UFRJ

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no Ensino da Função Afim.

VILMAR GOMES DA FONSECA

RIO DE JANEIRO

2011

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática

O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no Ensino da Função Afim.

Dissertação de Mestrado apresentada ao programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Angela Rocha dos Santos.

RIO DE JANEIRO

2011

F676

Fonseca, Vilmar Gomes da.
O uso das tecnologias no ensino médio: a integração de Mathlets no ensino da função Afim./Vilmar Gomes da Fonseca – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.
vii, 141f. : il. ; 30 cm.
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM/Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2011.
Orientador: Angela Rocha dos Santos.
Referências: f. 137-141
1. Funções – Estudo e ensino. 2. Matemática – Estudo e ensino. 3. Tecnologia educacional. I. Santos, Angela Rocha dos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no Ensino da Função Afim.

Vilmar Gomes da Fonseca

Orientador: Angela Rocha dos Santos

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____
Presidente, Angela Rocha dos Santos – PEMAT/UFRJ

____
Prof. Ricardo Silva Kubrusly – UFRJ

____
Profª. Maria de Fátima Lins Barbosa de Paiva Almeida – UERJ

____
Prof. Victor Augusto Giraldo(Suplente) – UFRJ

____
Profª Eleni Bisognin(Suplente) – UNIFRA

RIO DE JANEIRO

2011

"***Os entendidos, pois, resplandecerão, como o resplendor do firmamento; e os que a muitos ensinam a justiça refulgirão como as estrelas sempre e eternamente***" (Dn 12.3)

AGRADECIMENTOS

À Deus, pois me deu condições de realizar meu grande Sonho. A ti Senhor dedico esta obra.

Às minhas queridas esposa e filha, Miriam e Talita, por todo o amor que tem para comigo. Eu as amo muito.

Aos meus pais que me deram toda a educação e me ensinaram o verdadeiro caminho a seguir. Amo vocês do fundo do meu coração.

À minha orientadora Profª Angela Rocha, por ter acreditado em mim e me dado todo o apoio para que eu pudesse concluir este curso. Deus te abençoe.

Aos professores Victor Giraldo, Ricardo Kubrusly e Maria de Fátima por terem acreditado em mim e me dado todo o apoio, no momento em que eu mais precisava. Deus vos abençoe.

Aos meus professores e colegas do mestrado que estiveram comigo durante esta trajetória.

À todos os meus irmãos em Cristo que torcem pelo me sucesso. A minha vitória também é a vossa vitória.

Hoje me formo Mestre em Ensino de Matemática. Essa conquista devo a todos vocês.

Resumo

O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no Ensino da Função Afim.

Vilmar Gomes da Fonseca

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Este trabalho propõe discutir e avaliar a utilização integrada do Mathlet como ferramenta nas aulas de matemática, no estudo da Função Afim, em turmas do 1º ano do Ensino Médio. As dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução de problemas, representações e análises gráficas, no ensino aprendizagem de funções Afins, são alguns dos problemas que motivaram a elaboração dessa pesquisa. A metodologia empregada consiste na aplicação de uma sequência de atividades, com o auxilio dos Mathlets e dois testes. A partir dos registros dos alunos foram feitas as análises, baseadas nos dados colhidos ao longo da aplicação de cada atividade. Este estudo está fundamentado na noção cognitiva de Conceito Imagem e Conceito Definição, desenvolvidos por David Tall e Shlomo Vinner, na noção de Representações Semióticas desenvolvida por Raymond Duval e na noção de Obstáculo Epistemológico, tomando como base os trabalhos de Anna Sierpinska. Para cumprir esse objetivo será apontado o uso de alguns recursos como os computacionais e a Internet que podem contribuir significativamente para a abordagem de conteúdos matemáticos e auxiliar no processo ensino-aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática, Ensino de Matemática; Tecnologia no Ensino da Matemática, Ensino de Funções.

Abstract

O uso de Tecnologias no Ensino Médio: A integração de Mathlets no Ensino da Função Afim.

Vilmar Gomes da Fonseca

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

This paper aims to argue and to measure the integrated use of Mathlet as a tool in mathematics classes, in the study of Affine Function, in classes in the first year of high school. The difficulties presented by the students in solving problems, representations and graphical analysis, in the teaching learning affine functions, are some of the problems that motivated the development of this research. The methodology used is the application of a sequence of activities, with the help of Mathlets and two tests. From the students records were made the analysis, based on data collected during the implementation of each activity. This study is based on the notion of cognitive Concept Image and Concept Definition, developed by David Tall and Shlomo Vinner, in the notion of representations developed by Raymond Duval Semiotics and in the notion of epistemological obstacles, based on the work of Anna Sierpinska. To accomplish this objective, there will be shown the use of some resources such as computer and the Internet that may contribute significantly in a approaching to the mathematical content and assist in the teaching-learning process.

Key words: Mathematics Education, Mathematics Teaching, Technology in Teaching Mathematics, Functions Teaching.

SUMÁRIO

1 - INTRODUÇÃO

1.1 – A Pesquisa Desenvolvida: Escolha do Tema, Fundamentação Teórica e Metodologia Utilizada.

Dentre os conteúdos da matemática escolar, no Ensino Médio, consideramos que a formação de conceitos do campo de Funções desempenha um papel fundamental na formação básica do cidadão brasileiro. Falar em formação básica para a cidadania significa falar da inserção das pessoas no mundo do trabalho, nas relações sociais e na cultura, no âmbito da sociedade brasileira. Para isso, sem dúvida, metodologias que favoreçam um bom domínio de conteúdos de funções, principalmente a habilidade de construção e análise de gráficos e tabelas, precisam ser desenvolvidas e estudadas.

A motivação maior para escolha desse tema surgiu a partir da realização de dois trabalhos na disciplina de Pesquisa da Própria Prática. Tanto no primeiro, cujo tema era " *Relato de uma implementação de uma disciplina de cálculo na arquitetura*", quanto no segundo cujo tema era " *Introduction to Calculus: Integrating Maple in regular classes and examinations* ", o enfoque é caracterizado pelo uso de softwares educacionais no ensino do Cálculo.

Em seu artigo "Introduction to Calculus: Integrating Maple in regular classes and examinations.", PALIS [27], apresenta uma visão geral do projeto de pesquisa desenvolvido por ela e aplicado, por um grupo de professores, nas turmas da disciplina de Introdução ao Cálculo (I.C.) na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RJ em 2006. Uma das primeiras questões levantadas nesse artigo refere-se aos desafios enfrentados pelos professores, para inserir os novos estudantes, que vêm do Ensino Médio, nos cursos de nível superior, na área de Ciências Exatas, enfrentado em todo mundo.

O projeto consistia na integração do Maple, um programa de computação algébrica, em cursos de Cálculo Diferencial e Integral no ensino superior.

As primeiras dificuldades com a qual a autora se deparou foi o frágil desenvolvimento no campo algébrico de uma parcela expressiva dos alunos, parcela esta para a qual a manipulação algébrica é totalmente desprovida de sentido nada tendo a ver com operações com números, denotando pouca intimidade com a noção de variável, de igualdade de expressões e de equivalência de equações. Ao final desse projeto PALIS verificou que tais alunos conseguiram um bom rendimento nos exames do final do semestre, diminuindo assim o índice de reprovação na disciplina.

PALIS destaca que o sucesso do projeto veio por meio das inúmeras possibilidades promovidas por este ambiente (uso do MAPLE), tais como: agilizar difíceis e longas manipulações numéricas e algébricas; facilitar atividades experimentais; incentivar o exame das soluções ou de estratégias diferentes, trabalhando com representações múltiplas do mesmo objeto; motivar o desenvolvimento de noções emparelhadas discretas/contínuas e finito/infinito. A autora conclui que é possível inserir esse projeto no currículo de I.C. utilizando-o em um ambiente de aulas com o apoio do Maple

A partir da leitura de vários textos sobre esse tema, conheci algumas técnicas e metodologias que são utilizadas no ensino e aprendizagem de matemática usando softwares educacionais.

Após discussões em sala de aula, sobre o tema em questão, a motivação para realizar, nesse tema, o projeto de desenvolvimento da dissertação de mestrado, aumentou ainda mais, principalmente por que, apesar do grande número de estudos que vêm sendo desenvolvidos sobre o incentivo do uso das tecnologias, nas aulas de Matemática, inúmeros fatores contribuem para que haja uma grande resistência por parte dos professores para seu uso em sala de aula, quer sejam de nível fundamental, médio ou superior.

Esta pesquisa é fundamentada nos trabalhos de PALIS(2006, 2007, 2008), TALL e VINNER(1981), DUVAL(2003) e SIERPINSKA(1992).

Baseados nos trabalhos de PALIS(2006, 2007, 2008) sobre o uso de tecnologias computacionais no ensino aprendizagem de matemática, pretendemos dissertar sobre o a importância do uso dessas tecnologias, no nosso caso, dos aplicativos conhecidos como mathlets[1], integradas às aulas de matemática, permitindo, não somente estimular a curiosidade do aluno e fazê-

---

[1] Um mathlet, segundo o Journal Online of Mathematics and its Applications (JOMA), é "uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática". São aplicações que podem ser desenvolvidas para a internet, em qualquer linguagem de programação ou qualquer plataforma.

lo se interessar pela Matemática, mas, sobretudo, levá-lo a entender o verdadeiro significado de "fazer Matemática", transformando-o de paciente em agente do processo educativo. Nesse sentido, entendemos que o uso da tecnologia deve privilegiar a construção do conhecimento e valorizar a inovação e a descoberta como uma etapa fundamental do processo de aprendizagem.

Buscando embasamento teórico capaz de explicar como os alunos são estimulados a pensar sobre um determinado objeto, utilizamos a noção cognitiva de Conceito Imagem e Conceito Definição, desenvolvidos por TALL e VINNER [41]. Para os autores *"... adquirir um Conceito significa formar uma Imagem de Conceito para este; entender significa ter uma Imagem de Conceito."* GIRALDO[13]. A partir dessa noção, elaboramos nossa sequência de atividades, visando estimular os alunos a desenvolverem suas imagens mentais, procurando levá-los, não somente a compreender as definições matemáticas, mas também a aplicá-las na resolução das atividades.

Além de TALL e VINNER, usamos também a noção de Representações Semióticas desenvolvida por DUVAL[10]. De acordo com o autor, em matemática, toda comunicação se estabelece com base em representações. Para DUVAL, as várias representações de um mesmo objeto devem ser trabalhadas e estimuladas pelos professores na resolução das atividades, levando os alunos a desenvolverem a capacidade de articular essas representações, dentro de um ou entre vários registros. Quando isso ocorre dizemos que o aprendizado é mais significativo.

Finalizando nosso embasamento teórico, usamos a noção de Obstáculo Epistemológico. Em nosso trabalho analisaremos os obstáculos relativos ao conceito de Função Afim, tomando como base o estudo feito por SIERPINSKA[39]. Em seu trabalho a autora apresenta um estudo dos obstáculos epistemológicos da evolução histórica do conceito de Função, discutindo a compreensão desse conceito por parte dos estudantes e as suas dificuldades.

Baseando-se nas considerações citadas anteriormente, nesse estudo, nos propomos a analisar a contribuição dos Mathlets para o desenvolvimento de conceitos, relacionados ao estudo de Funções Afins. Para isso foi realizada uma pesquisa de campo, onde serão aplicadas atividades dinâmicas por meio de uma

Sequência Didática, em uma turma de 1º ano do Ensino Médio do Colégio Estadual Antônio Figueira de Almeida(CEAFA) em Nilópolis – RJ.

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi a de Engenharia Didática. Esta metodologia, desenvolvida pela escola francesa da Didática da Matemática, se caracteriza pela aplicação de uma sequência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações que permitam interpretar processos de ensino-aprendizagem da Matemática, esclarecendo o fenômeno investigado.

Ao final da aplicação da Sequência Didática foram aplicados dois testes em duas turmas de 1º ano do ensino Médio no CEAFA, onde os dados coletados serão confrontados, a fim de obtermos um resultado sobre a eficiência do uso de tecnologias no ensino, melhorando o aprendizado dos alunos.

1.2 – A Tecnologia a Serviço do Ensino em Matemática.

O mundo contemporâneo vive os efeitos de uma nova revolução tecnológica, a revolução da microeletrônica. A integração da informática com as redes de telecomunicações (telemática) vem, cada vez mais, criando facilidades de comunicação e redefinindo as bases para a democratização de informações. Estas inovações advindas desta revolução científica e tecnológica traduzem-se em mudanças em nosso comportamento pessoal e social. Estamos assistindo ao surgimento, no mundo todo, de novas formas produtivas e organizacionais e, acima de tudo, de novas formas de pensar, de agir e de se relacionar comunicativamente.

Entretanto, quais seriam as implicações educacionais decorrentes da inserção dessas inovações tecnológicas no ensino da matemática? Como o professor pode agregar a utilização de recursos tecnológicos, às suas ações da prática de ensino de Matemática, com vistas à melhoria da aprendizagem dessa área de conhecimento?

Atualmente não podemos mais ignorar a tecnologia e nem seu potencial nos processos que envolvem a aprendizagem. Especificamente em relação ao computador, consideramos que, uma vez presente no ambiente de aprendizagem ele não é neutro e interfere no processo, exercendo uma influência que deve ser considerada e investigada.

Atualmente, a ferramenta computacional é uma das possibilidades de trabalho em sala de aula, ocupando, inclusive, papel de destaque nas orientações expressas nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs[2]. As recomendações contidas neste documento são baseadas em estudos e experiências que consideram a ferramenta computacional como um instrumento motivador na realização de tarefas exploratórias e de investigação. Além disso, os PCNs sugerem uma reflexão sobre a relação entre a Matemática e a Tecnologia, baseada nas necessidades de renovação de saberes.

Nesse sentido, entendemos e procuramos mostrar nesse trabalho que tecnologias como ferramentas computacionais, calculadoras simples, calculadoras gráficas e softwares educacionais, podem ser capazes de propiciar ambientes com novas propostas pedagógicas de aprendizagem, principalmente no ensino de matemática.

O emprego dessas tecnologias, em especial dos programas educacionais, no ensino de matemática na Educação Básica[3], deve provocar mudanças curriculares e pedagógicas *se* o que se pretende é explorar a potencialidade destas tecnologias no sentido de melhorar a prática do professor em sala de aula, possibilitando aulas mais dinâmicas e melhoria da aprendizagem dessa área de conhecimento.

Segundo PONTE & CANAVARRO [35] computadores podem ser usados na matemática de formas diversas como: instrumento de cálculo numérico, quer em um cálculo numérico aproximado, quer em teoria dos números; instrumento de cálculo simbólico em numerosas teorias, executando tarefas conforme sistema de regras bem definidas; geradores de gráficos, proporcionando a visualização de figuras que obedecem a certas propriedades; meios de comunicação, possibilitando o registro e transmissão de idéias

[2] Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs - são referências de qualidade para os Ensinos Fundamental e Médio do país, elaboradas pelo Governo Federal. O objetivo é propiciar subsídios à elaboração e reelaboração do currículo, tendo em vista um projeto pedagógico em função da cidadania do aluno e uma escola em que se aprende mais e melhor.

[3] Educação Básica, segundo a LDB (Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional), corresponde ao Ensino Fundamental e o Médio.

matemáticas, tanto em linguagem corrente como recorrendo a formas de expressão que possibilitam o uso de símbolos matemáticos.

Segundo BARROS & D'AMBROSIO [2], alguns programas procuram criar ambientes de investigação e exploração matemática, contribuindo assim para a construção do conhecimento matemático. Por meio da utilização desses tipos de programas, a matemática deixa de ser um conhecimento pronto e apenas transmitido ao aluno, que passa a desempenhar um papel ativo no processo de construção do conhecimento.

De acordo com PALIS [31] já se acreditava no potencial do computador como instrumento mediador de um aprofundamento e ampliação das construções conceituais e procedimentais dos alunos na área de matemática desde o final dos anos 80.

HOWSON & KAHANE [15], analisando o impacto dos computadores e da informática no currículo da matemática, apresenta alguns aspectos de como os computadores e a informática afetariam a matemática e as maneiras de utilização desses computadores para ajudar o ensino da matemática.

Alguns exemplos de tentativas precursoras para implementação de tecnologias computacionais no processo de ensino e aprendizagem podem ser encontradas no Brasil, desde os primórdios do desenvolvimento da Informática aplicada à Educação. Dentre estas iniciativas, podemos destacar as da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, em 1966, da Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, em 1973 e na Universidade Estadual de Campinas/SP – UNICAMP, em 1975. A partir dos anos 80, o início da disseminação do uso de computadores pessoais permitiu o desenvolvimento de um número maior de atividades e experimentos relacionados à implantação de tecnologia nas escolas. Como representante deste esforço, na matemática, registramos o trabalho realizado pelo Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática - GPIMEM.

Constituído em 1993, o GPIMEM[4] começa suas atividades com trabalhos com a utilização de calculadoras gráficas e também fazendo o acompanhamento

---

[4] GPIME- **Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática** é composto por docentes, técnicos e estudantes de graduação e Pós-graduação da UNESP, Câmpus de Rio Claro/SP. O grupo estuda a relevância do computador,

de escolas onde a informática ganhava espaço. O grupo se inicia também como espaço de discussão para pesquisas desenvolvidas em salas de aulas.

PALIS [29], por exemplo, defende que este tipo de pesquisa contribui significativamente para uma melhor compreensão do desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos. Para PALIS professores que usam suas salas de aula como laboratórios, têm muito a contribuir para o conhecimento crescente sobre a aprendizagem em condições reais.

No entanto, embora no meio acadêmico, seja mais comum falar sobre a inserção das tecnologias no processo de ensino-aprendizagem, na prática escolar ainda existe pouca utilização destas na maioria das áreas de ensino, sejam de nível fundamental, médio ou até superior.

Segundo VALENTE [43], o uso do computador na educação objetiva a integração deste no processo de aprendizagem dos conceitos curriculares em todas as modalidades e níveis de ensino, podendo desempenhar papel de facilitador entre o aluno e a construção do seu conhecimento. O autor defende a necessidade do professor da disciplina curricular atentar para os potenciais do computador e ser capaz de alternar adequadamente atividades não informatizadas de ensino-aprendizagem e outras passíveis de realização via computador. Enfatiza a necessidade de os docentes estarem preparados para realizar atividades computadorizadas com seus alunos, tendo em vista a necessidade de:

- ✓ Determinar as estratégias de ensino que utilizarão,
- ✓ Conhecer as restrições que o programa apresenta
- ✓ E ter bem claros os objetivos a serem alcançados com as tarefas a serem executadas.

A presença das tecnologias, principalmente do computador, requer do professor novas posturas frente ao processo de ensino e de aprendizagem. LEVY [18] afirma que a informática é um campo de novas tecnologias

calculadoras gráficas ou outros tipos de mídia na Educação Matemática. Mais recentemente, tem investigado questões que envolvem o uso de vídeo, análise de softwares e de educação à distância incluindo o uso da internet.

intelectuais, aberto, conflituoso e parcialmente indeterminado. Nesse contexto, a questão do uso desses recursos, particularmente no ensino da matemática, ocupa posição central e, por isso, é importante refletir sobre as mudanças educacionais provocadas por essas tecnologias, propondo novas práticas docentes e buscando proporcionar experiências de aprendizagem significativas para os alunos.

Como em BELFORT e SANTOS[23] , defendemos, neste trabalho, que o uso da tecnologia deve privilegiar a construção do conhecimento e valorizar a inovação e a descoberta como uma etapa fundamental do processo de aprendizagem. Nesta perspectiva, o professor deve ser o agente de sua própria prática, explorando novas possibilidades didáticas e metodológicas, incluindo momentos de "experiências laboratoriais" que permitam a migração da cadeia formal do ensino tradicional de Matemática – representada pela seqüência "definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações)" – para a cadeia exploratória – caracterizada pelos passos "exploração → conjectura → tentativa de demonstração → conclusão e aplicação", transformando o aluno de paciente em agente do processo educativo (SANTOS,KUBRUSLY & BIANCHINI [38]).

Neste sentido, os programas que permitem ao professor gerar pequenos aplicativos interativos, sem necessidade de prévios conhecimentos computacionais e ao aluno, fácil manipulação de controles e parâmetros são ideais para promover o salto qualitativo que buscamos no ensino de matemática.

Para consecução dos objetivos deste trabalho, escolhemos, nesta pesquisa, trabalhar com Mathlets. Segundo o JOMA [17] (*Journal of online mathematics and its applications, 2009*), mathlets são pequenas plataformas interativas e independentes para o ensino de Matemática. No nosso caso, os mathlets são pequenos aplicativos em JAVA gerados pelo NIPPE[5] Descartes (PROYECTO DESCARTES, [36]).

---

[5] Acrônimo de Núcleo Interativo Para o Ensino de Matemática.

1.3 – A Ferramenta utilizada: O NIPPE DESCARTES

Descartes é uma ferramenta destinada a professores e estudantes de Matemática, Física e outras Ciências, que gera cenas gráficas ou numéricas interativas onde o aluno, manipulando alguns controles, pode modificar parâmetros e observar os efeitos que estas modificações ocasionam nos gráficos traçados e nos dados numéricos utilizados.

O NIPPE Descartes, distribuído gratuitamente na Internet através do endereço eletrônico (http://descartes.cnice.mec.es), é uma ferramenta desenvolvida pelo “Centro Nacional de Innovación y Comunicación Educatica” (CNICE), órgão vinculado ao “Ministério de Educación, Política Social y Deporte” da Espanha.

Usando o aplicativo **Descartes**, os professores podem criar outras atividades (cenas) modificando uma configuração existente ou criando outra, inteiramente nova e podem inseri-las em páginas da INTERNET para criar unidades didáticas interativas ou roteiros didáticos, com atividades interativas, para suas aulas. As páginas contendo estas cenas podem ser acessadas remotamente, a partir de um servidor de INTERNET ou, localmente, gravando-as no disco rígido de um computador ou em um CD-ROM.

Um exemplo de mathlets, desenvolvido a partir do NIPPE DESCARTES pode ser visto na figura abaixo.

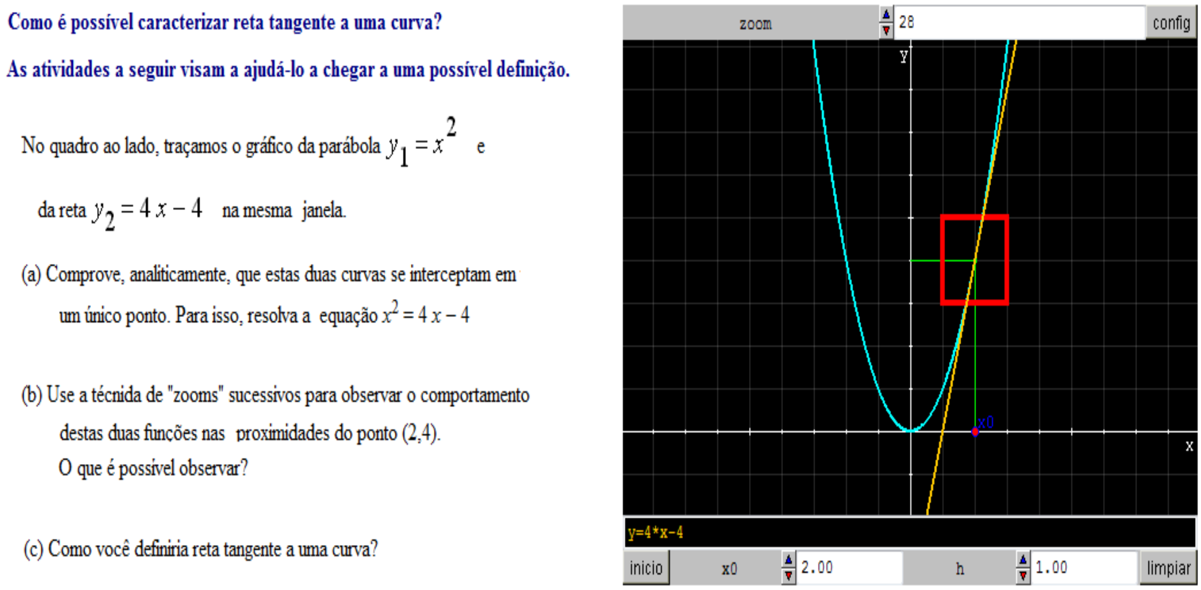


Figura1.1 – Exemplo de Mathlet

Este aplicativo, definido por SANTOS & AL. [37] como um construtor de mathlets, permite a geração de aplicações inteiramente novas a partir da reconfiguração de parâmetros, puramente matemáticos, em uma cena inicial pré-existente por meio de uma interface (janela) amigável de configuração. Esta característica especial permite que os professores, sem nenhum conhecimento prévio de linguagem de programação, criem suas próprias atividades e as incorporem na sua prática educativa.

Nesse sentido, as características do aplicativo escolhido são particularmente valiosas para o processo de ensino e aprendizagem de funções e sua escolha, como ferramenta usada neste trabalho, é conseqüência de pesquisas recentes sobre o tema.

De acordo com SANTOS et AL., [37], com o uso desses aplicativos, é possível integrar conceitos geométricos, como os de vetores e transformações do plano, aos conceitos relativos a funções e seus gráficos. É possível, também, modificar dinamicamente os gráficos de funções, a partir da variação de parâmetros dados, possibilitando aos alunos a observação qualitativa destas alterações. Dessa forma os alunos têm a chance de desenvolver uma visão mais dinâmica e detalhada da relação entre os parâmetros de uma função e o comportamento de seu gráfico, por exemplo.

Além disso, por meio da manipulação de controles simples, é possível não só permitir e incentivar que os alunos observem variações de parâmetros, mas também que testem conjecturas, tentem comprová-las experimentalmente e, finalmente, entendam a necessidade do rigor e generalidade da prova matemática.

1.4 – Estrutura do Trabalho

Este trabalho é estruturado da maneira descrita a seguir.

No Capítulo 2 apresentamos um estudo Histórico e Epistemológico do Conceito de Função. Nosso objetivo, neste capítulo, era verificar sobre quais circunstâncias foi desenvolvido e aperfeiçoado o conceito de função.

No Capítulo 3 descrevemos os Referenciais Teóricos dessa pesquisa, que está fundamentada, como já foi citado, nas noções de Conceito Imagem e Conceito Definição de TALL e VINNER(1981), de Representações Semióticas de DUVAL(2003) e Obstáculos Epistemológicos de SIERPINSKA(1992).

No Capítulo 4, após estabelecer os alicerces de nossa pesquisa descrevemos a Metodologia utilizada nessa pesquisa. Usamos para tal a Engenharia Didática, aplicada à resolução de problemas, integrada ao uso dos mathlets. Neste capítulo, faremos também um breve resumo do trabalho realizado dentro do contexto metodológico.

No Capítulo 5, apresentamos a Sequência Didática usada nesta pesquisa. Em cada ficha de atividade procedemos da seguinte maneira: Fizemos a análise a priori a fim de obtermos uma previsão do comportamento dos alunos. A seguir foi aplicada a Sequência Didática, em uma turma de 1º ano do Ensino Médio. Finalizando, fizemos a análise a posteriori, baseada nos dados colhidos ao longo da aplicação da atividade e nas produções dos alunos.

No Capítulo 6, apresentamos a aplicação de dois testes, em duas turmas de 1º ano, sendo uma delas, a turma em que foi aplicada a Sequência Didática, cujo conteúdo abordado era sobre Função Afim. Esses testes faziam parte da proposta pedagógica da escola visando a preparação dos alunos para as provas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

No Capítulo 7, apresentamos as Conclusões e algumas sugestões que possam contribuir para uma melhoria no ensino aprendizagem da Função Afim.

2 – UM POUCO DE HISTÓRIA SOBRE FUNÇÕES

Este capítulo será destinado a um estudo epistemológico do conceito de função, seu desenvolvimento ao longo da história e dos conceitos de objetos matemáticos que tiveram alguma influência na sua formação.

Atualmente as funções constituem um conceito fundamental a ser estudado na disciplina de Matemática do Ensino Médio. Essa importância é ressaltada pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL [6]).

> "*O* ***estudo das funções*** *permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.*" (p.121)

Do ponto de vista da maioria dos matemáticos, a noção de função pode ser apresentada de muitas maneiras diferentes, cada uma com diversas implicações educacionais, por exemplo:

- A noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.

- Funções de uma, duas ou n variáveis, $n \in N$, estudando suas propriedades, e aplicações na resolução de problemas interdisciplinares.

- Na resolução de equações em que as incógnitas são variáveis de funções;

- Nos estudos da lógica matemática onde aparecem funções na forma recursiva.

O conceito de função como conhecemos nos livros de matemática do Ensino Médio é apresentado sob a forma de uma sentença que relaciona grandezas. Vejamos alguns exemplos:

> "Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação f de A em B recebe o nome de aplicação de A em B ou função definida em A com imagens em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existe um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$". IEZZI [16] (p.81)

> "Dados dois conjuntos não vazios A e B, uma função de A em B é uma regra que indica como associar cada elemento $x \in A$ a um único elemento $y \in B$". DANTE [11] (p.59)

Para que este conceito chegasse a tal estado de formalismo matemático, a noção de função foi-se construindo e aperfeiçoando ao longo de vários séculos. A partir dessa idéia perguntamos: quais foram as construções teóricas desenvolvidas ao longo da humanidade que contribuíram para a formulação do conceito moderno de função?

2.1 – Evolução do Conceito de Função

O conceito de função é considerado como um dos mais importantes na matemática. Como o ponto, a reta e o plano são os elementos básicos para construção da teoria fundamental da geometria euclidiana, as noções dos diferentes tipos de funções constituem o fundamento da análise matemática, a teoria central, no desenvolvimento da matemática desde o fim do século XVI.

Segundo o pesquisador YOUSCHKEVITCH [45], da Universidade de Moscou, o desenvolvimento do conceito de função ocorre através de três etapas da nossa história até a metade do século XIX, a saber: a Antigüidade, a Idade Média, o Período Moderno.

De acordo com YOUSCHKEVITCH [45] (p.9), na Antiguidade, embora haja registros de estudos sobre diferentes casos de dependência entre duas quantidades, esses registros não apresentam nenhuma noção geral de quantidades variáveis e nem de funções. Na Idade Média as noções de quantidades variáveis, são pela primeira vez apresentadas sob formas geométricas ou cinemáticas. Porém cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era definido por uma descrição verbal ou por um gráfico, ao invés de uma fórmula. No Período Moderno, a partir do fim do século XVI e especialmente durante o século XVII, as funções representadas por expressões analíticas, que em geral eram representadas por soma de séries infinitas, começaram a serem estudadas, tornando-se a principal classe utilizada."

2.1.1 - ANTIGUIDADE

Noções primitivas de funções podem ser encontradas em relatos de povos antigos, como por exemplo, a contagem, implicando uma correspondência entre um conjunto de objetos e uma seqüência de números naturais, as quatro operações aritméticas elementares, que são funções de duas variáveis, etc.

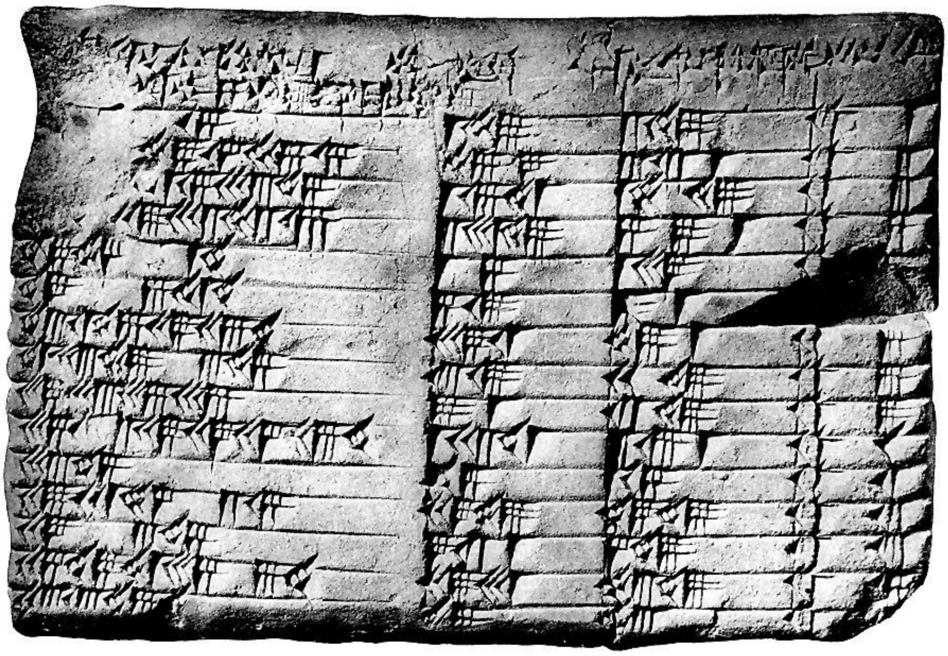
I – Babilônios

Tal conceito já era percebido nos registros da civilização Babilônica (ou simplesmente Babilônios[6]). É possível encontrar sinais de que os babilônios já teriam, por volta de 2000 a.C, uma idéia, ainda que primitiva, sobre função. São de fato, conhecidas tábuas sexagesimais de quadrados, de cubos e de raízes quadradas utilizadas por esse povo, na antiguidade, revelando uma idéia de correspondência funcional.

---

[6] A civilização Babilônica, considerada uma das mais antigas da história, constituída por povos que habitavam na Mesopotâmia. Essa região localiza-se entre os rios Tigre e Eufrates no Oriente Médio, onde atualmente é o Iraque. Dentre os povos que habitavam essa região entre os séculos V e I a.C, destacamos os: babilônicos, assírios, sumérios, caldeus, amoritas e acádios. Usaremos o termo **babilônio,** assim como em EVES (p. 59), apenas por conveniência a fim de retratar as contribuições desses povos ao desenvolvimento da matemática.

Como exemplo, citamos a mais notável das tábuas matemáticas babilônicas já analisadas, conhecida por Plimptom 322. Essa tábua foi escrita por volta dos anos de 1900 a 1600 a.C. A figura abaixo mostra uma fotografia desta placa.



Fotografia da Plimpton 322(Universidade de Colúmbia)

De acordo com EVES [12]:

> *"Perto do ano 2000 a.C. a aritmética babilônica já havia evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Não só se resolviam equações quadráticas, seja pelo método equivalente ao de substituição numa fórmula geral, seja pelo método de completar quadrado, como também se discutiam algumas cúbicas (grau três) e algumas biquadradas (grau quatro)."* (p.61)

Várias foram as interpretações feitas do conteúdo da Plimpton 322. O fato de algumas das entradas da tabela se encontrarem danificadas o suficiente para se tornarem ilegíveis, permitiu-se obter um maior número de hipóteses a serem seguidas pelos matemáticos que resolveram estudá-la. Os primeiros historiadores a tentar perceber uma eventual interligação do conteúdo das suas várias colunas foram Neugebauer e Abraham Sachs em 1945.

Segundo EVES [12], interpretação de Neugebauer consiste em mostrar que cada linha da Plimpton refere-se a registro sobre os ternos pitagóricos, isto é, soluções inteiras da equação $a^2 = b^2 + c^2$.

II – Egípcios

Segundo EVES[12], antes de se decifrar tantas tábuas matemáticas babilônicas, o Egito foi por muito tempo o mais rico campo de pesquisas históricas, em particular, matemáticas, sobre antiguidade.

Muitos registros dos egípcios foram preservados por meio de papiros. Os mais importantes para o estudo dos registros matemáticos desse povo são: o papiro de Moscou, o papiro de Kahun, o papiro de Rhind, de cerca de dois milênios a.C. Eles possuíam problemas do cotidiano dos egípcios como o preço do pão e da cerveja, a alimentação do gado, a quantidade de grãos de trigo armazenados, entre outros. Muitos desses problemas eram resolvidos por uma equação do 1º grau e o método utilizado pelos egípcios para esse tipo de resolução ficou conhecido como *Método da Falsa Posição*. Percebemos através desse tipo de resolução que os egípcios já possuíam uma idéia da relação funcional entre duas grandezas. Vejamos por meio de um exemplo, como era resolvido pelos egípcios através da falsa posição:

Uma quantidade, sua metade, seus dois terços, todos juntos são 26. Digam-me: Qual é a quantidade?

