matemática ou em qualquer outra área do conhecimento, pode ser considerada, hoje, como um dos elementos que caracterizam novos estilos de construção do conhecimento (Borba & Villarreal, 2005).

Tall (1989), por exemplo, atribui ao computador à função de *generic organizer*. O termo é utilizado para designar ambientes (ou micromundo) que permitem ao aluno manipular exemplos e, se possível, contra-exemplos de um conceito matemático específico ou sistemas relacionados de conceitos. O programa *Graphic Calculus* desenvolvido por Tall, no ano de 1987 (como já citamos no capítulo 2 deste relatório), inclui vários *generic organizer* para a exploração dos principais conceitos de Cálculo. Esse ambiente pode ajudar o aluno a ganhar experiências que prepararão sua estrutura cognitiva para que possa refletir sobre a construção de conceitos mais abstratos. O computador pode ser uma fonte rica de imagens visuais que seriam, por vezes, impossíveis de serem obtidas sem esse recurso. Tall (1992) ilustra esse aspecto, usando a ampliação (zoom) para aumentar significativamente partes específicas de um gráfico e, visualmente, analisar a linearidade local (ou não) de um gráfico para complementar a noção de diferenciabilidade (ou não) de uma função em um ponto.

Conforme Allevato (2005), o computador privilegia o pensamento visual sem, contudo, implicar na eliminação do algébrico. No Cálculo, pode-se empregar informações gráficas para resolver questões que também podem ser abordadas algebricamente e relacioná-las: é o caso da representação gráfica da função derivada que possibilita interessantes análises sobre o comportamento e os extremos das funções. Além disso, a abordagem visual tem demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações, explicações de conceitos e resultados, dando espaço, portanto, à reflexão. Outros pesquisadores também concordam que visualização e manipulação simbólica devem complementar-se para que se obtenha uma compreensão matemática mais abrangente e profunda (ARCAVI & HADAS, 2000; BORBA & VILLARREAL, 2005; PIERCE & STACEY, 2001; entre outros).

Arcavi & Hadas (2000) afirmam que os ambientes de geometria dinâmica (ou outros ambientes computacionais) constituem verdadeiros laboratórios virtuais em que os estudantes podem investigar e aprender matemática. Os autores enumeram uma série de características que esses laboratórios têm a possibilidade de desenvolver, desde que acompanhados de materiais curriculares e práticas de ensino em sala de aula. Tais características são: visualização, experimentação, surpresa, resposta da máquina e necessidade de demonstração. Em relação à visualização, especificamente, Arcavi & Hadas citando Fishbein (1987)[29], afirmam que a concretude de imagens visuais é um fator essencial para criar o sentimento de auto-evidência e, portanto, não apenas organiza informações em estruturas munidas de significado, como também é um importante fator conduzindo o desenvolvimento analítico de uma solução.

Nesse trabalho, os autores relatam uma atividade em um ambiente de geometria dinâmica em que estudantes de uma escola secundária em Israel lidaram com o problema de encontrar o triângulo isósceles de maior área dentre todos aqueles cujos lados congruentes são dados – cuja solução, contrariamente à intuição de muitos estudantes e professores, é o triângulo retângulo isósceles e não o triângulo eqüilátero. Entretanto, em um primeiro momento, os estudantes trabalharam com a construção dos triângulos no ambiente informatizado e, em seguida, com a construção aliada à

[29] R. DUVAL. Basic issues for research in mathematics education. In Proceedings of 24th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education, pages 55-69. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2000.

visualização do gráfico cartesiano da função que representava a situação, traçado em tempo real. Segundo Arcavi & Hadas (2000), o planejamento das atividades foi inspirado pela perspectiva teórica proposta por Duval (2000[30]; 2004[31]), de acordo com a qual um componente essencial de aprendizagem de matemática é a coordenação de diferentes representações de uma dada idéia ou conceito, que implica na manipulação e na tradução por meio dessas representações. Ao fazerem a análise dos resultados, os autores comentam que, em uma abordagem para o mesmo tipo de problema que não usassem o ambiente computacional, é praticamente certo que os símbolos seriam, em um momento inicial, o único recurso para mediar a aprendizagem. Por outro lado, nesta experiência, o gráfico foi produzido antes da representação algébrica. E, segundo estes mesmos autores, foi na tradução entre a representação gráfica e a situação geométrica que mais sutilezas do problema foram reveladas. Desta maneira, a ausência do aspecto simbólico na etapa inicial evitou que os alunos se envolvessem com a manipulação algébrica e eventualmente se distanciassem do sentido inicial do problema proposto.

De forma semelhante, Pierce & Stacey (2001) indicam que, ao utilizar a informática, o foco do processo de aprendizagem está nos conceitos e não nos procedimentos e nas técnicas. Estes autores relatam, ainda, por meio de estudos experimentais, que os alunos que usaram os sistemas de computação algébrica mostraram uma melhor compreensão dos conceitos matemáticos do que o grupo que frequentou as aulas sem o uso dessas tecnologias. Argumentam ainda que isso se deve ao fato do computador retornar as respostas rapidamente e os alunos poderem avaliá-las. Os alunos utilizaram muitos exemplos com representações múltiplas, ocupando-se com discussões entre eles e o professor.

Em suas investigações, Pierce & Stacey (2001), citando Dreyfus (1991)[32], relacionam a exploração das representações múltiplas (numérica, algébrica e gráfica) e o aumento da compreensão de conceitos por parte dos alunos. Estes mesmos atores ressalvam:

> Para ser bem sucedido na matemática, é desejável ter ricas representações mentais de conceitos. A representação é rica, se ela

[30] R. DUVAL. A crucial issue in mathematics education: The ability o change representation registrer. In 10th Internacional Coference on Education, 2004.
[31] E.FISHBEINS. Instituiton in Sicience and Mathematics: An Education Approach. Reidel, 1987.
[32] DREYFUS, T. Advanced mathematical thinking processes. In D. Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking Dordrecht, The Netherlands: Kluwer , 1991. pp. 25-44.

> contém muitos aspectos ligados a esse conceito. Não se pode obter o suporte que é necessário para gerenciar com sucesso as informações utilizadas na resolução de um problema a menos que as várias representações sejam corretamente e fortemente ligadas. É preciso a possibilidade de mudar de uma representação para outra, sempre que a outra for mais eficiente para os próximos passos que se quer tomar [...] (Dreyfus, 1991, p.32, apud Pierce & Stacey 2001. Tradução nossa.)

De um modo geral, em suas conclusões, estes mesmos autores sugerem que o comportamento dos estudantes que utilizaram as TIC foi diferente daqueles que não tinham nenhum contato com elas. Os autores evidenciam, ainda, que a utilização dos computadores conduz os estudantes a modos de pensar e produzir conhecimentos típicos do ambiente informático, que pode ser favorável à compreensão de conceitos matemáticos.

Além desses fatores, Borba & Penteado (2001) destacam o enfoque experimental que o computador possibilita: "o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas" (p.43). A partir da investigação e da experimentação os alunos formulam, reformulam e rejeitam hipóteses, lançam novas questões e apresentam dúvidas em contextos não previstos pelo professor e que não surgiriam em outro ambiente. As explorações implementadas conduzem-se, por vezes, por caminhos inesperados configurando uma forma de aprender e pensar como "rede", tornando possível estabelecer conexões e novas relações de significados na aprendizagem. Entretanto, para Borba & Penteado (ibid.), somam-se a esses elementos, algumas dificuldades que podem surgir quando da utilização dos computadores no ensino de Matemática.

De fato, alguns pontos negativos do uso de tecnologia no ensino são encontrados. Vejamos o seguinte exemplo. Hunter et al. (1993, apud Giraldo, 2004)[33], observaram um grupo de 17 estudantes durante um curso de pré-cálculo, que foram submetidos a um abordagem exclusivamente estruturada para ser ministrada em laboratório de informática. O *software Derive* foi utilizado e os estudantes não tiveram auxílio de nenhum outro tipo de recurso ou sequer assistiram aulas sobre o tópico abordado durante o período da pesquisa. Antes e depois do curso, Hunter et al. (1993)

[33] HUNTER, M., MONAGHAN, J.D. & ROPER, T. 1993. The effect of computer algebrause on students' algebraic thinking. In R. Sutherland (ed.) Working Papers for ESCR Algebra Seminar, London University, Institute of Education, London, England.

fizeram a seguinte pergunta aos participantes: O que você pode dizer sobre u se $u = v + 3$ e $v = 1$? O resultado foi espantoso: nenhum dos participantes acertou esta questão no pós-teste, inclusive aqueles que haviam acertado no pré-teste. Os autores da pesquisa supracitada atribuem este péssimo resultado ao fato de que os alunos em nenhum momento da pesquisa precisavam substituir valores de variáveis ou fazer cálculos. Eles apenas digitavam no computador e observavam os gráficos aparecerem na tela.

Retomando a reflexão sobre a visualização e as múltiplas representações proporcionadas por meio de um ambiente informatizado, encontramos em Villarreal (1999) um estudo que tem por objetivo caracterizar os processos de pensamento dos estudantes, ao trabalharem com questões matemáticas relacionadas com o conceito de derivada, em um ambiente computacional. Essa autora realizou experimentos de ensino com estudantes do curso de Ciências Biológicas, junto à disciplina Matemática Aplicada, e explorou profundamente a visualização de gráficos, a partir de um sistema computacional, articulando-a com a oralidade. Ela apresenta episódios em que duplas de estudantes utilizavam o programa *Winplot*, um programa que possibilita manipulação simbólica, construção de gráficos e tabelas com facilidade. Os relatos e análises desenvolvidos sugerem que a abordagem visual proporcionada pelo computador não era natural para os alunos, que recorriam, com freqüência, ao lápis & papel para resolver alguns conflitos. Entretanto, as imagens fornecidas pelo computador permitiram questionar suas concepções e, a partir daí, foi possível pensar nos conceitos de maneira mais ampla (Allevato, 2005).

A autora contribuiu no sentido de oferecer descrições do pensamento matemático, das dificuldades dos estudantes e das possibilidades do trabalho coletivo onde seres humanos e computadores interagem. Para Villarreal, o pensamento matemático é permeado e reorganizado pelas mídias utilizadas por meio de um "*pensar com*" o computador, quando da exploração do conceito de retas tangentes e derivadas.

Esta mesma autora caracterizou duas abordagens (algébrica e visual) no processo de pensamento dos estudantes pesquisados. Para esta autora, a abordagem algébrica se caracteriza por:

- Preferência de resoluções analíticas quando resoluções gráficas também são possíveis;
- Dificuldade para estabelecer interpretações gráficas das resoluções analíticas;

- Quando uma resolução gráfica é pedida, há necessidade de uma passagem prévia pelo algébrico;
- Facilidade para formular conjecturas e refutações ou gerar explicações a partir de fórmulas ou equações (Villarreal, 1999, p.337)

Já a abordagem visual se caracteriza, segundo esta mesma autora, por:

- Emprego de informações gráficas para resolver uma questão matemática que também poderia ser abordada algebricamente;
- Dificuldade para estabelecer interpretações algébricas das resoluções gráficas;
- Facilidade para formular conjecturas e refutações ou dar explicações a partir de informações gráficas (Villarreal, 1999, p.339)

Para Villarreal (1999), o processo de visualização teve um papel fundamental, não subordinado à Álgebra, mostrando que os aspectos visuais, algébricos e verbais são complementares no processo de aprendizagem.

Além disso, segundo Allevato (2005), há o fato do computador nos ambientes em que está disponível, poder ser empregado na análise da validade ou mesmo da correção de concepções que os alunos possuem a respeito de determinados conceitos matemáticos uma vez que, na presença do computador, os alunos frequentemente manifestam suas compreensões acerca de determinados conceitos. Entretanto, como ressalva esta autora, esta atitude não é uma iniciativa natural na maioria dos alunos: ela deve ser estimulada por roteiros de atividades que remetam os estudantes a este tipo de reflexão. E aliado a isso, o professor deve estar atento em auxiliar aos seus alunos a interpretar da melhor forma os gráficos projetados na tela do computador.

Villarreal (1999, apud Allevatto, 2005), por exemplo, percebeu a presença, em vários estudantes, da concepção de que uma reta tangente é uma reta que toca a curva em um só ponto. Talvez essa concepção seja a manifestação da presença de uma imagem conceitual demasiadamente simplificada (Tall, 1989), e que pode ser ampliada com o auxilio computacional.

Gravina & Santarosa (1998), afirmam que a abordagem estática das representações matemáticas muitas vezes dificulta a construção do significado, afetando substancialmente a construção de conceitos e proposições. Segundo as autoras, os recursos computacionais oferecem instâncias em que a representação passa a ter caráter dinâmico e refletem nos processos cognitivos. Esse dinamismo é obtido com a possibilidade de fazer manipulações diretas sobre diferentes representações que se apresentam na tela do computador.

Sob esta perspectiva, vamos analisar as diversas representações semióticas e a sua relação com a visualização matemática.

3.2 Representações Matemáticas em uma Perspectiva Semiótica e sua relação com a Visualização

Segundo Machado (2009), Raymond Duval estudou as diversas representações mobilizadas pela visualização matemática. Esta autora ainda acrescenta:

> Na perspectiva de Duval, uma análise do conhecimento matemático, é essencialmente, uma análise do sistema de produção das representações referentes a esse conhecimento. [...]
>
> A maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas, e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações. (p.9)

A diversidade de representações semióticas se apresenta como um papel primordial na compreensão da matemática, nas premissas de Duval. Ele introduz um termo específico para designar os diversos signos utilizados para representar o conhecimento matemático, os Registros de Representação Semiótica (RRS).

Em matemática há uma grande variedade de registros de representações, tais como: os variados sistemas de numeração, as variadas formas de visualização e também argumentação visual, gráficos, diagramas e os esquemas, as escritas algébricas e formais ou mesmo a linguagem natural.

Desta maneira, os signos: 1, 2, 3 são registros de representação semiótica para representar o objeto conceitual “número naturais” e o signo $y = ax + b$ é um registro para representar o objeto conceitual “função afim”; o signo $\triangle$ representa o objeto conceitual “triângulo”. Todos esses registros fazem parte de um Sistema Semiótico de Representações, sendo que o primeiro faz parte de um Sistema Numérico; o segundo é constituído dentro de um Sistema Algébrico; e o último é um registro do Sistema Figural.

Apesar da grande variedade de representações semióticas em matemática, Duval (2009) as organizou em quatro tipos muitos diferentes de registros, como mostra a tabela 1, a seguir:

	Representação Discursiva	**Representação Não Discursiva**
Registros Multifuncionais: Os tratamentos não são algoritmizáveis	**Língua natural** Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	**Figuras geométricas planas ou em perspectivas** (configurações em dimensão 0, 1 , 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
Registros Monofuncionais: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	**Sistemas de escritas** • numéricas (binária, decimal, fracionária ...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). • Cálculo	**Gráficos cartesianos** • mudanças de sistemas de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Tabela 1: Classificação dos diferentes registros (Duval, 2009, p.14)

Pela tabela acima, pode-se observar que os diversos registros de representação não possuem a mesma natureza. Os registros monofuncionais foram desenvolvidos com finalidades específicas de tratamento – noção que será detalhada mais adiante – e os registros plurifuncionais foram desenvolvidos como a língua natural. (Duval, 2009)

Para este autor, a articulação e transformação dos registros de representação desempenham um papel fundamental nas atividades matemáticas. Assim, para Duval (2009, p.14): “A originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação”.

Segundo Duval, existem dois tipos de transformações que podem ocorrer ao se considerar os diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático: os ***tratamentos***, que são *transformações* que acontecem no interior de um mesmo registro, por exemplo, a resolução de uma equação ou um sistema de equações; e as ***conversões*** que são transformações em que ocorre mudança de registro mantendo-se em referência o mesmo objeto, por exemplo, representar graficamente uma função dada em sua forma algébrica.

Faz-se, então, uma distinção entre o papel da conversão do ponto de vista matemático e do ponto de vista cognitivo. Do ponto de vista matemático, a conversão consiste apenas na mudança para o registro mais econômico, não tendo papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, sendo tratada como atividade lateral. Entretanto, do ponto de vista cognitivo, é a conversão que tem papel fundamental e conduz a mecanismos subjacentes da compreensão.

No processo de aprendizagem, não se deve confundir um objeto com a sua representação. No entanto, ao contrário de outros domínios do saber, o acesso aos objetos matemáticos só é possível através do uso de representações semióticas. Assim, o **paradoxo da compreensão** em matemática consiste em não se poder confundir um objeto e sua representação mesmo que só seja possível chegar ao primeiro por meio do segundo.

Nesse sentido, Duval (2009) atribui à atividade de conversão a responsabilidade pelos mecanismos que conduzem os alunos à compreensão em Matemática, haja vista que é por meio desta atividade que se torna possível estabelecer a distinção entre o objeto matemático e sua representação. Em geral, acredita-se que a compreensão de um dado objeto deve ser puramente mental, independendo de suas representações semióticas. Porém, Duval defende que a compreensão em matemática está intimamente ligada ao fato de existir mais de uma representação para um objeto e que a articulação entre elas – que ocorre durante as conversões – é uma condição de acesso à compreensão de um determinado conceito. Então, para Duval, dispor de pelo menos dois registros de representação é a única possibilidade que se dispõe para não se confundir o conteúdo de uma representação com o objeto representado.

No ensino da matemática, da escola básica ao superior, encontramos uma grande ênfase no registro algébrico. No caso específico do Cálculo, existe uma tendência de apresentar o conceito – objeto matemático – na língua natural e em registro algébrico-formal. A partir daí, há uma grande ênfase de tratamento no registro algébrico-formal em quase todos os tópicos relativos ao conteúdo específico. Em alguns casos são feitas representações no registro gráfico, com conversões normalmente realizadas num único sentido: do registro algébrico-formal para o registro gráfico.

Neste sentido, Duval afirma:

> A natureza cognitiva, própria da atividade de conversão, aparece dois tipos de fenômenos que se podem observar a respeito de qualquer operação de conversão: a) **as variações de congruência e não congruência**; b) **a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão**. [...] Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela idéia de que o tratamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos

> propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência. Infelizmente esses não são os mais comuns. (Duval, 2009, pp.19-20, grifos nossos)

Assim, a conversão de registros de representação semiótica se depara com algumas dificuldades, como o fenômeno de não congruência na transformação do tipo conversão, pois os alunos não reconhecem o mesmo objeto por meio de duas representações diferentes.

Entretanto, segundo Moretti (2009), encontra-se nos escritos de Duval uma preocupação grande para transformar objetos de pesquisa em objetos de ensino. Sob esta perspectiva, Duval escreveu a respeito das representações semióticas e da noção de congruência e não congruência semântica, com a intenção de transpor parte de suas idéias sobre o esboço de curvas no caso das retas para outras curvas, por exemplo. E, como afirma Moretti (ibid., p.149), o esboço de curvas é um tema muito importante nas atividades matemáticas e toma bastante espaço nas atividades de ensino e também nos livros didáticos; bem como neste presente estudo.

Para Moretti (2009),

> [...] apesar da importância que se é dada, o esboço de curvas ainda é tratado quase que exclusivamente por meio da junção de pontos localizados no plano cartesiano, pontos obtidos por intermédio de substituições na expressão matemática correspondente. Para uma nova equação, mesmo pertencendo à mesma família de curvas, todo o procedimento ponto a ponto é repetido, sem que, na maioria das vezes, qualquer relação seja feita com alguma outra curva. (p.150)

Duval (1988, segundo Moretti, 2009)[34] classifica o estudo das curvas em três procedimentos, a saber: (1) O procedimento por pontos; (2) O procedimento de extensão de um traçado; (3) O procedimento de interpretação global das propriedades figurais.

O procedimento (1) é o mais comum em livros didáticos: obtêm-se as coordenadas dos pontos por meio da substituição na expressão algébrica ou com base em tabela de valores da função e são localizados num sistema cartesiano. No entanto, segundo Moretti (2009), "não há ligação entre o gráfico e a expressão algébrica da função correspondente" (p.151). E este mesmo autor, ainda acrescenta:

> Diversos problemas podem surgir dessa forma de proceder, pelo fato de que se há congruência entre um par ordenado e sua representação

[34] DUVAL, R. "Graphiques et équacions: L'articulation de deux registres". Annales de Didatique et Sciences de Cognitives, vol.1, pp. 235-253.

cartesiana, o mesmo não se pode dizer de um conjunto de pontos no plano cartesiano e uma regra matemática a ele equivalente.

O procedimento (2) de extensão do traçado do gráfico corresponde à união dos pontos por traços, delineando o gráfico.

Contrariamente ao (1), o procedimento (3), o conjunto traçado/eixo forma uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica. Segundo Moretti (ibid.), este procedimento permite que se identifiquem as modificações possíveis conjuntamente na imagem e na expressão algébrica. Como diz Duval, "nesse tipo de tratamento não estamos em presença da associação ponto ↔ um par de números, mas a associação variável visual da representação ↔ unidade significativa da escrita algébrica" (Duval, 1988, apud Moretti, 2009).

Para ter uma melhor compreensão das palavras de Duval com relação ao esboço (3) de esboço de curvas para o caso das funções do tipo $y = ax + b$. Vejamos a tabela 2 a seguir:

Variáveis Visuais	Valores	Unidades Simbólicas correspondentes
Sentido da inclinação	Ascendente Descendente	Coeficiente > 0 ausência do símbolo – Coeficiente < 0 presença do símbolo –
Ângulo com os eixos	Ângulo simétrico Ângulo menor que 45º Ângulo maior que 45º	Coef. Var. = 1 Coef. Var. >1 Coef. Var.<1
Posição sobre o eixo	Corta acima Corta abaixo Corta na origem	Acrescenta uma constante $+$ Subtrai-se uma constante $-$ Não tem correção aditiva

Tabela 2: Relação entre variáveis visuais e unidade simbólica (Duval, 1988, apud Morreti, 2009)

De acordo com Duval (2009), a interpretação global das propriedades figurais é cognitivamente relevante para a compreensão em Matemática e distinta das outras formas de procedimento, em razão do procedimento de interpretação global permitir a apreensão dos valores visuais da figura-forma (esboço de traçados retos ou curvos), bem como sua modificação. Enquanto que os outros dois procedimentos permitem apenas a leitura pontual dos gráficos, sendo que, o sujeito fica preso à figura-fundo (campo quadriculado determinado por uma orientação bidimensional).

Neste procedimento, lança-se mão do que Duval chama de variáveis visuais, procurando-se o significado dos coeficientes numéricos que figuram na representação algébrica do objeto matemático, e o papel que elas jogam na representação gráfica. Entretanto, como nos alerta Moretti (2009, p.152),

> Para o caso de outras funções, mesmo nas polinomiais, essa correspondência entre coeficientes, a não ser pelo coeficiente independente no caso das polinomiais, não é tão evidente assim. Como entender então essa idéia: manter viva a relação variável usual da representação-unidade significativa da escrita algébrica para outros tipos de funções?
> Sem o uso da noção de limite e derivada, não há uma resposta para a questão, pelo simples fato de que, em geral, é preciso conhecer de antemão a forma da curva, para depois, então, poder esboçá-la segundo o modo 3.

No entanto, no caso da função quadrática, por meio de translações, podemos contribuir para que o esboço de curva mantenha-se bastante próximo do procedimento que permite estabelecer correspondência entre o gráfico e a expressão algébrica. Como ilustração do procedimento de interpretação tomemos o exemplo da parábola representativa da função $y = x^2 - 4x + 3$ que pode ser obtida, depois de dois tratamentos no interior do registro algébrico, pelo deslocamento do gráfico de $y = x^2$ da seguinte forma.

$$\begin{aligned} y = x^2 - 4x + 3 &\Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 3 + 1 - 1 \\ &\Leftrightarrow y = (x^2 - 4x + 4) - 1 \\ &\Leftrightarrow y = (x-2)^2 - 1 \end{aligned}$$

Note que as equações $y = x^2 - 4x + 3$ e $y = (x-2)^2 - 1$ representam a mesma parábola. No entanto, a segunda representação evidencia que o gráfico desta parábola pode ser obtido a partir do gráfico de $y = x^2$ por meio de duas translações: uma horizontal a direita de duas unidades e uma vertical de uma unidade para baixo (ver figura 1).

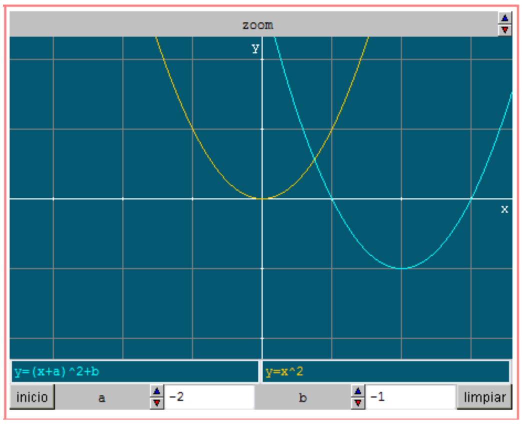


Figura 1: Translações no gráfico da parábola (horizontal e vertical)

Assim a translação, segundo Moretti (2009), é uma transformação que pode ser utilizada no esboço de muitas outras curvas, como por exemplo, funções do 1ª grau e funções trigonométricas. Além de uma grande economia da atividade, uma vez que grande parte do trabalho está baseada na translação de uma curva cuja forma já é conhecida, esse tipo de transformação contribui de forma significativa para que o aluno perceba o traçado/eixo como uma imagem que representa um objeto descrito por uma expressão algébrica muito próxima da perspectiva sugerida pela teoria das representações semióticas, preconizadas por Duval. Mais que isso, o aluno poderá ir se libertando do procedimento de esboço exclusivamente por pontos, fazendo-o visualizar e perceber certas variações ou lugares na curva que são, em geral, importantes na interpretação dos fenômenos que ela retrata. Assim, a translação combinada com noções de simetria e homotetia, podem elevar bastante a capacidade do aluno no traçado de gráficos.

A importância das múltiplas representações na construção dos conceitos é também ressaltada por Gravina & Santa Rosa (1998). Estas autoras explicam que os objetos matemáticos podem ser representados em diferentes formas. Gravina & Santa Rosa (ibid., p.11-12) apresentam o seguinte exemplo,

> [...] a uma função pode-se associar uma representação gráfica que evidencia variações qualitativas, [...] ou ainda um fenômeno cujo comportamento é dado pela função. Ou ainda, pode-se estudar família de funções sob o ponto de vista de operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados. Os programas que fazem 'traduções' entre diferentes sistemas de representação apresentam-se como potentes recursos pedagógicos, principalmente porque o aluno pode concentrar-se em interpretar o efeito de suas ações frente as diferentes representações, até de forma simultânea [...].

De fato, o uso de um ambiente dinâmico e interativo (no nosso caso, os *Mathlets)* fornece naturalmente um terreno ideal para a visualização e as múltiplas representações, com base na aplicação de transformações (como translações, homotetias e simetrias) em gráficos de funções. A partir da variação de parâmetros numéricos por meio do simples manuseio do mouse pelo usuário, os efeitos dessas transformações podem ser visualizados em tempo real, tanto nas mudanças de aspecto gráfico quanto nas mudanças dos valores numéricos da função.

Assim, após tudo que foi posto até aqui, acreditamos que o emprego das diferentes representações de um determinado objeto matemático deve fazer parte dos recursos didáticos trabalhados normalmente por professores e, portanto, quando o aluno é capaz de coordenar essas representações dentro de um determinado registro ou entre os registros, dizemos que a aprendizagem se torna mais significativa; tornando a estrutura cognitiva do aluno, associada a um dado conceito, mais rica.

3.3 Imagem de Conceito e Definição de Conceito

A teoria de imagem de conceito e definição de conceito foi desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner no célebre artigo *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity* (Tall e Vinner, 1981), hoje, bastante difundido na comunidade de educação matemática internacional.

Segundo Tall & Vinner (1981), ***imagem de conceito*** é definida como:

> [...] a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (p.152, tradução nossa)

Para Giraldo (2004, p.8): “A imagem de conceito compõe de atributos de diferentes naturezas e graus de generalidade, e que podem ser representações visuais, bem como coleções de impressões ou experiências”.

Este mesmo autor acrescenta mais adiante:

> A imagem de conceito de função real de um indivíduo, por exemplo, pode incluir elementos, tais como formas de representação (gráficos, fórmulas, tabelas, diagramas); elementos da definição (como domínio, contradomínio) propriedades especificas (como bijetividade, linearidade, monotonicidade); exemplos particulares (como certas funções familiares); possibilidades de manipulação (como operações, inversão); e assim por diante. (p.9)

Para este autor, incluem-se na imagem de conceito de um indivíduo todos os atributos associados ao conceito em questão. Entretanto, a imagem de conceito de um indivíduo não é uma estrutura estática: ela sofre transformações de acordo com o desenvolvimento cognitivo do sujeito, podendo ter atributos incluídos, excluídos ou modificados no decorrer de suas experiências cognitivas.

Já a definição de conceito é um problema significativamente diferente, segundo Tall & Vinner (1981). Para estes autores, a ***definição do conceito*** é um arranjo de palavras usadas para especificar este conceito. Esta sentença pode tanto ser simplesmente decorada como aprendida de forma mais significativa pelo estudante, podendo, inclusive, ser uma construção pessoal do próprio aluno, por meio de uma adaptação de palavras usadas por ele para explicar o conceito segundo a sua compreensão, utilizando para isso de sua imagem de conceito. Neste caso, uma definição de conceito pessoal pode diferir da definição formal[35] aceita pela comunidade da área de estudo. Acrescentam, ainda, que para cada individuo uma definição de conceito pode gerar sua própria imagem de conceito, chamada imagem de definição de conceito, sendo essa, uma parte da imagem de conceito.

Para Vinner (1991), adquirir um conceito significa formar uma imagem de conceito para este; entender significa ter imagem de conceito. Afirma, ainda, o autor supracitado que muitos conceitos do dia a dia, como casa, gato etc., podem ser adquiridos sem qualquer envolvimento de definições. Por outro lado, alguns conceitos, mesmo da vida diária, podem ser introduzidos por definições. Por exemplo, a palavra "floresta" pode ser apresentada para uma criança como "como um extenso e denso desenvolvimento de árvores e arbustos juntos". Definições como essas, ajudam a formar uma imagem de conceito; entretanto essas definições tornam-se dispensáveis, se tornando inativas ou até esquecidas quando a imagem é formada. (Vinner, ibid.).

