Marcos Paulo Ferreira de Araújo

Introdução ao Conceito de Números Reais: Uma Proposta Didática Baseada na História da Matemática

Rio de Janeiro

2011

Marcos Paulo Ferreira de Araújo

Introdução ao Conceito de Números Reais: Uma Proposta Didática Baseada na História da Matemática

Dissertação apresentada à coordenação de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática

Orientadora:
Profa. Dra. Tatiana Marins Roque

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
INSTITUTO DE MATEMÁTICA

Rio de Janeiro

2011

Araújo, Marcos Paulo Ferreira de.
A663i Introdução ao conceito de número reais: uma proposta didática baseada na história da matemática / Marcos Paulo Ferreira de Araújo. -- Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2011.
viii, 47f.: il. ; 30 cm.
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2011.
Orientador: Tatiana Marins Roque.
Referências: f.45-47.
1. Números reais. 2. Matemática-História. 3. Matemática- Estudo e ensino. I. Roque, Tatiana Marins. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

Agradecimentos

Gostaria de deixar registrado meu agradecimento a todos os professores do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática. O compromentimento desses professores com a melhoria da qualidade do ensino de matemática através da prática e da pesquisa acadêmica há de ser compensado com um Brasil melhor.

Particularmente gostaria de agradecer à minha orientadora professora Tatiana que conseguiu me acalmanr quando tudo parecia perdido (e pra mim tudo sempre parecia perdido). Obrigado mil vezes pela sua paciência e boa vontade em me guiar por esse caminho (agora menos) tenebroso da História da Matemática.

Agradeço ainda a todos os meus colegas de curso que sempre me trataram com respeito, espero ter tratado a todos com o mesmo respeito. Especialemtne agradeço ao Ledo pelos milhões de cafés que tomamos juntos: muitas idéias boas surgiram ali.

À minha família, alem da minha gratidão, deixo registrado um pedido de desculpas pela minha negligência e ausência em tantos momentos. Deixo também a promessa de que passarei o resto da minha vida tentando compensar tudo de ruim que eu tenha feito vocês passarem para que eu pudesse terminar meu trabalho.

À minha avó
Julia
in memorian

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma proposta didática para a introdução do conceito de número real baseada na história da matemática.

Nosso objetivo é mostrar que a abordagem que leva em consideração as circunstâncias históricas pode ser tão contundente quanto as abordagens usuais apresentando vantagens ao ressaltar aspectos normalmente obscurecidos pelo tratamento comum.

No caso do conceito de número real, visamos tornar mais natural, mas não trivial, as necessidades de extensões do conceito de número, desde a apresentação dos números inteiros, até o ocnceito de número real passando pelos números racionais. Para isso, nos baseamos nos fortes indícios apresentados por Fowler e Knorr, eminentes historiadores da matemática, da existência de teorias das razões no seculo quarto a. C. que teriam sido suplantadas, e posteriormente esquecidas, dando lugar à teoria das proporções de Eudoxo.

Buscamos, portanto, uma proposta didática que pudesse servir de base para outras pesquisas em ensino fortalecendo a ideia de uma educação matemática que possa comunicar-se com os avanços recentes das metodologias de pesquisa em história da matemática.

Palavras-chave: História da Matemática, Números Reais, Antifairese, Grécia Antiga.

Abstract

This work presents a didactic proposal for an introduction of the concept of real numbers, based on the history of mathematics.

Our goal is to show that the approach that takes into account the historical circumstances that can be as compelling as the usual approaches with advantages to highlight the aspects that are usually obscured by common teachings.

In the case of the concept of real numbers, we aim to become more natural, but not trivial, the needs for extensions of the concept of numbers, since the presentation of whole numbers, up to the concept of real numbers, passing through the rational numbers. For this, we rely on the strong evidence presented by Fowler and Knorr, the eminent historians of mathematics, of the existence of theories of ratio in the fourth century A. C. that would have been superseded, and later forgotten, and giving rise to the theory of proportions of Eudoxus.

We seek, therefore, a didactic proposal that could serve as a basis for further research in education by strengthening the idea of the mathematics education that can interact with the recent advances of research methodologies in the history of mathematics.

Sumário

1 Introdução

Nas últimas décadas diversos artigos vêm propondo a inserção da História da Matemática como recurso didático. Desse modo, sua utilização é encorajada a partir de diversos argumentos em seu favor apontando suas vantagens bem como assinalando recursos para contornar desvantagens ou dificuldades que possam emergir a partir de sua utilização em sala de aula. Desse ponto de vista, a História da Matemática viria a compor, juntamente com os demais recursos didáticos, o grande conjunto de ferramentas disponíveis para o professor no processo de ensino-aprendizado.

Sem questionar a potencialidade da História da Matemática como ferramenta didática, consideramos que tratar a história do conceito apenas como um recurso didático para sua abordagem é inadequado e questionamos o distanciamento provocado por esse enfoque entre conceito a ser ensinado e sua história. Em outras palavras, consideramos que o conhecimento da evolução histórica de um conceito está inexoravelmente incluído no conhecimento do próprio conceito. Mais do que isso, a dissociação entre esses elementos torna a abordagem, a partir da história de um conceito, artificial, o que prejudica consideravelmente o potencial do seu uso em sala de aula.

Tomamos nesse artigo, o caso da introdução do conceito de número. As dificuldades que envolvem o ensino desse conceito têm sido protagonistas de diversos artigos na área de educação e ensino da Matemática. Embora abundante, a literatura revela-se incapaz de provocar uma mudança de atitude no cotidiano escolar. Trata-se de um caso em que a intervenção direta proposta nos diversos relatos de experiência, embora em muitos casos bastante criativos e interessantes, mostra-se impossível de serem reproduzidos dada a falta de preparo dos professores. Uma mudança no paradigma da visão do conceito incluindo seu desenvolvimento histórico é, como deve ser, não trivial e, como tal, necessita de uma formação específica que seja capaz de incluir esse novo paradigma na realidade do professor de sala de aula.

Propomos aqui, portanto, uma atividade a ser desenvolvida em cursos de formação continuada e aperfeiçoamento de professores. Nela fazemos uso de elementos da evolução do conceito de número tentando resgatar o momento em que as grandezas deixaram de serem tratadas como tal e receberam um tratamento de número sem o amadurecimento necessário para a compreensão de ambos os conceitos. Intriga-nos que a comparação entre áreas de retângulos não passem agora de comparação entre os produtos de suas bases pelas suas respectivas alturas. Mais do que isso, a redução das grandezas às suas medidas e, consequentemente, à “algebrização” por meio de fórmulas estendam-se às apresentações das ampliações dos domínios numéricos. Passa-se dos naturais aos racionais porque não é possível resolver a equação $2n - 3 = 0$ com n natural, no entanto porque resolver tal equação é relevante para o aluno? Essa justificativa é, no mínimo, artificial demais para ser considerada suficiente.

Nossa atividade trata basicamente da comparação entre grandezas, particularmente de segmentos, a partir da descrição dessa comparação feita de modo natural. Dessa descrição, alegadamente, haveria emergido uma teoria de razões que precede a teoria das proporções de Eudoxo. Fazemos então uma revisão nos trabalhos de dois eminentes historiadores da matemática, especialistas na matemática da Grécia antiga, resgatando indícios da existência de tal teoria. A análise desses indícios mostra-se tão rica quanto a própria atividade e foi concebida para trabalhar juntamente com a atividade no reforço da formação do professor. A atividade sozinha nada tem de história da ciência assim como a análise descrita anteriormente nada tem de didática, mas quando conjugadas podem, no nosso entendimento, fortalecer a compreensão do professor sobre a visão de como tratar um tema levando em consideração o desenvolvimento histórico dos conceitos envolvidos.

2 Metodologia

2.1 História como Ferramenta Didática

O fortalecimento nas últimas décadas da comunidade de historiadores da ciência com um aumento considerável na produção de artigos nessa área, particularmente na história da matemática, nos convida a um novo olhar sobre a sua utilização como recurso didático. Consideramos essa revisão um passo importante na implementação efetiva de uma metodologia que consiga ser coerente com os diversos aspectos envolvidos nessa utilização. Buscamos, portanto, conjugar os avanços consideráveis das pesquisas em educação e ensino da matemática com a noção moderna de pesquisa em história da matemática.

2.2 Abordagem Modular

Jankvist (2009) categoriza os argumentos que sugerem a utilização da história da matemática em sala de aula em duas classes principais sendo a primeira a da *história como ferramenta* e a segunda a da *história como objetivo*. Jankvist ainda propõe um "conjunto de lentes sob as quais as diferentes abordagens da história da matemática em educação podem ser vistas" (JANKVIST, op. cit., p.251). Os três tipos de abordagens tratadas são:

- *Abordagem para Iluminação*, na qual a história da matemática seria uma maneira de trazer um determinado assunto à tona e desaparecendo de cena em seguida para dar lugar ao tratamento moderno do assunto;
- *Abordagem Modular*, que se insere como um parêntese nos assuntos comumente ensinados com princípio meio e fim voltando os olhares à peculiaridades que passariam despercebidas sem sua intervenção;
- *Abordagem Histórica*, que envolve uma reformulação do próprio currículo enfatizando o processo histórico (motivações, obstáculos, tentativas, erros e acertos) de construção do

conhecimento mais do que o próprio conteúdo criado a ser ensinado.

Cada uma dessas abordagens é mostrada em comunicação constante tanto com a *história como ferramenta* quanto com a *história como objetivo* e essa comunicação revela as relações entre os *comos* e os *porquês* de se usar história da matemática, segundo o autor.

A atividade proposta no presente trabalho se aproxima bastante da descrição da abordagem modular a medida que propõe uma sequência com início desenvolvimento e fim abrindo espaço para intervenções do professor objetivando ressaltar aspectos como a perda do princípio da boa ordem, a densidade dos números racionais sobre os reais e a completude dos números reais.

2.3 Restrições artificiais

A atividade é composta de exercícios utilizando uma noção de número restrita artificialmente para *imitar* aquela dos gregos. A restrição artificial é criada no início da atividade em que propomos uma definição de número e de grandeza limitando seu tratamento e sua manipulação aos permitidos pela definição. O uso desse artifício se deve à impossibilidade de se recriar o contexto no qual houvesse uma restrição natural. Dada a carga cultural, escolar e cotidiana, trazida pelos alunos, consideramos totalmente inapropriado pedir que esses alunos comportem-se como matemáticos da Grécia antiga.

Buscamos então em proeminentes historiadores especializados em história da matemática grega, em particular nos trabalhos de Knorr (1975) e Fowler (1979, 1999) a inspiração para os exercícios e, a eles, devem-se as notações usadas tanto nas definições quanto nos exercícios.

O uso da notação moderna foi feito de maneira cuidadosa para não distorcer as noções gregas com a visão atual. Não foi instituída nenhuma álgebra de grandezas, de modo que quando subtraímos duas grandezas, por exemplo, essa subtração não deve remeter à operação de subtração no sentido contemporâneo. Vale ressaltar que quando nos referimos a uma grandeza A, não estamos nos referindo à sua medida. Por exemplo, se desejamos fazer uma subtração entre dois segmentos não congruentes, temos como resultado um terceiro segmento e não a diferença entre as medidas dos segmentos envolvidos na operação.

O desenvolvimento da atividade propõe uma abordagem a partir de um princípio genético, mais precisamente, segundo a classificação de Schubring (apud JANKVIST, 2009) um “principio psicológico-genético”, onde os alunos são convidados a redescobrir o conceito, no nosso caso de número real, a partir de uma construção própria, guiada pela atividade proposta.