Atualmente poderíamos modelar esse problema utilizando Álgebra, por meio da equação $x + \frac{x}{2} + \frac{2x}{3} = 26$, onde x é a quantidade procurada.

Os egípcios, primeiramente, assumiam um valor conveniente para x (valor "falso"), de modo a eliminar os denominadores das frações. Neste caso, fazia-se $x = 60$ e obtia-se:

$$60 + \frac{60}{2} + \frac{120}{3} = 60 + 30 + 40 = 130$$

Os valores falsos (60 e 130) eram então usados para montar uma espécie de regra de três simples com os elementos do problema. Assim teríamos:

Valor falso	**Valor verdadeiro**
60	Quantidade
130	26

Logo a quantidade procurada era obtida dividindo-se o valor real do problema pelo valor falso encontrado.

$$26 \div 130 = \frac{1}{5}.$$

Em seguida multiplicava-se o resultado obtido dessa divisão pelo valor falso assumido inicialmente, obtendo $\frac{1}{5} \times 60 = 12$, encontrando assim a quantidade procurada, que é 12.

Analisando esse método, percebemos que os egípcios já possuíam a noção de relação entre duas grandezas.

2.1.2 – IDADE MÉDIA

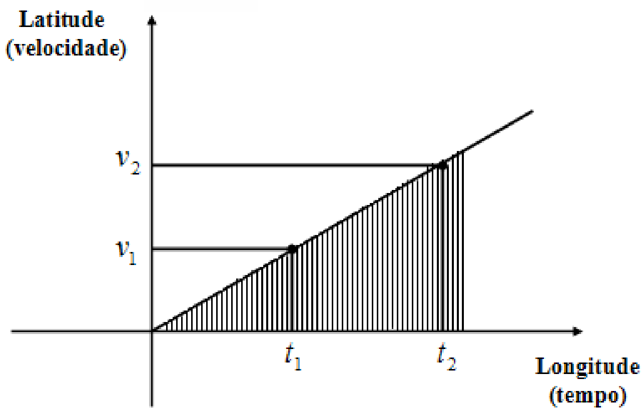
Uma contribuição importante no desenvolvimento da representação gráfica da noção de função foi dada pelo **Bispo Nicolau de Oresme** (1323-1382), na Universidade de Paris, que desenvolveu uma teoria geométrica das latitudes e longitudes das formas, que apresentam diferentes graus de intensidade e extensão.

Podemos considerar essa teoria como a precursora na representação gráfica de uma função. Em sua teoria, algumas idéias gerais sobre a variável dependente e independente de certas quantidades parecem estar presentes. Oresme percebeu que poderia trabalhar com duas variações ao mesmo tempo.

Para isso ele apresentou uma representação gráfica da velocidade em relação ao tempo, de um móvel que se move com aceleração constante.

Oresme representou por um ponto, cada instante de tempo(ou longitude) numa reta. A seguir, a cada instante de tempo, traçou um segmento vertical (latitude) cujo comprimento representava a velocidade nesse instante. As extremidades desses segmentos como podemos comprovar, estão alinhadas e formam um segmento de reta que representa a velocidade em função do tempo.

Vejamos um exemplo do modelo descrito por Oresme:



De acordo com BOYER, [5]

> *"Ao conectar as extremidades dessas perpendiculares ou latitudes, obtinha uma representação da variação funcional da velocidade com relação ao tempo – num dos mais antigos exemplos na história da matemática do que hoje seria o gráfico de uma função"*(p.9)

Analisando a construção geométrica de Oresme percebemos a representação do gráfico de uma função Afim, velocidade em relação ao tempo. Apesar das noções de coordenadas não terem sido formalmente definidas por Oresme, consideramos, de acordo com BARON [1], que ele foi o primeiro a utilizar coordenadas para representar a velocidade em função do tempo. Mesmo que intuitivamente, essas ideias trouxeram contribuições importantes à representação gráfica de uma função.

2.1.3 – **PERÍODO MODERNO**

A noção de função está presente, embora que de forma implícita, em todas as teorias relacionadas ao desenvolvimento do calculo algébrico. Seu maior desenvolvimento ocorre, mais intensamente, a partir do final do século XVII, com a noção de expressão algébrica e segue com a noção de correspondência entre variáveis dependente e independente, aproximando da formalização que conhecemos atualmente.

Um salto importante no desenvolvimento da noção de função foi dado por François Viète(1540-1603). Considerado por muitos como o maior matemático francês do século XVI, em seu trabalho "In Artem analyticam isagoge"(1591) apresentou contribuições notáveis para o que, segundo YOUSCHKEVITCH(1981), é considerado como a "*Nova Álgebra*". Viète estabeleceu como prática o uso de vogais para representar incógnita e consoantes para representar constantes.

Segundo EVES [12]:

> *"Antes de Viète era comum se usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada; assim, o que hoje se indica por* x, x^2, x^3 *ele expressava por A, Aquadratum, A cubum; mais tarde alguns escritores abreviaram essa noção para A, Aq, Ac."*(p.309)

A notação de Viète possibilitou, pela primeira vez, a representação de uma equação algébrica e de expressões envolvendo números desconhecidos, por meio de símbolos algébricos. Todavia, de acordo com YOUSCHKEVITCH [43], "*... o criador da nova Álgebra(Viète) não utiliza sua notável descoberta para "fazer avançar" o conceito de função: pensar em termos de função não foi característica de seu espírito*".(p.23)

A convenção moderna de se usar as primeiras letras do alfabeto para representar constantes e as últimas letras para representar as incógnitas foi introduzida por Descartes em 1637.

Descartes(1596-1650) filósofo e matemático francês propôs a utilização de um sistema de eixos para localizar pontos e representar graficamente as equações. Em seu trabalho "*La Géométrie*" ele afirmou que uma equação em duas variáveis, por exemplo, x e y, geometricamente representada por uma curva, indica uma dependência entre quantidades variáveis. A idéia da derivada surgiu como uma maneira de encontrar a tangente em qualquer ponto dessa curva.

Por meio da resolução, dada por Descartes, ao problema de Pappus, que consiste em reduzir o problema a duas retas graduadas, ele constrói um sistema de coordenadas, que é considerado como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Esse sistema de coordenadas é conhecido atualmente como plano cartesiano, em homenagem a Descartes.

Descartes, trabalhando sobre métodos geométricos mais gerais que os de Viète, exibiu ferramentas algébricas inovadoras. Seu objetivo era o mesmo de Viète, resolver problemas de construção. Porém seu método de representar algebricamente problemas geométricos que envolviam equações de qualquer grau ou equações indeterminadas foi a revolução da Geometria do século XVII. Descartes, aperfeiçoando o simbolismo de Viète no livro III da "*La Géométrie*", desenvolve uma notação equivalente à que usamos atualmente.

Outro matemático que trouxe contribuições importantes para o desenvolvimento da análise matemática e consequentemente ao estudo de funções foi Newton(1642-1727). Em seu trabalho publicado em 1736, sob o título "Method of fluxions" ele usa o termo "fluente" e "fluxo do fluente" o que hoje chamaríamos de variável dependente e independente.

Segundo EVES [12]:

> *"Para Newton, nesse trabalho, uma curva era gerada pelo movimento contínuo de um ponto. Feita essa suposição, a abscissa e a ordenada de um ponto gerador passam a ser, em geral, quantidades variáveis. A uma quantidade variável ele dava o nome de fluente(uma quantidade que flui) e a sua taxa de variação dava o nome de fluxo do fluente. Se um fluente como a ordenada do ponto gerador, era indicada por* y*, então o fluxo desse fluente era denotado por* $\dot{y}$ *"*(p. 439).

.

Apesar de Newton não ter usado o termo função, percebemos pelos seus trabalhos que ele já considerava a existência de uma relação entre variável dependente e independente. Os conceitos mecânicos e cinemáticos, usados por ele para expressar as variáveis, na linguagem atual, seria o mesmo que considerá-las em função do tempo.

Foi Leibniz(1646-1716) no trabalho intitulado "*O método inverso das tangentes, ou em funções*"("Methodus tangentium inversa, de seu de fonctionibus"), quem primeiro usou o termo "função" em 1673. Em um artigo impresso no Journal des Scavans em 1694, Leibniz pela primeira vez apresenta a palavra "função" numa publicação.

Ele usou a palavra função para designar, em termos muito gerais, um segmento de reta (corda, abscissa, ordenada, etc) cujo comprimento depende da posição que ocupa um certo ponto sobre uma curva dada. Ele também introduziu o termo "constante", "variável", e "parâmetro". Segundo Boyer[4]:

> *"Leibniz não é o responsável pela moderna notação para função, mas é a ele que se deve a palavra "função", praticamente no mesmo sentido em que é usada hoje"*(p.297)

Deve-se Johann Bernoulli(1667-1748) não somente o emprego do termo função em um sentido mais preciso, como também a definição, de maneira geral, das funções de uma grandeza variável. A definição de função no sentido de expressão analítica foi publicada em 1718 nas *"Acta Eruditorum Lipsiae"*. Nesse artigo, segundo YOUSCHKEVITCH [43], Johann Bernoulli define função da seguinte maneira:

> *"Chamamos função de uma grandeza variável as quantidades compostas, de um modo qualquer, dessa grandeza variável e de constantes"*.(p. 35).

Foi Leonhard Euler(1707-1783), descendente intelectual de Leibniz e influenciado pelos ensinamentos de Johann Bernoulli, que muito contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função.

Em sua *"Introductio in analysin infinitorum"*, publicada em 1748, Euler definiu uma função de uma quantidade variável como sendo "*qualquer expressão analítica composta formada de alguma maneira por essa quantidade variável e com números ou quantidades constantes*". BOYER [5] (p.24)

Podemos destacar também outras grandes contribuições de Euler à matemática, como a implantação de algumas notações matemática, como as apresentadas por EVES [12] (p. 472) a saber:

$f(x)$	para funções
e	para a base dos logaritmos naturais
$a,\ b,\ c$	para os lados de um triângulo ABC
$\sum$	para somatórios
i	para a unidade imaginária $\sqrt{-1}$

Em seus escritos, Euler também nos apresenta a distinção entre as funções explícitas das implícitas, as algébricas das transcedentes. Dessa época em diante a idéia de "função" tornou-se fundamental na análise.

Enquanto Euler, em seus trabalhos, se preocupava com detalhes e liberdade de intuição, Joseph Louis Lagrange(1736-1813) se preocupava com o rigor matemático. Em sua obra *"Theorie des Fonctions Analytiques Contenant lês Príncipes Du Calcul Différentiel",* Lagrange propunha a representação de uma função $f(x)$ por uma série de Taylor. A notação $f`(x),\ f``(x),\ ...$ para derivadas de 1ª, 2ª , ... , n-ésima ordem, muito utilizada atualmente, foi introduzida por ele. Apesar de não ter alcançado seu objetivo por cometer erros em não atentar para a convergência e divergência, que se baseiam na idéia de limite, suas idéias produziram a *" primeira teoria de funções de variável real"*.

O século XIX é conhecido como o "*século do rigor*". Esse título é dado, pois nesse período a busca pelo rigor matemático levou muitos matemáticos competentes como Cauchy (1789-1857), Lobatchevsky (1792-1856) Weierstrass (1815-1897), Riemann (1826-1866), Dedekind (1831–1916), Cantor (1845-1918) entre outros, a desenvolverem trabalhos muito produtivos no que se refere à formalização rigorosa de conceitos matemáticos antes abordados de maneira intuitiva.

Dentre todos, os trabalhos de Jean Baptiste Joseph Fourier, merece-nos uma atenção especial, pois apresenta uma grande contribuição para formalização da definição de função.

Em 1807 Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França afirmando que toda função definida num intervalo finito, por um gráfico qualquer, pode ser representado por uma série de funções seno e cosseno (atualmente chamada de série de Fourier).

Em outras palavras se $f(x)$ é uma função definida no intervalo $(-\pi,\pi)$ ela pode ser representada pela expressão:

$$\frac{a}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos(nx) \;+\; b_n\cdot sen\ (nx)\right)$$

Apesar da afirmação de Fourier, que diz que qualquer função pode ser escrita por meio de uma série trigonométrica fosse exagerada, suas idéias contribuíram para o desenvolvimento de estudos em diversos campos como na acústica, óptica, termodinâmica e, também, dentre outros, na resolução de equações diferenciais.

Em busca de uma definição mais abrangente e rigorosa do conceito de função, Lejeune Dirichilet(1805-1859) chegou a seguinte definição:

> *"Uma variável é um símbolo que representa um qualquer dos elementos de um conjunto de números; se duas variáveis x e y estão relacionadas de maneira que, sempre que se atribui uma valor a x, corresponde automaticamente, por alguma lei ou regra, um valor a y, então se diz que y é uma função(unívoca) de x. A variável x, à qual se atribuem valores à vontade, é chamada* ***variável independente*** *e a variável y, cujos valores dependem dos valores de x, é chamada* ***variável dependente****. Os valores possíveis que x pode assumir constituem o* ***campo de definição*** *da função e os valores assumidos por y constituem o* ***campo dos valores*** *da função"*EVES[12] (p 661)."

Foi a partir dos estudos de conjunto de pontos feito por Georg Cantor e consequentemente do desenvolvimento da teoria de conjuntos, que permitiu-se definir uma função em termos de pares ordenados de elementos, não necessariamente numéricos.

Já no século XX, a busca pela formalização dos conceitos matemáticos levou muitos pesquisadores matemáticos a publicarem textos científicos. Entre eles destaca-se um grupo de matemáticos da França, que adotou o pseudônimo de Nicolas Bourbaki. Esse grupo acreditava que muitas definições da matemática moderna deveriam ser repensadas. Para isso, escreveram uma série de livros, que foram publicados a partir de 1935, onde apresentavam a matemática moderna, a partir de uma nova terminologia e novos conceitos.

De acordo com MENDES [21] a definição de função apresentada pelo grupo Bourbaki é:

> *"Sejam **E** e **F** dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de **E** em **F**, se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associado a x na relação considerada.*
>
> *Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função".(p.53)*

Este capítulo procurou situar o desenvolvimento do conceito de função, dentro de um breve panorama histórico enfatizando que a sua construção e correto entendimento não é fruto do trabalho de uma pessoa, mas sim, dos esforços de muitos, tendo evoluído à medida que evolui a própria civilização. Ressaltando, mais uma vez, a sua importância na formação do estudante, concordamos com EVES [12] (p.661) quando afirma "*..., é inquestionável que quanto antes se familiarize um estudante com o conceito de função, tanto melhor para a sua formação matemática.*"

3 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 – Imagem de Conceito e Definição de Conceito.

A maior dificuldade dos alunos com a matemática está na formalização de conceitos abstratos, que para eles, não tem muito significado. Atrelado a isso, um dos maiores desafios do professor, no ensino aprendizagem de matemática, é trabalhar com as definições matemáticas que, em geral, são apresentadas em linguagem bastante abstrata. Conseguir com que os alunos compreendam as definições matemáticas e saibam aplicá-las na resolução de problemas constitui numa das tarefas dos professores de matemática em relação ao ensino. Diante desse grande desafio, poderíamos questionar: então o que seria uma boa definição? Muitas respostas poderiam surgir tais como:

- É aquela que apresenta um enunciado rigoroso do ponto de vista matemático, fundamentado nas leis matemáticas, não permitindo nenhuma contradição.
- É aquela que pode ser entendida pelos alunos sem, no entanto, apresentar tanto rigor matemático.

Há muitos anos que este problema vem sendo estudado por vários pesquisadores matemáticos. Entre eles destacamos os trabalhos de David Tall e Shlomo Vinner(1981), que formulam uma teoria fundamentada na noção de Imagem de Conceito. Segundo os autores, o aluno deve primeiro se apropriar de vários conceitos imagens, para a partir daí, criar o seu próprio conceito definição. Mas então o que é Imagem de Conceito e Definição de Conceito?

Segundo TALL e VINNER [41], quando o aluno é estimulado a pensar sobre um determinado objeto, sua mente começa a trabalhar, surgindo assim várias representações visuais, impressões, experiências e propriedades, as quais são elaboradas pelos alunos por meio de pensamentos sobre estas representações mentais. Essas representações mentais são chamadas pelos autores de Imagem de Conceito. De acordo com TALL e VINNER [41] a Imagem de Conceito,

> *"descreve toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, inclui todas as imagens mentais e propriedades a elas associadas e os processos. É desenvolvida ao longo dos anos através de experiências de todos os tipos, mudando a medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece."(p.152).*

Por exemplo, o conceito de divisão é geralmente conhecido como um processo envolvendo números inteiros positivos. Nesta fase, as crianças podem observar que uma divisão de um número sempre reduz a resposta. Para uma criança esta observação é parte da sua Imagem de Conceito e pode causar problemas mais tarde quando se deparar com a divisão de números decimais, onde, na divisão de $10 \div 0{,}5 = 20$, por exemplo, o resultado aumenta ao invés de diminuir. Por esta razão, todos os atributos mentais associados ao conceito, sejam eles conscientes ou inconscientes, devem ser incluídos na Imagem de Conceito, pois eles podem levar a futuros conflitos.

Além disso, os autores introduzem o termo *Imagem de Conceito Evocada* para descrever a parte da Imagem de Conceito ativada em um dado contexto, não sendo necessariamente tudo aquilo que o aluno sabe sobre o assunto. Quando o aluno é estimulado por alguma situação qualquer, por exemplo, um problema matemático, surge para ele, algumas representações mentais dessa situação. Essas representações são chamadas de Imagem de Conceito Evocada.

De acordo com TALL e VINNER essa Imagem de Conceito só será denominada "evocada" num determinado instante, em que somente uma parcela da imagem de conceito é ativada. Em alguns momentos, imagens aparentemente conflitantes podem ser evocadas. Apenas quando aspectos conflitantes são evocados simultaneamente é que se percebe algum sentido real de conflito ou de confusão.

Outro termo introduzido por TALL e VINNER[41] é a Definição de Conceito. Para os autores, a Definição de Conceito refere-se a toda forma de representar por meio de palavras o Conceito Imagem. De acordo com os autores, a Definição de Conceito:

> *"... É então o tipo de palavras que o estudante usa para sua própria explicação da sua Imagem de Conceito (evocada). Se os conceitos definição lhes são dados ou construídos por si mesmo, pode variar ao longo do tempo. Dessa maneira um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, sendo este último um conceito definição que é aceito pela comunidade matemática."*(p.152)

TALL e VINNER complementam dizendo que uma Definição de Conceito pode ser simplesmente memorizada pelo aluno ou pode ser aprendida de maneira significativa e relatada por ele. De acordo com os autores, uma Definição de Conceito pode ser inexistente caso não tenha sido formado ou esquecido pelo aluno, ou pode existir e ser inativo, como é o caso em que o aluno memoriza certas definições com o intuito de realizar alguma avaliação. A Definição de Conceito pode ser formada a partir do momento em que o aluno é questionado e levado a explicar um determinado conceito.

Por exemplo, um aluno ao ser questionado sobre o que entende por função afim pode responder dizendo:

→ " É uma função cujo gráfico é uma reta", ou mesmo,

→ "É a função cuja lei é dada por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$" ou ainda,

→ "É a função cujos valores de y crescem ou decrescem linearmente".

Para esse aluno, a definição de função afim dada por $f(x) = ax + b$, por exemplo, foi a imagem que ele conseguiu assimilar, ou que ele tem memorizado de momentos em que teve que aprender esse conteúdo. Essa imagem faz parte do processo de ensino, podendo variar de pessoa para pessoa. No entanto essa definição de função afim pode ser alterada à medida que esse aluno adquire novas experiências e utiliza novas representações do mesmo objeto, na resolução de algum problema, em que o conceito de função afim é empregado.

Essa forma de pensar parece induzir que a mente e o cérebro podem ser separados. No entanto, para TALL a mente é pensada como a maneira pela qual o cérebro funciona e por isso, é uma parte indivisível da estrutura do cérebro.

Assim, ao invés de uma separação entre a Definição de Conceito e Imagem de Conceito, TALL considera que a Definição de Conceito não é mais que uma parte da Imagem de Conceito total que existe na nossa mente. Para ele, a Imagem Conceitual descreve a estrutura cognitiva total que é associado ao Conceito.

É importante destacar, no sentido dessa teoria cognitiva, que a grande vantagem de se utilizar um software computacional para se trabalhar funções, com os alunos é que eles conseguem compreender o papel dos parâmetros de uma maneira mais eficaz, já que estes programas permitem modificar dinamicamente os gráficos. Isto proporciona aos alunos uma visão geral do papel dos parâmetros nos gráficos, isto é, desligada de valores fixos, desenvolvendo assim uma rica Imagem Conceitual.

Nesse sentido, acreditamos que a Teoria de TALL e VINNER sobre Imagem de Conceito e Definição de Conceito nos ajude a entender como esses processos acontecem. Para isso devemos atentar para distinção entre os conceitos matemáticos como são formalmente definidos e os processos cognitivos pelos quais são concebidos pelos alunos.

3.2 – Representações Semióticas

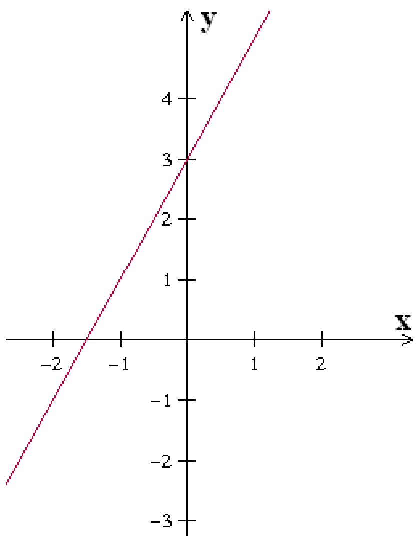
Nosso estudo também se apoia na noção de Representações Semióticas. Em Matemática toda comunicação se estabelece com base em representações, pois diferentemente de outras áreas do conhecimento, os objetos matemáticos são abstratos, isto é, não são diretamente perceptíveis ou observáveis com o auxilio de instrumentos (aparelhos de medida , microscópio, telescópio, etc.), necessitando do uso de representações semióticas para a sua apreensão DUVAL [10].

A apreensão dos conceitos matemáticos implica, de acordo com a teoria dos Registros de Representação Semiótica de DUVAL, numa abordagem cognitiva desses conceitos, ou seja, para um estudante reconhecer um objeto matemático[7] ele precisa recorrer a uma representação desse objeto, uma vez que "toda comunicação em Matemática se estabelece com base em representações" DUVAL [10] (p. 14). Ainda segundo o autor, é preciso também levar em conta as diferentes representações associadas ao mesmo objeto.

A utilização das várias representações de um determinado objeto matemático deve ser trabalhada pelos professores e, assim, quando o aluno é capaz de articular essas representações dentro de um determinado registro ou entre os registros, dizemos que a aprendizagem é mais significativa.

São exemplos de representações semióticas: os sistemas de escrita algébrica , numéricas ou simbólicas, os gráficos cartesianos, as figuras geométricas, etc. Existem vários registros possíveis de representação para um mesmo objeto, por exemplo, no caso de uma função Afim:

Representação Gráfica



Representação de Escrita Simbólica

$$y = 2x + 3$$

ou

$$f(x) = 2x + 3$$

Representação Linguística

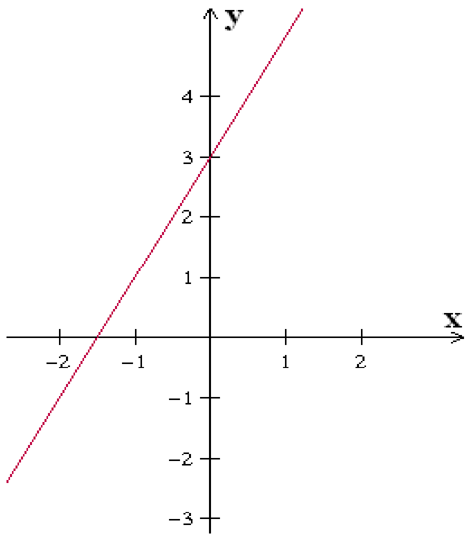
Função Afim

As diversas formas de representações para um mesmo objeto apontam para a possibilidade de transformação dessas representações em outras.

[7] Objeto Matemático é qualquer entidade, real ou imaginária, a qual nos referimos ou da qual falamos, na atividade matemática.

De acordo com DUVAL, essa transformação pode ocorrer de duas maneiras distintas, a saber, **processamento** e **conversão**. Segundo o autor os **processamentos** são transformações feitas dentro do mesmo registro de representação, por exemplo, na resolução de uma equação $x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$. Já as **conversões**, são transformações feitas entre registros de diferentes representações, conservando o mesmo objeto. Por exemplo, na representação de uma Função Afim, passar da representação por meio de uma tabela para a representação no plano cartesiano é um caso de conversão.

x	$f(x) = 2x + 3$
-2	**-1**
-1,5	**0**
-1	**1**
0	**3**
1	**5**
2	**7**



Para DUVAL os estudantes apresentam muitas dificuldades com os dois tipos de operações cognitivas os quais são as bases dos processos matemáticos. Ele afirma que embora a maioria dos estudantes seja capaz de aprender algum processamento elementar, poucos conseguem realmente converter representações. Encontramos constantemente esses tipos de dificuldades no ambiente escolar, em sala de aula. Por isso é preciso levar o estudante a desenvolver sua potencialidade e ser capaz de transformar os diversos registros de um mesmo objeto, sabendo operar com ele.

Segundo DUVAL, citado por PALIS [29]:

> *"O papel das representações matemáticas semióticas, na atividade cognitiva da matemática, em particular da representação gráfica, dificilmente pode ser subestimado. A apreensão conceitual de um objeto matemático é inseparável da apreensão e produção de suas representações semióticas. Ser capaz de se mover por diferentes sistemas de representação é uma condição necessária para a discriminação entre o objeto matemático e suas representações e para reconhecer o objeto matemático em cada uma das suas possíveis representações."* (p.3).

Ainda segundo DUVAL [10] realizar uma conversão, não é só mudar o modo de tratamento é, também, explicar as variáveis pertinentes aos registros mobilizados numa dada conversão. Para ele, cada uma das várias representações de um mesmo objeto tem variáveis específicas, necessitando da complementaridade de registros, pois o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado.

Assim, ao levantarmos a questão da aprendizagem da matemática, devemos levar em conta os conteúdos matemáticos e o funcionamento cognitivo do aluno, observando suas produções e buscando um modelo que seja pertinente para analisar e interpretar tais produções. Em nosso trabalho, vamos analisar algumas representações referentes ao objeto, Função Afim, através da aplicação de atividades, por meio de uma Sequência Didática.

Dessa maneira, acreditamos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond DUVAL possa nos ajudar a encontrar respostas aos nossos questionamentos, visando uma maior compreensão dos objetos matemáticos e do processo de aprendizagem.

3.3 – Obstáculos Epistemológicos

Utilizaremos também nesse estudo algumas noções de obstáculo. Segundo GUY BROUSSEAU [7], o obstáculo é caracterizado por um conhecimento, uma concepção, e não por uma dificuldade ou uma falta de conhecimento, que produz respostas adaptadas num certo contexto e, fora dele, produz respostas falsas. Assim, cada conhecimento pode ser um obstáculo à aquisição de novos conhecimentos. Os obstáculos se manifestam pela incompreensão de certos problemas ou pela impossibilidade de resolvê-los com eficácia, ou pelos erros que, para serem superados, deveriam conduzir ao estabelecimento de um novo conhecimento.

Em nosso trabalho analisaremos os obstáculos relativos ao conceito de Função Afim. Para isso tomaremos como base os trabalhos de SIERPINSKA [39]. Em seu artigo, a autora, apresenta um estudo dos obstáculos epistemológicos da evolução histórica do conceito de função e discute a compreensão do conceito de função dos estudantes e as suas dificuldades.

Em seu artigo, SIERPISNKA [39] infere que uma das implicações pedagógicas dos obstáculos epistemológicos, no ensino de funções, é que o conceito de função não aparece para os alunos como uma das possíveis ferramentas, para resolver problemas do cotidiano e, assim, esse conceito não tem sentido para eles fora da sala de aula. Para a autora é preciso dar oportunidades aos alunos de usarem o conhecimento sobre funções na explicação de fenômenos de seu dia-a-dia ou de outras ciências a partir de modelos de relacionamentos de variáveis que observam.

SIERPISNKA sugere que o estudo das funções deve ser introduzido como modelos de relações com situações da vida real e como instrumentos para representar um sistema em outro sistema. As funções podem ser modelos de situações da vida real, explicações de fenômenos físicos, etc. Para SIERPISNKA [39](p. 32) é dessa forma como, historicamente, o conceito de função foi se desenvolvendo, vindo a ser "como instrumentos de descrição e previsão"

Segundo BIAGGI [3],

> *"Não é possível preparar alunos capazes de solucionar problemas ensinando conceitos matemáticos desvinculados da realidade, ou que se mostrem sem significado para eles, esperando que saibam como utilizá-los no futuro. Tão pouco podemos esperar que nossos alunos criem afeto por uma matéria que nem ao menos sabe utilizar."* (p.103)

Assim, dentre os conhecimentos fundamentais da matemática, encontramos na álgebra, mais especificamente no conteúdo de Função Afim, um maior comprometimento em tentar compreender como as formas de linguagens e códigos, que utilizamos para expressar esse conhecimento matemático, são entendidas e mobilizadas por alunos na 1ª série do Ensino Médio em sua estrutura cognitiva e, de que maneira a apreensão desse conteúdo tem proporcionado aos alunos um instrumento eficaz no seu processo de aprendizagem.

Torna-se evidente, portanto, que um dos nossos objetivos é contribuir para que a abordagem dos conteúdos de funções se torne mais dinâmica, possibilitando aos alunos uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos. De fato, a aquisição de um bom conhecimento de funções é uma condição necessária não só para se seguir várias carreiras, como Economia, Física, Química, Matemática mas também para a formação cidadã.

Por meio dessas idéias estruturamos a Sequência Didática, desse trabalho, escolhendo atividades que levassem os alunos a refletirem sobre o conceito da Função Afim, mostrando sua utilidade na resolução de problemas do nosso cotidiano, de modo a superar os obstáculos relacionados às suas múltiplas representações e contribuindo para o enriquecimento da imagem desse conceito.

4 – METODOLOGIA EMPREGADA E O ESTUDO DESENVOLVIDO

O trabalho aqui relatado se insere na linha de pesquisa que busca entender o processo de “aprender matemática na prática” e melhorar a compreensão sobre a natureza do saber docente, relacionada à matemática escolar. No nosso caso, utilizamos atividades centradas em análise de trabalhos de alunos.

Desse modo, justifica-se, como metodologia desta pesquisa, a escolha da Engenharia Didática, aliada à resolução de problemas, de modo a contemplar tanto a dimensão teórica, como experimental da pesquisa obtendo-se como principal vantagem uma ligação do plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa.

4.1 - ENGENHARIA DIDÁTICA

Esta metodologia de pesquisa, desenvolvida pela escola francesa da Didática da Matemática, se caracteriza pela aplicação de uma seqüência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações que permitam interpretar processos de ensino-aprendizagem da Matemática, esclarecendo o fenômeno investigado. Esta metodologia de pesquisa da Educação Matemática permite estabelecer uma relação entre o que se ensina e o que é aprendido pelos alunos e leva o professor pesquisador a obter resultados concretos, na perspectiva de superar as dificuldades, inerentes ao conteúdo ensinado.

Segundo ARTIGUE(1988), citado por PEREIRA[32]:

> *“a Engenharia Didática se caracteriza como um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de atividades de ensino.”* (p.63)

A Engenharia Didática, enquanto procedimento metodológico, se baseia em três etapas, a saber: Análise a Priori, Análise a Posteriori e Validação.

A análise a priori é caracterizada pela tomada de decisão inicial na escolha dos procedimentos a serem adotados na elaboração da sequência de atividades que será aplicada segundo um referencial teórico. É nesta etapa que se decide, por exemplo, quais, quantas e em que ordem as atividades serão realizadas na sequencia didática, se elas serão interdisciplinar ou pluridisciplinar, sobre o tempo de aplicação de cada atividade, se serão realizadas individual ou em grupos, etc. Em suma é planejar o que será executado na Sequencia Didática.

A análise a posteriori compreende a análise dos dados coletados, bem como as observações realizadas, durante a aplicação da Sequência didática.

A validação das hipóteses levantadas na pesquisa é baseada na confrontação entre a análise a priori e a análise a posteriori.

4.1.2 – A Resolução de Problemas

Segundo PONTE a investigação em sala de aula, através de resolução de problemas pode ser analisada a partir de quatro momentos:

1º. A formulação do problema;
2º. A coleta de dados;
3º. A análise desses dados e as conclusões;
4º. A divulgação dos resultados.

De acordo com PONTE [34], a formulação do problema é um ponto de grande importância no trabalho investigativo. Elaborar boas questões para a investigação é o primeiro passo para se obter um trabalho investigativo eficiente. As questões devem referir-se a problemas que preocupem o professor e suscetíveis de resposta com os recursos existentes. Questões que não são de real interesse do professor acabam não tendo grande importância na investigação, podendo assim comprometer todo o trabalho.

Ainda segundo PONTE [32] é na formulação de questões que muitas investigações começam a se perder. Em alguns casos, suas perguntas são tão ambiciosas, que se tornam impossíveis de ser respondidas no tempo programado, com os recursos disponíveis. Em outros casos, as questões não são bem formuladas no início e são modificadas à medida que o trabalho é desenvolvido, tornando impossível uma conclusão satisfatória sobre o problema. Aprender a formular boas questões é, por isso, um requisito fundamental para se fazer a investigação em sala de aula.

A coleta de dados, segundo PONTE, pode ser de natureza quantitativa (dados numéricos) ou qualitativa (dados não numéricos), dependendo do problema do estudo. Os dados de natureza quantitativa são os testes e os questionários. As técnicas de análise dos dados quantitativos, mais usadas, são as de estatística, tanto descritiva como de inferência. Por outro lado, as técnicas mais usadas na coleta de dados de natureza qualitativa são a observação, a entrevista e a análise de documentos. Sendo os dados coletados de natureza quantitativa ou qualitativa, o mais importante não é coleta de muitos dados, mas sim dados adequados e confiáveis afim de que se tenha uma conclusão satisfatória sobre as observações. Por isso, segundo PONTE [32], preciso que os dados sejam coletados com procedimentos claros e bem definidos, a fim de permitir uma análise posterior.

A análise e a divulgação desses dados, para PONTE, sempre estarão entrelaçadas. A divulgação de resultados e conclusões podem ser feitas desde as conversas informais com autores próximos ao investigador (ou da equipe de investigação), até às apresentações formais em encontros e publicações em revistas. Segundo PONTE o mais importante é disponibilizar o resultado dos trabalhos para que outras pessoas, interessadas no assunto, possam contribuir para aperfeiçoamento da questão de estudo. Além disso, é na análise dos resultados que podem surgir questões e reflexões que não fora anteriormente prevista, abrindo caminho a novas questões de estudo e novos projetos.

4.2 – O ESTUDO REALIZADO.

Nesta pesquisa, além do estudo histórico e epistemológico do conceito de Função Afim, apresentado no Capítulo 2, elaboramos, analisamos e aplicamos uma Sequência Didática utilizando alguns mathlets, desenvolvidos a partir do NIPPE Descartes. Foram realizados também, ao final da aplicação da Sequência Didática, dois testes, contendo questões de diversos concursos, a nível nacional, sobre Função Afim. Esses testes foram resolvidos pelos alunos, sem o uso do Descartes, a fim de verificar como o uso dos mathlets nas aulas de matemática, interferem positivamente no aprendizado dos alunos, levando-os a melhorarem o seu rendimento.

Escolhemos o conceito de Função Afim por se tratar de um instrumento próprio para o estudo de algumas leis físicas e químicas. Sua relevância deve-se, em parte, a sua ampla utilização nas distintas áreas do conhecimento, bem como nas conexões internas à própria Matemática e situações do cotidiano.