Por outro lado, Vinner (1991) considera que em contextos técnicos, definições têm papéis extremamente importantes. Não somente porque elas ajudam a formar uma imagem de conceito, mas porque frequentemente tem um papel crucial na tarefa cognitiva, ou seja, na organização formal e encadeamento das idéias, essenciais para a

[35] Entendemos aqui por definição formal aquela largamente aceita pela comunidade acadêmica matemática em geral, em um dado contexto histórico e social.

compreensão adequada dos conteúdos, além de ter o potencial de resguardar o estudante de qualquer armadilha[36].

Além disso, segundo Giraldo (2004)

> [...] esta questão reflete, sobretudo, o conflito entre a estrutura da matemática (concebida por matemáticos profissionais) e os processos de aquisição de conceito e, como conseqüência, de produção de conhecimento matemático. (p.12)

Afinal, como nos observa Vinner (1991), a comunidade matemática aceita consensualmente o fato de que a matemática é uma teoria dedutiva e, como tal, começa com noções primárias e axiomas a partir dos quais teoremas e proposições são estabelecidos. Segundo, este mesmo autor, esta forma de organização não reflete, necessariamente, o processo por meio da qual a matemática foi criada, mas se aproxima da maneira pela qual a matemática é apresentada em livros textos de matemática superior e em periódicos matemáticos.

Para este autor, a apresentação e a organização de muitos livros texto e salas de aula de matemática são parcialmente fundamentadas nas seguintes hipóteses:

1. Conceitos adquiridos, principalmente, por meio de suas definições;

2. Estudantes usarão definições para resolver problemas e para provar teoremas quando necessário a partir do ponto de vista matemático.

3. Definições devem ser mínimas. (Definições não devem conter partes que podem ser matematicamente deduzidas a partir de outras partes das definições. Por exemplo, se alguém decide definir um retângulo na geometria euclidiana através de seus ângulos é preferível defini-lo como um quadrilátero com 3 ângulos retos e não como um quadrilátero de 4 ângulos. Isto se justificaria pelo simples fato que na geometria euclidiana, se um quadrilátero tem 3 ângulos retos, pode-se provar que o quarto ângulo também será reto).

4. É desejável que definições sejam elegantes.

[36] Para ilustrar alguma "armadilha", Vinner (1991) cria uma situação imaginária sobre alguém pedindo ao leitor do seu artigo em voga, que respondesse a uma questão que envolve conceitos de valor máximo de uma função num intervalo fechado qualquer. "Imagine que pedissem, para você para encontrar o valor máximo de uma função em um intervalo fechado e você se lembra de um gráfico que corresponde a um máximo local e você tenta derivar a função dada para encontrar os zeros da derivada, então a definição explícita de um valor máximo em um intervalo poderia ajudar você a considerar outras possibilidades diferentes de máximos locais. Algumas vezes, isso pode prevenir contra erros". (Vinner, 1991, p.69, tradução nossa).

5. Definições são arbitrárias. (Definir em matemática se reduz a atribuir nomes a entidades, conforme o gosto do autor).

Assim, ao desenvolverem esta teoria, "Tall & Vinner questionam e criticam este modelo de abordagem, e esta teoria de imagens de conceito pode ser pensada como uma reação ao modelo de pedagogia em que a organização dos conteúdos herda a estrutura formal da teoria matemática" (Giraldo, 2004, p.12-13).

Neste contexto, Giraldo (2004), ao relacionar o objetivo de uma abordagem pedagógica sobre um conceito matemático e a teoria desenvolvida por Tall & Vinner (1981), acrescenta:

> [...] esta teoria sugere que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes. [...] (p.10)

3.3.1 Fatores de Conflito Potencial e Fatores de Conflito Cognitivo

Tall & Vinner (1981) assinalam que os atributos contidos na imagem de conceito não são essencialmente sempre coerentes entre si, ou seja, a imagem de conceito não é sempre consistente em todas as fases de seu desenvolvimento, o que pode gerar conflito ou confusão real. Para ilustrar os prováveis fatores de conflito pessoal, os autores citam o seguinte exemplo: o conceito da subtração é normalmente visto como um processo que envolve números inteiros positivos. Neste estágio as crianças observam que a subtração de um número sempre gera um número menor. Desta forma, para esta criança é parte da sua imagem de conceito e pode causar problemas quando ela se deparar com a subtração de números negativos. Para estes autores, todos os atributos mentais, sejam eles conscientes ou inconscientes, associados a um conceito, devem ser incluídos na imagem de conceito porque contêm as sementes de conflitos futuros.

Para Tall & Vinner (1981) quando uma parte da imagem de conceito ou definição de conceito entra em conflito com outra parte desse conceito, chamamos ***fator de conflito potencial***. Os autores definem ainda ***imagem de conceito evocada*** como sendo a porção da imagem que é ativada em um momento particular, que pode ser a partir de qualquer estímulo externo (como por exemplo, resolver um problema, responder ou formular uma questão, identificar uma propriedade e etc.). Quando um fator de conflito potencial é evocado (ou seja, partes conflitantes da imagem de conceito são simultaneamente ativadas) este passa a ser denominado de ***fator de conflito cognitivo***.

Para Tall & Vinner (1981), esse fatores de conflito potenciais não precisam gerar, necessariamente, um conflito cognitivo. Estes autores elucidam tal afirmativa a partir do seguinte exemplo, a saber: a definição de um número complexo $x+i\cdot y$ como um par ordenado de número reais (x,y) e a identificação de $x+i\cdot 0=(x,0)$ como um número x é um fator de conflito potencial no conceito de número complexos, porque inclui um conflito potencial com teoria de conjuntos em que o número x é diferente do par ordenado $(x,0)$. Com efeito, em um questionário aplicado Tall (1977, apud Tall & Vinner, 1981) relata:

> [...] os alunos consideravam um número $\sqrt{2}$ como sendo um número complexo e ainda muitos destes números reais definidos como 'números complexos com a parte imaginária igual a zero'. Assim $\sqrt{2}$ era considerado real e $\sqrt{2}+i\cdot 0$, complexo. Eram convenientemente consideradas entidades distintas ou iguais, dependendo das circunstâncias, sem causar qualquer conflito cognitivo. Apenas tornavam-se fatores de conflito cognitivo quando evocados simultaneamente. (p.3-4, tradução nossa)

A atualização de fatores de conflito potencial como fatores de conflito cognitivo por se constituir num obstáculo para o desenvolvimento da imagem de conceito. Por outro lado, fatores de conflito potencial podem jamais ser evocados, permanecendo como porções inativas da imagem de conceito, sem nunca serem percebidos pelo sujeito ou provocando, em certos casos por um vago sentimento de insegurança. Tall & Vinner ainda sugerem ser esta uma séria causa de problemas de aprendizagem em matemática, quando um estudante tem a sensação de que tem algo errado, sem ao menos conseguir identificar onde está o erro ou a origem da dificuldade. No entanto, estes mesmos autores, ainda, afirmam que, embora estes conflitos possam gerar dificuldades quando ativados, é importante que esses fatores de conflito potenciais se transformem em fatores de conflito cognitivo, para que possam assim ser conscientemente identificados e desta forma tratados.

Para Tall & Vinner (1981, apud Giraldo 2004), um tipo de fator de conflito potencial mais sério é aquele que envolve um conflito diretamente com a definição de conceito; podendo impedir seriamente a aprendizagem de uma teoria formal, pois o estudante se torna seguro em suas imagens interpretações restritas da teoria e passa a considerar o formalismo como um aspecto burocrático, inútil ou supérfluo.

3.3.2 Imagem de Conceito e Definição de Conceito dos estudantes durante atividades de Resolução de Problemas

Retomemos as concepções de Vinner (1991), segundo as quais quando uma tarefa cognitiva é colocada para um estudante, é esperado, por professores, que a imagem conceitual e a definição de conceito sejam ativados. Para este autor, tanto os professores da escola secundária quanto os do *college*[37] esperam que os processos intelectuais envolvidos no desempenho de uma dada tarefa intelectual sejam esquematicamente expressos por uma das três figuras a seguir (as figuras, segundo este autor, representam somente o aspecto da imagem de conceito e da definição de conceito envolvida no processo). As setas nas figuras representam maneiras diferentes pelas quais um sistema cognitivo deveria funcionar.

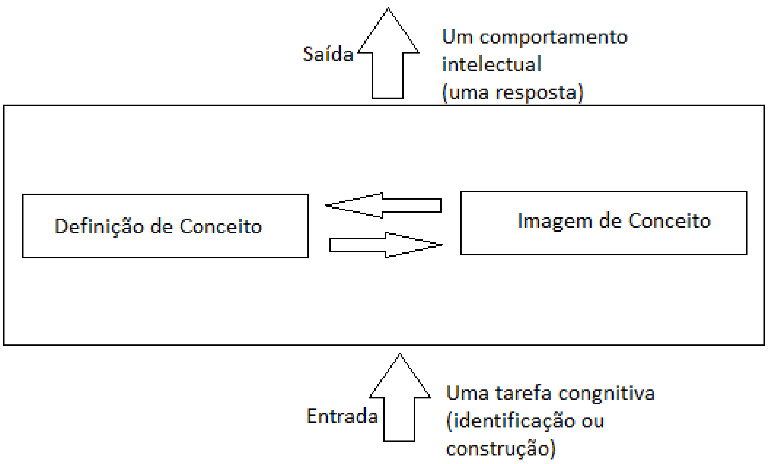


Figura 2: Intercâmbio entre definição e imagem (Vinner, 1991, p.72, tradução nossa)

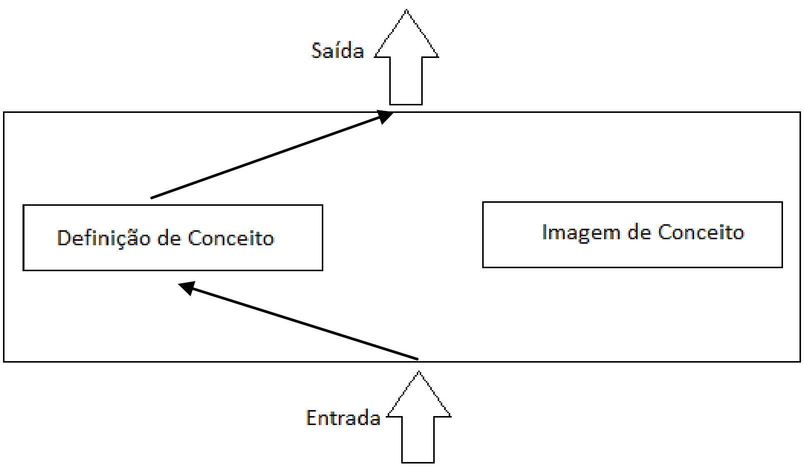


Figura 3: Dedução puramente formal (Vinner, ibid.,72, tradução nossa)

[37] Nome dado às escolas de nível superior na Inglaterra.

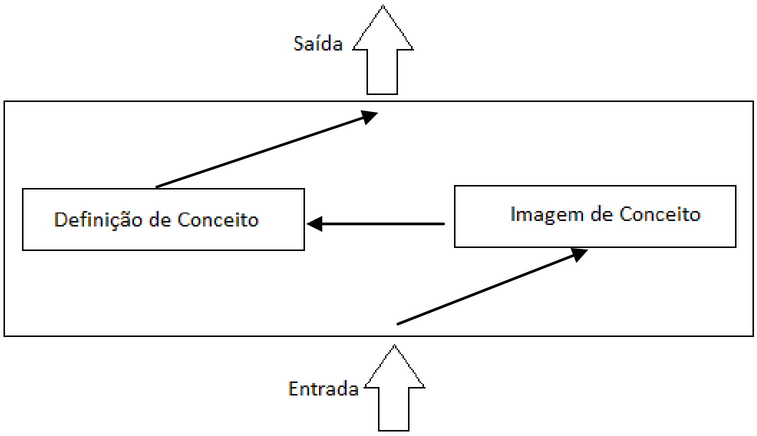


Figura 4: Dedução seguindo pensamento intuitivo (Vinner, 1991, p.72, tradução nossa)

Para Vinner, uma característica comum a todos os processos ilustrados nas figuras 3 – 5, é o seguinte: não importa como o sistema de associação de um estudante reaja quando um problema é colocado em um contexto técnico, não se espera que este formule sua solução antes de consultar a definição conceitual. Isso, segundo este autor, seria naturalmente o processo desejável, mas infelizmente na prática é diferente. É difícil conduzir um sistema cognitivo de modo que ela aja contra a sua natureza e induzi-lo a consultar definições quando constituindo uma imagem conceitual ou uma atividade cognitiva. Portanto, um modelo mais apropriado para o processo que realmente ocorre na prática, segundo este autor, é o que nos sugere Vinner (1991) na figura 5, a seguir:

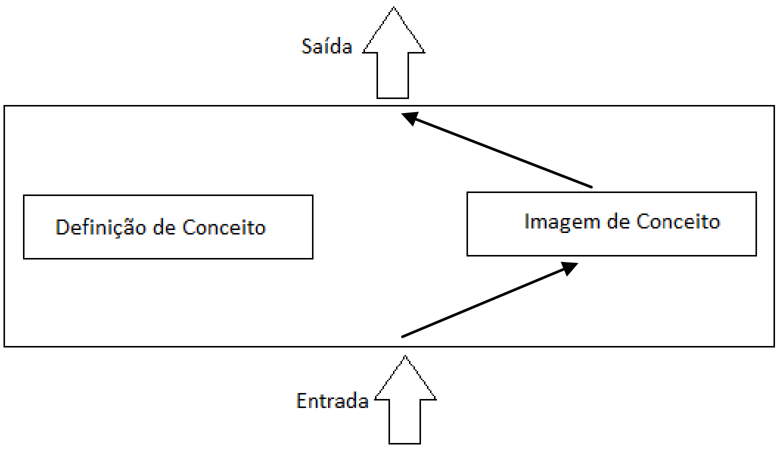


Figura 5: Resposta Intuitiva (Vinner, ibid., p.73, tradução nossa)

Assim, na figura anterior, a célula[38] da definição conceitual, mesmo se não vazia, não é consultada durante o processo de resolução de problemas. Para o autor, os hábitos de pensamento cotidianos se sobrepõem e o respondente está inconsciente da necessidade de consultar a definição formal; não precisando dizer que, na maioria dos casos, a referência à célula da imagem conceito será bem sucedida. Desta forma, este fato não encoraja as pessoas a se referirem à célula da definição conceitual. Apenas em problemas não-rotineiros, nos quais as imagens conceituais incompletas poderiam ser ambíguas, poderia encorajar as pessoas a agirem de forma diferente. Mas, para Vinner, tais problemas são raros e, quando dados aos estudantes, são tidos como injustos.

Diante de tal contexto, Vinner (1991) embasado nos dados levantados em sua investigação sobre a imagem de conceito e definição de conceito de 147 estudantes que estudaram matemática em nível avançado relativo ao conceito de função, expõem a seguinte afirmativa: a maioria dos estudantes não usa as definições quando trabalham em atividades cognitivas num contexto técnico, por que a maior parte dos cursos na *high school*[39] e *colleges* não desenvolve nos estudantes, de ciências que não estão estudando matemática, os hábitos de pensamento necessários para os contextos técnicos. Em síntese, os estudantes continuam usando os hábitos de pensamento cotidianos também em contextos técnicos. ("Felizmente, para os estudantes, isso não os impede de passar nos exames", acrescenta Vinner (1991)).

Em suas conclusões, o autor recomenda duas regras didáticas relevantes para o problema levantado em sua pesquisa:

(1) Evitar conflitos cognitivos[40] desnecessários com os estudantes,

(2) Iniciar conflitos cognitivos com os estudantes quando estes conflitos forem necessários, para encorajar os estudantes a um estágio intelectual mais alto (Isso deveria ser feito somente quando a chance de alcançar um estágio intelectual mais alto for razoavelmente grande).

Mais adiante Vinner (ibid.) afirma que:

---

[38] Vinner (1991) usa o termo "célula" para se referir à imagem conceito e a definição de conceito, e para evitar confusão, ressalva que não está se referindo ao termo célula da Biologia.

[39] Escola de nível secundária na Inglaterra.

[40] Embora não seja feita aqui qualquer referência explícita às noções de fator de conflito potencial ou fator de conflito cognitivo, estabelecidas em Tall & Vinner (1981), no contexto do artigo, Vinner se refere a aspectos conflitantes na imagem de conceito. (Giraldo, 2004).

> [...] uma das metas do ensino de matemática deveria ser mudar os hábitos de pensamento do modo cotidiano para o modo técnico. Isto não pode ser feito em um período curto e não pode ser bem sucedido com todo mundo. Nossa crença é que os conceitos matemáticos, se sua natureza permite, deveriam ser adquiridos no modo cotidiano de formação de conceito e não no modo técnico. Deve-se começar com vários exemplos e contra-exemplos através dos quais a imagem conceitual deverá ser formada.
> Isto não significa que a definição formal não deve ser introduzida ao estudante. Entretanto, o professor ou o livro texto deveria estar consciente do efeito que tal introdução pode ter no pensamento do estudante. (p.80, tradução nossa)

Entretanto, segundo este mesmo autor, se os estudantes forem candidatos a matemática avançada, então, eles devem ser conduzidos a usar a definição como critério último em várias atividades matemáticas. Vinner, ainda, sugere que se deve fazer mais do que introduzir a definição; indicando os conflitos entre imagem conceitual e a definição formal e discutir profundamente os exemplos estranhos.

De forma semelhante, Giraldo (2004) afirma, em seu relatório final de doutorado, que um estudante em matemática avançada deve ter clareza de que a definição de um conceito é o critério decisivo em um desenvolvimento teórico que o envolva. Entretanto, para que este objetivo seja atingido, é necessário que no estágio inicial o estudante trave contato com mais do que simplesmente a definição formal. E ainda, corroborando com Tall (1992) ressalta que a "própria idéia de definir um conceito no sentido matemático – em oposição a descrevê-lo[41] – é particularmente difícil de compreender". E Giraldo (ibid.) conclui mais adiante que para que uma definição de conceito seja provida de sentido deve haver uma imagem de pré-conceito pré-existente. Segundo Vinner (1983, p.294, apud Giraldo, 2004), somente produzimos definições de conceito como resultado de experiências prévias com o conceito, ou seja, nossas definições de conceito são descrições de nossas imagens de conceito.

Giraldo (2004) aponta que:

> podemos tomar contato com a definição de um conceito antes de ter qualquer experiência com o mesmo, mas a experiência é necessária para a construção de uma definição de conceito conectada à imagem de

[41] Usaremos o termo descrição de conceito (ou simplesmente descrição) para qualquer referência a um conceito matemático, feita em um contexto pedagógico, que não esgote o conceito a que se refere, ou seja, que guarde limitações em relação a este, no sentido em que evidencie certos aspectos e omita outros. Assim, descrições podem ser referências verbais ou orais, sob a forma de linguagem corrente, simbologia, notação matemática, esboços, diagramas, esquemas, e assim por diante. (Giraldo, 2004, p.72)

> conceito, à qual recorramos efetivamente ao nos referirmos ao conceito. (p.11)

3.3.3 Raízes Cognitivas

Outros autores também têm se preocupado com a maneira por meio de concepções prévias de estudantes atuam na construção de uma nova teoria, ou na aquisição de um novo conceito. Cornu (1981, apud Giraldo, 2004)[42], por exemplo, afirma que modelos individuais de conceitos matemáticos são elaborados a partir de modelos espontâneos, ou seja, modelos existentes antes da aprendizagem do conceito matemático e que são gerados, por exemplo, na experiência pessoal diária.

Como já citamos na seção anterior, um modelo pedagógico bastante comum em ensino superior de matemática é aquele em que a apresentação dos conteúdos é organizada nos moldes de sua estrutura fundamentalmente formal e dedutiva, seguindo a seqüência: definições, teoremas, corolários (aplicações), ou seja, trata-se da tão conhecida fundamentação matemática. Desta forma, os conceitos são introduzidos a partir de sua definição formal. Este modelo encerra a hipótese de que a definição de conceito molda a imagem de conceito; entretanto a teoria sugerida por Tall & Vinner sugere exatamente o contrário. Seguir este modelo pode ser pedagogicamente inapropriado, já que o ensino deveria levar em consideração que os processos psicológicos comuns de aquisição de conceito são um tanto diferentes. No entanto, o comportamento esperado pela maioria dos professores, em qualquer nível de ensino, é que os alunos sempre recorram à definição de conceito antes de dar a resposta, mas não é isso que se observa na maioria das vezes. A teoria de imagens de conceito sinaliza que a compreensão adequada da definição formal demanda uma imagem de conceito suficientemente rica e bem formada. Por outro lado, uma imagem de conceito não suficientemente desenvolvida pode levar o estudante a não compreender o papel da definição formal na estrutura teórica de toda a matemática, mesmo que a conheça e seja capaz de reproduzi-la com sucesso quando solicitado.

Neste caso, conforme ressalva Giraldo e Escarlate (2007):

> [...] a tendência será que, em lugar de recorrer à definição formal quando necessário, o estudante recorra, em geral de maneira confusa, a outros atributos contidos na imagem de conceito (como por exemplo,

[42] CORNU, B. 1981. Apprentissage de la Notion de Limite: Conceptions et Obstacles. Thèse de doctorat de troisième cycle, L'Université Scientifique et Medicale de Grenoble.

> analogias inadequadas com a linguagem cotidiana, ou propriedades válidas em outros contextos matemáticos que não se aplicam ao contexto em questão) (p.3).

Para Giraldo e Escarlate, este processo pode causar grandes obstáculos à aprendizagem, particularmente no caso de matemática avançada; como comprovam estudos realizados com este objetivo (veja, por exemplo, CORNU, 1991[43]; VINNER, 1991; TALL, 1992; SIERPINSKA, 1992).

Por exemplo, Sierpinska (1988, apud Tall, 1992) ao discutir o conceito de função comenta que:

> A mais fundamental concepção de função é a de uma relação entre magnitudes variáveis. Se isto não é desenvolvido, representações com equações e gráficos perdem seu significado e se tornam isoladas uma das outras. Introduzir funções para jovens estudantes pela sua definição moderna elaborada é um erro didático – uma inversão anti-didática. (p.572, tradução nossa)

Com efeito, entendemos que é importante travar uma discussão de qual estratégia utilizar na abordagem inicial de um determinado conceito. Essa estratégia pedagógica não deve ser nem apenas centrada na definição, como nos apontou Vinner (ibid.), uma vez que, dessa forma, a definição pode não gerar uma imagem de conceito e por isso perder o sentido para o aluno; nem ser demais simplificada, sob pena de implicar em uma imagem de conceito empobrecida (Giraldo, 2004).

Nesse contexto, Tall coloca a questão de como introduzir e motivar novos conceitos matemáticos sem pecar pela simplificação excessiva nem pelo formalismo excessivo. Como uma primeira tentativa para resolver esta questão, Tall (1989) define ***raiz cognitiva*** como “um conceito-âncora que o estudante acha fácil de compreender, e que, ainda sim, forma uma base a partir da qual a teoria pode ser construída”.

Giraldo (2004) ressalta duas características especiais a que uma raiz cognitiva deve atender: (i) fazer sentido (ao menos potencialmente) para o estudante no estágio em questão; (ii) permitir expansões cognitivas para desenvolvimentos teóricos posteriores.

[43] CORNU, B. 1991. Limits. In D.O. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, Kluwer, Dordrecht, pp. 153-166.

Com relação ao conceito de derivada, por exemplo, a raiz cognitiva proposta por Tall (1989) é a noção de retidão local, que se baseia no fato de que à percepção humana um objeto curvo parece reto quando olhada de muito perto.

Segundo Tall (1992, apud Giraldo, 2004), estas raízes cognitivas não são fáceis de encontrar, pois exigem uma combinação de pesquisa empírica (para encontrar o que é apropriado ao estudante no estágio atual do desenvolvimento) e de conhecimento matemático (para estar certo da relevância matemática em longo prazo).

4. CONTEXTO DO ESTUDO, PLANEJAMENTO DA INTERVENÇÃO E OPÇÕES METODOLÓGICAS

Neste capítulo vamos apresentar o contexto do estudo, o planejamento da intervenção e as nossas opções metodológicas. Importante lembrar que o objetivo deste trabalho foi investigar uma proposta de intervenção, bem como avaliar os resultados qualitativos (sob a perspectiva dos alunos) de uma disciplina de Introdução ao Cálculo (IC), concomitante ao curso de Cálculo. Entretanto, é importante ressaltar que não acompanhamos o curso de Cálculo, pois o foco deste estudo foi investigar a disciplina de IC.

Nestas circunstâncias, optamos por utilizar duas metodologias organizadas da seguinte forma:

- Para a aplicação da intervenção – Resolução de problemas em um ambiente computacional;
- Para coleta dos dados e análise dos resultados da pesquisa - Estudo de caso de observação.

Em síntese, a primeira metodologia empregou uma abordagem via resolução de problemas em um ambiente computacional, visando planejar e implementar um roteiro de atividades propostas em uma turma de alunos recém-egressos do ensino básico. Já a segunda metodologia empregada foi embasada em uma abordagem qualitativa, objetivando avaliar os resultados da pesquisa em si, por meio do possível enriquecimento das imagens de conceito dos estudantes envolvidos nesta investigação. Não temos como meta quantificar eventos usando recursos da estatística para análise dos dados, mas sim a aquisição e análise de dados descritivos do processo mediante realizações de atividades propostas e o contato direto com o objeto de estudo.

4.1 O Contexto e os Participantes da Pesquisa

Como já nos reportamos na introdução deste trabalho, esta pesquisa foi realizada em uma turma de IC do curso de Ciências Matemáticas e da Terra da Universidade Federal do Rio de Janeiro, no primeiro semestre de 2010. Todas as aulas aconteceram no Laboratório de Ensino e Programação (LEP de número 02) do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza (CMMN) da UFRJ. Neste laboratório, contávamos com dois projetores multimídias e 40 computadores. Os encontros transcorreram em quatro horas/aula semanais. Participaram desta pesquisa inicialmente 34 alunos, entretanto, após algumas reclassificações no vestibular este número atingiu a marca de 52 estudantes.

4.1.1 O Curso de Ciências Matemáticas e da Terra

Este curso tem por objetivo formar profissionais, em nível superior, com uma sólida base conceitual e matemática nas áreas de ciências da Natureza, da Terra e da Matemática, capazes de aplicar e desenvolver as tecnologias necessárias à aplicação desses conhecimentos em sua vida, tanto profissional quanto pessoal. Além deste objetivo principal, este curso forma também profissionais capazes de agregarem-se aos cursos de formação para pesquisadores, professores e demais profissionais das várias áreas contempladas nos cursos tradicionais do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza (CCMN).

Para alcançar estes objetivos, o estudante deverá cursar uma base comum interdisciplinar, constituída de disciplinas que abordem os conteúdos das disciplinas de Física, Geociências, Matemática, Química e Ciências da Computação. Acoplada a esta base comum, são sugeridas eletivas de diversos tipos, envolvendo as ciências tradicionais deste Centro (Astronomia, Ciências da Computação, Física, Geologia, Matemática, Meteorologia e Química), disciplinas das Ciências da Vida e da Saúde e disciplinas de áreas tecnológicas e humanas. Estas eletivas permitem ao estudante definir seu itinerário pessoal de formação.

O curso forma Bacharéis em Ciências Matemáticas e da Terra. Além desta formação, o curso oferece algumas habilitações associadas a ênfases curriculares. Para essas habilitações, as disciplinas a serem cursadas são estabelecidas na proposta do curso. As habilitações previstas são: (**I**) Analista de suporte à decisão; (**II**) Sensoriamento Remoto; (**III**) Geoprocessamento e Ciências da Terra e (**IV**) Patrimônio Natural.

A carga horária mínima do curso é de 2400 (duas mil e quatrocentas) horas, com duração prevista de três anos (podendo ser cursado em mais tempo).

4.1.2 As Ementas[44] das Disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e Introdução ao Cálculo

No primeiro período do curso em Ciências Matemáticas e da Terra, o estudante deve frequentar, em caráter obrigatório, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (com carga horária de 90 horas) e a disciplina de Introdução ao Cálculo (com carga horária de 60 horas presenciais e 30 horas semipresenciais[45]).

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I tem a seguinte ementa:

- Seqüências Numéricas; Limites; Continuidade; Cálculo e Aplicação das Derivadas; A integral Definida; Técnicas de Integração; Logaritmo e Exponencial; Aplicações de Integrais definidas; Integral Imprópria.

Bibliografia: No curso de Cálculo Diferencial e Integral I (2010/1), foi adotado o livro *Aprendendo Cálculo com Maple*[46].

A disciplina de Introdução ao Cálculo apresenta a seguinte ementa:

- Problemas em Matemática e Ciências: modelagem e resolução. Modelos gráficos, numéricos e algébricos. Funções: visão geral (domínio, imagem comportamento dinâmico, funções não numéricas). Operações com funções. Funções lineares e afins e taxas de variação. Funções definidas por partes. Seqüências aritméticas; Movimento uniforme e equações paramétricas. Resolução gráfica de sistemas lineares. Funções quadráticas e relações. Transformações Geométricas no Plano. Seções Cônicas: visão geral. Funções Polinomiais e Racionais; Continuidade e descontinuidades: comportamento no infinito e assíntotas; Resolução gráfica de desigualdades. Funções exponenciais: seqüências e séries geométricas. O número e função inversa. Funções Logarítmicas. Ajuste de curvas e linearização. Funções Trigonométricas e vetores. Sistema de Coordenadas Polares e Geometria dos números Complexos.

Bibliografia: Cabe ressaltar que no curso de introdução ao Cálculo (2010/1) não foi adotado nenhum livro didático e sim um roteiro de atividades que se encontra na seção 4.2 desta presente dissertação.

O conteúdo da disciplina enriquecido com atividades interativas "*mathlets*" está disponível em http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/index.htm.

---

[44] Tais ementas estão disponíveis em http://www.bcmt.ufrj.br/attachments/article/85/Disciplinas%20Obrigat%C3%B3rias%20do%20N%C3%BAcleo%20Comum.pdf.