Consideramos que, nesse sentido, nos aproximamos do que Jankvist classifica de *história* *como objetivo*, pois aproxima o aluno da atividade intrinsecamente humana de fazer matemática. Não se trata, no entanto de pensar que

> "Crianças devem repetir o processo de aprendizado da humanidade, não como ela fatualmente aconteceu mas, ao invés disso, como teria acontecido se as pessoas do passado tivessem conhecido um pouco mais do que sabemos agora." (FREUDENTHAL, 1991 apud JANKVIST, 2009, pp.248-249, tradução nossa)

pois consideramos que uma abordagem nesse sentido afasta a proposta de utilização da história da matemática a medida que ignora o contexto social e filosófico do período onde o conceito que se pretende ensinar foi criado.

3 A Noção de Razão na Matemática da Grécia Antiga

Por matemática da Grécia antiga, Fowler (1999) entende a "fase de desenvolvimento que culminou nos trabalhos de Euclides e Arquimedes". A limitação causada pela escassez de fontes dessa época faz com que o trabalho do historiador da ciência pareça, até certo ponto, especulativo. De certo modo, seu trabalho é preencher as lacunas a partir dos fragmentos aos quais tem acesso. Nas palavras de Wilbur R. Knorr,

> "Basicamente, o registro grego é fragmentário; possuímos alguns tratados matemáticos virtualmente concluídos, outros parcialmente e outros com apenas trechos aleatórios preservados por acidente em obras derivadas, além de uma reduzida literatura para matemática como os textos da lógica de Platão e Aristóteles, por exemplo. Nesta circunstância, a literalidade seria desastrosa."(KNORR, 2001, p.122, tradução nossa)

Grande parte do que se conhece sobre a matemática na Grécia antiga parte de conclusões tiradas de um exame minucioso, por um lado, dos escritos de Platão e Aristóteles, e de outro, dos *Elementos* de Euclides. No caso deste último, acredita-se que este livro seja, na realidade, uma compilação de conhecimentos matemáticos anteriores, ainda que a forma da exposição deva ser característica do tempo e do meio em que Euclides viveu.

Comecemos, portanto, pelos *Elementos,* no qual Euclides apresenta dois tipos de teoria das proporções. Há uma versão no livro VII que pode ser aplicada somente à razão entre inteiros. Esta versão, atribuída aos pitagóricos, pode ser facilmente estendida para razões entre grandezas comensuráveis. A segunda versão, presumidamente posterior à primeira, está contida no livro V e é atribuída ao matemático platônico Eudoxo. Esta teoria das proporções é bastante sofisticada e se aplica igualmente a grandezas comensuráveis e incomensuráveis.

W. Knorr contesta a tese de que a primeira versão da teoria das proporções possa ser atribuída aos pitagóricos, ao menos do modo formal como ela é exposta nos *Elementos*. Segundo este historiador, o desenvolvimento formal da matemática deve ter se iniciado com os trabalhos de Teeteto, no início do quarto século a. C. Comparando os dois tipos de teoria das proporções expostas por Euclides, há motivos históricos para se acreditar que a inadequação da teoria numérica para tratar as grandezas incomensuráveis tenha levado à busca de uma técnica que pudesse ser aplicada a elas de modo confiável. Como a técnica da antifairese já era conhecida para números, os matemáticos da época tentaram estender a teoria das proporções por meio desta mesma técnica, com o objetivo de obter uma teoria que pudesse incluir os incomensuráveis.

Neste contexto, surgiram questões técnicas difíceis com as quais os matemáticos tiveram que lidar, o que os teria levado a expressar a teoria das proporções de um modo mais meticuloso e formal, de forma a evitar os erros e enganos oriundos de um modo intuitivo de comparar grandezas.

Há diversos exemplos pré-euclidianos de comparação de grandezas. Os babilônios já lidavam com problemas envolvendo o estudo da semelhança de certas figuras e os primeiros matemáticos gregos, como Heródoto, tratavam exemplos envolvendo razões entre medidas de figuras geométricas.

Os escritos de Heródoto constituem o único documento do século V a.C. contendo um estudo de razões e proporções entre figuras geométricas. Estes estudos incluíam a comparação de segmentos de círculos. Heródoto sabia, por exemplo, que a razão entre as áreas de dois segmentos de círculo semelhantes é igual à razão entre o quadrado de suas cordas. Para chegar a este resultado, ele chegou a demonstrar que a razão entre as áreas de dois círculos é igual à razão entre o quadrado de seus diâmetros.

Esta demonstração, de uma época bem anterior à de Eudoxo, exigia um conhecimento profundo de razões e proporções. Uma das hipóteses mais confiáveis, defendida por historiadores como Freudenthal, Knorr e Fowler, é a de que o método da antifairese estava na base de uma teoria das razões e proporções que era praticada, pelo menos, durante o século IV a.C. e que teria sido desenvolvida por Teeteto, matemático contemporâneo de Platão e pertencente ao seu círculo.

A possibilidade de existirem grandezas incomensuráveis não teria representado, assim, nenhum tipo de escândalo ou crise nos fundamentos da matemática grega. Ao contrário, a existência da incomensurabilidade seria uma circunstância positiva, pois seria responsável pelo desenvolvimento de novas técnicas matemáticas para lidar com razões e proporções.

No período pré-euclidiano, segundo algumas fontes indicam, as grandezas eram classificadas como comensuráveis em comprimento ou em potência (mais especificamente, em quadrado). Isto queria dizer que duas grandezas incomensuráveis, como o lado e diagonal do quadrado, apesar de não serem comensuráveis em comprimento, são comensuráveis em potência, pois seus quadrados são comensuráveis. Se temos, por exemplo, um quadrado de lado 1, este lado não é comensurável em comprimento com a diagonal (que sabemos medir $\sqrt{2}$). No entanto, seu quadrado 1 é comensurável com o quadrado da diagonal, que é 2. Podemos concluir, assim, que estas grandezas são comensuráveis em potência.

Esta distinção permite reduzir uma situação em que aparecem duas grandezas incomensuráveis a outra na qual existe uma comensurabilidade potencial. Ou seja, para lidar com exemplos em que eram consideradas razões particulares, como aqueles tratados por Hipócrates, não era necessário desenvolver uma teoria geral das razões e proporções.

No século IV, Teeteto teria refinado esta classificação das grandezas comensuráveis para incluir outras potências, para além dos quadrados. Este estudo, que consta no livro X dos Elementos de Euclides, incluía um tratamento mais refinado dos incomensuráveis e demandou uma nova técnica para comparar grandezas deste tipo. A técnica da antifairese, que já era conhecida para números, servia a este propósito e forneceu um meio para a constituição de uma primeira teoria geral das razões e proporções.

Proclus afirma que:

> “A teoria das grandezas comensuráveis foi desenvolvida, primeiramente, pela aritmética e depois, por imitação, pela geometria. Por esta razão, ambas as ciências definem grandezas comensuráveis como aquelas que estão uma para outra na razão de um número para outro número, o que implica que a comensurabilidade existiu primeiro entre os números” (Proclus, p.49).

Os matemáticos teriam forjado a noção de comensurabilidade para números, uma vez que a unidade é a medida de todos os números. Em seguida, eles teriam estendido esta noção para grandezas, mas não puderam encontrar uma medida comum para todas as grandezas. Por isto, a partir da descoberta dos incomensuráveis, a identificação entre grandezas e números, de modo geral, não será mais possível.

Sendo assim, aqui apresentaremos alguns aspectos da reconstrução da noção de razão na matemática da Grécia antiga baseada nos trabalhos de Fowler (1999, 1979) e Knorr (1975). Tal reconstrução apresenta apenas, como ressaltam os próprios autores, um certo grau de plausibilidade.

Alem disso,

> “O matemático é treinado para pensar na correção matemática sem um dimensionamento temporal, ou seja, pensar não historicamente. Obviamente é interessante saber como um evento histórico se mostra quando observado por um matemático do século vinte. Mas confundir isso com o que ele significava em sua época é uma má história.”(MAY, 1975, p.453, Tradução Nossa)

Desse modo, embora as noções modernas de número, razão, grandeza, etc. tragam consigo toda a carga de sua construção histórica, devemos alertar que os conceitos "homônimos" tratados nesse trabalho têm sentido filosófico e social bastante diferente dos contemporâneos.

3.1 Matemática Prática $\times$ Matemática Teórica

Se hoje, por exemplo, temos uma aritmética que trata tanto de números quanto das grandezas com suas respectivas medidas, há indícios (ASPER, 2009), de que na Grécia antiga havia um grupo de "calculistas" e "esticadores de corda" que tratavam da matemática pragmática dos cálculos monetários assim como daquela relativa à engenharia, enquanto o grupo dos teóricos tratava de questões filosóficas onde os números tinham um papel bastante diferente e sua aritmética não se aplicava às grandezas.

De fato, o pensamento platônico, imperativo nas obras de Euclides, visa apresentar os conceitos aproximando-os dos ideais inatingíveis pela realidade que apresenta apenas simulacros necessariamente imperfeitos desses conceitos.

Tais argumentos reforçam a existência de uma matemática prática que coexistia paralelamente à teórica, enfraquecendo observações anacrônicas de que "os gregos teriam dificuldade no tratamento dos processos infinitos" ou que "a descoberta da existência dos irracionais teria causado uma crise nos fundamentos da matemática grega".

Os indícios são mais fortes no sentido de que os processos infinitos, bem como os métodos de neusis para solução de problemas como a duplicação do cubo ou a trissecção do ângulo, eram relegados à matemática da prática, ao passo que os fundamentos da matemática previam um tratamento bem estruturado para os números e para as grandezas (incluindo as grandezas incomensuráveis entre si) sendo clara a distinção entre esses entes e, filosoficamente, importante trata-los de maneira diferente.

Entendemos, então, que a reconstrução de Fowler, baseada no trabalho de Knorr, propõe a existência de uma teoria das razões baseada no método das subtrações recíprocas que era capaz de tratar satisfatoriamente grandezas e números. A essa noção de razão Fowler dá o nome de *razão antifairética*, com referência ao método de antifairese, que significa, literalmente, subtrações recíprocas.

O conhecimento do procedimento de antifairese é dado como certo por vários historiadores, uma vez que no desenvolvimento dos Livros VII-IX dos *Elemntos* esse processo é aplicado à números inteiros. Por outro lado, o Livro V, que seria cronologicamente posterior aos citados anteriormente, já apresenta a teoria das proporções de Eudoxo.

A teoria das proporções de Eudoxo torna desnecessário um desenvolvimento de uma teoria de razões, visto que permite que, dadas quatro grandezas homogêneas, A, B, C e D, decidir se elas formam uma proporção, caso em que se denota $A : B :: C : D$, mesmo sem dar nenhuma interpretação para as razões $A : B$ e $C : D$. Desse modo, mesmo que na Definição V-3 se tenha que: "Sejam chamadas proporcionais as grandezas que tenham a mesma razão" (JOYCE, 1997), o critério para comparação não consiste em calcular cada uma das razões e compará-las.

3.2 Antifairese

A etimologia desta palavra já indica seu significado de "subtrações mútuas", ou "subtrações recíprocas": dados dois números (ou duas grandezas), subtrai-se, em cada passo, um múltiplo do menor do maior até que o resto seja menor do que o menor.

Quando este procedimento funciona, e nos permite encontrar a medida comum a dois segmentos, podemos reduzir a geometria à aritmética. A verificação da semelhança entre figuras pode ser reduzida à verificação de uma proporção aritmética e a proporção pode ser definida como uma igualdade de razões entre números.

Mas quando a antifairese não termina, temos o caso incomensurável, como no procedimento que usaremos adiante para demonstrar geometricamente a incomensurabilidade entre o lado e a diagonal do quadrado. Nesta situação, as definições de proporção pela igualdade de razões não serão mais aceitáveis e passarão a ser válidas apenas para o caso particular de grandezas comensuráveis.

Não se sabe ao certo em que exemplo a incomensurabilidade entre duas grandezas foi verificada pela primeira vez, mas acredita-se que o método da antifairese permitiu que se chegasse a esta conclusão. A possibilidade de existirem duas grandezas incomensuráveis tornou necessária uma teoria das razões e proporções independente da igualdade entre números.