Nossa pesquisa está situada dentro de um contexto metodológico caracterizado pela “pesquisa-ação”. PAIXÃO [26] afirma que a utilização dessa metodologia de pesquisa, permite ao pesquisador interagir direta e continuamente com o objeto de sua pesquisa. De acordo com PAIXÃO [26]:

> *“De modo geral, podemos dizer que esta metodologia nos permite, a cada passo dado, reavaliar e reestruturar a pesquisa, obtendo assim uma pesquisa consideravelmente adaptável a novas possibilidades e/ou entraves que possam surgir ao longo do desenvolvimento da mesma. Ao contrário de pesquisas totalmente fechadas onde, ao iniciar, o pesquisador já sabe exatamente onde quer e vai chegar, no caso da pesquisa-ação uma mudança de rumos no decorrer da coleta e/ou da análise de dados é algo completamente possível e freqüente.”(p.37)*

No caso específico de nosso trabalho procuramos, com o uso dessa metodologia, avaliar de que modo a utilização dos mathlets pode contribuir significativamente para aprendizagem dos alunos. Por meio da aplicação da

Sequência Didática procuramos conhecer as dificuldades dos alunos com as operações algébricas, a forma como eles interagem com as diversas formas de representações do mesmo objeto, que no nosso caso é o estudo da Função Afim e a forma como eles utilizam conceitos previamente aprendidos na realização de testes.

De acordo com a Engenharia Didática, o processo experimental da nossa pesquisa é apresentado através de quatro fases:

1º) Análises Preliminares
2º) Concepção e Análise a Priori da Seqüência Didática
3º) Aplicação de uma Sequencia Didática
4º) Análise a Posteriori e Validação.

4.2.1 – Análises Preliminares.

Nesta fase preliminar deve ser fundamentada a sequência de atividades a ser desenvolvida com os alunos, bem como suas ações e a escolha do assunto a ser estudado, de acordo com um referencial teórico.

Em nossa pesquisa, é nesta fase que se leva fortemente em consideração, o estudo histórico e epistemológico sobre o conceito de função afim, e também a análise das concepções e dificuldades dos alunos, sobre o conceito de Função Afim. As atividades foram desenvolvidas para serem aplicadas com alunos do 1º ano do ensino médio, na faixa etária entre 14 e 16 anos.

4.2.2 – Concepção e Análise a Priori.

Nesta segunda fase, será tomada a decisão de atuar sobre um determinado número de variáveis referente ao objeto a ser pesquisado. Por exemplo, decidiremos o número de atividades a serem realizadas em nossa seqüência didática, as áreas de conhecimento em que serão desenvolvidas as atividades, como aplicação à geometria, à área financeira, à Física, entre outras; se utilizaremos papel quadriculado ou não nas representações gráficas das funções, se utilizaremos números inteiros, decimais ou fracionários nos registros das tabelas, fracionários. Sobre a utilização do laboratório de informática, quantos alunos utilizarão cada micro, quantas cenas serão necessárias na realização de cada atividades, etc.

Com a análise a priori pretende-se pensar nos possíveis obstáculos epistemológicos que os alunos poderão encontrar, na realização das atividades, e nas condições de utilização dos registros de representação dessa função. Desta forma, neste caso particular, a concepção da situação didática leva fortemente em consideração as hipóteses a serem validadas.

4.2.3 – Aplicação da Sequência Didática.

Uma Sequencia Didática é um conjunto de atividades a serem aplicadas numa determinada ordem, divididas num certo número de aulas, a um grupo de alunos, com o objetivo de ensinar determinado conteúdo e verificar a evolução da aprendizagem dos alunos, a partir das fundamentações que foram levantadas na Análise Preliminar e na Análise a priori.

No nosso caso, elaboramos nossa Sequência Didática, com seis atividades a serem desenvolvidas em seis encontros de 1h e 40min de duração, com quarenta alunos de uma turma de 1º ano do Colégio Estadual Antônio Figueira de Almeida (CEAFA) entre os dias 17/05/2010 a 21/06/2010.

Todos os encontros foram realizados no laboratório de informática do CEAFA onde as atividades puderam ser desenvolvidas. Todas as atividades foram realizadas com o auxilio dos mathlets, de forma integrada.

Em cada encontro os alunos recebiam a ficha de atividade e, à medida que manipulavam os mathlets, respondiam juntos as atividades,

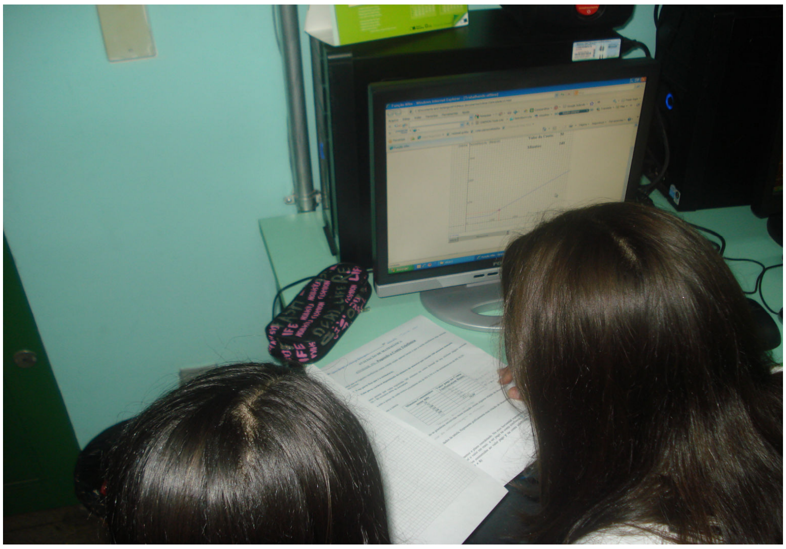


Figura 4.1 – Realização de uma atividade da Sequência Didática

Apresentamos no tópico **5.2** uma descrição detalhada acerca da aplicação da seqüência didática.

4.2.4 – Análise a Posteriori e Validação.

Esta última fase corresponde à análise dos dados recolhidos ao longo da experimentação, isto é, as observações feitas durante a aplicação das atividades, referente à Sequência Didática e também as produções dos alunos após aplicação das atividades.

Com relação à validação, ela ocorre após o confronto dos dados entre a análise a priori e a análise a posteriori. Essa validação pode até mesmo apresentar distorções que servirão para propor modificações na Sequência Didática.

5 – A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E SUA APLICAÇÃO

Neste capítulo, faremos uma descrição completa das atividades da sequência didática, analisando uma atividade de cada vez. Referente a cada atividade, nos propomos, nesse capitulo, a:

- ✓ Fazer um levantamento das hipóteses que pretendemos observar.
- ✓ Fazer uma descrição do desenvolvimento da atividade no laboratório do CEAFA.
- ✓ Analisar os dados coletados através da produção dos alunos, a fim de tirar conclusões satisfatórias que contribuam para o ensino aprendizagem do conceito da Função Afim.

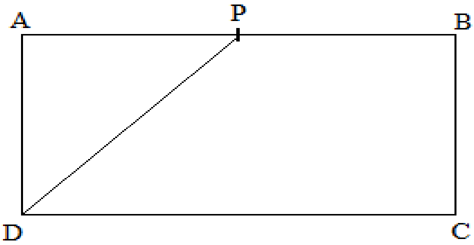
5.1 – ATIVIDADE Nº 1: PINTANDO UMA PAREDE.

Essa atividade se propõe a levar o aluno, a partir de um problema de geometria, a entender a relação entre grandezas variáveis e fixa, explorar as idéias de proporção, variável, Domínio e Imagem de uma Função Linear. Veja abaixo a descrição da atividade:

ATIVIDADE Nº 1 – Área do Triângulo

Elias deseja pintar uma parede do seu quarto de duas cores, uma parte de cada cor. Essa parede é retangular e mede 8 m de largura por 4 m de altura, como ilustra a figura. Representaremos por A, B, C, D, respectivamente, os pontos mais altos e mais baixos dessa parede, o que corresponde aos vértices do retângulo ABCD.

Uma das partes a ser pintada será a de um triângulo, cujos vértices são A, D e P, onde P é um ponto do segmento $\overline{AB}$.



Abra a **Cena 1**. Mova o Ponto P e verifique no esquema apresentado as várias possibilidades para a construção do triângulo ADP. A partir dessas observações resolva os itens **a) , b)** e **c)**.

a) Exiba o triângulo **ADP**, cujo vértice P esteja a 0,5 m do ponto A. Qual é a área desse triângulo? Como você calculou essa área?

b) Complete a tabela abaixo

Distância de A até P	**Área do triângulo ADP**
1,5	
3	
5,4	
7,2	

c) Como você calculou essas áreas? Justifique. (Para conferir sua resposta, abra a **Cena 2** e escolha, em cada caso, a correspondente distância de A até P.)

Representaremos por x a distância de A até P. Abra a **Cena 3** e responda os itens **d), e), f)** e **g)**

d) Existem triângulos ADP para os valores de x abaixo? Caso exista qual a sua área?

x = 0,2

x = 0

x = 9

x = 1,4

e) Quais os valores inteiros que x pode assumir?

f) Quais os valores que x pode assumir?

g) Se chamarmos de **x** a distância de A até P e de **y,** a área do triângulo ADP, é possível estabelecer uma relação matemática entre a área do triângulo ADP e a distância $\overline{AP}$?

h) Represente no plano coordenado o gráfico da relação obtida no item anterior.

Abra a Cena 4.

Nesta cena, representamos o plano coordenado. No eixo horizontal representamos a medida x, em metros, do segmento AP. No eixo vertical o valor, em m^2, da área do ΔADP. O gráfico dessa relação associa a cada medida x, do segmento AP, o respectivo valor da área do ΔADP.

Com base nisto responda os itens **h), i)** e **j)**

i) É possível obter um triângulo ADP cuja área seja $5\,m^2$? E $6{,}8\,m^2$?

j) Qual é o domínio dessa relação, representada pelo gráfico?

k) Qual é o conjunto imagem dessa relação, representada pelo gráfico?

5.1.1 – Análise A priori

O objetivo geral desta Atividade nº 1 é permitir que os alunos visualizem o problema nas suas diversas representações (analítica, através de tabelas e graficamente), desenvolvendo uma rica Imagem Conceitual e aplicando os conceitos matemáticos de função aprendidos em sala de aula. Apesar de fácil, essa atividade provoca surpresa nos alunos. Como calcular a área de ADP, se não se sabe o valor de x?

A proposta da resolução dos itens **a), b)** e **c),** é levar os alunos a relembrarem a noção do cálculo de área de um triângulo. No item **b)** eles deverão completar a tabela de valores e verificar o que ocorre com os valores da segunda coluna em relação aos valores da primeira.

Com os itens **d), e), f), j)** e **k),** pretendemos levantar uma discussão sobre a idéia de Domínio, compreendido simplesmente como o conjunto dos valores que **x** pode assumir. Espontaneamente, os alunos, quase sempre, consideram apenas os valores inteiros.

Com o item **g)** e **i)** esperamos que os alunos, utilizando os símbolos que descrevem os dados do problema, apresentem uma expressão matemática, que represente o valor da variável dependente, expressada pela lei de uma Função Linear. A seguir serem capaz de, usando essa relação matemática e resolvendo uma equação do 1º grau, verificar a existência de um triângulo.

Com o item **h)** esperamos que os alunos construam o gráfico da função representado pelos dados do problema.

Para essa atividade, foram desenvolvidos quatro mathlets, para serem explorados de maneira integrada à resolução da atividade, a fim de que os alunos desenvolvam habilidades cognitivas suficiente para manipular as diversas representações do objeto de estudo, a saber, a Função Linear.

Atividade 1: Traçando o Gráfico Cartesiano da Relação

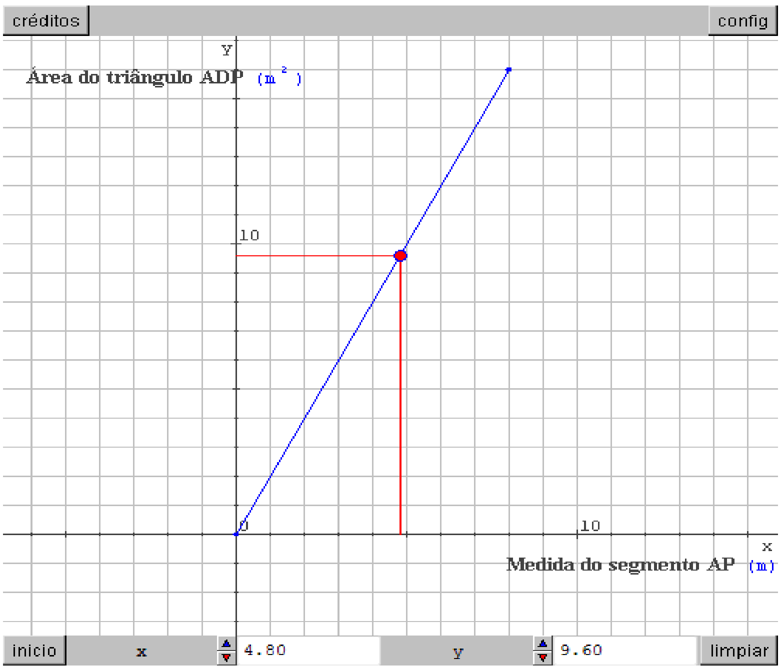


Figura 5.1 – Exemplo de um mathlet usado na atividade nº 1

A partir dessa análise a priori, segue abaixo o desenvolvimento da atividade nº 1.

5.1.2 – Desenvolvimento da Atividade.

Essa primeira atividade foi realizada no dia 17/05/2010, das 8h40min às 10h20min no laboratório do CEAFA. Estavam presentes dois professores no momento da aplicação da atividade, a saber, o professor regente da turma e o professor responsável pela pesquisa. Ela foi marcada por pequenos incidentes. Antes de realizá-la, fomos ao laboratório, uma semana antes do previsto, a fim de verificar se os computadores estavam funcionando perfeitamente. Nesse dia, instalamos, em cada máquina, os mathlets, que seriam usados nessa primeira atividade e fizemos um teste a fim de verificarmos o funcionamento dos computadores, com o intuito de não termos nenhuma surpresa desagradável na hora da atividade.

Essa atividade foi projetada para ser realizada em duplas, no laboratório de informática do CEAFA. Ao chegar ao laboratório, para nossa surpresa, doze computadores estavam inutilizáveis devido a um problema técnico. Tivemos que redistribuir os alunos nos computadores que estavam funcionando perfeitamente. Com isso, a atividade passou a ser desenvolvida em grupos de quatro componentes, e os alunos passaram a ocupar computadores, praticamente um do lado do outro, causando assim um desconforto na realização da atividade. Neste dia tivemos quarenta alunos realizando a primeira atividade em apenas dez computadores disponíveis. Mesmo sob essa situação problemática, a atividade foi realizada normalmente, sem nenhuma interrupção, pois tínhamos dois professores de matemática no laboratório.

Durante a realização da atividade, foi visível a dificuldade apresentada pelos alunos para solucioná-las. Assim, muitos grupos recorreram aos professores presentes solicitando alguma ajuda. Percebemos que eles não estavam familiarizados com resolução de problemas e sim com resolução de equações ou até mesmo de exercícios que exigiam apenas a noção operatória e algébrica dos conceitos de função.

Pedimos para que os grupos lessem com bastante atenção, alternativa por alternativa, sempre recorrendo ao enunciado do problema e, que registrassem por meio de cálculos, os resultados das questões resolvidas.

A estratégia usada pelos alunos na resolução dos itens de **a)** até **f)** foi basicamente a mesma. Eles fizeram uso do conceito de área trabalhado anteriormente, em sala de aula, em algumas atividades. Resolveram assim usando a fórmula da área do triângulo dada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$, onde **b** e **h** são respectivamente a base e a altura do triângulo. Veja abaixo um dos mathlet usado interativamente da resolução da atividade.

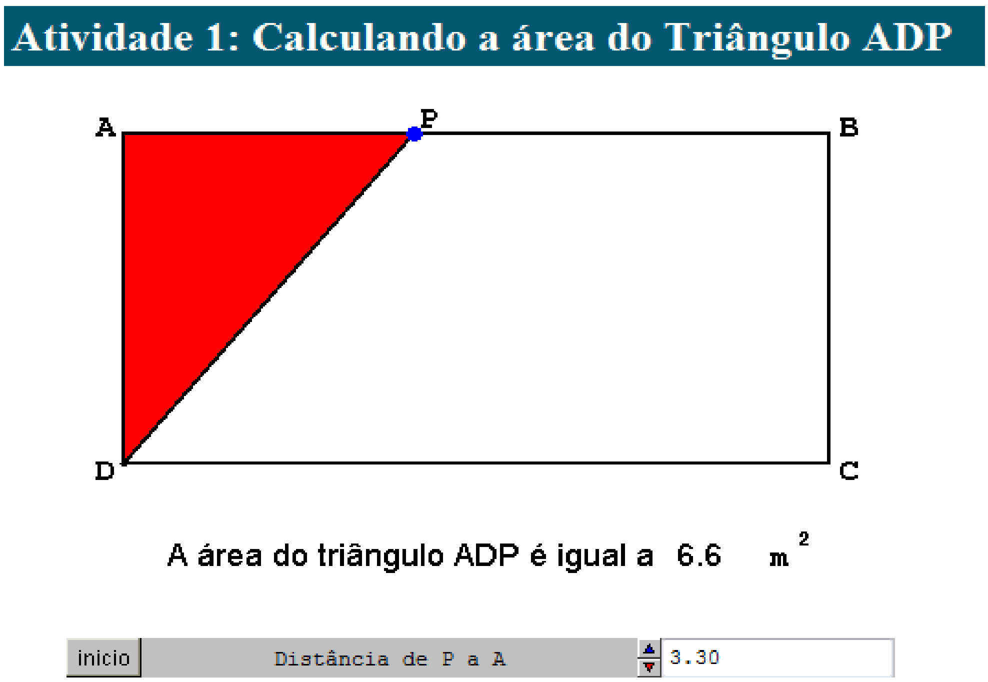


Figura 5.2 – Exemplo do mathlet da Cena 2 usado na atividade nº 1

A maior dificuldade dos alunos foi apresentada no momento da resolução do item **h)**. Eles não sabiam o que era estabelecer uma relação matemática entre duas grandezas e por isso pediram auxilio aos professores que estavam no laboratório.

Pedimos para eles construírem uma tabela de valores, nos moldes do item **b)**, colocando os respectivos resultados das áreas, e então generalizando para outros valores. A partir dessa construção, eles verificariam o que estava acontecendo, à medida que resolviam cada linha da tabela. Após conhecer os passos de resolução, deveriam trocar os números que estavam variando por letras, isto é, as variáveis dependente e independente, encontrando assim uma relação matemática que representa situação do problema.

Após alguns debates sobre o assunto entre os alunos de cada grupo, alguns grupos chegaram à conclusão que as variáveis dependente e independentes correspondiam, respectivamente, as grandezas Área e Base da fórmula da área do triângulo dada por $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

Essa tentativa de construir a expressão matemática foi o item que mais demorou na resolução da atividade. Cerca de vinte e cinco minutos foram suficientes para que o primeiro grupo chegasse a resposta correta desse item **g)**. No entanto isso é bastante aceitável, pois esses alunos não possuíam nenhuma imagem conceitual de como construir esta expressão, logo nenhum conceito poderia ser dado por eles. Eles estavam acostumados a resolverem questões sobre a Função Afim utilizando o que chamamos de "imagem operatória", isto é, resolviam atividades que exigiam apenas a operação de cálculo numérico, ou até, no máximo, a resolução de equação do 1º grau. Jamais trabalharam com problemas contextualizados. Por isso, todo o processo, inclusive as imagens conceituais, tiveram de ser construídas passo a passo com esses alunos, a fim de que eles pudessem adquirir uma nova experiência, frente a essas questões, e resolverem a atividade proposta.

5.1.3 – Análise a Posteriori

Como eram 10 grupos na realização dessa atividade, identificamos cada um deles por grupo **A, B, D, E, F, G, H, I, J**. Escolhemos três grupos para apresentar suas respectivas soluções e analisá-las diante da turma, no próprio laboratório. A análise dessa atividade foi realizada no 3º tempo de aula, composta de 50 minutos, após um intervalo de 20 minutos referente ao recreio da turma. O critério utilizado se deve ao fato deles apresentarem respostas diferentes ao item **g)**

A primeira grande dificuldade dos alunos que encontramos está na resolução do item **g)**, que refere-se a construção da expressão matemática do problema. Os três grupos apresentaram respostas diferentes. Seguem abaixo as respostas dos respectivos grupos, que identificamos por **A, D** e **E**.

Grupo A	**Grupo D**	**Grupo E**
$y = \dfrac{x-4}{2}$	$y = \dfrac{4x}{2}$	$y = 2x$
g) Sim $y = \dfrac{x-4}{2}$	g) $A = \dfrac{b \cdot h}{2}$ ∴ $A = \dfrac{x \cdot 4}{2}$ $\Rightarrow A = \dfrac{4x}{2}$ R: Sim	g) $y = \dfrac{x \cdot 4}{2} = 2$ $y = x \cdot 2$ $y = 2x$

Ao ser questionado sobre o porquê da resposta do item **g)** ser $y = \dfrac{x-4}{2}$ o Grupo **A** disse:

– "Professor, nos desculpe, pois nossa resposta está errada. Na falta de atenção, nós trocamos o sinal de vezes, pelo sinal de menos. Por isso que está diferente dos nossos colegas."

Na hora de expor a resposta para o professor esse grupo viu que existia algo de errado na sua resposta. Esse problema é comum ocorrer nos cálculos numéricos, nas resoluções de equações, etc. No momento de se registrar uma resposta final a um problema, muitos alunos se esquecem de analisar sua resposta, com a pergunta do problema e, na "ânsia de responder à pergunta" acabam registrando uma resposta sem sentido. Neste sentido, faltou a esse grupo, o que PALIS chama de "Expectativa Algébrica".

De acordo com PALIS [30],

> *"O termo "expectativa" algébrica engloba vários aspectos do processo de pensamento algébrico. Por exemplo: no que pensa uma pessoa quando observa a estrutura e características de uma expressão e imagina o que esperar como solução de uma operação envolvendo esta expressão, o que faz uma pessoa olhar um resultado de um problema e dizer "Tem algo errado aí" ou " Parece ok", o que faz uma pessoa esperar uma resposta a um procedimento algébrico e não outra?"* (p.8)

A próxima resposta a ser analisada foi a do Grupo **D**, que encontrou a função $y = \frac{4x}{2}$. Ao ser questionado sobre como acharam essa resposta o grupo respondeu:

– "Professor, nós fizemos uma tabela igual a do item **b)**, só que com valores de 1 até 6, inteiros, para a distância de A até P. Daí nós verificamos que, da fórmula da área do triângulo, $A = \frac{b \cdot h}{2}$, apenas o valor de **b** variava. Resolvemos então chamar a área **A** de **y** e os valores da base **b** de **x**. Aí nós substituímos os dois primeiros valores e verificamos que dava certo."

Ao testar os resultados, a turma percebeu que estava correta a resposta desse grupo e portanto esse resultado era válido. Faltava então analisar os resultados do Grupo **E**.

Ao serem questionados sobre como obtiveram, como resposta, a função $y = 2x$, os alunos do Grupo **E** explicaram:

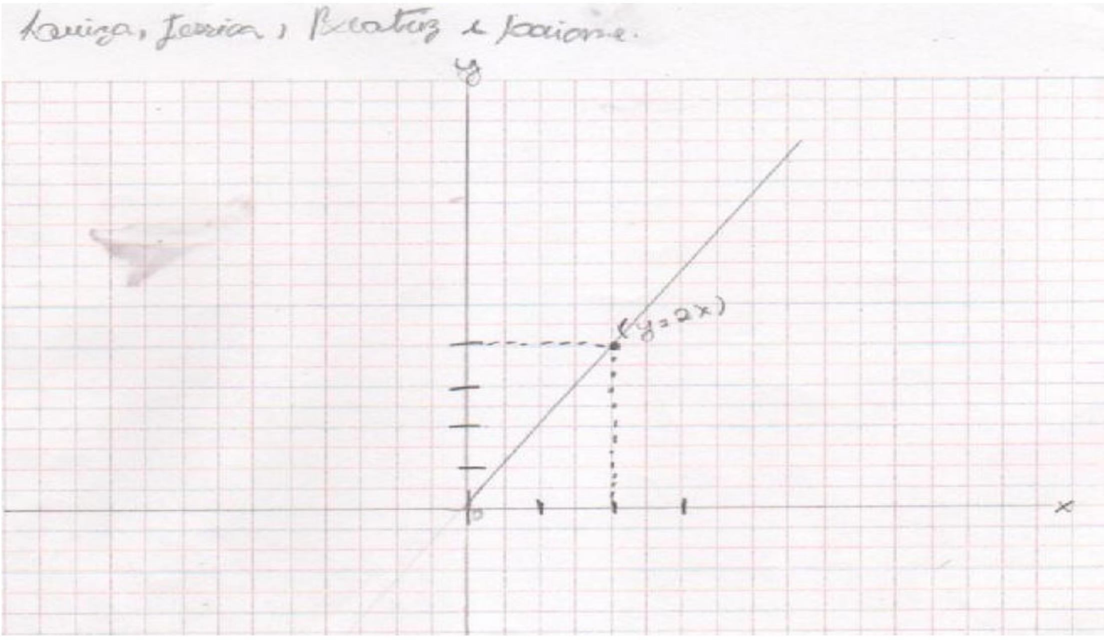
– "Nós fizemos parecido com o Grupo **D**, só que com valores diferentes. No entanto, no final, nós simplificamos a fração, obtendo assim $y = 2x$. Ao fazer a prova real com dois valores, verificamos que estava correta a nossa resposta".

O professor explicou aos alunos que todas as duas respostas, a saber, dos Grupo **D** e **E**, estavam corretas. Porém é muito mais fácil, do ponto de vista algébrico, trabalhar com $y = 2x$ do que com $y = \frac{4x}{2}$.

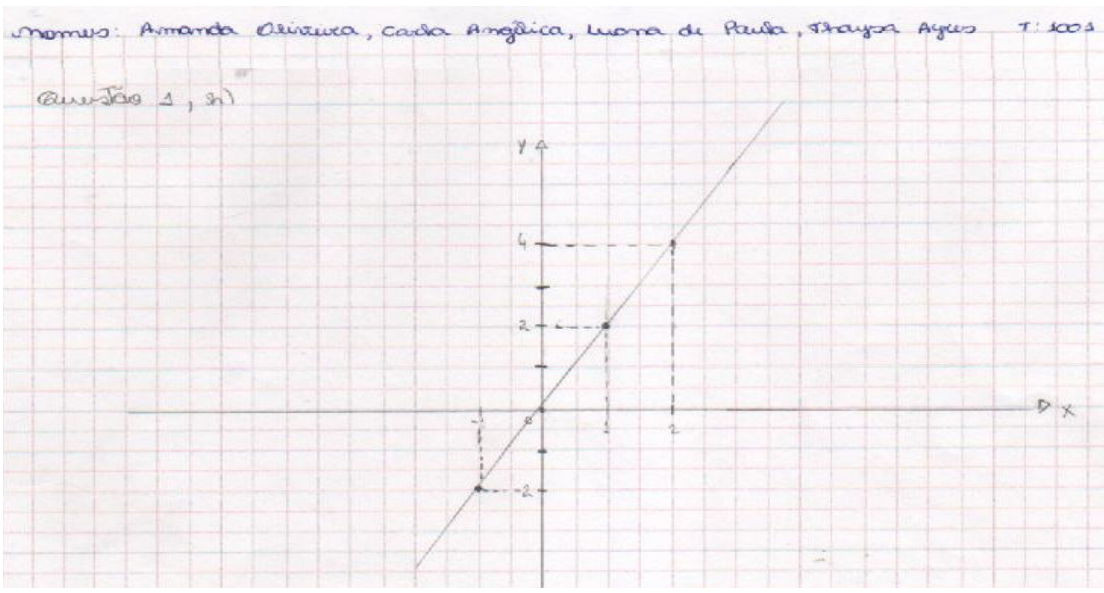
Sabemos que o processo de construção da expressão algébrica de uma Função Afim, a partir de uma situação problema, não é tão simples, muito menos para alunos que não tinham nenhuma imagem conceitual desse processo. Por esse motivo, alguns grupos demoraram muito tempo para criar essa imagem conceitual e três grupos não conseguiram atingir o objetivo da questão. A partir da explanação desses três grupos, **A**, **D** e **E**, toda a turma entendeu o processo de construção dessa expressão matemática, pedida no item **b)**.

A segunda grande dificuldade dos alunos que encontramos através da análise de suas produções, refere-se ao item **h)**. Antes mesmo desses alunos usarem a Cena 4, que apresentava um modelo do gráfico referente ao problema, eles, no item **h)** deveriam esboçar o gráfico dessa relação no plano cartesiano. A maioria dos grupos usaram os valores obtidos na tabela do item **b)** para traçar o gráfico. Outros dois grupos usaram valores inteiros e consecutivos para valores do segmento $\overline{AD}$. Porém, o que mais nos chama a atenção é que nenhum grupo traçou o gráfico de forma correta, isto é, com domínio]0,8] e imagem]0,16]. Apenas quatro grupos traçaram um gráfico a partir da origem do plano cartesiano, mas não apresentaram o limite desse gráfico. Veja a seguir algumas respostas apresentadas por alguns grupos:

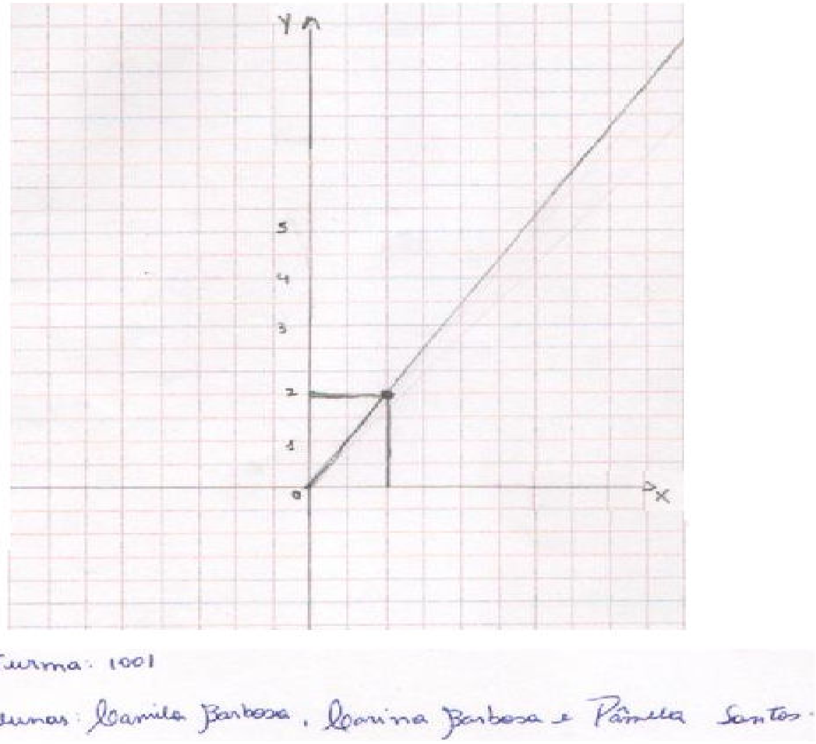
Grupo A



Grupo D



Grupo E



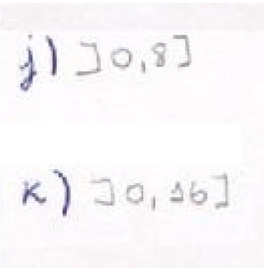
Quando questionamos sobre o erro desse item, por parte de todos os grupos, descobrimos o porquê deles não terem conseguido acertar, completamente, o item **h)**. Verificamos que todos os grupos sabiam que o valor de x, não podia ser inferior ou igual a zero nem superior a 8, pois nas cenas apresentavam erros. Consequentemente sabiam que os valores das áreas não poderiam ser negativos ou nulos ou ultrapassar $16\,m^2$. Uma grande parte dos grupos sabia como traçar o gráfico de uma Função Afim, por meio de uma tabela, sabiam o que era Conjunto Domínio e Conjunto Imagem de uma função, mais não conseguiam unir esse conhecimento no esboço do gráfico.

Eles não conseguiam fazer a ligação desse conhecimento para o registro gráfico. Para eles, os domínios representados por expressões matemáticas, estudadas em sala de aula, nos exemplos algébricos, não tinha sentido na realização dessa atividade. Vemos que eles sabiam achar o domínio da Função Afim, a partir de uma representação gráfica, porém quando se exigia o inverso eles não conseguiam fazer essa transposição.

A terceira grande dificuldade dos alunos que encontramos através da análise de suas produções, refere-se aos itens **j)** e **k)**. Como visto anteriormente eles tinham a noção do que era o Domínio, e o Conjunto Imagem, porém na hora de expressar matematicamente esse conhecimento somente três grupos conseguiram acertar esses itens.

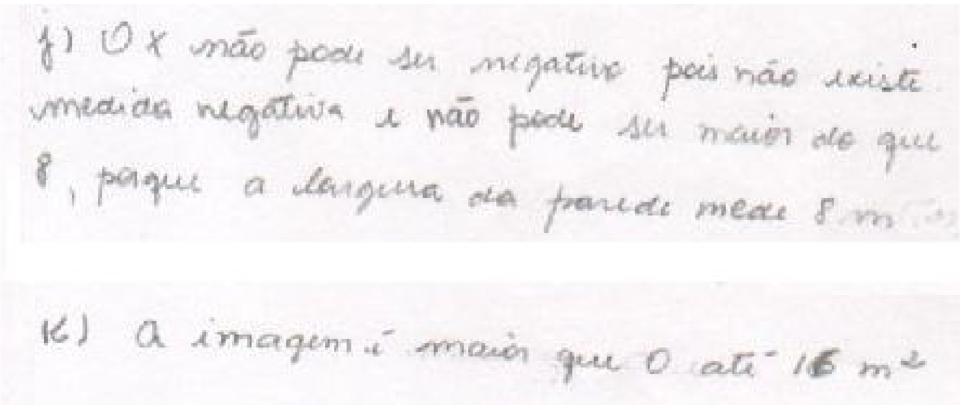
Neste sentido, através da noção das Representações Semióticas de DUVAL, é possível concluir que a maioria dos grupos, embora tenha desenvolvido a idéia da representação algébrica de Domínio e Imagem da função, não conseguiram levar em conta as diferentes representações associadas ao mesmo objeto, que nesse caso refere-se ao Domínio e a Imagem da função linear, fazendo a Conversão entre elas. Reproduzimos, a seguir, algumas das respostas corretas dadas pelos alunos.

<u>Grupo D</u>


j) $]0,8]$

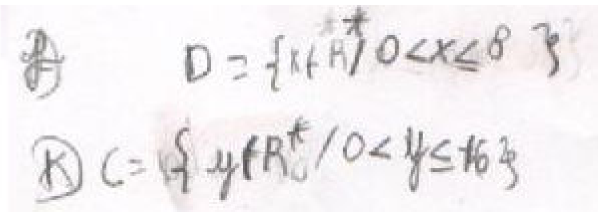
K) $]0,16]$

<u>Grupo E</u>


j) O x não pode ser negativo pois não existe medida negativa e não pode ser maior do que 8, porque a largura da parede mede 8 m

k) A imagem é maior que 0 até 16 m²

<u>Grupo H</u>


j) $D = \{x \in \mathbb{R}^*_+ / 0 < x \leq 8\}$

K) $C = \{y \in \mathbb{R}^*_+ / 0 < y \leq 16\}$

A partir da análise das produções feitas pelos grupos, o desempenho nessa atividade ocorreu da seguinte forma:

ITENS	**Nº DE GRUPOS QUE ACERTARAM**
a)	**10**
b)	**10**
c)	**10**
d)	**10**
e)	**10**
f)	**10**
g)	**07**
h)	**Nenhum**
i)	**10**
j)	**03**
k)	**03**

Resumo da Análise:

Os resultados apontaram que houve evolução, por parte dos alunos, no conhecimento sobre o conceito de Função Linear. A maioria dos grupos, ao utilizarem as Cenas feitas por meio dos mathlets, obteve meios para se chegar à resposta correta do problema. Interativamente, as cenas serviram para ajudar os alunos a desenvolverem suas imagens de conceitos, referente à análise algébrica e gráfica da Função Linear, já que em alguns casos sua imagem de conceito era muito pobre.

