

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

REPRESENTAÇÃO VISUAL E PROVA MATEMÁTICA

LEONARDO ANDRADE DA SILVA

Rio de Janeiro

2011



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática

Representação Visual e Prova Matemática

Leonardo Andrade da Silva

Dissertação apresentada à coordenação de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora:

Prof^a. Dr^a. Tatiana Marins Roque

Rio de Janeiro

2011

S586r

Silva, Leonardo Andrade da
Representação visual e prova matemática / Leonardo
Andrade da Silva. - 2012.
viii, 67 f. ;30 cm.

Orientador: Tatiana Marins Roque.

Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-
graduação em Ensino da Matemática, 2012.
Referências: f.57.

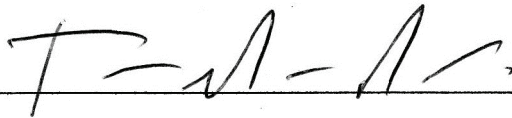
1.Geometria - Estudo e ensino 2. Representação gráfica
3. Teoria da prova I.Roque, Tatiana Marins II.Universidade
Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática III.Título.

REPRESENTAÇÃO VISUAL E PROVA MATEMÁTICA

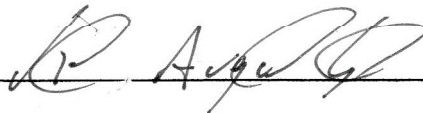
Leonardo Andrade da Silva

Dissertação submetida à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

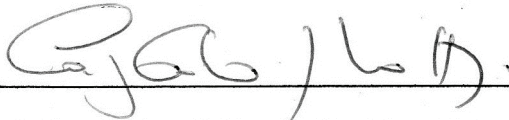
Aprovada por:



Profª. Dra. Tatiana Marins Roque- UFRJ



Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo - UFRJ



Prof. Dr. Carlos Eduardo Mathias Motta - UFF

Rio de Janeiro

Fevereiro/2011

AGRADECIMENTOS

A Deus, pela oportunidade da experiência de viver e a Jesus por ser meu exemplo de vida, não simples, a seguir.

A minha mãe Lúcia, que sempre acreditou na educação, investindo em mim de forma sem igual, apoiando - me incondicionalmente na escolha de ser professor de matemática.

A minha irmã Rosane, por me mostrar que podemos superar obstáculos e quebrar barreiras para alcançar os nossos objetivos de vida, como por exemplo, trabalhar de manhã e de tarde e ainda conseguir fazer uma faculdade à noite.

Aos professores do IM/UFRJ por me deixarem apaixonado pela matemática mais do que já era, e me fazer amar a educação matemática. Dentre esses professores, agradeço especialmente:

Ao professor Victor, que me orientou, apoiou, ouviu e ajudou desde meu primeiro período de graduação. Que mesmo quando não era meu professor, retirava minhas dúvidas de Cálculo 4 (fui monitor por 3 semestres desta disciplina na graduação). Muito obrigado por ser um de meus exemplos a seguir como professor, educador e como pessoa.

A professora Tatiana, que aceitou me orientar mesmo com uma dezena de complicações que eu apresentava, sendo sempre muito atenciosa comigo e encontrando uma forma de solucionar os problemas aparentemente não solucionáveis. O meu imenso obrigado e desculpas por todos os transtornos gerados.

Ao professor Mathias por ter aceitado participar desta banca e ter dado grandes dicas e sugestões.

Aos professores do Projeto Fundação: Claudia, Lucia, Lilian, Maria Laura e professores multiplicadores, que me acolheram e me ensinaram muito sobre o que é ser um educador.

RESUMO

REPRESENTAÇÃO VISUAL E PROVA MATEMÁTICA

Leonardo Andrade da Silva

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Este trabalho apresenta posições defendidas por diversos matemáticos, educadores matemáticos, lógicos, filósofos e outros acerca do conceito de prova matemática. O objetivo é entender como este conceito pode ser entendido a partir de discussões sobre a representação visual. Por exemplo, uma representação visual (um diagrama, por exemplo) pode ser considerada uma prova matemática, ou constituinte de uma prova, ou apenas um auxiliar para sua descoberta ou compreensão? Para alcançar este objetivo, olharemos especialmente para o caso de provas matemáticas em geometria, dissertando sobre a chamada “prova sem palavras” (proof without words), por meio de exemplos comentados.

Palavras-chave: prova matemática, representação visual, geometria, prova sem palavras.

ABSTRACT

MATHEMATICAL PROOF AND VISUAL REPRESENTATION

Leonardo Andrade da Silva

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

This paper presents the positions defended by several mathematicians, mathematics educators, mathematicians, logicians, philosophers and others about the concept of mathematical proof. The goal is to understand how this concept can be understood from discussions about the visual representation. For example, a visual representation (a diagram, for example) can be considered a mathematical proof, or a constituent of proof, or just a helper for his discovery or understanding? To achieve this goal, we will look especially for the case of mathematical proofs in geometry, when discussing the so-called proof without words by means of commented examples.

Palavras-chave: mathematical proof, visual representation, geometry, proof without words.

SUMÁRIO

1. Introdução.....	9
2. Revisão de Literatura.....	13
3. Prova Matemática.....	37
4. Representação Visual.....	42
5. Provas Sem Palavras.....	49
6. Considerações Finais.....	56
Referências Bibliografias.....	57

1. INTRODUÇÃO

O que é prova matemática? O que é uma representação visual? Quais as funções de uma prova matemática? Qual a relação, caso exista, entre representação visual e prova matemática? Mais especificamente, será que uma figura, um diagrama, pode ser considerada uma prova matemática? Se não, será que têm algum papel na construção de provas matemáticas? Estas são algumas das perguntas que nos incentivaram a elaborar o presente trabalho.

Ambos os temas abordados (representação visual e prova matemática) têm sido alvo de reflexões de pesquisadores de diversas áreas, como: matemáticos, educadores matemáticos, filósofos, lógicos e outros. Como afirmam Gila Hanna e Nathan Sidoli (Hanna G., Sidoli N., 2007, p.73), um grande número de matemáticos, lógicos e filósofos investiga o uso da representação visual e sua potencial contribuição para provas matemáticas, como (Brown, 1997; Davis, 1993; Giaquinto, 2005; Mancosu, 2005).

Descreveremos a seguir a formação e a área de atuação profissional e de pesquisa de alguns dos autores citados em nosso trabalho, a fim de possibilitar a identificação do meio a que pertencem: (1) Filósofo / Lógico, (2) Educador Matemático ou (3) Matemático. Nesta tarefa, daremos prioridade à área de pesquisa, ou seja, priorizaremos a produção de determinado pesquisador (revistas onde foram publicados os artigos, conteúdo dos livros publicados), em detrimento de sua formação.

Gila Hanna é professora da Universidade de Toronto, do departamento de currículo, ensino e aprendizagem, possui inúmeros artigos sobre prova publicados (ver Hanna (1990, 1996, 2007), por exemplo). Trabalha principalmente sobre o papel da prova, o ensino da prova matemática e assuntos afins. Ela pertence, portanto, ao grupo 2.

Nicolas Balacheff possui formação matemática e em computação científica. Seus interesses são tanto na área de computação ligados a aprendizagem (1999), como também no estudo epistemológico da pesquisa em educação matemática, particularmente, no que diz respeito à prova matemática (2006, 2008). Apesar de sua formação, o incluímos no grupo 2, tendo em vista suas pesquisas em aprendizagem e prova matemática.

Gian Carlo Rota, matemático por formação, foi professor de matemática aplicada e de filosofia do Massachusetts Institute of Technology (MIT) e seus estudos eram em matemática e em filosofia. Acreditamos que pertença ao grupo 1, pois o texto que escolhemos para trabalhar relaciona-se mais à filosofia do que à matemática propriamente dita. O artigo “A fenomenologia da prova matemática (1997)” versa sobre o que seria uma prova por verificação, questionando se toda verificação seria uma prova e também se as provas matemáticas são definitivas ou não.

John W. Dawson Jr. é doutor em lógica matemática e professor da Universidade do Estado da Pensilvânia. Possui muitas publicações na área de teoria de conjuntos e tem interesse principalmente no trabalho de Kurt Gödel (1979, 1993). A publicação que mais nos interessou analisa os casos de matemáticos que provam um mesmo teorema mais de uma vez (2006). Ele usa os conceitos de prova formal e prova informal que discutiremos mais a frente. Dawson pode ser incluído no grupo 1, por se tratar de um lógico, com publicação em periódicos de filosofia.

Roger B. Nelsen é matemático, professor emérito da universidade Lewis e Clark, Portland, Oregon, no departamento de ciências matemática. Pertence ao grupo 3. Dentre suas publicações, a que mais nos interessou diz respeito à prova sem palavras (proof without words). Reservamos um tópico inteiro para apresentar este tipo de prova e alguns exemplos. Mohammad Faaiz Gierdien é educador matemático (grupo 2) e sua ideia é partir das provas sem palavras, que Nelsen propõe, e mostrar como poderíamos utilizá-la em sala e o porquê de sua veracidade.

Citaremos brevemente Abraham Arcavi, que é PhD em educação matemática e tem diversos artigos nesta área, pertencendo assim ao grupo 2. Michael de Villier é professor da Universidade de Kwazulu-Natal, escola de ciência, educação matemática e tecnológica, África do Sul. Seu interesse de pesquisa é em Geometria, modelagem e aplicação, história e filosofia da matemática. O que nos chamou atenção em suas pesquisas foi a discussão dos papéis e funções da prova matemática. Ele mostra que há outras funções além da verificação da verdade de uma afirmação; a prova tem também a função de explicação. O inserimos no grupo 2, apesar dele também ter interesse na área de história e filosofia da matemática.

Marcus Giaquinto pertence ao departamento de filosofia, do London College, logo pertence ao grupo 1, assim como Paolo Mancosu, que pertence ao

departamento de filosofia, da Universidade da Berkeley Califórnia. O interesse de ambos é em história da matemática, filosofia da lógica e em lógica matemática.

Reuben Hersh, matemático por formação e professor emérito da Universidade do Novo México, trabalha em filosofia da matemática e por este motivo o incluímos no grupo 1. O artigo que utilizamos foi publicado em um periódico filosófico e trás a ideia dos significados da prova matemática, discutindo, por um lado, o significado prático, informal e, do outro, a prova matemática teórica, formal.

Podemos propor, então, a seguinte tabela das áreas de pesquisa dos pesquisadores citados neste trabalho:

Filósofo / Lógico	Educador Matemático ou pesquisador em Educação Matemática	Matemático
Gian Carlo Rota	Gila Hanna	Roger B. Nelsen
John W. Dawson Jr	Nicolas Balacheff	
Marcus Giaquinto	Michael de Villier	
Paolo Macosu	Mohammad Faaiz Gierdien	
Reuben Hersh	Abraham Arcavi	

Poderemos observar que o grupo 1, dos filósofos, se interessa pelo conceito de prova e seu uso. A noção de prova que encontramos em Rota (1997), de prova formal em Dawson (2006) e em Hersh (1997) usam as regras lógicas envolvidas na ideia de prova matemática, como as regras de inferência. No caso deste último, encontramos também a ideia de significados, como a investigação sobre o significado de número 2, como veremos no próximo tópico. Outros pesquisadores se dedicam a estudar como adquirimos nossas crenças geométricas básicas, caso de Giaquinto (2005). Incluímos também a pesquisa sobre a visualização na lógica e na matemática, fazendo pontes entre a visualização e a prova matemática, como é o caso de Mancosu (2005).

No grupo dos educadores matemáticos e pesquisadores em educação matemática encontramos reflexões acerca do papel e das funções da prova matemática, discussões sobre a epistemologia da prova matemática e também pesquisa sobre visualização e prova na perspectiva filosófica, como é o caso de Hanna (2007). Como são muitos os pesquisadores sobre o tema, encontramos divergências em vários aspectos de cada um deles. Por exemplo, no caso do conceito de prova matemática, nos deparamos com a discussão sobre prova formal e prova informal que abordaremos no próximo tópico. No caso de representações visuais, alguns autores defendem a representação visual como uma prova

matemática, outros defendem que esta é parte integrante da prova, e outros afirmam que a representação visual é somente um auxiliar na prova matemática, conforme exposto em Hanna:

Em um extremo estão aqueles que dizem que as representações visuais nunca podem ser mais que auxiliares preciosos para a prova, como é seu papel tradicional, como facilitadores da compreensão matemática em geral. No outro extremo estão aqueles que afirmam que algumas representações visuais podem constituir prova em si, tornando qualquer outra prova tradicional desnecessária. Entre esses dois extremos podemos encontrar uma variedade de posições que são mais sutis, ou que parecem simplesmente menos claras. (Hanna G., Sidoli N., 2007, p.74).

Podemos observar assim a existência de uma divergência no que diz respeito à utilização das representações visuais. Balacheff disserta sobre estas opiniões conflitantes na pesquisa em Educação Matemática, ressaltando que, em um campo de pesquisa, a convergência deve ser a regra. Ela deve ser nossa prioridade. Divergências são consideradas como sintomas de problemas, tanto teóricos como e metodológicos, a ser endereçados à comunidade. (Balacheff, N., 2008, p.501).

Balacheff não desqualifica a divergência em geral, mas critica o fato de não se relacionar as produções sobre um mesmo objeto. Por exemplo, no caso da prova matemática, poderíamos fazer um estudo de uma perspectiva matemática, psicológica ou filosófica, porém não podemos deixar de relacionar as diferenças que podem aparecer, a fim de explicar a natureza da prova matemática e de manter a integridade do objeto que estudamos. Explicando melhor o que entende por convergência, afirma:

No entanto, por convergência eu não quero dizer um sistema único de pensamento. Quero dizer que as diferenças devem ser explicadas e relacionadas de uma forma que mantenha coerente o entendimento global que temos de processos e fenômenos relacionados ao ensino e aprendizagem da prova matemática. (Balacheff, N., 2008, p.501).

Podemos dizer que Balacheff propõe uma pesquisa que seja compreendida por todos os pesquisadores de um mesmo objeto de pesquisa, não só pelo jargão utilizado ao escrever um artigo, mas também pela coerência ao dissertar

a respeito de um tema específico, neste caso, a prova matemática. Isso é o que pretendemos fazer ao longo deste artigo, apresentando diversos posicionamentos que possuem pontos em comum, apesar de provenientes de áreas diferentes.

Na segunda seção, apresentaremos diversas discussões sobre prova visual na literatura existente em educação matemática. Na seção seguinte, exibiremos diferentes posicionamentos sobre o conceito de prova matemática, mostrando semelhanças e diferenças no modo de tratar deste tema. Já na seção 4, iremos expor o que compreendemos por representação visual e qual a relação desta com a prova matemática. Em seguida, na seção 5, abordaremos um caso particular de representação visual que é uma prova sem palavras. Apresentamos exemplos e explicaremos como estas poderiam convencer-nos da veracidade de uma afirmação dada. Ao fim, esboçaremos uma breve conclusão.

