DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ABSTRATOS DA ÁLGEBRA LINEAR

Ana Luísa Carvalho Furtado

PEMAT-UFRJ

Dezembro de 2010

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ABSTRATOS DA ÁLGEBRA LINEAR

por

Ana Luísa Carvalho Furtado

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Marco Aurélio Palumbo Cabral

Co-orientador: Victor Augusto Giraldo

Rio de Janeiro

Dezembro de 2010

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE CONCEITOS ABSTRATOS DA ÁLGEBRA LINEAR

por

Ana Luísa Carvalho Furtado

Orientador: Marco Aurélio Palumbo Cabral

Co-orientador: Victor Augusto Giraldo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Marco Aurélio Palumbo Cabral, Ph.D., PEMAT-UFRJ (Orientador)

Victor Augusto Giraldo, D.Sc, PEMAT-UFRJ

Claudia Coelho de Segadas Vianna, Ph.D., PEMAT-UFRJ

Paulo Goldfeld, D.Sc., UFRJ

Carlos Eduardo Mathias Motta, D.Sc., UFF

Rio de Janeiro

Dezembro de 2010

Agradecimentos

A Deus pela vida e vontade de viver, por fazer os caminhos mais sem sentido ficarem repletos de beleza e significados.

A UFRJ, minha segunda casa desde 2003.

Ao Programa de Mestrado em Ensino da Matemática pela oportunidade.

A CAPES, pela bolsa concedida.

Ao meu orientador, Marco Aurélio, pela enorme paciência, disponibilidade e presença ao longo de toda a pesquisa. Seu incentivo foi fundamental para que eu não desanimasse diante dos resultados inesperados e da dura tarefa de localizar alunos para participarem da pesquisa.

A Victor Giraldo. Pelo professor que sempre promoveu uma inteligente reflexão sobre a Matemática. Pelo coordenador, que nos conduziu de modo atencioso. E como co-orientador, pelas sugestões de referencial teórico e correções.

A minha banca por avaliar o meu trabalho e fazer parte deste momento importante para mim. Com certeza, aprendo muito com vocês.

A meus pais pelo amor, carinho e por terem investido em minha educação. Amo muito vocês e jamais poderei agradecer o suficiente para expressar tudo o que sinto.

A meu irmão, principal cobaia, visto que é aluno do terceiro período de Engenharia. Sem sua existência a nossa casa não teria a menor graça.

A meus avós Julio, Neusa, Luiz e Raimunda pelo exemplo que sempre será lembrado. A meus tios e primos. Em especial, à Totinha, Dedé, tia Socorro e Maria (minha dindinha).

A meu amor, meu namorado Diego, que me apoiou durante todo o trabalho. Esteve comigo nos momentos bons e ruins, de modo que tudo o que eu conquisto também é uma conquista dele.

A colegas de turma pela companhia. À amiga Roberta, que me aturou durante madrugadas de trabalho online. Sempre me divertindo com seu humor ímpar e revisando meus trabalhos às pressas. A Masé, pelo carinho, meiguice e amizade confiada. Sua presença tornou bem mais agradável aquelas segundas e quartas à tarde.

A amigos queridos de longa data (em ordem alfabética) que acompanharam a loucura dos últimos tempos: Bernardo, Camila, Celso, Deborah, Érica, Isabela Estermínio, Isabella Costa, Mariana, Marcela, Marcelo B., Miyoshi, Renata, Rodrigo Frolick, Rodrigo Melo e Priscila.

A alunos que participaram desta pesquisa com tanta boa vontade e seriedade. E aos seus respectivos professores que abriram as portas de suas salas de aulas.

Resumo

Neste trabalho, investigamos como os alunos no segundo período de Faculdade compreendem os conceitos abstratos abordados na disciplina Álgebra Linear II, focando no tópico Transformação Linear. Estes conceitos são estudados a partir da teoria de proceito, fundamentada por Gray e Tall, em seus trabalhos publicados em 1991 e 1994, refletindo sobre a flexibilidade entre conceito, processo e procedimento.

Palavras-chave: ensino de matemática - álgebra linear - proceito

Abstract

The aim of this work is to investigate how students in the second period of the University understand the abstract concepts that appear in Linear Algebra course, focussing in the topic Linear Transformation. Those concepts will be studied based on procept theory, developed by Gray and Tall, at their works published in 1991 and 1994, that discuss the flexibility between concept, process and procedures.