[45] Importante ressaltar que em nossa pesquisa nos concentramos no fenômeno ocorrido na sala de aula, sob o caráter presencial. Sendo assim, estas 30 horas semipresenciais fugiram do escopo do nosso trabalho.

[46] SANTOS, A. R. S.; BIANCHINI, W. Aprendendo Cálculo com Maple. Instituto de Matemática – UFRJ. Rio de Janeiro, 2010.

4.2 O Planejamento da Intervenção

4.2.1 A Tecnologia Utilizada

Como já citamos, na introdução deste relatório, a tecnologia utilizada nesta pesquisa foi baseada no uso de *mathlets*. Na próxima sessão iremos descrever sobre esta tecnologia e a sua relação com a internet.

4.2.1.1 Os *Mathlets* e o Site Novas Tecnologias para o Ensino

Santos, Kubrusly & Bianchini (2004), em seu artigo *Mathlets: Applets*[47] *Java para o Ensino da Matemática,* sobre o potencial da internet observam que:

> Hoje, com a popularização da Internet como veículo de informação e comunicação, sua grande funcionalidade, versatilidade e potencial, parece ser possível atender a grande parte dessas demandas. De todas as tecnologias hoje existentes no Brasil, nos parece que o potencial instrucional da Internet é o mais forte e está se fortalecendo mais a cada dia. Numa página da web, que pode consistir somente de texto e gráficos, é possível incluir animações, formulários, recursos interativos, áudio, vídeo, questões com resposta de retorno imediato, modelos de realidade virtual, discussões e muito mais. (p. 280)

Sob esta perspectiva, estes autores desenvolveram o site intitulado de ***Projeto novas tecnologias para o ensino – introdução às funções reais*** que servisse como modelo para disciplinas on-line e que, além de ser parte integrante de projeto de educação à distância e de formação continuada do Instituto de Matemática da UFRJ, pudesse também ser utilizado como apoio ao professor no ensino presencial.

Segundo estes autores, a maioria dos "materiais educativos" disponibilizados em páginas web não contribui verdadeiramente para a melhoria do ensino de Matemática. Em sua maioria, "as páginas exibem apenas textos ou materiais procedentes de livros que, quando muito, deslizam sobre a tela sob o nome de demonstrações dinâmicas". Como afirmam estes autores: "[...] não basta utilizar a tecnologia apenas por utilizá-la. Deste modo estaríamos incorrendo no erro que procuramos corrigir" (Santos, Kubrusly & Bianchini, 2004, p. 282). De forma semelhante, Paixão (2008) questiona: 'Qual a diferença entre ler um livro ou ler uma página estática?', 'Uma página estática representa, de fato, um avanço em relação ao papel? (p.15, grifos do autor)

[47] Aplicativos na linguagem de programação Java.

Assim, na busca por um salto qualitativo no ensino de Matemática, Santos, Kubrusly & Bianchini (2004) propuseram o desenvolvimento de um ambiente interativo de aprendizagem, baseado no binômio *Java - web* onde a linguagem *java* é usada para o desenvolvimento de *mathlets*. Um ***mathlet***, como definido pelo *Journal of Online Mathematics and its Applications* (*JOMA*)[48], é uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática. Segundo Paixão (2008), os *mathlets* são *Applets Java*[49] gráficos e interativos, que permitirão ao aluno a passagem do status de paciente do processo de ensino-aprendizagem para agente do mesmo. Alguns exemplos de *Mathlets* podem ser observados nas figuras 6, 7, 8 e 9 – disponíveis no site do Projeto Descartes[50]–, bem como na página do Projeto Novas Tecnologias no Ensino.

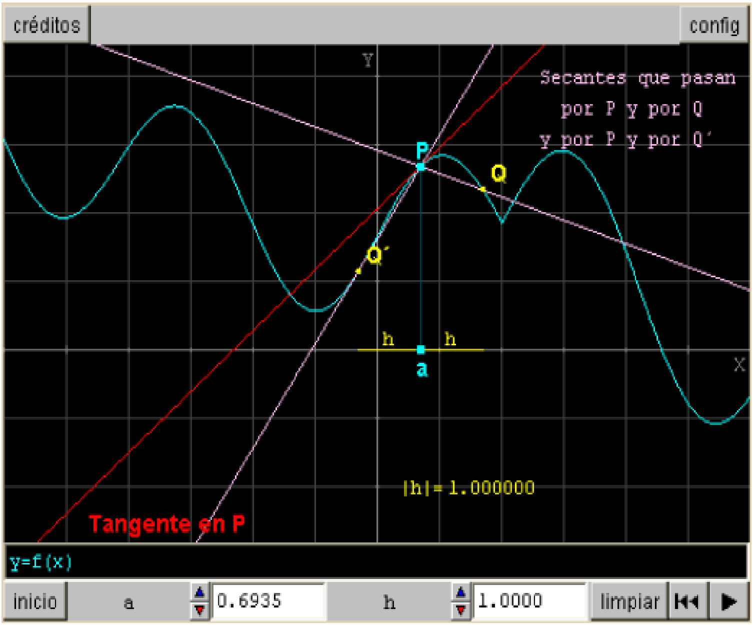


Figura 6: Buscando a reta tangente ao gráfico no ponto (Paixão, 2008, p. 17)

[48] JOMA. *Journal of online mathematics and its applications*. http://www.joma.org. Acesso em março de 2010.
[49] Pequenos aplicativos em linguagem Java (portanto independentes de plataforma) que rodam diretamente de uma página web através de um navegador qualquer.
[50] PROYECTO DESCARTES. Página do projeto, 1999. http://descartes.cnice.mec.es. Acesso em março de 2010.

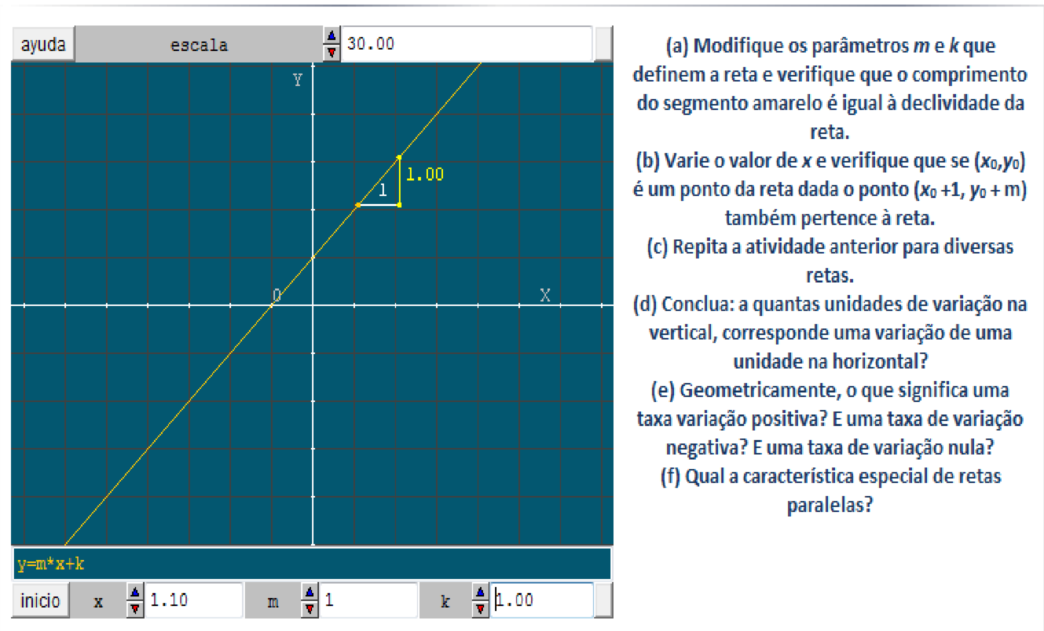


Figura 7: A declividade da reta como taxa de variação

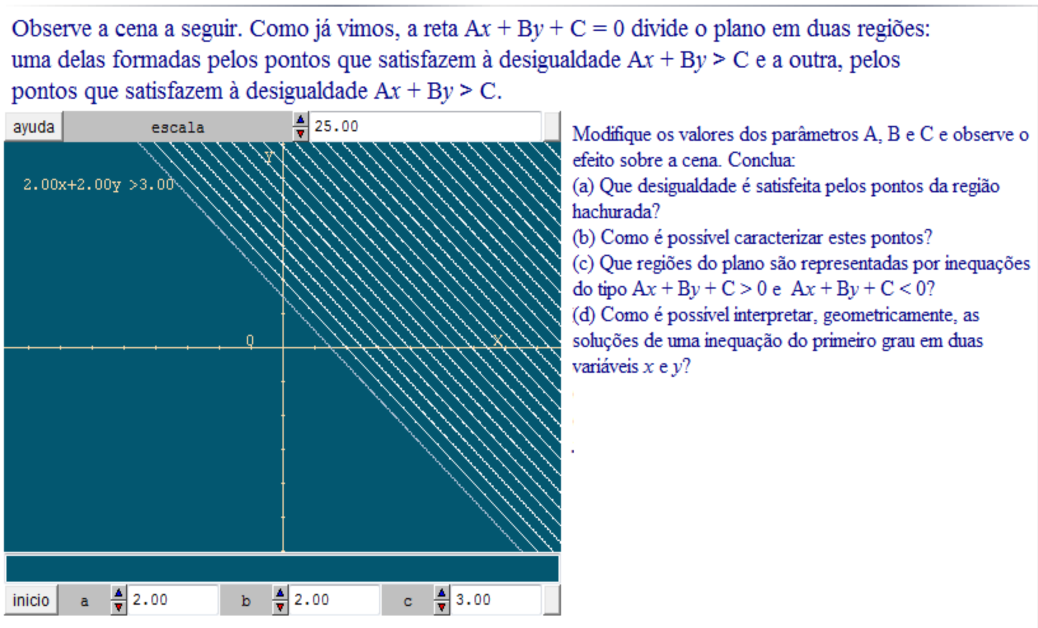


Figura 8: Gráfico de inequações de 1º grau com duas incógnitas

Este site é constituído por um conjunto de hipertextos interativos que permitem uma participação ativa do aluno e o estabelecimento de um canal de comunicação permanente e quase imediato com o professor. Desta maneira, os hipertextos elaborados utilizam, intensamente, animações, mudanças de escala, variação de parâmetros e permitem uma efetiva interação com o usuário, levando o aluno a desenvolver diversas “atividades matemáticas” baseadas no tripé “***explorar-conjecturar-concluir/demonstrar***” promovendo, dessa maneira, uma mudança no esquema tradicional “***definição - teorema - demonstração-corolário (aplicação)”*** (Santos, Kubrusly & Bianchini, 2004).

Nestas atividades (como por exemplo, observar as figuras 7, 8 e 9), o aluno é levado a explorar e integrar aspectos gráfico-geométricos e analíticos dos conceitos abordados, a fazer conjecturas, concluir e, finalmente, demonstrar os resultados, transformando-se, dessa forma, de paciente em agente do processo educativo e desvendando o prazer e o verdadeiro significado de “fazer/estudar/entender matemática” (Santos, Kubrusly & Bianchini, ibid.).

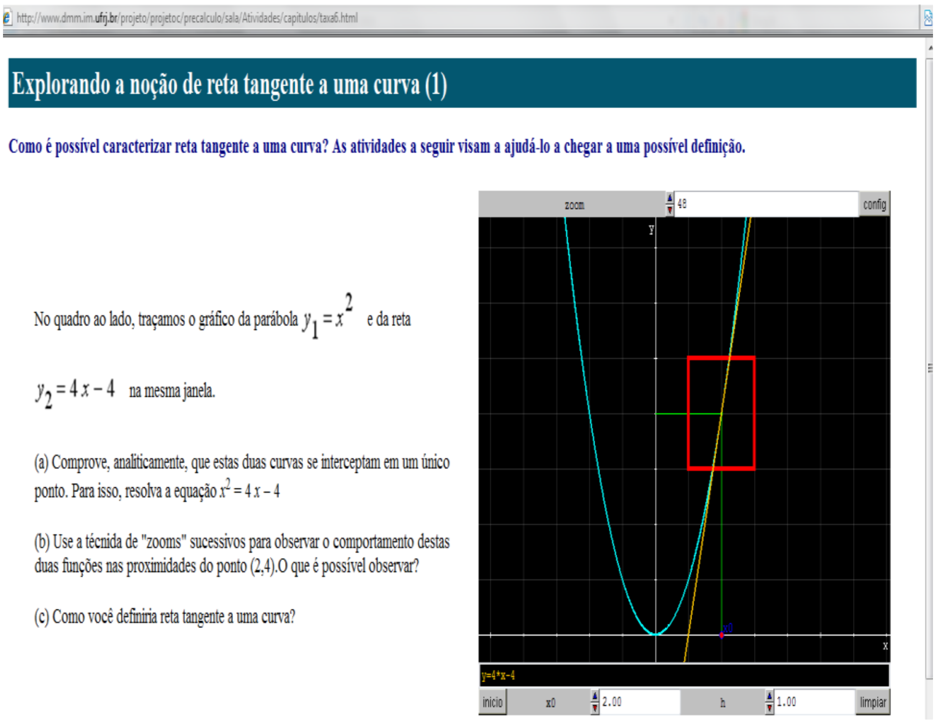


Figura 9: Página do site Novas Tecnologias no Ensino

O site aborda o estudo das funções elementares, suas propriedades comuns, suas características próprias e inclui muitas aplicações. Estudam-se, também, funções definidas implicitamente e parametricamente, incluindo um breve estudo das seções cônicas e de lugares geométricos. O tema escolhido, segundo os autores, foi funções reais por ser este o ponto central e unificador de toda a análise matemática e da sua correta compreensão depender, de forma mais ou menos penosa, o entendimento futuro de muitas outras idéias matemáticas de relevante importância. E os pré-requisitos necessários são apenas conhecimentos de álgebra elementar, em especial, resolução de equações de primeiro e segundo graus.

O conteúdo analítico inclui:

- Números reais e coordenadas no plano; gráficos de equações e equações de retas; funções e seus gráficos; operações com funções e funções compostas; função linear afim incluindo-se o estudo de movimentos uniformes e de taxas de variação média; equações paramétricas e vetores no plano; funções quadráticas e polinomiais, incluindo-se o estudo do comportamento no infinito; funções racionais com o estudo do comportamento assintótico; estudo analítico e geométrico das cônicas e de outros lugares geométricos; funções trigonométricas e suas inversas; funções logarítmicas e exponenciais com aplicações ao crescimento de populações, decaimento radioativo e em matemática financeira.

Após tudo que foi exposto até aqui, optamos (a pesquisadora e a professora de IC) pelo uso do *site* **Projeto Novas Tecnologias no Ensino**, pois acreditamos que por meio desta escolha possamos conduzir de forma mais significativa os estudantes desta pesquisa a novas formas de lidar com problemas, desenvolver dezenas de "experiências matemáticas", a visualizar, experimentar, fazer conjecturas razoáveis, perceber conexões entre conceitos e teorias, transformando-o de paciente – que é alguém que consome, aceita, guarda, reproduz e obedece – em agente do processo educativo – alguém que pensa, reflete, dirige, decide e atua (Santos, Kubrusly & Bianchini, 2004).

4.2.1.2 A Escolha das Atividades

A escolha das atividades foi planejada pela pesquisadora e a regente da turma de Introdução ao Cálculo.

Tomada a decisão que o site ***Projeto novas tecnologias para o ensino – introdução às funções reais*** seria utilizado como o ambiente de ensino e aprendizagem, baseado nos *mathlets,* era preciso escolher quais atividades contidas neste site seriam primordiais em nossa pesquisa.

Assim, buscamos escolher problemas (ou atividades) nos quais a visualização e a coordenação entre as múltiplas representações (numérica, algébrica e geométrica) relativas aos conceitos de funções elementares, equações e inequações de retas fossem exploradas. Aliado a isso, procuramos trazer atividades que exigissem dos alunos a capacidade de argumentar, questionar, conjecturar e refutar. Nestas circunstâncias, a parceria pesquisador/professor organizou o cronograma das atividades que veremos a seguir.

4.2.1.3 O Cronograma das Atividades

As atividades no curso de Introdução ao Cálculo, após planejamentos e replanejamentos[51] aconteceram conforme a tabela a seguir:

Dias – Atividades Duração – Efetivo	Tópicos e/ou Problema	Objetivos Gerais
30/03/2010 - Atividade 1 4 horas - 28 alunos	Função e o Problema da caixa	• Analisar um problema que envolve máximo e/ou mínimo por meio dos conhecimentos de que os alunos dispõem até a presente data.
13/04/2010 - Atividade 2 4 horas - 30 alunos	Função afim e Equação de Reta	• Revisar, aprofundar e reconstruir (caso necessário) o conceito de declividade de uma reta como a taxa de variação; • Fazer a coordenação de diferentes representações dos conceitos envolvidos.
20/04/2010 - Atividade 3 4 horas - 32 alunos	Gráficos de inequações do 1º grau em duas variáveis e o Problema do Agricultor	• Revisar, aprofundar ou reconstruir, se necessário, o conceito de inequações com duas incógnitas como uma região do plano; • Resolver um problema de programação linear. • Fazer a coordenação de diferentes representações dos conceitos envolvidos.
27/04/2010 - Atividade 4 4 horas - 40 alunos	Equações de retas e Funções Quadráticas	• Fazer transformações nos gráfico de funções elementares; • Fazer a coordenação de diferentes representações dos conceitos envolvidos.
18/05/2010 - Atividade 5 4 horas - 48 alunos	Equações de Reta e o Problema do Ponto sem Retorno	• Resolver o problema do ponto sem retorno com o objetivo de relacionar a declividade da reta com a velocidade.

[51] Desde logo cabe destacar que três fatos prejudicaram o nosso planejamento inicial da disciplina de Introdução ao Cálculo no ano de 2010: o semestre na UFRJ começou no final de março, o número de aulas perdidas de Cálculo e Introdução ao Cálculo durante a copa do mundo de 2010 (neste caso, várias aulas de Introdução ao Cálculo foram cedidas para a disciplina de Cálculo); e, por fim, as diversas reclassificações do vestibular que ocorreram durante o semestre, ocasionando a entrada de 18 alunos no curso de IC no meio do semestre.

25/05/2010 - Atividade 6 4 horas - 48 alunos	Transformações Trigonométricas	• Fazer transformações no gráfico de funções trigonométricas
01/06/2010 - Atividade 07 4 horas - 46 alunos	Taxa de Variação	• Explorar a noção de reta tangente como taxa de variação

Tabela 3: Atividades distribuídas por assunto

Importante destacar que a escolha desses tópicos acima relacionados justifica-se também pelo fato desses conteúdos serem importantes para um curso de Cálculo.

Aliado a isso, o estudante que termina o ensino médio, ao ingressar na Universidade e começa a estudar Cálculo, espera conseguir uma integração com o que estudou na escola básica. Entretanto, isso nem sempre acontece, pois as escolas de Ensino Médio em nosso país, em sua maioria, não preparam os alunos de forma adequada para um curso de Cálculo (Nascimento, 2000).

Assim, antes de chegar à Universidade, os alunos estudam alguns conceitos matemáticos, muitas vezes, de maneira isolada, enfatizando regras, algoritmos e/ou "macetes" (Rezende, 2003). De certa maneira, a impressão registrada é de que a "Matemática é estática", como consequência à abordagem estática empregada das idéias matemáticas. Entretanto, quando esses alunos se defrontam com assuntos como Derivadas e Integrais, porquanto percebem, sim, que a realidade é outra: a Matemática expressa movimento.

Em síntese, as dificuldades trazidas pelos alunos que terminam o ensino médio e ingressam no ensino superior na área de exatas, relativas às funções elementares, foram determinantes neste planejamento.

4.3 Opções Metodológicas

4.3.1 Estudo de Caso

Do ponto de vista da investigação das ações do grupo, adotamos como metodologia para a avaliação dos resultados, a perspectiva qualitativa de caráter interpretativo, buscando compreender as múltiplas relações do fenômeno a ser estudado, tentando captar os significados, os valores e as interpretações que os sujeitos apresentaram sobre a situação vivida.

Para Ponte (1994), a perspectiva interpretativa inspira a investigação qualitativa, ao considerar a atividade humana como uma experiência social em que cada ator desta trama vai produzindo significados, buscando reconstruir essa experiência para conhecer a realidade sob o ponto de vista dos seus diversos atores.

Como estratégia metodológica para análise, fizemos opção pelo estudo de caso, que pode ser caracterizado

> [...] como **o estudo de uma entidade bem definida**, **como um programa, uma instituição, um sistema educativo**, uma pessoa, ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o seu 'como' e os seus 'porquês', evidenciando a sua unidade e identidades próprias. É uma investigação que se assume como particular, isto é, que se debruça deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos, **procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico** (Ponte, 1994, grifos nossos).

Sob esta perspectiva, esta pesquisa se apoia na metodologia do estudo de caso no intuito de avaliar e investigar a nossa proposta de ensino (a abordagem de resolução de problemas e a tecnologia de *mathlets* empregada) em uma turma "da vida real" de Introdução ao Cálculo do curso de Ciências Matemáticas e da Terra da UFRJ, levando em conta todo seu contexto e toda a sua complexidade.

Neste sentido, Yin (2001, apud André, 2005)[52] afirma que se deve dar preferência ao estudo de caso quando:

> (1) as perguntas da pesquisa forem do tipo 'como' e 'por que'; (2) quando o pesquisador tiver pouco controle sobre aquilo que acontece ou que pode acontecer; (3) quando o foco de interesse for um **fenômeno contemporâneo** que esteja ocorrendo **na vida real**. (p. 30, grifos nossos)

De forma semelhante, para Stake (1985, apud André, 2005)[53], a decisão de realizar, ou não, um estudo de caso é muito mais epistemológica do que metodológica. E este explica:

> [...] se o pesquisador quiser investigar a relação formal entre variáveis, apresentar generalizações ou testar teorias, então ele deve procurar outro tipo de pesquisa. Mas se ele quiser **entender um caso particular levando em conta seu contexto e complexidade**, **então o estudo de caso se faz ideal**. (p.29, grifos nossos)

[52] YIN, R.K. Estudo de Caso. Porto Alegre: Bookman Artemede, 2001.

[53] STAKE, E.E. The Case Study Method in Social Inquiry. Educational, World Researcher, v.7, n.2, fevereiro, 1978.

Um das vantagens do estudo de caso permite é a possibilidade de "[...] compreender melhor a situação geral de um problema, as ações e as percepções, os comportamentos e as interações das pessoas [...] relacionada à situação específica onde ocorrem ou à problemática determinada a que estão ligadas" (Ludke & André, 1986, p. 18-19).

Para Ponte (1994), apesar da importância da sua base empírica, os estudos de caso podem e devem ter uma orientação teórica bem fundamentada, que sirva de suporte à formulação das respectivas questões, à seleção de instrumentos de coleta de dados e constituindo um guia na análise dos resultados. Assim, a teoria é necessária para orientar a investigação, tanto em termos da coleta dos dados como da sua análise. E, por fim, ajuda a responder as questões: Que coisas observar? Que dados colher? Que perguntas fazer? Que categorias construir?

Para André (2005), como nos estudos de caso o pesquisador é o principal instrumento de coleta e análise de dados, haverá momentos em que a sua condição humana será altamente vantajosa permitindo reagir imediatamente, fazer correções, descobrir novos horizontes. Entretanto, da mesma maneira, como um instrumento humano ele pode cometer erros, perder oportunidades e envolver-se demais em certas situações. No entanto, como sugere Ponte (ibid.), é muito importante que o investigador possa tirar partido da possibilidade de se surpreender por não estar afetivamente e intelectualmente comprometido com os resultados que possa vir a encontrar. Enfim, saber lidar com os prós e os contras de sua condição humana é princípio geral que este pesquisador deverá enfrentar.

Segundo André (ibid.), os estudos de caso são valorizados também por sua capacidade heurística, ou seja, por jogarem luz sobre o fenômeno estudado, de modo que o leitor possa descobrir novos sentidos, expandir suas experiências ou confirmar o que já sabia. Além disso, espera-se também que revele pistas para aprofundamento ou para futuras pesquisas. Ou seja, o conhecimento em profundidade de um caso pode ajudar a entender outros casos. Em lugar da pergunta: "este caso é representativo do quê?", "o leitor vai indagar: o que eu posso (ou não aplicar) deste caso na minha situação?" (Ludke & André, 1995).

Relativo à escolha dos instrumentos de coleta de dados, Fiorentini & Lorenzato (2007) observam

> [...] tendo em vista o objetivo do investigador em compreender com profundidade e exaustão o caso, ele pode lançar mão de diversos instrumentos de coleta de informações: diário de campo, entrevistas, questionários, gravações em áudio ou vídeo, registros escritos produzidos pelos sujeitos da pesquisa etc. (p.111)

Assim, sob estas circunstâncias, em nosso trabalho de campo utilizamos os seguintes instrumentos de coleta de dados:

- **o diário de campo** da pesquisadora contendo observações e registros etnográficos durante os encontros no laboratório (nº 02) do CCMN da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ);

- **materiais escritos**, cedidos pelos alunos e pela professora de IC durante as aulas no LEP;

- **as gravações dos diálogos** entre os alunos e a professora durante as atividades de resolução de problemas em um ambiente computacional.

4.3.2 Abordagem por Resolução de Problemas: algumas concepções

As primeiras pesquisas sobre o ensino de matemática por meio da resolução de problemas iniciaram-se sob a influência de George Polya (Universidade de Stanford-EUA), que propõe já no livro *A Arte de Resolver Problemas* (1986, com 1ª edição em 1945), um método em quatro etapas para a resolução de problemas: 1º) compreender o problema, 2º) elaborar um plano, 3º) executar o plano, 4º) fazer o retrospecto ou verificação da solução do problema original. Nele, desenvolve-se um processo heurístico ao longo da resolução de problemas.

Segundo Onuchic (1999), a proposta de Resolução de Problemas passou por várias mudanças, sendo que o NCTM[54] (Conselho Nacional de Professores de Matemática), entidade norte-americana, apresentou um documento "*An Agenda for Action*" (Uma Agenda para Ação), dizendo que resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar nos anos 80, recomendando que os professores de Matemática deveriam criar situações nas salas de aula onde a resolução de problemas pudesse ser usada.

[54] O NCTM é uma organização profissional, sem fins lucrativos. Conta com mais de 12500 associados e é a principal organização para professores de Matemática desde K12 (pré- primário – Escola Secundária) (Onuchic, 1999, 215)

Durante a década de 80, os estudos deram grande atenção ao processo de resolução de problemas, não se limitando à busca da solução. Mesmo assim, o processo esteve preso a esta busca.

Schroeder e Lester (1989, p. 31 – 34, apud Onuchic, 1999)[55] apresentam três modos diferentes de abordar resolução de problemas, que podem ajudar a refletir sobre essas diferenças: ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar matemática por meio da resolução de problemas.

Segundo estes autores, o professor ensina sobre resolução de problemas quando ressalva o modelo de resolução Polya ou alguma variação dele. Ao ensinar a resolver problemas, o professor concentra-se na maneira como a Matemática é ensinada e o que dela pode ser aplicada solução de problemas rotineiros e não rotineiros[56]. Ao ensinar Matemática por meio da resolução de problemas, o professor se concentra na resolução de problemas como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento.

Para Onuchic (1999), o ponto central em trabalhar o ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas:

> [...] baseia-se na crença de que a razão mais importante para esse tipo de ensino é a de ajudar os alunos a compreenderem os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade temática (p.208).

Na década de 90, no Brasil e no mundo, assume-se a resolução de problemas como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática, sendo o *problema* o desencadeador ou gerador de um processo de construção do conhecimento (Andrade, 1998, apud Onuchic, 1999)[57].

---

[55] SCHOROEDER, T. L., LESTER Jr., F.K. Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. TRAFTON, P. R. SHULTE, A. P. (Ed.) New Directions for Elementary School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, 1989. (Year Book).

[56] Onuchic (1999) classifica os problemas em problemas rotineiros que são aqueles para os quais se conhecem os meios de resolução e problemas não rotineiros que aqueles para os quais não se conhecem os meios. Um mesmo problema poderá, portanto, se constituir em rotineiro ou não rotineiro dependendo das condições apresentadas pela pessoa que se propuser a resolvê-lo.

[57] ANDRADE, S. Ensino-Aprendizagem de Matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas. Rio Claro, 1998. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista.

Uma importante questão que se coloca é: afinal, o que é um problema? Para Onuchic & Allevato (2004, p. 221), “problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer.”

Segundo Onuchic (1999),

> O ensino-aprendizagem de um tópico matemático deve sempre começar com uma situação-problema que expressa aspectos chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas para problemas razoáveis Um objetivo de se aprender matemática é o de poder transformar certos problemas não rotineiros em rotineiros. O aprendizado, deste modo, pode ser visto como um movimento do concreto (um problema do mundo real que serve como exemplo do conceito ou da técnica) para o abstrato (uma representação simbólica de uma classe de problemas e técnicas para operar com estes símbolos) (p.207).

E, ainda, acrescenta mais adiante que:

> [...] a compreensão de Matemática por parte dos alunos envolve a idéia de que compreender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando o aluno é capaz de relacionar uma idéia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos, relacionar um dado problema a um grande número de idéias Matemáticas implícitas nele [...] (Onuchic, ibid., p.208)

Com efeito, em nossa pesquisa, ensinar Matemática por meio da Resolução de Problemas (ONUCHIC, 1999; ALLEVAT0, 2005) se constitui num caminho para se aprender Matemática de forma mais significativa. Assim, o problema será visto como um elemento que irá disparar um processo de construção do conhecimento tendo o professor como um guia e os alunos como co-construtores. O ensino-aprendizagem de um tópico matemático, então, começará com um problema que expressa aspectos-chave e técnicas matemáticas que devem ser desenvolvidas na busca por respostas razoáveis ao problema proposto.

4.3.2.1 Resolução de Problemas na Sala de Aula

Para dinamizar a metodologia de trabalho ensino-aprendizagem de matemática por meio da resolução de problemas, nos inspiramos, nesta presente pesquisa, em uma organização didática sugerida por Onuchic (1999):

- **Formar grupos –** Propor uma atividade cujos participantes organizados em grupos, tentarão resolver o problema proposto.