2. REVISÃO DE LITERATURA

O objetivo desta parte do trabalho é fazer uma apresentação do que tem sido pesquisado sobre o tema prova matemática pelos educadores matemáticos recentemente, buscando um olhar mais cuidadoso quando for abordado algum conteúdo sobre visualização, que é a nossa maior preocupação. O que poderemos observar neste estudo é que existem artigos (não muitos) que abordam a utilização da visualização em prova matemática, seja de forma direta ou indiretamente, e que também há artigos (em maior número) que focam em outras reflexões, como a histórica ou a educacional sem falar necessariamente em visualização.

Sobre a utilização de provas em geometria, encontramos alguns artigos, como o de Celia Hoyles e Lulu Healy (2007) em *Mudança Curricular e Raciocínio Geométrico*, em que fizeram um estudo sobre as concepções de prova dos estudantes da Inglaterra e do País de Gales. Elas afirmam neste artigo, que em 2000 o currículo nacional foi revisado, mas que não foi radicalmente modificado do já existente anteriormente, que propõe promover o desenvolvimento de hábitos matemáticos como pensar, conjecturar, testar informalmente e explicar, mas mais nos contextos numéricos e algébricos que em geometria.

Em nosso currículo nacional brasileiro, podemos encontrar nas recomendações do PCNEM, que o estudo de geometria (...) “Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da Matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas”. (portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf, p.75) Daí notamos que apesar de possuímos uma orientação para tal estudo, o mesmo não é realizado grande parte das vezes, pois muitos professores ainda deixam para trabalhar geometria no fim do ano letivo (mesmo com a parte do conteúdo de geometria não vindo mais no final do livro didático), não conseguindo terminar o conteúdo e, portanto deixando de trabalhar tais recomendações.

Sobre o ensino de provas as autoras dizem que os alunos apresentam muitas dificuldades como: considerar a prova nada mais que a confirmação de alguns exemplos, tender a não compreender o significado e a generalidade de uma prova e, além disso, ver a prova como um ritual desprovido de uma construção, conhecimento ou compreensão, não vendo a prova como um processo fundamental para a atividade matemática.

Para corroborar tais dificuldades, as autoras propuseram duas afirmações para os alunos provarem, uma familiar, que era provar que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360° e uma não familiar que diz: Seja A é o centro de um círculo e AB raio e C um ponto da circunferência onde a mediatriz de AB intercepta o círculo. Prove se é verdadeiro ou falso que o triângulo ABC é sempre equilátero. Escreva sua resposta em uma maneira que você obtenha a melhor resposta possível. Segue abaixo uma figura que representa o problema não familiar:

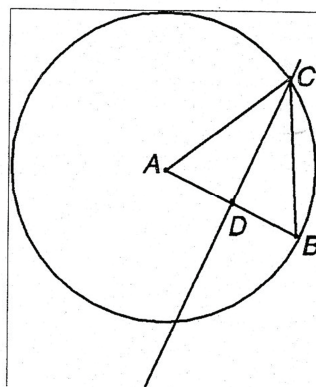


Figura 1- uma afirmação não familiar a ser provada. (Hoyles e Healy, 2007, p.89)

Elas então construíram então uma tabela de distribuição da pontuação dos alunos para a conjectura familiar e não familiar, que segue abaixo:

<i>Constructed proof score</i>		<i>Familiar conjecture (G4)</i>		<i>Unfamiliar conjecture (G7)</i>	
		<i>No.</i>	<i>%</i>	<i>No.</i>	<i>%</i>
0	No basis for the construction of a correct proof	586	24	1531	62
1	No deductions but relevant information presented	1289	52	690	28
2	Partial proof, including all information needed but some reasoning omitted	118	5	121	5
3	Complete proof	466	19	117	5
Total		2459	100	2459	100
Mean score		1.188	0.522		
Standard deviation		1.005	0.796		

Figura 2 - As pontuações (Hoyles e Healy, 2007, p.99)

Sem surpresa, como citam as autoras, podemos observar da tabela que os alunos construíram melhores provas para a conjectura familiar do que para o não familiar, porém somente 19% dos alunos apresentaram uma prova completa (completa para as autoras – elas não dizem o que entendem por prova completa) para familiar e 5% apresentaram uma prova completa da prova não familiar, comprovando as dificuldades dos alunos na construção de provas em geometria e a necessidade de mudanças curriculares na Inglaterra e no País de Gales.

Ainda no âmbito de provas na área de geometria, temos o artigo: Em Prova Geométrica – A mediação de um micromundo (2007), no qual Maria Alessandra Mariotti inicia o artigo falando sobre as dificuldades encontradas no aprendizado de Geometria, comentando o fato de que muitas vezes tais dificuldades em Geometria são atribuídas à exposição na forma axiomática – dedutiva, e afirma que a solução seria simples: banir qualquer elemento teórico e simplesmente utilizar a intuição.

Por outro lado esclarece que a abordagem dedutiva da Geometria é bem rara, e que vem desaparecendo do currículo, e em alguns países, como Itália, onde o currículo não mudou, essa abordagem desapareceu da prática escolar. Ela então aborda o assunto ensino de provas, ressaltando que a problemática do ensino de

provas segundo Hanna é que: “[prova] merece um lugar de destaque no currículo, pois continua a ser uma característica fundamental da matemática em si, como o método preferido de verificação, e porque é uma valiosa ferramenta para promover a compreensão matemática.” (Hanna, 1995, p. 21-22, Mariotti, 2007, p. 287).

A autora também dedica uma parte de seu trabalho a refletir sobre a utilização do “Cabri-géomètre” em construções geométricas. Inicialmente explica o que entende por uma construção geométrica, informando que: “Uma construção geométrica consiste de um procedimento que, por meio do uso de ferramentas específicas e de acordo com regras específicas, produz uma figura. Uma construção é considerada correta se as ferramentas utilizadas estiverem de acordo com as regras iniciais”. (Mariotti, 2007, p.290) Dito isso, ela apresenta duas características do ambiente Cabri: uma diz respeito à correspondência entre os primórdios do software e as propriedades geométricas básicas, e outra sobre a dinâmica de manipulação das “figuras-Cabri” que correspondem a um critério específico de validação num sistema coerente.

Um dos exemplos utilizados pela autora foi a construção da reta perpendicular, onde os alunos, na aplicação, se subdividiram em pares para realização da tarefa. Um exemplo para tal construção segue abaixo:

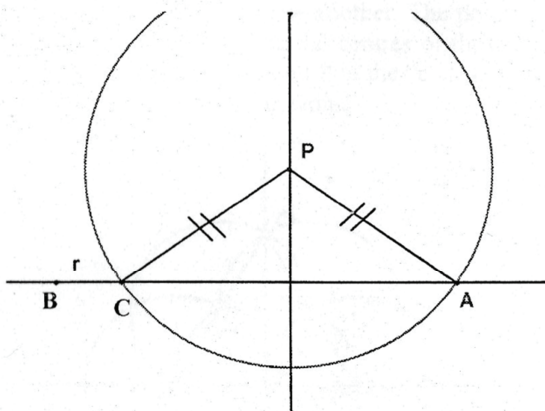


Figura 3- Construção de uma reta perpendicular de um segmento dado (Mariotti, 2007, p. 298)

Interessante Mariotti ressaltar que os próprios alunos sentiram a necessidade de justificar a construção feita pelo Cabri. Ou seja, podemos ver o Cabri como uma ferramenta para auxiliar na construção da prova e até para validá-la no sentido de convencimento dos alunos, para então procurar uma prova propriamente dita.

Ela finaliza o artigo propondo o equilíbrio entre a experiência que o software produz com as construções e os conceitos geométricos, dizendo que: “Construções geométricas no Cabri fornecem um rico campo de experiência onde a harmonia entre o aspecto figurativo e conceitual podem ser alcançados juntos com o desenvolvimento para o sentido da teoria.” (Mariotti, 2007, p. 302).

Sobre representações visuais e prova matemática podemos utilizar, por exemplo, o artigo de Davis, Teoremas Visuais (1993), onde ele fez um estudo sobre o que ele chama de teorema visual, que é: um gráfico ou saída visual de um programa de computador, que inspiram questões matemáticas de natureza tradicional ou que contribui em algum caminho para compreensão ou enriquecimento de alguma situação do mundo real ou matemático.

Davis acredita que essa geração tem crescido dando mais importância ao âmbito visual do que o verbal, citando que alguém poderia até fazer comparações do tipo em que “ver = fácil” e “pensar = difícil”, porém ele diz que essas igualdades são inapropriadas e na verdade devemos nos perguntar o que cada uma tem a oferecer.

Comentando que viu uma vez uma “prova” de que todo triângulo é isósceles em um livro, ele diz que a mensagem era clara: primeiro que não podemos confiar no que vemos e segundo que só podemos acreditar numa prova rigorosa, feita de muitas linhas escritas de forma rigidamente formal. Em contrapartida a esta visão, Davis cita que o livro nunca se preocupou em apontar que:

a) Não cairemos em paradoxos se tivermos os devidos cuidados ao desenhar a figura exata.

b) De qualquer maneira, nenhum livro prova rigorosamente todas as afirmações, pois:

c) A formalização dita acima, nas linhas de Hilbert, é longa, chata, anti-intuitivo, pouco convincente e um absoluto horror estético. Pessoas que tentaram ensinar geometria elementar com um alto nível de rigor cavaram um poço de instrução. (Davis, 1993, p.335)

Após apresentar alguns exemplos e comentá-los, Davis escreve sobre que diferença faria se o Tribunal Internacional dos matemáticos declarassem os teoremas visuais como um conceito legítimo? Provavelmente não muito na prática, ele responde. E complementa dizendo que:

Primeiramente, a elevação do componente visual restauraria a palavra “teorema” no seu sentido original da raiz Grega, que significa ver algo. Em segundo lugar, restauraria o status para processo de descoberta, pois a descoberta não é usualmente feita pelo caminho dedutivo.

Também restauraria o “olho” como legítimo órgão de descoberta e inferência. Em terceiro lugar, afetaria seriamente a educação matemática, especialmente nos níveis mais elevados. Isso permitiria o estabelecimento da educação matemática de forma a chegar a um acordo com os aspectos da matemática que são exigidos por físicos, engenheiros, etc e os critérios pelos quais estas profissões relacionadas validam seu trabalho. (Davis, 1993, p.341,342).

Podemos encontrar em: Em Prova e Pedagogia na China antiga: Exemplos de comentários de Liu Hui em Jiu Zhang Suan Shu, Man-Keung Siu escreve sobre provas contrapondo o que diz Szabo: que antes do desenvolvimento da cultura Grega o conceito de ciência dedutiva era desconhecido para as pessoas da antiguidade oriental. Não existiam teoremas ou provas, ou conceitos de dedução, definição, axiomas em documentos que vieram dessas pessoas. Estes conceitos fundamentais apareceram somente com a matemática grega.

Siu diz que se o significado de prova for alguma explicação que serve para convencer e para esclarecer, então podemos encontrar em abundância provas em textos mais antigos que aqueles textos encontrados nos gregos, onde ele então escolhe alguns exemplos encontrados na China antiga para referenciar o seu trabalho, como por exemplo: em um círculo inscrito num triângulo retângulo temos que $d = 2ab / (a + b + c)$, onde d é o diâmetro da circunferência, a , b , c lados do triângulo retângulo com hipotenusa c .

Apesar de Siu comentar que Liu Hui providenciou três diferentes provas para tal afirmação, nos deteremos a apresentar uma, que foi feita por provas sem palavras, como cita Siu:

A "prova sem palavras", exibido na Fig.3 **(no trabalho dele é a figura 3, que está indicado como figura 4 em nosso trabalho)**, decorre suas instruções sobre como dissecar o triângulo em peças coloridas, que são posteriormente montados para formar um retângulo. (Na figura, uma região pontilhada é, supostamente, de cor amarela, uma região sombreada é, supostamente, cor vermelha, e uma região de planície é supostamente cor índigo). **(negrito nosso)**

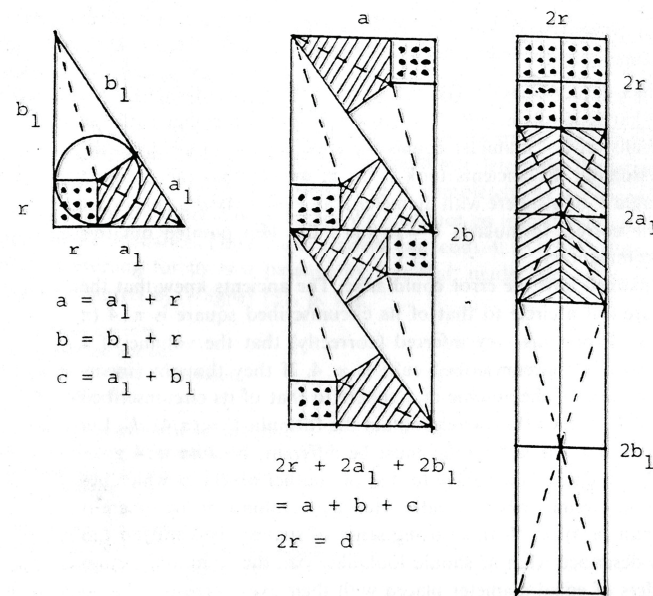


Fig. 3.

Figura 4- “Prova sem palavras” para o problema da circunferência inscrita num triângulo retângulo.

(Siu, 1993, p. 350)

Observe que para chegar à conclusão desejada basta comparar a figura central com a da direita, pois da figura central, temos que a área desse retângulo é $2ab$ e da figura a direita da central temos que a área deste retângulo é $2r(2r + 2a_1 + 2b_1)$, que é igual a $2r[(a_1 + r) + (b_1 + r) + (a_1 + b_1)]$, ou seja, $2r(a + b + c)$. Portanto, como essas duas figuras possuem a mesma área (basta observar que são constituídas da mesma quantidade de figuras menores congruentes) temos que: $2r(a + b + c) = 2ab$, mas como $d = 2r$ temos que: $d(a + b + c) = 2ab$, ou como queríamos demonstrar: $d = 2ab / (a + b + c)$.

Após mostrar que esta afirmação foi provada de três maneiras por Liu Hui, Siu cita que o papel da prova não é apenas o de verificar se uma afirmação dada é verdadeira ou não: “Esta discussão também nos ajudam a apreciar que a prova tem um papel no reforço da compreensão. Se a única função de uma prova fosse de verificação, nada viria a ser adquirida mediante provas diferentes do mesmo teorema. Mas provas diferentes não servem apenas para convencer, mas também para esclarecer”. (SIU, p.352) Veremos mais adiante, que este não é o único autor a falar isso sobre o papel da prova além da verificação...