Key-words: mathematic learning - linear algebra- procept

Sumário

"Educação matemática é fazer com que os alunos aprendam
como é que as pessoas aprendem fatos e métodos"
(Goldenberg, 1999)

Introdução

Observando os resultados negativos dos cursos de Álgebra Linear II na Universidade Federal do Rio de Janeiro, da qual sou aluna do Mestrado de Ensino em Matemática, e da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro, da qual fui professora substituta em 2008 ministrando esta disciplina, surgiu um grande interesse em investigar de que forma conceitos abstratos, como Transformação Linear, eram assimilados pelos alunos.

Robert, Robinet e Rogalski destacam a importância da disciplina e de suas dificuldades intrínsecas:

> [...]é fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é usado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta. Além disto, as dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear parecem tão importantes e visíveis, quanto em análise.(Robert e Robinet(1989) e Rogalski(1990), apud Dorier, 1998, p.193)

Na UFRJ e em muitas outras Universidades, os alunos costumam cursar a disciplina Álgebra Linear II no segundo período de faculdade, sendo que a maioria não pertence ao Instituto de Matemática e sim, a Escola Politécnica (de Engenharia). Durante a vida escolar destes alunos, a matemática sempre lhes foi apresentada a partir de definições bem diretas (seno de um ângulo é a razão entre o tamanho do cateto oposto a este ângulo e a hipotenusa, binômio de Newton,...) e algoritmos (escalonamento, cálculo de MDC, MMC...). No curso de Álgebra Linear irão se deparar com definições enunciadas a partir de propriedades do próprio objeto em questão, o que gera possíveis obstáculos no aprendizado. Mas, isto não ocorre apenas com os alunos da Engenharia; os alunos da Licenciatura e do Bacharelado em Matemática passam pelo mesmo processo, sendo que ambos têm antes apenas uma disciplina que cause semelhente efeito, que é a própria Álgebra.

Assim como Hiebert e Carpenter, penso que

> o risco de formar imagens muito restritas de conceitos gerais parece ser particularmente manifesto em Aritmética, Cálculo, Álgebra Linear, Estatística [...]. Em tais domínios manipulação de algoritmos, procedimentos, tendem a atrair a atenção dos estudantes para criar um 'filtro' do conceito: somente alguns aspectos de um conceito, aquilo que é digerível e pertinente no contexto do 'cálculo' parecem ser preservados nas mentes dos estudantes. Em casos mais graves, uma 'maior ênfase' na instrução de procedimentos pode impedir o estudante de desenvolver a construção do conceito que ele só experimentou por manipulações. (Hiebert e Carpenter, 1992, apud Niss, 1999, p. 15)

Para investigar como estes conceitos abstratos da Álgebra Linear são assimilados pelos alunos, utilizaremos a noção de proceito apresentada por Gray e Tall, em seus trabalhos publicados em 1991 e 1994. Além disso, refletiremos brevemente sobre trabalhos americanos e franceses que preocupam-se especificamente com o ensino da Álgebra Linear.

No Capítulo 1 será feita uma breve contextualização de como a questão do ensino da Álgebra Linear vem sendo abordado nos Estados Unidos, a partir do movimento do LACSG, e na França, com o trabalho de muitos autores, entre eles Dorier. A partir destes relatos é possível compreender melhor as dificuldades existentes na compreensão da disciplina. No Capítulo 2, abordaremos a noção de proceito e a relacionaremos com os conteúdos de Álgebra Linear. A metodologia será apresentada no Capítulo 3, consistindo da aplicação de questionários e subsequente análise das questões aluno por aluno, que será feita baseada na ideia de proceito (Capítulo 4). No capítulo 5, as respostas ao questionários serão sintetizadas, sendo apresentadas questão por questão. Este capítulo pretende fornecer uma visão mais global do trabalho, enquanto que no Capítulo 4 era possível vislumbrar um maior entendimento da lógica de cada aluno. Por fim no Capítulo 6, expomos a conclusão de nossa pesquisa baseada nas respostas ao questionário e ao embasamento teórico presente nos Capítulos 1 e 2.

Além disto, o trabalho possui um anexo onde são apresentadas respostas de um questionário que foi feito inicialmente e descartado do corpo principal do trabalho, pois reformulamos o questionário e buscamos atingir um número maior de alunos, na segunda pesquisa que é apresentada no Capítulo 4.