Mais do que isso, o método da antifairese teria sido usado para desenvolver uma teoria de razão independentemente da noção de proporção. Segundo Fowler, três noções distintas de razão estariam presentes na tradição grega: uma vinda da teoria musical, outra da astronomia (que teria servido de base para as definições do livro V) e uma terceira baseada na antifairese, que seria a mais interessante.

Para este historiador da matemática, os gregos entendiam a razão 22:6, por exemplo, com base no fato de que podemos subtrair 6 de 22 três vezes, restando 4; em seguida, subtraímos 4 de 6, restando 2; e finalmente, subtraímos 2 de 4 exatamente duas vezes. Logo, a razão 22:6 seria definida pela seqüência “três vezes, uma vez, exatamente duas vezes”.

No caso geométrico, duas grandezas estariam na mesma razão quando possuem a mesma antifairese. Se tentarmos encontrar a razão entre a diagonal e o lado do quadrado por este procedimento, obteremos “uma vez, duas vezes, duas vezes, duas vezes,...”. Não é difícil admitir, com argumentos da matemática grega, que esta seqüência continua indefinidamente, o que bastaria para concluir pela incomensurabilidade.

A descoberta da incomensurabilidade, deste ponto de vista, não seria uma crise dos fundamentos da matemática, mas uma descoberta interessante que motivou novos desenvolvimentos da matemática. Logo, não seriam exatamente as questões de fundamento descobertas pelos gregos que teriam sido resolvidas por Dedekind, como se diz usualmente, pois as questões nos dois contextos seriam bem diferentes.

Para os gregos, a questão foi resolvida pela teoria das proporções de Eduoxo no campo da geometria. A colocação de que por mera falta de visão eles não tenham estendido o conceito de núimero é absurda, caso contrário eles teriam aceito, como números, os racionais. Portanto, quanto a discussão de porque os gregos não teriam construído os números irracionais,

> “[...] devemos perceber de uma vez que tal discussão não poderia ter emergido antes da resolução bem sucedida do problema dos números irracionais por Weierstrass e Dedekind no século XIX.” (KNORR, 2001, p. 124, tradução nossa, comentario nosso)

Afirmarmos que não houve crise não significa diminuir a importância da descoberta dos incomensuráveis. Há duas consequências importantes que precisam ser investigadas. A primeira delas é o fato desta descoberta ter produzido um divórcio entre o universo das grandezas e o universo dos números.

Segundo Aristóteles:

> “Para provar alguma coisa não se pode passar de um gênero ao outro, isto é, não se pode provar uma proposição geométrica pela aritmética (...) Se o gênero é diferente, como na aritmética e na geometria, não é possível aplicar demonstrações aritméticas a propriedades de grandezas” (Metafísica, Analíticos Posteriores, I.6-7 75a).

A segunda relaciona-se à necessidade de demonstração e ao desenvolvimento do método axiomático.

3.3 A Razão Antifairética

O conceito de razão encerra a idéia de comparação de tamanhos. Portanto, qualquer teoria de comparação pode ser encarada como uma teoria de razão. A diferença entre essas teorias está basicamente na maneira como é encarada a comparação. Desse modo, vemos que a definição de razão apresentada nos *Elementos* deve ser abrangente o suficiente para que possa se enquadrar nas diferentes teorias de razão: "Uma *razão* é um tipo de relação referente ao tamanho entre duas grandezas de mesmo tipo." (JOYCE, 1997, Livro V, Definição 3, tradução nossa, grifo do autor)

Cada um dos contextos em que a razão se enquadrava na Grécia antiga tinha sua teoria própria que ressaltava os aspectos desejados para seu propósito. Fowler apresenta as teorias de razão nos contextos da Matemática, da Música e da Astronomia. Cada uma dessas teorias é apresentada, em (FOWLER, 1999), a partir de um diálogo, conforme a tradição da escola platônica.

Na Matemática, Fowler apresenta a sua versão de uma continuação do diálogo de Platão (*Mênon*) em que Sócrates discute com Mênon e seu Escravo sobre o problema da duplicação do quadrado. Na continuação desse diálogo, proposta por Fowler, Sócrates incentiva o Escravo de Mênon a encontrar sua definição de razão que discutiremos aqui.

Após o diálogo com Sócrates, o Escravo parte em uma peregrinação visando entender outros aspectos do conceito de razão. Assim Fowler apresenta dois outros diálogos fictícios entre o Escravo e Arquitas, para entender alguns aspectos da noção de razão na Música, e entre o Escravo e Eudoxo para discutir a teoria, supostamente em construção, da razão para a Astronomia.

3.3.1 Antifairese

A palavra antifairese, etimologicamente, seria uma aproximação de *Antho-hypo-hairesis*, que significa literalmente subtração recíproca. Aqui, usaremos a palavra na forma de substantivo, a "*antifairese* entre duas grandezas", embora, Euclides use apenas a forma verbal "... quando a menor de duas grandezas desiguais é *continuamente subtraída, por sua vez,* da maior...´´. Na álgebra moderna, o procedimento é conhecido como Algoritmo de Euclides para encontrar o maior divisor comum entre dois números. No entanto, esse termo nos remete à ideia de divisão, o que indesejado no momento. Buscando a neutralidade nas ideias desenvolvidas aqui, daremos preferência ao termo antifairese ao invés de Algoritmo de Euclides.

O método da antifairese, descreve uma série de comparações. No diálogo proposto por Fowler, Sócrates inicialmente pede ao Escravo de Mênon que ele compare duas pilhas de pedras. A primeira com sessenta pedras e a segunda com vinte e seis pedras. O Escravo sugere, então que:

1º Passo: Da primeiro da pilha com sessenta pedras pode-se subtrair **duas vezes** a pilha com vinte e seis pedras e ainda "resta´´ uma pilha com oito pedras.

2º Passo: Da pilha com vinte e seis pedras pode-se subtrair **três vezes** a pilha com oito pedras e ainda "resta´´ uma pilha com duas pedras.

3º Passo: Por fim a pilha com duas pedras "cabe´´ exatamente **quatro vezes** na pilha com oito pedras.

À sequência: duas vezes, três vezes e quatro vezes exatamente, que representa o número de subtrações que se pode fazer em cada passo, o Sócrates de Fowler chama de razão. A notação $Ant(60,26) = [2,3,4]$ é usada, então para representar a razão antifairética de 60 : 26.

A escolha de uma grandeza que pode sempre ser representado por números inteiros sugere o caráter introdutório do problema. Mesmo assim, as pilhas de pedra são tratadas como grandezas e não é sugerida nenhuma comparação entre os números sessenta e vinte e seis, o que consideramos natural quando se pretende estender o procedimento à outras grandezas.

De modo geral, se A e B são duas grandezas de mesmo tipo, é possível subtrair a menor, digamos B, da maior, nesse caso A, n_0 vezes deixando um "resto" R_1 menor que B. Nesse caso, n_0 será o primeiro passo da Antifairese entre A e B. O segundo passo da antifairese é a comparação entre R_1 e B. Como R_1 é menor que B, pode-se subtrair R_1 de B, n_1 vezes deixando um "resto" R_2. Continua-se procedendo dessa forma até que algum dos "restos", digamos R_i caiba exatamente n_i vezes em $R_{(i-1)}$, ou seja, quando a grandeza R_i "medir" a grandeza $R_{(i-1)}$, nesse caso, $Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i]$ que tem $i+1$ passos.

O fato de R_i "medir" $R_{(i-1)}$ garante imediatamente que R_i pode medir, no sentido de caber uma quantidade inteira de vezes, todas as grandezas intermediárias do processo, ou seja, R_i mede A, B, R_1, $\cdots$, $R_{(i-1)}$. Em particular, R_i mede A e B, garantindo que essas grandezas são comensuráveis entre si.

Reciprocamente, se A e B são comensuráveis, existe uma grandeza R, do mesmo tipo de A e B que mede ambas. Essa mesma grandeza deve medir $A - n_0 \times B$, que chamamos de R_1 assim como deve medir $B - n_1 \times R_1$, que chamamos de R_2 e todas as grandezas analogamente obtidas no processo de antifairese. Como essas grandezas ficam cada vez menores, se o processo não terminasse, inevitavelmente teríamos que R deveria medir uma grandeza $R_i < R$, o que é impossível. Portanto o processo de antifairese deve ser necessariamente finito.

Para os números, a antifairese serve ao propósito de encontrar fatores comuns a dois números, o maior divisor comum. Muito embora a existência da unidade garanta que a antifairese seja finita, no caso em que os números são primos entre si o processo tem como resultado não um número mas a unidade. Nesse caso, não existem fatores comuns, ou ainda, não existe um **número** que meça ambos os números considerados, já que a unidade não era considerada um número.

Uma vez que, mesmo para dois números, pode não ser possível encontrar a maior medida comum, o mesmo pode acontecer para grandezas. Mas nesse caso, o processo de antifairese vai apresentando grandezas de mesma natureza cada vez menores indefinidamente, ou seja, o processo é infinito.

3.3.2 Controvérsias Sobre a Descoberta das Grandezas Incomensuráveis

A Proposição X-2 dos *Elementos*, sugere que os incomensuráveis eram compreendidos a partir de um procedimento de antifairese:

> "Se, quando a menor de duas grandezas desiguais é subtraída continuamente da maior, do qual o resto nunca meça aquele anterior, então as duas grandezas serão incomensuráveis"
> (JOYCE, 1997, Proposição X-2, tradução nossa)

Um exemplo de antifairese infinita é a comparação entre o lado e a diagonal de um pentágono regular, que é uma figura bastante ligada aos matemáticos pitagóricos e, portanto, bastante estudada por esse grupo.

Seja L o lado do pentágono regular e D a sua diagonal. Por meio de construções com régua e compasso, é possível perceber que L cabe **uma vez** em D e sobra segmento que chamaremos de $D-L$. Comparando L, com $D-L$, nota-se que $D-L$ cabe **uma vez** em L e sobra um segmento que chamaremos de $2L-D$. Em seguida, devemos fazer a comparação entre $D-L$ e $2L-D$, mas essas duas grandezas são também, respectivamente, diagonal e lado de um pentágono regular.

Desse modo, após a segunda etapa da anifairese, devemos resolver o mesmo problema inicial de comparar o lado e a diagonal de um pentágono regular, mas com dimensões menores e, portanto o processo se repete indefinidamente e $Ant(D,L) = [1,\ 1,\ 1,\ \cdots]$

De fato, na Figura 3.1, temos um pentágono $ABCDE$ de lado L e diagonal D. Facilmente, com argumentos da matemática contemporânea, podemos chegar ao resultado de que o pentágono $FGHIJ$ tem lado $2L - D$ e diagonal $D - L$. É possível, no entanto, chegar ao mesmo resultado utilizando apenas a matemática da Grécia antiga, pois argumentos análogos aos apresentados nas figuras do diálogo de Platão (*Mênon*) sugerem que esse resultado era conhecido tambem pelos matemáticos da época.

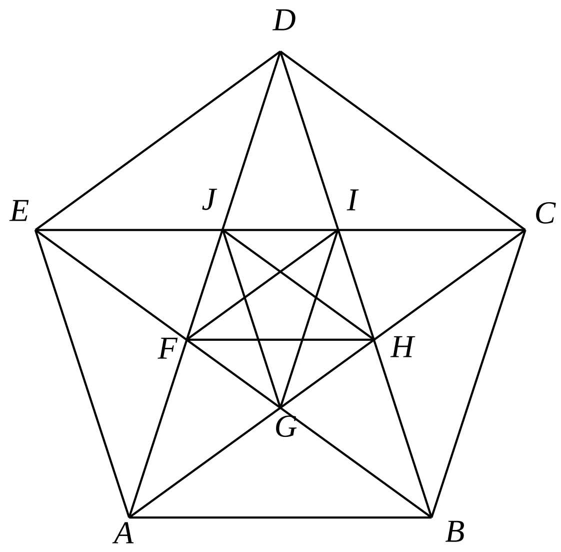

Figura 3.1: Diagonal e o Lado de um pentágono: Antifairese infinita.