Após fornecer mais alguns exemplos, Siu finaliza o artigo citando Polya, dizendo que devemos incentivar este ato em sala de aula, que é: “para provar formalmente o que é visto intuitivamente e para ver intuitivamente o que é provado

formalmente” (Polya apud Siu, 1993, p. 356). Desta fala de Polya podemos dizer que devemos buscar o equilíbrio entre a intuição e o rigor, ou seja, devemos utilizá-los para buscar uma melhor compreensão daquilo que estivermos querendo apreender.

Sobre o papel da prova matemática, encontramos em: *Em Prova como Convencimento e Esclarecimento*, Reuben Hersh, que disserta sobre a finalidade da prova, dizendo que por um lado, na pesquisa matemática ela tem a função de convencer juízes qualificados, na sala de aula, por outro lado, sua função é de explicar, esclarecer para estimular a compreensão dos alunos. Neste artigo ele tem o objetivo de defender esta proposta.

Num tópico dedicado a refletir sobre provas entre os matemáticos profissionais, Hersh afirma que “prova é um argumento convincente, julgado por juízes qualificados” (Hersh, 1993, p.389). Ele faz o questionamento de qual a diferença desta noção de prova para o da lógica formal, e responde dizendo que primeiramente as provas formais só podem existir dentro de uma teoria formalizada, expressadas por um vocabulário formal, fundada com um conjunto de axiomas, fundamentado pelas regras formais de inferências e mais, que na passagem do informal, intuitivo para o formal inevitavelmente ocorrerá perdas ou mudanças de significados.

Em segundo lugar, ele ressalta que a formalização completa de uma prova formal, mesmo que em princípio seja possível, na prática pode ser impossível, pois elas podem exigir tempo, paciência e interesse para além da capacidade de qualquer matemático humano e até poderá ultrapassar a capacidade de qualquer sistema computacional disponível e isto é muito forte, visto que poderíamos nos perguntar: Quando é que uma prova é aceitável, sabendo que na prática é impossível formalizá-la completamente?

Sobre a prática dos matemáticos, Hersh cita um exemplo de demonstração no qual os matemáticos querem saber o porquê que uma prova está correta, onde eles querem entender a prova e não saber somente que ela existe como é o caso do teorema das quatro cores, que foi demonstrado computacionalmente, e visto que alguns matemáticos rejeitaram a prova, pois os detalhes da máquina estão ocultas. Ou seja, não basta saber que um teorema é correto, busca-se descobrir o porque que o está, principalmente pelo fato de que quando se faz uma prova, muitas vezes ela gera algo novo, uma teoria nova, prova outros teoremas além do que se pretendia provas, por exemplo.

Hersh cita três significados para a palavra prova:

O primeiro significado é o mais coloquial, onde a palavra prova tem a ver com a ideia de testar, experimentar, determinar o verdadeiro estado das coisas, que é um significado mais geral. Dos outros dois significados, dito significados matemáticos, ele diz que temos um ligado a prática, trabalho do matemático, que é o da prova ser um argumento que convence os juízes qualificados e o outro significado matemático, mais ligado a lógica é a prova como sequência de transformações de sentenças lógicas, realizadas de acordo com as regras do cálculo de predicados.

Sobre prova matemática em sala de aula Hersh diz que em sala convencer não é o problema, pois alunos são facilmente convencidos. Ele exemplifica este caso dizendo que muitas provas são omitidas em sala, seja por falta de tempo, seja pela prova exigir um nível maior do que os alunos estão ou simplesmente pela prova ser um tédio e nem por isso os alunos deixam de acreditar em teoremas não provados, como é geralmente o caso do Teorema Fundamental da Álgebra que não é provado num primeiro curso de Álgebra abstrata. Importante ressaltar o fato de que numa sala de aula o papel da prova é diferente do que numa pesquisa matemática, como disse Hersh, pois talvez, esse seja um dos fatores da dificuldade do aprendizado das provas em sala de aula, onde o professor muitas vezes faz a prova, convence o aluno, mas o aluno não a compreende significativamente.

Segundo Hersh uma prova deveria prover “insight” de porque um teorema é verdadeiro, deixando claro que não está dizendo prova no sentido da lógica formal, além do mais ele esclarece que em sala, em geral, as provas são informais ou semiformais, apresentadas numa linguagem natural, que geralmente usam cálculos, que são subprovas formais de uma prova informal.

Sobre o papel da prova no ensino Hersh cita que existem duas visões: Um deles é que sem prova completa não há matemática. Ele chama esta visão de absolutista, donde se vê a matemática como um sistema de verdades absolutas e que se assim é a matemática, independente da construção do conhecimento humano – aspecto imaterial e indestrutível da eternidade – então provas matemáticas são externas e eternas. Daí, o professor absolutista não diz nada ao aluno, exceto o que ele vai provar e as provas escolhidas por ele será a mais geral, ou a mais curta. Ele não se preocupará em explicar a prova, porque o

esclarecimento não é o objetivo da prova, mas sim a certificação desta, ou seja, a admissão dela no catálogo das verdades absolutas.

A visão oposta que Hersh propõe é a que tem sido chamada de humanista, donde a prova é uma completa explicação que deve ser dada quando esta (a explicação completa) é mais adequada do que uma explicação incompleta ou nenhuma explicação. Para os humanistas, a matemática é nossa ferramenta, nosso brinquedo, para usarmos e aproveitarmos como acharmos conveniente. As provas não são rituais obrigatórios e o professor humanista usa as provas mais para esclarecer, não necessariamente faz a prova mais geral ou mais curta. Portanto, o ensino de provas está intimamente ligado com a visão no qual o professor opta: a absolutista ou a humanista.

Ainda sobre visões e outros aspectos em prova, temos que: Em prova e aplicação, Gila Hanna e Niels Jahnke iniciam o artigo falando sobre a mudança para uma visão pragmática da prova, onde traz que desde a Grécia antiga, o pensamento ocidental considera a prova como característica essencial da matemática, mas que a visão de seu papel, sua essência e normas vêm sendo objeto de mudanças histórica e cultural. Um exemplo citado é que Newton não via problemas em “provar” a regra de que a integral de x^n é igual a $(n+1)^{-1}x^{n+1}$ simplesmente trabalhando com exemplos numéricos e, além disso, que ele não hesitou em por a exceção $n=-1$, visto que poderia ser visto facilmente que a fórmula não aplica neste caso.

A proposta dos autores é a mudança de pensamento para uma visão pragmática da prova, rejeitando a ideia que prevaleceu até os anos setenta, onde a prova formal era vista como o aspecto mais importante da atividade matemática e ainda, segundo eles, até mesmo como sua característica definidora.

Eles relacionam aspectos formais da prova matemática com as suas dimensões pragmáticas e para tal utilizam o conceito de “aplicação”, que dizem ser a chave para este ponto de vista e que suspeitam que seja também para a filosofia da matemática como um todo.

Comentando sobre o método axiomático de Hilbert, os autores dizem que “ele considerou os objetos matemáticos como entidades simbólicas que devem sua existência apenas ao fato de que obedecem as regras pelas quais estão ligados axiomáticamente”. (G. Hanna e H. N. Jahnke, 1993, p. 425) Dizem ainda que Hilbert em 1899 demonstrou que até mesmo a geometria poderia ser tratada como um sistema puramente lógico-conceitual, cujo significado pode ser ignorado. Daí,

afirmam que se a matemática é mais do que apenas manipulação de símbolos vazios, mas do que um jogo de xadrez, que se ela é para compreender a realidade que nos rodeia então ela deve ter um significado que transcende a dedução formal, ou seja, não pode ser apenas um conjunto de implicações lógicas para corroborar uma afirmação.

Citam que em 1924, H. Weyl assinalou na sua interpretação das ideias de Hilbert que “o significado da matemática reside na sua aplicação. Sistemas matemáticos e seus símbolos são significativos porque, e somente na medida em que, eles podem ser aplicados. (“aplicação” deve ser entendida aqui em sentido amplo, abrangendo ambas as aplicações extra e intramatemática.) (G. Hanna e H. N. Jahnke, 1993, p. 426)

Sugerem que a partir de uma perspectiva mais ampla, temos que pensar em prova em termos de justificativa por meio de aplicação, donde dentro de um sistema no sentido mais amplo, uma prova constitui uma generalização, estabelecendo relação entre os fatos que numa possível ausência de prova permaneceriam separados, ou seja, a prova coloca o fato comprovado em um contexto.

Os autores afirmam que não há contradição entre as perspectivas dedutiva e a de aplicação, pois tratam de questões diferentes, onde o conceito puramente dedutivo trata a prova com derivação formal, enquanto a justificativa por meio da aplicação refere-se ao fato de que toda justificativa deve apelar para alguma base, e a última base, do ponto de vista do significado é a aplicação. Na prática do dia a dia dos matemáticos estes dois aspectos são mantidos separados, mas tendem a tornarem-se entrelaçados quando algo realmente novo está surgindo e que na sala de aula eles tendem a ser inseparáveis.

A respeito da base pragmática para prova e sua relevância pedagógica os autores relacionam a atividade dos pesquisadores matemáticos com a dos professores, no qual o primeiro grupo muitas vezes ignora o aspecto de aplicação e limitam-se à noção puramente dedutiva das provas e o segundo grupo, por outro lado, deve levar em consideração que uma prova gera para a compreensão da realidade.

Os autores são bem convictos quanto à relação matemática e realidade, dizendo que não se pode ensinar e aprender prova sem considerar tal relação. O professor não pode simplesmente comunicar apenas para os estudantes da

axiomática moderna, do ponto de vista de Hilbert, mas ao contrário, a complexa relação entre o raciocínio dedutivo ou manipulação de um lado, e sua aplicação do outro deve ser desenvolvida novamente em cada caso individualmente, ou seja, a aprendizagem deve alcançar a todos os estudantes.

A primeira conclusão dos autores é que a visão de que o processo social de verificação no qual uma conjectura torna-se uma prova aceita na comunidade matemática poderia ser imitado de alguma forma na escola, mas dizem, por outro lado, que veem motivos significantes do porque isto não é feito, como, por exemplo, que os elementos chaves do processo (não dizem quais) não podem ser reproduzidos em sala de aula e que este tipo de processo social de verificação demanda tempo, bastante tempo, que não se tem em sala de aula.

Ainda assim, segundo os autores, estas limitações não deveriam descartar a criação de situações em sala de aula cujos alunos fossem encorajados a explorar, fazer e testar conjecturas e elaborar as suas próprias provas. Reforçam a ideia de um problema duplo encontrado no ensino de provas: o de encontrar uma prova e, ao mesmo tempo transmitir seu significado, expondo que o contexto epistemológico desempenha um papel muito maior no ensino do que no trabalho do matemático, ratificando assim que a pesquisa e o papel da comunicação na comunidade matemática são fundamentalmente diferentes de seu papel no ensino.

Uma de suas teses diz respeito à compreensão do significado de um teorema e o valor de sua prova, no qual os alunos para alcançar tal compreensão devem ter experiência coerente com a área de aplicação adequada. Para ilustrar tal tese, os autores apresentam um exemplo descrito por Fishbein, onde os alunos devem provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos.

A proposta dele é seguir um argumento intuitivo, no qual começa com o segmento AB e constroem-se as perpendiculares AM e BN. Daí pode-se criar um ou uma sequência de triângulos girando os segmentos AM e BN e podemos observar facilmente que o ângulo APB vai ganhar tudo o que é perdido pelos ângulos MAB e NBA, como podemos observar na figura abaixo:

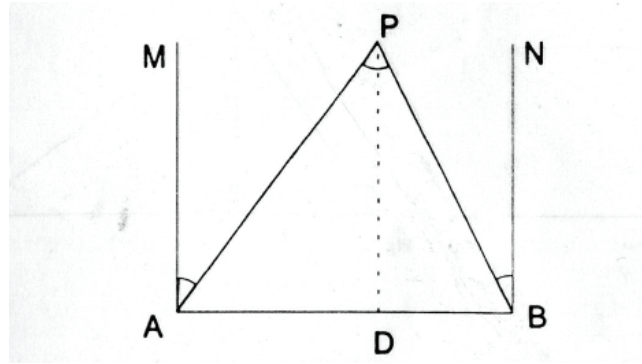


Figura 5 – o argumento da compensação (Gila Hanna e H. N. Jahnke, 1993, p. 435)

Este é o argumento que ele chama de argumento da compensação. Onde imerso em condições variáveis a soma dos ângulos permanece invariável, pois quando os ângulos da base diminuem, há um aumento no terceiro ângulo, compensando assim a diminuição. Fischbein está certo, segundo os autores, em enfatizar que este tipo de raciocínio é muito diferente o de mostrar que o teorema é válido por meio de um exemplo isolado, visto que há uma variação e a afirmação não está sendo comprovada apenas para um caso.

Apesar dos alunos possivelmente serem convencidos empiricamente da compensação, uma lacuna ainda existiria, no que diz respeito ao que acontece no caso limite da transição do triângulo para a configuração inicial. Sobre tal lacuna, os autores propõem a ideia óbvia (segundo eles) de construir triângulos muito grandes, mas propõem também a possível apresentação do conceito de ângulos alternos como uma explicação para o fenômeno da compensação.

De qualquer maneira, esta abordagem incentiva à autonomia e fornece, segundo os autores, peso para toda a base pragmática de justificativas, se compararmos com a do teorema individual que deve ser provado, além de ao mesmo tempo deixar claro para os alunos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois ângulos retos, de forma explicativa e significativa.

Sobre razões para se provar um teorema, encontramos em: Em Provas como portadores de conhecimento matemático, Hanna e Barbeau, que exploram do ponto de vista da educação matemática, o artigo de Yehuda Rav de título “Porque Provamos Teoremas”. O artigo de Hanna é subdividido em duas partes, onde a primeira faz uma exposição da tese de Rav e a segunda apresenta algumas provas matemáticas do currículo e discute seu papel na transmissão de conhecimentos matemáticos.

Na exposição da tese de Rav os autores dizem que há um consenso entre matemáticos, filósofos e educadores matemáticos que provas são centrais para a matemática, principalmente porque a prova que estabelece a verdade de uma afirmação matemática; e que apesar de Rav não discordar disso, ele afirma que *existe um aspecto da prova que tem sido negligenciado e que a importância da prova vai bem além do estabelecimento da verdade matemática* (Hanna e Barbeau, p.85). A importância de uma prova para Rav não está somente atribuída à demonstração de um resultado, mas também ao fato de que a própria prova pode mostrar novos métodos, ferramentas, conceitos e estratégias que podem mudar o rumo da matemática.