Capítulo 1

Ensino de Álgebra Linear

Os trabalhos de maior destaque no estudo do ensino da Álgebra Linear se encontram na França e nos Estados Unidos e começaram a ser produzidos nos anos 80. Na França, um grupo de pesquisadores escreveu diversos artigos, que se tornaram um livro: *L'Enseignement de L'Algébre Linéaire en Question*, coordenado por Dorier. Já nos estados Unidos, houve um grande movimento de revisão do currículo de Álgebra Linear, o LACSG, liderado por David Carlson.

No Brasil, a pesquisa sobre o ensino da Álgebra Linear é extremamente recente, tendo começado nos anos 90. É difícil precisar quantos trabalhos existem. O que podemos afirmar é que são poucos. A brasileira que mais publicou trabalhos nesta área foi Marlene Alves Dias, que realizou seu trabalho inicialmente na França. Recentemente, Marcos Roberto Celestino (2000) fez uma dissertação de Mestrado que se tratava de um estudo da história do ensino-aprendizagem da Álgebra Linear, focando nestes poucos trabalhos brasileiros e citando trabalhos de outros países.

O estudo de Celestino (2000) o levou à seguinte afirmação:

> Na França a tradição impõe que se introduza a teoria axiomática desde cedo, com forte fundamento nos exemplos teóricos, enquanto que na América do Norte ou no Brasil, o quadro das n-uplas e das matrizes é predominante no começo do ensino da Álgebra Linear. Entretanto, todos os estudos realizados mostram problemas em desenvolver tanto a generalidade dos objetos quanto o caráter formal e abstrato das novas noções. (Celestino, 2000, p. 43-44)

Neste capítulo, apresentamos um pouco dos trabalhos feitos na França e nos Estados Unidos, a fim de vermos o problema por diferentes prismas que nos levam a uma mesma reflexão: que ainda falta muito a ser feito neste âmbito e que é necessário revermos nossos conceitos sobre o ensino da Álgebra Linear.

Álgebra Linear na UFRJ

Na Universidade Federal do Rio de Janeiro, a disciplina Álgebra Linear é responsabilidade do Departamento de Matemática Aplicada (DMA) dentro do Instituto de Matemática. Este departamento atende a uma demanda de cerca de 800 alunos por semestre.

Segundo o próprio site do DMA, o objetivo do curso é capacitar o aluno a resolver problemas envolvendo sistemas de equações lineares, transformações lineares, cálculo matricial, cálculo vetorial, autovalores e autovetores. O curso se desenvolve em um semestre, com uma carga horária de 60h, sem exigência de pré-requisito.

Ementa do curso(1): Sistemas de equações lineares e Eliminação Gaussiana. Matrizes e determinante. Espaços vetoriais Euclidianos. Geometria dos espaços vetoriais de dimensão finita. Transformações lineares. Espaços vetoriais com produto interno. Ortogonalidade e mínimos quadrados. Autovalores e autovetores. Teorema espectral. Aplicações à solução de EDOs e em Geometria Euclidiana.

Esta ementa é trabalhada em sete etapas, que são designadas como ‘unidades’. São elas:

- UNIDADE I: Sistemas de equações lineares e Eliminação Gaussiana, Matrizes e determinante.
- UNIDADE II: Espaços vetoriais Euclidianos; independência e dependência linear, base, dimensão.
- UNIDADE III: Transformações lineares; Geometria dos espaços vetoriais de dimensão finita.

(1)Disponível em:
www.im.ufrj.br/matematica_aplicada/pagina_aplicada/ementas/ementa−AlgebraLinearII.html.

- UNIDADE IV: Espaços vetoriais com produto interno; bases ortonormais, processo de Gram-Schmidt, Ortogonalidade e mínimos quadrados; Mudança de Base
- UNIDADE V: Autovalores e autovetores; Diagonalização; Teorema Espectral
- UNIDADE VI: Transformações Lineares Arbitrárias; Núcleo e Imagem
- UNIDADE VII: Aplicações à solução de EDOs; Diagonalização de Formas Quadráticas: seções cônicas

A bibliografia recomendada é:

- Strang, G - Linear Algebra and its applications , Third Edition; HBJ.
- Anton, Howard; Rorres - Álgebra Linear com Aplicações ; Bookman.
- Lay, David - Álgebra Linear e suas Aplicações ; LTC.
- Steven J. Leon - Álgebra Linear com aplicações ; LTC.