Quanto às dificuldades apresentadas pelos alunos na resolução dos itens **g), h), j), k)** considero como dificuldades de origens cognitivas.

Os alunos, em sua maioria, ao interagirem com os mathlets, sabiam o conceito de Domínio e Imagem, porém, quando lhes era pedido para representarem o gráfico a partir apenas das representações algébricas, percebemos a dificuldade que eles tinham em converter dos registros algébricos para o registro gráfico.

Nosso estudo apontou que o maior número de erros ocorreu nas conversões entre registros de um mesmo objeto. Em nossa análise, 100% dos alunos erraram o item **h)** por não considerarem que, na representação de uma função, ainda que representada graficamente, deve-se informar o Domínio da Função. Caso contrário, tal função poderá ficar sem sentido, como é o caso da Função Linear dessa atividade.

Em suma, considero satisfatório o resultado apresentado pelos alunos na resolução dessa atividade, pois apesar de todas as dificuldades inicialmente encontradas no laboratório, de ordem operacional, da falta de imagens conceituais dos alunos na resolução de alguns itens, da novidade de resolver esses tipos de questões; os resultados mostram uma grande evolução do ensino aprendizagem do conceito da Função Afim, nesta turma. Com certeza essas dificuldades serão melhores trabalhadas nas próximas atividades.

5.2 – ATIVIDADE Nº 2: FAZENDO PÃES.

Nesta atividade nº 2, assim como na atividade nº 1, nos propomos a explorar a noção de proporcionalidade a partir da relação entre duas grandezas. A partir dessa estudo pretendemos explorar noções de domínios, dependência e outros. Nosso objetivo é permitir que os alunos utilizem a Função Linear, dada pela fórmula $f(x) = a \cdot x$ que é o modelo matemático para os problemas de proporcionalidade.

ATIVIDADE Nº2 – Fazendo Pães

Para preparar seus pães, um padeiro costuma misturar cada 10 xícaras de farinha de trigo com 4 xícaras de leite.

Complete a tabela.

Farinha de Trigo	Leite
10	***4***
20	
	2
1	
36	
	2 ½

a) Quais as grandezas envolvidas nessa situação? Elas variam?

b) Para cada xícara de farinha de trigo, quantas xícaras de leite ele usa?

c) Use a tabela para obter o gráfico cartesiano da relação acima, que tipo de gráfico você obteve?

d) Escreva uma expressão matemática que relacione o número de xícaras **x** de leite, com o número de xícaras **y** de Farinha de Trigo.

Abra a Cena 1.

Nesta cena representamos o plano coordenado. No eixo horizontal representamos a quantidade de xícaras de Leite. No eixo vertical a quantidade de xícara de Farinha de Trigo. O gráfico dessa relação associa a cada medida **x** de Leite à quantidade **y** de Farinha de Trigo a ser usada. A partir dessas informações responda os itens **e), f), g), h), i)** e **j).**

e) Se o padeiro aumentar a quantidade de farinha de trigo, o que ele deverá fazer com a quantidade de leite a fim de manter a mesma consistência na massa do pão?

f) Sabendo a quantidade de leite que o padeiro quer usar, é possível usar qualquer quantidade de farinha de trigo para fazer este pão? Justifique.

g) Qual é a quantidade de Farinha de Trigo a ser usada para 2 ½ xícara de leite para se obter um pão com a mesma consistência do anterior?

h) Qual é o domínio dessa relação?

i) Qual é o conjunto imagem dessa relação?

j) O que representa o número $a = 2{,}5$ no gráfico

Abra a Cena 2.

Nesta cena, representamos no plano coordenado o gráfico de $y = ax$. No eixo horizontal representamos a quantidade de xícaras de Leite. No eixo vertical a quantidade de xícaras de Farinha de Trigo. A partir dessas informações responda aos itens **k), l), m)** e **n)**.

k) O que acontece com o gráfico a medida que aumentamos o valor de **a?** e quando diminuímos**?**

l) Quando aumentamos o valor de **a**, para cada xícara de farinha de trigo, o que acontece com a quantidade de xícaras de leite? E se diminuirmos **a?**

m) Em relação às variáveis do problema, qual o significado do parâmetro **a** que aparece na equação?

n) Que tipo de relação existe entre quantidade de Farinha de Trigo e Quantidade de xícaras de leite? Você conhece outras relações deste tipo?

5.2.1 – Análise A priori

Através da exploração da tabela dessa atividade elaboramos algumas questões a fim de que os alunos percebam que, para que o pão tenha a mesma concentração, existe uma relação fixa entre as quantidades correspondentes de farinha de trigo e leite.

Na resolução dos itens **a), b), c)** e **d)**, os alunos, após completarem a tabela de valores, devem ser capazes de compreenderem a relação entre as quantidades de farinha de trigo e leite, a fim de manter a mesma concentração na fabricação do pão. Na resolução do item **d)**, espera-se que os alunos cheguem à expressão $y = 2{,}5 \cdot x$ ou equivalente.

Para a resolução dos itens **e), f), g), h) i)** e **j)** foi desenvolvido um mathlet contendo o plano coordenado. No eixo horizontal representamos a quantidade de xícaras de **Leite** e no eixo vertical a quantidade de xícaras de **Farinha de Trigo**. Com isso, pretendemos apresentar um trabalho de comparação entre as diversas possibilidades de se fazer pães, mantendo a mesma consistência, proporcionando aos alunos a oportunidade de observarem a dependência entre as variações dessas duas grandezas, quantidade de farinha de trigo e quantidade de leite, por meio do gráfico de uma Função Linear. À medida que os parâmetros referentes às variáveis do problema são alterados, é apresentada no mathlet, a constante $a = 2{,}5$, referente ao parâmetro a da expressão matemática da função afim $f(x) = a \cdot x$, que garante a concentração desejada na produção dos pães. Vejamos abaixo o mathlet utilizado na resolução desses itens:

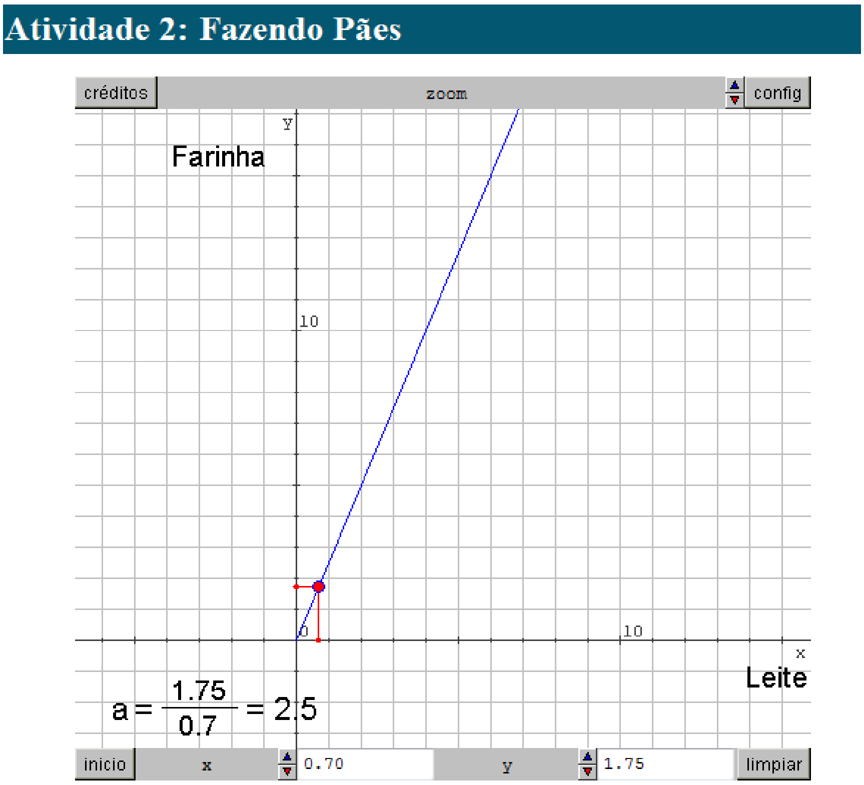


Figura 5.3 – Mathlet usado na resolução dos itens **e), f), g), h) i)** e **j)** da atividade nº 2

Através da resolução dos itens **k), l), m)** e **n)**, por meio da discussão desses itens, nosso objetivo é explorar o papel da constante $a = 2{,}5$, que aparece na expressão matemática do item **d)**, e que garante a concentração desejada de farinha e leite, na produção dos pães. Para isso elaboramos um mathlet, semelhante ao mathlet anterior, acrescentando o parâmetro a, o qual pode ser modificado pelo aluno.

Veja abaixo o mathlet utilizado na resolução desses itens:

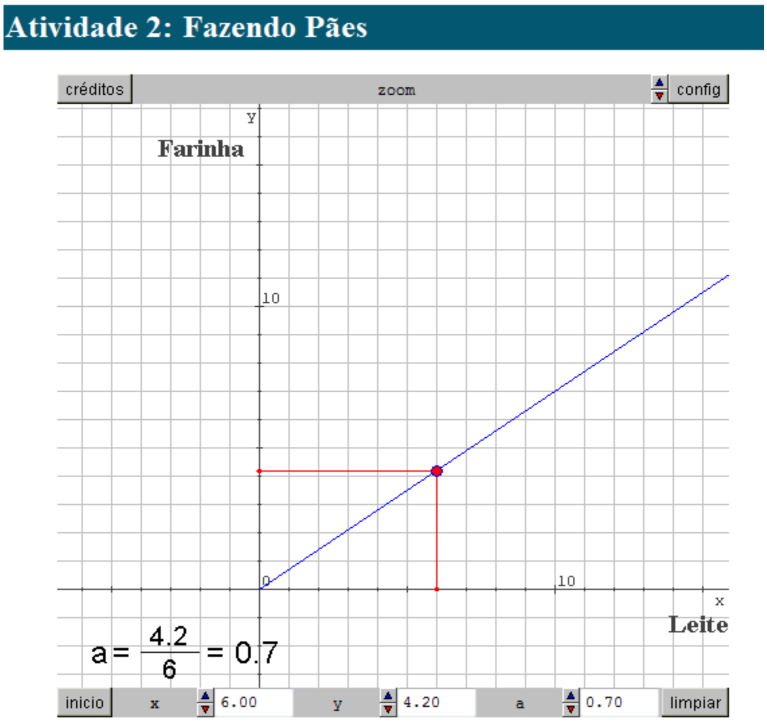


Figura 5.4 – Mathlet usado na resolução dos itens
k), l), m) e **n)** da atividade nº 2

A partir dessa análise a priori, segue abaixo o desenvolvimento da atividade nº 1.

5.2.2 – Desenvolvimento da Atividade.

Essa segunda atividade foi realizada no dia 24/05/2010. no laboratório do CEAFA. Na condução dessa atividade estavam presentes os mesmos professores da atividade anterior. A fim de continuarmos a discussão sobre a construção do conceito da Função Afim, fato esse iniciado na atividade nº1, chegamos a conclusão de que seria melhor aplicarmos essa atividade usando o mesmo tipo de divisão da atividade anterior. Os alunos seriam divididos nos mesmos grupos da atividade anterior, sendo assim, cada micro computador deveria ser ocupado pelos quatro componentes do grupo, que resolveram a primeira atividade. Mesmo tendo sido solucionados os problemas operacionais no laboratório do CEAFA, o qual impediu a aplicação da atividade, em dupla de alunos, adotamos esse procedimento, pois garantiríamos a uniformidade da discussão iniciada na aula anterior.

Todos os dez 10 grupos conseguiram resolver os itens dessa atividade dentro do prazo previsto de dois tempos de 50 minutos cada um. A medida que a atividade era respondida pelos alunos percebíamos sua integração com o mathlets, principalmente no momento de modificação dos parâmetros referentes as variáveis do problema.

A maior dificuldade dos alunos, assim como ocorreu na Atividade nº 1, foi apresentada no momento da resolução do item **d),** que refere-se a exibir a lei matemática da função relativa ao problema. Apesar de terem noção de como achar essa lei matemática, eles se atrapalharam na hora de exibir as variáveis **x** e **y** da lei da função, apesar do item **d)** ser claro em relação a pergunta. Como na atividade, a coluna da farinha de trigo era apresentada primeiro, vindo logo após a coluna da quantidade de leite, cerca de 60% dos alunos consideravam a quantidade de farinha como a variável **x** do problema e a quantidade de leite como a variável **y**, apresentando uma resposta errada a esse item do problema.

Por se tratar de uma atividade onde a relação entre as variáveis eram muito semelhantes, esses grupos só se deparam com o erro na resolução do item **j)**. Quando isso aconteceu eles pediram auxílio aos professores que estavam no laboratório, tendo que refazerem seus cálculos e obter assim a resposta correta desse item **d)**.

Percebemos que o fato dos itens serem apresentados de uma forma integrada, contribuiu para que os grupos identificassem os erros cometidos na resolução do item **d)** a partir de uma análise feita na resolução do item **j)**. Isto contribuiu significativamente para a maior integração entre os componentes de grupo, na resolução da atividade e principalmente em terem uma maior atenção na leitura dos enunciados dos próximos itens. Pedimos também que esses registros errados fossem preservados na folha de resposta, a fim de serem analisados posteriormente.

A estratégia utilizada pela maioria dos grupos, na resolução do item **d)** foi a resolução feita através de uma regra de três simples. A maioria dos grupos aplicou o conceito de regra de três simples como no exemplo abaixo:

FARINHA	LEITE
10	**4**
y	**X**

$$\frac{10}{y} = \frac{4}{x} \Leftrightarrow 4y = 10x \Leftrightarrow y = \frac{10x}{4} \Leftrightarrow y = 2{,}5x$$

Na resolução dos itens **k), l)** e **m)**, como esperávamos, as relações de proporcionalidades tiveram que ser revistas. A utilização do mathlet, de forma integrada, facilitou em muito o entendimento dos alunos na resolução desses itens. É claro que à medida que esses itens eram respondidos pelos alunos, outros tipos de discussões vieram à tona, como por exemplo: "*seria possível uma concentração de pães com o parâmetro* $a = 7$?". O objetivo da resolução desses itens é fornecer subsídios aos alunos a fim de que possam desenvolver e chegar a uma definição correta do conceito de proporcionalidade. Então Perguntamos para a turma: o que significa duas grandezas serem diretamente proporcionais?

Um dos alunos do grupo **J** respondeu:

- "professor, significa que aumentando uma, a outra também aumenta". A maioria dos alunos da turma concordou com esse aluno.

Vemos que a forma como esse e outros alunos definem grandezas proporcionais levam-nos a resolverem de forma errada algumas atividades, como foi o caso do grupo **J** na resolução do item **d)**, e que será analisada no tópico a seguir.

Perguntei aos alunos se no caso de 10 lápis custarem R$ 18,00, o preço a pagar, em reais, seria diretamente proporcional ao número de lápis vendidos? O mesmo aluno respondeu que sim, pois segundo ele, aumentando a quantidade de lápis o preço aumentará.

Perguntamos então se aumentarmos 10 lápis (agora são 20 lápis) o preço aumentará R$ 10,00(passando para R$ 28,00)?

Após alguns instantes percebemos certa dúvida entre eles, mas alguns alunos responderam que não, pois, já que a quantidade de lápis é o dobro, o preço deveria ser o dobro também.

Aproveitamos esse momento para esclarecer que a resposta dada pelo aluno sobre a definição de proporcionalidade estava incorreta. Explicamos que a forma correta seria que, aumentando uma, a outra também aumenta, mantendo a mesma razão de proporcionalidade. Logo no caso de 10 lápis custarem R$ 18,00 a razão seria de 1,8. Já no caso de 20 lápis custarem R$ 28,00, a razão seria de 1,4 e, portanto diferente da razão estabelecida entre essas grandezas. Em suma, poderíamos definir proporção da seguinte maneira:

> Sejam X e Y dois tipos de grandezas e $x \in X$ e $y \in Y$.
>
> Se x e y são diretamente proporcionais então existe $k \in \Re$ (fator de proporcionalidade) tal que $y = k \cdot x$. E ainda para qualquer $c \in \Re$, $c \neq 0$ temos que $cy = c \cdot k \cdot x$.

Pedi para que eles verificassem no mathlet, fixando o parâmetro $a = 1{,}8$, o que acontece com 10 xícaras de farinha de trigo quando é aumentada para 20. Eles verificaram que o número de xícaras de leite passava de 18 para 36.

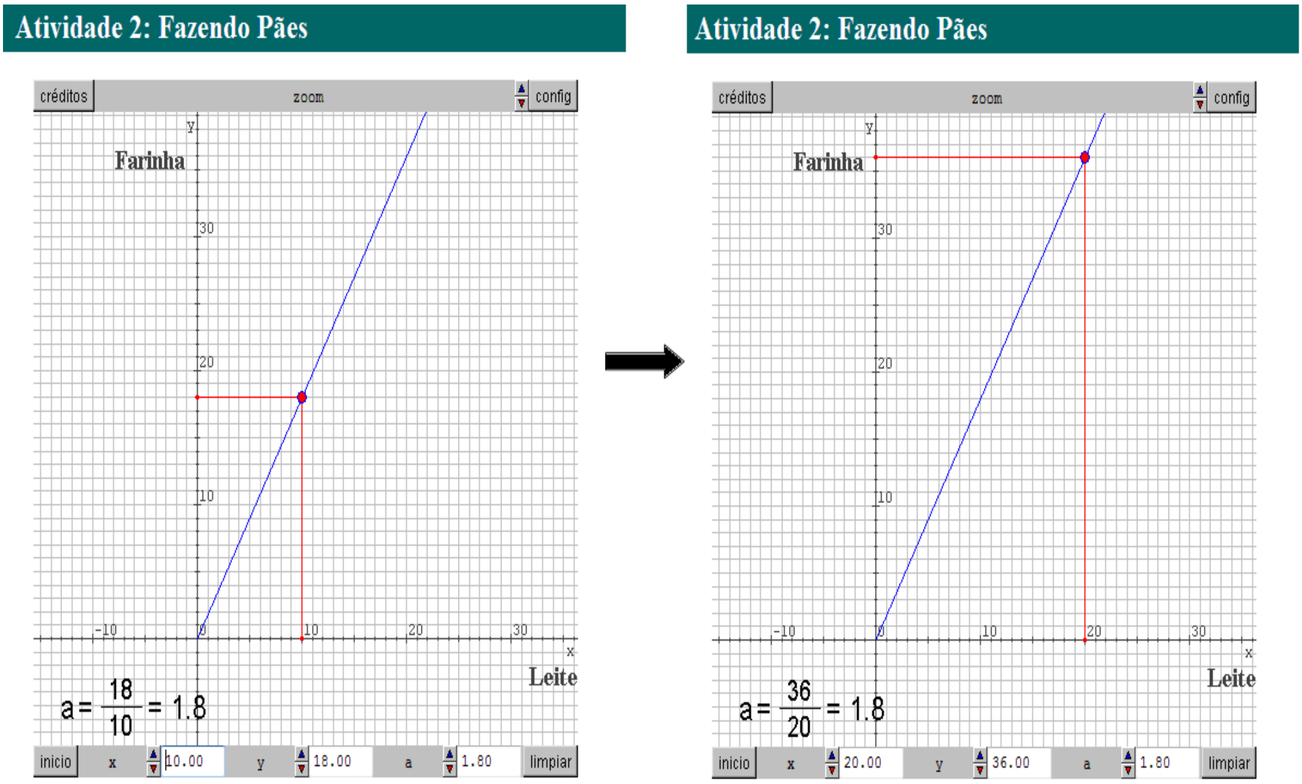


Figura 5.5 – Exemplo da resposta verificadas pelos alunos

5.2.3 – Análise a Posteriori

Os grupos que realizaram essa atividade foram os mesmo que realizaram a Atividade nº1, os quais, nesta atividade, foram identificados da mesma forma que na atividade anterior, a saber: grupos **A, B, D, E, F, G, H, I e J**. Escolhemos quatro grupos para apresentarem suas respectivas soluções e analisá-las diante da turma, no próprio laboratório. A análise dessa atividade foi realizada no 3º tempo de aula, composta de 50 min, após um intervalo de 20 minutos referente ao recreio da turma. O critério utilizado se deve ao fato deles apresentarem respostas e resoluções diferentes na resolução do item **d)**.

A primeira grande dificuldade apresentada por vários grupos encontra-se na resolução do item **d)**, que refere-se a construção da expressão matemática do problema. Dos quatro grupos, dois apresentaram respostas corretas e dois respostas erradas. Vale ressaltar que essas respostas erradas foram identificadas e corrigidas por cada grupo, na resolução do item **j)** e que, a pedido do professor da turma, seus registros foram preservados a fim de serem analisados posteriormente. Seguem abaixo as respostas dos respectivos grupos, que identificamos por **A**, **D**, **H** e **J**.

Grupo A	Farinha de Trigo leite 10 4 y x $4y = 10x$ $y = \frac{10x}{4}$ $y = 2{,}5x$
Grupo D	$\frac{y}{x} = 0{,}4 \therefore y = 0{,}4x$ Ele terá que obedecer a fórmula $y = 0{,}4x$. Sendo x = a quant. de farinha e y = a quant. de leite.
Grupo H	leite farinha 1 2,5 2 5 3 7,5 4 10 5 12,5 x $2{,}5.x$ $y = 2{,}5.x$
Grupo J	$y = 0{,}4x$ Porque para cada xícara de farinha de trigo corresponde a 0,4 de leite Leitura: Porque para cada xícara de farinha de trigo corresponde a 0,4 de leite

O grupo **A** apresentou uma resposta correta para esse item. Ao ser perguntado sobre como chegou à resposta correta da questão um aluno desse grupo respondeu:

– "Professor, nós verificamos que as quantidades de farinas de trigo e leite eram proporcionais. Aí substituímos a quantidade de farina por **y** e de Leite por **x** e resolvemos uma regra de três, como o senhor pode observar"

O professor parabenizou todo o grupo pela forma como procederam na resolução desse item da atividade e ressaltou a importância dos problemas que são modelados por uma proporção. Disse ainda que entender que as grandezas envolvidas no problema eram proporcionais era o objetivo central dessa atividade.

O grupo **D** apresentou uma resolução errada para esse item. Ao ser perguntado sobre como chegou a essa resposta um aluno desse grupo respondeu:

– "Professor, nós verificamos através da tabela, que se uma xícara de Farinha corresponde a 0,4 xícaras de Leite, então se dividirmos a quantidade de farinha pela de leite teria que ser igual a 0,4. Só que nosso resultado não bateu com a resposta do problema. Por que professor?"

O professor explicou aos alunos que o raciocínio deles, a princípio estava correto, porém na hora de efetuar a divisão, houve uma inversão das incógnitas, pois eles não prestaram a atenção na leitura do enunciado da questão. O correto seria:

$$\frac{x}{y} = 0{,}4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0{,}4\,y$$

Nesse instante um aluno perguntou:

– "Mas professor, como pode estar correto se a resposta tem 2,5?"

O professor explicou que as duas equações, $y = 2{,}5x$ e $x = 0{,}4y$, são equivalentes e, portanto estariam corretas como resposta a esse item da atividade. Porém os itens posteriores, inclusive o mathlet, apresentam de forma convencional, a relação y em função de x, isto é $y = 2{,}5x$. O professor explicou também que através de algumas operações algébricas era possível chegar à equação $y = 2{,}5x$ a partir da equação $x = 0{,}4y$, isolando a variável y. Assim o professor apresentou para os alunos a seguinte resolução:

$$x = 0{,}4y \Leftrightarrow \quad y = \frac{x}{0{,}4} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{0{,}4}x \quad \Leftrightarrow \quad y = 2{,}5x$$

O grupo **H** apresentou uma resposta correta para esse item. Ao ser perguntado sobre como chegou à resposta correta da questão uma aluna desse grupo respondeu:

– "Professor, nós tivemos dificuldade em usar os dados da tabela para chegar à fórmula pedida. Achamos que essa pergunta tinha alguma coisa a ver com a resolução de um dos itens da atividade anterior. Resolvemos então montar uma tabela, com valores inteiros e consecutivos para que pudéssemos verificar como seria possível chegar à fórmula da função; tipo, como fizemos na aula anterior. Aí, verificamos que a medida que aumentamos uma unidade de xícara de leite, a quantidade de farinha aumentava 2,5. Então chegamos a conclusão, assim como fizemos na atividade anterior, que a fórmula só poderia ser $y = 2{,}5x$."

O professor parabenizou todo o grupo pela forma como resolveram esse item da atividade. Ressaltou também a forma com que o grupo conseguiu unir o conhecimento adquirido na resolução da atividade anterior, com o desafio de resolver um item, com características parecidas. Disse ainda que o aprendizado matemático é algo que nunca podemos descartar. Aquilo que aprendemos hoje poderá ser utilizado em outros desafios, como o que foi visto nessa atividade.

O grupo **J** apresentou uma resolução errada para esse item. Ao ser perguntado sobre como chegou a essa resposta um aluno desse grupo respondeu:

– "Professor, nós verificamos pela tabela, que se uma xícara de Farinha corresponde a 0,4 xícaras de Leite, então **y**, que é a incógnita de farinha será igual a 0,4x que é a incógnita de Leite?"

O professor explicou aos alunos que o erro por eles apresentados se baseia no seguinte raciocínio:

Quando certa quantidade de uma grandeza corresponde a certa quantidade de outra grandeza não significa que essas quantidades são iguais. O que vocês fizeram foi igualar essas quantidades ("1 farinha = 0,4 leite") e depois representar o que vocês fizeram por duas incógnitas, y e x, dadas no problema ("$y = 0{,}4x$"). Na verdade, quando duas grandezas são proporcionais, a razão entre duas quantidades correspondentes é que são iguais. Vejam:

1 xícara de Farinha	corresponde a	0,4 xícara de Leite
y	corresponde a	**x**

logo:

$$\frac{1}{y} = \frac{0{,}4}{x} \Leftrightarrow x = 0{,}4\,y$$

e como que já vimos, na explicação da resolução do grupo **D**, que $x = 0{,}4\,y$ é o mesmo que $y = 2{,}5\,x$."

A segunda grande dificuldade dos alunos que encontramos através da análise de suas produções, refere-se ao item **n)**. que diz:

Que tipo de relação existe entre quantidade de Farinha de Trigo e Quantidade de xícaras de leite? Você conhece outras relações deste tipo?

Esperávamos que eles, partir da discussão de toda atividade, viessem a responder: Relação de proporcionalidade e dessem como exemplo de outras relações algo como quantidade de água e quantidade de açúcar na obtenção de sucos, ou quantidade de lápis e valor em reais a pagar, etc.

Ao analisar as produções dos alunos verificamos que apenas 2(dois) grupos responderam corretamente a primeira pergunta, respondendo proporcionalidade. Porém nenhum grupo respondeu corretamente à segunda pergunta. De todos os grupos apenas cinco responderam a segunda pergunta. Os outros não souberam responder.

O que nos chamou a atenção para as respostas desses cinco grupos que responderam a segunda pergunta do item **n)** foi a linha de raciocínio que eles tomaram. Todos eles acharam que a relação pedida na questão era a fórmula de uma Função Afim. Suas respostas apresentam registros de equações algébricas de Funções Afins na variável **x** e **y**. Veja a seguir algumas respostas apresentadas por alguns desses grupos:

<u>Grupo B</u>	Relação de proporção. Sim, exemplo: $y = 0,8x$
<u>Grupo J</u>	$y = 0,4x$ Sim, $y = 2x$, $y = 3x$, $y = 4x$ e etc.
<u>Grupo I</u>	Sim. Infinitas relações como, $2x$, $2x+7$, $5x+9$ e etc.

Quando questionamos sobre o erro desse item, nos perguntamos: Será que eles erraram porque não entenderam a pergunta? Ou simplesmente erraram, pois foram influenciados pelos enunciados anteriores, que trabalhavam com a representação matemática da relação entre as duas grandezas?

Perguntamos aos grupos o que levou cada um deles a pensarem daquela forma e a resposta foi unânime: Todos pensavam que a pergunta se referia a expressão matemática de uma relação.

A partir dessa análise indagamos: Até que ponto uma pergunta, aberta, pode influenciar negativamente no êxito das respostas dos alunos. Do ponto de vista matemático, a relação $y = 2x$ dada por um dos grupos refere-se a uma relação de proporcionalidade entre duas grandezas **x** e **y**, assim como, $y = 4x$, $y = 5x$, $y = 0,8x$.

Portanto, baseado na noção das Representações Semióticas de DUVAL, considero corretas as respostas desses grupos, pois o item **n)** apresenta uma pergunta considerada aberta, levando o aluno a escolher a representação que melhor se adéqua, sobre a relação entre duas grandezas.

A partir da análise das produções feitas pelos grupos, o desempenho nessa atividade ocorreu da seguinte forma:

Item **a)** ⟶ Todos os grupos acertaram-no
Item **b)** ⟶ Todos os grupos acertaram-no
Item **c)** ⟶ Todos os grupos acertaram-no
Item **d)** ⟶ Apenas 4 grupos acertaram-no inicialmente
Item **e)** ⟶ Todos os grupos acertaram-no
Item **f)** ⟶ Todos os grupos acertaram-no
Item **g)** ⟶ Seis (06) grupos acertaram-no
Item **h)** ⟶ Seis (06) grupos acertaram-no.
Item **i)** ⟶ Seis (06) grupos acertaram-no
Item **j)** ⟶ Sete (07) grupos acertaram-no
Item **k)** ⟶ Oito (08) grupos acertaram-no
Item **l)** ⟶ Oito (08) grupos acertaram-no
Item **m)** ⟶ Sete (07) grupos acertaram-no
Item **n)** ⟶ Do ponto de vista algébrico, apenas dois(02) grupos acertaram-no completamente.

Resumo da Análise:

Os resultados apontaram que houve uma grande evolução, por parte dos alunos, no aprendizado de idéias de proporção, variável, Domínio e Imagem de uma Função Linear em relação à Atividade nº 1. A maioria dos grupos, ao utilizarem as Cenas feitas por meio dos mathlets, obteve meios para se chegar à resposta correta do problema. Interativamente, as cenas serviram para ajudar os alunos a desenvolverem sua imagens de conceito, referente à análise algébrica e gráfica da Função Linear, bem como verificarem seus erros, como foi o caso da resolução do item **d)**

Todos os grupos conseguiram ao final da atividade, criar o conceito definição do que estava acontecendo no gráfico à medida que o valor do parâmetro a estava sendo alterado.

Nosso estudo apontou que o maior número de "erros" ocorreu na resolução do item **n)** devido à pergunta permitir vários tipos de interpretações. Em nossa análise, considero corretas as respostas dos grupos, que tiveram uma interpretação algébrica da questão, pois, o fato da representação algébrica da relação de duas grandezas ter sido muito trabalhado, nos itens anteriores, esse tipo de interpretação acabou influenciando os alunos na resposta do item **n)**.

Em suma, considero satisfatório o resultado apresentado pelos alunos na resolução dessa atividade.

5.3 – ATIVIDADE Nº 3: UM PASSEIO DE AUTOMÓVEL.

O conceito de velocidade média é de grande importância no estudo do movimento dos corpos, na Física. Esse conceito, geralmente, tem sido apresentado nos livros didáticos através da relação $v_m = \frac{d}{t}$ ou similar, onde d refere-se à distância percorrida pelo móvel e t, o tempo deste percurso. Essa relação nos fornece um modelo físico para problemas de proporcionalidade, o qual será estudado, nesta atividade, por meio da Função Linear.

ATIVIDADE Nº3 – Um passeio de Automóvel.

Gil mora em Curitiba e no próximo verão ele pretende passar as férias com sua família na região dos lagos, na costa fluminense. Para isso, ele e sua família farão uma viagem de automóvel, percorrendo um total de 800 km.

Abra a Cena Passeio.

Nesta cena está apresentado um gráfico relativo à viagem de Gil, que relaciona o tempo de viagem (eixo horizontal) com a distância percorrida (eixo vertical).

Você pode observar a distância percorrida em função do tempo transcorrido, alterando o parâmetro horas. Para isso, pressione as setinhas correspondentes a este campo. Da mesma forma, você também pode alterar a velocidade do automóvel. A partir dessas observações resolva os itens abaixo.

a) Atribua à variável horas os valores 1, 2, 4 e 8. Anote, em cada caso, a distância percorrida e calcule o valor da razão **distância/tempo**. O que é possível concluir?

b) Como se alteraria o gráfico da função se modificarmos o valor da velocidade para 100 km? Modifique o valor da velocidade para comprovar sua conclusão.

c) Para velocidade igual a 100 km, repita a atividade proposta no item (a). O que é possível concluir?

d) Atribua à velocidade diferentes valores. Observe como varia o gráfico da função e a razão **distância/tempo**. Conclua:

- Qual significado físico desta razão?
- Qual o significado geométrico desta razão?
- Escreva a expressão matemática que relaciona o tempo transcorrido **t** e a distância percorrida **d,** representada pelo gráfico da Cena, do problema.
- Baseado nas observações acima apresente uma definição para o conceito Físico de Velocidade Média.

5.3.1 – Análise A priori

Um aspecto importante a ser estudado nessa atividade é a visualização gráfica dessa relação através do gráfico $d \mathrm{x} t$, que representa a variação da distância pelo tem- tempo. Segundo TINOCO [42]:

> *" O fato de as distâncias serem medidas no eixo vertical e não ao longo da linha do gráfico é de difícil compreensão para os alunos, que frequentemente interpretam aquela linha como a trajetória(o percurso) da situação." (p. 28)*

Diante destes fatos nos propomos, com essa atividade nº 3, abordar o conceito velocidade média, traçando os seguintes objetivos:

1º) Permitir ao aluno construir o conceito de velocidade média, deduzindo a expressão matemática do cálculo da velocidade média.

2º) Familiarizar o aluno com problemas práticos envolvendo grandezas físicas muito utilizadas na cinemática;

3º) Através da integração do mathlet, desenvolvido para essa atividade, levar o aluno explorar a idéia de proporção e variável de uma função linear.

Para essa atividade foi desenvolvido apenas um mathlet, para ser explorado de maneira integrada à resolução da atividade, a fim de que os alunos desenvolvam habilidades cognitivas suficiente para a construção do conceito de velocidade, a partir de um estudo feito por meio de uma Função Linear.

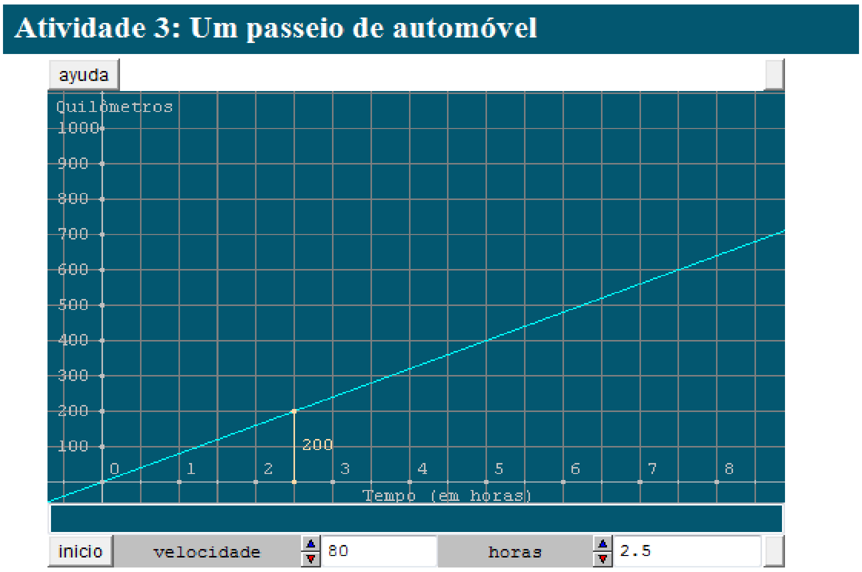


Figura 5.6 – Exemplo do mathlet usado na Atividade nº 3

Na resolução do iten **a)**, espera-se que os alunos, a partir da integração com o mathlet, registrem seus resultados e concluam que a razão da distância pelo tempo é constante e igual a velocidade média.