Em seu trabalho, Rav faz distinção entre dois tipos de provas, onde o primeiro tipo é a prova formal, gerada por aplicações das regras de inferência lógica, no qual ele chama de “derivação” e segundo tipo de prova é a “prova conceitual”, que para Rav significa uma prova informal, “que consiste de um rigoroso argumento aceitável pelos matemáticos, mas que apela para o significado dos conceitos e fórmulas utilizadas” (Hanna e Barbeau, p. 86). Os autores ressaltam que a maioria das provas submetidas a revistas científica de matemática são provas conceituais, corroborando a ideia de Hersh no qual uma prova formal seria impossível na prática.

Em seu artigo, Rav exclui provas formais das discussões, assim quando ele diz na tese central do artigo, que provas são “portadoras de conhecimento matemático”, podemos dizer que é a prova conceitual que ele tem em mente. Rav mostra com dois exemplos o tipo de conhecimento novo que uma prova pode trazer. No primeiro, Rav fala sobre as tentativas de provar a conjectura de Goldbach, que rendeu muitos novos métodos, como também resultados para a teoria dos números e outras áreas afins. No segundo, Rav mostra que as tentativas de provar a hipótese do contínuo também tiveram contribuições, como por exemplo, que as técnicas desenvolvidas nas tentativas de demonstração levaram à formulação e prova do “teorema de duas classes” de Cantor e a evolução da topologia, por exemplo.

Os autores mostram no artigo que a prova na Educação Matemática vai além da justificativa e explicação, citando uma lista de pesquisas recentes a cerca da prova matemática em diversos aspectos, como por exemplo:

Aspectos epistemológicos da prova (Balacheff 2004; Hanna 1997); aspectos cognitivos da prova (Tall 1998); o papel da intuição e esquemas em

provas (Fischbein 1982,1999); a relação entre raciocínio e prova (Yackel e Hanna 2003; Maher e Martino 1996); a utilidade heurística para o ensino de prova (Reiss e Renkl 2002); a ênfase nas estruturas lógicas das provas no ensino do nível terciário (Selden e Selden 1995); prova como explicação e justificativa (Hanna 1990, 2000; Sowder e Harel 2003); prova e hipótese (Jahnke 2007); questões curriculares (Hoyles 1997); prova no contexto de software dinâmico (Jones et al. 2000; Moreno e Sriraman 2005); a análise dos argumentos matemáticos nas produções dos alunos (Inglis et al. 2007); a relação entre argumentação e prova (Pedemonte 2007). (Hanna e Barbeau, 1993, p. 89)

Dizem que uns 20 artigos de educação matemática citam o artigo de Rav, e veja que tal verificação foi feita em maio de 2007, portanto, provavelmente o número aumentou significativamente. Mas apesar dessas citações, esses artigos não tem como foco a visão de Rav para provas como “portadoras de conhecimento matemático”, mas sim dizem respeito à objeção de Rav para a visão da matemática fortemente ligada ao formalismo e sua ênfase sobre a dinâmica social para alcançar a confiabilidade matemática.

Um dos exemplos utilizados pelos autores foi o da fórmula de resolução de uma equação do segundo grau, aqui no Brasil conhecida como fórmula de Bhaskara, onde queremos encontrar as soluções de uma equação do tipo:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0, \text{ onde sabemos que elas são do tipo } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

A discussão gira em torno de como estabelecer que esta formula está correta. Uma das formas é substituir os valores de x na equação e verificar que realmente a satisfaz. Seria uma prova legítima, mas será que não deixaria nada a desejar? Sim, pois não existe indicação de significado da fórmula e mais, nós não sabemos se estas são as únicas soluções da equação quadrática, só podemos afirmar que estes dois valores de x são raízes e nada mais. Os autores sugerem que ao invés de perguntarmos “Qual é a fórmula para resolver equações quadráticas?”, perguntemos “Como podemos resolver uma equação quadrática?” e isto é muito interessante, visto que podemos levar nossos alunos a chegar à fórmula, que é o nosso desejo.

Mas como? Primeiro, que algumas equações são facilmente solucionáveis por fatoração. Por exemplo, $x^2 - k = 0$ pode ser reescrito como $(x + \sqrt{k})(x - \sqrt{k}) = 0$

$(x - \sqrt{k}) = 0$, e daí encontramos como soluções $x = \sqrt{k}$ e $x = -\sqrt{k}$, pois para o produto de dois números ser igual a zero, pelo menos um desses números deve ser igual a zero.

Depois, que para resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, temos que saber o método de “completar quadrados”, que nossos alunos daqui do Brasil deveriam aprender juntamente com produtos notáveis e geralmente isso não é feito, pois os professores frequentemente trabalham a igualdade unidirecionalmente, dificultando assim tal aprendizado. Bem, bastaria que o aluno lembrasse que $ax^2 + bx$ pode ser reescrito como $a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right)$ e que para a quantidade dentro dos parênteses se tornar o quadrado de uma soma, deveríamos somar $\frac{b^2}{4a^2}$ e para que a equação permanecesse a mesma deveríamos somar esta quantidade a ambos os membros da equação, ficando assim:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$
, que fazendo alguns cálculos simples chegamos a conclusão desejada.

O interessante deste método é que possibilita aos alunos caso esqueçam a fórmula, mesmo assim poderiam resolver as equações quadráticas, e mais que resolver uma equação quadrática, a técnica de completar quadrado pode ser aplicada em outros casos, como por exemplo, na resolução de uma equação de quarto grau, pois saberá fatorar, por exemplo, o polinômio $x^4 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)$.

Os autores dizem que apesar de estar claro que existem provas que poderiam ser usadas produtivamente, no sentido da tese de Rav, no Ensino Médio, existem questões que precisam ser respondidas, como, por exemplo, qual seria o efeito no currículo? Será que seriam necessárias mudanças drásticas ou pequenos ajustes no programa para infundir essa forma de aprender matemática? O que o novo material e orientações para os professores devem levar em conta para quaisquer mudanças na sala serem realizadas de forma eficaz? Os autores afirmam que poderiam ser dadas as provas um maior papel em sala de aula, devido ao seu potencial de transmissão de importantes elementos matemáticos, como estratégias e métodos.

Citam também que os educadores matemáticos sempre usaram do fato que existem muitos estilos diferentes de prova, mostrando como chegar a conclusões válidas de diversas maneiras aos alunos, usando manipulações algébricas, conceitos geométricos, operações aritméticas, computação, etc., mas, por outro lado, eles têm negligenciado o papel da prova no que diz respeito a serem portadoras de conhecimento matemático na forma de métodos, ferramentas, estratégias e conceitos que são novos para os alunos que poderiam mostrar para o aluno a matemática em outros contextos.

Sobre conhecimento e prova, no artigo: Construindo Pontes de Conhecimento e Provando em Matemática: Uma perspectiva didática, Nicolas Balacheff inicia o artigo comentando que a mais comum tradição didática opta em introduzir provas no contexto da geometria, geralmente na oitava série.

Após apresentar que esta orientação tem mudado levemente na década passada com o aumento da ênfase no ensino de prova, ele questiona se é possível aprender matemática sem aprender o que é uma prova matemática e como se constroa uma; e a resposta é não! Ele diz então que há uma dupla lacuna didática: uma que a prova matemática cria uma ruptura entre a matemática e outras disciplinas (mesmo as “ciências exatas”) e outra diz respeito à divisão no curso do ensino de matemática durante e quase padrão nos primeiros 12 anos de educação (um era antes do ensino da prova e outra depois).

Segundo o autor a origem dessas lacunas está nas várias linhas de tensão existentes como: rigor versus significado, desenvolvimento interno versus aplicação orientada para o desenvolvimento da matemática, objetos ideais definidos e manipulados por representações simbólicas versus experiência baseada em evidências empíricas. Ele não se propõe a analisar tais tensões, apenas mencioná-las.

O objetivo é questionar as restrições impostas no ensino e aprendizagem, postulando que como qualquer outro domínio a aprendizagem e compreensão matemática não pode ser separada da compreensão dos seus significados intrínsecos para validação: prova matemática.

Apesar da ênfase no papel chave da prova matemática, o autor cita que devemos lembrar que o que está em jogo não é a verdade, mas sim a validade de uma afirmação dentro de um contexto bem definido, pois, por exemplo, a Geometria Euclideana não é mais verdadeira que a Riemanniana. O autor sugere troquemos o

a palavra prova por validação, tendo em vista a mudança de verdade para validez, onde dentro desta perspectiva temos que a validação matemática busca por uma prova absoluta num contexto explícito. Esta visão de validade e prova é antiautoritária.

No tópico intitulado por Verdade, Dúvida e Representações, Balacheff argumenta que os Educadores Matemáticos teriam expectativas ligadas ao uso de representações não verbais no ensino de matemática e um sintoma disso seria o fascínio por provas sem palavras (será que é tanto assim?), que daria acesso ao próprio sentido da validade de um enunciado matemático sem o peso de discursos sofisticados e complexos. Cita que o desenvolvimento de softwares multimídeas, interfaces gráficas avançadas e o acesso de manipulação direta da representação dos objetos matemáticos têm reforçado essas expectativas.

Balacheff ressalta que se por um lado existe a eficiência da figura baseada no computador, por outro existe a fragilidade dessa mesma figura, que depende muitas vezes de algoritmos e condições técnicas para sua produção. Um exemplo dado por ele é a figura que em 1979, Benoit Mandelbrot disse ter produzido em um computador e que é conhecida como Conjunto de Mandelbrot, na qual a figura foi modificada por Douady e Hubbard, como segue abaixo:

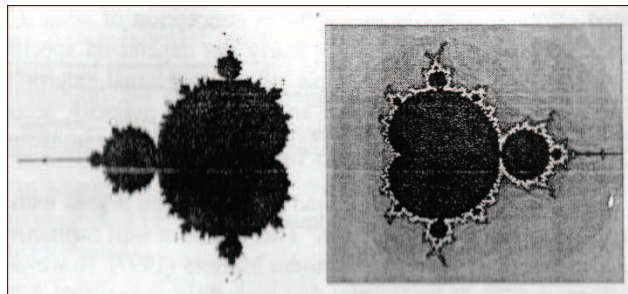


Figura 6 - Conjunto Mandelbrot antes e depois da descoberta de Douady e Hubbard. (Balacheff, 2010, p.121)

Com este exemplo, Balacheff quer mostrar que as relações complexas existentes entre representações e objetos matemáticos, onde propõe uma maior cautela em considerar evidências numa representação não verbal. A ideia não é dizer que essas representações não verbais ou alguns tipos de argumentos não tenham valor e nem tenham que ser banidas ou algo do tipo, mas ele enfatiza que alegações frequentemente utilizadas em educação como “uma imagem diz mais que mil palavras” têm limites e não pode ser aceito sem uma verificação mais profunda.

Outro exemplo utilizado é o da utilização de calculadoras gráficas, onde ele cita a função $f(x) = x^4 - 5x^2 + x + 4$, que aparece abaixo com duas representações gráficas diferentes, levando o aluno a conclusões precipitadas e erradas sobre, por exemplo, a quantidade de raízes no intervalo $[-2,2]$. Veja:

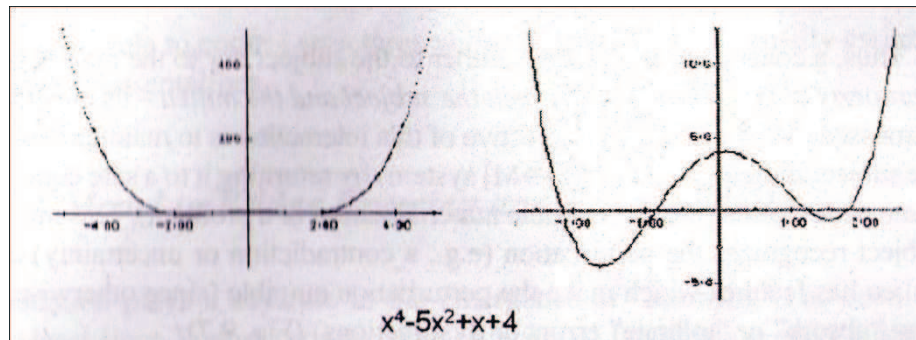


Figura 7 - Duas representações para uma função, (Balacheff, 2010, p.122).

Sobre a natureza complexa da prova, o autor fornece uma simples (segundo ele) afirmação matemática: A soma de dois números pares é par. A partir dessa afirmação ele apresenta algumas provas dessa afirmação, que podemos observar na figura 8. Ele comenta que uma discussão sobre tais provas por matemáticos, professores de matemática e alunos provocariam reações muito diferentes entre si.

Let z be the sum of the two given even numbers, z is even means $z=2p$. We can write $p=n+m$, thus $z=2n+2m$. But $2n$ and $2m$ are a manner to write the two numbers. So z is even.

(1)

(2) An even number can only finish with 0, 2, 4, 6 and 8, so it is for the sum of two of them

2, 2= 4 4, 4= 8 6, 8= 4
 2, 4= 6 4, 6= 0
 2, 6= 8 4, 8= 2
 2, 8= 0

(3)

(4)

```

      ○○○○○○○○  ○○○○○○
      ○○○○○○○○ + ○○○○○○
      ○○○○○○○○○○○○
      =○○○○○○○○○○○○○○
          
```

(5) Let x and y be two even numbers, and $z=x+y$. Then it exists two numbers n and m so that $x=2n$ and $y=2m$. So : $z=2n+2m=2(n+m)$ because of the associative law, hence z is an even number.