1.1 LACSG: um questionamento

Em 1990, foi formado o *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG), que como o nome sugere, pretendia repensar e reformular o currículo norte-americano de Álgebra Linear. O trabalho deste grupo é mencionado aqui não para servir necessariamente como modelo, nem para julgá-lo como ideal ou não. Sua importância está no fato de ser um marco. É um grupo que envolveu muitos pesquisadores e que refletia sobre o ensino da Álgebra Linear buscando torná-la mais acessível a todos, o que de certa forma, colabora para uma visão de democratização do ensino e nos traz questionamentos.

As principais questões deste discurso são: a grande dificuldade que os alunos têm com a Álgebra Linear e suas causas, e o princípio que o curso devia ser orientado a partir de aplicações e operações com matrizes.

Um dos organizadores deste grupo, e que ganhou grande repercussão, é David Carlson. Outro pesquisador que participou do LACSG e publicou diversos trabalhos foi Guerson Harel(2).

Harel resume as recomendações do LACSG da seguinte forma:

1. O programa e a apresentação do primeiro curso de Álgebra Linear deveria responder às necessidades do público(3)da disciplina.

2. Departamentos de Matemática deveriam seriamente considerar fazer um primeiro curso de Álgebra Linear usando matrizes como seu eixo principal.

3. Os professores deveriam considerar as necessidades e interesses dos alunos como aprendizes.

4. Os professores deveriam ser encorajados a utilizar tecnologia em seu primeiro curso de Álgebra Linear.

---

(2)Guerson Harel começou suas pesquisas nos anos 80, em Israel. Em 1985, defendeu sua tese de doutorado e depois foi aos EUA, onde publicou vários artigos.

(3)Este público a que se refere são os alunos da engenharia, que quantitativamente representam a maioria dos alunos que cursam a disciplina, já que o número de alunos de licenciatura e bacharelado (em matemática, fícica e química) é inferior. Este fato também ocorre aqui no Brasil.

5. Ao menos um “segundo curso”em teoria matricial/álgebra linear deveria ser uma grande prioridade para todo currículo matemático.

Estas recomendações foram articuladas da seguinte forma:

> Este grupo produziu um documento em forma de recomendação que se articulava em quatro eixos: *demonstração*: um curso deve ser um desafio intelectual, daí a importância da demonstração própria para aumentar a compreensão; *duração suficiente para o ensino da Álgebra Linear*: aconselha-se um currículo suficientemente longo, centrado na teoria matricial, para comportar um segundo curso de Álgebra Linear; *as novas tecnologias educativas*: outra recomendação é introduzir no ensino tecnologias como o MATLAB ou um software similar; *conteúdo*: conceitos devem limitar-se ao $\mathbb{R}^n$, por exemplo: um vetor antes de tudo é uma coleção ordenada de reais, e uma transformação linear é uma matriz, o programa deve englobar os valores e vetores próprios e a estrutura euclidiana de $\mathbb{R}^n$. (Celestino, 2000, p. 42)

Harel propôs uma teoria de ensino que consistia de três princípios básicos: *concretização, necessidade* e *generalidade.*

A *concretização* é a aplicação de um conceito em algo geométrico (que é o que neste caso é considerado como “concreto”). Esta percepção geométrica deve colaborar na construção de imagens de conceito, que servem de suporte para uma futura abstração.

Segundo Tall e Vinner (1981, p.152), imagem de conceito é a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo de anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.

A *necessidade* está presente quando o aluno considera indispensável utilizar um conceito anteriormente entendido para a resolução de uma questão. A generalidade é o princípio mais difícil de ser alcançado.

A *generalidade* exige do estudante que ele consiga abstrair o que ele aprendeu antes num contexto particular, e segundo o autor isto é difícil, porque, muitas vezes, não é possível separar o objeto de sua representação simbólica.

A partir destes princípios básicos poderia ser possível construir uma efetiva imagem de conceito, que se aproximaria da definição de conceito, já que foi constatado através de pesquisas com alunos que tais coisas se confrontam.

1.1.1 Dubinsky: uma crítica ao LACSG

Dubinsky escreveu *Some thoughts on a first course in Linear Algebra at the college level*, um artigo que acrescenta questionamentos e críticas ao LACSG e David Carlons. Ele mesmo afirma que seu objetivo não é substituir o LACSG, mas de "florir mais flores".