- **O papel do professor –** O professor faz a intermediação, leva os alunos a pensar, espera que eles pensem, dá tempo para isso, acompanha suas explorações e resolve, quando necessário, problemas secundários.
- **Resultados na lousa -** Anotar ou comentar os resultados obtidos pelos grupos quer sejam certos ou errados e aqueles feitos por diferentes caminhos.
- **Plenária -** Assembleia com todos os grupos. Os alunos procuram defender seus pontos de vista e participam.
- **Análise dos resultados -** Nesta fase são trabalhados os pontos de dificuldade e os problemas secundários. O aspecto exploração é bastante considerado nesta análise.
- **Consenso –** Com a devida retirada de dúvidas, busca-se um consenso sobre o resultado pretendido.
- **Formalização -** Faz-se uma síntese daquilo que se objetivava “aprender” a partir do problema. São colocadas as devidas definições, identificadas as propriedades, feitas as demonstrações.

Ao adotarmos esta organização didática, temos como meta desenvolver nos alunos a capacidade de justificar procedimentos e estratégias usadas na resolução de problemas, uma vez que o tipo de trabalho desenvolvido nas salas de aula da escola básica, não propicia, em geral, este desenvolvimento nos alunos de nível fundamental e médio.

Outro fator importante, no nosso entendimento, se refere ao trabalho em grupo, que tem sido destacado em muitos estudos sobre resolução de problemas. Afinal, de dentro da discussão em grupo e/ou em plenária com toda a classe, a negociação tem sido apontada como uma importante oportunidade de o estudante ampliar suas compreensões e estratégias pessoais de resolução (Allevatto, 2005).

5. ATIVIDADES DESENVOLVIDAS COM ANÁLISE DOS DADOS

5.1. Formas de Apresentação e Convenções Utilizadas

No conteúdo a seguir procuramos apresentar descritivamente os dados construídos nesta pesquisa em que buscamos elementos para responder a questão norteadora desta investigação.

Conforme esclarecido no capítulo da metodologia, utilizamos três formas de registro de dados que estarão em destaque neste capítulo: diário de campo, documentos escritos e gravações. Nos momentos da análise dos dados, realizamos cuidadosas leituras do conteúdo do diário de campo, dos documentos escritos e das interações dos alunos com a professora, selecionando quatros atividades que foram julgadas relevantes. Essas atividades integram as análises que serão apresentadas no decorrer deste capítulo, aparecendo de duas maneiras: (1) na forma de narrativa de um fato ou conjunto de fatos ocorridos em aula, ou (2) de comentários, explicações e esclarecimentos necessários para possibilitar uma melhor compreensão dos dados apresentados ao leitor.

De forma mais específica, os **documentos** analisados são os problemas resolvidos pelos alunos e entregues por escrito à professora, em situações de aula. Seu conteúdo será apresentado por meio de descrição elaborada pela pesquisadora, ou através da imagem do próprio documento, quando for necessário ou conveniente.

Narrativas, comentários e análises dos dados aqui apresentados estão apoiados, também, nas **gravações** dos diálogos, realizados durante as atividades de resolução de problemas, no laboratório de informática. Os diálogos incluem falas dos alunos e da professora da turma. Nos diálogos realizados no laboratório, freqüentemente haverá falas de dois ou mais alunos, uma vez que a turma era sempre dividida em grupos para que os trabalhos fossem feitos, dividindo-se entre os 40 computadores disponíveis no laboratório de informática. Naturalmente, as transcrições integrais de todos os diálogos gravados em cada dia de observação passaram por uma seleção e os apresentados neste capítulo são aqueles considerados significativos para a estruturação, aprofundamento ou ampliação das análises apresentadas. Consideramos conveniente, também, esclarecer que, para melhor organização e apresentação, destes diálogos, um conjunto de convenções foi criado com o qual o leitor se deparará na sua leitura: para o professor será utilizada a sigla **Pr**, para o pesquisador **Pe**,**Turma** para um conjunto de alunos da turma, e para os alunos **An**, **Bn**, **Cn**, **etc**, onde:

- **A**, **B**, **C**... denotam cada aluno que participou do diálogo, ou seja, aluno **A**, aluno **B**, aluno **C**, etc.;
- a letra **n** refere-se ao grupo que ele pertence; por exemplo A1 para o aluno A que pertence ao grupo de número 1, A2 para o aluno A que pertence ao grupo de número 2 , B1 é o aluno B que pertence ao grupo 1, B2, é o aluno que pertence ao grupo 2, C3, é o aluno que pertence ao grupo 3, etc.
- o grupo **n**, é o grupo de número n.

5.2 Análise das Atividades

5.2.1 O problema da caixa

Antes de começarmos a descrever a primeira atividade e sua análise, convém relatar este primeiro dia de encontro no laboratório da UFRJ, e, em seguida, sua organização.

Tão logo o semestre começou, já no segundo dia do ano letivo de 2010, aconteceu nosso primeiro encontro com a turma de Introdução ao Cálculo. A turma tinha 34 alunos inscritos, entretanto naquele dia, estavam presentes 28. Ainda com relação à turma, é importante registrar que a professora ministrava oito aulas semanais, divididas em três dias. Destas oito aulas, quatro aulas eram do curso de Cálculo e quatro eram de Introdução ao Cálculo (IC). Acompanhamos somente as aulas de IC, como já relatamos no capítulo da metodologia.

A professora iniciou a aula no horário previsto e após algumas orientações iniciais nos apresentou como a pesquisadora que iria acompanhá-los no laboratório durante aquele semestre. A aceitação da turma foi boa no que se refere à presença da pesquisadora, pois não percebemos nenhuma alteração no comportamento dos alunos.

Com a professora à frente do trabalho, a turma percebeu que aprenderia matemática de um jeito diferente. Um primeiro indício que haveria novidade pela frente foi a forma de organização do trabalho pedagógico. Foi solicitado que formassem grupos e, foi-lhes dito, naquela ocasião, que as aulas no laboratório transcorreriam sempre assim e que eles ficariam a vontade para escolher seus grupos. Em seguida, os alunos foram orientados a entrarem na página[58] do site **Novas Tecnologias para o Ensino**. A professora explicou o funcionamento do mesmo e sua organização. Em seguida foi proposto um problema "desafio" para a turma resolver usando lápis & papel, e depois com o auxílio do computador, como iremos descrevemos na seção 5.3.1.

Importante destacar que esta aula inicial teve por objetivo, não só introduzir os alunos ao conhecimento sistematizado e científico do Cálculo, bem como, também, a uma base de conhecimentos indispensáveis para aquilo que seria a "tônica" do programa desta disciplina (por exemplo, equações de reta, funções, polinômios, derivadas, etc). Como veremos "o problema da caixa", foi usado para disparar um processo de construção do conhecimento, como sugere Onuchic (1999). Assim, não tínhamos expectativa que os estudantes resolvessem todo o problema, uma vez que estávamos lidando com alunos recém egressos da escola básica, que nunca tinham estudado Cálculo antes, pelo menos em teoria.

Para melhor organizar[59] a análise das atividades, dividimos em duas partes: **(I)** resolução do problema sem o auxílio do computador, **(II)** resolução do mesmo problema, agora com o auxílio de um roteiro didático[60] utilizando *mathlets*.

<table>
<tr><td colspan="2">Alunos presentes: 28, organizados em 7 grupos.</td></tr>
<tr><td>Data: 30/03/2010</td><td>Local: LEP n.º 02 do CCMN/UFRJ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mídias utilizadas:
• Lápis, papel e lousa;
• site: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/index.htm</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos Específicos:
• Analisar um problema que envolve máximo e/ou mínimo de uma função, que aparecem comumente no nosso dia, por meio dos conhecimentos matemáticos de que alunos dispõem até a presente data;
• A abordagem do roteiro didático consiste que o aluno entenda duas etapas importantes para resolver um problema como este: (1) modelar o problema por meio de uma função volume relacionando a variável dependente $V = V(x)$ em função da variável independente x; (2) determinar os pontos onde existe uma reta tangente</td></tr>
</table>

[58] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/index.htm
[59] Tal organização foi inspirada no trabalho de Paixão (2008).
[60] Este roteiro, como os outros utilizados nesta dissertação, se encontram nos anexos.

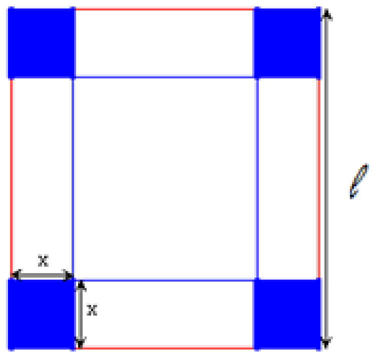
<table>
<tr><td colspan="2">horizontal ao gráfico da função encontrada no primeiro passo.</td></tr>
<tr><td>Problema: Um pedaço de folha de plástico quadrada de lado igual a ℓ deve ser transformada em uma caixa de água, sem tampa superior, cortando-se quadrados em seus quatros cantos e levantando-se os quatros retângulos resultantes para formar as laterais da caixa. O problema é descobrir como se deve cortar os cantos desta folha de modo a formar, quando completamente cheia, uma caixa de maior volume possível.</td><td>
</td></tr>
</table>

Tabela 4: O problema da caixa

5.2.1.1 Resolução do problema sem o auxílio do computador

É dado um tempo em torno de trinta minutos para discussão nos sete grupos, porém este tempo se estende por mais de uma hora.

Durante o período de discussão em grupo ou em plenária, a professora exerce seu papel de mediadora, interventora e incentivadora, auxiliando quando preciso em problemas secundários ou lançando novas questões desafiadoras por meio de intervenções nos grupos. A dificuldade foi grande, entretanto observamos alunos "animados" e aceitando o desafio.

5.2.1.1.1Resultados

Na resolução do problema sem a utilização do roteiro didático, nenhum grupo conseguiu resolvê-lo até o final. Cinco grupos ($\frac{5}{7} do\ total$) que denominamos por 2, 4, 5, 6 e 7 – conseguiram determinar a função que modela o problema expressando $V = V(x)$ em função de x. Os grupos 1 e 3 ($\frac{2}{7} do\ total$) não conseguiram determinar tal função. O grupo 3 ($\frac{1}{7} do\ total$), por exemplo, apresentou dificuldades com os conceitos de área e volume, como podemos observar no decorrer do seguinte diálogo:

> **A3**: Se eu fizer um corte mínimo, então vou ter um volume máximo.
> **B3**: Quanto maior a área da base seria maior o volume [...] e aí teríamos uma altura pequena [...].
> **Pr.**: Se você fizer um corte mínimo, vai caber muita ou pouca água nesta caixa?
> **A3**: Pouca...
> **Pr.**: Então, não tem volume grande! Então, quanto menor o tamanho do corte, maior o volume da caixa? Mas vamos pensar: se tivermos um corte pequeno, vamos ter uma caixinha bem "rasinha", certo?! Dentro da caixa vai caber pouca ou muita areia?
> **B3**: Então a área da base teria que ser igual a altura?

> **Pr**.: Área da base é superfície e não pode ser igual a altura, que tem uma dimensão só. Por que vocês não tentam escrever uma expressão matemática que dá o volume desse sólido?

E mesmo, com a "dica" (ver diálogo acima) fornecida pela professora, ainda, assim, este grupo não conseguiu encontrar a expressão matemática para o problema proposto.

Já o grupo 1 ($\frac{1}{7} do\ total$) tentou resolver o problema por meio de uma tabela de valores (ver figura 10), no entanto durante a plenária os participantes deste grupo concluíram que este método não teria fim. O diálogo a seguir expõe a estratégia usada pelo grupo:

> **Pr.:** Como vocês fizeram?
> **A1**: Fizemos o corte igual a 1 cm e o lado do quadrado 10 cm. E, então achamos o $V = 8 \times 8 \times 1 = 64cm^3$. Depois fizemos para o corte $x = 2$ e, então $V = 72cm^3$. Depois foi para 3 e achamos $V = 48cm^3$. [...] Aí percebemos que estaria entre 1 e 2. Aí, dividimos o intervalo e pegamos 1,5, e o volume deu $V = 73{,}5$ e, assim foi. Isso não tem fim...
> **Pr**.: E quais as críticas que a gente pode fazer a este modelo?
> **B1**: É demorado, é chato, uma "calculeira"!
> **Pr**.: É, vocês se deparam com uma "coisa" complicada, a continuidade da reta.

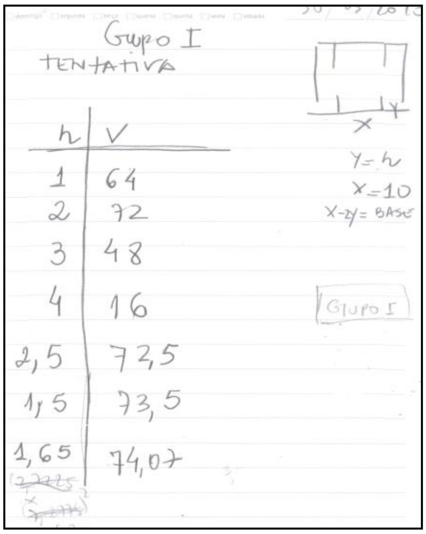


Figura 10: Tentativa de solução do grupo 3 – problema da caixa

Além disso, só três grupos conseguiram ($\frac{3}{7} do\ total$) determinar o volume em função do lado ℓ (ver figura 11). Os demais precisaram atribuir um valor para o lado do quadrado ℓ, particularizando a situação desde o início, para que pudessem determiná-la mais facilmente.

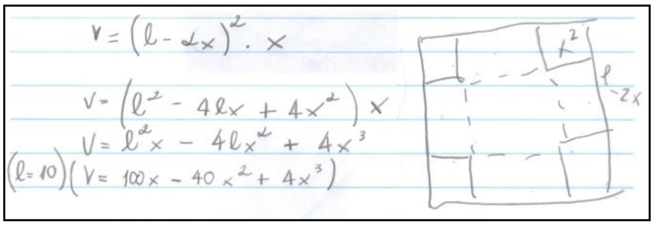


Figura 11: Tentativa de solução do grupo 4 – problema da caixa

Em relação à identificação das varáveis dependentes e independentes, o sétimo grupo ($\frac{1}{7}\, do\ total$) confundiu a variável independente com o lado o da folha que era fixo (ver figura 12), conforme ressaltado no seguinte diálogo:

> **A7**: Após usarmos o volume do paralelepípedo, paramos na equação $V = (x - 2y)^2 \cdot y$. Se fosse quadrática, o [volume] máximo estaria no y máximo, mas o problema é que a gente está numa cúbica! Bom, tentamos atribuir valores para colocar num gráfico, mas não conseguimos...
> **Pr.**: Mas o que está variando no problema é o y ou é o x? [pergunta a professora ao perceber a confusão]
> **B7**: Aí que foi o nosso problema também... [só naquele instante o aluno percebeu o seu equívoco].
> **Pr.**: Vocês colocaram x como o tamanho da folha, e sendo assim, x não é variável!

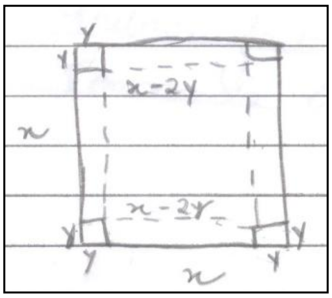


Figura 12: Tentativa de solução do grupo 7 – problema da caixa

O grupo 2 apresentou duas estratégias. A primeira estratégia (ver figura 13) fundamentava-se que as figuras mais simétricas são aquelas que têm a maior área e o maior volume. Vejamos o diálogo entre um aluno deste grupo e a professora durante a plenária:

> **B2**: A gente partiu do princípio que o cubo vai ser a figura procurada, porque as figuras mais simétricas é que vão ter maior área e maior volume. Por exemplo, num círculo onde a gente acha a maior área possível, dentre qualquer figura. Você tem uma linha qualquer, que a gente vai usar para várias figuras, a figura que você quiser para achar a de maior área, [...] você acha que o círculo é a figura mais simétrica. [...] E no caso da folha quadrada específica, seria o cubo. O defeito desta solução é que a gente não tem prova matemática de ser esta figura aqui [se referindo ao sólido do problema que outro grupo tinha desenhado

na lousa] é a que tem o maior volume, embora a gente saiba que isso, pra gente, esteja certo, a gente não conseguiu prova para ela.
Pr.: Sabe qual é a falha desta sua afirmação? Essa ele falou que aprendeu no pré-vestibular. Mas o seu argumento está faltando um dado. Esta sua afirmação está "certa", mas não é para qualquer situação. [...] mas entre todas as figuras de perímetro fixo, porque o perímetro vai ser o comprimento do círculo, é o círculo que engloba a maior área. Isso é um problema famoso, que deu origem a todo um ramo da matemática chamado de cálculo das variações e esse problema é representativo de uma classe de grandes problemas chamados de problemas isoperimétricos [...].

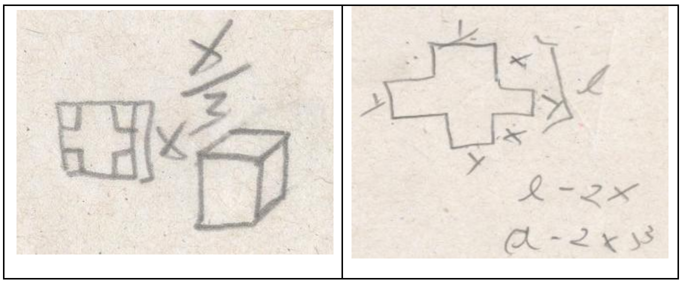


Figura 13: Primeira tentativa de solução do grupo 2 – problema da caixa

E, ainda, o mesmo grupo 2 expõe uma outra estratégia:

B2: A gente ainda tentou de outro jeito.
Pr.: Então vai lá...
A2: Quando a gente tenta calcular ou máximo ou mínimo de alguma coisa, então a gente lembrou que a gente pode criar uma função quadrática onde a gente tem o máximo no vértice da parábola. Então, com esse volume seria a mesma coisa, só que a gente não tem uma função quadrática e sim uma cúbica. Aí qual seria a resolução? A gente tem as relações de Girard e com elas a gente consegue achar as raízes do problema e, depois achamos o máximo dessa equação.
Pr.: É? Você vai achar o máximo dessa função cúbica usando o quê?!?
B2: Não sei, a gente estava tentando usar as relações de Girard. Eu não estou afirmando...
Pr.: O que são as relações de Girard?
C2: São relações entre as raízes e os coeficientes [...] e colocando no plano [as raízes], aí a gente acha os resultados.

Por fim, um aluno do grupo 5, que já tinha estudado cálculo, utilizou as técnicas de derivação, no entanto, tal aluno, como podemos perceber no diálogo a seguir, parece deter o conhecimento sobre a técnica e não sobre o conceito de derivada.

A5: Nós chegamos na mesma equação do grupo anterior [se referindo ao grupo 4], $V = l^2x - 4lx^2 + 4x^3$ e fizemos $l = 60$, só que deu uma conta "bizarra"! Aí tipo, para chegar a uma equação do 2º grau, eu usei a derivada.
Pr.: Você derivou só para tirar o cubo daí?
A5: É! Então, nesse $4x^3$, o 3 abaixa e vira algo com x^2 [...]. Aí, depois igualei V' a zero. Eu sabia que era um problema de otimização, eu fiz matemática durante um ano. [...] a única forma de tirar este 3 daqui

> [aponta para o expoente de x^3 da função cúbica] é derivando para cair numa [função] ao quadrado, eu derivei para tirar o cubo daqui, eu já sabia que tinha que resolver por derivada.
> **Pr.:** Você derivou só para tirar o cubo daí, né?!
> **A5:** É! Aí, eu achei os pontos de inflexão!
> **Pr.**: Não, os candidatos a máximo e mínimo.

5.2.1.1.2 Discussão

Como esperado, todos os grupos não conseguiram resolver o problema proposto com a matemática que eles conheciam até àquela data.

Cinco grupos ($\frac{5}{7} do\ total$) conseguiram a partir do volume do paralelepípedo chegar à sentença matemática que modela o problema, mostrando que a maioria conseguiu fazer a conversão do registro da língua natural para a linguagem algébrica em que a letra a x aparece com estatuto de variável independente e V como a variável dependente. Esse fato em si sugere que os estudantes têm uma imagem conceitual de função desenvolvida, de acordo com a definição de conceito de função citada por Sierpinska (1988). Já o primeiro grupo não foi capaz de realizar a conversão da tabela para a lei, mostrando que a sua imagem conceitual de variável é fortemente restrita. Apesar do sétimo grupo ($\frac{1}{7} do\ total$) ter conseguido modelar a função, ocorreu um conflito em relação à variável independente, deixando evidente que sua imagem de conceito sobre a noção de variável é deficiente, e, provavelmente, o conceito de função também.

No quinto grupo, o aluno que já tinha estudado cálculo usou as técnicas de derivação de forma correta, entretanto o fato em si não nos permite esclarecer se ele tinha a compreensão conceitual sobre o que estava fazendo. Além disso, este aluno confundiu o ponto de máximo com ponto de inflexão, sugerindo que pode haver um conflito com a definição de máximo/mínimo de uma função e ponto de inflexão, ou ser um resultado tecnicamente decorado.

O grupo 2 nos chamou a atenção pela forma convicta a qual afirmou, que o cubo seria o sólido com volume máximo, mesmo sem ter conseguido uma prova para tal argumento; sugerindo que este fato pode ter sido simplesmente decorado durante a sua passagem pelo ensino médio, ou, ainda, ter sido aceito por estar em acordo com a sua intuição. Ainda sobre este grupo, evidenciamos na segunda tentativa de resposta um conflito após determinarem a função cúbica. Este grupo “pensou” em usar relações

(relações de Girard)[61], entre os coeficientes da função de terceiro grau e as suas raízes visando determinar as possíveis raízes da função supracitada e, em seguida, segundo eles, o valor do corte. Este fato sugere que estes alunos pensaram em determinar o ponto máximo da referida função de forma análoga como é tradicionalmente feito no ensino básico para função quadrática, por meio do ponto médio das raízes e, consequentemente, este seria o valor procurado.

Por fim, a maioria dos grupos ($\frac{5}{7}$ $do\ total$) argumentou que não conseguiu terminar o problema já que a função era do 3ª grau. Entretanto, segundo estes grupos, se a função em questão fosse uma polinomial do 2º grau, eles afirmaram que conseguiriam finalizar o problema pelo vértice da parábola. Ora, esta associação nos parece natural, uma vez que, estes alunos, tradicionalmente, só se depararam com a noção do máximo (ou mínimo) de uma função no caso desta ser uma função polinomial do 2º grau, o que por si só justifica o vértice da parábola ter sido evocado de suas imagens de conceito.

5.2.1.2 Resolução do problema com o auxílio do computador

Após a plenária, a professora solicitou que todos entrassem na página[62] do site do Projeto Novas tecnologias para o Ensino que traz o roteiro didático do problema da caixa. Entretanto nesta página a professora ressaltou que o lado quadrado é dado por $l = 20cm$ e, por seguinte, a função volume por $V = (20 - x)^2 \cdot x$.

Assim, por meio dos *mathlets*, visualizou-se o volume do sólido variando em função do corte x (ver figura 14). Naquele momento, a professora questionou a turma:

> **Pr.**: Então, se o corte for pequeno, teremos volume máximo, como argumentou o grupo 3? E se o corte for grande?
> **Turma**: Em nenhum dos dois casos.
> **Pr.**: E para um corte de 7, qual é o volume? E se for 3?
> **Turma**: 238,8 e 590,3.
> **Pr.**: Cadê o grupo que achou que se o corte fosse pequeno teríamos volume máximo? Isso é verdade?
> **A3**: Não.
> **Pr.**: Mas isso não é aceito como uma prova matemática, só ajuda a gente visualizar que nossa intuição estava errada.

[61] As relações de Girard são estudadas, tradicionalmente, no final do ensino médio e é um tópico que se encontra dentro da teoria das Equações Polinomiais.
[62] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/caixa2.html
Este roteiro pode ser encontrado nos anexos desta dissertação.

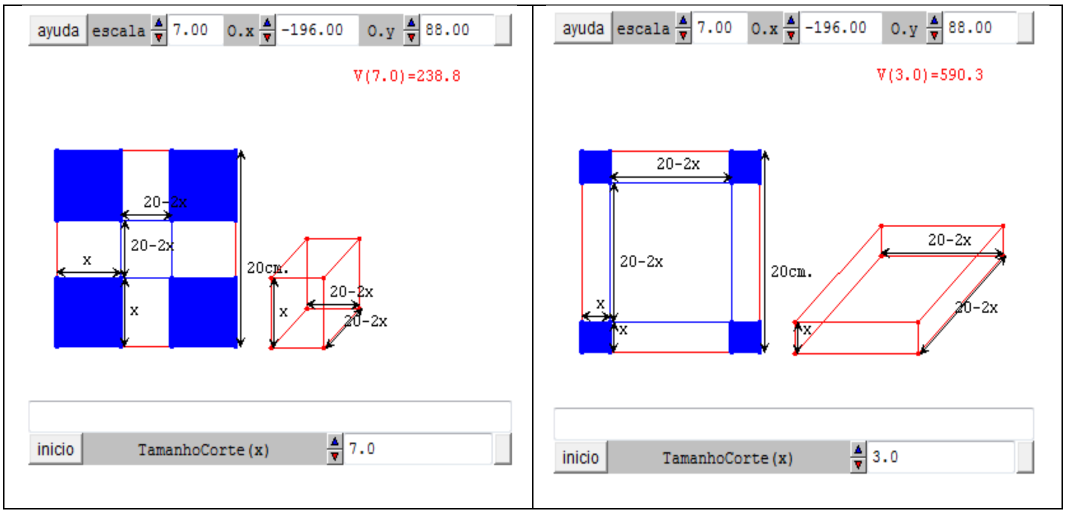


Figura 14: O volume da caixa e a sua variação em função do tamanho do corte

Desta forma, a professora, explicou que para resolver problemas desse tipo é necessário:

1 - Encontrar uma relação entre as variáveis envolvidas no problema. No exemplo que estudamos estas variáveis são VOLUME $V = V(x)$ da caixa e tamanho do CORTE (x).
2- Determinar os pontos onde existe uma reta tangente horizontal ao gráfico da função encontrada no primeiro passo.

E, em seguida, ela afirmou que esta é uma característica geométrica especial quando ocorre o valor máximo (ou mínimo) dessa função ou de outra qualquer.

Entretanto, é importante ressaltar que a professora nos relatou que estes alunos tinham "visto" no dia anterior (na aula de Cálculo), a noção de reta tangente, no entanto nenhum estudante se lembrou de utilizá-la. Este fato nos remete para a afirmação de Vinner (1991), de que alunos, diferentemente do esperado por professores e pesquisadores, não consultam a sua definição de conceito durante atividades de resolução de problemas, e sim, a sua imagem de conceito.

Então, durante a visualização nos *mathlets* (ver figuras 15-16) a professora se dirigiu à turma, e, em particular, direcionou seu olhar para aos grupos 1 e 2, perguntando:

> **Pr.**: Aqui no computador calculamos bem rapidamente os valores, não é?! Aqui é muito fácil montar uma tabela, o que vocês acham?
> **Turma**: Sim!
> **Pr.**: Vamos ver, se fosse o cubo [fazendo referência ao grupo 2], faríamos $20 \div 3 \cong 6.666 \ldots$ para ter um cubo, então olhem quanto daria o volume se x for próximo deste valor. Daria o volume máximo?
> **Turma**: Não.
> **Pr.**: Então onde está o máximo? No "morrinho"! Está entre?
> **Turma:** 3 e 4.
> **Pr.**: Mas continua no "chute", então qual é a estratégia? O que vimos na aula de ontem? [se referindo à aula de Cálculo do dia anterior]

Turma: Reta tangente!
Pr. Ninguém se lembrou da reta tangente, que vimos ontem na aula de Cálculo!

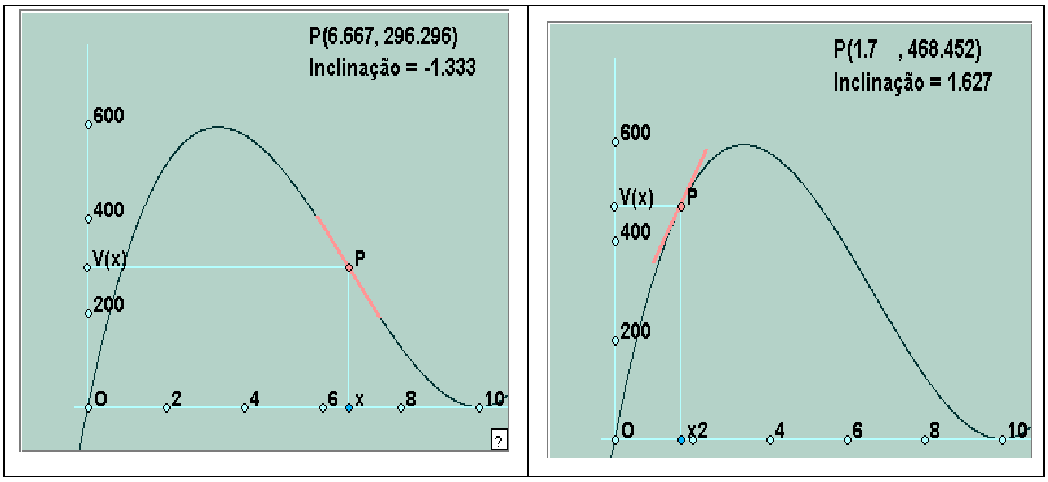


Figura 15: Gráfico de V(x) e a reta tangente em cada ponto - parte I

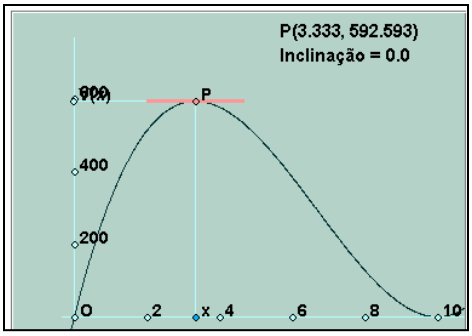


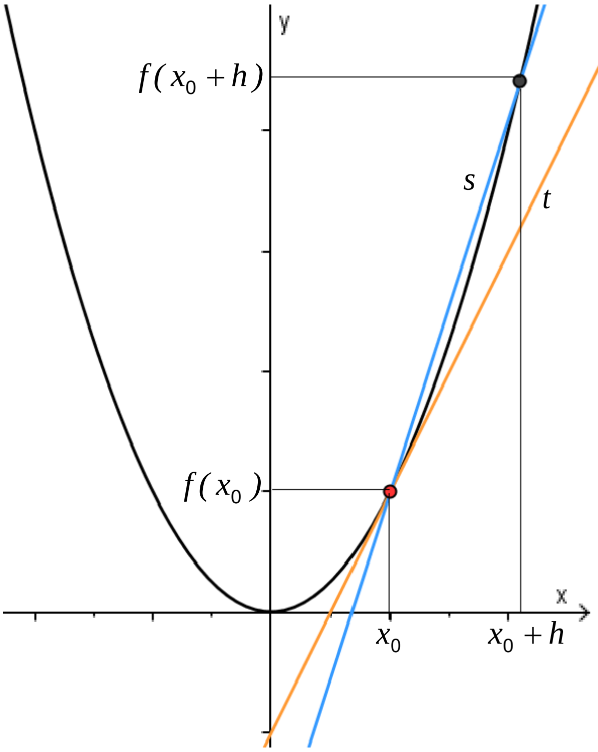
Figura 16: Gráfico de V(x) e a reta tangente em cada ponto - parte II

E, continuou, ainda, a professora, questionando a turma:

Pr.: E agora? O que vamos fazer?
Turma: [nenhuma resposta]
Pr.: Vamos usar uma função conhecida de vocês, porque esta aqui não vai ficar boa neste programa, porque os valores são grandes. Então, tomemos, a função quadrática $y = x^2$. Vamos fazer que nem eu fiz na aula de Cálculo com a velocidade média e a velocidade instantânea, lembram?!
Turma: Sim.