Na resolução dos itens **b)** e **c)**, espera-se que os alunos, ao modificarem a velocidade para 100 km/h percebam que a distância percorrida é sempre diretamente proporcional a velocidade. Esperamos também que eles cheguem a mesma conclusão do item **a)**.

Através da resolução dos itens **d)**, **e)**, **f)** e **g)** esperamos que os alunos alcancem os três objetivos desta atividade descrito acima, apresentando uma definição própria para o conceito de velocidade média.

5.3.2 – Desenvolvimento da Atividade.

Essa terceira atividade foi realizada no dia 31/05/2010, das 8h40min às 10h20min no laboratório do CEAFA. Os computadores estavam funcionando perfeitamente. Todos os 40 alunos da turma participaram dessa atividade. Eles foram divididos nos mesmo grupos que resolveram as duas atividades anteriores. Cada grupo ocupou um micro computador que continha o mathlet que seria usado na resolução dessa atividade.

Todos os grupos resolveram essa atividade dentro do prazo previsto de 1h40min. Durante a realização da atividade, foi visível a facilidade de integração entre os componentes de cada grupo, na realização da tarefa. À medida que a atividade era respondida pelos alunos percebíamos sua integração com o mathlet, principalmente quando da modificação dos parâmetros e interpretação do gráfico do problema.

Notamos que os grupos não tiveram dificuldades em resolverem os itens **a), b), c)** e **d)**. Uma grande parte desses grupos apresentou seus registros por meio de tabelas e concluíram, de maneira satisfatória, que a razão $\frac{distância}{tempo}$ era a velocidade média do percurso.

Figura 5.7 – Um dos grupos resolvendo a atividade nº 3
no laboratório do CEAFA

Referente à resolução dos itens **e), f)** e **g)** percebemos que ocorreu sem grandes surpresas. Os alunos se mostraram mais maduros ao deduzir a expressão matemática do cálculo da velocidade média. Muitos se basearam nos conceitos aprendidos e desenvolvidos na atividade nº 1 e resolveram de maneira satisfatória o item **f)**.

5.3.3 – Análise a Posteriori

A análise das produções dos alunos foi feita no próprio laboratório, após a aplicação da atividade. Foi reservado para essa atividade um tempo de aula de 50 minutos. Diferente das duas atividades anteriores, quando escolhemos alguns grupos para apresentarem suas produções, nesta atividade, pedimos que cada grupo apresentasse sua resposta ao item pré selecionado. Todos os grupos participaram da análise apresentando suas resoluções e demonstrando que conseguiram compreender o conceito de velocidade obtida a partir da razão $\frac{distância}{tempo}$. Por meio dos valores obtidos a partir do uso do mathlet, os alunos foram capazes de construir a relação matemática referente à função linear representativa do problema.

Diante das respostas dos alunos referente aos itens **a), b) c)** e **d)** destacamos algumas delas a seguir:

<u>Grupo C</u>

a) $h=1 \longrightarrow 80Km$

$h=2 \longrightarrow 160 Km$

$h=4 \longrightarrow 320 Km$

$h=8 \longrightarrow 640 Km$

Razão $= \frac{d}{t} = \frac{160}{2} = 80$

A cada nº (1, 2, 3...) aumenta-se na razão 80 Km.

<u>Grupo D</u>

b) Ele se inclinará mais para cima pois o tempo percorrido será aumentado em função da distancia e do aumento da velocidade.

Grupo F

c) 1h → 100 km 2h → 200 km 4h → 400 km 8h → 800 km		A distância percorrida aumenta, ele chega mais rápido

Grupo F

d)
- velocidade média.
- A inclinação da reta.
- $V_m = \frac{\Delta S}{\Delta t}$
- A velocidade é a razão estabelecida entre a distância percorrida e o tempo transcorrido.

Em relação ao item **f)**, que refere-se a expressão matemática representada pelo gráfico da atividade, e que, nas atividades anteriores foi o item que proporcionou as maiores dúvidas dos alunos, verificamos que somente um grupo não alcançou o objetivo esperado. Destacamos abaixo a resposta de dois grupos.

Grupo A	**Grupo F**
$v = \frac{d}{t}$	$\frac{\Delta s}{\Delta t}$
$V = \frac{d}{T}$	$\frac{\Delta S \rightarrow \text{distância}}{\Delta t \rightarrow \text{tempo}}$

Perguntamos à turma qual das duas respostas estavam corretas. Um dos alunos respondeu:

- "Todas as duas estão corretas. A primeira, o grupo **A** identificou a distância por **d** e o tempo por **t**, já na segunda, o grupo **F** usou os símbolos que estamos aprendendo em Física e que corresponde à mesma coisa, não é mesmo?"

Nesse mesmo instante esclarecemos aos alunos que o erro não estava na notação que cada grupo escolheu para representar a distância e o tempo. O erro estava no grupo **F** não ter considerado a variável dependente do problema, que neste caso só poderia ser a velocidade. Esse exemplo serviu para mostrar aos alunos que uma função necessita de duas variáveis, a dependente e a independente, para se manter a relação de dependência. Explicamos aos alunos que nessa atividade, o tempo é uma grandeza variável, pois ao realizar essa viagem, o tempo gasto pode variar, chegando, por exemplo, a 4 ou 6 horas. A velocidade também é uma grandeza variável, já que pode assumir diversos valores, como por exemplo, 80 e 100 km/h. Logo, o tempo de viagem e a velocidade são grandezas variáveis, porém seus valores não são independentes entre si, precisando assim estar relacionados. A partir dessa explicação esclarecemos aos alunos que o tempo de viagem depende da velocidade do automóvel, e vice versa. No caso da relação matemática desta atividade, $v_m = \frac{d}{t}$, para cada tempo de viagem, existe uma velocidade média associada. Neste caso, a velocidade é a variável dependente, pois depende do tempo da viagem, e o tempo é a variável independente.

Vemos através desse exemplo, um erro muito comum entre os alunos, identificar uma função somente pela expressão algébrica, sem considerar a relação de dependência entre as variáveis. Por exemplo, é comum em nossas aulas de matemática, pedir aos alunos que escrevam a função quadrática cujos coeficientes são a=3, b=7 e c= - 4 e obtermos como resposta $3x^2 + 7x - 4$ ao invés de $y = 3x^2 + 7x - 4$. Essa relação de dependência entre duas variáveis é que distingue uma função de uma expressão algébrica ou até mesmo de uma equação.

Resumo da Análise:

Os resultados apontaram que todos os grupos tiveram um ótimo desempenho nesta atividade. Os grupos conseguiram compreender e definir o conceito de velocidade como um modelo da função linear. Essa atividade parte de uma situação concreta, que envolve conhecimentos que o aluno já possui, através de experiências que já teve no cotidiano.

A partir da análise das produções feitas pelos grupos, o desempenho nessa atividade ocorreu da seguinte forma:

100% dos grupos acertaram o item **a)**
100% dos grupos acertaram o item **b)**
100% dos grupos acertaram o item **c)**
100% dos grupos acertaram o item **d)**
100% dos grupos acertaram o item **e)**
90% dos grupos acertaram o item **f)**
100% dos grupos acertaram o item **g)**

Em relação ao grupo F, que apresentou como resposta do item **f)** a expressão $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ vemos que o grupo conseguiu montar uma lei matemática que representasse a situação descrita no problema. No entanto, a variável dependente foi esquecida, ou este conceito ainda não foi totalmente construído pelos alunos.

Diante disto, considero excelente o resultado apresentado pelos alunos na resolução dessa atividade.

5.4 – ATIVIDADE Nº 4: CALCULANDO O SALÁRIO

O nosso objetivo, através desta atividade nº 4, é levar o aluno a modelar uma situação problema por meio de uma função Afim, resolvendo equações do 1º grau, resgatando conhecimentos adquiridos nas atividades anteriores. Neste trabalho é possível explicitar as relações de dependência entre variáveis envolvidas numa função afim, e levar o aluno a entender que cada equação é vista como a igualdade de uma função a um determinado valor.

ATIVIDADE Nº4 - Calculando o salário

O Srº Amadeu trabalha como representante de uma empresa que se dedica a criação de jogos para computador. Seu salário é de R$ 800,00 fixos por mês, acrescidos de R$ 5,00 por cada jogo vendido em DVD.

Complete a tabela

Salário de Amadeu (em Reais)	**Quantidade de Jogos Vendidos em DVDs**
	0
	1
	5
	12
1400,00	

a) Para cada jogo vendido o salário de Amadeu é aumentado de quanto?

b) Se Amadeu dobrar a quantidade de jogos vendidos, o que acontece com o seu salário? Justifique.

Abra a Cena 1

Nesta cena representamos o plano coordenado. No eixo horizontal representamos a quantidade de jogos vendidos. No eixo vertical o salário, em reais, de Amadeu. O gráfico dessa relação associa a cada quantidade **x** de jogos vendidos ao salário **y** de Amadeu. A partir dessas informações, responda os itens **c), d), e),** e **f)**

c) Se num mês Amadeu vender 106 jogos, que salário ele receberá? Que equação você deve resolver para responder a esta pergunta?

d) Conhecendo o salário de Amadeu é possível descobrir quantos jogos ele vendeu? Justifique.

e) Quantos jogos Amadeu precisa vender para receber de salário R$ 6100,00? Que equação você deve resolver para responder a esta pergunta?

f) Se chamarmos de **x** a quantidade de jogos vendidos e **y** o salário de Amadeu, como poderíamos estabelecer uma relação matemática entre quantidade vendida e salário?

Abra a Cena 2

Nesta cena, representamos no plano coordenado o gráfico de $y = ax + b$. No eixo horizontal representamos a quantidade de jogos vendidos. No eixo vertical o salário, em reais, de Amadeu. A partir dessas informações, responda aos itens **g), h), i)** e **j)**.

g) Qual é o domínio dessa relação? Justifique.

h) Qual é o conjunto imagem dessa relação? Justifique.

i) Em relação às variáveis do problema, quais são os significados dos parâmetros a e b que aparece na equação?

j) Quando o parâmetro a é zero e fixamos b, o que podemos concluir sobre o Salário de Amadeu quando variamos x, quantidade de jogos?

5.4.1 – Análise A priori

Para essa atividade, foram desenvolvidos dois mathlets, para serem explorados de maneira integrada à resolução da atividade, a fim de que os alunos desenvolvam imagens conceituais suficientes que os levem a escolha de estratégias para chegar à solução de cada item da atividade. Esperamos que eles percebam que a relação entre o salário de Amadeu e a quantidade de jogos vendidos não é um problema de proporcionalidade, pelo fato de existir um salário fixo.

Na resolução dos itens **a)** e **b)**, os alunos, após completarem a tabela de valores, devem ser capaz compreender a relação entre as quantidades de jogos vendidos e o salário de Amadeu, e como essa relação é estabelecida. Nosso objetivo na resolução desses itens é levá-los a refletir sobre a seguinte questão: O salário de Amadeu depende da quantidade de jogos vendidos? A partir desses questionamentos discutiremos os itens a seguir.

Para a resolução dos itens **c), d), e) e f)** foi desenvolvido um mathlet contendo o plano coordenado. No eixo horizontal representamos a quantidade de DVDs de **jogos** vendidos e no eixo vertical o salário de Amadeu em reais. A partir da resolução desses itens pretendemos levar os alunos a observar, analisar e estabelecer relações entre as grandezas descobrindo e resolvendo as equações do 1º grau chegando ao resultado esperado. Na resolução do item **f)**, espera-se que os alunos cheguem à expressão $y = 5x + 800$ ou equivalente. Veja abaixo o mathlet utilizado na resolução desses itens.

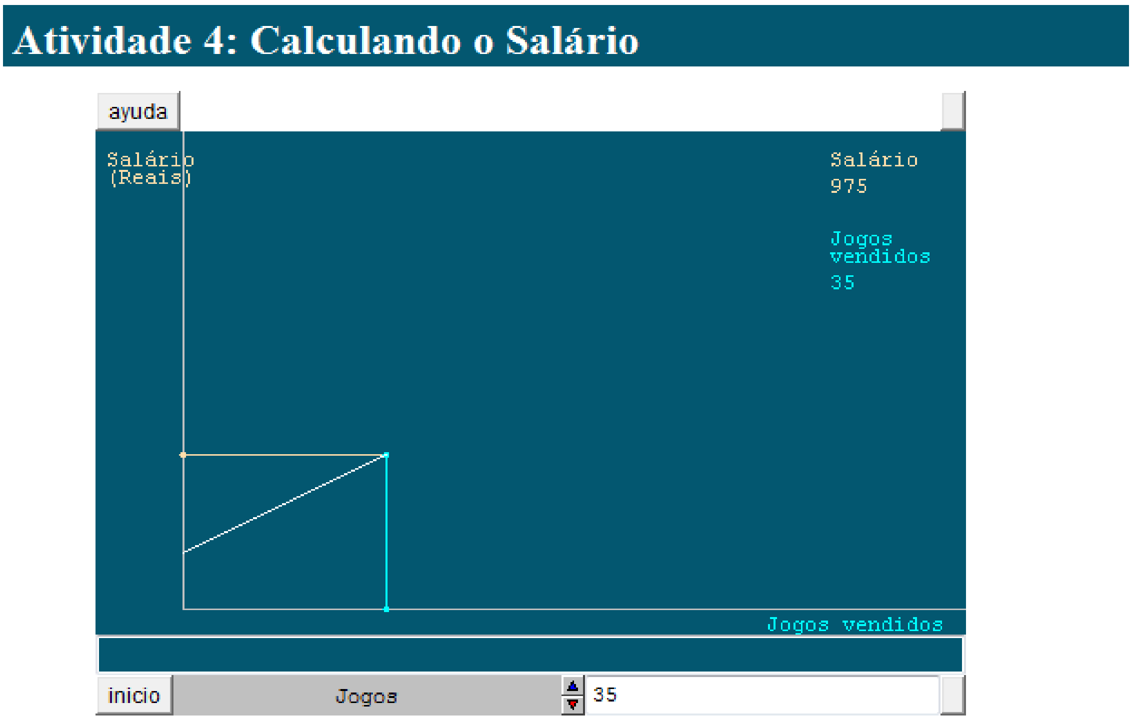


Figura 5.8 – Mathlet usado na resolução dos itens **c), d), e)** e **f)** da Atividade nº 4.

Através da resolução dos itens **g), h)**, nosso objetivo é explorar o conceito de domínio e imagem de uma função afim. Espera-se que os alunos, a partir da resolução dos itens anteriores, percebam que os conjuntos domínio e imagem dessa função é um subconjunto do conjunto dos números Naturais.

Com o item **i)** e **j)** esperamos que os alunos identifiquem a partir da situação problema o que significa os parâmetros **a** e **b** da função Afim, bem como a importância do parâmetro **a**, na obtenção do salário de Amadeu.

Veja abaixo o mathlet utilizado na resolução desses itens.

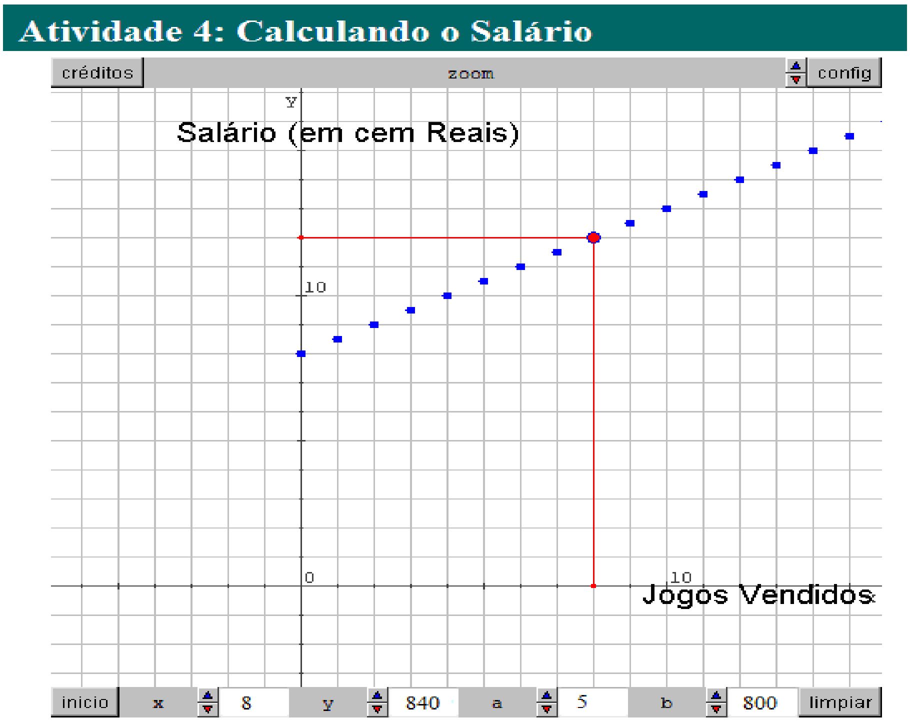


Figura 5.9 – Mathlet usado na resolução dos itens **g), h), i)** e **j)** da Atividade nº 4.

A partir dessa análise a priori, segue abaixo o desenvolvimento da atividade nº 4.

5.4.2 – Desenvolvimento da Atividade.

Essa atividade nº 4 foi realizada no dia 07 / 06 / 2010, das 8h40min às 10h20min no laboratório do CEAFA. Estavam presentes neste dia 30 alunos. Aproveitando que todos os computadores estavam em perfeito funcionamento, resolvemos dividi-los em duplas. Cada dupla ocuparia um micro computador para a realização da atividade. Todas as duplas resolveram essa atividade dentro do prazo previsto de 1h40min. Durante a realização da atividade, algumas dificuldades foram apresentadas pelos alunos.

A primeira grande dificuldade dos alunos foi identificar que o salário de Amadeu dependia de um valor fixo e de um valor variável. Nas resoluções dos itens **a), b), c), d) e e)** a maioria das duplas usaram estratégias semelhantes, usando as quatro operações fundamentais da aritmética, obtendo assim os resultados corretos. Porém na hora de exibir uma equação que representasse os cálculos realizados, algumas duplas tiveram sérias dificuldades. De acordo com TINOCO [42] "*A familiarização dos alunos com as expressões algébricas se dá muito lentamente.*" (p. 53)

Pedimos então que os alunos formulassem estratégias, semelhantes as utilizadas nas atividades anteriores, a fim de resolver o item **e),** o qual refere-se a estabelecer uma expressão matemática que relaciona duas grandezas do problema. Feito isso eles saberiam como montar a equação referente a cada item.

Um dos alunos perguntou:

- "Professor, esse salário fixo tem alguma coisa a ver com o valor cobrado num estacionamento? Pois eu trabalho num estacionamento e lá agente cobra R$ 3,00 pela primeira hora e a partir da segunda hora, cada hora ou fração a mais, agente cobra um valor de R$ 2,00."

O professor, respondendo, disse:

- Seu trabalho retrata uma situação problema semelhante a essa atividade que está sendo desenvolvida nesse laboratório.

O aluno agradeceu ao professor e junto com seu colega encontraram uma estratégia para resolver esse problema. Veja:

Sim, Pois sabemos que ele tem um salário fixo de R$800,00 e um acréscimo de R$5,00 por cada jogo vendido. Podendo então utilizar a seguinte equação para resolver o que se pede ↳ $y = 5x + 800$

Após alguns debates sobre o assunto entre os alunos de cada dupla, 11 duplas chegaram à conclusão que a relação matemática pedida no item **f)** era $y = 5x + 800$.

Uma discussão interessante em sala de aula ocorreu na resolução dos itens **g)** e **h)** referente ao domínio e a Imagem da função. Após abrirem a cena nº 2, os alunos se surpreenderam com o fato do gráfico da função apresentar apenas pontos isolados. A maioria das duplas resolveu todas as questões, e deixou os itens **g)** e **h)** por último, a fim de obter alguma ajuda do professor. O fato desses alunos nunca terem resolvidos problemas de Função Afim, cujo domínio admitia apenas valores naturais, causou-lhes espanto. Eles estavam acostumados a resolverem problemas modelados por uma Função Afim, cujo gráfico era uma reta continua, isto é, o domínio era um subconjunto dos números reais. Como todas as duplas "empacaram" nesses dois itens, sugeri que todos os deixassem em branco e após a última dupla terminar a atividade, esses itens seriam retomados e discutidos para que chegássemos ao resultado satisfatório.

5.4.3 – Análise a Posteriori

Nesta atividade foram formadas quinze duplas de alunos. A fim de facilitar nossa análise, as duplas foram identificadas da seguinte forma: $D_1, D_2, D_3, D_4, ..., D_1\ e\ D_{15}$. Escolhemos três duplas para apresentarem suas respectivas soluções e analisá-las diante da turma, no próprio laboratório. A análise dessa atividade foi realizada no 3º tempo de aula, composta de 50 min, após um intervalo de 20 minutos referente ao recreio da turma. O critério utilizado se deve ao fato deles apresentarem respostas e resoluções diferentes na resolução do item **f)**.

As resposta apresentadas pelas três duplas selecionadas foram: Dupla D_3, $y = 5{,}00x + 800{,}00$; Dupla D_4, $y = 800 + 5x$; Dupla D_{11}, $y = 5 + 800$.

O professor fez questão de analisar diante da turma, cada resposta apresentada pelos alunos e pediu a opinião dos outros grupos sobre a resposta de seus colegas.

Ao analisar a resposta do grupo D_3 o professor perguntou a turma se essa resposta estava correta. Toda a turma respondeu que estava, sim, correta. Imediatamente o professor, perguntou: Alguém achou alguma resposta diferente?

O grupo D_7 respondeu:

- "Professor nós colocamos como resposta a fórmula $y = 5x + 800$ que é a mesma, não é?"

O professor respondeu:

- Em relação à resposta do problema, sua resposta é a mesma. Notamos pela resposta dos seus colegas, da dupla D_3, que eles representaram os coeficientes como números racionais que indicam o valor monetário, a saber, 5,00 e 800,00.

O professor então perguntou: Vocês saberiam me explicar se a resposta da dupla D_4 está correta ou não?

Um dos alunos da dupla D_4 respondeu:

- "Professor, eu tenho certeza que nossa resposta está correta e é idêntica a dos nossos colegas da dupla D_3. Nós apenas invertemos. Colocamos a parte fixa, primeiro e depois colocamos a parte variável."

O professor então explicou aos alunos que as duas respostas estavam corretas e que o fato deles terem "invertido" a parte fixa da parte variável não alteraria o resultado do problema. Disse ainda que isso só é possível, pois existe uma propriedade da soma algébrica, chamada de comutatividade, que foi usada intuitivamente pela dupla D_4 nessa questão. Essa propriedade diz que: $a + b = b + a$.

Terminando a análise das respostas dessas duas duplas, o professor perguntou para a turma: A resposta da dupla D_{11} está correta?

- Todos os alunos responderam como se fosse um coro ensaiado. Não!

O professor imediatamente perguntou: Então, o que está errado?

Um dos alunos da dupla D_8 respondeu:

- "Falta identificar a parte variável do problema."

Muito bem, respondeu o professor. Vejo que vocês conseguiram identificar que essa função possui uma grandeza variável e, portanto, precisa ser explicitada na lei da função.

Após acabar de analisar as respostas dos alunos referente a item **f)** da atividade, o professor disse a turma:

- Gente, agora vamos retomar discussão dos itens **g) e h)**. Para isso o professor devolveu para cada dupla, o caderno de atividade, que continham os registros das respostas de cada item da atividade, onde os itens **g) e h)**, de todos os grupos, estavam em branco.

Após todas as duplas receberem o caderno de respostas, o professor pediu que eles abrissem a **Cena 2** e disse:

- Experimentem colocar, no valor de x o valor 8,5. O que acontece?

Após alguns instantes dois alunos, juntos, responderam: Dá erro, professor!

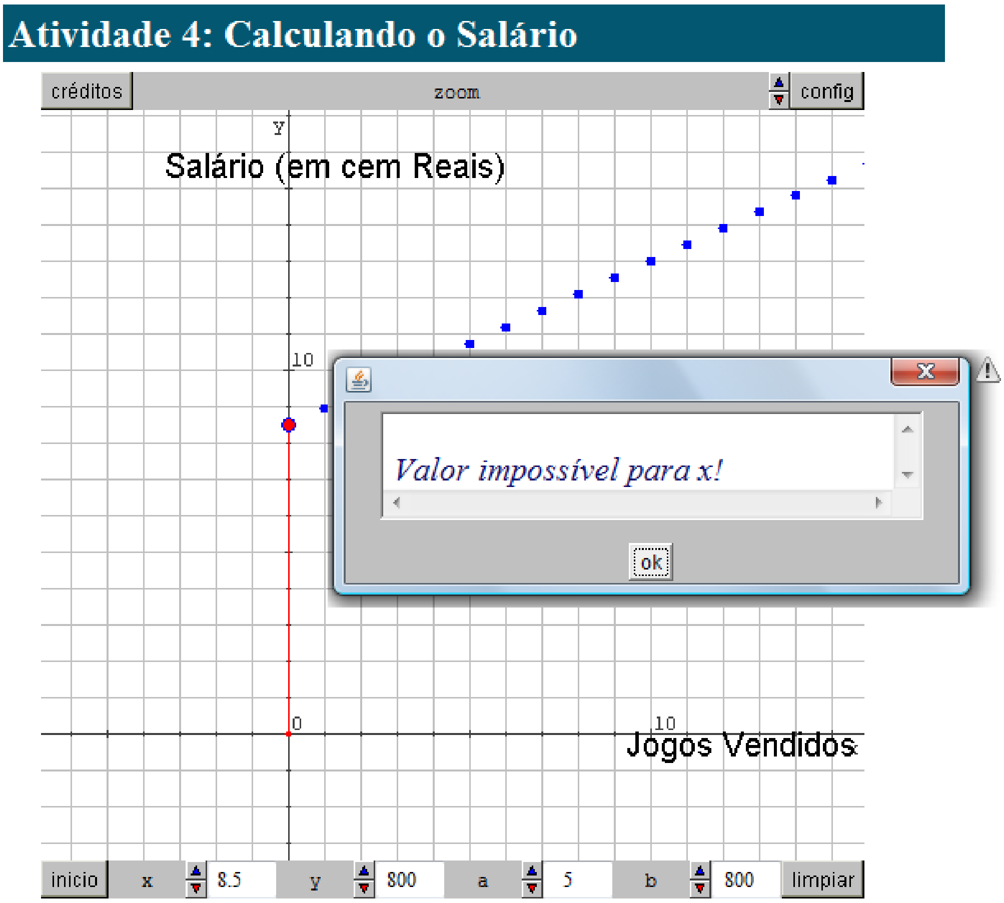


Figura 5.10 – Exemplo da resposta dada por um dos alunos à pergunta do professor, na retomada da discussão dos itens **g)** e **h)**.

Uma aluna da dupla D_6 respondeu:

- "Ah, é por que não tem como vender 8,5 DVDs, por isso que dá erro, pois é algo impossível."

O professor respondeu:

- "Isso mesmo, é por isso que na cena, apresenta a mensagem erro, pois o computador não reconhece a venda de 8,5 DVDs. Consequetemente os valores apresentados no gráfico, só podem ser as imagens dos valores, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, etc que são números naturais. Logo suas imagens só podem ser imagens de números naturais e consequentemente os pontos do gráfico são pontos isolados."

Imediatamente após essa explicação do professor, um aluno do grupo D_4 indagou:

- "Ah professor, por isso que neste caso, tanto o domínio da função quanto o conjunto imagem são conjunto naturais?"

O professor disse:

- Quase isso. Você acertou o "universo" dos valores assumidos por cada conjunto, porém eu te pergunto: É possível Amadeu ganhar um salário de R$ 500,00? Tente colocar na cena, o valor $y = 500$, o que acontece?

- É professor, agente sabe que não é possível, e a cena apresenta a mensagem de erro.

- Isso mesmo, rapaz, você sabe que não é possível, logo, o valor de y nunca pode ser 500,00 reais. Então qual seria menor valor a ser assumido pelo y ?

Um aluno, no meio da turma, disse:

- "R$ 800,00, pois caso ele não venda nada, receberia 800,00 de salário fixo"

- Isso mesmo, disse o professor. Esse é o menor valor que y pode assumir. Isso significa que os valores de y só podem ser números naturais, maiores ou iguais a 800. Isso mostra que o conjunto imagem dessa função é um subconjunto do conjunto dos números naturais, e escrevemos em notação da seguinte forma $\{ y \in N \ / \ y \geq 800 \}$. Por tanto o conjunto imagem dessa função não é o conjunto dos números naturais, mais sim um subconjunto do conjunto dos números naturais identificados pela proposição $y \geq 800\}$. Agora vocês podem responder as perguntas dos itens **g)** e **h)** e não esqueçam de justificá-las.

A partir da análise das produções feitas pelos grupos, o desempenho nessa atividade ocorreu da seguinte forma:

ITENS	**Nº DE DUPLAS QUE ACERTARAM**
a)	**15**
b)	**15**
c)	**13**
d)	**14**
e)	**13**
f)	**11**
g)	**Nenhum**
h)	**Nenhum**
i)	**14**
j)	**14**

Resumo da Análise:

Os resultados apontaram uma grande integração dos alunos com os mathlets que foram desenvolvidos para essa atividade, permitindo que eles chegassem a conclusões importantes, que os levassem a resolução correta dos itens dessa atividade. Apesar da grande dificuldade apresentada por eles na resolução dos itens **g)** e **h)**, após discussão conjunta, professor e alunos, em sala de aula, utilizando os mathlets de forma interativa, percebemos que eles foram capazes de desenvolver uma imagem conceitual do Domínio e Imagem dessa função, e de concluir acerca da generalização para outros exemplos de funções.

Quanto às dificuldades apresentadas pelos alunos nas resoluções dos itens **c), d), e)** optamos por orientá-los a resolverem primeiramente o item **f)**, que refere-se a exibir a lei da Função Afim do problema, para então, escreverem a equação que resolveria cada item. Observamos que os alunos usavam conceitos adquiridos em atividades anteriores, como estratégias para resolver o item **f)** e conseqüentemente determinar a equação que resolvia a questão.

As perguntas formuladas nos itens **c)** e **e)** podem dar a impressão de que seria desnecessário o uso de equações do 1º grau para a resolução da questão. No entanto, a importância e utilidade deste instrumento matemático justificam a sua cobrança, mesmo não sendo natural para o aluno, em primeiro momento, sua utilização na resolução desses itens.

Em relação à resolução dos itens **i)** e **j)**, os alunos, em sua maioria, interagiram com os mathlets buscando resposta para as perguntas dos problema.

De modo geral, os alunos que participaram dessa atividade, avaliaram a ferramenta positivamente, por considerarem que esta facilitou o entendimento dos itens da atividade esclarecendo suas dúvidas. Essa opinião foi compartilhada por todas as duplas.

5.5 – ATIVIDADE Nº 5: CARACTERIZAÇÃO DA FUNÇÃO AFIM.

O objetivo geral desta Atividade nº 5 é permitir que os alunos:

1) analisem graficamente o deslocamento da função afim quando variam-se seus coeficientes,

2) reconheçam a translação e a rotação de uma função afim

3) analisem e enriqueçam seus conhecimentos sobre os casos particulares de Função Afim.

ATIVIDADE Nº5 – Caracterização da Função Afim

Abra a Cena 1

Nesta cena representamos, no plano cartesiano, o gráfico da Função Afim $f(x) = ax + b$, onde $a, b \in \Re$. Altere os parâmetros a e b verificando, no plano cartesiano, as várias possibilidades de construção do gráfico da função $f(x) = ax + b$. A partir dessas observações responda os itens abaixo:

a) O que ocorre com as retas $f(x) = ax + b$ quando fixamos o parâmetro b e variamos o parâmetro a?

b) Qual é a característica comum a todas as retas que apresentam o coeficiente a positivo? ($a > 0$)

c) E negativo? ($a < 0$)

d) E zero?($a = 0$)

e) Qual é o significado geométrico do parâmetro a no item anterior?

f) O que ocorre com as retas $f(x) = ax + b$ quando fixamos o parâmetro a e variamos o parâmetro b?

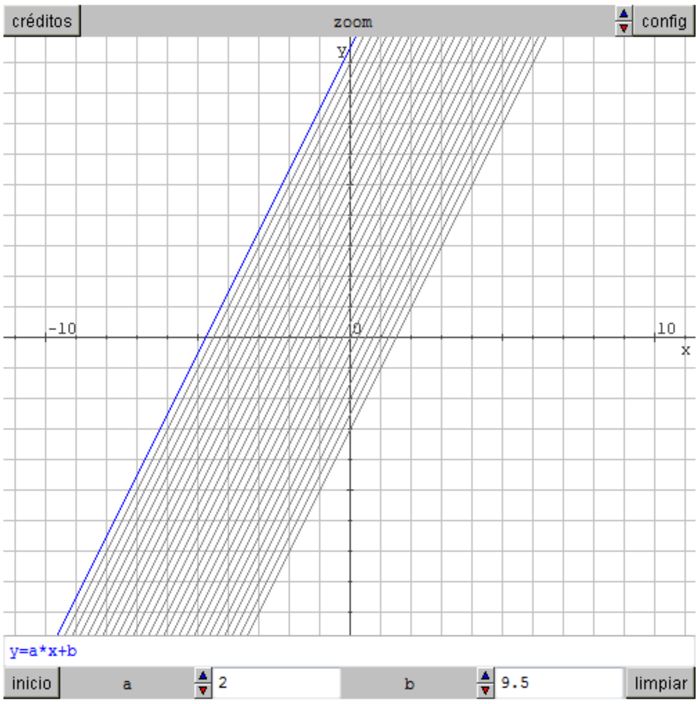
g) Qual é a característica geométricas das retas obtidas no item anterior?

h) Qual é o significado geométrico do parâmetro b no item anterior?

5.5.1 – Análise A priori

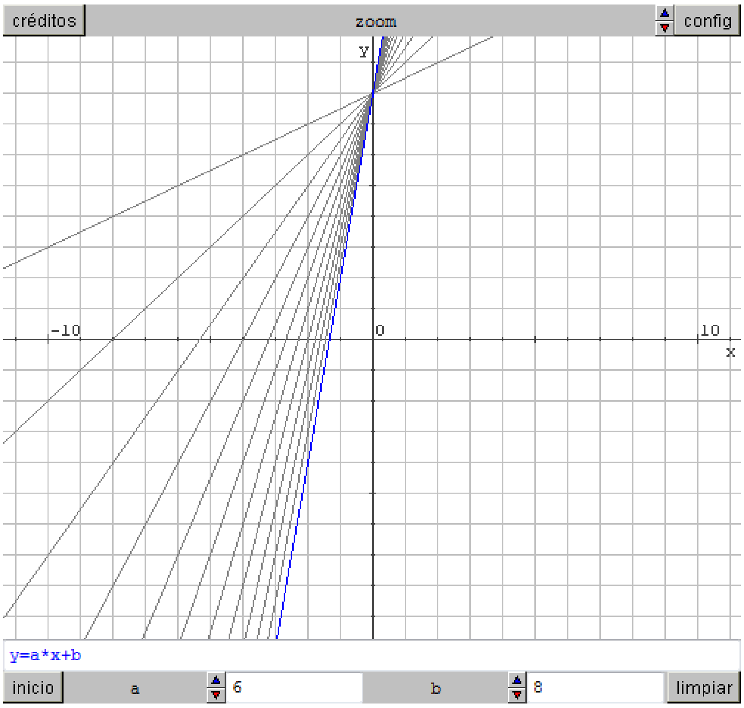
Através da exploração de um mathlet, construído especificamente para essa atividade, elaboramos algumas questões a fim de que os alunos percebam o comportamento do gráfico da Função Afim à medida que os seus coeficientes vão variando. Vejamos abaixo exemplos resolvidos através do mathlet utilizado na resolução dessa atividade:

Atividade 5: Caracterização da Função Afim



Mathlet usado na Atividade nº5, apresentando
o coeficiente b variando de -3 até 9,5.