Embora haja razões suficientes para acreditar que o estudo das relações entre lados e diagonais de polígonos fosse considerado bastante relevante à Matemática da Grécia antiga, Fowler sublinha que há sérias objeções ao fato de que o método de antifairese, aplicado nesse estudo, tenha sido o responsável pela descoberta da incomensurabilidade. Ele argumenta que nem mesmo a demonstração atribuída pelos estudiosos a Aristóteles de que, caso a diagonal e o lado do quadrado fossem comensuráveis, teríamos um número par igual a um ímpar, seria a maneira como os incomensuráveis teriam sido descobertos.

Fowler reforça, no entanto que, independentemente de como tenham sido descobertas as grandezas incomensuráveis, o papel da antifairese estaria ligado ao tratamento dado a essas grandezas:

> "Nós devemos, contudo, continuar argumentando que a antifairese desempenhou um importante papel no estudo das grandezas incomensuráveis no século quarto, e nas técnicas aritméticas de definição, manipulação e aproximação de razões de números"
> (FOWLER, 1979, p. 820, Tradução Nossa)

3.3.3 Aproximações

Embora haja indícios de que os matemáticos da Grécia Antiga pudessem manipular frações pelo método egípcio, nenhuma ligação entre as frações usadas nesses procedimentos e a ideia de razão aparece nos textos dessa época. De fato, pouco se sabe sobre os métodos usados pelos gregos para cálculos cotidianos. No entanto, alguns resultados que aparecem nos textos remanescentes sem maiores explicações, reforçam a ideia de que eles eram capazes de encontrar convergentes de frações contínuas.

Na verdade, dada uma antifairese $[n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i]$ é possível chegar à relação

$$[n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i] = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_i}}}}$$

Desse modo, a sequência de antifaireses interrompidas

$$[n_0],\ [n_0,\ n_1],\ [n_0,\ n_1,\ n_2],\ \cdots$$

nos fornece uma sequência de convergentes

$$n_0,\ n_0 + \frac{1}{n_1},\ n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2}},\ \cdots$$

Os textos mostram que, por exemplo, Aristarco usava 7 : 5 como aproximação para a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, enquanto Heron teria usado 17 : 12 para a mesma razão. Note que a antifairese entre o a diagonal do quadrado é $[1,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots]$ e os primeiros convergentes das frações contínuas são

$$1,\ 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},\ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = \frac{7}{5},\ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = \frac{17}{12}$$

portanto, as aproximações usadas por Aristarco e Heron eram convergentes da fração contínua referente à antifairese entre a diagonal e o lado do quadrado. Nesse exemplo simples, é tentador, no entanto, pensar que Aristarco e Heron tenham apenas tomado as antifaireses truncadas $[1,2,2]$ e $[1,2,2,2]$ e desenvolvido de trás para frente, como se fossem antifaireses de números primos entre si, para chegar aos seus resultados. Mas, embora o desenvolvimento de trás para frente seja simples com poucos passos de antifairese, tal desenvolvimento se torna bastante trabalhoso conforme o número de passos aumenta. Arquimedes, em seu "Da Medida do Círculo", afirma que, em linguagem contemporânea, $265 : 153 < \sqrt{3} < 1351 : 780$ e essas cotas são, respectivamente, a nona e a décima segunda convergentes da fração contínua gerada pela antifairese entre o lado e a menor diagonal de um hexágono regular, a saber, $[1,1,2,1,2,1,2,\cdots]$.

A partir da falta de coerência em supor que se usasse uma aritmética de frações para chegar aos resultados acima, Fowler propõe um método usando apenas procedimentos disponíveis à época, embora seja ressaltado que é impossível decidir se tal método teria ou não sido usado de fato. A esse método Fowler dá o nome de *Proposição de Parmênides* que consiste basicamente em, dadas uma aproximação por falta e uma por excesso de uma razão, encontrar uma terceira aproximação mais precisa que as duas primeiras para a razão desejada, hora por falta hora por excesso.

"*Seja $p : q$ uma aproximação por falta e $r : s$ uma aproximação por excesso para uma razão θ. Então $p + r : q + s$ será uma aproximação melhor de θ do que as anteriores, seja por falta ou por excesso.*"

A proposição acima é baseada no fato de que $p : q \leq r : s \Rightarrow p : q \leq (p+r) : (q+s) \leq r : s+$. Essa propriedade, no caso da igualdade, é demonstrada nos *Elementos*, para números na Proposição VII-12 e para grandezas na Proposição V-12. As desigualdades não são tratadas no livro VII, mas os argumentos apresentados a partir da Proposição V-10 podem verificar a validade da proposição desejada, embora ela seja válida apenas para grandezas comensuráveis, pois pressupõe a existência da quarta proporcional de três grandezas. Alternativamente pode-se ainda argumentar a partir da Proposição VI-16, que mostra que, em linguagem contemporânea, $p : q < r : s \Leftrightarrow ps \leq qr$.

A comparação entre duas razões antifairéticas obedece uma lógica que assume que os passos ímpares referem-se à quantidade de vezes que a menor grandeza (ou uma parte dela) cabe na maior (ou uma parte dela. Os passos pares, pelo contrário, referem-se à quantidade de vezes que uma parte da maior cabe em uma parte da menor das grandezas de modo que, tomando $n < m$, $[n,\cdots] < [m,\cdots]$ mas $[p,n,\cdots] > [p,m,\cdots]$, $[p,q,n,\cdots] < [p,q,m,\cdots]$ e assim sucessivamente. Essa comparação seria necessária para decidir se a nova aproximação é por excesso ou por falta

Usando a proposição de Parmênides, podemos tomar, por exemplo, $1 : 1$ como aproximação por falta da razão entre a diagonal e o lado de um quadrado, denotaremos $[1,2,2,\cdots]$ para simplificar a escrita, e $2 : 1$ uma aproximação por excesso dessa razão.

$$[1] = 1 : 1 \leq [1,2,2,\cdots] \leq 2 : 1 = [2]$$

$$[1] = 1:1 \leq [1,2,2,\cdots] \leq 3:2 = [1,2]$$

$$[1,3] = 4:3 \leq [1,2,2,\cdots] \leq 3:2[1,2]$$

$$[1,2,2]7:5 \leq [1,2,2,\cdots] \leq 3:2 = [1,2]$$

$$[1,2,2] = 7:5 \leq [1,2,2,\cdots] \leq 10:7 = [1,2,3]$$

$$[1,2,2] = 7:5 \leq [1,2,2,\cdots] \leq 17:12 = [1,2,2,2]$$

Que nos trás novamente às aproximações usadas por Heron e Aristarco.

3.3.4 Abandono da Teoria de Razões

Com o surgimento da teoria das proporções de Eudoxo, a noção de razão perdeu muita importância e os procedimentos relativos aos processos de antifairese perderam relevância matemática, assim como sua relação com o conceito de razão seria esquecido.

De fato, resultados que haviam sido obtidos a partir da teoria de razão seriam explicados novamente em termos da teoria de proporções. A teoria das razões, particularmente a razão antifairética, trás consigo uma inerente falta de afinidade com demonstrações de propriedades simples, como, por exemplo, $p:q::p:r \Rightarrow q = r$.

Mesmo no caso de razões entre grandezas comensuráveis, em que as razões podem ser reduzidas a antifaireses entre números, o desenvolvimento da teoria de razões, bem como a manipulação dos cálculos desses entes seria visto pelos sábios da época como uma "aritmética" para frações que conflitariam com questões filosóficas como a "partição da unidade", sem contar a falta de relação evidente entre, por exemplo, $Ant(p,q)$ e $Ant(r,s)$ com $Ant(pr,qs)$ ou $Ant(ps+qr,qs)$.

Não existe nenhum registro na Grécia antiga de que se tenha tentado criar uma teoria das proporções usando a teoria das razões. No entanto, Hogendijk (2002) remonta os passos de três matemáticos árabes que se propuseram a demonstrar a equivalência entre as proposições de Euclides usando a teoria das proporções de Eudoxo e uma teoria de proporções baseada na razão antifairética semelhante à apresentada por Fowler. No entanto, esse trabalho apresentaria varias suposições anacrônicas, conforme ressalta Vitrac (2002).

Para nós, no entanto, o potencial didático da teoria das razões no modelo proposto por Fowler, no que diz respeito ao deslocamento da extensão dos domínios da usual para uma independente das operações, pode ser uma ferramenta interessante. A possibilidade de apresentar o desafio de construir uma noção de número real baseada no conceito de razão nos pareceu promissora.

Em nossa proposta, tentamos apresentar de maneira mais natural a necessidade de extensão do domínio numérico trabalhado mantendo o propósito inicial de atribuir uma medida à grandeza. Nesse processo, aproximamos o aluno da atividade de fazer matemática deparando-se com limitações ou obstáculos que devem ser, hora vencidos, hora apenas compreendidos como acontece diversas vezes na História da Matemática.

4 Proposta didática

A separação conceitual entre número e grandeza instaurada pelos matemáticos da Grécia Antiga persistiu na matemática até o movimento de Aritmetização da Análise, a partir da metade do século dezenove. De fato, até o século dezoito e início do seculo dezenove,

> "Essa ciência era compreendida por consistir do estudo geométrico e algébrico do número e das grandezas contínuas, como comprimentos e pesos assim como suas contrapartes 'abstratas'." (EPPLE, 2003, p. 291, tradução nossa, grifo do autor)

Com a criação da teoria dos conjuntos e a associação dos números reais aos pontos da reta, o conceito de grandeza tornou-se aparentemente indissociável da sua medida fazendo com que nem sempre o aluno faça a distinção de quando está trabalhando com um problema associado a uma grandeza ou simplesmente resolvendo uma equação. Sendo assim, não é incomum encontrarmos resultados inconsistentes com a pergunta do problema.

Alem disso, nem sempre fica clara a necessidade de se utilizar núemeros reais, pois as habilidades de estimativa (aproximação) e contextualização incentivadas pelos parâmetros curriculares reduz consideravelmente a percepção da presença dos números reais no cotidiano.

É simplesmente surreal que, por exemplo, ao ser perguntado sobre quantos centímetros de fita são necessários para envolver uma caixa de bombons de formato circular com diâmetro $10cm$, o aluno responda $10\pi cm$. Ninguem pede $10\pi cm$ de fita numa loja. A resposta esperada é $32cm$ ou qualquer outra aproximação que seja imposta no enunciado. Por outro lado, dificilmente as pessoas de modo geral, e os alunos em particular, percebem que, ao comprarem $1m$ de fita na mesma loja, eles estão levando igualmente uma aproximação de $1m$. De fato, 1 e π têm naturezas diferentes enquanto números mas quando estão no contexto da expressão de uma medida, ambos são igualmente números reais que somente serão atingidos por uma aproximação. Finalmente, a densidade dos números racionais sobre os reais, de certo modo, deixa a impressão de que os números reais são desnecessários, dada a limitação dos instrumentos de medida acessíveis.

Propomos, portanto, uma introdução ao conceito de número baseada na idéia de medição.

Isso significa que iremos associar números a grandezas a partir da escolha de uma unidade. A medida de uma grandeza será construída a partir da sua comparação com a unidade escolhida.

A noção de número inicial é restrita aos números inteiros e será estendida gradativamente a partir dos exercícios propostos. Há, portanto, um conflito inevitável de que o público alvo da atividade traga consigo sua própria visão de número. Visando minimizar esse conflito, propomos uma restrição do conceito de número e de grandeza às características desejadas para o desenvolvimento da atividade.

Frequentemente assuntos da matemática são apresentados como jogos e, desse modo consideramos que para a apresentação da sequência didática que propomos seja necessário iniciar tratando de suas regras.