Então, a professora foi para o quadro e determinou a declividade da reta tangente por meio da declividade da reta secante da seguinte forma:

Pr.: Vamos calcular a equação da reta (t) $y - y_0 = m_t \cdot (x - x_0)$ tangente à curva $y = x^2$. A declividade da reta secante é dada por: $m_s = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$=...=$2x_0 + h$. Assim, se $h \to 0$, então $m_t = 2x_0$.



E, em seguida, a professora perguntou à turma:

> **Pr.**: "Tem outro jeito? Vamos voltar para o computador e utilizar a técnica dos zooms!"
> **Turma**: [alunos atentos acompanham as explicações]

E todos retornam para o site Novas Tecnologias no Ensino na página[63] que trata das funções localmente lineares. A professora conduz os alunos, usando as mídias computador, lápis & papel, para determinar a equação da reta tangente à curva $y = x^2$, no ponto $(2,4)$; objetivando traçar os gráficos destas na mesma tela e, na sequência, dar o zoom, como veremos a seguir.

> **Pr.**: Segundo as nossas contas, achamos a declividade da reta em qualquer ponto, agora vamos determinar quando $x_0 = 2$, então quanto vai dar a declividade?
> **Turma**: A declividade dá 4.
> **Pr.**: Então vamos determinar a equação da reta no ponto $(x_0, y_o) = (2.4)$ e $m_t = 4$. Então quanto vai dar, façam aí rapidamente no lápis e papel.

[63] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/taxa5.html

Tuma: $y - 4 = 4(x - 2)$
Pr.: Vamos melhorar esta reta, então teremos: $y = 4x - 4$. Agora vamos colocar isso nos *mathlets* [figura 17] e depois dêem "zooms" sucessivos [ver figura 18].

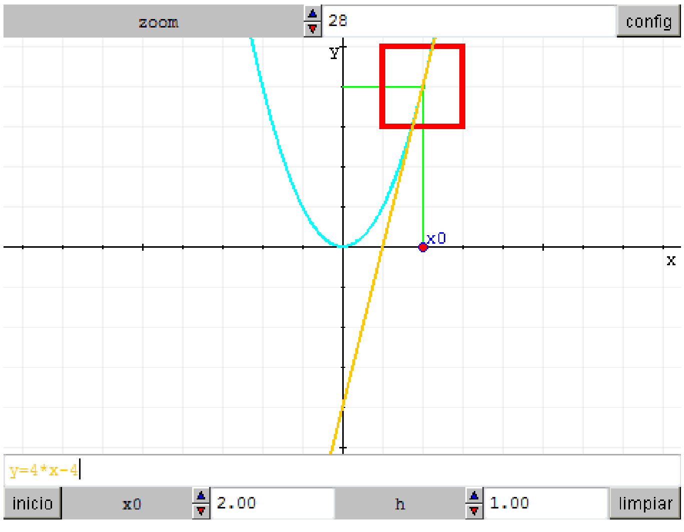


Figura 17: Funções localmente lineares parte I

Figura 18: Funções localmente lineares parte II

Em seguida, com a visualização das imagens fornecidas pelos *mathlets*, a professora e a turma continuaram o diálogo.

Pr.: Depois dos "zooms" no ponto de tangência, o que podemos visualizar?
Turma: Ficou tudo uma coisa só!!! [os alunos ficaram surpresos]
Pr.: A curva se confunde com a parábola! Porque fizemos isso tudo? Vocês entenderam? Usamos a técnica de "zooms" sucessivos para visualizar que a reta, cuja equação foi encontrada antes, é realmente a

> reta tangente à parábola. E pensem, qual é a declividade desta reta tangente? Vocês conseguem determinar?
> **Turma:** ... [sem respostas]
> **Pr**.: Qual a declividade desta reta? Pensem... a cada 4 unidades que aumenta em y, aumenta 1 em x, então $\frac{4}{1} = 4$, esta é a declividade que a gente achou antes. Entenderam? Agora que a aula está acabando, vocês vão voltar no problema da caixa e estudar, resolvam e entreguem na próxima aula. Dúvidas?!
> **Turma**: Um pouco...
> **Pr.**: Gostaram dos "zooms"?
> **Turma**: Muito!
> **Pr**.: Então, o que precisamos aprender e revisar para resolver o um problema como este? [...].
> **Turma**: Equação de reta, polinômios e outras funções, derivada, limites.

Observamos, naquele momento dos "zooms", alunos empolgados, impossível não relatar, aqui, o que presenciamos. Estudantes sendo conduzidos sim, mas participando, também, ativamente da construção do seu conhecimento. As técnicas de fatoração, as relações trigonométricas, o dispositivo prático de Briot – Ruffini, retas secantes e tangentes, todos perderam o seu "brilho" naquele momento da aula de Introdução ao Cálculo. Os protagonistas foram a professora, os alunos e as mídias participando coletivamente da construção do conceito de derivada de uma forma extremamente diferente para um curso de IC, por meio da raiz cognitiva de retidão local (Tall, 1989).

5.2.1.2.1 Resultados

Na aula seguinte de Introdução ao Cálculo, dia 13/04/2010, todos os alunos entregaram as soluções do problema caixa. Dos 28 alunos que entregaram os exercícios, exatamente 7 alunos $(\frac{7}{28})$, continuaram, ainda, utilizando tabelas (ver figura 19) para tentar determinar o volume máximo e, portanto, um valor aproximado para o corte. Os outros 21 alunos $(\frac{21}{28} do\ total)$ conseguiram terminar o problema proposto utilizando a derivada de funções polinomiais (ver figura 20).

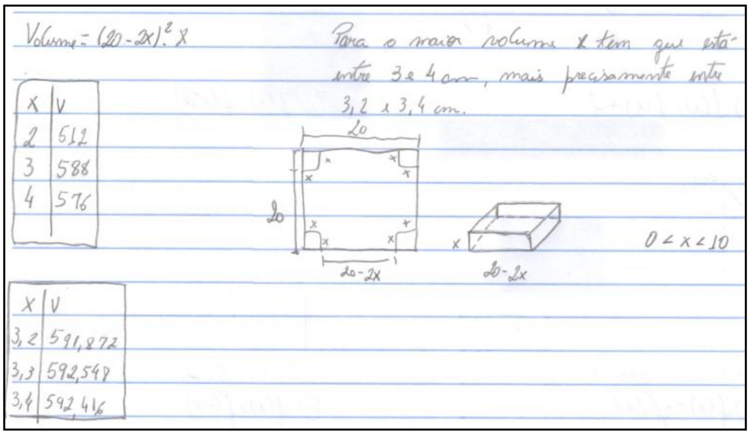


Figura 19: Solução do problema da caixa - grupo 1

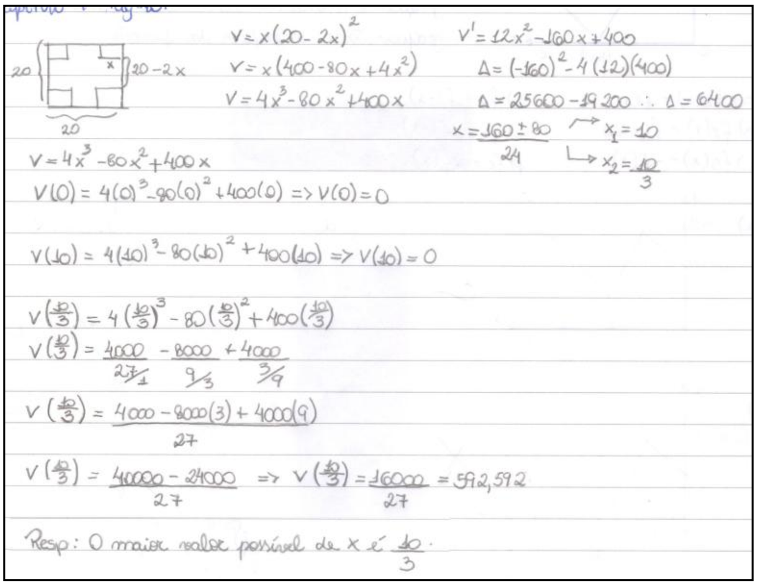


Figura 20: Solução do problema da caixa - grupo 4

5.2.1.2.2 Discussão

Antes de concluirmos a análise desta atividade, devemos considerar que estes estudantes estavam assistindo a aulas de Cálculo concomitantemente ao curso de IC. Desta forma, as suas imagens de conceito estavam em constante mudança, ou seja, atributos eram incluídos, excluídos ou modificados no decorrer de suas experiências cognitivas (Giraldo, 2004), como, por exemplo, observamos a solução do problema da caixa – grupo 4 (ver figura20).

Dos 28 alunos, 21 conseguiram terminar o problema da caixa usando a derivada da função polinomial. Os demais, ainda, resolveram este problema utilizando o registro numérico (tabela), apesar de toda discussão que este método é impreciso.

Todos os alunos que conseguiram terminar o problema fizeram a conversão do registro figural para a linguagem algébrica, além dos tratamentos necessários para determinar as raízes da função derivada.

5.2.2 O problema do agricultor: custo mínimo X necessidades do terreno

De forma semelhante à primeira atividade, para melhor organizar a análise desta atividade a dividimos em duas partes: **(I)** resolução do problema sem auxílio do computador, **(II)** resolução do problema com o auxílio do computador utilizando um roteiro didático baseado em *mathlets*[64] e um encaminhamento da solução[65]. Vale ressaltar que este problema não se encontra no roteiro didático do site Novas Tecnologias. No entanto, tal roteiro foi utilizado como suporte para que os alunos pudessem visualizar e entender geometricamente a solução de um sistema de inequações lineares em duas variáveis como uma região do plano.

<table>
<tr><td colspan="2">Alunos presentes: 32, divididos em 8 grupos.</td></tr>
<tr><td>Data: 20/04/2010</td><td>Local: LEP n.º 02 do CCMN/UFRJ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mídias utilizadas:
• Lápis, papel e lousa.
• site: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/reta13.htm</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos Específicos:
• Utilizar os conhecimentos relacionados a um sistema de inequações lineares em duas incógnitas em uma situação-problema.
• A abordagem do roteiro didático baseado nos mathlets consiste em identificar as regiões do plano determinadas por inequações lineares em duas variáveis e, em seguida, interpretar geometricamente a solução de um sistema composto por estas inequações como uma região que satisfaz, simultaneamente, a todas as desigualdades.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema: Suponhamos que um agricultor queira adubar a sua plantação e disponha de dois tipos de adubo. O primeiro contém 3g de fósforo, 1g de nitrogênio e 8g de potássio e custa R$ 10,00 por quilo. O segundo tipo contém 2g de fósforo, 3g de nitrogênio e 2g de</td></tr>
</table>

64 http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/reta13.htm. Este roteiro se encontra nos anexos desta dissertação.
65 Este encaminhamento se encontra nos anexos deste relatório.

potássio e custa R$ 8,00 por quilo. Sabe-se que 1 kg deste adubo é suficiente para 10 m2 de terreno e que o solo onde estão as plantações necessita de pelo menos 3g de fósforo, 1,5 de nitrogênio e 4g de potássio para cada 10 m^2. A questão que se coloca é saber quanto o agricultor deve comprar de cada adubo, para cada 10 m^2 de terreno, de modo a gastar o mínimo possível.

Tabela 5: O problema do agricultor

5.2.2.1 Resolução do problema sem o uso do computador

Como de costume, começamos este quarto dia de atividades no laboratório de informática entregando um problema aos alunos da turma de IC. Além dos objetivos específicos, queríamos também investigar sobre o conhecimento que estes alunos traziam, do ensino básico, relativo às inequações lineares em duas variáveis.

5.2.2.1.1 Resultados

Na resolução deste problema ficou nítido que os alunos estavam "perdidos" e não sabiam nem por onde começar. Esperamos 40 minutos para ver se alguma tentativa de solução surgia, no entanto nenhuma solução foi levantada pelos grupos.

5.2.2.1.2 Discussão

Na resolução do problema sem nenhum auxílio, os alunos apresentaram muitas dificuldades na conversão da língua natural para o registro algébrico, não conseguindo fazer a articulação entre os dois registros, ilustrando um típico exemplo de variação de não congruência de uma conversão. Além do mais, tal fato sugere que as imagens de conceitos destes estudantes estavam vazias, provavelmente por falta de experiências prévias com este tipo de exercício.

Tradicionalmente, no ensino da matemática, encontramos uma grande ênfase no registro algébrico. E, na resolução de inequações não é diferente, pois o tratamento nesse registro pressupõe a utilização de propriedades das desigualdades, que muitas vezes carecem de significação para muitos estudantes. Dificilmente, nos livros didáticos, pede-se a solução gráfica, com a comparação dos gráficos das funções envolvidas na desigualdade dada. De fato, foi natural prever a dificuldade encontrada pelos estudantes ao se defrontarem com um problema como este.

5.2.2.2 Resolução do problema com o auxílio dos *mathlets* e de um encaminhamento da solução

Para melhor orientar os grupos pedimos que entrassem em uma página do site Novas Tecnologias que contém o roteiro didático sobre inequações lineares em duas variáveis, visando à identificação destas desigualdades, por meio da visualização proporcionada pelos *mathlets*, como uma região do plano. Como já era esperado que os grupos tivessem muitas dificuldades para resolver o problema proposto, foi preparado um encaminhamento de solução de modo que eles conseguissem, por meio deste, interpretar a situação. Tal encaminhamento só foi entregue após o uso do computador.

Assim, com mais 50 minutos os alunos já conseguiam esboçar as retas e determinar a região do plano. Mas a dificuldade foi realmente grande, ratificando que estes alunos recém egressos do ensino médio, não tinham a mínima experiência com este tipo de problema.

Como ilustração, apresentamos o diálogo entre a professora e o grupo que chamaremos de 1:

> **Pr.**: Quando vocês receberam a primeira folha que tinha o problema, vocês pensaram em alguma estratégia para resolver o problema ou ficaram perdidos?
> **A1:** Perdidos. E, somente ao receber a segunda folha com o encaminhamento e ver a aula de inequação no computador é que deu uma clareada legal!
> **Pr**.: Parou aí?
> **B1**: Não, aí achamos a primeira equação $10x + 8y = C$
> **Pr**.: O que você quer achar no problema?
> **A1**: Quero que este custo seja mínimo.
> **Pr.**: Mas para este custo ser mínimo tem uma condição, não é?
> **B1**: Tem que estar dentro das três condições do problema.
> **Pr.**: Isso, tem que satisfazer as necessidades do solo.
> **A1**: Então fizemos a separação da equação de cada um, potássio, nitrogênio e fósforo. [...] Então, do enunciado vamos ter $\begin{cases} 3x+2y \geq 3 \\ x+3y \geq 1.5 \\ 8x+2y \geq 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y \geq -\frac{3}{2}x+\frac{3}{2} \\ y \geq -\frac{1}{3}x+\frac{1}{2} \\ y \geq -4x+2 \end{cases}.$
> **Pr.:** Então, se a necessidade do solo fosse exatamente igual a 3, então a gente ia procurar a solução sobre a reta, por exemplo. Como é maior ou igual, qual a região do plano que satisfaz as três desigualdades?
> **B1**: Aí, colocamos no gráfico as retas de potássio, nitrogênio e fósforo. [...] Aí, como são inequações vamos pintar a região que é a interseção das três [pintando na lousa de forma correta a região determinada pelas três desigualdades]

Pr.: Esta região que ele está pintando, a gente chama de região factível, o que quer dizer isso? Se a solução do problema existir, esta aí dentro! Incluindo as fronteiras, porque o terreno deve ter pelo menos igual a 3g de fósforo, 1,5g de nitrogênio e 4g de potássio.
B1: Aí pensamos que a reta do potássio ia ser paralela a função custo.
Pr.: Mas porque vocês pensaram que fosse paralela?
Pr.: Mas, elas não paralelas, veja [indicando a declividade da "reta custo"].
A1: É mesmo, a declividade é diferente, mas é que pensamos que as soluções seriam nos pontos $\frac{6}{7} e \frac{3}{14}$. Achamos estes pontos como a interseções das retas.
Pr.: Então, porque seriam esses pontos?
B1: Eles seriam os primeiros pontos onde a "reta custo", se fosse "andando", tocaria a região.
Pr.: Está melhorando, agora vocês estão raciocinando! Vocês quase foram lá! Então desenha a reta de custo zero. Quem quer vir desenhar a reta de custo zero? [...]

A professora foi ao quadro e ajudou a aluna, e, ao mesmo tempo se dirigindo à turma, seguiu perguntando:

Pr.: Se o custo for zero, ela passa na origem. Mas aí eu não compraria nada. [...] mas à medida que este **"C"** varia [...] vamos formar uma família de retas paralelas. Como eu sei que elas são paralelas? Porque, quando eu vario o "**C"**, geometricamente o que varia?
A1: Esta reta se desloca paralelamente, porque tem a mesma declividade.
Pr.: Isso, mas como eu vou saber qual vai ser o custo mínimo? Fala por palavras.
A1: Assim que ela bater no primeiro ponto daquela região.
Pr.: Isso, quanto mais ela andar, mais o custo está subindo [...]. À medida que "**C**" aumenta a reta sofre uma translação no sentido vertical. O custo será mínimo no primeiro ponto em que a reta interceptar a região factível.
B1: Aí professora, vai "tocar" primeiro no [ponto] de baixo [se referindo ao ponto que tem como abscissa x= 6/7]
Pr.: Isso, esta é a interpretação geométrica. Assim, visualmente no computador vai ficar melhor. Mas, como eu resolvo algebricamente, para ter certeza?
A1: Tem igualar, tem que fazer as interseções das retas e testar os pontos para ver qual é.
Pr.: Exatamente, tem que resolver um sistema de equações. [...] e tem mais: se a "reta custo" fosse paralela a uma daquelas retas, não teria um ponto e sim um conjunto de pontos da região que iam satisfazer. Agora, vocês têm que terminar as contas para ver se a nossa intuição é verdadeira. Então vamos visualizar no computador a região do plano factível. [...] Agora, porque esta aula é importante? Porque aqui pensamos nos exercícios antes, no entanto, lá na F2 [se referindo à sala de aula onde ocorre o curso de Cálculo], vocês não pensam antes e ficam, muitas vezes, sem saber o que estão fazendo, né?!

Assim, naquele momento da aula, a professora entrou em uma página do site Novas Tecnologias para o Ensino acessando um ***construtor de mathlets***[66] visando exibir aos estudantes a região factível (região azul), a função custo (reta preta) (ver figuras 21 e 22) e, por fim, a solução gráfica do problema (ver figura 22). No entanto, um fato interessante ocorreu: os alunos pediram à professora que esta os ensinasse a configurar os *mathlets* para que todos juntos pudessem determinar a solução gráfica do problema.

Desta maneira, à medida que a representação gráfica da situação problema foi sendo construída pela professora em conjunto com os estudantes, estes ficavam "empolgados", pois afinal eles estavam participando ativamente na construção da solução de um problema que, em um momento inicial daquela aula, havia sido considerado extremamente difícil de ser resolvido, um grande desafio.

Figura 21: Região factível e função custo – problema do agricultor

[66] Um construtor de *mathlets* é uma biblioteca de *mathlets* configuráveis, onde a alteração de alguns parâmetros é capaz de produzir uma nova aplicação, completamente diferente da anterior. (Paixão, 2008). Com o objetivo de esclarecer o leitor, existem *mathlets* que não são configuráveis e para fim de identificação, todos os *mathlets* que são construtores configuráveis apresentam o botão "*config*" em sua janela.

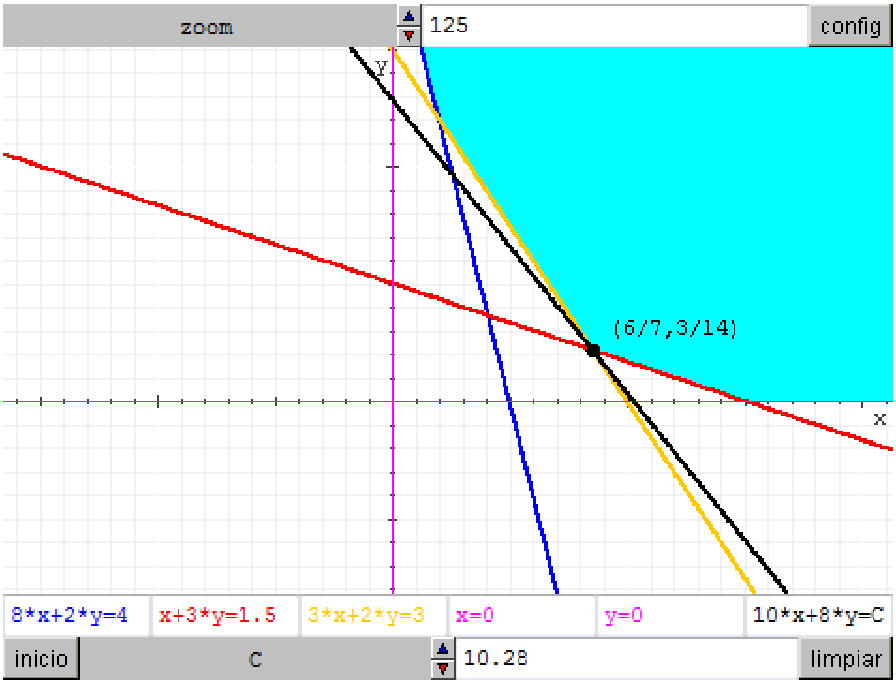


Figura 22: Solução gráfica para o problema do agricultor

5.2.2.2.1 Resultados

Na resolução do problema com o auxílio do computador e de um encaminhamento, 5 grupos ($\frac{5}{8} do\ total$), que vamos chamar de 1, 2, 3, 4 e 5 – determinaram as inequações lineares, a função custo e, em seguida, a região do plano comum as todas a estas desigualdades, obtendo a resposta correta. O grupo 7 ($\frac{1}{7} do\ total$) cometeu um equívoco na declividade de uma das retas e, consequentemente, não obteve a resposta correta, resolvendo parcialmente o problema. Já os grupos, que chamaremos por 6 e 8 ($\frac{2}{8} do\ total$) – não conseguiram resolver o problema. Esses dois últimos grupos não identificaram a região do plano corretamente e nem determinaram graficamente a função custo.

5.2.2.2.2 Discussão

A maioria dos grupos ($\frac{6}{8} do\ total$) após o uso dos *mathlets* e o encaminhamento fornecido, foi capaz de apresentar três representações e fazer duas conversões (da língua natural para o registro algébrico, e do algébrico para o gráfico), revelando que ocorreu um enriquecimento de suas imagens de conceito relativo às inequações lineares em duas incógnitas. Os demais grupos ($\frac{2}{8} do\ total$), apesar de terem conseguido fazer a conversão da língua natural para o algébrico, não foram capazes de realizar a conversão entre um registro discursivo (língua natural) para um não discursivo (gráfico) da forma adequada, mostrando que as suas imagens de conceito relativo à inequações se mantiveram ainda restritas, mesmo depois da intervenção ter sido aplicada. Uma observação adicional é que o insucesso de muitos alunos neste tipo de problema, segundo Duval, pode ser justificado porque a conversão semiótica se depara com dificuldades como o fenômeno de não congruência, pois os alunos não reconhecem o mesmo objeto por meio de duas representações diferentes.

5.2.3 Problemas envolvendo transformações no gráfico de funções elementares

Esta atividade foi aplicada na quarta aula de IC no laboratório do CCMN. O objetivo desta atividade foi desenvolver as transformações no gráfico de funções elementares, tais como: as polinomiais de primeiro ou segundo graus e a função modular. Não se pretendeu, de forma alguma, um estudo exaustivo do assunto, pois para isso, as ferramentas do Cálculo que estavam sendo estudadas, concomitantemente a este curso, iriam ser desenvolvidas e certamente auxiliariam sobremaneira.

Entretanto, buscamos desenvolver idéias muito úteis e que, seguramente, poderiam ampliar os “horizontes”, quando temos em vista a compreensão do gráfico de uma função, por meio das eventuais transformações por ele sofridas, em comparação ao gráfico de uma função mais simples.

Além do mais, o estudo dos gráficos das funções envolvidas auxilia o estudante na resolução de equações ou inequações, pois as operações algébricas a serem realizadas adquirem um significado que é visível nos gráficos das funções esboçados no mesmo referencial cartesiano.

Sob estas perspectivas, começamos esta aula por meio das transformações das funções polinomiais do segundo grau, sem o auxílio do computador, objetivando investigar as imagens de conceito que os alunos envolvidos nesta atividade traziam da escola básica. Em seguida, após o uso do roteiro de atividades baseado em *mathlets*, pedimos que os grupos de estudantes resolvessem um segundo conjunto de problemas visando diagnosticar se o uso de *mathlets* enriqueceu as imagens de conceito destes alunos sobre as transformações de gráficos elementares. Ainda, em relação a este segundo conjunto de problemas, utilizou-se a interpretação geométrica das transformações de funções e o significado geométrico da derivada[67] para determinar a derivada de funções que foram transformadas (por translações, dilatações, contrações e reflexões) em comparação às derivadas das funções originais. Vale ressaltar que sob este enfoque, estaremos dando uma interpretação geométrica à regra da cadeia. No entanto, estes estudantes ainda não tinham estudado a regra da cadeia e só conheciam, até àquela presente data, a interpretação geométrica da derivada e as derivadas de algumas funções elementares, como, por exemplo, a derivada de funções polinomiais.

Para melhor organizar a análise desta atividade a dividimos, como já feito anteriormente, em duas partes: **(I)** resolução do primeiro conjunto de problemas sem auxílio do computador, **(II)** resolução do segundo conjunto de problemas com o auxílio do computador utilizando um roteiro didático baseado em *mathlets*[68].

<table>
<tr><td colspan="2">Alunos presentes: 40, divididos em 8 grupos.</td></tr>
<tr><td>Data: 27/04/2010</td><td>Local: LEP n.º 02 do CCMN/UFRJ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mídias utilizadas:
• Lápis e Papel
• Lousa
• site: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/cap62.html</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos Específicos:
• A abordagem do roteiro didático baseado em mathlets consiste que os alunos visualizem e cheguem ao gráfico pretendido por meio de transformações nos gráficos básicos, que lhes são familiares.
• Utilizar os conhecimentos relacionados a transformações no gráfico de funções elementares e o significado geométrico da derivada para o cálculo de derivadas de funções que foram transformadas (por translações, dilatações, contrações e reflexões).</td></tr>
<tr><td>Problema sem o uso do computador</td><td>$1^{\underline{o}}$ $\boldsymbol{Problema}$: Explique como é possível, obter os seguintes gráficos
(1) $y = x^2 - 2$
(2) $y = (x + 5)^2$
(3) $y = x^2 - 2x + 3$
a partir de $y = x^2$.</td></tr>
</table>

[67] O significado geométrico da derivada em cada ponto de uma função ao qual nos referimos, é declividade da reta tangente à função em cada ponto.
[68] Este roteiro didático se encontra nos anexos.

<table>
<tr>
<td>Problema com auxílio de um roteiro baseado em mathlets</td>
<td>$2^{\underline{o}}$ $\boldsymbol{Problema}$: Como é possível obter o gráfico de:
(1) $y = |x| + 4$, a partir do gráfico de $y = |x|$
(2) $y = |x - 3|$, a partir do gráfico de $y = |x|$
(3) $y = x^2 - 2x + 3$ a partir de $y = x^2$.
(4) Se $\begin{cases} f_1(x) = f(-x) \\ f_2(x) = -f(x) \\ f_3(x) = -f(-x) \end{cases}$, como é possível obter os gráficos de $f_1, f_2\ e\ f_3$ a partir do gráfico de f(x)?
(5) Se $f(x)$ é uma função diferenciável e C um número real qualquer, use o significado geométrico da derivada da função para obter uma fórmula para $g'(x)$ em cada um dos itens abaixo:
(a) $g(x) = f(x) + C$
(b) $g(x) = f(x + C)$
(c) $g(x) = Cf(x)$
(d) $g(x) = f(Cx)$
(e) $g(x) = af(Cx)$, com $a \in IR$
Use os resultados obtidos para calcular $f'(x)$ nos seguintes casos:
(i) $f(x) = (x + 3)^5$
(ii) $f(x) = x^5 + 100$
(iii)$f(x) = (x^4 - 3)^5$
(iv)$f(x + 3) = x^5$</td>
</tr>
</table>

Tabela 6: Problemas envolvendo transformações nos gráficos de funções elementares

5.2.3.1 Resolução do primeiro problema sem o auxílio do computador

Nesta primeira parte da atividade percebemos os alunos “animados” achando o problema proposto bem fácil, afinal esboçar gráficos de parábolas era um assunto bem conhecido por todos, e, naturalmente, não teriam dificuldades para completá-lo, em teoria. A tarefa foi realizada muito rapidamente, pois em meia hora, no máximo, todos os grupos entregaram as suas soluções.