Atividade 5: Caracterização da Função Afim



Mathlet usado na Atividade nº5, apresentando
o coeficiente a variando de 2 até 6.

Os cinco primeiros itens desta atividade, a saber, os itens **a), b), c), d)** e **e)**, referem-se à análise do gráfico da Função Afim quando variamos o coeficiente a e deixamos o b fixo. A partir da resolução desses itens os alunos devem ser capazes de identificar a rotação das retas em torno do ponto $(0,b)$, identificar quando elas são crescentes ou decrescentes e ainda concluírem que a Função Constante é um caso particular da função $y = ax + b$, quando o coeficiente $a = 0$.

Na resolução dos itens **f), g) e h)**, espera-se que os alunos reconheçam a translação das retas relativas a cada Função Afim, sendo capazes de identificar as características geométricas dessas retas, isto é, o paralelismo das retas e concluírem que a Função Linear, é um caso particular da função $y = ax + b$, quando o coeficiente $b = 0$.

A partir dessa análise a priori, segue abaixo o desenvolvimento da atividade nº 5.

5.5.2 – Desenvolvimento da Atividade.

Essa atividade nº 5 foi realizada no dia 14/06/2010, das 8h40min às 10h20min no laboratório do CEAFA. Por ser véspera do jogo do Brasil na Copa do Mundo de Futebol, apenas 24 alunos estavam presentes neste dia na escola. A turma foi dividida em duplas, aproveitando, quando possível, as mesmas duplas que realizaram a atividade anterior. Cada dupla ocuparia um micro computador para a realização da atividade.

Todas as duplas resolveram essa atividade dentro do prazo previsto de 1h40min. Durante a realização da atividade, percebemos que os alunos não estavam familiarizados com a linguagem matemática, tais como, rotação, translação, eixo de rotação, etc. Eles usavam comumente as palavras girar, subir, descer, girar no sentido horário, etc.

Apesar de não estarem familiarizados com essa linguagem matemática, essa atividade serviu para ensiná-los os conceitos de rotação e translação. Verificamos que em sua maioria, os alunos conseguiam concluir que no caso de fixarmos o coeficiente a e variar o b, o feixe de retas eram paralelas, mas não conseguiam identificar o conceito de translação. A perguntar se algum dia eles estudaram sobre rotação e translação recebemos como resposta:

"Nunca professor"

"A gente vem de um colégio que era só ir à escola que seríamos aprovados. Então não me lembro o que estudei. Só sei que resolvi muitas equações com a fórmula de Delta"

"Professor, eu já vi, uma vez, mas só em geometria. E na época era só desenhar"

Apesar da dificuldade de escrever a resposta numa linguagem matemática, pedimos que eles justificassem e registrassem todas as respostas, pois seriam analisadas no tempo após o intervalo, onde faríamos a análise e discutiríamos cada item da atividade.

5.5.3 – Análise a Posteriori

Nesta atividade foram formadas 12 duplas de alunos. Para facilitar nossa análise, as duplas foram identificadas da seguinte forma: $D_1, D_2, D_3, D_4, ..., D_{11}\ e\ D_{12}$. Recebemos dos alunos a folha com as resposta, e deixamos com eles a folha das perguntas, a fim de que todos participassem da análise da atividade. Nesta atividade não foi escolhida nenhuma dupla para apresentar sua resposta perante a turma. Foi feita de maneira conjunta uma análise de cada item da atividade no próprio laboratório. Essa análise foi realizada no 3º tempo de aula, composta de 50 min, após um intervalo de 20 min, referente ao recreio da turma. Escolhemos uma dupla para apresentar sua resposta diante da turma. Cada item dessa atividade foi apresentado por uma dupla diferente.

Ao apresentar a solução para o primeiro item, a dupla D_4 justificou que a reta vai girando até chegar ao eixo y. Vejamos a resposta dessa dupla:

a) O que ocorre com as retas $f(x) = ax + b$ quando fixamos o parâmetro b e variamos o parâmetro a? A reta vai mudando de posição, girando, vai chegar ao eixo y.

Imediatamente o professor explicou que esse "girar" refere-se, em matemática, à rotação. Porém, para que exista uma rotação é necessário existir o centro de rotação. O professor perguntou a turma:

- Alguém sabe me dizer quem é o centro de rotação desse feixe de retas?

Um aluno da dupla D_3 respondeu:

- Professor, será o valor de b?

O professor respondeu:

- Quase isso. Mas sua visualização está correta. O ponto $(0,b)$ sempre será o centro de rotação de um feixe de retas $y = ax + b$, quando fixamos o coeficiente b e variamos o coeficiente a.

A dupla D_3 foi chamada para apresentar sua resposta diante da turma, referente ao item **b)**. Ao apresentá-la, os alunos justificaram que a inclinação da reta é para cima. Vejamos a resposta dessa dupla:

b) Qual é a característica comum a todas as retas que apresentam o coeficiente a positivo?($a > 0$)

A inclinação da reta é para cima

O professor perguntou aos alunos da dupla D_3 o que seria a inclinação da reta ser para cima?

Um dos alunos respondeu:

- Ela vai subindo...

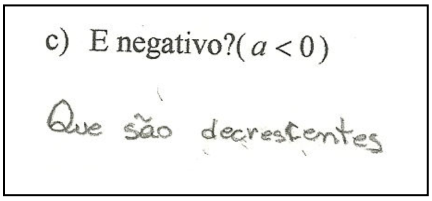
Alguém poderia me dar uma resposta mais coerente?

Um dos alunos da dupla D_8, respondeu:

- Professor, são retas crescentes.

O professor parabenizou o aluno e explicou à turma que nos casos em que as retas $y = ax + b$ apresentam $a > 0$, à medida que os valores de x vão aumentando, os valores de y também vão aumentando. Essa é uma característica das funções crescentes.

A dupla D_8 foi escolhida para apresentar diante da turma a sua resposta referente ao item **c)**. Ao apresentá-la diante da turma, os alunos justificaram que elas eram decrescentes. Vejamos a resposta da dupla D_8:

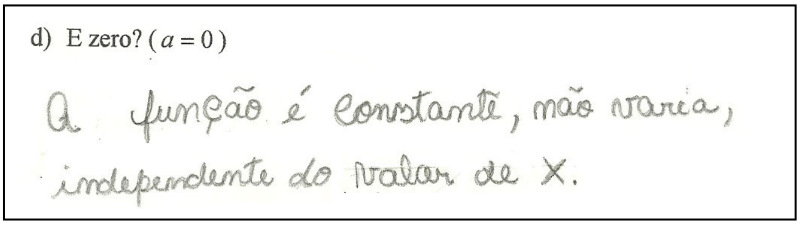


c) E negativo?($a < 0$)

Que são decrescentes

O professor parabenizou essa dupla e explicou à turma que nos casos das retas $y = ax + b$ que apresentam $a < 0$, à medida que os valores de x vão aumentando, os valores de y também vão diminuindo. Essa é uma característica das funções decrescentes.

A dupla D_1 foi escolhida para apresentar diante da turma a sua resposta relativa ao item **d)**. Ao apresentá-la diante da turma, os alunos justificaram que a função era constante. Vejamos a resposta dos alunos:

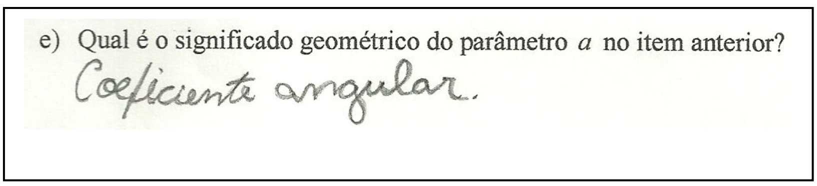


d) E zero? ($a = 0$)

A função é constante, não varia, independente do valor de X.

O professor parabenizou essa dupla e explicou à turma que apesar da variável independente ser apenas um número, $y = b$, essa igualdade retrata a equação de uma função constante, onde para qualquer valor de x, o valor de y permanece sempre o mesmo valor fixo $y = b$. Por isso que o gráfico é exatamente uma reta horizontal.

Logo após essa análise o professor escolheu a dupla D_7 para apresentar diante da turma a sua resposta sobre o item **e)**. Essa dupla respondeu: coeficiente angular. Vejamos a resposta dessa dupla:

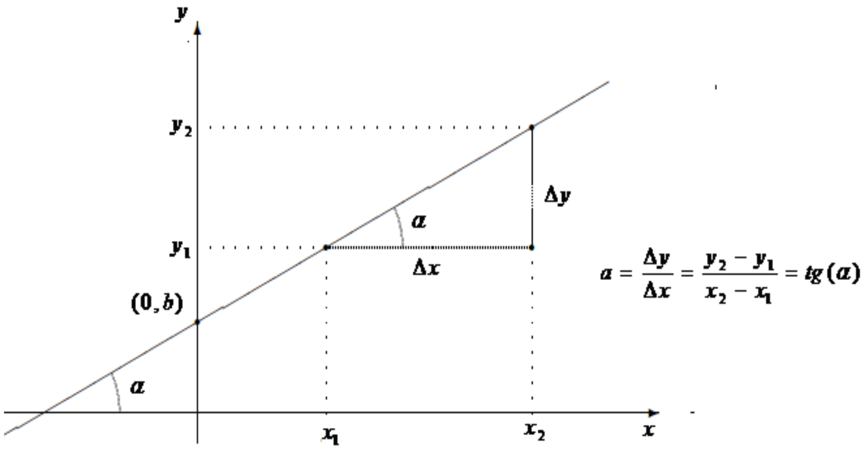


e) Qual é o significado geométrico do parâmetro a no item anterior?

Coeficiente angular.

O professor perguntou a turma se todos concordavam com essa resposta, e verificou que todos responderam que sim.

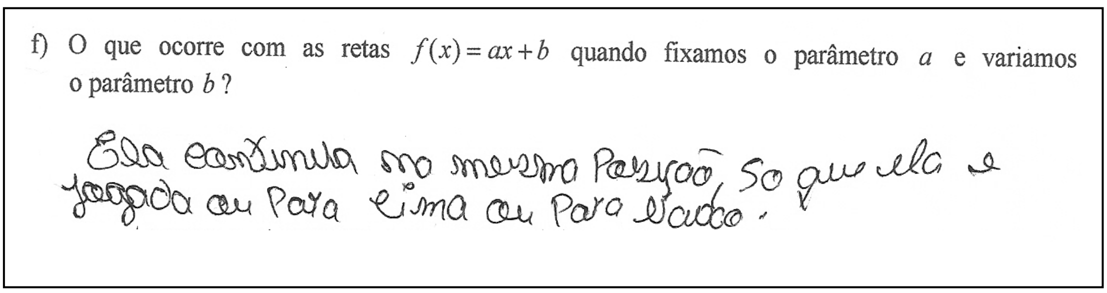
O professor aproveitou essa oportunidade para explicar o real significado geométrico do coeficiente a. O coeficiente a é chamado de coeficiente angular, porém seu significado geométrico é bem diferente.



Um modelo usado pelo professor na explicação aos alunos

O professor explicou que ângulo α que a reta forma com o eixo das abscissas(x) no sentido positivo denomina-se a **inclinação** da reta. Disse também que através da trigonometria é possível observar que o coeficiente angular é a tangente desta inclinação, isto é, $a = tg(\alpha)$. Diante da reação de espanto da maioria da turma, o professor procurou acalmá-los dizendo que esse assunto seria mais aprofundado nas próximas aulas.

A dupla D_{12} foi chamada para apresentar sua resposta diante da turma, referente ao item **f)**. Ao apresentá-la, os alunos justificaram que "ela(a reta) continua na mesma posição, só que ela é jogada para cima ou para baixo" Vejamos a resposta dessa dupla:


f) O que ocorre com as retas $f(x) = ax + b$ quando fixamos o parâmetro a e variamos o parâmetro b?

Ela continua no mesma Posiçaõ, So que ela e jogada ou Para cima ou Para baixo.

O professor perguntou aos alunos da dupla D_{12} o que seria "jogada para cima ou para baixo"?

- Um dos alunos respondeu: "subindo ou descendo em diagonal"

O professor percebeu que eles sabiam identificar, interativamente, o que estava acontecendo, porém não entenderam muito bem o conceito geométrico desses feixes de retas.

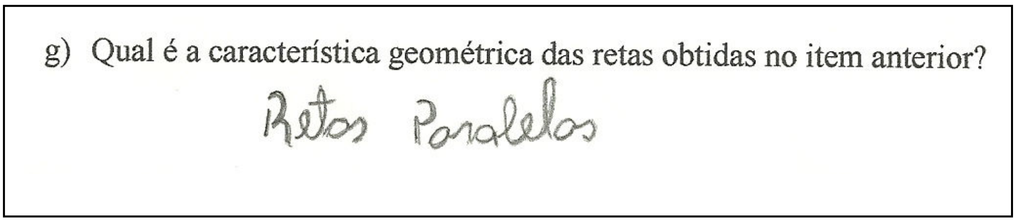
O professor aproveitou essa oportunidade para perguntar aos alunos o que todas aquelas retas tinham em comum?

- Um dos alunos respondeu: "Professor, elas tem a mesma inclinação"

Muito bem, respondeu o professor.

O professor explicou que como todas essas retas possuem a mesma equação $y = ax + b$, com $a \neq 0$ fixo e b variando, temos diante de nós a translação da reta $y = ax + b$. Cada vez que variamos o valor de b, a reta $y = ax + b$ é translada de acordo com a inclinação do coeficiente angular.

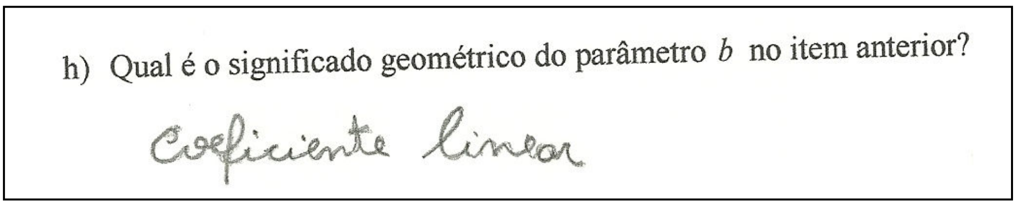
O professor escolheu a dupla D_9 para apresentar diante da turma a sua resposta referente ao item **g)**. Ao apresentá-la, os alunos justificaram de forma correta que as retas eram paralelas. Vejamos a resposta dessa dupla:


g) Qual é a característica geométrica das retas obtidas no item anterior?

Retos Paralelos

Em seguida o professor parabenizou e percebeu que não houve nenhum problema por parte dos alunos em entender a explicação da dupla, pois tinham entendido o conceito de paralelismo.

Finalizando a análise dessa atividade o professor chamou a dupla D_2 para apresentar diante da turma a resposta do item **h)**. Os alunos justificaram que era o coeficiente linear. Vejamos a resposta dessa dupla:


h) Qual é o significado geométrico do parâmetro b no item anterior?

Coeficiente linear

O professor verificou, pelas resposta das outras duplas, que 11 das 12 duplas tinham escrito a mesma coisa. Ele explicou que coeficiente linear é o nome dado ao coeficiente b e não sua interpretação geométrica.

O professor aproveitou essa oportunidade para perguntar aos alunos: Fixem um valor para b e variem o parâmetro a. O que todas essas retas tem em comum?

Um dos alunos respondeu:

- "Professor, elas passam pelo mesmo ponto"

Muito bem, e que ponto é esse?

Depois de alguns instantes, uma aluna respondeu:

- "Ah é o ponto que corta o eixo y"

- Isso mesmo! Respondeu o professor.

O professor aproveitou esse momento e explicou que essa é a interpretação geométrica do coeficiente linear.

Resumo da Análise:

Ao final da atividade, todas as duplas conseguiram criar um conceito definição do que estava acontecendo no gráfico à medida que fixado um coeficiente variávamos o outro e obtíamos um feixe de retas que possuíam um significado geométrico. No entanto esta definição não foi simples de ser criada pelos alunos, pois possuíam pouco conhecimento da linguagem matemática, apresentando assim dificuldade na hora de expor à turma, aquilo que conseguiram "enxergar" intuitivamente.

À medida que interagiam com o mathlet, percebíamos que a parte visual e intuitiva(imagem) estava sendo muito bem desenvolvida por eles, porém a parte definição precisa ser mais trabalhada com outras atividades que favoreçam o desenvolvimento desse aprendizado, como por exemplo, atividades usando o conceito de translação e de rotação, conteúdos que segundo eles, não tinham sido trabalhados na turma.

A partir da análise das produções feitas pelas duplas, o desempenho nessa atividade ocorreu da seguinte forma:

Item **a)** $\longrightarrow$ Sete (07) duplas acertaram-no

Item **b)** $\longrightarrow$ Oito (08) duplas acertaram-no

Item **c)** $\longrightarrow$ Oito (08) duplas acertaram-no

Item **d)** $\longrightarrow$ Sete (07) duplas acertaram-no

Item **e)** $\longrightarrow$ nenhuma dupla acertou, sendo que 11 duplas escreveram que o parâmetro a era o coeficiente angular.

Item **f)** $\longrightarrow$ três(03) duplas acertaram-no,

Item **g)** $\longrightarrow$ Onze(11) duplas acertaram-no

Item **h)** $\longrightarrow$ nenhuma dupla acertou, sendo que 11 duplas escreveram que o parâmetro b era o coeficiente linear.

Após a análise das respostas dos alunos, concluímos que o resultado desta atividade foi satisfatório.

5.6 – ATIVIDADE Nº 6: PAGANDO A CONTA TELEFÔNICA.

Essa atividade se propõe a levar o aluno, a partir de um problema de pagamento de conta telefônica, a entender a relação entre grandezas fixas e variáveis, explorar as idéias de variável, Domínio e Imagem de uma função definida por duas sentenças.

ATIVIDADE Nº6 – Pagando a Conta Telefônica

Suponha que as ligações telefônicas numa cidade sejam apenas locais e que a tarifa telefônica seja cobrada da seguinte forma:

1º. Uma parte fixa que é a assinatura;

2º. **Uma parte variável dependendo do número de minutos que excede 100 minutos mensais.**

Assim uma pessoa que tenha registrado 180 minutos na conta mensal de seu telefone pagará somente 180 – 100 = 80 minutos além da assinatura

Em certo mês o preço de cada minuto excedente era de R$ 0,50 e o da assinatura era de R$ 30,00.

a) Complete a tabela

Minutos Consumidos nesse mês	**Valor pago na Conta Telefônica(em Reais)**
10	
75	
100	
105	
200	
300	
	50,00

b) Considerando as grandezas envolvidas nessa situação, existe alguma relação de dependência entre elas?

c) Utilizando os dados da tabela, Represente graficamente essa relação de dependência

Abra a Cena 01

Nesta cena representamos o plano coordenado. No eixo horizontal representamos a quantidade de minutos consumidos. No eixo vertical o valor em reais a ser pago na conta telefônica. O gráfico dessa relação associa a cada quantidade **x** de minutos consumidos ao valor pago **y** na conta telefônica. A partir dessas informações, responda os itens **d), e), f), g) e h)**

d) Se chamarmos de **x** a quantidade de minutos consumidos e de **y** o valor pago na conta telefônica como poderíamos estabelecer uma relação matemática entre quantidade vendida e salário?

e) Qual é o domínio dessa relação?

f) Qual é o conjunto imagem dessa relação?

g) Um usuário gastou nesse mês 220 minutos, qual foi o valor cobrado na conta telefônica? Que equação você deve resolver para responder a esta pergunta?

h) Quantos minutos foram consumidos num mês em que a conta telefônica foi de R$ 70,00? Que equação você deve resolver para responder a esta pergunta?

5.6.1 – Análise A priori

Nas atividades anteriores, foram exploradas idéias a fim de que os alunos tirassem conclusões satisfatórias que contribuíssem para o ensino aprendizagem do conceito da Função Afim e seus casos particulares, a saber, Função Constante e Função Linear, estudando-as separadamente. O fato é que, uma grande parte das situações do nosso cotidiano não pode ser representada por apenas uma função. Dependendo das variáveis envolvidas, pode ser necessário o uso de mais de uma função, a fim de representar corretamente uma determinada situação problema, como é o caso dos problemas de conta de luz, água, imposto de renda, conta telefônica, etc; e até mesmo, os problemas modelados pela função modular, os quais serão abordados em aulas posteriores.

Introduzido o conceito de Função Constante, $y = b$, $b \in \Re$, Função Linear dada por $y = a \cdot x$, $a \neq 0$ e Função Afim indicada por $y = a \cdot x + b$, com $a, b \in \Re$, cabe-nos expandir esse conceito para o estudo de funções definidas por várias sentenças, que são muito utilizadas em problemas do cotidiano. Para isso desenvolvemos uma atividade sobre o pagamento de uma conta telefônica, que será usada como objeto de aprendizagem, permitindo interação dos alunos com uma situação muito bem conhecida.

O objetivo geral desta Atividade nº 6 é apresentar o conceito de função definida por duas sentenças, estendendo futuramente para mais sentenças, através de atividades realizadas em sala de aula, por meio de exercícios de fixação. Essa atividade visa levar o aluno ao desenvolvimento de uma rica imagem conceitual sobre a utilização conjunta de dois tipos de funções, Constante e Afim, aplicando os conceitos matemáticos aprendidos e desenvolvidos nas atividades anteriores, no laboratório do CEAFA.

Com base nesta atividade, os alunos terão muito trabalho pela frente. Primeiramente eles farão uma análise do enunciado e seu exemplo, observando e descrevendo a forma como é calculada o valor de uma conta telefônica. A partir da resolução dos itens **a)** e **b)**, quando os alunos terão que completar uma tabela de valores e verificar o que ocorre com o valor a pagar da conta telefônica, em relação aos minutos consumidos; espera-se que eles apresentem um conflito inicial. O professor, como mediador, fará apenas os direcionamentos necessários ao bom desenvolvimento da atividade.

Estabelecidos pelos alunos todas as relações entre minutos consumidos e valor a pagar, expostos na tabela de valores, eles passarão à fase seguinte, a resolução do item **c)**. Ela consiste em registrar, por meio de uma representação gráfica, as relações entre as grandezas envolvidas no problema, procurando um padrão a ser estabelecido para cada uma destas relações.

Através da exploração de um mathlet, construído especificamente para essa atividade, esperamos que os alunos percebam, no comportamento do gráfico da Função, cada relação entre as grandezas e procurem um padrão a ser estabelecido para cada uma dessas relações. Vejamos abaixo o mathlet utilizado na resolução dessa atividade.

Figura 5.14 – Mathlet usado na resolução dos itens **d), e), f), g)** e **h)**

Percebida a lei matemática de formação para cada uma das faixas de minutos consumidos, os alunos terão como desafio, responder o item **d)**, que consiste em desenvolver uma lei geral que permita calcular o valor da conta telefônica em relação aos minutos consumidos.

Levaremos em consideração, que os alunos não tiveram nenhuma aula sobre o conceito de função definida por duas sentenças. Para eles, esse tipo de função é uma novidade. Alguns ajustes poderão ser realizados para a solução de dúvidas surgidas na resolução desses itens, sem interferir na resposta dos alunos.

A partir dessas análises, na resolução dos itens **e),** e **f),** pretendemos levantar, novamente, uma discussão sobre a idéia de Domínio e Imagem de uma função. Espontaneamente, em se tratar de minutos consumidos, os alunos, quase sempre, consideram apenas os valores inteiros.

Finalizando a atividade, na resolução dos itens **g)** e **h),** retomamos a discussão sobre o emprego de uma equação do 1º grau na resolução de uma questão. A importância e utilidade deste instrumento matemático, como foi abordado anteriormente, na Atividade nº 4, justificam a sua cobrança, mesmo que os alunos, em primeiro momento, não a utilizem na resolução desses itens.

A partir dessa análise a priori, segue abaixo o desenvolvimento da Atividade nº 6.

5.6.2 – Desenvolvimento da Atividade.

Essa Atividade nº 6 foi realizada no dia 21 / 06 / 2010, das 8h40min às 10h20min no laboratório do CEAFA. Estavam presentes neste dia 32 alunos os quais foram divididos em duplas. Cada dupla ocuparia um micro computador para a realização da atividade. Todas as duplas resolveram essa atividade dentro do prazo previsto de 1h40min.

Após o recebimento da folha de atividade, rapidamente a dupla D_{16} chamou o professor e perguntou se eles estavam no caminho certo, pois algo estava dando errado.

Um dos alunos perguntou: "Professor, é assim que se faz? Por que o resultado está dando uma dízima periódica, R$ 4,444...".

O professor, ao verificar a resposta do aluno perguntou:

- Como você chegou a esse resultado?

O Aluno respondeu: Eu fiz essa regra de três e obtive como resposta o número 4,444.... Segue abaixo a forma de resolução do aluno.

$$\begin{array}{lcl} 180 & \rightarrow & 80 \\ 10 & \rightarrow & x \end{array} \longrightarrow \frac{180}{10} = \frac{80}{x} \longrightarrow 180\,x = 800$$

$$\longrightarrow x = \frac{800}{180} \longrightarrow x = 4{,}444\ldots$$

O professor esclareceu que essa regra de três estava errada, pois eles não tinham compreendido o enunciado do problema. Disse que eles deveriam ler o enunciado novamente a fim de que pudessem verificar onde estava o erro.

É comum esse tipo de comportamento dos alunos nas resoluções de atividades. Em nove anos de profissão, vimos inúmeros alunos que por não lerem o enunciado corretamente, acabam resolvendo a questão completamente errada. Não conseguindo um resultado satisfatório, esses alunos recorrem ao professor, a fim de que ele possa explicar a questão e mostrar o erro. É comum nos depararmos em sala de aula com as perguntas “É assim, professor?”, “Está certo professor? ou “O que eu estou fazendo de errado, professor?”. Nesse tipo de atividade, o professor deve ser um mediador e não um facilitador, pois agindo assim estimulará a criatividade do aluno e seu desenvolvimento cognitivo na interpretação de enunciados dos problemas de matemática, levando-os desenvolverem a capacidade de análise, organização, avaliação, e serem capazes de refletir sobre a necessidade fundamentar suas conclusões.

Após alguns minutos de leitura e interpretação, a dupla D_{16}, ao fazer conexão com a situação do cotidiano, percebeu seu erro avisando professor e seguindo na resolução da atividade.

Após esse momento, pedimos para que os grupos lessem com bastante atenção o enunciado da atividade e que registrassem, por meio de cálculos, os resultados das questões resolvidas.

Durante a realização da atividade, foi visível a facilidade de integração entre os componentes de cada dupla, na realização da tarefa. À medida que a atividade era respondida pelos alunos percebíamos sua integração com o mathlet, principalmente quando da modificação dos parâmetros e interpretação do gráfico do problema.

Notamos que as duplas não tiveram dificuldades em resolverem os itens **a), b),** e **c)**. A maioria das duplas apresentou os registros das resoluções desses itens através de cálculos fundamentados nas quatro Operações Fundamentais da Aritmética. Em relação à construção do gráfico, apenas acharam "estranho", um gráfico apresentar um reta horizontal e depois crescer segundo o gráfico de uma Função Afim. Essa "estranheza" foi esclarecida quando tiveram que resolverem os itens **d), e), f), g) e h)**, pois teriam que utilizar, de forma integrada, o mathlet que apresentava um esboço do gráfico da função. Uma das duplas, a dupla D_3, ao responder a última linha da tabela, apresentou sua solução por meio da resolução de uma equação do 1º grau, respondendo, de forma correta, à questão proposta. Veja a resolução dessa dupla:

$50{,}00 = 30{,}00 + x \cdot 0{,}50$

$50{,}00 - 30{,}00 = 0{,}50\,x$

$20{,}00 = 0{,}50\,x$

$x = 20{,}00/0{,}50$

$x = 40$

R: Não pode ser 40, por causa dos 100 minutos.

Figura 5.15 – Resposta da dupla D_3 ao último item da tabela, na resolução do item **a)**

Esse tipo de resposta ratifica o que Sierpinska observou em seu estudo. Segundo SIERPINSKA [39]:

> *"A habilidade de interpretar um gráfico ou tabela não é nada fácil de se adquirir. É no caso do aprendizado dessa habilidade que os atos fundamentais de compreensão acham as condições favoráveis para ocorrer."(p. 27)*

A maior dificuldade dos alunos foi apresentada na resolução do item **d)** Apesar de saberem estabelecer uma lei de formação para a função referente ao consumo que excede os 100 minutos mensais, a maioria das duplas apresentou, de maneira errada, como resposta a função $y = 0{,}5x + 30$, e não incluíram a

Função Constante $y = 30$, referente ao consumo de até 100 minutos mensais. Faltou a esses alunos uma postura reflexiva e crítica frente à pergunta do item **d)**. Uma vez que não possuam essa postura dificilmente terão êxito na resolução de um problema, como ocorreram com esses alunos.

Somente três duplas responderam corretamente o item **d)**, porém não responderam apresentando uma representação algébrica. Isso é muito bem compreensível, pois, o assunto sobre a função ser definida por duas sentenças, ainda não tinha sido abordado em sala de aula.

5.6.3 – Análise a Posteriori

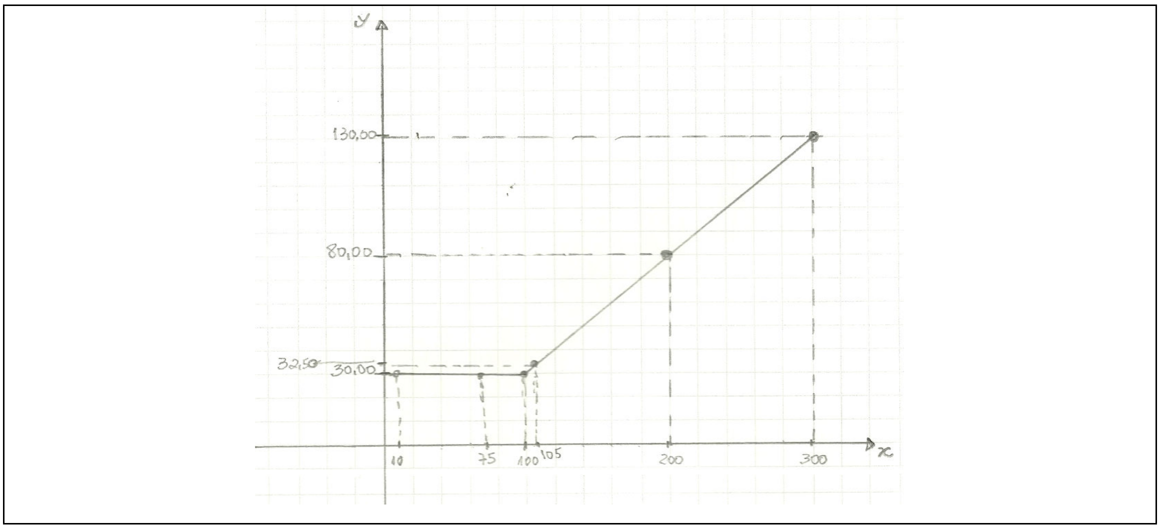
Nesta atividade foram formadas dezesseis duplas de alunos. A fim de facilitar nossa análise, as duplas foram identificadas da seguinte forma: $D_1, D_2, D_3, D_4, ..., D_{15}$ e D_{16}. Foram escolhidas três duplas para apresentarem suas respectivas soluções e analisá-las diante da turma, no próprio laboratório. A análise dessa atividade foi realizada no 3º tempo de aula, composta de 50 minutos, após um intervalo de 20 minutos de recreio da turma. O critério utilizado se deve ao fato delas apresentarem respostas e resoluções diferentes na resolução do item **d)**.