Figura 8 - (Balacheff, 2010, p.129)

Os argumentos em tal discussão, segundo ele, envolvem três tipos de considerações: A busca da certeza, a busca da compreensão e os requisitos para uma comunicação bem sucedida. “A natureza complexa da prova está no fato de

que qual quer esforço para melhorar uma prova-candidata em uma dessas dimensões pode alterar o seu valor sobre as outras duas”. (Balacheff, 2010, p.130) A ideia é que o que é produzido primeiro é uma explicação da validade de uma declaração. Após, este texto pode atingir o status de prova se ele receber bastante apoio da comunidade e então pode se afirmar como prova matemática, se atender aos padrões atuais da matemática. Balacheff faz uma ilustração para tal situação, utilizando diagramas, no qual o conjunto das provas matemáticas está incluso no conjunto das provas, que por sua vez está incluso no conjunto das explicações, como segue abaixo:

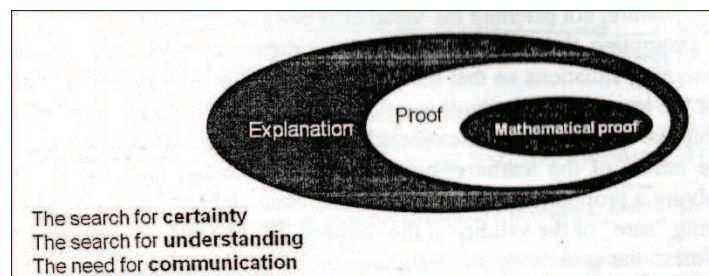


Figura 9, (Balacheff, 2010, p.130)

Falando sobre conhecimento e prova na genese didática da prova, Balacheff faz uma afirmação interessante a respeito da relação conhecimento e prova matemática, no qual diz: “A origem do conhecimento está na ação, mas a realização da prova matemática é na linguagem”. Primeiramente ele propõe o seguinte esquema:

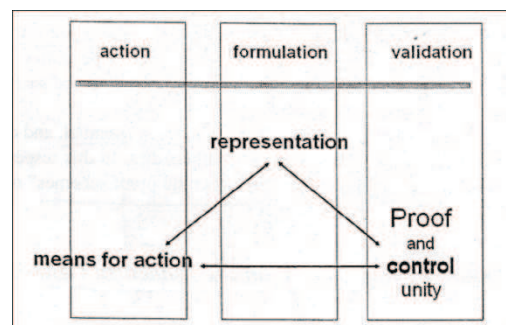


Figura 10. (Balacheff, 2010, p.132)

O esquema acima mostra a relação entre ação, formulação (sistema semiótico) e validação (estrutura de controle), no qual afirma que essa trilogia configura as situações didáticas (Brousseau 1997), onde não há validação se não houver uma afirmação explícita e não há representação sem significado que

emerja da atividade. Além disso, Balacheff ressalta que a linguagem pode ser em níveis abaixo do que os matemáticos usam, e este nível será a dica do nível de prova que os alunos poderam produzir e/ou compreender. Por outro lado, ele deixa explícito que há mesmo assim, espaço para atividade matemática genuína em todos esses níveis, desde que os alunos vão além do empirismo e vejam o valor acrescentado pela postura teórica. Para tal, ele então propõe um ultimo esquema, no qual a ideia é que o caminho a percorrer para alcançar uma prova matemática perpassa pela prática (ação), no uso da linguagem como ferramenta (formulação), para então enfim almejar a prova matemática (validação):

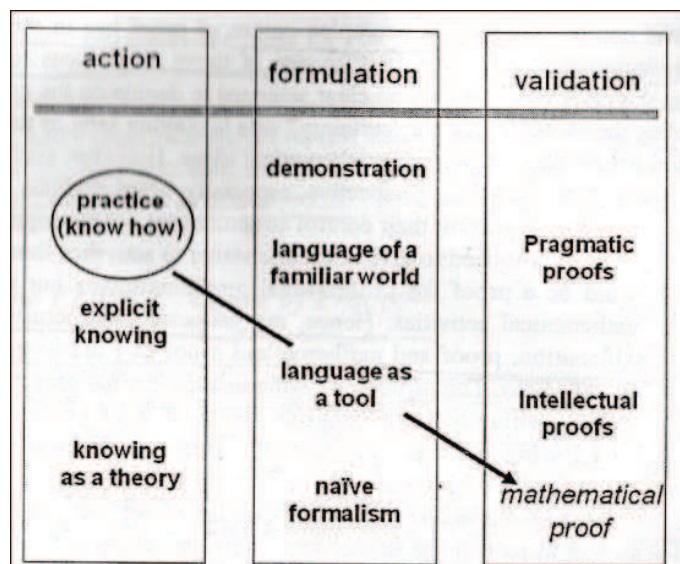


Figura 11. (Balacheff, 2010, p.133)

Ainda sobre os papéis e funcionalidades da prova, encontramos em: Em experimentação e prova em Matemática, Michael de Villiers, que se propõe a investigar o papel da experimentação em matemática e refletir sobre exemplos históricos e alguns de sua própria experiência matemática. Por experimentação, ele compreende de forma ampla todo raciocínio intuitivo, indutivo ou analógico, especificamente empregado nos casos de:

a) “Conjecturas matemáticas e/ou afirmações verificadas numericamente, visualmente, graficamente, esquematicamente, fisicamente, cinestésico, analogicamente, etc.” (De Villier, 2010, p.205)

b) “Conjecturas, generalizações ou conclusões feitas com base na intuição ou experiência obtida por meio de qualquer um dos métodos acima”. (De Villier, 2010, p.205)

Embora não sendo completa nem original (segundo ele), Villier sugere uma lista incluindo algumas das funções da experimentação, que estão, segundo ele, muitas vezes intimamente ligados. A lista é a seguinte:

- “Conjecturando (à procura de um padrão indutivo, generalização, etc.)
- Verificação (obtenção de certeza sobre a verdade ou a validade de uma afirmação ou conjectura.)
- Refutação Global (refutar uma afirmação falsa, gerando um contra-exemplo.)
- Refutação Heurística (reformulação, refino ou polimento uma afirmação verdadeira, por meio de contra-exemplos locais)
- Compreensão (compreender o significado de uma proposição, conceito ou definição ou auxílio na descoberta de uma prova.)” (De Villier, 2010, p.206)

Após a apresentação da lista Villier se propõe a investigar mais a fundo cada uma dessas funções, no qual o que faremos agora é comentar um pouco do que foi feito por ele neste artigo, como por exemplo, em *Conjecturando* ele cita que na história da matemática encontramos centenas de casos onde conjecturas foram feitas na base da intuição, investigação numérica, etc... Como foi o caso de uma conjectura feita por Gauss em Teoria dos Números, onde usando logaritmos com evidências numéricas ára contar números primos ele descobriu que o número de primos menores ou igual a n é sempre aproximadamente $\frac{n}{\log n}$. Muitos matemáticos utilizaram a conjectura de Gauss para explorar propriedades dos números primos no início do século XIX, apesar de uma prova parcial só ter sido dada em 1850, por Chebychev, uma prova mais completa foi publicada por Riemann em 1859, mas, ainda continha lacunas que foram preenchidas por Hadamard e De La Vallée Poussin em 1896 independentemente.

Em Verificação/Convicção Villier diz que ao contrário do que muitos professores tradicionais acreditam que somente a prova fornece a certeza ao matemático, os matemáticos são convencidos da verdade de seus resultados muito

antes deles provarem. O exemplo utilizado por ele para corroborar sua ideia é uma citação muito interessante de Leonhard Euler a respeito de uma descoberta na álgebra dos números reais e sua certeza empírica:

Basta realizar esses cálculos e prossegui-los na medida em que considero adequada a tornar-se convencido da verdade desta sequência continuada indefinidamente. Ainda não tenho outras provas para isso, exceto uma longa indução, que tenho realizado até agora que eu não posso de forma alguma duvidar da lei... Eu tenho procurado muito em vão por uma demonstração rigorosa... e propus a mesma questão a alguns dos meus amigos que cuja capacidade nestes assuntos estou familiarizado, mas todos concordaram comigo sobre a verdade .. sem ser capaz de descobrir alguma pista de uma demonstração. (Euler, Opera Omnia, ser.1, vol2, p. 249-250, cited in Polya 1954, p.100, apud De Villier p.208).

Em Refutação Global, que Villiers entende por produção de um contra-exemplo lógico que está de acordo com as hipóteses mas refuta a conclusão e portanto a sua validade, ele mostra alguns exemplos, como, por exemplo, no século V BC matemáticos Chineses conjecturaram que se $2^n - 2$ é divisível por n , então n é um número primo. Vemos que $2^1 - 2$, $2^2 - 2$, $2^3 - 2$ são divisíveis pelos primos 3, 5 e 7, mas $2^4 - 2$, $2^6 - 2$, $2^{10} - 2$ não são divisíveis por 4, 6 e 10 respectivamente. Até 340 tudo ok, mas em 1819 a conjectura foi finalmente contradizida, visto que para $n=341$ ela não é válida, pois $2^{341} - 2$ é divisível por 341, mas 341 não é primo, pois $341 = 11 \times 31$.

Em Refutação Heurística, Villier cita que quando aparecem novos contra-exemplos, necessitamos reexaminar provas antigas e novas provas são criadas adequadamente. O exemplo por ele utilizado foi a história do Teorema de Euler para poliedros analisado por Lakatos (1983), no qual em 1750, Euler sem prova, disse que para poliedros como tetraedro, octaedro, etc, tínhamos que $V - E + F = 2$ onde V , E e F são respectivamente os números de vértices, arestas e faces do poliedro. Euler produziu uma prova em 1752 e provas mais rigorosas foram produzidas no século XIX por Legendre, Cauchy, Gergonne, Rothe e Steiner. Mas ainda continuaram a aparecer exceções ou “monstros”. Como o dodecaedro estrelado de Kepler, no qual a fórmula $V - E + F = 2$ não é válida. Só no fim do século XIX este problema foi resolvido com os topologistas, no qual para o dodecaedro estrelado de Kepler a fórmula seria

$V - E + F = 2 - 2g$ (onde g é o *genus* do poliedro).

Interessante que Villier defende que não podemos esquecer as limitações da intuição e investigação experimental. Cita Polya, que apesar de ser defensor da matemática informal, heurística, disse que o pensamento experimental pode ser arriscado e controverso, lembrando-se do exemplo de Cauchy, que no século dezoito, seguro em sua intuição, acreditava que a continuidade de uma função implicava na sua diferenciabilidade e, contudo no fim do século dezenove Weierstrass chocou a comunidade matemática produzindo uma função contínua que não era diferenciável em nenhum ponto.

Villier finaliza seu artigo dizendo que: “é simplesmente intelectualmente desonesto pretender que em sala de aula a convicção só venha do raciocínio dedutivo ou que matemáticos adultos nunca tenham experimentados investigar conjecturas ou resultados já provados”.

Com isso, acreditamos termos apresentado um pouco do que se vêm pesquisando a respeito do tema prova em Educação Matemática, seja sobre sua utilização e relação com o currículo e o raciocínio geométrico como o estudo encontrado em Celia Hoyles e Lulu Healy (2007), seja a relação de provas e geometria num ambiente virtual, como em Mariotti, ou então o estudo de teoremas visuais, que encontramos em Davis, no qual uma representação pode ser a própria prova. Por outro lado encontramos Balacheff, que propõe que devemos ter cuidado com a utilização das representações visuais, pois essas podem nos levar a erros.

Podemos encontrar estudos mais históricos como em Siu, onde ele mostra que podemos encontrar provas matemática bem antes dos Gregos, talvez numa teoria não axiomática como na Grécia Antiga, mas com um raciocínio dedutivo.

Sobre os papéis e funções da prova, encontramos Hersh dissertando sobre prova como esclarecimento, afirmando que esta assume o papel muito maior que apenas verificação, principalmente quando se fala do papel da prova no ensino, que é bem diferente do da pesquisa, onde na pesquisa é convencer e no ensino é explicar. Temos também Michael de Villiers, propondo algumas funções para experimentação, que poderíamos fazer um abuso de linguagem e dizer até que seriam funções das provas, como por exemplo, ter a função de Verificação, Refutação Global e Heurística e Compreensão, por exemplo.

Gila Hanna e Niels Jahnke propõe uma visão diferente para a prova, vendo a juntamente com a aplicação, como vimos no exemplo da prova que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a dois retos.

3. PROVA MATEMÁTICA

Em primeiro lugar, nosso objetivo é explicar o que os pesquisadores aqui citados pensam do conceito de prova matemática, investigando concordâncias ou divergências, principalmente sobre a definição de prova matemática.

Para Rota, uma prova matemática não é algo particular, mas universal: *Todo mundo sabe o que é prova matemática. A prova de um teorema matemático é uma sequência de passos que conduz para uma conclusão desejada.* (Rota, G. C., 1997, p.183).

Ele então comenta as regras a serem seguidas, que constituem uma prova matemática, afirmando que: *As regras a serem seguidas por essa sequência de passos foram explicitadas quando a lógica foi formalizada no início deste século, e elas não mudaram desde então.* (Rota, G. C., 1997, p.183). Dentre essas regras a que o autor se refere, temos a consequência lógica (ou “silogismo”, na definição de Aristóteles). Um exemplo: tomada as duas afirmações a seguir como verdadeiras “todo sapo é verde” e “Caco é um sapo”, temos que “Caco é verde” é uma consequência lógica das duas afirmações anteriores. Outra “regra”, por exemplo, seria o *modus ponens* que utilizamos para fazer uma prova direta:

Se P, então Q. ($P \rightarrow Q$)

P.

Portanto Q. ($\therefore Q$)

Por exemplo:

Se fizer sol, então vou à praia.

Faz sol.

Então vou à praia.

Encontramos também o *modus tollens* usado para prova indireta, e assim por diante. Rota defende que a prova matemática é elaborada a partir das regras da lógica, e não de outro conjunto de normas estabelecidas aleatoriamente, ou de qualquer outra linguagem que não seja a simbólica.

Podemos concluir também, segundo o mesmo pesquisador que não existe uma prova matemática “meio certa”, pois: *A expressão “prova correta” é redundante. Prova matemática não admite graus.* (Rota, G. C., 1997, p.183). A ideia que este autor transmite é que uma prova matemática pode ter lacunas e ser completada, ter algum erro e ser corrigida, mas não poderíamos dizer que uma prova matemática está “meio certa”.

Contudo, outros pesquisadores como citaremos a seguir, preferem não se posicionar como Rota, que utiliza a noção de prova como uma prova formal. Eles buscam trabalhar a ideia de prova matemática de uma forma mais ampla, utilizando até mesmo a noção de prova informal. Dawson, por exemplo, apesar de também ser lógico, disserta sobre provas formais e informais, definindo o que entende por cada uma destas:

Para teorias formalizadas, a noção de uma prova é absolutamente precisa: É uma sequência de fórmulas bem definidas, onde ao fim o teorema é provado e cada um dos passos é ou um axioma ou o resultado da aplicação de uma regra de inferência às fórmulas anteriores, em sequência. Não devemos, entretanto, adotar essa definição. Preferencialmente, pegaremos uma prova para ser um argumento informal cujo objetivo é convencer aqueles que se esforçam para verificar que certa afirmação matemática verdadeira (e, idealmente, para explicar porque é verdadeira). (Dawson, J. W. Jr., 2006, p.270).

Observarmos que a ideia de prova matemática para Rota coincide com a noção de prova em uma teoria formalizada para Dawson, o diferencial deste último é a consideração da noção de prova informal. Defendendo seu posicionamento acerca da utilização desta noção, o autor afirma que: *Existem várias razões pelas quais o conceito formal de prova não é adequado no presente contexto. Primeiro de tudo, as provas formais são construções artificiais de origem muito recente. Elas são abstrações da prática matemática que não conseguem captar muitos aspectos importantes desta prática.* (Dawson, J. W. Jr., 2006, p.270).