4.1 As regras do Jogo

Consideraremos nesta seção, um ***número*** como sendo um número inteiro não negativo e uma ***grandeza*** como tudo aquilo que pode ser aumentado ou diminuído. Nesse sentido, pode-se considerar um número como uma grandeza, embora não seja atribuído às grandezas número algum.

Entre duas grandezas diferentes de mesma natureza, A e B, dizemos que a grandeza B *cabe* na grandeza A se B pode ser aumentada (ou A pode ser diminuída) de modo a obter a grandeza A (respectivamente B). Nesse caso, dizemos que existe a diferença $A-B$, que é uma grandeza de mesma natureza que as grandezas consideradas inicialmente. Diremos ainda que B cabe n vezes em A se existirem as diferenças $A-B$, $(A-B)-B$, $[(A-B)-B]-B$, $\cdots$, com n iterações dessa operação, que consiste em comparar se a grandeza B cabe na grandeza resultado da iteração anterior. Nesse caso, dizemos que ocorre uma entre as duas afirmações a seguir:

i- Existe a diferença $A-n\times B$ que é uma grandeza de mesma natureza que A e B

ii- A grandeza B mede a grandeza A se as grandezas B e $A-(n-1)\times B$ forem iguais. Nesse caso, dizemos que $A=n\times B$

4.2 Antifairese de duas grandezas

Suponha que desejamos comparar duas grandezas diferentes de mesma natureza A e B. Uma comparação simples seria verificar quantas vezes B cabe em A. Dessa comparação inicial, se B não mede A, obteremos uma grandeza $A - n_1 \times B$ que daremos o nome de R_1. Na linguagem corrente, podemos dizer que B cabe em A n_1 vezes e ainda "sobra" uma grandeza de mesma natureza R_1 (B não cabe em R_1). Para uma comparação mais precisa, podemos comparar as grandezas B e R_1. Se R_1 não mede B, obtemos uma grandeza $B - n_2 \times R_1$ que chamaremos de R_2. Essa operação pode ser iterada comparando R_{i-1} com R_i descrevendo cada vez mais detalhadamente a comparação entre as grandezas iniciais A e B.

Exemplo*$_1$*: A grandeza B cabe 2 vezes na grandeza A e sobra uma grandeza R_1 que cabe 3 vezes em B e sobra uma grandeza R_2 que cabe 2 vezes em R_1 e sobra uma grandeza R_3 que cabe exatamente 2 vezes em R_2.

Chamaremos ***Antifairese*** de duas grandezas A e B, denotada por $Ant(A,B)$, a sequência de números que representam quantas vezes B cabe em A, R_1 cabe em B e assim sucessivamente. No Exemplo$_1$, teríamos $Ant(A,B) = [2,\ 3,\ 2,\ 2]$

Vale notar que a antifairese entre duas grandezas não descreve cada uma delas separadamente. Ela nos fornece apenas uma comparação entre essas grandezas. Para efeito de visualização, observe a Figura 4.1 onde as grandezas descritas no Exemplo$_1$ são os lados A e B do retângulo.

Note que a grandeza R_3 mede as grandezas $R_2,\ R_1,\ B$ e A. Diz-se ainda quer R_3 é a **maior medida comum** às grandezas A e B.

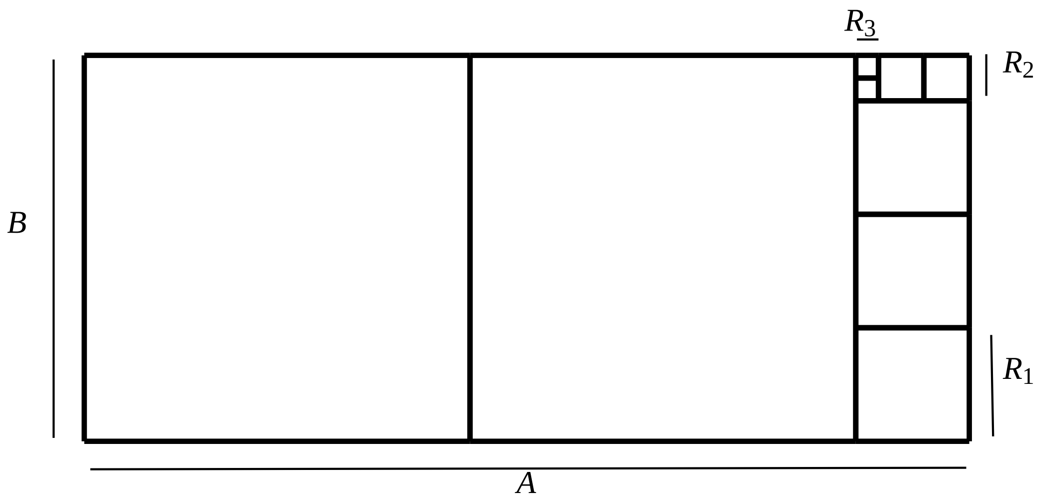

Figura 4.1: Antifairese do Exemplo 1 $Ant(A,B) = [2,\ 3,\ 2,\ 2]$

Exercício 1: Dizer que a grandeza R_1 mede a grandeza X consiste em encontrar o número n tal que $X = n \times R_1$. No Exemplo$_1$, encontre os números n e m tais que $A = n \times R_3$ e $B = m \times R_3$.

4.3 Antifairese no Geogebra

Para encontrarmos a antifairese entre duas grandezas (particularmente segmentos), usaremos o software Geogebra.

Na Figura 4.2, os números 1, 2 e 3 indicam os passos para efetuarmos uma subtração entre as grandezas *A* e *B*.

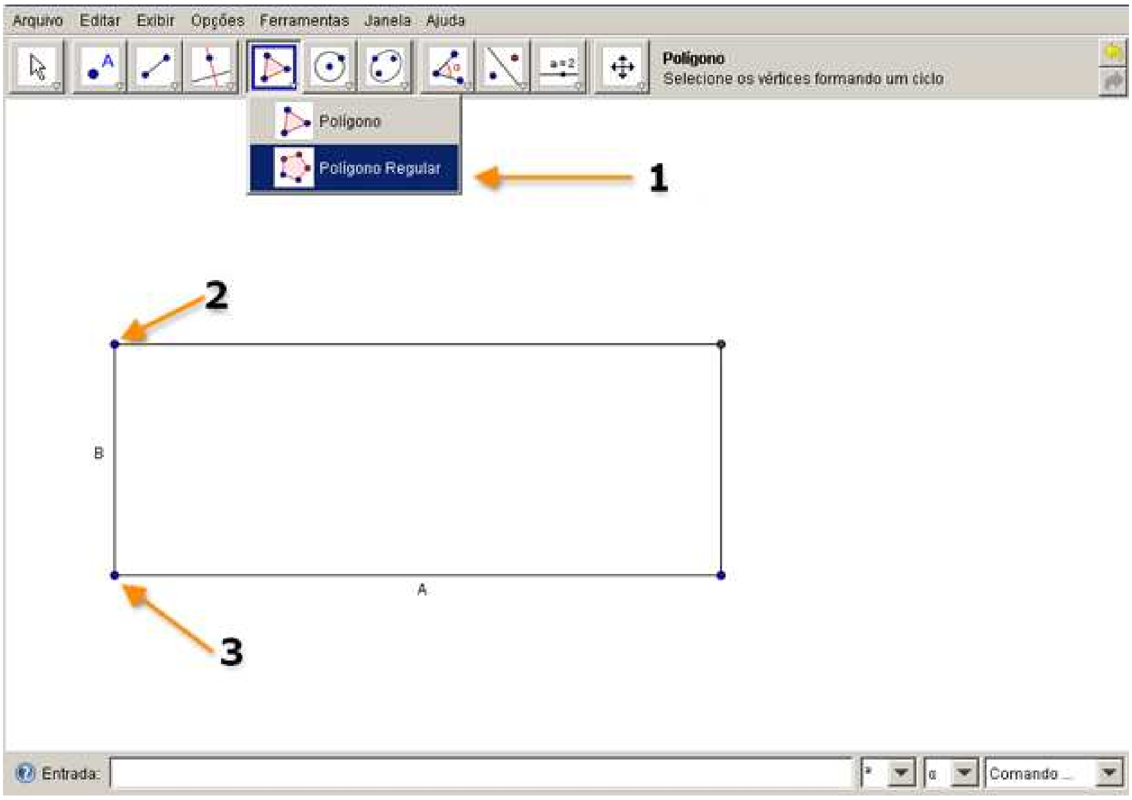

Figura 4.2: Software Geogebra: 3 passos para a uma subtração

O programa irá perguntar quantos lados têm o polígono regular que se deseja traçar. O gênero 4, que é o que desejamos, vem pré-selecionado de modo que basta confirmar selecionando "OK" (Figura 4.3).

A Figura 4.4 Mostra o resultado dessa operação e os números 1 e 2 indicam os pontos para a

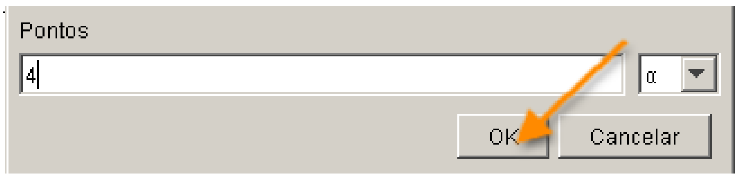

Figura 4.3: Caixa de texto para escolher o gênero do polígono regular.

continuação do processo. Após algumas iterações, chega-se até o resultado ilustrado na Figura

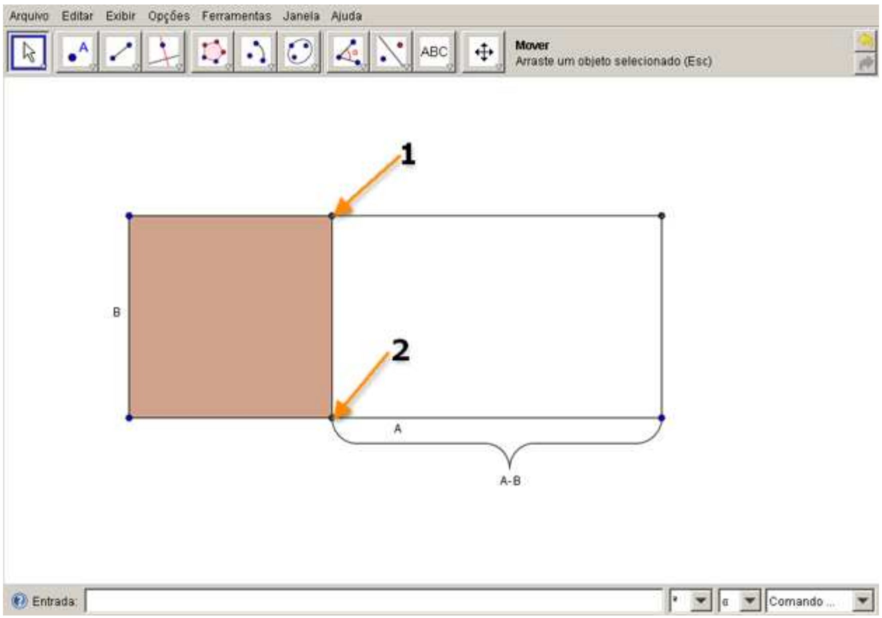

Figura 4.4: Primeiros passos da Antifairese entre A e B no software Geogebra

4.5, onde está assinalada a grandeza que é a maior medida comum às grandezas A e B. Quando é possível encontrar tal grandeza, dizemos que A e B são **comensuráveis**.