Uma de suas críticas diz respeito à suposta imaturidade dos alunos para lidarem com conceitos abstratos logo no primeiro ano da faculdade:

> Por exemplo, se os alunos são tão imaturos e o curso deveria ser dado depois, é apenas uma questão de esperar? Nós estamos preparados para afirmar que outro ano de curso irá significantemente desenvolver a sofisticação matemática dos graduandos? Os relatórios que nós estamos recebendo dos estudos nacionais sugerem o contrário. O efeito de outro ano de curso é mais como conduzir a menos alunos ter matemática e, para aqueles que permanecem, uma forte convicção que a matemática consiste de, nas palavras de Ed Moise, num repertório de procedimentos copiados. (Dubinsky, 1997, p.88)

E acrescenta que:

> [...]Antes que uma estratégia pedagógica seja considerada, os conceitos de Álgebra Linear que geram conflitos nos alunos, em particular, precisam ser analisados epistemologicamente. Através disto eu quero dizer que pesquisar é necessário para determinar a construção mental específica que um aluno deve fazer para compreender estes conceitos. Então, uma estratégia pedagógica precisa ser desenvolvida de forma que possa conduzir os alunos a fazer estas construções e usá-las para resolver problemas.

O autor afirma que é muito diferente a dificuldade que os alunos têm com o tema matriz da dificuldade enfrentada com dependência linear, bases ou subespaço, o que é um senso-comum que não pode ser ignorado na nossa opinião.

Dubinski (1997) afirma em seu trabalho que

> não há, porém, um grupo de pesquisa que forneça evidências que convençam a um cético da escassez de sucesso nos cursos de Álgebra Linear. Ao contrário de Cálculo e outros tópicos, nós não temos dados sobre uma relação de fracasso ou desgaste, análises de questões e resultado de exames, ou documentação de reclamações vindas da faculdade de quem leciona para os cursos em que Álgebra Linear é pré-requisito. (Dubinsky, 1997, p. 86)

O objetivo do nosso trabalho é colaborar fornecendo estas evidências de escassez de sucesso no curso de Álgebra Linear.

1.2 Uma visão francesa do Ensino da Álgebra Linear

Toda esta seção 1.2 se refere ao livro L'Enseignement de L'Algébre Linéaire en Question (1997).

Na França, também é senso-comum entre os professores que lecionam esta disciplina que de fato há um obstáculo no aprendizado de assuntos como espaços vetoriais, base, transformação linear, autovalores e autovetores, enquanto que há muito mais facilidade em assimilar matriz e sistema de equações lineares, que são conteúdos mais operacionais.

O livro L'Enseignement de L'Algébre Linéaire en Question (1997) reúne diversos trabalhos de autores diferentes, tendo sido editado por Dorier. O trabalho deste autores começou no fim dos anos 80. Estudam como a Álgebra Linear é introduzida no primeiro ano de estudo na Universidade francesa, quando os alunos costumam ter entre 18 e 20 anos.

Neste livro é apontado o paradoxo da Álgebra Linear, explicando que apesar da disciplina parecer a mais simples de todas as teorias da matemática, os problemas encontrados para ensiná-la são fora de proporção com suas dificuldades intrínsecas.

Dentre as muitas razões para a dificuldade na compreensão de conceitos mais abstratos da Álgebra Linear, gostaria de salientar que se verificou neste trabalho que não há situação problema que os alunos possam utilizar em um primeiro curso de Álgebra Linear, que dêem origem ao desenvolvimento de suas principais questões (espaço vetorial, transformação linear e etc). As situações existentes exigem conhecimento mais profundo de outras disciplinas, ou da própria Álgebra Linear, ou são muito elementares e podem ser resolvidas com a Geometria Analítica, por exemplo. Tal constatação contradiz a ideia de que sempre é possível facilitar o aprendizado de algum tema a partir do uso de suas aplicações.

Na França, o ensino da Álgebra Linear foi totalmente remodelado com a Reforma da Matemática Moderna na década de 60. Nesta época, a influência de Bourbaki e outros guiaram a ideia, que tinha como objetivo atingir mais pessoas, de que a geometria poderia ser mais facilmente acessível para os estudantes se fosse fundamentada em axiomas de estruturas de espaços afins. Portanto, a teoria axiomática de espaço vetorial de dimensão finita era dada no primeiro ano da escola secundária (quando os alunos tinham cerca de

15 anos de idade). Segundo os autores, esta ideia de se ensinar a teoria axiomática de espaço vetorial no primeiro ano da escola secundária não é seriamente questionada, e o ensino de Álgebra Linear na França continua muito formal.