Dawson não comenta porque as provas formais são construções artificiais, mas quando vemos uma prova matemática, num livro ou no quadro em sala de aula, feita por um professor, não temos a ideia de como ela foi desenvolvida, descoberta pelo matemático, ela nos aparece pronta *a priori*. Outro motivo talvez seja o jargão utilizado pelos matemáticos, possuidores de muita simbologia, que não é uma linguagem natural.

Dawson explica *que se restringíssemos nossas atenções para provas formais, excluiríamos a maior parte das reais provas utilizadas, já que pouquíssimas teorias matemáticas seriam formalmente axiomatizadas, e muitas provas informais não procedem de pressupostos explicitamente*. (Dawson, J. W. Jr., 2006, p.270). Daí a preferência pelo uso da noção de prova informal. Se fizéssemos uma investigação minuciosa das provas matemáticas que conhecemos e produzimos, provavelmente veríamos que a minoria delas são provas formais. Ele diz ainda que as provas não precisam ser sequer verbais, citando como exemplo dois volumes de *Provas Sem Palavras (Proof Without Words)* publicadas pela Mathematical Association of America). Separamos uma seção deste artigo para tratar deste assunto.

Dawson vai um pouco além dessa discussão afirmando que provas formais são quase exclusivas dos campos da ciência da computação e da lógica matemática. Muitas vezes, apesar da existência do rigor e da validade dos processos utilizados em cada etapa da prova, ela pode ser pouco convincente, por não ser facilmente compreensível, ou por ser demasiadamente longa e sem interrupções, como os lemas utilizados nas provas informais geradas pelos homens. Um exemplo é a demonstração computacional do Teorema das Quatro Cores.

Ainda defendendo a utilização da prova informal, ele utiliza um argumento histórico:

Quem pode dizer, por exemplo, que uma prova agora aceita como válida não será um dia considerada deficiente? E se argumentos defeituosos não têm qualquer validade, porque é que muitos deles acabam por serem reparados para conter, por assim dizer, um "germe" de verdade? A definição de um prova informal como um argumento convincente, a ser realizada por consenso da comunidade matemática em um dado momento, implica que uma prova pode não ser válida para todos os tempos, um ponto de vista que, embora em desacordo com a concepção formal, é o único que parece historicamente defensável. (Dawson, J. W. Jr., 2006, p.272).

Um exemplo de argumento histórico é o caso da Teoria dos Jogos, que Ampère apresentou à Academia de Paris em 1803. Laplace notou um erro na prova e o explicou por meio de uma carta enviada a Ampère, que foi corrigida e reimpressa. Ou seja, apesar de inicialmente conter erros o trabalho de Ampère não deixava de ser uma contribuição importante. Não é sempre, portanto, que podemos afirmar a inutilidade de uma prova “considerada errada”. Este tipo de prova, muitas vezes, pode gerar mais conhecimento do que uma prova que demonstra apenas a veracidade de uma afirmação. Dawson finaliza esta discussão deixando clara a importância da utilização da “prova informal” e porque se deve privilegiar esta definição.

Hersh aparenta, inicialmente, corroborar as ideias de Dawson, pois também subdivide a ideia prova matemática. Porém, ao invés de falar de prova formal e informal, Hersh prefere introduzir uma nova abordagem comparativa sobre o que ele chama de significados da prova matemática.

No começo propõe que *o problema é que “prova” matemática tem dois significados. Na prática, é uma coisa. Em princípio, é outra. Nós mostramos aos alunos o que é prova na prática. Nós dizemos-lhes o que é em princípio. Os dois significados não são idênticos. Tudo certo; mas nós nunca reconheceremos a diferença. Como podemos dizer tudo certo então?* (Hersh, R., 1997, p.153).

Interessante aqui é o aparecimento da relação entre prova matemática e o ensino. Identificado o problema, logo em seguida ele apresenta quais são os dois significados:

Significado de número 1, o significado prático, é informal, impreciso. Uma prova matemática prática é o que fazemos para fazer que outros acreditem em nossos teoremas. É argumento que convence o qualificado, o cético especialista. (...). Mas o que é exatamente? Ninguém pode dizer.

(...)

Significado de número 2, a prova matemática teórica, formal. Aristóteles ajudou a estabelecê-lo. Assim fizeram Boole, Peirce, Frege, Russell, Hilbert, Godel. É a transformação de certas sequências simbólicas (sentenças formais), de acordo com certas regras da lógica (modus ponens, etc.). Uma

sequência de etapas, cada uma deduzidas logicamente, ou facilmente expandida para uma dedução lógica rigorosa. Isto é suposto ser uma "formalização, idealização, reconstrução racional da ideia da prova" (P. Ernest, comunicação pessoal). (Hersh, R., 1997, p.153).

Podemos relacionar estes significados com as noções de prova matemática apresentadas até agora. Por exemplo, o primeiro significado refere-se à ideia de prova informal proposta por Dawson, mas oferece algo a mais, que é o sentido prático, praticado seja por um matemático, professor de matemática em sala, ou por um aluno numa prova ou exercício. Já o segundo significado, que podemos dizer que está de acordo com a ideia de prova matemática para Rota, assim como a noção de prova para teorias formalizadas para Dawson, é explicitado por Hersh em relação com nomes de personagens da história da matemática que contribuíram para esta formalização.

Esse pesquisador, que também é lógico, disserta sobre a seguinte afirmação: *As provas práticas corretas podem ser preenchidas para serem provas teóricas corretas.* (Hersh, R., 1997, p.154). Ele diz que esta afirmação é comumente aceita, apesar de nunca ter visto um argumento para defendê-la, a não ser a ausência de contraexemplos, sendo uma questão de fé. Como exemplo, sugere pegar uma prova matemática aceita e completa-la até tornar-se uma prova formal.

Interessante observar que, apesar de deixar evidente que uma prova para ele seria uma prova correta, completa e que, pelos padrões da lógica formal, provas matemáticas usuais seriam incompletas, Hersh afirma preferir uma bela prova com lacuna, do que uma prova chata e correta. Além disso, suponhamos que uma prova matemática seja entregue a um perito e ele diga que são necessários mais detalhes. Mais detalhes são feitos, e a prova é aceita. Temos que a primeira versão era matematicamente incompleta, a nova versão era matematicamente completa, porém ambas as provas seriam formalmente incompletas.

Outro ponto relevante no estudo de Hersh é ressaltar que o papel da prova numa aula é diferente de seu papel na pesquisa. Ao passo que, na pesquisa, o papel é o de convencer, em sala, o papel não é convencer – pois estudantes geralmente são facilmente convencidos, acreditam e utilizam teoremas que não foram provados. O estudante necessita realmente da prova para explicar, para alcançar o insight da veracidade de um teorema e esta não é a prova no sentido da

lógica formal, mas sim no sentido do significado de número 1, o sentido prático da prova matemática.

Com isso podemos expandir a nossa visão acerca do papel e da função da prova matemática, não somente para encará-la como uma ferramenta de busca de veracidades, mas também para enxergar outras funções. Villiers, preocupado com o ensino da prova matemática, enumera os papéis da prova matemática, ressaltando que não o defende como completo e nem único. Além disso, a ordem não é hierárquica:

- *verificação (diz respeito à verdade da afirmação)*
- *explicação (fornece explicações quanto ao facto de ser verdadeira)*
- *sistematização (organização dos vários resultados num sistema dedutivo de axiomas, conceitos principais e teoremas)*
- *descoberta (descoberta ou invenção de novos resultados)*
- *comunicação (transmissão do conhecimento matemático)*
- *desafio intelectual (realização pessoal/gratificação resultantes da construção de uma demonstração)* (De Villiers, M. D., 2001, p.32).

Podemos observar que há diversas ideias sobre o conceito de prova matemática e é possível pensar este conceito seja do ponto de vista teórico, formal, ou do ponto de vista mais prático, informal. Além disso, devemos refletir sobre o papel da prova matemática no ensino. Neste trabalho, propomos investigar especificamente a relação entre representação visual e prova matemática, que pensamos ser uma importante discussão no que diz respeito ao ensino de provas e demonstrações para os alunos.

4. REPRESENTAÇÃO VISUAL

De uma maneira bem ampla, podemos admitir uma representação visual como aquela obtida por meio de imagem mental, por computadores, ou imagens desenhadas no papel, como gráficos e diagramas por exemplo. Giaquinto (2005) começa seu estudo mostrando que a percepção de um objeto ou figura pode ser

radicalmente afetada por sua orientação. Ele apresenta o exemplo quadrado-losango, no qual o quadrado que tem a base percebida como horizontal é visto como quadrado e não losango, enquanto o outro quadrado (o da direita) é reconhecido como losango e não como um quadrado, como observamos na figura abaixo:

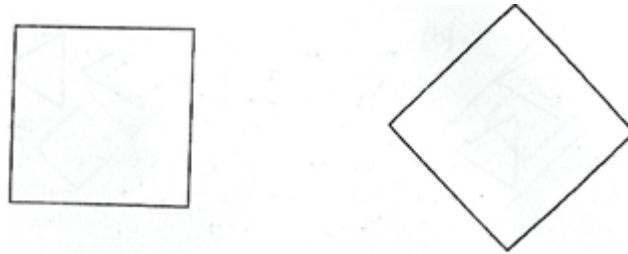


FIGURA 12 (Giaquinto M., 2005, p.32).

Ele propõe então que a orientação é relativa a um sistema de referência (um par de eixos ortogonais, onde um tem o sentido para “cima”). Em seguida, encontramos outro exemplo, no qual ele afirma que o sistema de referência pode ser baseado em características do objeto percebido, na retina do observador, cabeça ou tronco, nas bordas de uma página. O exemplo é:

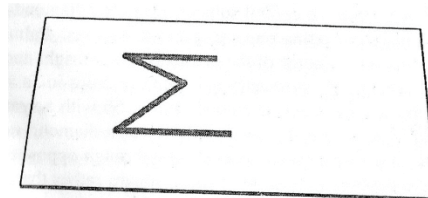


FIGURA 13 (Giaquinto M., 2005, p.32).

Neste exemplo podemos perceber a letra sigma Σ ou a letra M, se rotacionarmos um pouco a cabeça. Giaquinto segue o trabalho até mostrar o que podemos deduzir de acordo com os eixos de simetrias observadas, como podemos visualizar na figura 3:

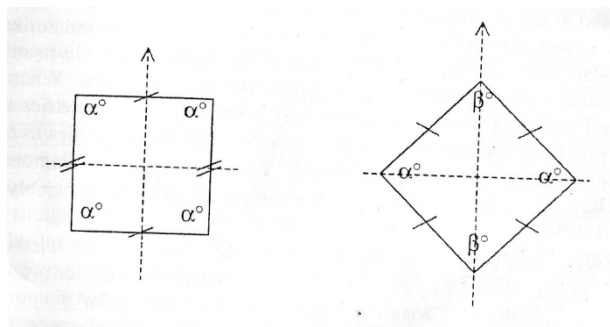


FIGURA 14 (Giaquinto M., 2005, p.37).

Do quadrado do lado esquerdo da figura 3 percebemos a congruência dos 4 ângulos, mas somente a congruência dos lados opostos, enquanto no quadrado do lado direito percebemos a congruência dos 4 lados, mas somente conseguimos perceber a congruência dos ângulos opostos. O uso do sistema de coordenadas baseado na métrica euclideana permite detectar, no primeiro caso, a congruência dos 4 lados e distinguir o quadrado de outros retângulos.

Giaquinto propõe três condições suficientes para uma crença ser considerada conhecimento: confiabilidade – se a crença for invariável para qualquer inspeção; racionalidade – a crença tem que ser consistente com outros fatos conhecidos; justificação Implícita. Neste último caso, há pessoas que dizem que uma crença não é conhecimento sem um crente justificar a crença, mas seria muito forte requerer que um crente seja capaz de expressar uma justificativa, caso contrário uma jovem criança não teria conhecimento. Logo basta que as crenças das pessoas e fatos relevantes sejam ordenadas de modo a fornecer um argumento que justifique e que, unido a confiabilidade e a racionalidade, nos permita obter um conhecimento seguro.

O interesse maior de Giaquinto é o papel da visualização na descoberta e pretendemos refletir melhor sobre a relação entre representação visual e prova matemática. Mancosu (2005) faz um estudo sobre a visualização na lógica e na matemática, desde o fim do século XIX, onde houve um grande movimento avesso ao uso de figuras, principalmente no caso de prova matemática: *o teorema somente está verdadeiramente provado se a prova é completamente independente da figura*. (Pasch, 1882/1926, 43 apud Mancosu 2005, p. 14). Hilbert também fez afirmações semelhantes.

Mancosu ainda ressalta o retorno do visual como mudança no estilo matemático, principalmente com o desenvolvimento da computação gráfica. Ele cita um exemplo dos conjuntos de Julia e de Mandelbrot. Teria sido impossível reconhecer analiticamente, sem o apoio visual oferecido pelo computador, que os conjuntos de Julia estão presentes dentro dos conjuntos de Mandelbrot:

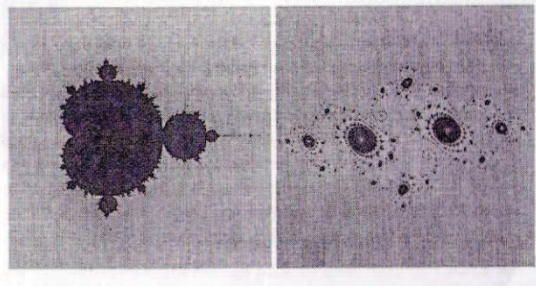


FIGURA 15 (Mancosu P., 2005, p.18).

Segundo Hoffman, *nós usamos o computador para aproximar numericamente a superfície e então construir a imagem dela. Isso nos deu as pistas para as suas propriedades essenciais, que então se estabeleceu matematicamente.* (Hoffman, 1987, 8 apud Mancosu 2005, p. 19) Hoffman fazia referência a superfície de Costa:

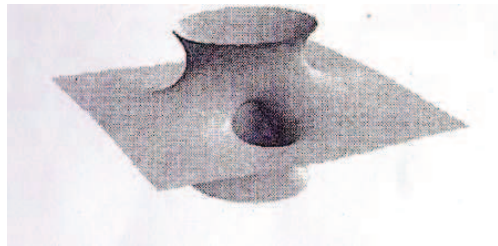


FIGURA 16 (Mancosu P., 2005, p.19).