5.2.3.1.1 Resultados

Na resolução do problema sem o auxílio do computador, somente o grupo 4 ($\frac{1}{8}do\ total$) conseguiu concluir o problema justificando, a partir da parábola $y = x^2$, que o gráfico (1) foi obtido por meio de uma translação vertical de uma unidade para baixo, já o gráfico (2) por meio de uma translação horizontal a esquerda de 5 unidades e o gráfico (3) por meio de duas translações: uma horizontal a direita de uma unidade e uma vertical de duas unidades para cima. No entanto, não fez os gráficos e nem explicou como visualizou tal transformação, pois não fez nenhum tratamento no interior do registro algébrico, ou seja, não completou os quadrados. Os grupos que chamaremos de 1, 2, 3, 5, 6 e 8 ($\frac{6}{8}do\ total$) - conseguiram explicar as translações verticais e horizontais nos gráficos (1) e (2), mas não conseguiram explicitar como se poderia obter o gráfico da função (3) a partir da parábola $y = x^2$. Esses grupos (1, 2, 3, 5, 6 e 8) essencialmente determinaram as raízes da função quadrática e as coordenadas do vértice pela fórmula, conseguindo, após achar as raízes e o vértice, justificar as translações das funções (1) e (2). No entanto, vale observar que na função (3) este processo foi prejudicado pelo fato de as raízes serem complexas e a parábola não interceptar o eixo horizontal. Já o grupo 7, não obteve nenhuma resposta correta em nenhum dos três itens.

5.2.3.1.2 Discussão

De forma bem clara, este simples exercício de transformações de gráficos ilustra como o uso de fórmulas no ensino básico prejudica a aprendizagem do traçado de gráficos no ensino da matemática, em geral, e no caso do Cálculo constitui um obstáculo para o progresso dos alunos, como foi observado por Nasser (2009).

Os alunos envolvidos nesta atividade fizeram a conversão do registro algébrico da função do 2º grau para o figural (gráfico), no entanto os outros resultados alcançados pela maioria dos grupos em relação aos itens (1) e (2) se deve ao uso de fórmulas ou ainda pela tabela (registro numérico), demonstrando uma imagem conceitual restrita relativa às transformações de gráficos de funções quadráticas.

5.2.3.2 Resolução do segundo problema com o auxílio de um roteiro didático baseado em *mathlets*

Após o uso do roteiro baseados nos *mathlets*, os grupos, como de costume, foram para a plenária com a professora da turma. O grupo 2 inicia um diálogo sobre as translações do 2º problema de forma correta, argumentando da seguinte forma:

> **Pr.**: Como vocês fizeram?
> **A2**: Bom, este primeiro gráfico vamos deslocar 4 unidades no eixo y.
> **Pr.**: Isso aí! Então aproveita e faz o exercício da derivada logo de uma vez [se referindo ao exercício (5) item (a)]
> **Turma**: [risos]
> **Pr.**: Muito bem, como se obtém o gráfico de uma nova função $g(x) = f(x) + C$ a partir do gráfico da "velha"?
> **A2:** Se C for positivo, o gráfico sobe "C" unidades e se "C" for negativo, o gráfico desce.

> **Pr.**: Muito bem, então raciocinando desta maneira e sabendo o significado geométrico da derivada, e, lembrando da aula de ontem de Cálculo, qual é a derivada da função $g(x)$?
> **Turma:** A derivada da g é f'.
> **Pr.**: Isso, mas explica como a gente pode chegar a esta conclusão sem fazer conta nenhuma. [...] só sabendo a interpretação geométrica da derivada. [...] que em cada ponto, é igual a que?
> **A2:** A declividade da reta tangente à função em cada ponto.
> **Pr.:** Então, só sabendo isso, explica!
> **A2**: O "C" não vai influenciar no "m" da função, não... na declividade da função.
> **Pr.**: Em cada ponto?
> **A2**: É. [...] [aí o aluno se enrola na explicação]
> **Pr.**: Pera aí [...]. Como eu obtenho o gráfico da g partir do gráfico da f?
> **A2:** Eu desloco o gráfico da g em "C" unidades para cima, por exemplo.
> **Pr.:** Quando eu faço isso, muda as declividades das retas tangentes?
> **A2:** Não!
> **Pr.:** Qual é a conclusão sobre as derivadas?
> **A2**: [não dá resposta e se mostra ainda perdido]

Percebemos então por meio deste diálogo, que o aluno entendeu as translações, mas se mostrou confuso e não conseguiu afirmar que $g'(x) = f'(x)$ se $g(x) = f(x) + C$, apesar de ter visto este resultado na aula de Cálculo um dia anterior. Notamos também mesmo que independente dele ter lembrado ou não do resultado, a sua confusão estava relacionado ao fato de não ter conseguido interpretar geometricamente que a derivada não se altera caso se tenha translações verticais (ou horizontais). A professora tentou mais uma vez fazer com que ele entendesse só que nesta tentativa obteve êxito:

> **Pr.**: Vem cá, faz o gráfico aí da $f(x)$ e da $g(x) = f(x) + C$. Temos um ponto aqui na $f(x)$ e vamos pegar um ponto na $g(x)$. Qual é a declividade da reta tangente nestes dois pontos? Mudou? [mostrando o desenho ao aluno]
> **A2**: Não mudou!
> **Pr.**: E se ele é deslocado paralelamente, muda a declividade da tangente?
> **A2**: Não.
> **Pr.**: Então, qual é a derivada da $g(x)$?
> **A2**: A mesma derivada da $f(x)$. Ou seja, $g'(x) = f'(x)$.
> **Pr.**: Então muito bem, já respondemos o (5).

5.2.3.2.1 Resultados

Na resolução do segundo problema após o uso dos *mathlets*, todos os grupos conseguiram acertar os itens (1) e (2) do segundo problema, mostrando que suas imagens de conceito sobre as translações verticais e horizontais foram enriquecidas. Em relação ao item (3) somente os grupos 6 e 7 ($\frac{2}{8}\, do\ total$) não obtiveram a resposta certa.

Essencialmente o grupo 7 continuou determinando as raízes da função como estratégia para justificar as translações, entretanto este processo foi prejudicado pelo fato de as raízes serem complexas e a parábola não interceptar o eixo das abscissas. No quarto item do 2º problema, o grupo 4 não respondeu e o grupo 6 fez uma confusão entre reflexões e a declividade da reta tangente. Os demais grupos $(\frac{6}{8}\ do\ total)$ acertaram este item por completo. No item (5) do segundo problema, primeira parte ((a), (b), (c), (d),(e)) os grupos 1, 2 e 3 acertaram o exercício por meio da interpretação geométrica das translações e o significado geométrico da derivada de uma função em cada ponto. Importante ressaltar que estes alunos ainda não tinham estudado a regra da cadeia. O grupo 7 não respondeu ao item (5) e os demais grupos, 4, 5 e 8 cometeram equívocos. Sobre a 5ª questão, o grupo 6 só conseguiu obter a resposta certa nos itens 5-(a), 5-(b). Ainda em relação a este item e seus subitens (i, ii, iii e iv), quatro grupos, que vamos chamar de 1, 2, 3 e 5, - tiveram êxito em suas soluções. Os grupos 4, 6, 7 e 8 simplesmente não responderam.

5.2.3.2.2 Discussão

Com relação à interpretação geométrica das transformações é totalmente notável que os alunos, após o uso dos *mathlets*, passaram a trafegar do registro algébrico para o figural por meio das translações verticais e horizontais de forma bem fácil, havendo um enriquecimento de suas imagens de conceito.

Uma observação adicional é que percebemos que a maioria dos alunos ao refazerem o mesmo exercício da função quadrática $(y = x^2 - 2x + 3)$ não usou mais as tabelas e nem coordenadas do vértice como meios de justificar as transformações ocorridas no gráfico. As transformações das funções elementares passaram a ser feitas de uma forma bem natural, como por exemplo, no caso da função modular. Em relação à função quadrática, os estudantes com o intuito de justificar as translações tiveram que completar os quadrados e fazer dois tratamentos no interior do registro algébrico, fazendo em seguida a conversão do algébrico para o registro figural aumentando a sua compreensão sobre os objetos sob os quais está se operando, e por conseqüência, o enriquecimento das suas imagens de conceitos sobre os traçados de gráficos de funções polinomiais do segundo grau.

5.2.4 O problema do ponto sem retorno – um problema de declividades

Como já foi explicado nas atividades anteriores, organizamos a análise desta atividade em duas partes: **(I)** resolução do problema sem o auxílio do computador, **(II)** resolução do mesmo problema, agora com o auxílio de um roteiro didático[69] utilizando *mathlets.*

<table>
<tr><td colspan="2">Alunos presentes: 48, divididos em 14 grupos</td></tr>
<tr><td>Data: 18/05/2010</td><td>Local: LEP n.º 02 do CCMN/UFRJ</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mídias utilizadas:
• Lápis e Papel;
• Lousa;
• site: http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/cap85s3.html</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objetivos Específicos:
• Utilizar os conhecimentos relacionados à função afim, a interpretação física de coordenadas no plano e da declividade de uma reta, e sistemas de equações lineares em uma situação-problema;
• A abordagem do roteiro didático consiste em dividir o problema em duas partes (cada uma referente a uma função afim) e em seguida realizar uma comparação entre estas, sobrepondo-as de modo a coexistirem, visando incentivar a interpretação e a visualização dos elementos constituintes do problema por parte do estudante, para que ele seja capaz de construir imagens mentais consistentes acerca do significado matemático de cada dado físico do problema, e do significado físico de cada elemento matemático constante nos mathlets vinculados ao roteiro.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problema: 1ª parte - Um avião de pequeno porte, com autonomia para quatro horas de viagem, é capaz de desenvolver uma velocidade de cruzeiro de 300 km/h quando não há vento. Durante um vôo, na viagem de ida, um vento de 50 km/h sopra a favor o que aumenta a velocidade de cruzeiro do avião, em relação à terra, para 350 km/h. De repente, o piloto se dá conta de que na viagem de volta, o mesmo vento estará soprando contra e, em conseqüência, a velocidade do avião se reduzirá para 250 km/h. O problema é determinar qual a distância máxima que o avião pode cobrir na viagem de ida de tal</td></tr>
</table>

[69] Este roteiro se encontra nos anexos desta dissertação.

maneira a estar seguro de que há combustível para fazer a viagem de volta. A esta distância máxima chamamos de ponto sem retorno.
2ª parte[70] - Considerando que a velocidade do vento está variando, determine a equação do lugar geométrico dos pontos sem retorno.

Tabela 7: O problema do ponto sem retorno

5.2.4.1 Resolução do problema sem auxílio do computador

Este problema foi proposto no quinto encontro que aconteceu no laboratório do CCMN. Nesta aula, como em todas as outras, os grupos tiveram tempo para discussão. O tempo de duração foi de uma hora e quinze minutos. E, depois os grupos apresentaram em plenária as suas soluções.

5.2.4.1.1 Resultados

Na resolução do problema sem o auxílio do computador 7 grupos ($\frac{7}{14}\, do\ total$), que vamos chamar de grupos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7 - utilizaram essencialmente a idéia de sistema de equações lineares baseadas nos tempos de ida e volta, a partir das equações do tipo $\begin{cases} 350t_1 = 250t_2 \\ t_1 + t_2 = 4 \end{cases}$, obtendo a resposta correta. Já outros três grupos, que chamaremos de grupos 8, 9, 10 – buscaram resolver o tempo de ida, de volta e o total por meio das fórmulas $\begin{cases} t_{ida} = \frac{x}{350} \\ t_{volta} = \frac{x}{250} \end{cases}$ $e\ t_{total} = t_{ida} + t_{volta}$, sendo que os grupos 8 e 9 chegaram à resposta correta, e o grupo 10 cometeu um equívoco nas contas. Os grupos que chamaremos de grupos 11, 12, 13 e 14, não conseguiram resolver o problema. O grupo 14 utilizou uma solução por meio de fórmula da Física (Mecânica), essencialmente $V = \frac{\Delta S}{\Delta t}$. Os grupos 12 e 13 deixaram o problema praticamente em branco, e, por fim, o grupo 11 tentou resolver o problema pelas fórmulas $\frac{-\Delta}{4a} = 600$ e $\frac{-b}{2a} = 2$, mas não conseguiu concluir nada mais adiante.

Durante a discussão em plenária, o grupo 1 expõe a sua solução por sistemas lineares e ao final a professora perguntou quem deu a interpretação geométrica para o problema. O grupo 8 se apresentou e iniciou o seguinte diálogo:

[70] Essa pergunta foi feita pela professora já durante a plenária com um grupo de alunos. No entanto, em seguida, essa foi estendida a toda a turma de estudantes presentes no laboratório.

Pr.: Então, qual foi a sua interpretação geométrica deste problema? Quando a gente fala em interpretar geometricamente, é dar um significado geométrico ou a gente faz um gráfico.
A8: Se ele começa no repouso, [aluna faz um esboço dos gráficos no quadro, mas para melhor ilustrar, ver figura 20, a seguir], o avião sai do zero e vai até o ponto onde a velocidade vai mudar, $t = \frac{5}{3} = 1.666\ldots$, que o grupo anterior também achou [...], então você sabe que aqui exatamente ele muda a velocidade dele [...] depois ele faz outro movimento, que seria o de volta.
Pr.: O que significa a inclinação desta primeira reta?
A8: a velocidade de ida
Pr.: O que significa a inclinação da outra reta?
A8: A velocidade de volta.
Pr.: A inclinação daquela reta ali é negativa, o que significa?
Turma: Que ele está retornando
Pr.: Deixa eu falar uma coisa. Quando ele vai, tem uma velocidade constante igual a 350km/h. O gráfico do movimento uniforme é uma linha reta, então a declividade é a velocidade[...]. *Agora vou fazer uma pergunta: se a velocidade do vento varia, o que varia neste gráfico*?
Turma: [sem respostas, pessoas confusas]
Pr.: Conforme a velocidade do vento varia, este ponto varia [se referindo ao esboço no quadro], ele pode mudar de lugar. Então, quando ele muda de lugar, ele descreve uma curva que varia em função desse tempo. Alguém consegue achar esta curva?
Turma: [alunos confusos]
Pr.: Vamos pensar mais um pouco, mas daqui a pouco vamos pensar com o auxílio do computador.

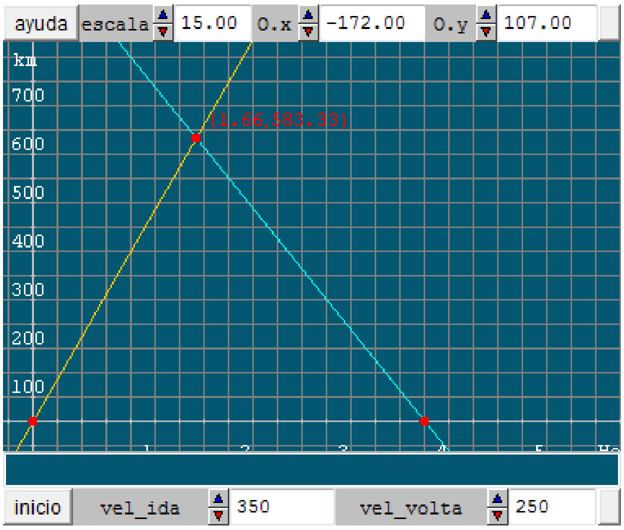


Figura 23: O problema do ponto sem retorno

Note que durante o diálogo anterior, a professora aumentou a dificuldade do problema ao perguntar a turma qual seria a curva que seria descrita caso a velocidade do vento não fosse constante, ou seja, se esta estivesse variando.

Assim, um tempo depois, a mesma estudante do grupo 08 levanta e pede para expor o que ela pensou, vejamos o diálogo:

> **A8**: A idéia é igual ao do grupo 1, mas eu fiz assim: $\begin{cases} t_1 + t_2 = 4 \\ (300 + v)t_1 = (300 - v)t_2 \end{cases}$ [...] $S_1 = \frac{360.0000 - 4v^2}{600}$ $e\ S_2 = \frac{360.0000 + 4v^2}{600}$
>
> **Pr.**: Mas o que você achou foi a distância em função da velocidade do vento, e na realidade nem sei se assim temos a distância máxima. [...] Vamos pensar agora com o auxílio do computador. Vamos para o site[71], entrem em "função afim" e depois em "o ponto sem retorno" [se referindo em qual página os alunos tinham que entrar no site Novas Tecnologias]. Vou dar mais um tempo para vocês pensarem e me responderem esta última questão.

Importante ressaltar, que muitos grupos resolveram, por meio de fórmulas, responder a primeira proposta do problema. Entretanto, nenhum deles conseguiu determinar o lugar geométrico dos pontos sem retorno quando se considerou a velocidade do vento variando.

5.3.3.1.2 Discussão

Metade dos grupos chegou à resposta esperada, fazendo a conversão entre o registro da língua natural e o algébrico. Todos os grupos que acertaram o problema $\left(\frac{7}{14}\, do\ total\right)$, o resolveram pelo registro algébrico. Os demais resolveram por fórmulas da física ou não conseguiram nem sequer terminar o problema proposto. O que nos sugere que estes alunos, de uma forma geral, resolvem os problemas de forma técnica, não demonstrando compreensão sobre os objetos que estão operando, e, consequentemente, possuem imagem de conceito muito restrita sobre os conceitos de declividade e reta tangente. O grupo 11 escreveu as fórmulas do vértice da parábola como tentativa de solução ao problema proposto e não conseguiu concluí-lo, mostrando que estes dados foram simplesmente decorados. Além disso, o vértice da parábola é evocado das imagens de conceito desses estudantes mais uma vez, o que nos faz pensar que a palavra máxima (o) (ou mínima (o)) durante a resolução do problema provavelmente deve ser a causa de tal estímulo.

Sobre a determinação do lugar geométrico dos pontos sem retorno e considerando a velocidade do vento variando, nenhum dos grupos conseguiu generalizar

[71] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/cap85s3.html

tal resultado, provavelmente por não terem conseguido fazer a conversão do registro gráfico para o registro algébrico. Note que nesta atividade, nos deparamos com o fenômeno da não congruência, pois tais alunos não conseguiram reconhecer o mesmo objeto por meio de duas representações diferentes.

5.3.3.2 Resolução do problema com o auxílio do computador

Depois que os alunos entregaram suas soluções, a professora começou a questionar a turma sobre os conceitos que estavam envolvidos na solução do problema. Após a utilização do roteiro didático baseado nos *mathlets*, percebemos que os alunos foram respondendo uma a uma das perguntas com certa desenvoltura, ficando nítido que os estudantes estavam mais "livres" dos domínios da álgebra (resolver um sistema linear, por exemplo) ou das fórmulas da física. Assim, as respostas passaram a ser sobre declividades que se misturam com conceitos físicos e, desta forma, expressavam movimento. Na ida, declividade positiva, pois o avião está indo a favor o eixo orientado. No entanto, na volta temos a velocidade negativa, pois o avião de desloca no sentido contrário. Em determinado momento, a professora questionou a turma:

> **Pr.:** Bem, como é possível calcular a velocidade de regresso em um gráfico como esse? [se referindo à imagem de um gráfico qualquer produzida na tela do computador e ampliada por um projetor de multimídia na sala do LEP]. Estou falando se fosse outra curva qualquer, como a gente calcularia a velocidade qualquer?
> **A2:** A declividade da reta tangente.
> **Pr.:** E a velocidade instantânea?
> **A2:** Pela declividade da reta tangente à curva em cada ponto.
> **Pr.:** Como eu relaciono a velocidade instantânea com a velocidade média?
> **Turma:** [ninguém responde]
> **An:** Diminuindo o tempo percorrido [respondeu um aluno que naquele momento não o identificamos e o chamamos de An]
> **Pr.:** Isso, fazendo cada vez menor, cada vez menor... aí a velocidade média se aproxima da velocidade instantânea. Então, retomemos o problema do avião.

Após este diálogo, a professora continuou tecendo observações sobre o referido problema. E no decorrer de suas observações, comentou que durante a resolução do roteiro didático com *mathlets*, no item que perguntava aos alunos qual era a curva descrita pelos pontos sem retorno (considerando que a velocidade do vento variava), notou que muitos alunos visualizaram uma curva que "lembrava" uma parábola, e, sendo assim, responderam na atividade que era uma parábola sem expor nenhuma justificativa.

Desta forma, a professora ressaltou que visualizar não era suficiente para fazer tal afirmação, teriam que provar. E, em seguida, demonstrou para a turma que aquela curva descrita por aqueles pontos sem retorno era determinada pela expressão: $S = -150t^2 + 600t$. Assim, a partir desta demonstração, poderiam concluir que a sua afirmativa era verdadeira.

Antes de passarmos aos nossos resultados desta etapa, desejamos registrar, aqui, dois importantes comentários de duas alunas desta turma de introdução ao Cálculo que aconteceram ao final desta aula. Uma delas se dirigiu a pesquisadora e afirmou:

> Mesmo se eu reprovar em Calculo I, a disciplina introdução ao calculo me auxiliou em compreender detalhes que na aula de calculo I eu não enxergaria, pois funções no ensino médio não é dado como deveria ser.
> (aluna do curso de introdução ao cálculo, 18/5/2010)

Em seguida outra estudante que estava perto, se aproximou e ratificou:

> As aulas no laboratório de computação foram úteis para mim, a discussão em grupo e a visualização prática no computador ajudaram a captar informações que às vezes somente as aulas teóricas não permitiam. Claro que tudo isto foi possível devido ao interesse da turma, e pela professora saber como orientar neste tipo de aulas.
> (outra estudante da turma de IC, 18/5/2010)

5.3.3.2.1 Resultados

Na resolução do problema com o auxílio do computador, os grupos 1, 2 e 3 conseguiram determinar a curva $S(t) = -150t^2 + 600t$ como o lugar geométrico dos pontos sem retorno. Os grupos 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 não conseguiram generalizar o problema proposto.

5.3.3.2.2 Discussão

Três grupos, que denominamos acima por 1, 2 e 3 conseguiram resolver o roteiro de atividades proposto totalmente, fazendo a conversão do registro gráfico para o algébrico e desta forma explicitaram a equação da curva pedida, mostrando que as suas imagens de conceito foram enriquecidas. Os grupos 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 não resolveram o problema em sua totalidade, pois não determinaram a expressão da curva que generalizava o problema, justificando somente que era uma parábola. De forma semelhante, este problema já foi enfrentado por Palis (2007), como já relatamos no capítulo 2 deste relatório, pois alunos são econômicos ao realizarem as suas justificativas por escrito ou quando estas são totalmente ausentes. Neste contexto, uma observação adicional sobre este fato é que podemos supor que alguns desses estudantes não se envolveram neste processo de construir tal demonstração não porque sejam incapazes, mas porque, provavelmente, não vêem razão ou necessidade para fazê-lo, como foi ressaltado por Balachef (1991, apud Giraldo, 2004). Por outro lado, alguns estudantes podem não ter conseguido determinar a equação da curva, pois não conseguiram fazer a conversão do registro gráfico para o registro algébrico, sugerindo que suas imagens de conceitos, mesmo após a intervenção, ainda permaneceram restritas.

Em suma, pelos dados apresentados antes e depois do uso do computador e das interações entre os participantes, é nítido que houve um enriquecimento das imagens de conceitos desses estudantes envolvidos nesta atividade. No entanto, ainda percebemos como é difícil mudar padrões de pensamentos e comportamentos que foram formados durante 11 anos de escola básica (Nascimento, 2000).

Se o leitor nos permite, após tudo que foi exposto até aqui, como professora de Ensino Médio, com anos de magistério, nos antecipamos à nossa conclusão afirmando: é preciso que ocorra uma mudança na escola básica para ontem! O registro algébrico é muito importante sim na formação do estudante, mas não deve e nem pode ser a única forma que o estudante se aproprie de um conceito ou objeto matemático, pois se assim continuar sendo as imagens de conceito dos estudantes, provavelmente, serão sempre restritas e/ou empobrecidas.

6. CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

Podemos concluir, de uma forma geral, que o processo de visualização, não estando subordinado à Álgebra, proporcionado pelo uso dos *mathlets* teve um papel fundamental no enriquecimento da imagem de conceito dos estudantes. Tal processo foi importante também ao ser empregado na análise da validade ou mesmo da correção de concepções que os alunos possuíam a respeito de determinados conceitos matemáticos ou conjecturas, contrariando, inclusive, em alguns momentos, as suas intuições. Desta forma, mostrou que os aspectos visuais, algébricos, tabulares (numéricos) e verbais se complementaram no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Introdução ao Cálculo. Além disso, como podemos observar, esta integração foi estimulada pelos roteiros de atividades baseados em *mathlets*. Somando-se ainda a estes fatores a atuação da professora na mediação, auxiliando os alunos a interpretar da melhor forma os gráficos projetados na tela do computador e a coordenar os diversos tipos de registros de representações semióticas, foi primordial para o enriquecimento dos conceitos envolvidos neste estudo.

No entanto, algumas dificuldades ocorreram devido a problemas de não congruência da linguagem algébrica para o registro gráfico (ou vice-versa) nos momentos em que os estudantes trabalhavam sem o auxílio do computador. Por outro lado, o recurso computacional dos *mathlets* ofereceu a possibilidade das diversas representações de uma mesma situação ou conceito, minimizando as dificuldades dos alunos no fenômeno da não congruência dos registros envolvidos.

Apesar dos estudantes terem trafegado por diversos registros de representações semióticas, na solução final de alguns problemas propostos era evidente que estes alunos ainda se valiam das "velhas" forças da álgebra como a principal forma de justificar suas soluções escritas. No entanto, em algumas atividades, percebemos a álgebra começando a perder a sua força em detrimento da interpretação geométrica - como, por exemplo, na interpretação dos variados tipos de transformações em gráficos de funções.

Algumas limitações ocorreram em nosso estudo, como o grande número de alunos no laboratório. Do ponto de vista da pesquisa, em alguns momentos, percebemos que esta foi prejudicada, pois é muito difícil acompanhar de perto o crescimento cognitivo dos estudantes em uma sala de aula “lotada”. Assim, sugerimos que se a turma apresentar um elevado número de alunos, que seja adotado um sistema de monitoria para apoiar o(a) professor(a) no atendimento aos estudantes. Outros aspectos específicos também prejudicaram o planejamento das aulas de Introdução ao Cálculo, como: as diversas reclassificações que ocorreram no semestre de 2010 que promoveram a “superlotação da turma”, os jogos do Brasil na copa do mundo que causaram a perda de aulas, e alguns problemas com a conexão à rede local que atrasavam algumas vezes o início das atividades. Além disso, várias aulas de IC foram remanejadas para a disciplina de Cálculo, pois se esta providência não fosse tomada o curso de Cálculo não teria “cumprido o seu programa”.

Assim, do nosso ponto de vista, os problemas propostos acompanhados dos roteiros didáticos que envolveram o estudo de funções estimularam nos alunos a coordenação e a troca de múltiplas representações, seja por meios próprios, com a ajuda da professora ou, ainda, na presença da mídia informatizada. Desta forma, foi proporcionado a estes estudantes que traziam muitas limitações da escola básica, em relação aos conceitos envolvidos, concluir as atividades de forma mais positiva, revelando um enriquecimento de suas imagens de conceito quando comparadas às suas imagens conceituais apresentadas antes de cada atividade aplicada.

Embora não fosse nosso objetivo preconizar o uso de TIC (no nosso caso, *mathlets*) no ensino, tais atividades foram primordiais no enriquecimento das imagens de conceitos e na coordenação das múltiplas representações. Vale ressaltar que estas duas teorias se mostraram fortemente complementares neste presente estudo.

Um aspecto importante que este estudo evidenciou e destacou foi o papel chave desenvolvido pelo professor com relação ao modo de usar a tecnologia escolhida, pois é de suma importância que o professor saiba planejar as atividades de forma a utilizar a tecnologia fazendo uso de suas potencialidades e limitações a favor de uma aprendizagem significativa, além de estimular que o aluno participe do seu processo de aprendizagem de forma crítica e criativa.

Listamos aqui alguns desdobramentos possíveis deste estudo de modo que este possa ser tomado como ponto de partida em futuras pesquisas, podendo assim contribuir para outras investigações em ensino de matemática:

- ✓ Recomendamos o acompanhamento desses alunos para observarmos o seu rendimento nos demais Cálculos.
- ✓ Sugerimos a divisão feita pela UFRGS de forma que seja realizado um trabalho diferenciado com alunos recém-egressos do ensino médio e os alunos já repetentes em alguma disciplina de Cálculo, visando três tipos de ações: diagnósticas, preparatórias e terapêuticas. As ações diagnósticas buscariam investigar as imagens de conceitos dos estudantes buscando construir um conhecimento sobre as reais necessidades e dificuldades dos alunos, visando o aprimoramento das abordagens dos cursos de Introdução ao Cálculo e Cálculo. As ações preparatórias seriam destinadas aos alunos que não cursaram nenhuma disciplina de Cálculo e objetivariam diminuir o desnível entre o ensino médio e o superior. As ações terapêuticas, por sua vez, visariam os alunos que já reprovaram alguma disciplina de Cálculo, sendo oportunidade de superar as suas dificuldades.
- ✓ Discutir e investigar com profundidade as implicações da aprendizagem em pequenos grupos, que foi utilizada nesta presente investigação, sob a perspectiva da teoria sociocultural desenvolvida por Lev Vygotsky. Esta teoria afirma que a inteligência humana é influenciada pelo meio, sendo o compartilhamento de informações com indivíduos mais experientes um fator importante no processo de aprendizado. Assim, um dos aspectos desta teoria consiste no que o autor convencionou chamar por Zona de Desenvolvimento Proximal (ZPD). Este conceito, segundo Vygotsky (2007)[72], é definido como a distância entre o desenvolvimento real - determinado pela solução de problemas independentemente da ajuda alheia - e o nível de desenvolvimento potencial, determinado por meio da solução de problemas sob a orientação de adultos ou em colaboração com companheiros mais capazes.