Quanto à resolução dos itens **a), b)** e **c)** a maioria das duplas resolveram usando as quatro operações fundamentais da aritmética. Em relação ao esboço gráfico, apesar de algumas imperfeições devido a erros na escala, conseguiram atingir o objetivo. Diante dessas respostas destacamos algumas delas a seguir:

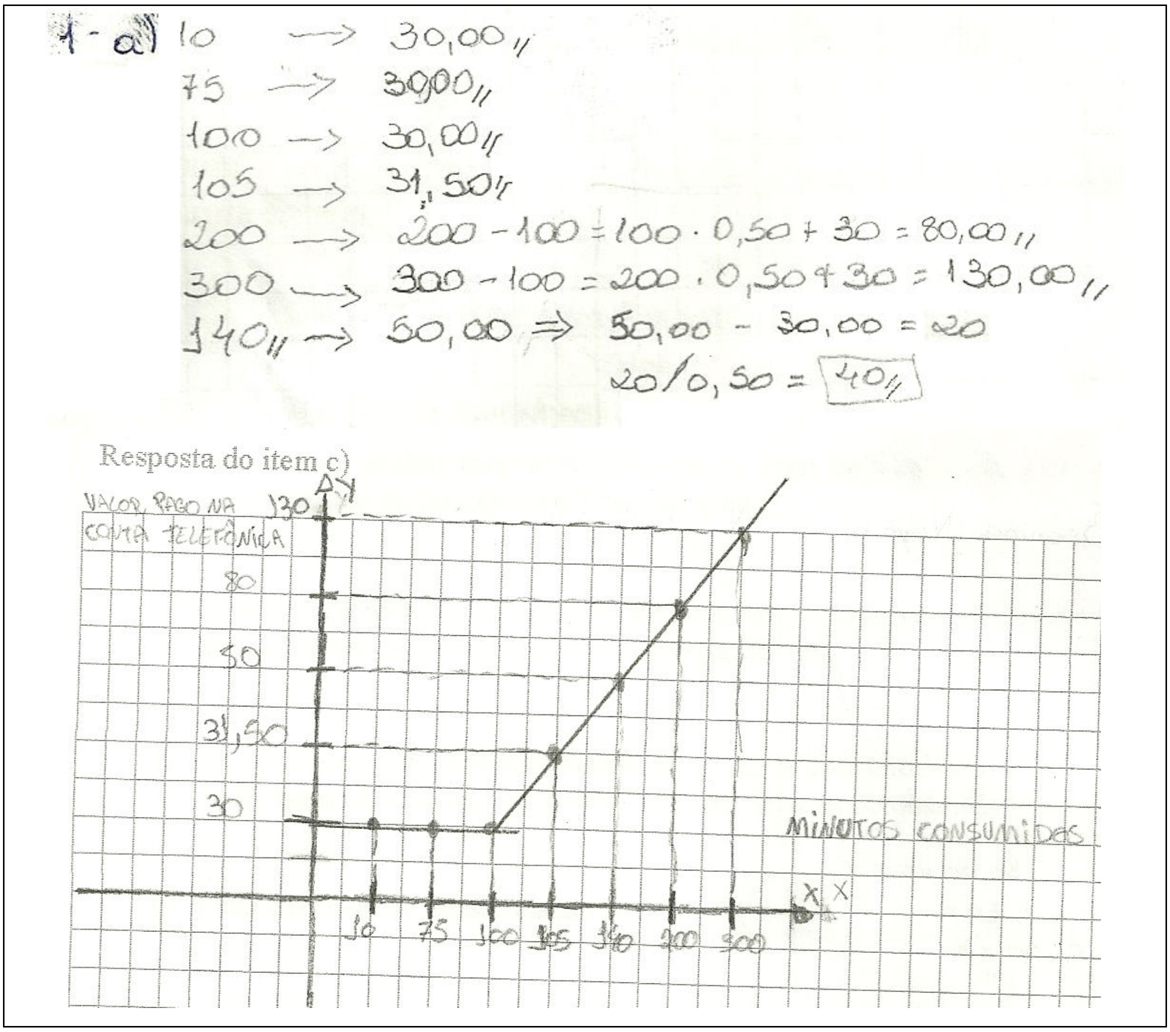
Dupla D_7

a) Complete a tabela

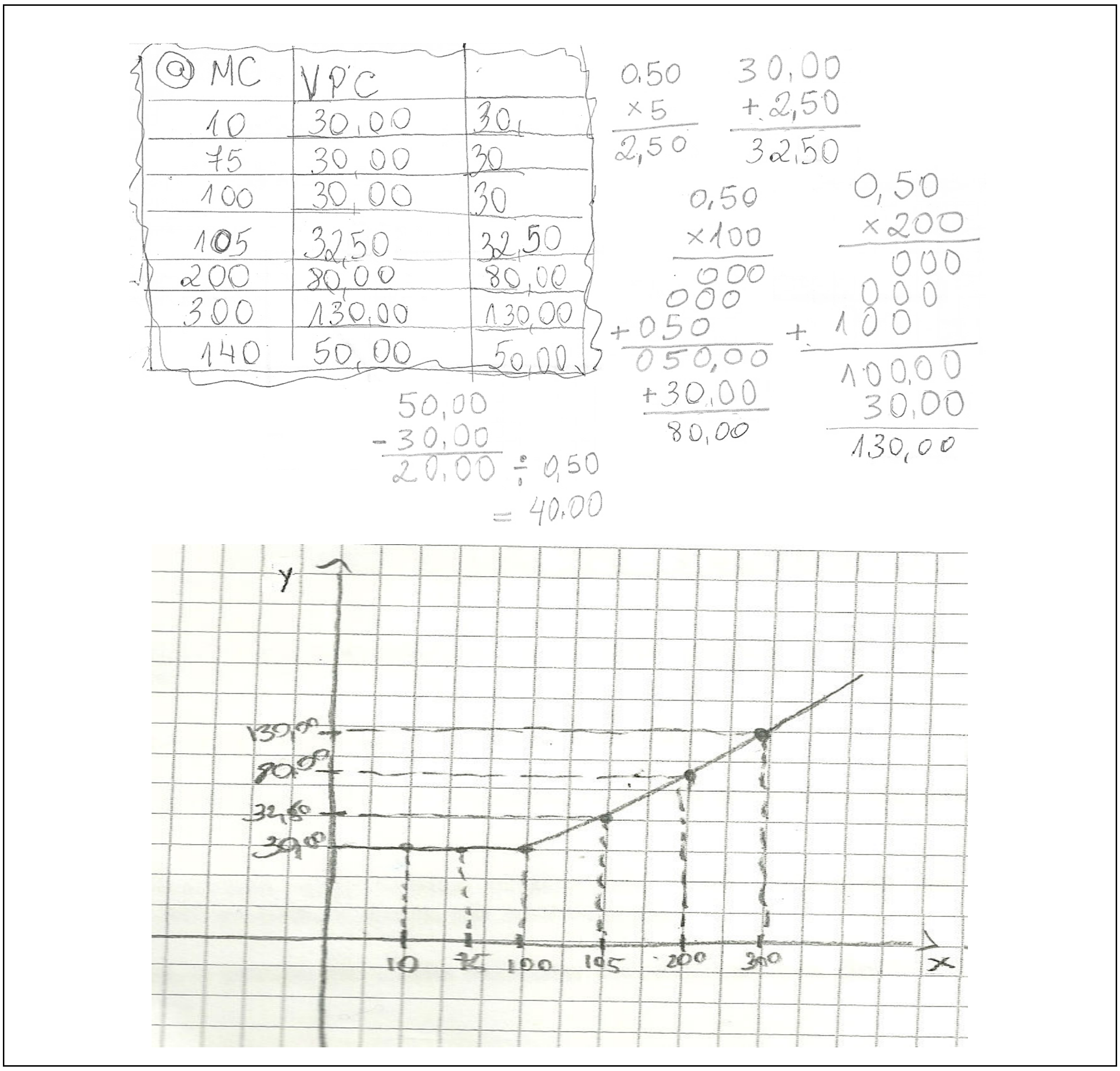
Minutos Consumidos nesse mês x	Valor pago na Conta Telefônica(em Reais) y
10	30,00
75	30,00
100	30,00
105	32,50 → 105−100=5.0,50 + 30,00
200	80,00 → 200 − 100=100.0,50 + 30,00
300	130,00 → 300 − 100 = 200.0,50 + 30,00
140	***50,00*** − 30,00 = $\frac{20,00}{0,50}$ + 100


y
130,00
80,00
32,50
30,00
10
75
100
105
200
300
x

Dupla D_{11}


1 - a) 10 → 30,00
75 → 30,00
100 → 30,00
105 → 31,50
200 → 200 - 100 = 100 · 0,50 + 30 = 80,00
300 → 300 - 100 = 200 · 0,50 + 30 = 130,00
140 → 50,00 ⇒ 50,00 - 30,00 = 20
20/0,50 = 40
Resposta do item c)
VALOR PAGO NA CONTA TELEFÔNICA
130
80
50
31,50
30
MINUTOS CONSUMIDOS
10
75
100
105
140
200
300
X
Y

Dupla D_8



Em relação à resolução do item **d)**, as resposta apresentadas pelas três duplas selecionadas foram:

Dupla D_8	**Dupla** D_9	**Dupla** D_{15}
$y = 0,50 \cdot x + 30$	$Y = 30,00$ → até 100 minutos $Y = 30,00 + x \cdot 0,50$ → acima de 100 minutos	Até 100 minutos → $Y = 30,00$ Acima de 100 minutos → $Y = 0,50(x-100) + 30,00$

Ao ser questionado sobre o porquê da resposta do item d) ser $y = 0{,}5x + 30$ um dos alunos da dupla D_8 respondeu:

– "Professor, percebemos que a partir de 100 minutos o valor pago era sempre o número dos minutos multiplicado por 0,5 mais 30."

O professor então pediu para esse grupo substituir $x = 120$ na lei da função e comparasse com o valor obtido através da cena, no computador. Após conferência dos alunos os resultados eram os seguintes:

Resolução:

Substituindo $x = 80$

$y = 0{,}5 \cdot x + 30$

$y = 0{,}5 \cdot 120 + 30$

$y = 60 + 30$

$y = 90$

O valor a ser pago por um consumo de 120 minutos será

de R$ 90,00.

O professor perguntou: O valor é o mesmo?

Um aluno da dupla D_8 respondeu:

- "Não. Mas professor, para calcular o valor a ser pago num consumo de 120 minutos agente tem que diminuir primeiro por 100, para depois substituir na fórmula".

O professor então explicou que existiam dois erros nessa resolução. Em primeiro lugar esta lei de formação estava errada. Era preciso corrigir, na lei da função, esse cálculo de "subtrair por 100" para o consumo acima de 100 minutos mensais.

Um dos alunos da dupla D_{15} , pedindo a palavra disse:

- Professor é só fazer $0{,}5 \cdot (x - 100)$ na lei da função ao invés de $0{,}5x$ e teremos a resposta correta que é $y = 0{,}5 \cdot (x - 100) + 30$.

Muito bem, disse o professor ao aluno. Mas ainda falta algo, pois essa lei matemática está incompleta. Como podemos obter por essa fórmula o valor a pagar por um consumo de 80 minutos. Tentem substituir $x = 80$ e confiram com a cena que vocês têm no computador. Após conferência dos alunos os resultados eram os seguintes:

Resolução:

Substituindo $x = 80$

$$y = 0{,}5 \cdot (x - 100) + 30$$
$$y = 0{,}5 \cdot (80 - 100) + 30$$
$$y = 0{,}5 \cdot (-20) + 30$$
$$y = -10 + 30$$
$$y = 20$$

O valor a ser pago por um consumo de 80 minutos será

de R$ 20,00.

Após efetuar os cálculos um dos alunos da dupla D_8 respondeu:

- "É professor! O resultado é totalmente diferente e errado, pois, uma pessoa que consome 80 minutos teria que pagar R$ 30,00, que é o valor da assinatura."

Muito bem, agora vocês podem observar que essa lei de formação corresponde somente aos minutos consumidos acima de 100 minutos.

Então como ficaria a lei de formação para os minutos consumidos até 100 minutos mensais?

Um dos alunos da dupla D_{15} respondeu: " $y = 30$, que é uma função Constante, que estudamos na aula anterior."

O professor parabenizou esse aluno por conseguir unir o conceito de função Constante explorado na atividade anterior, fazendo a conexão com essa atividade. Segundo o professor esse aluno conseguiu atingir o objetivo da proposta da atividade.

A segunda resposta a ser analisada foi a da dupla D_9 . Ao ser questionado sobre o que estava faltando na resposta, um dos alunos da dupla respondeu:

- "Professor, somente está faltando fazer $x - 100$ e exibir como resposta a fórmula $y = 0{,}5 \cdot (x - 100) + 30$".

O professor percebeu que eles tinham compreendido a importância do termo $x - 100$ na lei da função referente ao consumo acima dos 100 minutos mensais.

Faltava então analisar a resposta da dupla D_{15} . Ao serem questionados sobre como obtiveram, como resposta correta do problema, um dos alunos da dupla respondeu:

"Professor, pelo enunciado e pelo gráfico nós verificamos que até 100 minutos de consumo o valor a pagar era sempre o mesmo, R$ 30,00. A partir de 100 minutos todos os valores, a mais, deveriam ser multiplicados por 0,50 e mais 30 reais. Veja nossa conta atrás da folha. Para chegar a essa fórmula, nós substituímos os valores dos minutos por x e chegamos à reposta $y = 0{,}5 \cdot (x - 100) + 30$. Daí foi só juntar as duas informações, separando cada caso."

Muito bem, disse o professor. Todos estão de parabéns, pois nós acabamos de achar a lei de uma função definida por duas sentenças.

Um dos alunos perguntou: "o que é isso?"

São funções que precisam de duas ou mais leis de formação, onde cada lei representa cada caso, separadamente. Geralmente representamos esses tipos de funções através de chaves, em que cada caso é representado por uma propriedade ou restrição. No nosso caso, poderíamos escrever da seguinte forma:

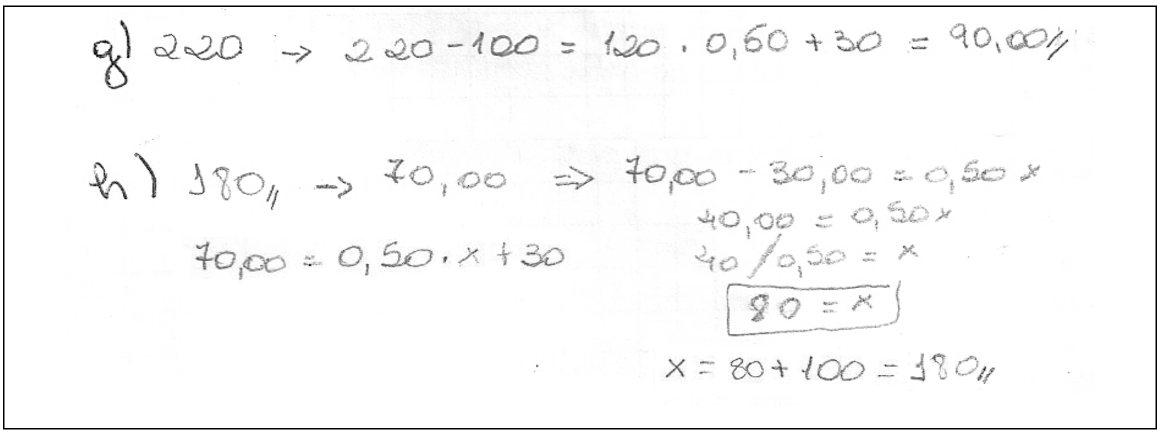
$$y = \begin{cases} 30\ , & se \quad x \leq 100 \\ 0{,}5\left(x - 100\right) + 30\ , & se \quad x > 100 \end{cases}$$

Onde $y = 30$ é a lei de formação cuja propriedade é $x \leq 100$ e $y = 0{,}5(x - 100) + 30$ é a lei de formação cuja propriedade é $x > 100$.

Sabemos que o processo de construção da expressão algébrica de uma função definida por várias sentenças, a partir de uma situação problema, não é tão simples, muito menos para alunos que não tinham nenhuma imagem conceitual desse processo, pelo fato desse conteúdo não ter sido abordado em sala de aula. Por esse motivo, alguns grupos demoraram muito tempo para criar essa imagem conceitual sendo que somente três grupos conseguiram apresentar uma resposta correta ao item **d)** do problema. A partir plenária feita no laboratório, juntamente com a explicação do professor, toda a turma entendeu o processo de construção dessa expressão matemática, pedida nesse item.

Passamos a analisar a resposta dada por essas três duplas para os itens **g)** e **h)**. As respostas apresentadas por elas foram:

Dupla D_8


g) 220 -> 220 - 100 = 120 . 0,50 + 30 = 90,00//

h) 180// -> 70,00 => 70,00 - 30,00 = 0,50 x
40,00 = 0,50 x
70,00 = 0,50 . x + 30
40 / 0,50 = x
$\boxed{80 = x}$
x = 80 + 100 = 180//

Dupla D_9

g) $Y = 30,00 + 120 \circ 0,50 = 60,00 + 30,00 = 90,00$

h) $70,00 = 30,00 + x \cdot 0,50$
$70,00 - 30,00 = 0,50x$
$0,50x = 40,00$
$x = 40,00/0,50 = 80$

R: 180 minutos.

Dupla D_{15}

g) $220 \rightarrow 90,00$
$\hookrightarrow Y = 0,50(220-100) + 30,00$

$Y = 0,50(220-100) + 30,00$
$Y = 120 \circ 0,50 + 30$
$Y = 0,60 + 30$
$Y = 90,00$

h) $70,00 \rightarrow 180$
$\hookrightarrow 70,00 = 0,50(x-100) + 30,00$

$70 - 30 = 0,50(x-100)$
$40 \div 0,50 = x - 100$
$x = 80 + 100 = 180$

Notemos, pelas respostas dos alunos que, o fato de duas dessas duplas terem resolvido de forma errada, o item **d)**, acabaram apresentando uma resposta errada para a equação. Vale ressaltar que todas as três duplas encontraram a resposta certa à primeira pergunta, porém ao representar por uma equação a resolução da questão, somente a dupla D_{15} conseguiu exibir a equação correta.

Analisando os registros das duplas D_8 e D_9, vemos que os alunos fundamentaram suas respostas na equação $y = 0,5x + 30$, que, como já vimos anteriormente, não representa a lei da função referente ao problema. No item **g)**, esses alunos tiveram que diminuir 220 por 100, antes mesmo de substituir na equação da lei da função. Já no item **h)**, vemos que eles tiveram, que somar 100, ao final da equação, a fim de chegar ao resultado correto. Após análise dessas respostas, podemos concluir que os alunos resolveram um sistema de duas equações, a saber:

$$g)\begin{cases} x = 220 - 100 \\ y = 0{,}5 \cdot x + 30 \end{cases} \qquad h)\begin{cases} x = \overline{x} + 100 \\ 70 = 0{,}5 \cdot \overline{x} + 30 \end{cases}$$

E, portanto, não alcançaram o objetivo total da questão.

Analisando os registros da dupla D_{15} vemos que os alunos fundamentaram suas respostas na equação $y = 0{,}5(x - 100) + 30$. O fato deles terem acertado o item **d)** contribuiu significativamente para o êxito nesses dois itens.

Resumo da Análise:

Ao final da atividade a maioria dos alunos apresentou uma maior desenvoltura na resolução dos itens propostos, associada à compreensão do conceito de função definida por duas sentenças e seus componentes. Observamos que houve uma melhora dos alunos no desenvolvimento da argumentação em torno de suas próprias hipóteses e estratégias. Isso só foi possível por dois motivos: Em primeiro lugar por que houve um grande comprometimento e interação entre os componentes de cada dupla. Isso contribuiu de forma significativa para a compreensão dos conceitos, procedimentos e estratégias matemática usadas na resolução de cada item do problema. Em segundo lugar, por que o professor, como mediador, atuou direcionado-os a encontrarem suas próprias estratégias de resoluções, sem interferir nas suas respostas.

Após a plenária realizada no laboratório do CEAFA, a maiorias das duplas conseguiram criar um conceito definição da função definida por duas sentenças. Inicialmente, não foi fácil. Percebemos alguns alunos um pouco confusos principalmente na resolução do item d). Esse conflito é justificado, pois, esse assunto ainda não tinha sido abordado em sala de aula, sendo para eles algo completamente novo.

À medida que as duplas interagiam com o mathlet, percebíamos que a parte visual e intuitiva(imagem), da maioria das duplas, estava sendo muito bem desenvolvida, e os conflitos causados na resolução do item **d)** sendo superados.

Nessa atividade três duplas se destacaram, conseguindo aplicar os conceitos matemáticos aprendidos e desenvolvidos nas atividades anteriores, resolvendo, de maneira correta, todos os itens da atividade.

A partir da análise das produções feitas pelas duplas, o desempenho nessa atividade ocorreu da seguinte forma:

ITENS	**Nº DE DUPLAS QUE ACERTARAM**
a)	**14**
b)	**14**
c)	**14**
d)	**03**
e)	**13**
f)	**13**
g)[8]	**03 totalmente** **10 parcialmente**
h)[9]	**03 totalmente** **08 parcialmente**

Em suma, considero satisfatório o resultado apresentado pelos alunos na resolução dessa atividade.

[8] Somente três duplas responderam corretamente as duas perguntas da questão. Sendo que das 13 duplas restantes, apenas 10 conseguiram acertar a primeira pergunta que se refere ao valor pago da conta telefônica para um consumo de 220 minutos.

[9] Somente três duplas responderam corretamente as duas perguntas da questão. Sendo que das 13 duplas restantes, apenas 08 conseguiram acertar a primeira pergunta que se refere ao número de minutos consumidos para um valor pago de R$ 70,00 de uma conta telefônica.

6 – APLICAÇÃO DOS TESTES.

Terminada a aplicação das seis atividades na turma 1001, a escola entrou em recesso de meio de ano. Após retorno do recesso, a equipe pedagógica, juntamente com os professores do CEAFA, em reunião de planejamento para o 2º semestre, resolveram intensificar atividades e avaliações que preparassem os alunos para a prova do Exame Nacional de Ensino Médio – ENEM, e consequentemente para o vestibular de outras instituições públicas ou privadas.

Na execução desse planejamento, nós, professores de matemática lotado no CEAFA, resolvemos, dentro de cada conteúdo, aplicar em todas as turmas de Ensino Médio, simulados e testes com questões de diversos concursos nacionais a fim de prepará-los para o ENEM. Esses simulados e testes seriam aplicados inclusive nas turmas de 1º ano, que mesmo não precisando fazer um exame vestibular, seriam preparados, para após três anos de estudo, terem um embasamento teórico e prático necessário a realização de qualquer exame a nível nacional.

A partir dessa proposta da escola juntamente com todo o corpo docente, resolvemos aplicar, nesse primeiro momento, dois testes, nas duas turmas de 1º ano, a saber, 1001 e 1013; turmas essas, em que o professor regente é o mesmo que participou do projeto de pesquisa aqui relatado. Ressaltamos aqui que a turma 1001 participou da realização das atividades no laboratório do CEAFA. Já a turma 1013 não realizou nenhuma atividade integrada a alguma ferramenta computacional.

Após o planejamento de uma semana, em que discutimos junto com o professor regente dessas turmas, as questões a serem aplicadas por meio desses dois testes, e o tempo necessário para a sua realização, marcamos a aplicação dos testes da seguinte maneira:

Na turma 1001, os testes seriam aplicados nos dias 16/08/2010 e 23/08/2010, das 9h às 10h em sala de aula.

Na turma 1013, os testes seriam aplicados nos dias 16/08/2010 e 23/08/2010, das 15h às 16h em sala de aula.

Em cada turma os alunos receberiam a folha com o enunciado das questões e uma folha em branco para realizarem os cálculos. Não seria permitida nenhuma consulta ou uso de calculadoras ou qualquer aparelho eletrônico. Apesar da maioria das questões apresentarem múltiplas escolhas, solicitamos que os alunos registrassem os cálculos ou justificativas, pois caso contrário a questão, mesmo assinalada corretamente, não seria validada.

Usamos esse tipo de estratégia a fim de levá-los a realizarem, de maneira séria, esses dois testes, não dando brechas para os famosos “chutes” nas questões de múltiplas escolhas. Lembramos aos alunos que esse tipo de posicionamento era necessário para que pudéssemos verificar o aprendizado deles em relação ao conteúdo abordado em sala de aula.

Os dois testes continham questões que abordavam apenas o conteúdo de Função Afim. Após esses testes, outros foram aplicados nessas turmas, abordando conteúdos posteriormente abordados, mas que não que sua abordagem não seriam necessários nessa pesquisa.

A seguir descreveremos algumas situações didáticas que ocorreram na aplicação desses dois testes.

6.1 – TESTE A

O primeiro teste, aqui identificado por **Teste A** era composto de cinco questões, sendo quatro de múltiplas escolhas e uma discursiva. Segue baixo o enunciado das questões que foram aplicadas:

1 – (UFCG-PB) Pelos estudos de hidrostática, sabe-se que a pressão na superfície da água no mar é de 1 atm(atmosfera). Sabendo-se também que a pressão da água no mar varia com a profundidade e que cada 5 m de profundidade a pressão sofre um acréscimo de 0,5 atm, a expressão que dá a pressão **p** (em atmosferas) em função da profundidade **a** (em metros) é:

a) $p = 0{,}5a + 1$
b) $p = 0{,}5a$
c) $p = 1 - 0{,}5a$
d) $p = 0{,}1a$
e) $p = 0{,}1a + 1$

2 – (VUNESP) A unidade usual de medida para a energia contida nos alimentos é kcal(quilocaloria). Uma fórmula aproximada para o consumo diário de energia(em kcal) para meninos entre 15 e 18 anos é dada pela função $f(h) = 17h$, onde h indica a altura em cm e, para meninas nessa mesma faixa de idade, pela função $g(h) = 15{,}3h$. Paulo, usando a fórmula para meninos, calculou seu consumo diário de energia e obteve 2975 kcal. Sabendo-se que Paulo é 5 cm mais alto que sua namorada Carla (e ambos tem idade entre 15 e 18 anos), o consumo diário de energia para Carla, de acordo com a fórmula, em kcal, é:

a) 2501
b) 2601
c) 2770
d) 2875
e) 2970

3 – (UESPI) No dia dois do mês de abril de certo ano, o dólar custava R$ 2,02 e a partir daí seu valor em relação ao real começou a sofrer uma valorização linear constante por dia, Istoé, o dólar começo a se valorizar diariamente segundo uma função afim do tempo(dia do mês), até atingir seu valor máximo no dia 18 de abril; estabilizando-se nesse valor até o final do mês. Se no décimo dia do referido mês o dólar estava cotado a R$ 2,08, é correto afirmar que o valor do dólar no último dia do referido mês foi de:

a) R$ 2,11
b) R$ 2,12
c) R$ 2,13
d) R$ 2,14
e) R$ 2,18

4 – (UFMT) Em uma cidade operam duas empresas de telefonia fixa. Admita que a empresa **A** cobra uma taxa fixa de R$ 30,00 mais R$ 0,15 para cada minuto de ligação local ou interurbana, que a empresa **B** cobra uma taxa fixa de R$ 20,00 mais R$ 0,20 para cada minuto de ligação local ou interurbana. Nessas condições, é mais vantajoso optar pela empresa **A**, em planos de, no mínimo:

a) 200 minutos
b) 180 minutos
c)150 minutos
d)120 minutos
e)100 minutos

5 – (UERJ) O gráfico adiante representa, em bilhões de dólares, a queda das reservas internacionais de um determinado país no período de julho de 2000 a abril de 2002.

Admita que, nos dois intervalos do período considerado, a queda de reservas tenha sido linear. Determine o total de reservas desse país, em bilhões de dólares, em maio de 2001.

As questões deste teste têm por objetivo propiciar a consolidação do conceito de Função Afim, que foi abordado durante os meses de abril a julho de 2010, tanto na turma 1001, que realizou as atividades no laboratório do CEAFA, quanto na turma 1013. Queremos também verificar se os alunos compreenderam o conceito da Função Afim e sabem aplicar esse conceito na resolução de situações problemas, justificando suas respostas.

6.1.1 – Análise do Teste A

Na primeira questão, a pesar de fácil, provocou-nos algumas surpresas. Um grande número dos alunos da turma 1001 deduziu se tratar de uma questão estritamente de proporcionalidade. A maioria deles resolveu por meio de uma regra de três obtendo uma resposta errada do problema, pois não levaram em consideração a pressão inicial, na superfície da água que é de 1 atm. Já na turma 1013, percebemos que a maioria dos alunos não entendeu a proposta da questão, respondendo $p = 0,5a + 1$ como resposta final. Para esses alunos, foi visível a dificuldade encontrada, pois se quer entenderam que abaixo da superfície da água, a pressão aumenta linearmente.

Vejamos a resposta do aluno Sergio da turma 1001

$$\overset{y_1}{0{,}5\ \text{atm}} \text{ ——— } \overset{x_1}{5\ \text{m}}$$
$$\overset{y_2}{1\ \text{atm}} \text{ ——— } \overset{x_2}{10\ \text{m}}$$
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 0{,}5}{10 - 5} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1$$

$$f(5) = 0{,}1a + b$$
$$0{,}5 = 0{,}1 \cdot 5 + b$$
$$0{,}5 = 0{,}5 + b$$
$$0{,}5 - 0{,}5 = b = 0$$
$$P = 0{,}1a + b$$
$$p = 0{,}1a + 0$$
$$P = 0{,}1a$$

Percebemos que o aluno conseguiu identificar a relação entre as duas grandezas, mas cometeu um erro, não considerando a pressão inicial de 1 atm, obtendo assim uma reposta errada à questão.

Embora ele não tenha acertado a questão, sua resposta mostra que ele tem bem definido, em sua imagem conceitual, o conceito de grandezas proporcionais.

A aluna Mariana da turma 1013 foi uma das poucas que expressou de maneira correta sua resposta. Vejamos:

$$0{,}5\ \text{atm} \longrightarrow 5\ \text{m}$$
$$p \longrightarrow a$$
$$5p = 0{,}5a$$
$$p = \frac{0{,}5a}{5} \qquad p = 0{,}1a + \underbrace{1}_{\text{parte fixa}}$$

Observamos pela resposta de Mariana que ela conseguiu entender perfeitamente a questão, não se esquecendo da pressão inicial de 1 atm na superfície da água.

Na segunda questão, percebemos dois tipos de erros comuns entre alguns alunos. O primeiro erro foi o de substituir o valor de 2975 kcal na lei da função errada, trocando as fórmulas. O segundo foi somar 5 cm a resposta da primeira equação, não consideram que a altura encontrada era a de Paulo que já era 5cm mais alto que sua namorada e portanto dever-se-ia subtrair 5 cm do resultado encontrado.

Vejamos a resposta da aluna Laís, da turma 1001, que resolveu corretamente a questão:

$$17h = 2975 \qquad 15{,}3\,h =$$
$$h = \frac{2975}{17} \qquad 15{,}3 \cdot 170 =$$
$$h = 175 \qquad \boxed{Kcal = 2601}$$
$$175 - 5 = 170$$

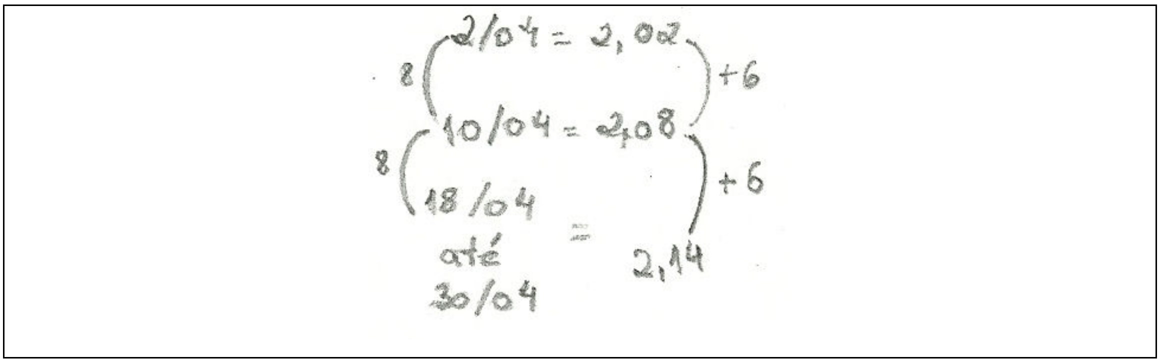
O maior índice de erro desta questão ocorreu na turma 1013. Vejamos a resposta de Wagner, um dos alunos dessa turma.

$$17H = 2975 \qquad g(H) = 180$$
$$H = \frac{2975}{17} \qquad g(H) = 15{,}5 \cdot 180$$
$$H = 175 + 5 \qquad g(H) = 2754$$
$$H = 180 \qquad \approx 2770$$

Vemos que por aumentar de 175 cm para 180 cm a altura de Paulo, o aluno obteve um resultado que não correspondia a nenhuma alternativa, forçando uma das respostas. Esse procedimento é comum acontecer com alunos, que não encontrando a solução do problema e para não terem trabalho de refazerem a questão “chutam uma das alternativas”

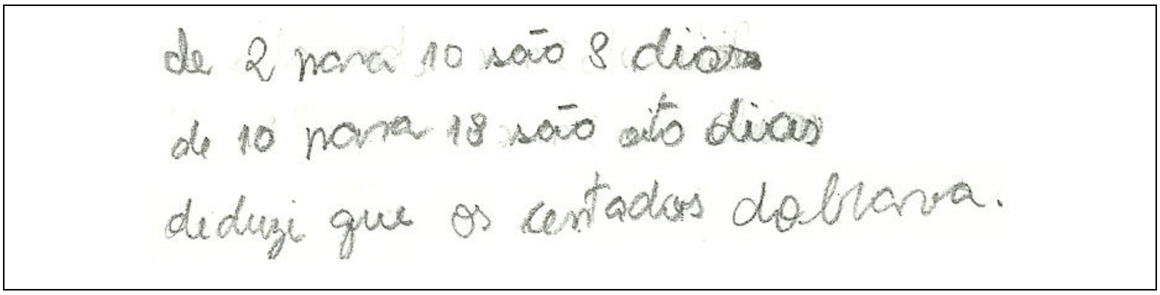
Na questão 3 percebemos que não houve grandes dificuldades por parte dos alunos em resolverem o que foi proposto. A estratégia usada por eles, em geral, foi verificar que se tratava de um crescimento linear e aplicar o conceito de proporcionalidade.

Vejamos a resposta da aluna Luiza da turma 1001 na resolução dessa questão:



Percebemos através da resposta de Luiza que ela, não só atingiu o nosso objetivo na questão, mas também formou uma rica imagem conceitual, da propriedade fundamental das grandezas proporcionais.

Outros alunos também perceberam o que Luiza percebeu. Vejamos a resposta de Jéssica da turma 1013:



Na questão 4 verificamos o maior índice de acertos nas duas turmas. A estratégia usada por quase todos os alunos que acertaram essa questão foi encontrar a equação de cada empresa de telefonia, e igualá-las, a fim de encontrar o número mínimo de minutos. Outros alunos substituíram nas equações de cada telefonia, os valores das alternativas fazendo uma comparação, chegando assim ao resultado esperado.

Vejamos a resposta da aluna Laís da turma 1001:

$$30+0,15x = 20+0,20x.$$
$$30-20 = 0,20x - 0,15x.$$
$$10 = 0,05$$
$$x = \frac{10}{0,05} \quad x = 200$$

Vejamos o raciocínio da aluna Brenda, da turma 1013, na resolução desta questão:

A	B
$0,15x + 30,00$	$0,20x + 20,00$
$f(200) = 0,15 . 200 + 30,00 = 60,00$	$f(200) = 0,20 . 200 + 20,00 = 60,00$
$f(180) = 0,15 . 180 + 30,00 = 57,00$	$f(180) = 0,20 . 180 + 20,00 = 56,00$

A última questão era a mais difícil desse teste. Não é pra menos. Ela foi a que apresentou o maior percentual de erro em cada uma das turmas. A turma 1001 teve um rendimento maior do que a 1013. Muitos alunos conseguiram atingir o objetivo da questão, que era analisar as variações das grandezas envolvidas e aplicar os conceitos aprendidos sobre a Função Afim. Já na turma 1013, a maioria dos alunos não resolveu essa questão. Os poucos que conseguiram resolvê-la usaram a equação geral da Função Afim dada por $f(x) = ax + b$, fazendo as devidas substituições.

Vejamos a resposta da aluna Any da turma 1001, para essa questão:

$$\begin{array}{r} 35,5 \\ -22,0 \\ \hline 13,5 \end{array} \quad 13,5 \div 12 = 1,125 \quad \begin{array}{r} 1,125 \\ \times 10 \\ \hline 0000 \\ 1125 \\ \hline 11,250 \end{array} \quad \begin{array}{r} 35,500 \\ 11,250 \\ \hline 24,250 \end{array}$$

Percebemos que a aluna Any conseguiu atingir o objetivo da questão usando para resolvê-la o conceito da propriedade fundamental das funções Afim, isto é, que acréscimos iguais na variável independente correspondem a acréscimos iguais na variável dependente.

Segue abaixo a resposta da aluna Leticia, da turma 1013, para essa questão:

$$a = \frac{22 - 35,5}{12 - 0} = \frac{-13,5}{12} = -1,125$$

$$f(x) = -1,125 \cdot 0 + b$$

$$35,5 = 0 + b$$

$$b = 35,5$$

$$f(x) = ax + b$$

$$f(10) = -1,125 \cdot 10 + 35,5$$

$f(10) = 24,25$ bilhões de dólares

Em relação ao desempenho de cada turma na resolução desse teste temos o seguinte resultado:

Turma 1001

QUESTÕES	PERCENTUAL DE ACERTOS
Questão 1	60%
Questão 2	66%
Questão 3	89%
Questão 4	97%
Questão 5	51%

Turma 1013

QUESTÕES	PERCENTUAL DE ACERTOS
Questão 1	12%
Questão 2	20%
Questão 3	64%
Questão 4	72%
Questão 5	12%

A partir dessa análise percebemos que a turma 1001, que usou os mathlets de forma integrada na resolução de algumas atividades, teve um rendimento superior ao rendimento da turma 1013. Esta conclusão não se deve somente aos números de acertos, de cada uma das turmas, mas também se deve ao fato de verificarmos que, as respostas da maioria dos alunos da turma 1001, apresentam algumas representações da Função Afim que foram desenvolvidas no laboratório do CEAFA.

Um dos exemplos apresentados acima ratifica essa conclusão. Na resolução da quinta questão, a aluna Letícia da turma 1013, uma das poucas que respondeu essa questão, resolveu-a de forma algébrica, seguindo um modelo que fora desenvolvido na sala de aula. Já a aluna Any, da turma 1001, resolveu de forma diferenciada essa mesma questão, usando para esse fim a propriedade fundamental das funções Afins. O uso dessa propriedade foi bastante trabalhado no laboratório do CEAFA, com a ajuda das cenas interativas, desenvolvidas a partir do Descartes. Dessa forma vemos que as atividades realizadas no CEAFA contribuíram significativamente para o enriquecimento da imagem conceitual dos alunos, bem como o desenvolvimento de suas potencialidades e serem capazes de transformar os diversos registros de um mesmo objeto, no nosso caso da Função Afim, sabendo operar com ele. Esse era um dos nossos objetivos no inicio dessa pesquisa.

6.2 – TESTE B

O segundo teste, aqui identificado por **Teste B** era composto de quatro questões, sendo duas de múltiplas escolhas e duas discursivas com dois itens a serem respondidos, cada uma. Segue baixo o enunciado das questões que foram aplicadas:

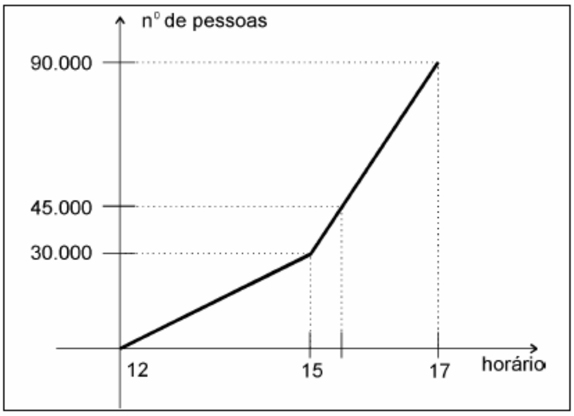
1 – **(UFRN)** A academia "Fique em Forma" cobra uma taxa de inscrição de R$ 80,00 e uma mensalidade de R$ 50,00. A academia "Corpo e Saúde" cobra uma taxa de inscrição de R$ 60,00 e uma mensalidade de R$ 55,00.

a) Determine as expressões algébricas das funções que representam os gastos acumulados em relação aos meses de aulas, em cada academia.

b) Qual academia oferece menor custo para uma pessoa que pretende "malhar" durante um ano? Justifique, explicitando seu raciocínio.