Outro exemplo de representação visual na resolução de problemas é a construção de uma função que é o limite de uma sequência de funções, definidas no intervalo de 0 a 1, de modo que possamos obter um contra exemplo para a afirmação: Uma função contínua deve ser diferenciável em todo lugar exceto em pontos isolados. Este exemplo de Bolzano pode se encontrar em Giaquinto, M. (2007), p.4:

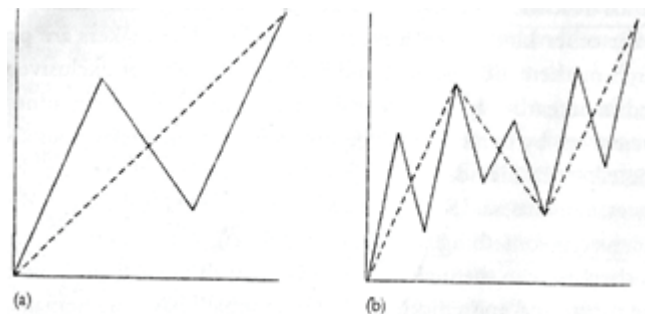


FIGURA 17 (Giaquinto, M. 2007, p.4).

Neste mesmo livro, no capítulo 5, o autor se dispõe a investigar o uso de diagramas em provas geométricas. Inicialmente ele faz três afirmações sobre o pensamento que envolve diagramas e prova geométrica:

- 1- Todos os pensamentos que envolvem um diagrama na sequência de uma prova são supérfluos.
- 2- Nem todos os pensamentos que envolvem um diagrama na sequência de uma prova é superfluo, mas se não é superfluo será substituível.
- 3- Alguns pensamentos que envolvem diagramas na sequência de uma prova não são supérfluos e nem substituível. (Giaquinto, M., 2007, p.73)

O autor apresenta o exemplo de uma prova de um teorema da Geometria Euclideana, argumentando porque não seria superfluo o pensamento envolvendo diagramas. A ideia é mostrar que a única afirmação verdadeira é a de número 3 e ressaltar a importância da utilização da representação visual na prova, como podemos observar em afirmações do tipo: *duvido que seja possível seguir o argumento sem algum pensamento visual*. (Giaquinto, M., 2007, p.84) Nesta afirmação, o autor está se referindo à construção de um triângulo equilátero, por meio da sequência de diagramas que segue:

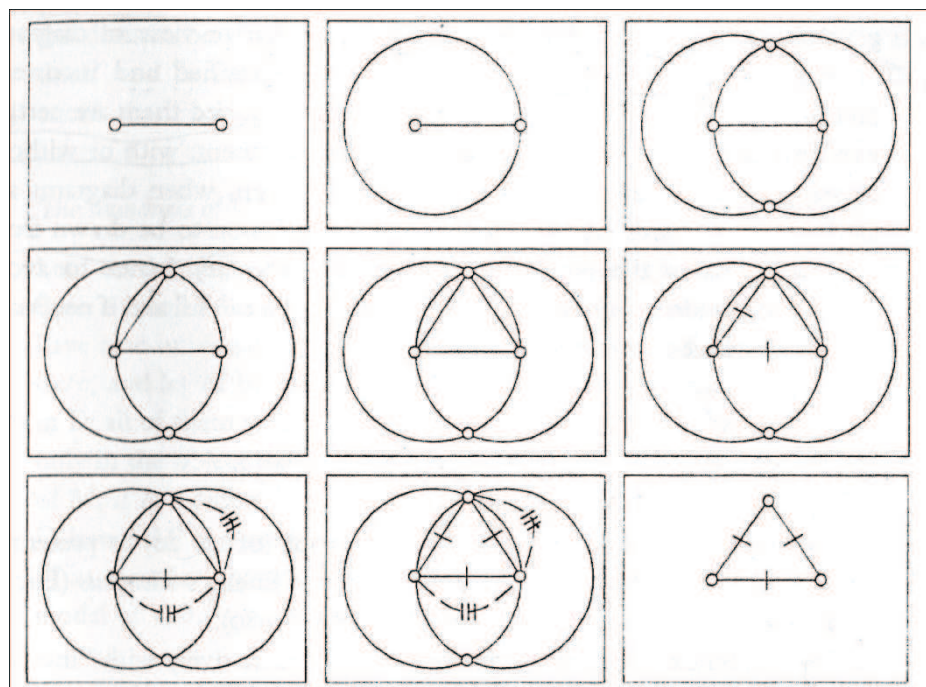


FIGURA 18 (Giaquinto, M., 2007, p.85).

Podemos encontrar uma demonstração para esta construção nos *Elementos* de Euclides:

Proposição I-1 *Sobre uma determinada reta construir um triângulo equilátero.*

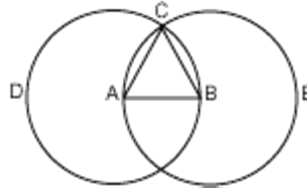


FIGURA 19

Construção: Seja a linha reta AB de certo comprimento. Com o centro A e com a distância AB descrevemos o círculo BCD (*Postulado III*); e com o centro B e a distância BA descrevemos o círculo ACE. Do ponto C, onde os círculos se cortam reciprocamente, traçamos (*Postulado I*) pelos pontos A e B as retas CA e CB. Podemos afirmar que o triângulo ABC será equilátero, pois, sendo o ponto A o centro do círculo BCD¹, AC é igual a AB (*Definição XV*) e, sendo o ponto B o centro do círculo CAE, BC é igual a BA. Lembrando que CA é igual a AB, temos que tanto CA como CB são iguais a AB. Mas as coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si (*Axioma I*). Sendo assim, CA é igual a CB e as três retas CA, AB e BC são iguais, logo o triângulo ABC construído sobre a reta AB é equilátero.

Listamos abaixo as definições, axiomas e postulados utilizados para a elaboração da prova.

DEFINIÇÕES:

XV. *Círculo é uma figura plana, fechada por uma só linha, a qual se chama circunferência, de maneira que todas as linhas retas que, de um certo ponto existente no meio da figura, se conduzem para a circunferência, são iguais entre si*

AXIOMAS:

- I. *As coisas que são iguais a uma terceira são iguais entre si*

POSTULADOS:

- I. *Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto qualquer*
 III. *E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo*

¹ Chamamos assim porque um círculo é determinado por três pontos.

Será que podemos afirmar que esta sequência de passos na construção do triângulo equilátero que aparece na figura 7 constitui uma prova? No sentido de uma prova formal, como defendem alguns pesquisadores, a resposta seria não, principalmente por não conter uma linguagem simbólica e não seguir os padrões da lógica. Porém no sentido de uma prova informal, uma prova prática, cujo objetivo seja buscar o convencimento de um público alvo sobre uma determinada afirmação, pode ser.

Até mesmo pela simples observação da figura 8 é possível que muitos reconheçam como verdadeira a possibilidade da construção do triângulo equilátero, somente com o uso de régua e compasso, sem a necessidade de elaborar a prova dos *Elementos* de Euclides para a compreensão e aceitação da afirmação. É claro que, caso não se tenha o insight observando a figura, talvez a leitura da prova possa esclarecer ou iluminar o aluno para encontrar ou entender a solução do problema.

Mas diferentemente deste exemplo, existem casos em que a figura por si só mostra mais do que a prova escrita, pois o excesso de formalismo pode complicar. Se observarmos bem, talvez a sequência de diagramas apresentada na figura 7 possa ser compreendida como uma sequência de passos, que verifica uma afirmação, explica e comunica (muitas vezes mais do que se estivesse escrita numa linguagem formal). Ou seja, esta sequência de diagramas satisfaz diversas funções de uma prova matemática, conforme propõe Villier. Logo, talvez possa ser aceita como uma prova informal.

Ainda somos reticentes em aceitar estes diagramas como uma autêntica prova matemática, mas podemos admitir ao menos que a utilização de figuras e diagramas auxilia a construção da prova, tornando-se indispensável muitas vezes, para a sua compreensão.

Na próxima seção apresentaremos o que se entende por prova sem palavras, daremos exemplos deste tipo de prova, comentaremos esses exemplos e ao fim voltaremos a refletir se uma representação visual pode ser ou não considerada uma prova matemática.

5. PROVAS SEM PALAVRAS (Proof Without Words - PWW's)

No tópico anterior consideramos uma representação visual como aquela obtida por meio de imagem mental, por computadores, ou imagens desenhadas no papel, como gráficos e diagramas. Diante dessa ideia de representações visuais encontramos as provas sem palavras.

O que são as provas sem palavras? Segundo Alsina e Nelsen: “Geralmente, as provas sem palavras são as imagens ou diagramas que ajudam o leitor a perceber porque uma determinada instrução matemática pode ser verdade, e também para ver como se pode começar a provar a sua veracidade”. (Alsina, C. Nelsen, R. B., 2010, p.118) Segundo Casselman: “Uma prova sem palavras pode ser pensada como uma 'prova' que faz uso de representações visuais, ou seja, imagens ou outros meios visuais para mostrar uma idéia matemática, equação ou teorema” (Casselman, 2000 apud Gierdien 2007). Logo essas definições para prova sem palavras estão de acordo com nossa ideia de representação visual.

Prova sem palavras começou a aparecer na *Mathematics Magazine* em 1975, e no *College Mathematics Journal* dez anos depois, mas suas primeiras aparições devem ter sido na Grécia Antiga e na China, e mais tarde no século X na Arábia e Itália renascentista, segundo consta em Alsina e Nelsen (2010).

Podemos encontrar provas sem palavras em diversas áreas da matemática, como geometria, trigonometria, cálculo e análise combinatória. Nosso objetivo agora será apresentar algumas provas sem palavras que podem ser encontradas em artigos como (Alsina, C. Nelsen, R. B., 2010) e (Gierdien 2007). Mas além de apresentarmos exemplos, também pretendemos explicar a ideia de cada uma das provas sem palavras mostradas a seguir.

Alsina e Nelsen utilizam basicamente o método da prova combinatória, baseada em dois princípios de contagem, relacionando assim os números naturais com objetos de um conjunto. Os princípios são:

1. Se você conta objetos de um conjunto de dois modos distintos, você obterá um mesmo resultado;

2. Se dois conjuntos estão em correspondência 1-1, então eles têm o mesmo numero de elementos.

O primeiro princípio é chamado de princípio de Fubini e o segundo é conhecido como princípio de Cantor. As duas técnicas de prova também são conhecidas como método de contagem e método bijetivo respectivamente.

Começemos com o exemplo da soma dos n primeiros números naturais:

$$\text{Exemplo 1: } 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Temos a seguinte prova sem palavras:

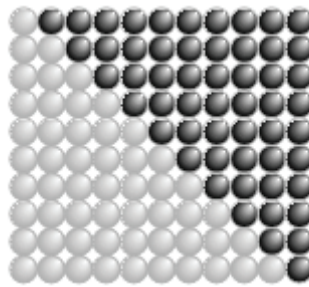


FIGURA 20 (Alsina, C. Nelsen, R. B., 2010, p.120).

Poderíamos questionar esta prova sem palavras pelo fato do argumento ser enunciado somente para o caso particular de $n = 10$. Podemos ver dois triângulos com a mesma quantidade de bolas formando um retângulo, logo, como a quantidade de bolas no retângulo é dada por $10 \times 11 = 110$, para encontrar a soma $(1+2+\dots+10)$ bastaria dividir por dois, encontrando 55 como resultado, pois esta soma está representada por um triângulo.

Por outro lado, apesar de sabermos que se trata de um caso particular, acreditamos que a figura 9 possa induzir a generalização do resultado. Poderíamos pensar a partir da figura que para encontrar a soma $1 + 2 + 3 + \dots + n$ bastaria encontrarmos o número de bolas de um retângulo de lados n e $n+1$, e logo após dividir por dois, encontrando a igualdade pretendida. Veja que essa figura também pode levar a pensar na soma dos extremos que dão o mesmo resultado, $(1+10) = (2+9) = (3+8) = \dots = (9+2) = (10+1)$, ou seja, podemos explorá-la de diversas formas.

Outra prova sem palavras que encontramos para o exemplo 1 é dada a seguir:

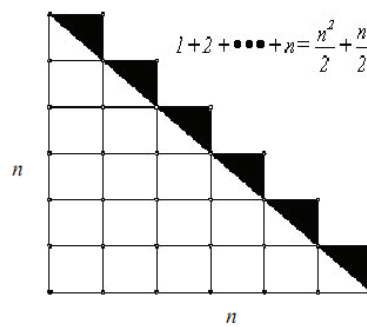


FIGURA 21 (Gierdien, M Faaiz, 2007, p.57).

Para chegar à conclusão neste caso basta observar que, se retirássemos a região pintada de preto (n triângulos), ficaríamos com um triângulo com catetos de medidas iguais a n e, portanto, o número de triângulos congruentes aos triângulos pintados de preto (os que foram retirados) seria igual à metade do número de triângulos de um quadrado de lado n , ou seja, n^2 triângulos menores. Bastaria em seguida somar a quantidade de triângulos retirados, que seria igual a n , encontrando $n^2 + n$ como resultado. Mas, como os números naturais estão representados por quadrados, e não por triângulos, e sabendo que um quadrado é formado por dois desses triângulos, para encontrar o resultado pretendido basta dividir a quantidade de triângulos por dois encontrando o número de quadrados que representa a soma dos n primeiros números naturais, que é igual a $\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}$.

Exemplo 2: a soma dos n primeiros números ímpares é igual a n^2 . Ou de outra maneira: Para todo $n \geq 1$ temos que $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Duas provas sem palavras são sugeridas:

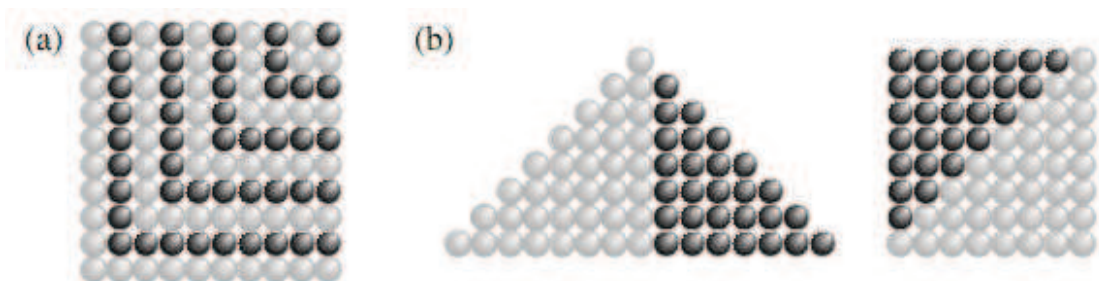


FIGURA 22 (Alsina, C. Nelsen, R. B., 2010, p.121).

Na figura 11 (a), temos os números ímpares maiores que 1 representados pelas formas de L (o número 1 está representado pela bola preta no canto superior direito). Facilmente podemos obter a soma, por exemplo $1 + 3 + 5$ contando

visualmente o número de bolas até o segundo L com 5 bolas, que é o mesmo que contar o número de bolas de um quadrado com 3 bolas de lado. Assim, podemos concluir a afirmação pelo princípio de Fubini.