Por fim, acreditamos que iniciativas como esta devem ser motivadas, uma vez que ainda há muito que se pesquisar no âmbito da disciplina de Cálculo e de Introdução ao Cálculo, visando minimizar as reprovações na primeira bem como auxiliar os alunos

[72] VYGOTSKI, L. S. **A Formação Social da Mente**. Martins Fontes, São Paulo. SP: 2007.

recém-egressos da escola básica a uma transição menos traumática na passagem do nível básico ao superior.

7. REFERERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados:** análise de uma experiência. 2005. Tese (Doutorado. em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Estudo de Caso em Pesquisa e Avaliação**. Brasília: Liber Livro Ltda, 2008. v.13 (Série Pesquisa).

ARAÚJO, J. L. **Cálculo, Tecnologias e Modelagem Matemática. As Discussões dos Alunos**. Tese (Doutorado. em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. 2002. 278 f.

AZAMBUJA, C. R. J. , MULLER, M. J; GOLÇALVES, N. S. Cálculo diferencial e integral I: superando barreiras para promover a aprendizagem. In: AUDY, J. L. N; MOROSINI, M. C. **Inovações e Qualidade na Universidade: boas práticas na universidade**. Editora: EDIPUCRS, 2008, p.345-354. Disponível em: <http://www.pucrs/edipucrs/online/inovacaoequalidade/inovacao/pag23.html>. Acesso em: 24 ago. 2010.

BARBOSA, A. C. C.; CONCORDIDO, C. F. R.; CARVALHAES, C. G. Uma proposta de Pré-Cálculo com ensino colaborativo. In: Colóquio de História e Tecnologia do Ensino da Matemática, 2, 2004, Rio de Janeiro. ***Anais***... Rio de Janeiro: UERJ, 2004. CD-ROM.

BARUFI, M. C. B. **A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral**. São Paulo. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 1999.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. **Investigação qualitativa em educação**: uma introdução à teoria e aos métodos, Porto: Porto Editora, 1994. 336p.

BORBA, M. C. Coletivos seres-humanos-com-midias e a produção matemática**. Anais -** Trabalhos completos - do I Simpósio de Psicologia da Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Psicologia da Educação Matemática, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. Universidade Federal do Paraná, Universidade Tuiuti do Paraná. Pontifícia Universidade Católica do Parana Curitiba, Brasil, 2001. p. 135-143.

______. Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: BICUDO, M.A.V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática:** Concepções e Perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 285-295.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 99p. (Coleção em Tendências da Matemática).

BORTOLOSSI, H. J. Cálculo a Uma Variável: Diferenciando Problemas e Integrando Ações. In: **V Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro**, 2010.

CASTRO BARBOSA, A. C.; CONCORDIDO, C. F. R. Ensino Colaborativo em Ciências Exatas. **Ensino, Saúde e Ambiente**, v.2 n.3, 2009. p.60-86.

DOERING, C. I; NÁCUL, L. B. C.; DOERING, L. R. O programa Pró-Cálculo da UFRGS. In: CURY, H. N. (Org) **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p. 201-223.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machadado, S. D. A. (Org) **Aprendizagem em Matemática** – Registros de Representação Semiótica, Campinas, Editora Papirus, 2009. p. 11-33.

FIGUEIREDO, V. L. X. e SANTOS, S. A. O computador no ensino de Cálculo: O problema do lixo na UNICAMP e outras aplicações**.** **Zetike**. V. 5, n.7, jan/jun. 2007. P.111-128. Disponível em: <http://www.fae.unicamp.br/zetike/viewarticle.php?id=305>. Acesso em: 25 abr. 2011.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em Educação Matemática:** Percursos Teóricos e Metodológicos. São Paulo: Autores Associados, 2006. – (Coleção Formação de Professores).

FROTA, M. Clara R. Experiência matemática na sala de aula da educação superior In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX ENEM**. Belo Horizonte: SBEM, 2007.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. Uma Breve Revisão Bibliográfica sobre o uso de Tecnologia Computacional no Ensino da Matemática Avançada. In: Carvalho, L. M.; Cury, H. N., Moura, C. A.; Fossa, J. A.; Giraldo, V. (Org.). **História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, v. 2. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2008. p.153-206.

GIRALDO, V. **Descrições e conflitos computacionais**: o caso da derivada. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

GIRALDO, V., ESCARLATE, A. C. Uma Investigação sobre a aprendizagem de Integral em Turmas Iniciais de Cálculo. In: Encontro Nacional de Educação Matemática. **Anais do IX ENEM**. Belo Horizonte: SBEM, 2007.

GOMES, G. H.; LOPES, C. M. C.; NIETO, S. S. Cálculo zero: uma experiência pedagógica com calouros nos cursos de engenharia. In: Congresso Brasileiro de Ensino de Engenharia, 33, 2005, Campina Grande. ***Anais***... Campina Grande: UFPB, 2005. CD-ROM.

GRAVINA, M. A., SANTAROSA, L. M. A. Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. In: **IV Congresso RIBIE**, Brasília, 1988.

LEVY, P. As **Tecnologias da Inteligência**: O Futuro do Pensamento na Era da Informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 2008. 208p.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. **A. Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas, São Paulo: EPU, 1986. 99p.

MACHADO, S. D. A. (Org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. Campinas, S.P: Papirus, 2009.

MATTOS, F. R. P. **Roteiros de Colaboração para o Software Tabulæ:** Estratégias Didáticas para um Modelo de Aprendizagem Colaborativa Apoiada por Computador à Distância em Geometria. Tese de doutorado, COS-COPPE/UFRJ, 2007.

MEYER, João Frederico C. A. e SOUZA JUNIOR, Arlindo J. A utilização do computador no processo de ensinar-aprender Cálculo**:** a constituição de grupos de ensino com pesquisa no interior da universidade. **Zetetiké**, Campinas, vol. 10, n. 17/18, p. 113-148. 2002. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA05.pdf>. Acesso em: 16 jul. 2010.

MORETTI, T. M. A translação como recurso no esboço de curvas por meio da interpretação global de propriedades figurais. In: Machadado, S. D. A. (Org.) **Aprendizagem em Matemática** – Registros de Representação Semiótica, Campinas, Editora Papirus, 2009, p. 149-160.

NASCIMENTO, J. L. Uma Proposta metodológica para a disciplina de Cálculo I. **VI Encontro de Educação em Engenharia,** UFRJ. 2000. Disponível em: <http://www.dee.ufrj.br/VIIEEE/VIEEE/artigos/4/04.doc>. Acesso em: 3 set. 2010

NASSER, L. Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, Maria C. R.; Nasser L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior:** Pesquisas e Debates. Recife: SBEM, 2009. p. 43-58.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. An Agenda for Action: **Recommendations for School Mathematics of the 1980's**. Reston, VA-USA, 1980.

OLIMPIO JUNIOR, A. **Compreensões de Conhecimentos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática –** Uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). **Pesquisa em Educação Matemática.** São Paulo: Editora UNESP. cap. 12, 1999. p.199-220.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação Matemática** - pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PAIS, L. C. Transposição didática; In MACHADO, Silvia D. A., et. al. **Educação matemática**: uma (nova) introdução; EDUC; São Paulo; 2008.

PAIXÃO, V. C. P. S. ***Mathlets***: Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

PALIS, G. R. Desenvolvimento Curricular e pesquisa participante: Integração de um Sistema de Computação Algébrica na transição do ensino médio para o superior. **Primeiro Congresso Internacional de Matemática, Engenharia e Sociedade** – ICMES, Curitiba, 2009.

______. Investigando alguns desafios da incorporação do software *Maple* em Cursos Regulares do Ciclo Superior Inicial: Pré Requisitos Algébricos e Avaliação. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007. **Anais do IX ENEM.** Belo Horizonte: SBEM, 2007, p.1-20.

PEREIRA, V. M. C. **Cálculo no Ensino Médio:** Uma proposta para o problema da variabilidade. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. **Mathematics Education Research Journal,** Austrália, v.13, n.1, p.28-46, 2001.

PINTO, M. M. F.; KAWASAKI, T. F. A Tecnologia e Ensino De Cálculo. In: CARVALHO, L.M, GUIMARÃES, L. C. (Org.). **História e Tecnologia no Ensino da Matemática**, Vol. 1, IME - UERJ, 2002. Editora: UERJ, 2002.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1986. 196p.

PONTE, J. P. **O estudo de caso na investigação em educação matemática**. Quadrante, v. 3, n.1, 1994.

QUINTANEIRO, W. **Representações e definições formais em trigonometria no ensino médio**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.

REIS, F. da S. **A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

______. Rigor e Intuição no ensino do cálculo e análise. In: Frota, Maria C. R. e Nasser L. (Org.). **Educação Matemática no Ensino Superior**: Pesquisas e Debates**.** Recife: SBEM, 2009. p. 81-97.

REZENDE, W. M. **O Ensino de Cálculo**: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. **Anais do II SIPEM** – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 29 a 1º de novembro de 2003a. Santos, SP. (CD-ROM).

______. O Ensino de Cálculo: um problema do ensino superior de matemática? In: Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, 2004. **Anais do VIII ENEM.** Recife: SBEM, 2004, p. 21-32.

SANTOS, A. R.; KUBRUSLY, R. S.; BIANCHINI, W. *Mathlets*: Applets Java para o Ensino de Matemática**; Anais II HTEM;** UERJ: Rio de Janeiro, 2004.

SANTOS, A. R.; PAIXÃO, V.; PEREIRA, V. M. C. Construindo seu próprio *Mathlets*. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. **Anais do IX ENEM**. Belo Horizonte: SBEM, 2007.

SANTOS, R. A.; BIANCHINI, W. Incorporando o computador no ensino de cálculo: Um novo Desafio; **Anais XIV SBIE**; NCE/UFRJ; 2003.

SIERPINSKA, A. Epistemological remarks on functions. **Proceedings of 12th Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education**, Vesprem, Hugary, 1988. p. 568-575.

______. **On understanding the notion of function,** em "The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy", Dubinsky e Hare (Ed.) M. A. A. Notes, v.25, 1992. p.25-58.

Tall, D. **Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change**. For the Learning of Mathematics, p.37-42, 1989.

______. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. The Transition to Advanced Mathematical Thinking. In: Grows D. A. (Ed). **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**, Ed. New York: Macmillan, 1992. p. 495-511.

TALL, D.; VINNER, S. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity**, *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, vol. 3, n. 12, 1981. p. 151-169.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. 402f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

VINNER, S. **Concept Definition, Concept Image and the Notion of Function**. The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14:293-305, 1983.

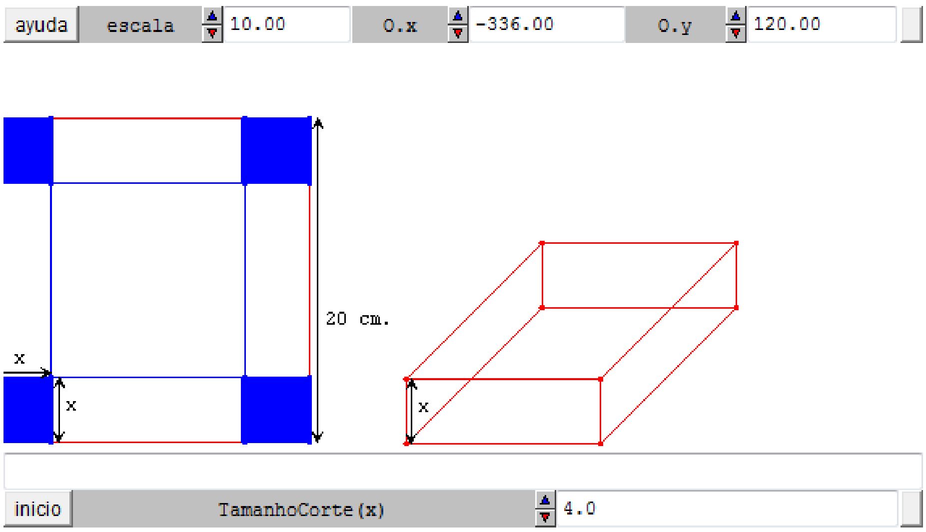
______ . The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall, (Ed.), **Advanced Mathematical Thinking** (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1991.

ANEXO A – O PROBLEMA DA CAIXA

Neste anexo podemos observar como se dá a utilização dos *mathlets* em um exemplo real. O roteiro didático abaixo está disponível na internet[73] e faz parte do Projeto Novas Tecnologias no Ensino – Santos, Kubrusly & Bianchini (2004). Ele refere-se ao problema conhecido "O Problema da Caixa".

A.1 O problema da caixa

Imagine que cortamos um quadrado de lado *x* em cada canto de um pedaço de plástico para construir uma caixa sem a tampa superior. A cena abaixo simula a situação descrita. Você pode modificar o tamanho do corte (*x*) clicando nas setinhas do campo correspondente.

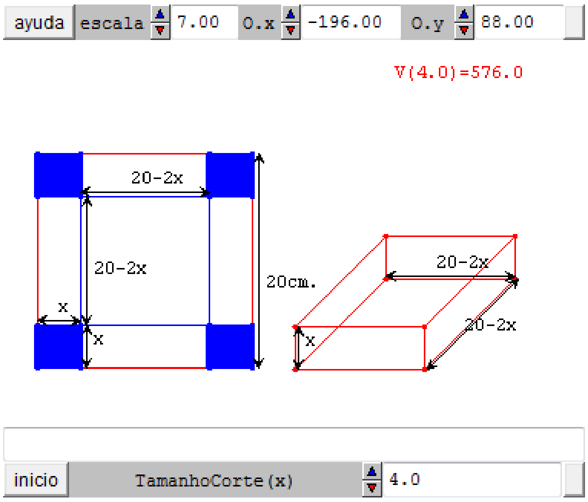


(a) Modifique o tamanho do corte e observe o que ocorre para distintos valores de *x*.
(b) Se o corte for grande, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?
(c) Se o corte for pequeno, como será a forma da caixa resultante? O seu volume será grande ou pequeno?
(d) Qual o maior comprimento possível para o corte? Qual o volume da caixa resultante neste caso?
(e) Qual o menor comprimento possível para o corte? Qual o volume da caixa resultante neste caso?
(f) Descreva as diversas situações possíveis com suas próprias palavras.
(g) Você é capaz de escrever uma sentença matemática que expresse cada uma das dimensões da caixa construída em função do tamanho *x* do corte efetuado?

[73] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap51.html

A.2 Modelando o problema da caixa (1)

A cena abaixo permite que você observe, em conjunto, a variação das dimensões da caixa construída e a variação das dimensões dos recortes feitos na folha de plástico. Clicando nas setinhas da caixa correspondente, varie o tamanho do recorte (*x*) e observe como estas dimensões dependem desse tamanho.



(a) Entre que valores, pode variar o tamanho do corte?

(b) Para um corte de tamanho igual a 4 cm, quais as dimensões (comprimento e largura da base e altura) da caixa resultante? E para um corte de 7 cm? E para um corte de 3 cm? E para um corte de comprimento genérico igual a *x* cm?

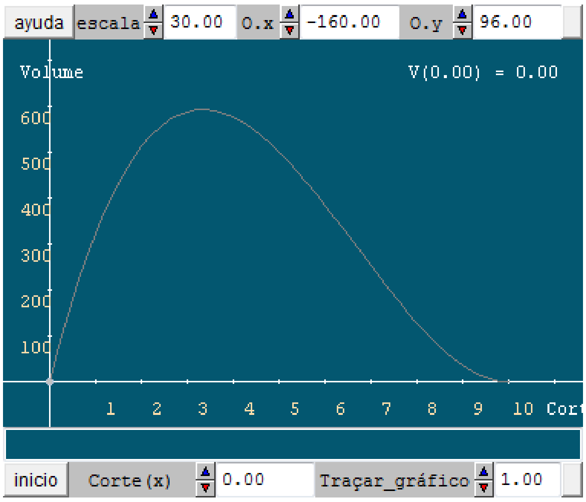
(c) Você é capaz de encontrar uma expressão matemática que forneça o volume da caixa em função do corte *x*?

(d) Construa uma tabela de valores que relacione o tamanho do corte *x* com o volume V da caixa obtida.

(e) Para que valor de *x* você imagina que o volume da caixa seja máximo?

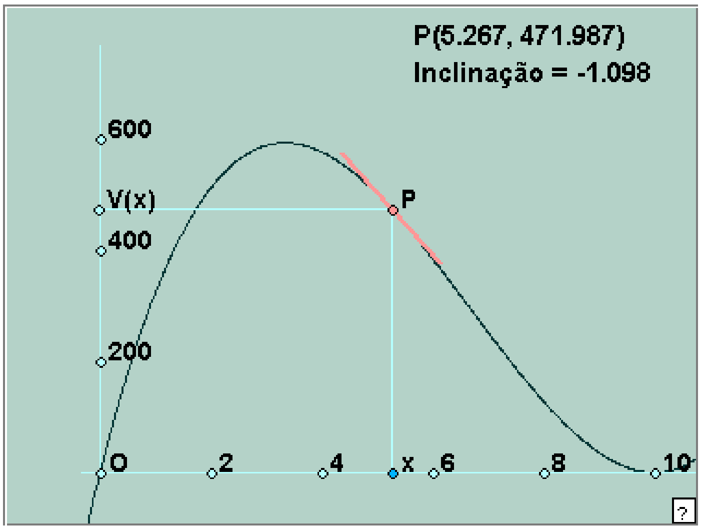
A.3 Modelando o problema da caixa (2)

Podemos construir um gráfico para relacionar o tamanho do corte com o volume da caixa construída. Mostrar como é possível obter este gráfico é o objetivo desta atividade. Como já vimos, para cada valor do corte obtemos uma caixa com um determinado volume que sabemos calcular. No quadro abaixo, variando o valor do corte, pontos são marcados no sistema de coordenadas cartesianas fixado. Experimente! Qual o significado físico das coordenadas dos pontos marcados no quadro?



(a) Altere o valor do parâmetro Traçar_gráfico de 0 para 1e pressione o botão direto do mouse sobre o quadro. O que representa cada ponto do gráfico mostrado na tela?
(b) Modifique, novamente, o valor do corte e observe como varia o volume da caixa correspondente. Como é possível obter um gráfico a partir de uma tabela de valores?
(c) Descreva com suas palavras as características de crescimento e decaimento do gráfico obtido.
(d) Entre que valores varia o volume da caixa? Este gráfico tem um valor máximo? E um mínimo? Em caso afirmativo, tente determinar estes valores máximo e mínimo.
(e) Entre que valores de *x*, você acredita que o volume máximo ocorra? Você é capaz de determinar precisamente qual o tamanho do corte para que a caixa resultante tenha volume máximo?

A.4 Retas Tangentes e Valores Extremos



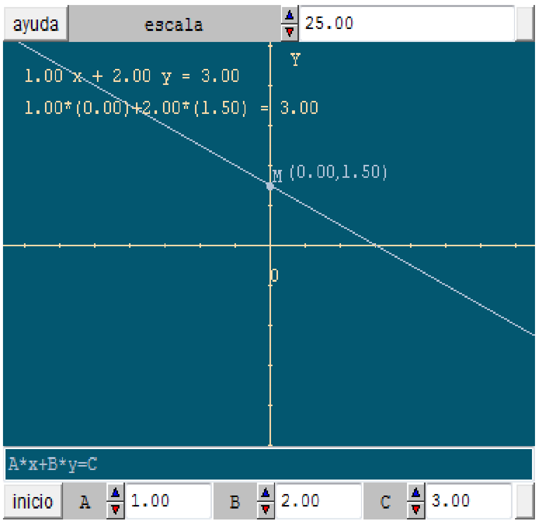
(a) Observe a animação.
(b) Agora, movimente o ponto *x* e observe como varia a inclinação da reta tangente ao gráfico da função.
(c) Conclua: Qual a inclinação da reta tangente a esta curva no seu ponto de máximo?
(d) Esta conclusão vale qualquer que seja os pontos de máximo ou de mínimo de uma curva?
(e) Qual o volume máximo da caixa? Quais as dimensões da caixa de volume máximo?

ANEXO B – GRÁFICOS DE INEQUAÇÕES DO 1° GRAU COM DUAS INCÓGNITAS

Neste anexo podemos observar como se dá a utilização dos *mathlets* para identificar as regiões do plano determinadas por inequações do 1º grau em duas variáveis ou como um sistema de inequações do mesmo tipo. O roteiro didático abaixo está disponível na internet[74] e faz parte do Projeto Novas Tecnologias no Ensino – Santos, Kubrusly e Bianchini (2004) e forneceu suporte ao "Problema do Adubo".

B.1 Gráficos de inequações de primeiro grau com duas incógnitas

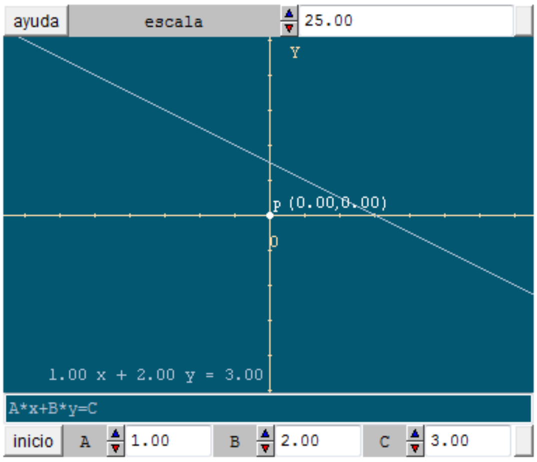
Na cena abaixo representamos uma reta de equação A x + B y + C = 0. O objetivo desta atividade é caracterizar as regiões do plano determinadas pelas desigualdades A x + B y + C > 0, A x + B y + C < 0, A x + B y + C $\leq$ 0, A x + B y + C $\geq$0.



(a) Clicando nas setinhas correspondentes, modifique o valor dos parâmetros A, B e C e observe o efeito dessas modificações sobre o gráfico da reta. Observe também como varia a equação da reta dada.
(b) Relacionando as constantes A, B e C com as constantes m e b que aparecem na equação da reta escrita na forma y = mx + b, você é capaz de justificar as variações observadas no item (a)?
(c) Arraste o ponto M sobre a reta. O que você pode concluir? Como podemos caracterizar os pontos que pertencem a uma dada reta?
(d) Em quantas regiões uma reta qualquer divide o plano?

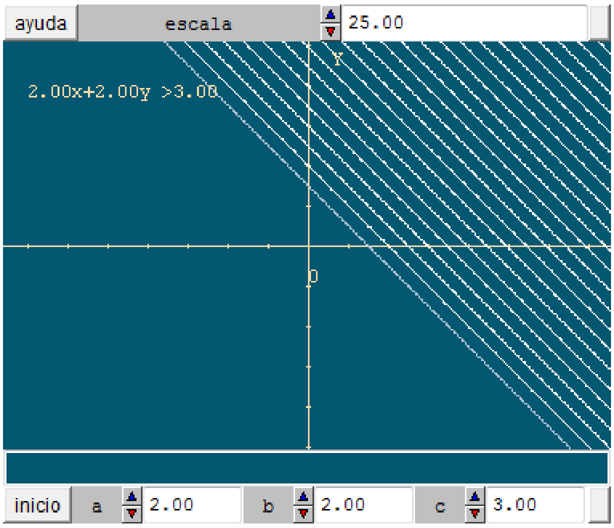
Uma reta qualquer divide o plano em duas regiões, ditas semi-planos. A atividade abaixo tem como objetivo caracterizar estas regiões. Nesta cena, o ponto P é móvel. Você pode arrastá-lo por todo o quadro.

[74] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/reta12.htm



(a) Faça o ponto P coincidir com um dos pontos da reta. Como você pode ter certeza de que o ponto P está realmente sobre a reta?
(b) Qual a desigualdade satisfeita pelas coordenadas do ponto P, quando o mesmo se encontra na região acima da reta dada?
(c) Qual a desigualdade satisfeita pelas coordenadas do ponto P, quando o mesmo se encontra na região abaixo da reta dada?
(d) Varie os valores dos parâmetros A, B e C e repita as atividades propostas nos itens anteriores.
(e) Dada uma reta de equação Ax + By + C = 0, como é possível caracterizar os pontos que pertencem a esta reta? Como é possível descrever, algebricamente, as duas regiões distintas (semi-planos) em que esta reta divide o plano?
(f) Como podemos interpretar, geometricamente, as regiões do plano determinadas pelas desigualdades $A\,x + B\,y + C \geq 0$ e $A\,x + B\,y + C \leq 0$.

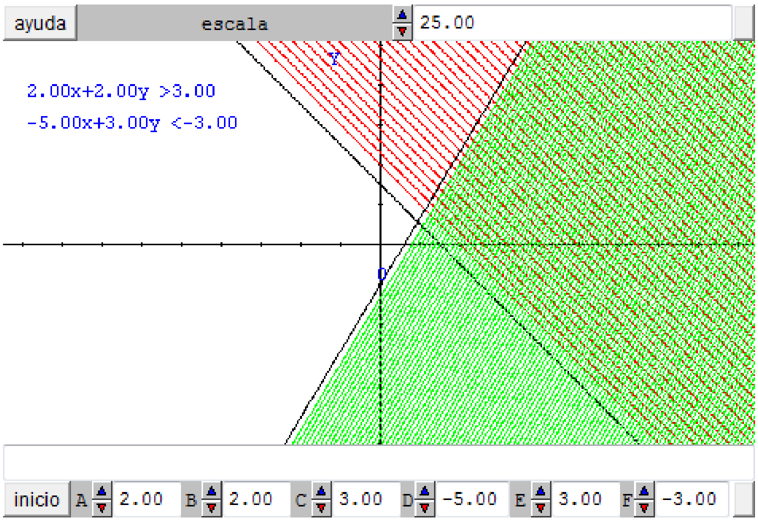
Observe a cena a seguir. Como já vimos, a reta Ax + By + C = 0 divide o plano em duas regiões: uma delas formadas pelos pontos que satisfazem à desigualdade Ax + By > C e a outra, pelos pontos que satisfazem à desigualdade Ax + By > C.



Modifique os valores dos parâmetros A, B e C e observe o efeito sobre a cena. Conclua:
(a) Que desigualdade é satisfeita pelos pontos da região hachurada?
(b) Como é possível caracterizar estes pontos?
(c) Que regiões do plano são representadas por inequações do tipo Ax + By + C > 0 e Ax + By + C < 0?
(d) Como é possível interpretar, geometricamente, as soluções de uma inequação do primeiro grau em duas variáveis x e y?

B. 2 Sistemas de Inequações Lineares com duas Incógnitas

Na cena abaixo representamos as regiões do plano determinadas pelas desigualdades A *x* + B *y* + C > 0 (em vermelho), D *x* + E *y* + F < 0 (em verde). O que representa a interseção das duas regiões hachuradas?



(a) Modifique os parâmetros correspondentes para obter a representação gráfica das inequações $x + 2y > 2$ e $x + 2y < -2$. O que ocorre neste caso? O que você pode concluir?

(b) Descreva com suas próprias palavras como podemos interpretar, geometricamente, a solução de um sistema de inequações lineares com duas incógnitas?

B. 3 Encaminhamento da solução para o problema do adubo

Encaminhamento da solução:

a) Sendo x quantidade a ser comprada do adubo A e y a quantidade a ser comprada do adubo B, escreva uma expressão matemática que determina o custo total da compra.

b) Pelo enunciado acima é fácil perceber que x e y devem obedecer a determinadas restrições de modo que as necessidades de minerais do terreno sejam atendidas.

Escreva as desigualdades que traduzem, matematicamente, estas restrições.

c) Esboce a região do plano definida pelas desigualdades obtidas no item anterior.

d) Esboce no mesmo desenho a curva de custo zero.

e) Você é capaz de conjecturar em que pontos dessa região o custo será mínimo?
f) Resolva o problema.

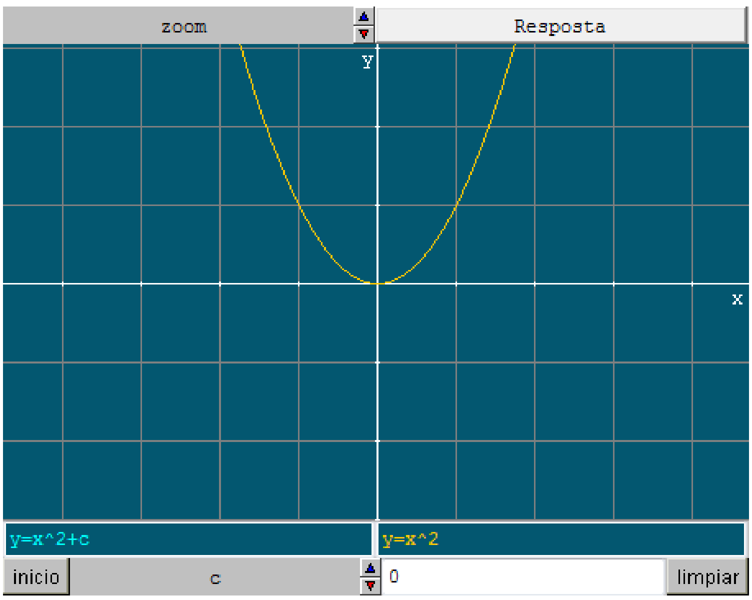
ANEXO C – TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES ELEMENTARES

Neste anexo podemos observar como se dá a utilização dos *mathlets* em transformações de funções. O roteiro didático abaixo está disponível na internet[75] e faz parte do Projeto Novas Tecnologias no Ensino – Santos, Kubrusly e Bianchini (2004) e forneceu suporte ao problema “O Problema do Adubo”.

C.1 Transformações de gráficos de funções: translações

Explorando

No quadro abaixo, estão traçados os gráficos das funções $y_1 = f(x)$, para $f(x) = x^2$ (em laranja) e $y_2 = f(x) + c$, para $c = 0$ (em turquesa). Repare que neste caso as duas funções coincidem. Varie o valor da constante c para observar o efeito geométrico ocorrido no gráfico de y_1. Para ajudá-lo nas conclusões, à medida em que o valor de c varia, a função y_2 deixa um rastro cinza. Para limpar a cena, pressione o botão "Limpiar".