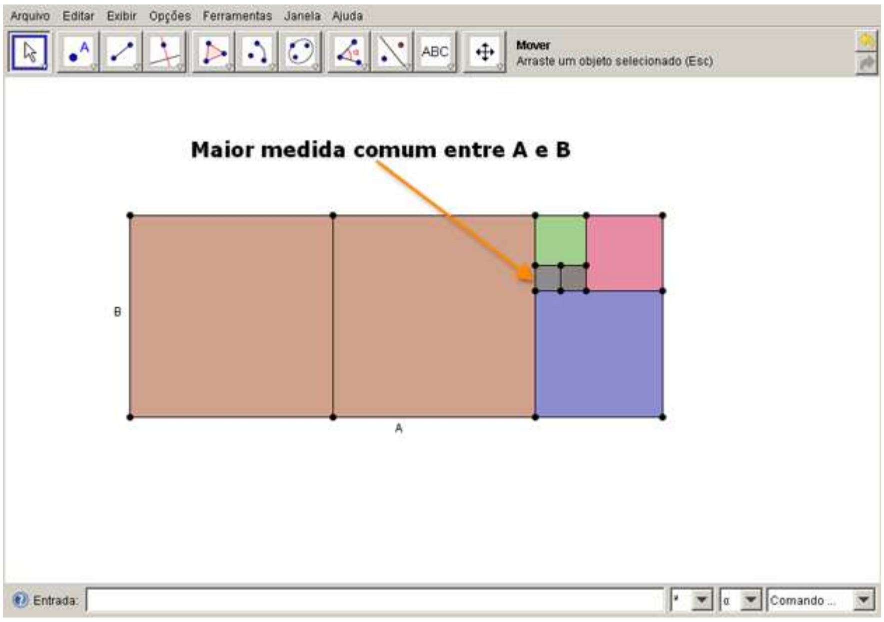

Figura 4.5: Resultado final da Antifairese entre os segmentos A e B. $Ant(A,B) = [2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2]$

Exercício 2: Encontre a antifairese entre dois segmentos dados usando o Geogebra.

Exercício 3: Construa no Geogebra dois segmentos A e B tais que $Ant(A,B) = [1,\ 1,\ 4]$.

Exercício 4: A Figura 4.6 mostra as respostas de dois alunos ao Exercício 3.

i) Pode-se dizer que $A = C$ e $B = D$? Justifique?

ii) Seja P a maior medida comum entre A e B e Q a maior medida comum entre C e D. Encontre $n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4$ tais que $A = n_1 \times P$, $B = n_2 \times P$, $C = n_3 \times Q$ e $D = n_4 \times Q$.

iii) Calcule $n_1 - n_3$ e $n_2 - n_4$ obtidos na resposta do item ii.

iv) Que relação existe entre os retângulos da figura? Justifique sua resposta.

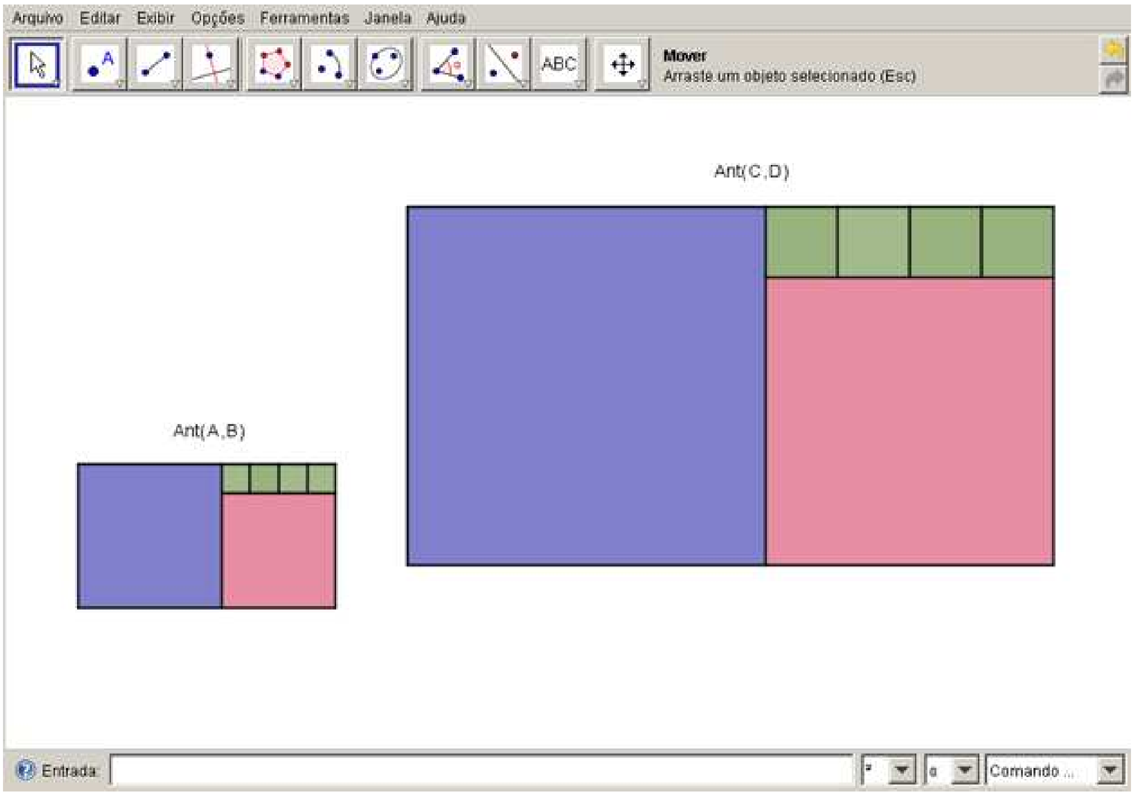

Figura 4.6: $Ant(A,B)$ e $Ant(C,D)$

Exercício 5: Seja $Ant(A,B) = [n_1,\ n_2,\ n_3,\ \cdots n_i]$. Determine as seguintes antifaireses:

i) $Ant(A+B,B)$

ii) $Ant(A+n_0 \times B,B)$

iii) $Ant(A-B,B)$

iv) $Ant(A-n_1 \times B,B)$

Exercício 6: Considere conhecida a antifairese entre duas grandezas P e Q: $Ant(P,Q) = [n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i]$. Desejamos encontrar a antifairese entre duas outras grandezas A e B, de mesma natureza das grandezas P e Q. Em determinado passo do processo, encontra-se grandezas, $R_{j-1} = P$ e $R_j = Q$. Se os primeiros números da antifairese entre A e B são $m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_j$, qual será a antifairese completa entre A e B? O que aconteceria se no lugar de $R_{j-1} = P$ e $R_j = Q$ tivéssemos apenas que o retângulo de lados R_{j-1} e R_j semelhante ao retângulo de lados P e Q?

Exercício 7: Na Figura 4.7, considere conhecidas $Ant(BC, BA)$ e $Ant(FH, FG)$. Sabendo que $CEFG$ é um quadrado, determine $Ant(BE, BC)$ nos seguintes casos:

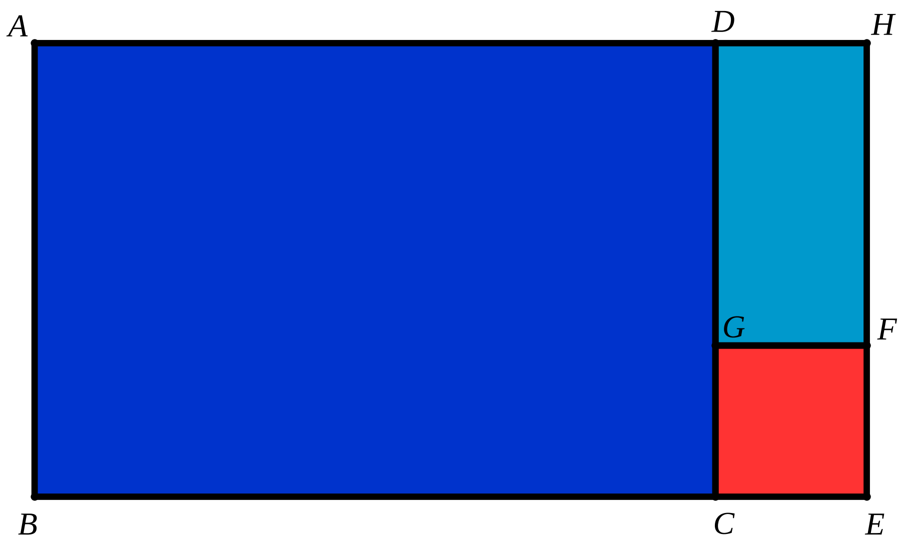

Figura 4.7: $Ant(BC, BA) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i]$ e $Ant(FH, FG) = [m_0,\ \cdots,\ m_j]$

i) $FG < FH$

ii) $FG > FH$

4.4 Antifaireses infinitas

A antifairese entre duas grandezas nos fornece uma maneira de compara-las de modo tão preciso quanto tenhamos necessidade. Desse modo se desejamos fornecer uma comparação entre as grandezas A e B podemos escolher o grau de precisão interrompendo a antifairese após alguns passos do processo.

Interromper a descrição da comparação consiste em não comparar a grandeza R_{i+1} com a grandeza R_i.

Usaremos a seguinte notação para uma antifairese interrompida entre as grandezas A e B:

$$Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ Ant(R_{i+1},R_i)]$$

deixando indicado que se pode refinar a comparação entre A e B, bastando, para isso, acrescentar os números de $Ant(R_i,R_{i+1})$.

Diremos que duas grandezas têm antifairese ***infinita*** se o processo de subração mútua puder ser continuado indefinidamente.

Se duas grandezas apresentam uma antifairese infinita, conforme descrito acima, não será possível encontrar a maior grandeza que mede ambas as grandezas consideradas. Diremos, então, que as grandezas são ***incomensuráveis***.

De modo geral, decidir se a antifairese entre duas gradezas é ou não infinita se mostra bastante difícil, pois, em princípio, nada garante que a próxima iteração do processo não fornecerá uma grandeza R_{i+1} que é capaz de medir R_i finalizando o processo de antifairese.

Tomemos, no entanto o caso particular em que existem R_i e R_{i+1} na antifairese entre as grandezas A e B, tais que $Ant(A,B) = Ant(R_i,R_{i+1})$. Se as grandezas consideradas forem segmentos de reta, vimos que isso acontece quando o retângulo de lados A e B é semelhante ao retângulo de lados R_i e R_{i+1}. Nesse caso, teremos que $Ant(A,B)$ é infinita, pois

$$Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ Ant(R_i,R_{i+1})] = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ Ant(A,B)]$$

$$Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ n_0,\ n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ \cdots]$$

De fato, esse mesmo conceito pode ser extendido para um caso um pouco mais geral, onde $Ant(R_{i+p},R_{i+p+1}) = Ant(R_i,R_{i+1})$, onde R_i, R_{i+1}, R_{i+p}, R_{i+p+1} são grandezas que aparecem na antifairese entre duas grandezas A e B.

$$Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ Ant(R_i,R_{i+1})]$$

$$Ant(R_i,R_{i+1}) = [m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_p,\ Ant(R_{i+p}),R_{i+p+1})] = [m_1,\ m_2,\ \cdots,\ m_p,\ Ant(R_i,R_{i+1})]$$

$$Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i,\ m_1,\ \cdots,\ m_p,\ m_1,\ \cdots,\ m_p,\ \cdots]$$

4.5 O Retângulo Áureo

Um retângulo é dito *Áureo,* quando ao removermos dele um quadrado de lado igual ao menor dos lados, o retângulo restante é semelhante ao retângulo original (Figura 4.8).