Na figura 11 (b), podemos observar uma correspondência 1-1 ilustrada pela cor das bolas entre o triângulo formado pela soma dos n primeiros números ímpares e o quadrado formado por n^2 bolas.

Podemos encontrar exemplos de provas sem palavras também em séries geométricas, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo 3: Temos que: $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \dots = \frac{1}{3}$

Para esta igualdade temos a seguinte prova sem palavras:

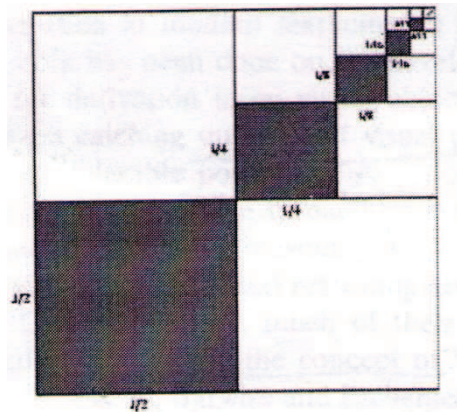


FIGURA 23 (Hanna G., Sidoli N., 2007, p.76).

A ideia para construção desta prova sem palavras é a seguinte: construímos um quadrado de lado 1, o subdividimos em 4 quadrados e pintamos 1 deles, cuja área mediria $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ (que é a primeira parcela da soma), conforme podemos observar na figura 4. Agora selecionamos outro quadrado de lado $\frac{1}{2}$ e subdividimos em 4 outros quadrados e pintamos um deles, esse quadrado terá área $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ (que é a segunda parcela da soma), e assim por diante. Teremos, assim, que a soma das áreas dos quadrados pintados é igual ao somatório do lado esquerdo da igualdade.

Agora bastaria descobrirmos o porquê dessa soma ser igual a $\frac{1}{3}$, o que não é tão complicado. Uma forma de ver seria observar que, se tapássemos o quadrado do campo superior direito, nos restariam três quadrados, dos quais um está pintado e, portanto, representa $\frac{1}{3}$ desta figura em forma de L. Se imaginarmos a mesma coisa para os demais quadrados (até para aqueles que não podemos ver), poderemos crer que a soma das áreas dos quadrados pintados será exatamente igual a $\frac{1}{3}$.

A crítica que se faz a este tipo de argumento é que, por exemplo, não conseguimos visualizar o 100º quadrado pintado, mas por outro lado, sabemos que podemos imaginar a continuação deste processo de divisão de quadrados.

Apresentaremos a seguir um exemplo em que as provas sem palavras aparecem também em 3D, conforme o exemplo 4:

Exemplo 4: Observe a sequência de identidades:

$$1 + 2 = 3$$

$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$

$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15, \text{ etc.}$$

De uma maneira geral temos que:

$$n^2 + (n^2 + 1) + \dots + (n^2 + n) = (n^2 + n + 1) + \dots + (n^2 + 2n)$$

A Prova sem palavras sugerida é a seguinte:

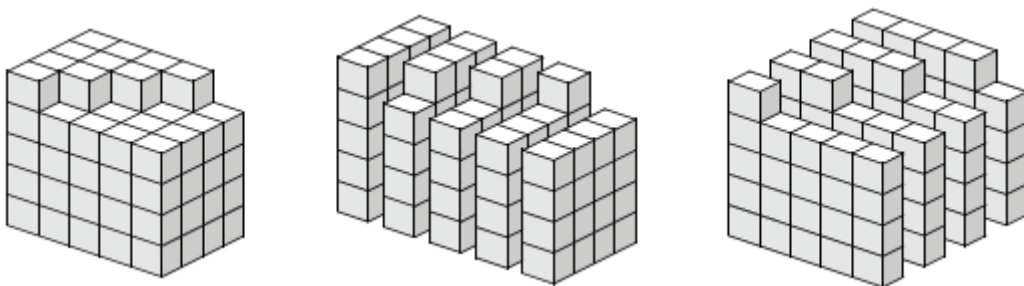


FIGURA 24 (Alsina, C. Nelsen, R. B., 2010, p.121).

Consideramos essa solução muito interessante, pois apesar de ser um exemplo particular para $n = 4$, que nos permite obter a identidade $16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$, temos uma idéia convincente da generalização, pois basta

pegar o bloco com 16 cubos e distribuir uma coluna com 4 cubos para cada outro bloco. De uma maneira geral, bastaria pegar o bloco com n^2 e repartir n cubos para os $(n - 1)$ blocos restantes.

Estas afirmações, para as quais apresentamos provas sem palavras, podem ser provadas por diferentes métodos de prova, como o método de indução matemática. Nos exemplos que trabalhamos utilizamos números naturais, adaptado à prova por indução. Já no caso da série geométrica, poderíamos argumentar utilizando a análise matemática.

A ideia aqui não é propor de modo algum que não utilizemos mais a linguagem escrita e verbal, nem que não formalizemos nossas provas matemáticas. Também não queremos afirmar que uma é mais simples que a outra, principalmente porque nas provas sem palavras, se não conseguirmos alcançar o insight, não entenderemos a prova. Talvez uma prova por indução, por exemplo, possa exigir menos esforço cognitivo do que uma prova sem palavras, e não sabemos reconhecer o limiar para julgar qual é mais simples.

Apenas sugerimos mostrar a existência da prova sem palavras, seja no ensino fundamental, médio ou superior. Podemos utilizar uma prova sem palavras com nossos alunos, permitindo que eles descubram porque a afirmação é verdadeira. Ou então, dada uma afirmação escrita de forma simbólica, propor que, se possível, ele faça uma prova sem palavras.

Mas será que podemos reconhecer uma prova sem palavras como uma prova matemática? Bem, de acordo com o que apresentamos no tópico sobre prova matemática, esta é uma questão extremamente delicada. O que podemos dizer é que alguns pesquisadores acreditam que uma prova sem palavras possa ser considerada uma prova matemática. Por exemplo, Barwise e Etchemendy afirmam que *as formas de representação visual podem ser importantes... como elementos legítimos de provas matemáticas*. (Barwise e Etchemendy, 1991, p. 9 apud. Arcavi, A. 1999, p.32).

Brown também se enquadra neste caso, pois segundo Hanna:

Brown apresenta uma série de teoremas sobre somas e limites, e segue a afirmação desses teoremas com “prova-imagem”. Cada um deles consiste em uma única figura. Ele então dá uma prova tradicional para comparação. A apresentação de Brown sugere que ele acredita que estas imagens constituem provas no mesmo nível que os argumentos tradicionais que os

seguem, de acordo com sua posição declarada (Hanna G., Sidoli N., 2007, p.77).

Ainda sobre a utilização da representação visual como prova, Borwein e Jörgenson, de uma forma mais moderada, sugerem três condições necessárias, mas não suficientes, para uma prova visual aceitável, como expõe Hanna(2007):

Confiabilidade: Que os meios de se chegar à base da prova sejam confiáveis e que o resultado seja invariável em cada verificação.

Consistência: Que os meios e finais das provas sejam consistentes com outros fatos conhecidos, as crenças e as provas.

Repetibilidade: Que a prova possa ser confirmada por outros, ou provada por outros.

Por outro lado, encontramos muitos que não concordam com o fato da prova sem palavras ser uma prova matemática, como por exemplo, temos essa citação de Hadamard encontrada em Arcavi:

Pode-se argumentar que o que precede não é (a) "sem palavras", nem (b) "uma prova". Porque (a), embora inferências verbais não sejam explícitas, quando vemos, estamos mais propensos a decodificar a imagem por meio de palavras (ou em voz alta, ou mentalmente) e (b) pelo padrão de Hilbert, uma prova para ser considerada como tal é se é "arimetizável", caso contrário seria considerada inexistente (Hadamard, 1954, p. 103 apud. Arcavi, A. 1993, p. 32).

Há ainda pesquisadores que defendem a representação visual, de uma maneira geral, como parte integrante da prova, conforme verificamos em Casselman: *Apesar de termos imagens melhores e piores (...), estas muitas vezes desempenham um papel crucial na demonstração lógica. Além de como ferramenta de compreensão ser indispensável.* (Casselman, 2000, p.1257)

Enfim, a prova sem palavras pode ser considerada uma prova informal, no sentido em que ela pode convencer quem alcança o insight necessário à compreensão da prova. Além disso, este tipo de prova pode ser uma ferramenta poderosíssima na busca de uma demonstração mais formal.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Pudemos observar que poucos pesquisadores em educação matemática no Brasil trabalham sobre o tema da prova matemática. No contexto geral, identificamos algumas posições acerca do conceito de prova matemática, relacionando pontos de vista distintos, principalmente no que diz respeito à ideia de prova formal e prova informal.

Seja admitindo uma representação visual como uma prova, ou como parte integrante de uma prova, ou ainda como um auxiliar na descoberta e na construção de uma prova, ela tem grande importância. Sendo assim, não podemos negligenciá-la, como foi feito no fim do século XIX com a formalização exacerbada da matemática. Sabemos que este movimento afetou não somente a pesquisa, mas também o ensino e a aprendizagem de matemática.

Devemos ter muita cautela na utilização das representações visuais, pois elas podem enganar e nos levar ao erro, mas não podemos por isso deixar de utilizá-la, pois vimos que ela pode ser útil seja para pesquisadores ou para professores e estudantes.

Apesar de haver muitas críticas em relação às provas sem palavras, observamos que elas podem ser úteis, pois podem convencer, podem ser explicadas e até sugerirem uma “prova com palavras”. Além disso, este tipo de prova pode ser um ótimo exercício mental, não só para se descobrir e se crer na validade das afirmações, mas também é possível construir uma prova sem palavras para uma afirmação provada, que aumente a compreensão. Ou seja, se lembrarmos os papéis de uma prova, as provas sem palavras podem ajudar nas funções de verificação, explicação, descoberta, comunicação e desafio intelectual.

Gostaríamos de ressaltar que há estudos sobre prova matemática tendo como foco o processo de ensino-aprendizagem, seja no âmbito psicológico ou social (Harel G., Sowder L. 1998, 2007 Alcock L., Weber K. 2005), mas deixaremos para refletir sobre estes e outros aspectos em futuros trabalhos. Esperamos ajudar a divulgar o tema da representação visual e da prova sem palavras com o fim de estimular uma maior atenção daqueles que trabalham com ensino de matemática, sobretudo porque os professores provam, mas poucas vezes ensinam a provar.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALCOOK L., WEBER, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and checking warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, 24: 125-134.
- ALSINA, C. NELSEN, R. B. (2010). An invitation to proofs without words, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 3, pp. 118-127.
- ARCAVI, A.(1999), The role of visual representations in the learning of mathematics, Disponível em: < www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/pdf/26.pdf> , Acesso em: 09 Jan. 2010.
- BALACHEFF, N., Sutherland R. (1999) Didactical complexity of computational environments for the learning of mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 4, pp. 1-26.
- BALACHEFF, N. (2006) Bridging knowing and proving: the complexity of the epistemological genesis of mathematical proof. *Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives*. Duisburg, Novembre (proceedings under preparation)
- BALACHEFF, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *Mathematics Education*, 40: 501-512
- BALACHEFF, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective, *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, 115-136, Springer.
- BROWN, J. R. (1997). Proofs and pictures. *British Journal for the Philosophy of Science*, 48, 161-180.
- BUSSI, M. B. et al. (2007). Approaching and developing the culture of geometry theorems in school – A theoretical Framework, *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, Paolo Boero, 211-217, Sense publishers.
- CASSELMAN, B. (2000). Pictures and proofs. *Notice of the AMS*, 47, 1257-1266
- DAVIS, P.J. (1993). Visual theorems, *Educational Studies in mathematics*, 24, 333-344.
- DAWSON, J. W., Jr, (1979). The Gödel incompleteness theorem from a length-of-proof perspective. *American Mathematical Monthly*, 86, 740-747
- DAWSON, J. W., Jr, (1993). The compactness of first-order logic: from Gödel to Lindström. *History and Philosophy of Logic*, 14, 15-37.

- DAWSON, J.W., Jr, (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica* (3) 14, 269–286.
- DE VILLIERS, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o Sketchpad. *Educação e Matemática*, Março/Abril, nº. 62, pp. 31-36.
- DE VILLIERS, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics, *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, 205-222, Springer.
- GIAQUINTO, M. (2005). From symmetry to basic geometry, *Vizualization, Explanation and Reasoning in Mathematics*, 31-55. Springer.
- GIAQUINTO, M. (2007). *Visual thinking in mathematics: an epistemological study*, 1-287, Oxford university press.
- GIERDIEN, M. F. (2007). From ‘proofs without words’ to ‘proof that explain’ in secondary mathematics, *Pythagoras*, 65, pp. 53-62
- HANNA, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21 (1), 6-13.
- HANNA, G., JAHNKE, N. (1993). Proof and Aplication, *Educational Studies in mathematics*, 24, 421-438.
- HANNA, G., BARBEAU, E. (2010). Proofs as Bearers of Mathematical Knowledge, *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*, 85-100, Springer.
- HANNA, G. (1996). The Role of Proof in Mathematics Education. *Joetsu Journal of Mathematics Education*, 11, 155-168. (In Japanese)
- HANNA, G. SIDOLI, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *Mathematics Education*, 39: 73-78.
- HAREL, G. & SOWDER, L. (1998). Student’s Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. *CBMS Issues in Mathematics Education*, 7, 234-283.
- HAREL, G., & SOWDER, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof, In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, National Council of Teachers of Mathematics.
- HERSH, R. (1993). Proving is convincing and explaining, *Educational Studies in mathematics*, 24, 385-399.
- HERSH, R. (1997). Prove – Once More and Again, *Philosophia Mathematica* (3), Vol. 5, 153 – 165.
- HOYLES, C. HEALY, L. (2007). Curriculum change and geometrical reasoning, *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, Paolo Boero, 81-115, Sense publishers.

MANCOSU, P. et al. (eds.) (2005). Visualization in Logic and Mathematics, *Vizualization, Explanation and Reasoning in Mathematics*, 13-30. Springer.

MARIOTTI, M. A. (2007). Geometrical proof: The mediation of a microworld, *Theorems in school: from history, epistemology and cognition to classroom practice*, Paolo Boero, 285-304, Sense publishers.

PCNEM – Disponível em:

<portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>, p.75, Acesso em: 13 Dez. 2010.

RAV, Y. (1999) Why do we prove theorems? *Philosophia Mathematica* (3) 7: 5-41.

ROTA, G.C. (1997). The phenomenology of mathematical proof, *Synthese*, 111, pp. 183–196.

SIU, M.K. (1993). Proof and pedagogy in ancient China: Examples from Liu Hui's commentary on Jiu zhang suan shu, *Educational Studies in mathematics*, 24, 345-357