Teste a sua conclusão com outras funções.

(a) Altere a definição da função f(x). Experimente, por exemplo, $f(x) = x^3$, $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = |x|$ (a função módulo é definida no programa pelo comando abs(x))

(b) Faça c =0, -2, -1, 1, 2, 3.

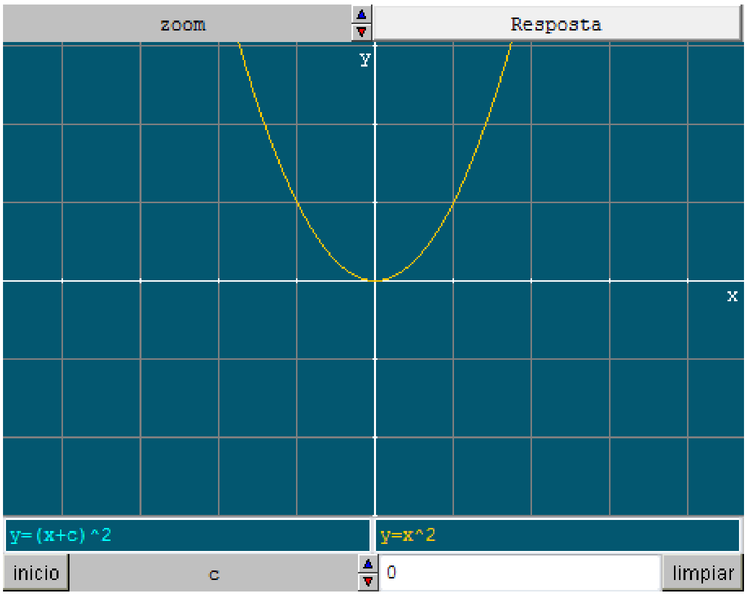
(c) Observe o efeito geométrico que ocorre no gráfico de $y_1 = f(x)$.

Conclua:

Como é possível obter o gráfico de $y_2 = f(x) + c$ a partir do gráfico de $y_1 = f(x)$?(Para conferir a sua resposta, pressione o botão correspondente, na cena ao lado.)

[75] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/cap62.html

No quadro abaixo, estão traçados os gráficos das funções y_1 = f(x), para f(x) = x^2 (em laranja) e y_2 = f(x + c), para c = 0. (em turquesa). Repare que neste caso as duas funções coincidem. Varie o valor da constante c para observar o efeito geométrico ocorrido no gráfico de y_1. Para ajudá-lo nas conclusões, à medida em que o valor de c varia, a função y_2 deixa um rastro cinza. Para limpar a cena, pressione o botão "Limpiar".



Teste a sua conclusão com outras funções.

(a) Altere a definição da função f(x). Experimente, por exemplo, f(x) = x^3, f(x) = cos(x), f(x) = | x | (a função módulo é definida no programa pelo comando abs(x))

(b) Faça c =0, -2, -1, 1, 2, 3.

(c) Observe o efeito geométrico que ocorre no gráfico de y_1 = f(x) .

Conclua:

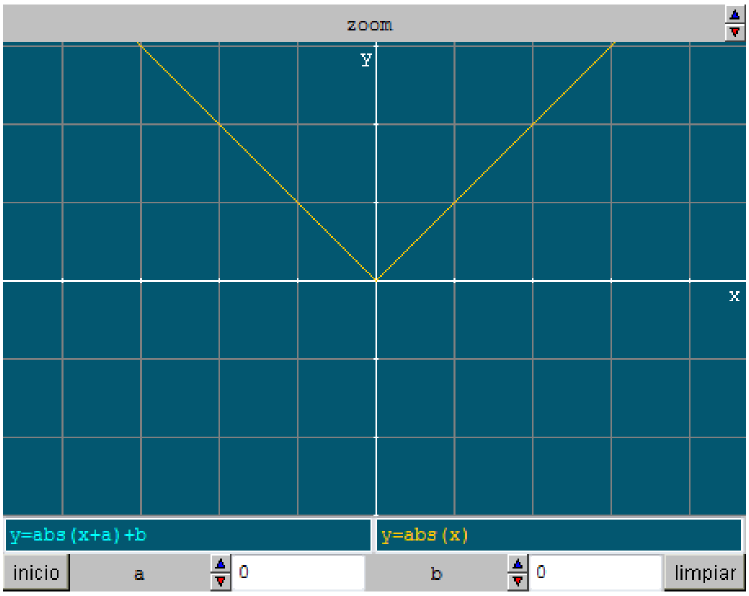
Como é possivel obter o gráfico de y_2 = f(x + c) a partir do gráfico de y_1 = f(x)?(Para conferir a sua resposta, pressione o botão correspondente, na cena ao lado.)

Aplicando

(a) No gráfico ao lado, modifique o valor das constantes a e b para obter o gráfico da função y_1 = |x| tranladado, na direção vertical, duas unidades para cima.

(b) Repita o exercicio anterior, para obter o gráfico da função y_1 = |x| tranladado, na direção horizontal, duas unidades para direita.

(c) Repita o exercicio anterior, para obter o gráfico da função y_1 = |x| tranladado, na direção vertical, duas unidades para baixo e, na direção horizontal, três unidades para a esquerda.



Concluindo

(a) Como é possível obter o gráfico de $y = x^2 - 1$ a partir do gráfico de $y = x^2$?

Resposta

(b) Como é possível obter o gráfico de $y = (x - 5)^2$ a partir do gráfico de $y = x^2$?

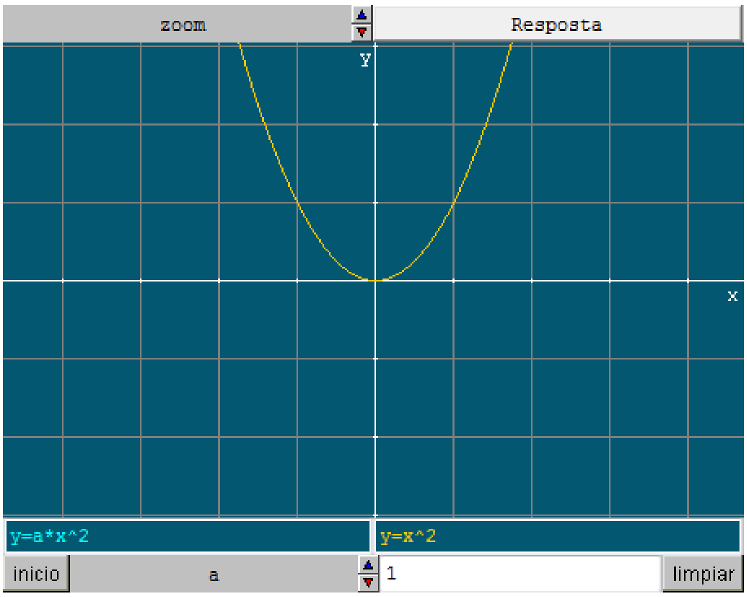
Resposta

(c) Como é possível obter o gráfico de $y = x^2 - 2x + 3$ a partir do gráfico de $y = x^2$?

Resposta

C.2 Reflexões

O quadro abaixo mostra o gráfico da função y_1 = f(x), para f(x) = x^2 (em laranja) e y_2 = a f(x), para a = 1 (em turquesa). Repare que neste caso as funções y_1 e y_2 coincidem. Faça a = -1 e descreva a transformação geométrica ocorrida no gráfico de y_1.



Teste a sua conclusão com outras funções:.

(a) Altere a definição da função f(x). Tente, por exemplo, f(x) = x^3, f(x) = cos(x), f(x)=| x |. (Não esqueça que o comando para a função módulo é abs(x)!)

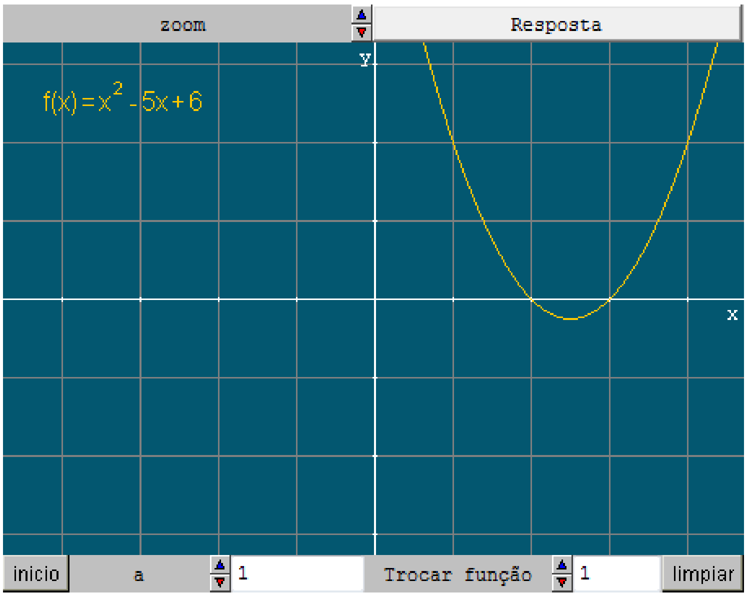
(b) Faça a = -1.

(c) Observe o efeito geométrico que ocorre no gráfico de y_1 (em laranja).

Conclua:

Como é possível obter o gráfico de y_2 = - f(x) a partir do gráfico de y_1 = f(x)? (Para conferir a sua resposta, pressione o botão correspondente, na cena ao lado.)

O quadro abaixo mostra o gráfico da função y_1 = f(x), para f(x) =x^2 - 5 x + 6 (em laranja) e de y_2 = f(a x), para a =1 (em turquesa). Repare que neste caso as funções coincidem. Faça a = -1 e descreva a transformação geométrica ocorrida no gráfico de y_1 .



Use o botão "Trocar função" para testar a sua conclusão com outras funções.

(a) Faça a = -1.

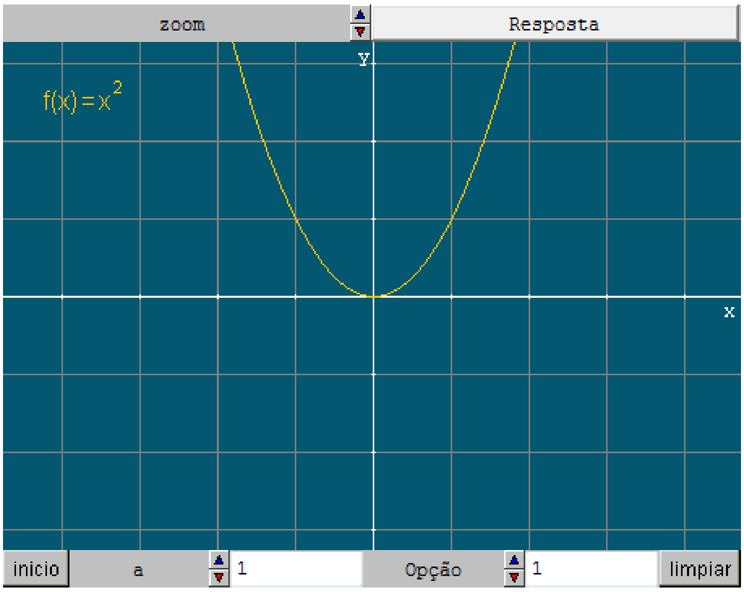
(c) Observe o efeito geométrico que ocorre no gráfico de y_1 = f(x) (em turquesa).

Conclua:

Como é possivel obter o gráfico de y_2 = f(- x) a partir do gráfico de y_1 = f (x)? Para conferir a sua resposta, pressione o botão correspondente, na cena ao lado.

Um caso especial

Já vimos que o gráfico de y_2 = f(- x) pode ser obtido a partir do gráfico de y_1 = f(x) por meio de uma reflexão em torno do eixo y. O quadro abaixo mostra o gráfico da função y_1 = f(x), para f(x) =x^2 (laranja) e de y_2 = f(a x), para a =1 (turquesa). Repare que neste caso as funções coincidem. Faça a = -1 e tente explicar o que está ocorrendo.



Teste a sua conclusão com outras funções.

(a) Escolha a função f(x) = | x |. Para isso, escolha a opção 2.
(b) Faça a = -1.
(c) Observe o que acontece com o gráfico de y_2 = f(- x).
(d) Repita os itens anteriores para a função f(x) = cos(x) (opção 3). Você pode explicar o que está acontecendo?

Conclua:

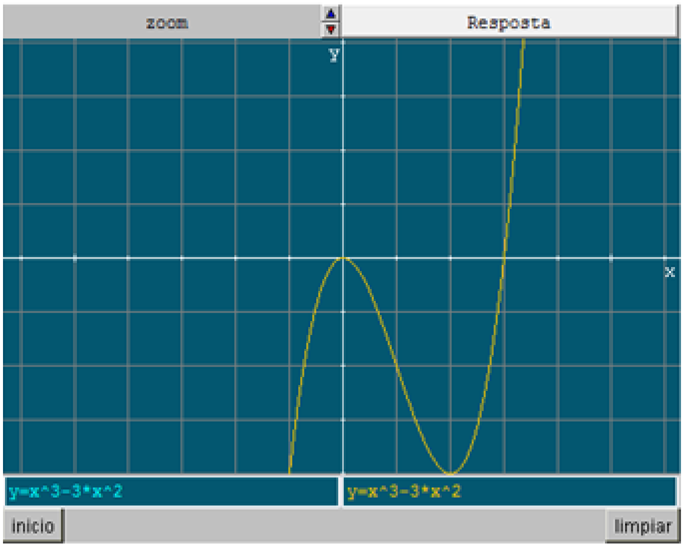
Qual a caracteristica especial que os gráficos dessas funções apresentam? Confira a sua resposta, pressionando o botão correspondente, na cena ao lado.

Para saber mais sobre funções pares veja Aprendendo: Funções Pares e Ímpares.

Aplicando

<table>
<tr>
<td>
(a) No gráfico ao lado, redefina a função $y = x^3 - 3\,x^2$ de maneira que o gráfico da nova função possa ser obtido a partir de uma reflexão, do gráfico original, em relação ao eixo x .

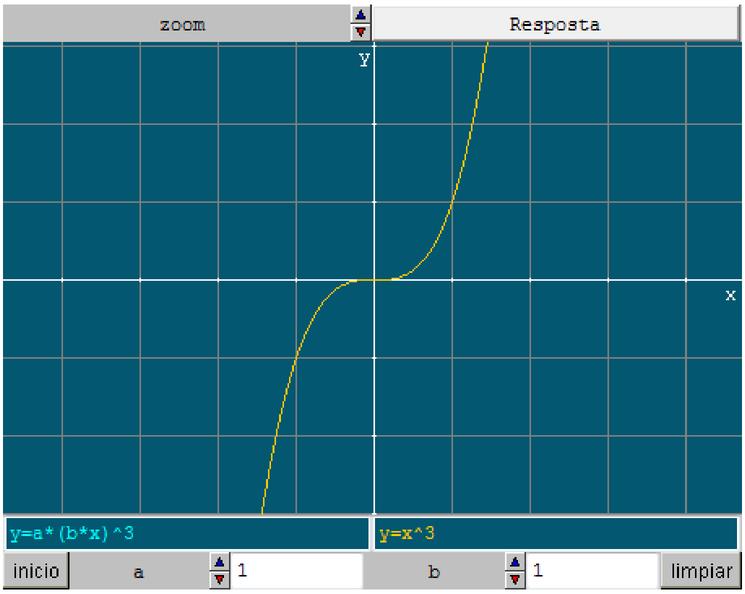
(b) Em seguida, redefina a função obtida no item anterior para refletir o seu gráfico, em relação ao eixo y. A partir dos itens (a) e (b), aplicados em sequência, obtemos uma reflexão em relação ao eixo x, seguida de uma reflexão em relação ao eixo y.
(c) No gráfico ao lado, redefina a função $y = x^3 - 3\,x^2$ de maneira que o gráfico da nova função possa ser obtido a partir de uma reflexão do gráfico original, em relação ao eixo y .

(d) Em seguida, redefina a função obtida no item anterior para refletir o seu gráfico, em relação ao eixo x. A partir dos itens (c) e (d), aplicados em sequência, obtemos uma reflexão em relação ao eixo y, seguida de uma reflexão em relação ao eixo x.
Conclua:
(a) Como é possível descrever, geometricamente esta dupla reflexão?
Resposta
(b) Como é possível obter o gráfico de $y_2 = -\,f(-\,x)$ a partir do gráfico de $y_1 = f(x)$?
Resposta
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

Outro caso especial

Já vimos que o gráfico de $y_2 = -\,f(-\,x)$ pode ser obtido a partir do gráfico de $y_1 = f(x)$ por meio de uma reflexão em torno do eixo *y* seguida de uma reflexão em relação ao eixo *x*, ou vice-versa. O quadro abaixo mostra o gráfico da função $y_1 = f(x)$, para $f(x) = x^3$ e de $y_2 = b\,f(a\,x)$, para $a = 1$ e $b = 1$. (Repare que neste caso as funções coincidem). Faça $a = -1$ e, em seguida $b = -1$ e tente explicar o que está ocorrendo.



Teste a sua conclusão com outras funções.

(a) Estude a função f(x) = sen(x).
(b) Faça a = -1 e b = -1
(c) Observe o que acontece com o gráfico de y_2 = - f(- x).
(d) Repita os itens anteriores para a função f(x) = x^5. Você pode explicar o que está acontecendo?

Conclua:

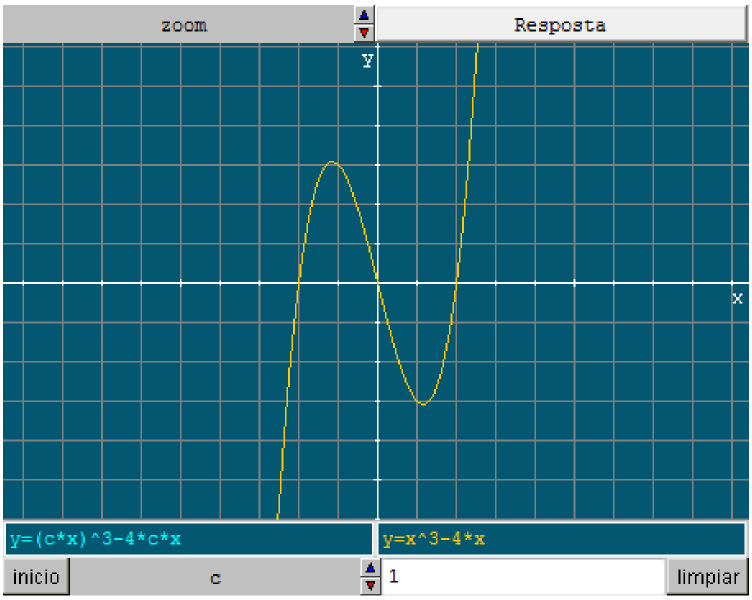
Qual a característica especial que os gráficos dessas funções apresentam? Confira a sua resposta, pressionando o botão correspondente, na cena ao lado.

Para saber mais sobre funções impares veja [Aprendendo: Funções Pares e Ímpares].

C.3 Dilatações e contrações

Explorando

No quadro abaixo, estão traçados os gráficos das funções y_1 = f(x), para f(x) = x^3 - 4 x (em laranja) e y_2 = c f(x), para c = 1 (em turquesa). Repare que neste caso as duas funções coincidem. Varie o valor da constante c (c > 0) para observar o efeito geométrico ocorrido no gráfico de y_1.



Teste a sua conclusão com outras funções.

(a) Altere a definição da função f(x). Experimente, por exemplo, f(x) = x^4 - 3 x^3, f(x) = cos(x), f(x) = | x | (abs(x))

(b) Faça c =1, 2, 3, 1/2, 1/3, 1/10.

(c) Observe o efeito geométrico que ocorre no gráfico de y_1 = f(x).

Conclua:

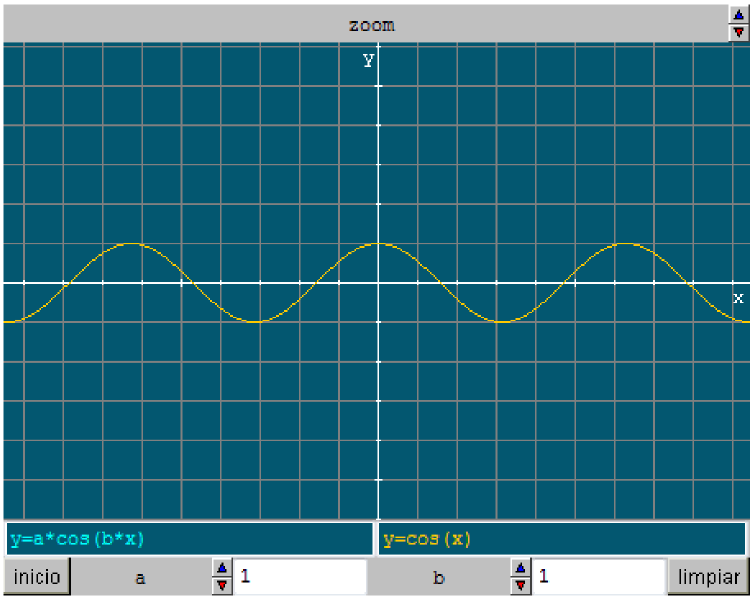
Como é possível obter o gráfico de y_2 = f(c x) a partir do gráfico de y_1 = f (x)? Para conferir sua resposta, pressione o botão correspondente na cena ao lado.

Aplicando

(a) No gráfico ao lado, modifique o valor das constantes a e b para obter o gráfico da função $y_1 = \cos(x)$ dilatado por um fator de escala igual a dois, na direção vertical.

(b) Repita o exercício anterior, para obter o gráfico da função $y_1 = \cos(x)$ dilatado na horizontal, por um fator de escala igual a dois.

(c) Repita o exercício anterior, para obter o gráfico da função $y_1 = \cos(x)$ comprimido por um fator de escala igual a dois, na direção vertical e por um fator de escala igual a três, na direção horizontal.



Concluindo

(a) Como é possível obter o gráfico de $y = 2\ \mathrm{sen}(x)$ a partir do gráfico de $y = \mathrm{sen}(x)$?

Resposta

(b) Como é possível obter o gráfico de $y = \mathrm{sen}(2\,x)$ a partir do gráfico de $y = \mathrm{sen}(x)$?

Resposta

(c) Como é possível obter o gráfico de $y = 1/3\ \mathrm{sen}(\,x/3)$ a partir do gráfico de $y = \mathrm{sen}(x)$?

Resposta

ANEXO D – O PROBLEMA DO PONTO SEM RETORNO

Neste anexo podemos observar como se dá a utilização dos *mathlets* em um exemplo real. O roteiro didático abaixo está disponível na internet[76] e faz parte do Projeto Novas Tecnologias no Ensino – Santos, Kubrusly e Bianchini (2004); ele refere-se ao problema conhecido "O Ponto sem Retorno: um problema de declividades".

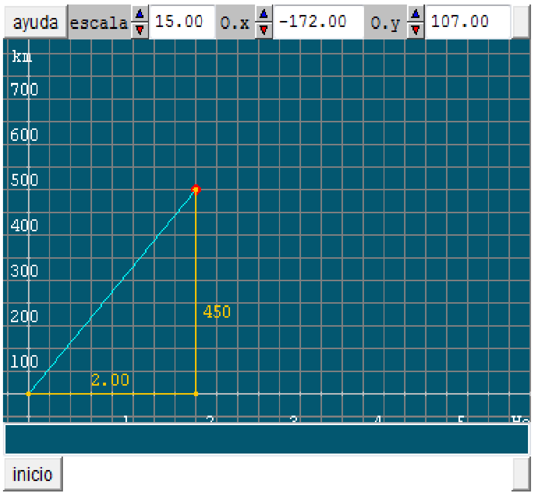
D.1 O problema do ponto sem retorno: um problema de declividades

Um avião de pequeno porte, com autonomia para quatro horas de viagem, é capaz de desenvolver uma velocidade de cruzeiro de 300 km/h quando não há vento. Durante um vôo, na viagem de ida, um vento de 50 km/h sopra a favor o que aumenta a velocidade de cruzeiro do avião, em relação à terra, para 350 km/h. De repente, o piloto se dá conta de que na viagem de volta, o mesmo vento estará soprando contra e, em conseqüência, a velocidade do avião se reduzirá para 250 km/h. O problema é determinar qual a distância máxima que o avião pode cobrir na viagem de ida de tal maneira a estar seguro de que há combustível para fazer a viagem de volta. A esta distância máxima chamamos de ponto sem retorno. Investigar quais são esses pontos para distintas velocidades do vento é o objetivo das atividades a seguir.

D. 2 Analisando a viagem de ida

No quadro abaixo, arrastando o ponto vermelho podemos situar o avião a uma distância fixa do aeroporto e descobrir quando tempo leva para o avião chegar a este ponto.

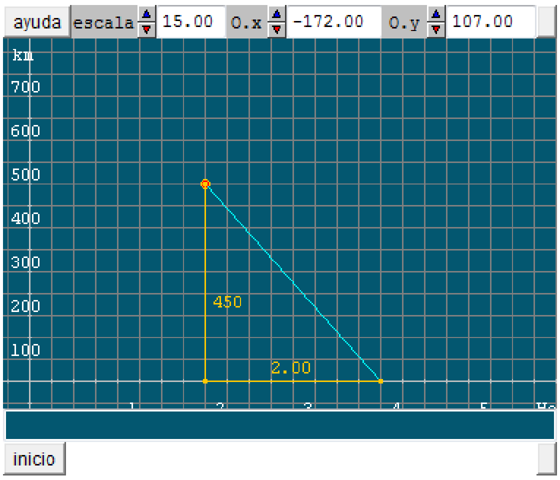
[76] http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/capitulos/cap85s3.html



(a) Coloque o avião no ponto (2, 600). Qual o significado destas coordenadas? Qual a velocidade desenvolvida pelo avião até chegar a este ponto?
(b) Qual a declividade do segmento azul? Qual o significado físico dessa declividade?
(c) Situe o avião nos pontos (0.5, 300), (1.25, 400), (1, 350) e responda as perguntas dos itens anteriores para esses casos.(d) Como é possível calcular a velocidade do avião em um gráfico como este?

D.3 Analisando a viagem de volta

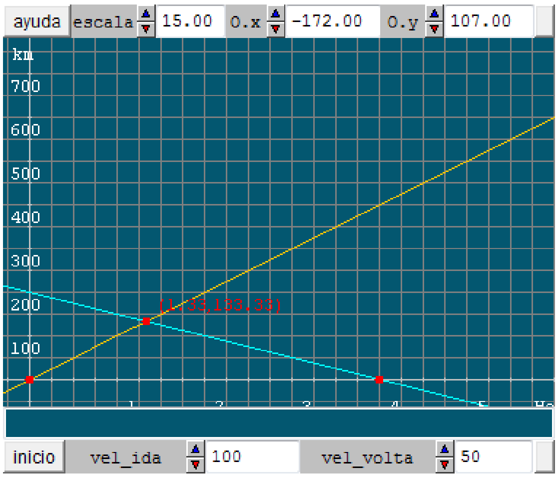
No quadro abaixo, o ponto vermelho representa o ponto onde o avião inicia o retorno. A viagem completa dura quatro horas.



(a) Coloque o avião no ponto (2.5, 500). Qual o significado destas coordenadas? Quanto tempo demorou a viagem de volta? Qual a velocidade desenvolvida pelo avião até voltar ao aeroporto?
(b) Qual a declividade do segmento azul? Qual o significado físico dessa declividade? O que representa o seu sinal?
(c) Situe o avião nos pontos (0.5, 300), (1.25, 400), (1, 350) e responda as perguntas dos itens anteriores para esses casos.
(d) Como é possível calcular a velocidade de regresso em um gráfico como este?

D. 4 Solucionando o problema

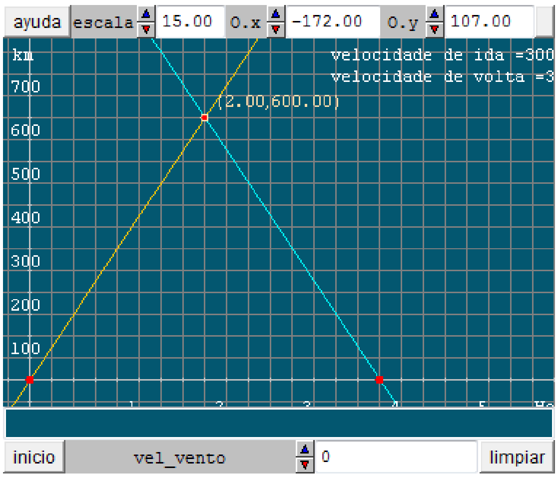
Representando as viagens de ida e de volta por suas retas correspondentes, podemos localizar os pontos sem retorno para distintas velocidades nas viagens de ida e de volta.



(a) Ajuste os parâmetros vel_ida (velocidade de ida) e vel_volta (velocidade de volta) para que estas velocidades sejam iguais as descritas no problema. Para essas velocidades, a que distância do aeroporto o avião pode chegar antes de iniciar o retorno?
(b) Em que momento é preciso iniciar a viagem de volta? Comprove essa conjectura seguindo os passos a seguir.
(c) Expresse a velocidade atingida pelo avião, na viagem de ida, como uma função da distância percorrida (d) e do tempo transcorrido (t).
(d) Expresse a velocidade atingida pelo avião, na viagem de volta, como uma função da distância percorrida (d) e do tempo transcorrido (t).
(e) Resolva o problema proposto a partir das expressões algébricas obtidas em (c) e (d).

D5. Generalizando

Está claro, que ao modificar a velocidade do vento obtemos distintos pontos sem retorno que definem uma curva no plano. No quadro abaixo, podemos variar o parâmetro que simula a velocidade do vento (vel_vento) para estudar a curva descrita por estes pontos. Experimente!



(a) Qual o significado físico de valores negativos para a velocidade do vento?
(b) Modifique a velocidade do vento e observe a curva descrita por estes pontos. Quais as principais características desta curva e o que estas características indicam?
(c) Qual a curva descrita pelos pontos sem retorno?
(d) Você é capaz de provar a conjectura feita em (c)? Para isso, a partir das expressões para d (distância percorrida) obtidas na atividade anterior, tente obter d como uma função do tempo transcorrido. A que conclusões você pode chegar?