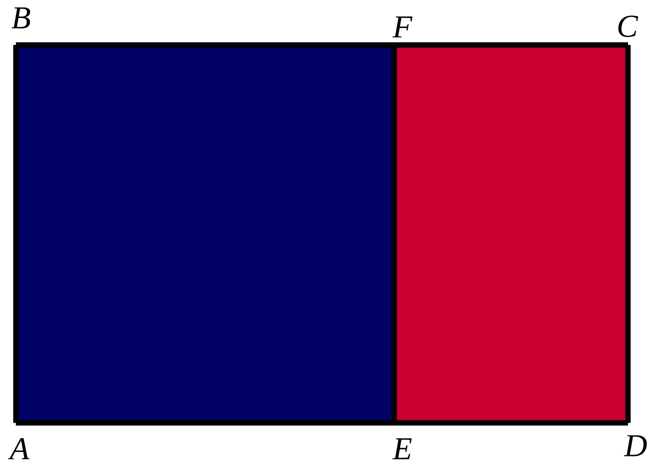

Figura 4.8: Retângulo áureo: $ABFE$ é um quadrado e $ABCD \sim DEFC$

Mas o procedimento de remover um quadrado do retângulo, conforme descrito na definição do retângulo áureo é exatamente o primeiro passo da antifairese entre as grandezas que são os lados do retângulo. Desse modo temos:

$$Ant(AD,AB) = [1, Ant(DC,DE)]$$

e, pela definição de retângulo áureo, o retângulo de lados AB e AD é semelhante ao retângulo de lados DC e DE, portanto $Ant(AB,AD) = Ant(DC,DE)$ e $Ant(AD,AB) = [1, Ant(AB,AD)] = [1,\ 1,\ 1,\ \cdots]$

Conclui-se, portanto, que os lados do retângulo áureo são incomensuráveis entre si.

4.6 Diagonal e lado de um quadrado

A Figura 4.9 mostra $Ant(D,L)$, onde D e L são, respectivamente a diagonal e o lado de um quadrado.

Vamos mostrar que o retângulo ressaltado na Figura 4.9 é semelhante ao retângulo todo. Para que isso seja verdade, precisamos garantir que $D-L$ e $2L-D$ sejam também o lado e a diagonal, respectivamente, de um quadrado.

De fato, na Figura 4.10, os triângulos ADB e GEB são retângulos isósceles e congruentes, de modo que $GE = L$. Alem disso, os triângulos GFD e AFE são retângulos, isósceles e congruentes, de onde tiramos que $GF = D-L$. A hipotenusa do triângulo AFE é também a diagonal do quadrado $AFHE$ de lado $D-L$ e sua diagonal mede $FE = GE - FG = L - (D -$

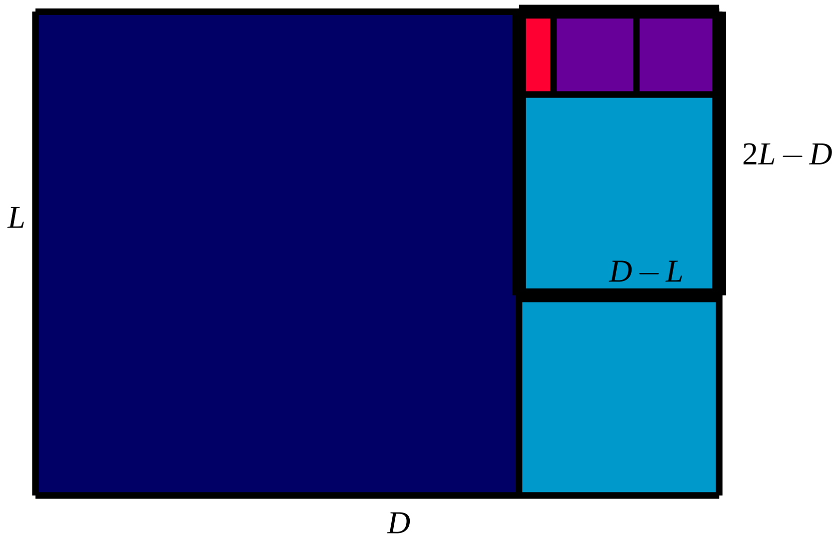

Figura 4.9: Antifairese entre a diagonal e o lado de um quadrado.

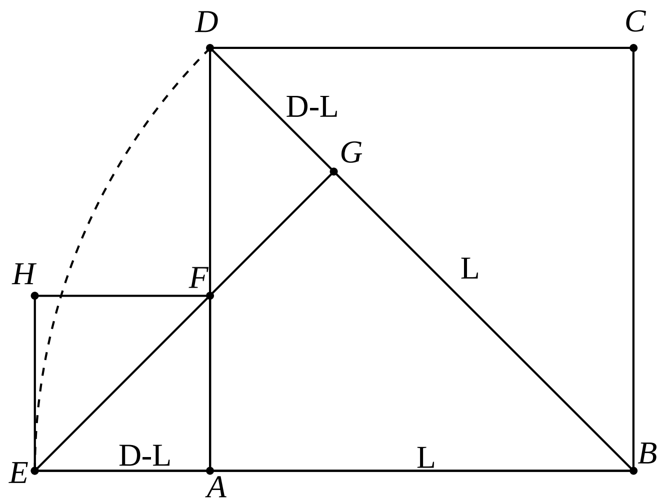

Figura 4.10: Quadrados de lados L e $D-L$ e suas respectivas diagonais D e $2L-D$

$L) = 2L-D$. Portanto se D e L são diagonal e lado de um quadrado, então $2L-D$ e $D-L$ também são.

Desse modo, a partir do ***Exercício 7***, concluimos que $Ant(D,L) = [1,\ Ant(L,D-L)] = [1,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots]$ que é uma antifairese infinita e, portanto, D e L são incomensuráveis entre si.

4.7 Atribuindo Números às Grandezas

A Antifairese nos fornece uma maneira comparar quaisquer duas grandezas de mesma natureza. No entanto, até agora, nenhum número é atribuído às grandezas.

Atribuir um número a uma grandeza A consiste, em última análise, em escolher uma grandeza U, do mesmo tipo de A, como unidade e fazer a comparação entre A e U. À grandeza U será atribuído o número 1 e o número atribuido à grandeza A será a *medida* de A, tomando como unidade U. Obviamente A terá medidas diferentes se unidades diferentes forem escolhidas.

Como vimos anteriormente, U mede A se existir um número n tal que $A = n \times U$. Nesse caso, dizemos que A mede n unidades e $Ant(A,U) = [n]$.

Note, no entanto, que não existe uma unidade que seja capaz de medir todas as grandezas de um tipo, pois, por exemplo, nenhuma unidade seria capaz de medir uma grandeza menor que ela. Até o momento, ao denotar $Ant(A,B)$, era possível tomar A como a maior das duas grandezas e iniciar o processo de subtração fazendo $A - B$ e encontrando quantas vezes B cabia em A. Podemos generalizar esse processo para o caso em que B é maior que A, o que consistiria em iniciar a descrição da comparação dizendo que B não cabe em A, o que pode ser denotado por $Ant(A,B) = [0,\ Ant(B,A)]$.

Para que possamos atribuir um número às grandezas menores que a unidade, precisamos necessariamente estender o conceito de número, pois nenhum número, no sentido compreendido até aqui, pode expressar uma grandeza menor que a unidade.

Inicialmente, vamos considerar uma grandeza A e uma unidade U tal que $U = n \times A$. Nesse caso, temos que $Ant(A,U) = [0, Ant(U,A)] = [0,n]$. Na descrição em linguagem corrente, seria natural dizer que A é a n-ésima parte de U, ou ainda $A = \frac{1}{n} \times U$ e, portanto, o número atribuido a A será a fração $\frac{1}{n}$. Como a medida de A é resultado de sua comparação com a unidade U, usaremos a seguinte identificação:

$$Ant[A,U] = [0, Ant(U,A)] = 0 + \frac{1}{Ant(U,A)} = 0 + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

Essa identificação nos permite, uma vez conhecida a antifairese entre duas grandezas, expressar a medida de uma considerando a outra como a unidade. ***Exemplo***: Sejam A e B duas grandezas de mesma natureza tais que $Ant(A,B) = [1,2,2]$. Se desejamos medir A tomando B

como unidade, basta escrever:

$$Ant(A,B) = 1 + \frac{1}{[2,2]} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5}$$

De modo geral, se $Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i]$, a medida de A, tomando B como unidade será um número na forma $\frac{p}{q}$, onde p e $q \neq 0$ são números, no sentido que haviamos proposto inicialmente, de modo que:

$$\frac{p}{q} = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{n_2 + \ddots + \cfrac{1}{n_i}}}}$$

Vale ressaltar que essa representação é única, desde que consideremos que as "sobras" R_i sejam cada vez menores. Obviamente, se compararmos as antifaireses $[n_0,\ \cdots,\ n_i]$ e $[n_0,\ \cdots,\ n_i - 1, 1]$ elas serão iguais, mas desse modo, teríamos $R_{i+1} = R_i$, que não é desejado no processo das subtrações. Podemos eliminar essa ambiguidade desde que sempre tenhamos $n_i \neq 1$ e $n_i > 0,\ \forall i > 0$.

4.8 Antifaireses interrompidas e Aproximações

Como vimos anteriormente, podemos interromper uma antifairese fornecendo uma comparação menos detalhada entre duas grandezas. A ***aproximação*** c de índice $j+1$ (denotada por c_{j+1}) da medida de A, tomando como unidade B, será o número correspondente à antifairese $Ant(A,B)$ interrompida no índice j. Se $Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_i]$ temos:

$$c_1 = [n_0],\ c_2 = [n_0,\ n_1],\ \cdots,\ c_{j+1} = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_j]$$

Cada c_{j+1} pode ser escrito na forma $c_{j+1} = \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}}$, onde

$$\begin{cases} p_0 = 1,\ p_1 = n_0 \\ q_0 = 0,\ q_1 = 1 \end{cases} \text{e} \begin{cases} p_{j+1} = n_{j+1} \times p_j + p_{j-1} \\ q_{j+1} = n_{j+1} \times q_j + q_{j-1} \end{cases},\ \forall j = 1,\ 2,\ \cdots,\ i$$

Note que c_0 não é uma aproximação da medida de A, assim como p_0 e q_0 não são numerador e denominador dessa aproximação. Eles foram introduzidos apenas para facilitar a maneira de escrever as fórmulas de p_{j+1} e q_{j+1}. Essas fórmulas podem ser facilmente demonstradas usando o princípio da indução finita, desde que façamos a concessão de que as antifaireses possam conter números fracionarios, o que não nos é interessante no momento.

Para determinar as aproximações da medida de uma grandeza A, tomando como unidade a grandeza B, tal que $Ant(A,B) = [n_0,\ n_1,\ \cdots,\ n_i]$, vamos usar um programa de planilhas eletrônicas.

Os programas de planilhas eletrônicas têm a vantagem de trabalhar bem com fórmulas de recorrência, como as descritas para p_{j+1} e q_{j+1}. Na Tabela 4.8, descrevemos o preenchimento dessas fórmulas para $p_1,\ q_1,\ p_2$ e q_2, bem como c_1. Para encontrar os valores seguintes de p, basta copiar célula **C4** e colar nas células **C5** até **C(i+3)** da coluna **C**. Analogamente para encontrar os valores de q, copiamos a célula **D4** e colamos nas células **D5** até **D(i+3)** e, por fim, para obtermos as expansões decimais de $c_{j+1} = \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}}$ basta copiar a célula **E3** e colar nas células **E4** até **E(i+3)**. ***Exercício 9***: Num programa de planilhas eletrônicas com as fórmulas

	A	**B**	**C**	**D**	**E**
1	j	n_j	p_{j+1}	q_{j+1}	$c_{j+1} = \frac{p_{j+1}}{q_{j+1}}$
2	-1	-	1	0	-
3	0	n_0	=**B3**	1	=**C3/D3**
4	1	n_1	=**B4*C3+C2**	=**B4*D3+D2**	
5	2	n_2			
6	3	n_3			
7	4	n_4			
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
i+3	i	n_i	p_{i+1}	q_{i+1}	c_{i+1}

Tabela 4.1: Cálculo de c_{i+1} em um programa de planilha eletrônica.

configuradas conforme a Tabela 4.8, preencha a coluna **B** com os números de $Ant(A,B) = [5,2,3,1,2,3,4,5,6,1,2]$.

i) Determine a medida de A, tomando B como unidade (A medida de A será o número que aparece na célula **E13**).

ii) Selecione a coluna **E** e formate suas células como **Número** com 2 casas decimais. Quantas aproximações são diferentes da medida de A?

iii) Utilize o recurso **Aumentar número de casas decimais** do programa, de modo que todas as aproximações sejam diferentes da medida de A. Quantas casas decimais foi necessário?

iv) Se você precisasse usar a medida de A, em forma de fração, para algum cálculo que não premitisse erro maior que $0,01$, qual o menor denominador que você poderia usar?

v) Na célula **F3** escreva a seguinte fórmula: =**E$13-E3**. Copie a célula e cole esta fórmula na coluna **F**, de **F4** até **F13** e formate as células dessa coluna como número (com 10 casas decimais). Interprete essa fórmula e os resultados dessa coluna.