2 – (UERJ) Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos as 12 horas e ate as 15 horas entrou um numero constante de pessoas por minuto. A partir desse horário, abriram-se mais 3 portões e o fluxo constante de pessoas aumentou.

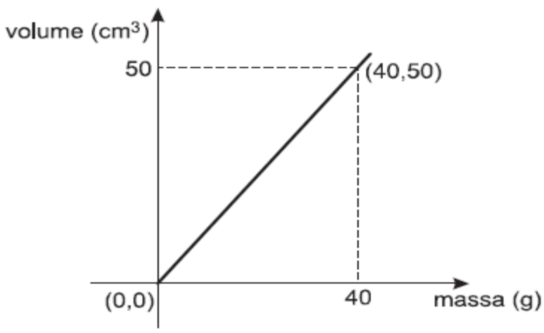
Os pontos que definem o numero de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico abaixo:



Quando o numero de torcedores atingiu 45.000, o relógio estava marcando 15 horas e:

(A) 20 min (B) 30 min (C) 40 min (D) 50 min

3 – (VUNESP-SP) Apresentamos abaixo o gráfico do volume do álcool em função de sua massa, a uma temperatura fixa de 0º C.

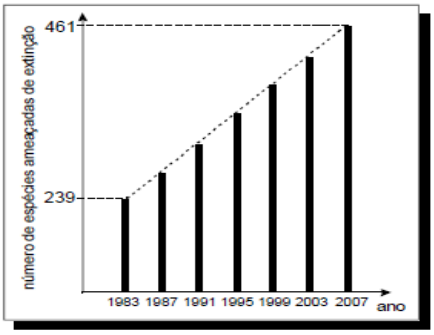


Baseado nos dados do gráfico determine:

a) A lei da função apresentada no gráfico;

b) Qual é a massa (em gramas) de 30 cm^3 de álcool?

4 – (ENEM) O gráfico abaixo, obtido a partir de dados do Ministério do Meio Ambiente, mostra o crescimento do número de espécies da fauna brasileira ameaçadas de extinção.



Se mantida, pelos próximos anos, a tendência de crescimento mostrada no gráfico, o número de espécies ameaçadas de extinção em 2011 será igual a

a) 465

b) 493

c) 498

d) 538

e) 699

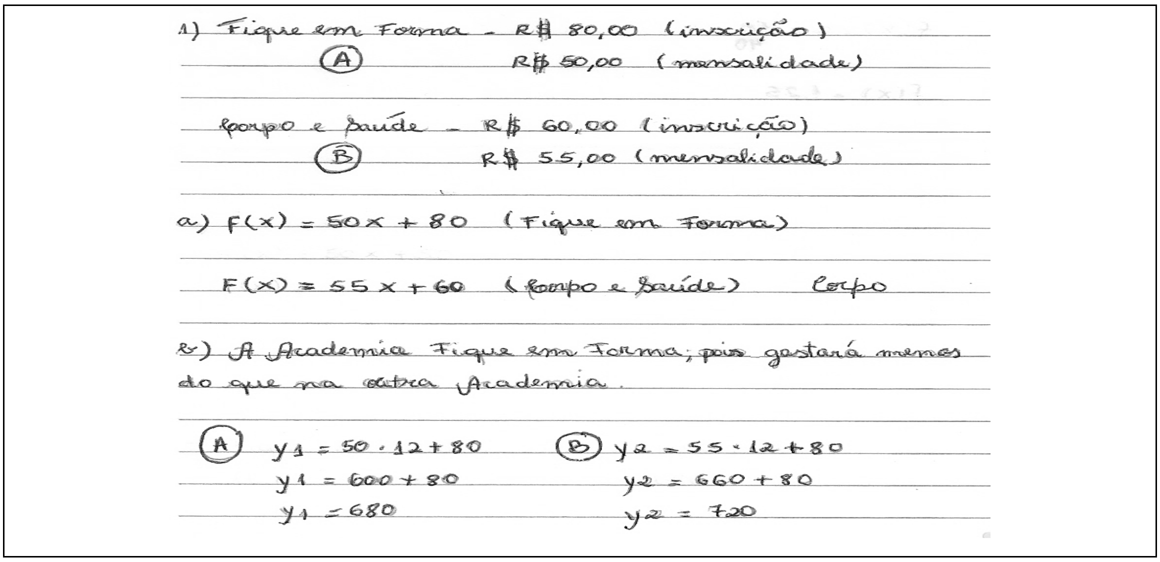
Queremos também, da mesma forma que o Teste A, verificar se os alunos compreenderam o conceito da Função Afim e sabem aplicar esse conceito na resolução de situações problemas, justificando suas respostas.

6.2.1 – Análise do Teste B

A primeira questão é composta de dois itens. No item **a)** esperamos que os alunos sejam capazes de identificar qual é a parte fixa e qual é a parte variável dos gastos acumulados em relação aos meses de aula em cada academia, exibindo a lei matemática que representa função gastos em cada uma delas. No item **b)**, a partir de uma análise crítica dos alunos, esperamos que eles consigam descobrir qual das academias oferece o menor custo para quem quiser malhar durante um ano. Este tipo de raciocínio precisa ser bastante trabalhado com os alunos, a fim de que eles possam decidir sobre as vantagens ou desvantagens da compra de um produto, avaliar o custo de um produto em função da quantidade, calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários, etc.

A partir da produção dos alunos verificamos pouca dificuldade na realização dessa questão. A maioria dos alunos resolveu de forma satisfatória os dois itens dessa questão. Àqueles que erraram, em sua maioria, apresentaram soluções que continham inversões da parte fixa com parte variável no item a), isto é, por exemplo para a academia Fique em Forma ao invés de apresentarem a solução $y = 50x + 80$, ou equivalente, apresentavam como solução $y = 80x + 50$ ou equivalente, para o item a). Consequentemente o item b) seria respondido de maneira errada.

Vejamos a resposta da aluna Laís, da turma 1001, para essa questão:


1) Fique em Forma - R$ 80,00 (inscrição)
(A) R$ 50,00 (mensalidade)

Corpo e Saúde - R$ 60,00 (inscrição)
(B) R$ 55,00 (mensalidade)

a) $F(x) = 50x + 80$ (Fique em Forma)

$F(x) = 55x + 60$ (Corpo e Saúde) Corpo

b) A Academia Fique em Forma; pois gastará menos do que na outra Academia.

(A) $y_1 = 50 \cdot 12 + 80$ (B) $y_2 = 55 \cdot 12 + 80$
$y_1 = 600 + 80$ $y_2 = 660 + 80$
$y_1 = 680$ $y_2 = 720$

Verificamos que a aluna fez, de forma correta, a distinção entre parte fixa, que neste caso é a inscrição, e a parte variável, que neste caso é a mensalidade.

Vejamos a resposta da aluna Beatriz da turma 1013, para essa questão:

1) a) A $y = 80{,}00\,x + 50{,}00 \rightarrow$ Fique em forma

B $y = 60{,}00\,x + 55{,}00 \rightarrow$ Corpo e Saúde

b)

A	B
$y = 80{,}00\,x + 50{,}00$	$y = 60{,}00\,x + 55{,}00$
$y = 80{,}00 \cdot 12 + 50{,}00$	$y = 60{,}00 \cdot 12 + 55{,}00$
$y = 960{,}00 + 50{,}00$	$y = 720{,}00 + 55{,}00$
$y = 1010{,}00$ //	$y = 775{,}00$ //

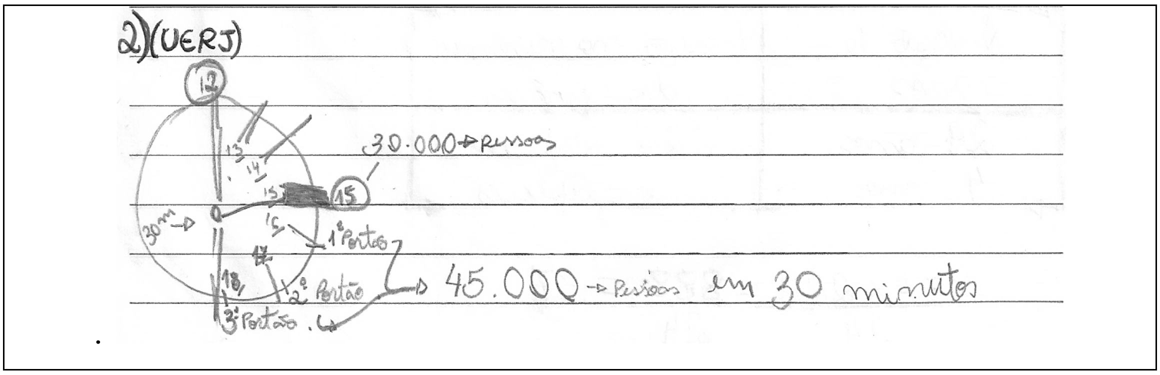
A academia Corpo e Saúde oferece o menor custo para a pessoa que pretende malhar durante um ano.

Observamos que para esse aluno não ficou claro qual era a parte fixa e a parte variável do problema. Em geral, aluno que não consegue fazer essa diferenciação é porque ainda existe um obstáculo que ele ainda não conseguiu superar. De acordo com SIERPINSKA[39]:

> *"Muito frequentemente, ao observar variações, os estudantes têm dificuldades de identificar o que estar variando ou o que são os objetos sendo modificados que eles processam. Eles não analisam a situação, mas a tornam como um todo, como um fenômeno como a chuva ou a neve."(p. 9).*

Na segunda questão, percebemos dois tipos de estratégias muito comuns presente nas respostas dos alunos. Um grande número dos alunos que acertou essa questão resolveram-na usando regra de três. Outra parte usou o modelo algébrico da Função Afim, dado por $f(x) = ax + b$, achando os coeficientes a e b, resolvendo corretamente a questão. Verificamos também, na turma 1013, um alto índice de alunos, cerca de 48%, que não resolveram a questão, deixando-a em branco.

O que mais nos surpreendeu foi a resolução do aluno Victor da turma 1001. Vejamos a sua resolução:

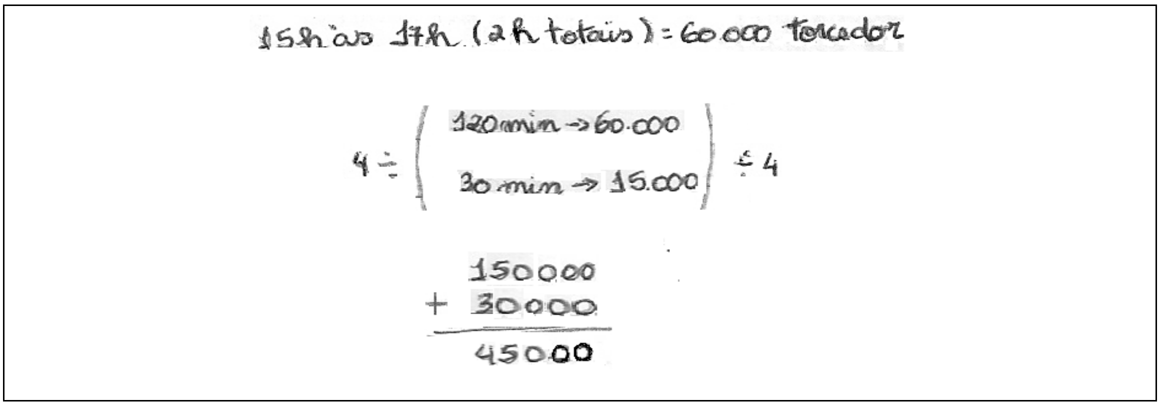


É notório observar que esse aluno atingiu o objetivo para essa questão. Ao invés de reproduzir um modelo de resolução, semelhante ao usado anteriormente em outras questões, esse aluno, usou uma conversão da propriedade fundamental das Funções Afins, para uma representação por meio de um "relógio", conseguindo assim êxito na sua resposta.

De acordo com DUVAL[10] realizar uma conversão, não é só mudar o modo de tratamento é, também, explicar as variáveis pertinentes aos registros mobilizados numa dada conversão.

Esse aluno fez uma associação entre o tempo e o número de torcedores representando o gráfico da função por meio de um relógio, fazendo as devidas adaptações.

Vejamos outra forma de resolução apresentada pela aluna Carolina da turma 1013:

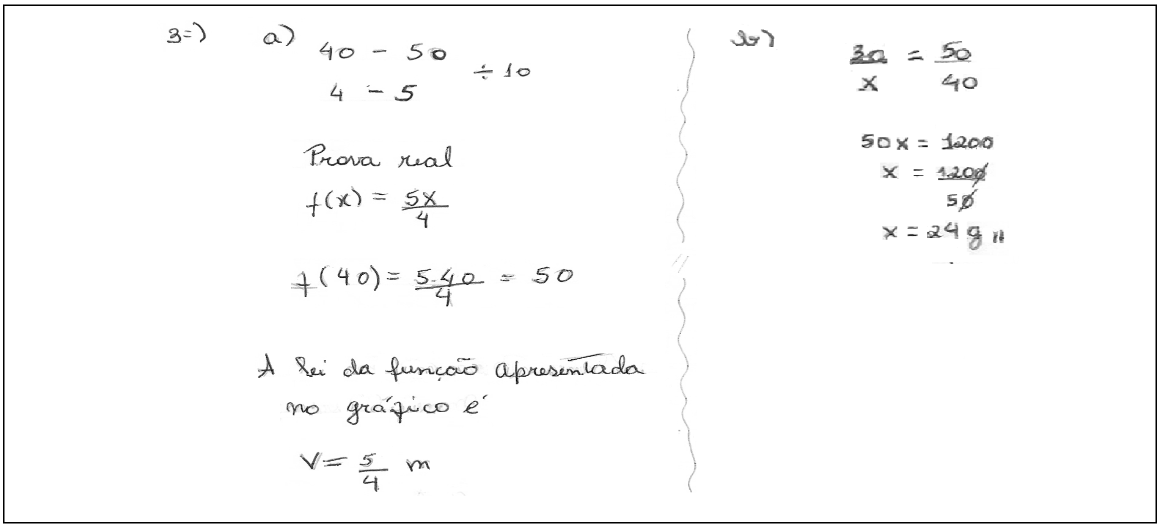


Vemos na resolução dessa aluna, a imagem de conceito que ela desenvolveu sobre proporcionalidade. A partir desse método de resolução, ela achou a taxa de crescimento do número de torcedores a cada 30 minutos, obtendo o tempo necessário para atingir o número de torcedores, pedido na questão, que era de 45.000 torcedores.

A questão 3 é composta de dois itens. No item **a)** esperamos que os alunos sejam capazes de identificar um problema de proporcionalidade, exibindo a lei de uma Função Linear. No item **b)**, esperamos que eles, a partir de uma exploração qualitativa das relações entre as duas grandezas envolvidas no problema, cheguem a resposta correta da questão.

Após a análise das produções dos alunos verificamos que, em sua maioria, conseguiram atingir o objetivo. A estratégia utilizada por eles, na resolução dessa questão foi a regra de três. Não é por acaso que eles usaram esse tipo de procedimento, pois se tratava de um problema de proporcionalidade.

Vejamos a resolução da aluna Thaiza da turma 1001, para essa questão:


3=) a) 40 − 50 ÷ 10
4 − 5

Prova real

$f(x) = \frac{5x}{4}$

$f(40) = \frac{5 \cdot 40}{4} = 50$

A lei da função apresentada no gráfico é

$V = \frac{5}{4} m$

b) $\frac{30}{x} = \frac{50}{40}$

$50x = 1200$

$x = \frac{120\cancel{0}}{5\cancel{0}}$

$x = 24$ g

Vemos que após chegar ao resultado da lei de uma Função Linear, através de propriedades das proporções, a aluna tirou a prova real, verificando assim se quilo que tinha achado era válido. Essa aluna está adquirindo o que chamamos de "maturidade matemática", que é a capacidade argumentar sobre a veracidade ou não da solução de uma questão, através de demonstrações ou provas reais. Isso deve ser sempre incentivado pelo professor de matemática a fim de criar um aluno critico, capaz de avaliar suas próprias resoluções.

Vejamos a resolução da aluna Brenda da turma 1013, para essa questão:

3 a) $F(x) = ax + b$

$F(x) = 40.a + 0 = 50$

$F(x) = 40a = 50$

$F(x) = a = \frac{50}{40}$

$F(x) = 1{,}25x$

b) $F(x) = 1{,}25.x$

$1{,}25x = 30$

$x = \frac{30}{1{,}25} = 24$

24 gramas.

Percebemos pelo registro da aluna que, apesar dela ter usado uma forma de resolução puramente centrada na expressão $f(x) = ax + b$, ela identificou que esse problema trata-se de uma função linear, pois substituiu $b = 0$, achando a lei da função representada pelo gráfico.

A Questão 4 trata-se de uma questão do ENEM. Nesta questão, os alunos deveriam analisar a variação de tempo e a variação do número de espécies ameaçadas descrita pelo gráfico. A partir daí, usando a propriedade fundamental da Função Afim, ou mesmo a expressão geral da Função Afim, dada por $f(x) = ax + b$, ou equivalente, chegar ao resultado pedido. A maioria dos alunos da turma 1001 não teve grandes dificuldades de resolver essa questão, porém um grande número, cerca de 48% dos alunos da turma 1013, assim como aconteceu na questão 2, não resolveu essa questão. Percebemos que questões contextualizada, baseadas nas resoluções de problemas, precisam ser mais trabalhadas com a turma 1013, pois pelas questões analisadas até aqui, verificamos que a imagem conceitual da maioria dos alunos ainda está deficitária.

Vejamos a resposta do aluno Victor da turma 1001:

4)(ENEM)

$2007 - 1983 = 24$ e $461 - 239 = 222$.

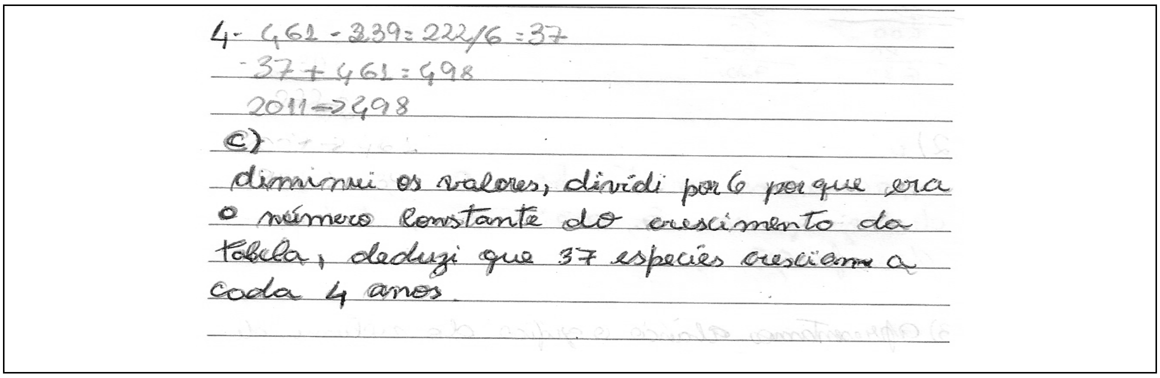
Variação de anos	Variação no número de espécies
24 anos	222 espécies
4 anos	x espécies

$x = \frac{4 \times 222}{24} = \frac{888}{24} = 37$

Em 2011, 2007 + 4, o número de espécies ameaçadas de extinção será $461 + 37 = 498$

Percebemos pela resolução desse aluno que ele atingiu o objetivo traçado para essa questão. Além de conseguir identificar a variação das grandezas descrita no gráfico, por meio de uma regra de três, determinou a taxa de crescimento do gráfico, respondendo, em seguida, de maneira correta a pergunta da questão.

A aluna Jéssica da turma 1013 foi uma das poucas que expressou de maneira correta sua resposta. Vejamos:


4- 461 - 239 = 222/6 = 37
37 + 461 = 498
2011 => 498
c)
diminui os valores, dividi por 6 porque era o número constante do crescimento da tabela, deduzi que 37 espécies cresciam a cada 4 anos

Percebemos na análise da resolução da aluna que assim como Victor, ela atingiu o objetivo traçado para essa questão. Foi notória a forma como a aluna, através de operações aritméticas, resolveu essa questão identificando o conceito de taxa de crescimento, presente no estudo da Função Afim.

Em relação ao desempenho de cada turma na resolução desse teste temos o seguinte resultado:

Turma 1001

QUESTÕES	**PERCENTUAL DE ACERTO**
Questão 1 – item a)	**93%**
Questão 1 – item b)	**93%**
Questão 2	**75%**
Questão 3 – item a)	**81%**
Questão 3 – item b)	**87%**
Questão 4	**78%**

Turma 1013

QUESTÕES	PERCENTUAL DE ACERTO
Questão 1 – item a)	**64%**
Questão 1 – item b)	**64%**
Questão 2	**40%**
Questão 3 – item a)	**48%**
Questão 3 – item b)	**50%**
Questão 4	**32%**

A partir dessa análise percebemos que o índice de acertos dos alunos da turma 1001, nesse segundo teste, superou nossa expectativa. Além disso, o que mais nos deixou satisfeito foi a forma como a maioria dos alunos desenvolveram uma rica imagem conceitual do conceito de proporcionalidade e Função Afim, na resolução das questões. Essa evolução se deve aos dois meses e meios de atividade realizada no laboratório, com a integração dos mathlets, e que proporcionou um enriquecimento da imagem conceitual desses alunos.

Quanto à turma 1013, a partir dessas análises, vemos que o índice de acertos nesses dois testes foi muito abaixo do esperado. Previamos que pudesse ser inferior ao da turma 1001, mas não tanto. Muitos alunos apresentavam soluções confusas, outras incompletas e outros em branco para algumas questões. Em sua maioria, apresentavam uma fraca imagem conceitual.

7 – CONCLUSÕES

Ao finalizar esta pesquisa vemos que o ensino de conteúdos matemáticos por meio do uso de programas educacionais, quando bem planejado e executado, proporciona resultados muito satisfatórios. Nosso objetivo foi apresentar uma proposta de ensino-aprendizagem~~,~~ por meio da aplicação de uma Sequência Didática, que de forma integrada ao uso dos mathlets, proporcionasse aos alunos uma visão intuitiva sobre o conceito de variável e dependência a fim de resolverem situações problemas que são modeladas por uma função Afim.

A partir das análises preliminares de nossa pesquisa, verificamos que os alunos, em geral, tinham muitas dificuldades em estabelecer uma relação de dependência entre as variáveis do problema, e também de generalização dos resultados. Para muitos deles, trabalhar com funções era apenas realizar operações algébricas, substituindo o valor de uma incógnita, na lei da função e encontrando o valor da outra, por meio da resolução de uma equação.

Isso ficou claro, no desenvolvimento das duas primeiras atividades. Nos itens em que se pediam "a construção da expressão (lei) matemática do problema", muitos deles não conseguiam compreender que fenômenos que ocorrem com regularidade poderiam ser generalizados e representados por meio de uma expressão algébrica. Essa expressão algébrica seria a lei matemática correspondente à função que modela o problema.

À medida que os alunos interagiam com os mathlets, na resolução das atividades, percebíamos que começavam a entender as relações das dependências entre as variáveis, desenvolvendo a capacidade de generalização. Interativamente, essas cenas serviram para ajudá-los a desenvolverem suas imagens conceituais, adquirindo a abstração necessária para encontrar a lei matemática correspondente à função que modela o problema.

Apoiados nos estudos de TINOCO[42] vemos que a relação de dependência entre grandezas variáveis deve ser salientada sempre que possível. No entanto, é bom lembrar que, numa relação funcional, uma das grandezas (a variável dependente) é perfeita e univocamente determinada pela variação da outra (variável independente). Esta característica das funções deve surgir lentamente ao longo do processo, para que durante este processo de construção, a imagem de conceito dos alunos seja enriquecida. É preciso também que os alunos desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, que justifiquem a validade da lei matemática, registrando-os.

Quanto aos resultados obtidos por meio das atividades, apresentamos alguns elementos de resposta para as questões desta pesquisa:

1ª) **Quais seriam as implicações educacionais decorrentes da inserção dessas inovações tecnológicas no ensino da matemática?**

Esta questão de pesquisa é trabalhada em todas as atividades de nossa pesquisa. Uma das características das atividades propostas era abrir possibilidades de diferentes abordagens, da função Afim, na resolução de problemas, com o objetivo de proporcionar aos alunos, uma melhora no ensino aprendizagem de função Afim.

As produções dos alunos mostram-nos que as dificuldades encontradas inicialmente, em estabelecer uma relação de dependência entre variáveis conduzindo a possíveis generalizações, evoluiu gradativamente, levando os alunos a adquirirem um entendimento mais sólido dessas relações. À medida que interagiam com os mathlets, os alunos amadureciam as idéias de dependência, variável, domínio, imagem, representação gráfica e analítica da função afim, desenvolvendo estratégias de resolução de cada item das atividades.

Neste sentido, os resultados nos mostram que a integração dos mathlets, como inovações tecnológicas, no ensino da função afim, levou os alunos a uma autonomia crescente na realização das atividades. As situações propostas nas atividades levaram-nos a adquirirem uma maior experiência com álgebra, com a resolução de equação do 1º grau, com o uso da propriedade fundamental das grandezas proporcionais e da função Afim, favorecendo o uso de vários procedimentos de resolução. Estes vários procedimentos estiveram presentes na realização dos testes, levando-os a obter um resultado satisfatório nos mesmos.

A segunda questão que colocamos, "**Como o professor pode agregar a utilização de recursos tecnológicos, às suas ações da prática de ensino de Matemática, com vistas à melhoria da aprendizagem dessa área de**

conhecimento?" está relacionada à preparação do professor para desenvolver atividades integradas a uma ferramenta computacional.

Como nos ensina PAIXÃO[26], o uso dos programas educacionais no ensino de matemática não é milagroso. É necessário que o professor desenvolva materiais consistentes, que permitam certa "adaptação", a fim de garantir a eficácia da aplicação dessas atividades, permitindo que elas, sejam adaptáveis à realidade de cada turma. Vale salientar que os mathlets que utilizamos, por serem reconfiguráveis de modo simples, permitem adaptações, no momento da própria aula. Além disso, é preciso que as situações propostas nas atividades sejam elaboradas levando em consideração o nível da turma, o tempo proposto para o desenvolvimento da atividade; sejam organizadas respeitando-se o nível crescente das atividades e favoreçam a investigação matemática e a exposição das idéias do aluno.

Nesta pesquisa, a utilização dos mathlets, no ambiente de ensino-aprendizagem, favoreceu o ensino dos conteúdos matemáticos. Essa ferramenta não foi utilizada apenas como solução de problemas matemáticos, mas como uma ferramenta de comunicação e interação.

Em relação à continuidade desse trabalho, sentimos a necessidade de aprofundar alguns aspectos mais detalhadamente, como as noções de domínio e imagem, destacando a diferença entre estes conjuntos e seus elementos, na análise gráfica de uma função Afim.

Embora esse trabalho tenha sido elaborado com vistas ao ensino de função Afim, considera-se imprescindível desenvolver um trabalho semelhante, com alunos de outras séries ou até mesmo com outros conteúdos, tais como, estudo das funções quadráticas, exponencial, logarítmicas, das funções trigonométricas, da geometria analítica, geometria espacial, etc, pois as diversas ferramentas disponibilizadas pelo construtor Descartes nos permite desenvolver uma série de aplicativos mathlets com tais objetivos.

Por acreditar que o uso de recursos computacionais e da Internet pode contribuir significativamente para a abordagem de conteúdos matemáticos e auxiliar no processo ensino-aprendizagem, esperamos que este trabalho sirva de apoio e incentivo aos professores que desejam inovar, isto é, deixar a prática conservadora de aulas expositivas e utilizar as modernas ferramentas que nos são oferecidas. Se a tecnologia está aí não deve se ignorada, mas explorada adequadamente a fim de auxiliar no processo de ensino-aprendizagem de matemática.

Referências Bibliográficas

[1] BARON, M.E. (1985). Curso de história da matemática: Origens e Desenvolvimento do Calculo. Tradução de José Raimundo Braga – Brasília, DF: Editora Universidade de Brasília.

[2] BARROS, J. P. D.; D'AMBRÓSIO, U. (1988). *Computadores, escola e sociedade*. São Paulo, Scipione Ltda.

[3] BIAGGI, G. V.(2000). Uma nova forma de ensinar matemática para futuros administradores: uma experiência que vem dando certo. Ciências da Educação. Lorena-SP, v. 2, n.2. p.103-113.

[4] BOYER, C. B.(1996). História da Matemática, Tradução de Elza F. Gomide, Editora Edgard Blücher Ltda. São Paulo. 1996.

[5] BOYER, C. B.,(1992) Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula, Tradução de Higino H. Domingues – São Paulo, SP: Editora ATUAL.

[6] BRASIL.(2002). Secretaria do Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEM,

[7] BROUSSEAU, G. (1986) "Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques", RDM, vol.7, nº 2.

[8] CROSS, K. P. (1996). Classroom Research: Implementing the Scholarship of Teaching. American Journal & Pharmaceutical Education, v. 60, p. 402-7.

[9] DALL'ASTA, R. J. e BRANDÃO, E. J. R. (2003) Análise da Transposição Didática em Softwares Educacionais - Faculdade de Educação – UPF.

[10] DUVAL, R. (2003). Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. Aprensizagem em Matemática: registros em representação semiótica. São Paulo: Papirus, p. 11-33.

[11] DANTE, L. R. (2007) Matemática Contexto & Aplicações. Rio de Janeiro – RJ. Editora Ática.

[12] EVES, H. (2004). Introdução à História da Matemática, Tradução de Higino H. Domingues – Campinas, SP: Editora UNICAMP.

[13] GIRALDO,V. (2004). Descrições e conflitos computacionais: O caso da Derivada. COOPER – UFRJ. pp. 6-15.

[14] GIRALDO, V., CARVALHO, L.M. & TALL, D. O.,(2003). Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, vol. 1, pp. 153-164, Rio de Janeiro, Brasil. (disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html. Acesso em outubro de 2010

[15] HOWSON, A. G. & KAHANE, J. P. (Eds). (1986). The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. ICMI Study Series. London: Cambridge University Press.

[16] IEZZI, G. e MURAKAMI, C.(2004) Fundamentos de Matemática Elementar: Conjunto e Funções. Ed. São Paulo-SP: Atual.

[17] JOMA (2009). *Journal of online mathematics and its applications*. Disponível em http://www.joma.org Acesso em março de 2009.

[18] LÉVY, P. (1995). *As tecnologias da inteligência - o futuro do pensamento na era da informática*. Editora 34. Rio de Janeiro.

[19] MACHADO, R. M., et al. (2002). Exploração e Análise de Softwares Educacionais de Domínio Público no Ensino da Matemática. In Bienal da SBM – BH, LEM / IMECC / UNICAMP– Campinas - SP.

[20] MATTOS, F. R. P. (2007). *Roteiros de colaboração para o software Tabulæ: estratégias didáticas para um modelo de aprendizagem colaborativa apoiada por computador à distância em geometria*. Tese D. Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

[21] MENDES, Maria Helena Monteiro.(1994) "O conceito de função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau", Dissertação de Mestrado, PUC-Rio de Janeiro.

[22] MORAES, T. G. (2006). Um modelo para colaboração síncrona em geometria dinâmica. Tese M. Sc., Instituto de Matemática e Núcleo de Computação Eletrônica da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

[23] MOREN, E. B. S., SANTOS, A. R. (2011). Uma reflexão sobre ações de formação de professores no Brasil. Revista Iberoamericana de Educación(online), v. 55, p. 11.

[24] MURUCI , M. L.; GIRALDO, V. e GUIMARÃES, L. C. (2008). Funções reais: possibilidades em um ambiente de geometria dinâmica. In *Anais do IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática — HTEM*, Rio de Janeiro.

[25] PAIXÃO, A. C.; DE OLIVEIRA, R. (2008). A Investigação matemática em sala de aula: uma Perspectiva inovadora, Anais de Eventos da UFSCar, v. 4, p. 767.

[26] PAIXÃO, V. (2008). *Mathlets: Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática*. Dissertação de Mestrado em Ensino de Matemática. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Brasil. Disponível em http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/02%20Victor%20Paixao.pdf

[27] PALIS, G. L. R. (2008). Introduction to Calculus: Integrating Maple in regular classes and examinations. In: 11th International Conference on Mathematics Education (ICME 11), 2008, Monterrey. Proceedings do Topic Study Group 5: New developments and trends in mathematics education at tertiary level.

[28] PALIS, G. L. R. (2008). Relato de uma implementação de uma disciplina de Cálculo na Arquitetura. Boletim GEPEM (USU), v. 52, p. 85-104.

[29] PALIS, G. L. R. (2007). O potencial de atividades centradas em produções de alunos no desenvolvimento profissional de professores de Matemática. In: **VIII Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sudeste**. Vitória.

[30] PALIS, G. L. R. (2006) Uma aproximação à questão da integração curricular de matemática com arquitetura. Anais do III SIPEM.

[31] PALIS, G. L. R. (1991). Uma experiência de utilização de computadores, como ferramenta didática, em curso inicial de equações diferenciais ordinárias. Atas do 17º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, RJ.

[32] PEREIRA, V. M. C1. (2009). Calculo no Ensino Médio: Uma proposta para o problema da Variabilidade, Rio de Janeiro, RJ, UFRJ/IM.

[33] PONTE, J. P.; BROCARDO, J. ; OLIVEIRA, H. (2005). A aula de investigação. In:_.Investigações matemáticas na sala de aula. 1. ed. Belo Horizonte-MG: Autêntica. p. 25-53.

[34] PONTE, J. P.(2002). A investigação sobre a prática como suporte de conhecimento e da Identidade profissional do professor. In. M. L. Cabral(Org.). A universidade e a formação de professores(PP. 37-42). Faro: Universidade do Algarve.

[35] PONTE, J. P., & CANAVARRO, P. (1997). Matemática e novas tecnologias. Lisboa: Universidade Aberta.

[36] PROYECTO DESCARTES (1999). Página inicial do projeto. Disponível em http://descartes.cnice.mec.es Acesso em janeiro de 2010.

[37] SANTOS, A. R., & PAIXÃO, V. (2008) Mathlets como ambientes corporificados no ensino de matemática. In Anais do IV HTEM - Rio de Janeiro - IM-UFRJ.

[38] SANTOS, A. R., KUBRUSLY, R. & BIANCHINI, W. (2004). Mathlets: Applets Java para o ensino de Matemática. In C. A. Moura, H. Noronha, J. A. Fossa, L.M. Carvalho e V. Giraldo (Eds), *História e Tecnologia no Ensino da Matemática. Volume 2*. (pp. 323-336). Rio de Janeiro, Brasil: Editora Ciência Moderna.

[39] SIERPINSKA, A. (1992). Theoretical perspectives for development of the function concept. In G. Harel e E. Dubinsky, eds., *The Concept of Function – Aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes and Report Series. Mathematical Association of America.

[40] TALL, D. e BAKAR, M. (1991). Students' mental prototypes for functions and graphs. volume 1, pp. 104 – 111.

[41] TALL, D. e VINNER, S. (1981) Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, **12** 151– 169. Disponível em http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html. - Acesso em outubro de 2010

[42] TINOCO, L.A.A (1998). Construindo o Conceito de Função no 1º Grau. IM – UFRJ. Projeto Fundão – SPEC/PADCT/CAPES

[43] VALENTE, J.A. (1999). *O Computador na Sociedade do Conhecimento*, p. 131-156, Campinas, SP, UNICAMP/NIED.

[44] VINNER, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D.O. Tall (Ed.) Advanced Mathematical Thinking, 65-81, Dordrecht: Kluwer.

[45] YOUSCHKEVITCH, A. P. Le concept de fonction jusqu´au milieu du XIXe siècle.In:Fragments d´historie des Mathématiques, Brochure A.P.M. E. P. n. 41, p.7- 67, 1981.