Exercício 10: Seja $\frac{23}{16}$ a medida de A, tomando B como unidade. Determine $Ant(A,B)$. ***Exercício 11***: Justifique a afirmação: "Se a medida de A, tomando como unidade B é um número da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$, então $Ant(A,B)$ é finita". A afirmação continuaria verdadeira se p e q pudessem ser fracionários?

Nesse ponto, deve estar claro que se $Ant(A,B)$ é infinita, então nenhum número da forma $\frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros e $q \neq 0$, pode representar a medida de A, tomando B como unidade. Para contemplar as medidas de segmentos incomensuráveis com a unidade escolhida, devemos, então, estender mais uma vez o conceito de número.

Seja A uma grandeza incomensurável com a unidade, que representaremos a partir de agora por 1, tal que $Ant(A,1) = [n_0,\ n_1,\ n_2,\ \cdots]$. Sejam, ainda c_{j+1} as aproximações de ordem $j+1$ obtidas a partir das antifaireses interrompidas em n_j. Diremos que a medida de A é um número c, se $|c - c_{j+1}|$ for cada vez mais próximo de 0, conforme aumentamos o valor de j.

De fato, essa última definição de número engloba todas as definições anteriores, sendo que no caso de $c = c_1$, esse número será **inteiro**. No caso de $c = c_{i+1}$, o número será **racional** (ou fracionário). Por último, se $c \neq c_{j+1}$, $\forall j$, esse número será **irracional**. Os números, em qualquer dos casos descritos, que expressam a medida de uma grandeza são ditos **reais**. ***Exercício 12***: Como vimos anteriormente, $Ant(D,1) = [1,\ 2,\ 2,\ 2,\ \cdots]$, onde D é a diagonal de um quadrado cujo lado é a unidade de medida.

i) Use um programa de planilhas eletrônicas para encontrar, a partir de $Ant(D,1)$, as vinte primeiras aproximações para a medida de D.

ii) Na planilha preenchida conforme a Tabela 4.8, preencha a célula **F3** com a fórmula **=ABS(E4-E3)**. Copie essa célula e cole na coluna **F** de **F4** até **F19**. Interprete essa fórmula e os resultados dessa coluna.

iii) Formate as células das colunas **E** e **F** como número com 2 casas decimais e usando a ferramenta do programa varie a quantidade de casas decimais. O que significa aumentar ou diminuir o número de casas decimais dessa coluna?

Exercício 13:Considere uma reta r onde estão marcados dois pontos O e U. Argumente sobre as seguintes afirmações:

i) Dado um ponto $A \in r$ com $A \neq U$ e $A \neq O$ sempre é possível encontrar a medida do segmento OA, tomando U como unidade.

ii) Dada uma medida c existem exatamente dois pontos A, $A' \in r$ tais que as medidas dos segmentos OA e OA', tomando U como unidade, são iguais a c

iii) Dado um ponto A, $P \in r$. Se a medida de OA, tomando U como unidade, não é um número racional, então existe entre A e P um ponto Q tal que a medida do segmento OQ, tomando U como unidade, é racional.

5 Considerações Finais

Entendemos que, embora sejam abundantes os artigos que se referem às vantagens de se utilizar a História da Matemática no ensino, há ainda certa carência no que diz respeito à metodologia dessa utilização. Sendo assim, nossa proposta baseou-se em diversos artigos que, embora não tratassem diretamente de metodologia didática, traziam recomendações que consideramos relevantes para uma proposta didática consubstanciada do conhecimento histórico e técnico esperados na formação do aluno.

Buscamos portanto suplantar a fase em que nos perguntamos se devemos ou não ensinar utilizando como recurso didático a historia da matemática e nos concentramos em desenvolver uma atividade que pudesse ser inserida em diversos contextos de ensino. Por esse motivo, não sugerimos um público específico como alvo da atividade. Poderíamos facilmete argumentar, por exemplo, em favor da sua utilização em cursos de formação de professores, pois é esperado que a diversidade de abordagens de um assunto tão importante no curriculo do ensino básico seja benéfico para professores em formação. Do mesmo modo, podemo sugerir que essa atividade seja aplicada no ensino médio visando tornar o conceito de número real mais natural para os alunos.

Naturalmente a atividade não se trata de um roteiro com garantia de sucesso na aquisição da noção de número real. Muito menos deve-se encarar a proposta didática como uma lista de exercícios. Esperamos que, com base nos modelos de exercícios propostos o professor faça suas adaptações direcionando a atividade para seu público alvo de modo a tirar maior proveito para seus propósitos.

Uma preocupação secundária, mas não menos importante, na confecção da proposta didática foi a possibilidade de que essa atividade servisse como base para pesquisas em ensino de matemática.

Ressaltamos que a análise da produção dos alunos, como proposto por Cury et al. (2008) e Mandarino et al. (2008), em uma atividade baseada na proposta que aqui fazemos pode ser bastante esclarecedora no que diz respeito à concepção de número real trazida pelos alunos e contribuindo para o avanço da pesquisa sobre a própria prática, no modelo defendido por (PALIS, 2008).

Os primeiros modelos de exercícios onde os alunos são convidados a manipular a ferramenta introduzida, pode gerar situações adidáticas interessantes que podem suportar uma engenharia didática. De fato, um exêmplo canônico de Brusseau de engenharia didática é descrito por Artigue (2000), onde se deseja introduzir o conceito de número racional a partir do conceito de comensurabilidade comparando-se pilhas de papel. Acreditamos que haveria ganho em uma atividade semelhante onde a manipulação fosse feita a partir do software de geometria dinâmica comparando-se segmentos ao inves de pilhas de papel, conforme sugerido na atividade que propusemos.

Por fim, a introdução dos recursos computacionais na atividade abrem caminho para investigações acerca das restrições inerentes aos softwares utilizados. Tais investigações têm se mostrado frutíferas nas tentativas de se compreender, não só os softwares como como recurso didático, mas as concepções dos alunos sobre o conceito, como feito por Giraldo (2004) no caso da derivada.

Portanto, acreditamos que nossa proposta didática, fundamentada na história da matemática, possa interagir com diversas áreas de estudo da educação e do ensino da matemática contribuindo para o fortalecimento de ambas as áreas de pesquisa.

Referências Bibliográficas

ARTIGUE, M. Didactic engineering and the complexity of learning processes in classroom situations. In: BERGSTEN, C. et al. (Ed.). *Proceedings of the MADIF2 Conference*. Gothengurg: Swedish Society for Research in Mathematics Education, 2000. p. 5–20.

ASPER, M. The two cultures of mathematics in ancient greece. In: ROBSON, E.; STEDALL, J. (Ed.). *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 2009. cap. 2, p. 107–132.

BACHELARD, G. *A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento*. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

BERGÉ, A.; SESSA, C. Completud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa*, v. 6, n. 3, p. 163–197, Novembro 2003.

BRUSSEAU, G. Fundaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 7, n. 2, p. 33–115, 1986.

BURN, B. The vice: Some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequences. *Educational Studies in Mathematics*, v. 60, n. 3, p. 269–295, Novembro 2005.

CURY, H. N. et al. Análise de erros: Um recurso para a aprendizagem de futuros professores de matemática. In: *Investigación en Educación Matemática XII*. Espanha: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 2008. p. 529–536.

EPPLE, M. The end of the science of quantity: Foundations of analysis 1860-1910. In: JAHNKE, H. N. (Ed.). *A History of Analysis*. Rhode Island: American Mathematical Society, 2003. v. 24, cap. X, p. 291–323.

FOWLER, D. *The mathematics of Plato's Academy. A new reconstruction*. Oxford & New York: Clarendon Press, 1999.

FOWLER, D. H. Ratio in early greek mathematics. *Bulletin (new series) of the American Mathematical Society*, v. 1, p. 807–846, 1979.

FREUDENTHAL, H. *Revisiting mathematics education-China lectures*. Dordrecht:: Kluwer Academic, 1991. 200 p.

FRIED, M. Didactics and history of mathematics: Knowledge and self-knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, Springer Netherlands, v. 66, p. 203–223, 2007. ISSN 0013-1954. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-9025-5>.

FRIED, M. N. Can mathematics education and history of mathematics coexists? *Science & Educational Studies in Mathematics*, v. 10, p. 391–408, 2001.

GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos Computacionais: O caso da Derivada*. Tese (Doutorado) — UFRJ, Maio 2004.

HOGENDIJK, J. P. Anthyphairetic ratio theory in medieval islamic mathematics. In: DOLD-SAMPLONIUS, Y. et al. (Ed.). *From China to Paris: 2000 Years Transmission of Mathematical Ideas*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag, 2002. cap. 9, p. 187–202.

JANKVIST, U. T. A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 71, p. 235–261, 2009.

JOYCE, D. E. *Euclid's Elements*. Junho 1997. Web. Disponível em: <http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/toc.html>.

KNORR, W. R. *The Evolution of the Euclidean elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry*. Boston & London: Dordrecht, 1975.

KNORR, W. R. The impact of modern mathematics on ancient mathematics. *Revue d´Histoire des Mathématiques*, v. 7, n. 1, p. 121–135, 2001.

MANDARINO, M. et al. *Soluções Inesperadas na Resolução de Problemas Matemáticos: Erro ou Acerto?* 2008. Disponível em: <http://limc.ufrj.br/limc/images/7/7c/Solucoes.pdf>.

MAY, K. O. What is good history and who should do it? *Historia Mathematica*, v. 2, n. 4, p. 449–455, Novembro 1975.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógocas da história da matematica em questão: Argumentos reforçadores e questionadores. *Zetetiqué*, v. 5, p. 73–105, 1997.

PALIS, G. de L. R. A pesquisa sobre a própria prática no ensino superior de matematica. In: TALL, D. et al. (Ed.). *Trabalhos do HTEM 4*. Rio de Janeiro: Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2008. p. 1–8. CD-Rom, ISBN: 978-85-61545-02-4.

ROQUE, T. *A Matematica Através da História*. [S.l.]: Universidade Federal do Rio de Janeiro, No prelo.

SCHUBRING, G. *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*. Alemanha: Klett-Cotta, 1978. 365 p.

SIU, M. The abcd of using history of mathematics in the (undergraduate) classroom. *Bulletin of the Hong Kong Mathematical Society*, v. 1, p. 143–154, 1997. Disponível em: <http://hkumath.hku.hk/ mks/ABCD.pdf>.

SIU, M.-K. et al. The use of history in the teaching of mathematics: Theory, practice, and evaluation of effectiveness. *Education Journal*, v. 29, n. 1, p. 17–31, Verão 2001.

VITRAC, B. Umar al khayyam et l'anthyphérèse : Étude du deuxième livre de son commentaire "sur certaines prémisses problématiques du livre d'euclide". *Farhang. Quarterly Journal of Humanities & Cultural Studies*, v. 14, p. 137–192, 2002.

WAGNER, D.; DAVIS, B. Feeling number: grounding number sense in a sense of quantity. *Educational Studies in Mathematics*, Springer Netherlands, v. 74, n. 1, p. 39–51, Maio 2010. ISSN 0013-1954.

WANG, H. A.; MARSH, D. D. Science instruction with a humanistic twist: Teachers' perception and practice in using the history of science in their classrooms. *Science & Education*, v. 11, n. 2, p. 169–189, Março 2002.