Robert e Robinet (1989) mostraram em seu trabalho que a

> principal crítica gerada pelos alunos em Álgebra Linear consistia no uso do formalismo, a esmagadora quantia de novas definições e a falta de conexões com o que eles já sabem em matemática. [...] É bem claro que a maioria dos alunos tem o sentimento de ter pousado em um novo planeta e não são capazes de encontrar seus caminhos neste novo mundo. Por outro lado, usualmente os professores lamentam que seus alunos usem ferramentas básicas de lógica ou teoria dos conjuntos erroneamente. Eles ainda se queixam que os alunos não têm destreza na geometria cartesiana elementar e, consequentemente, não conseguem usar a intuição para construir representações geométricas de conceitos básicos da teoria de Espaço Vetorial. Estas queixas correspondem a uma certa realidade, mas o pouco esforço para uma remediação (com prévio ensino de geometria cartesiana e/ou lógica e teoria dos conjuntos) não parece melhorar a situação substancialmente. (Robert e Robinet, 1989, apud Dorier, 1997, p.2)

A conclusão do trabalho de Dorier (1990) foi a de que as dificuldades do alunos com os aspectos formais da teoria de Espaço Vetorial não é apenas um problema com o formalismo, mas provavelmente uma dificuldade em entender o específico uso do formalismo na teoria de Espaço Vetorial, e a interpretação dos conceitos formais em relação aos contextos mais intuitivos como geometria ou sistema de equação linear, em que eles historicamente emergiram.

O livro é dividido em duas partes:

1. Análise epistemológica da gênese da teoria do Espaço Vetorial: reflexão epistemológica baseada num processo dialético da análise histórica da gênese dos conceitos da Álgebra Linear (estudos conduzidos entre 1987 e 1994);

2. Questões de ensino e aprendizagem: análise didática do ensino da Álgebra Linear e das dificuldades dos alunos;

Na primeira parte é caracterizada amplamente a natureza dos conceitos, explicando que a Álgebra Linear é o resultado final de um vasto trabalho de formalizações. De acordo com o texto, a Álgebra Linear é fruto de um processo de simplificação e unificação.

O primeiro capítulo da Parte II, intitulado de 'Obstáculo do formalismo na Álgebra Linear' e escrito por Dorirer, Robert, Robinet e Rogalsiu, apresenta vários estudos realizados entre 1987 e 1995. Mostram o formalismo como sendo um genuíno obstáculo ao aprendizado da Álgebra Linear para sucessivas gerações, e os próprios alunos reconhecem isto. Os professores também estão sempre cientes disto, sendo que o diferencial desta pesquisa é que especifica a natureza das dificuldades encontradas.

Foi feita uma pesquisa no fim de 1987 para determinar o conhecimento e as ideias dos alunos em Álgebra Linear depois de terem tido o curso, em que estudaram espaço e subespaço vetorial, transformação linear, sistema de equação linear, matriz e determinante. Nesta pesquisa 379 alunos de programas de ciências (matemática e física) de três universidades (Paris 7, Lille e Paris 6) responderam a um questionário no 2° ano de Universidade, isso antes que começassem qualquer nova instrução em Álgebra Linear. O questionário em questão foi o seguinte:

1. Verdadeiro ou falso: v e u são duas transformações lineares de um E.V. nele mesmo. $v \circ u = 0 \Leftrightarrow Im(u) = Ker(v)$.

2. Dê alguns exemplos de espaços vetoriais que você conheça.

3. Sejam A_1, A_2, A_3 três pontos do plano com coordenadas $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$, encontre as coordenadas dos pontos M, N e P, se eles existirem, tal que A_1 é o ponto médio de $\overline{MN}$, A_2, de $\overline{NP}$, A_3, de $\overline{PM}$. As coordenadas M, N e P serão denotadas respectivamente por $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$.

4. Encontre, se existir, a solução para o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ x_3 + x_4 = a_3 \\ x_1 + x_4 = a_4 \end{cases}$$

5. Seja E o espaço vetorial de todos os polinômios, com coeficientes reais e grau não maior que 2, e f uma transformação linear em E tal que qualquer P do E tem uma imagem $Q = f(P)$ tal que $Q(x) = (2x+1)P(x) - (x^2-1)P'(x)$. Dê a matriz de f na base $(1, x, x^2)$.

6. O que você diria para um aluno entrando no 1° ano da Universidade para descrever no que a Álgebra Linear consiste?

7. Quais são, em sua opinião, as principais dificuldades no aprendizado da Álgebra Linear?

De um modo geral, o resultado do questionário não é muito animador. Em meu trabalho apenas citarei o resultado às questões 2 e 7, que como será visto adiante são questões que também farão parte do meu trabalho empírico.

Os exemplos de espaços vetoriais citados na questão 2 pelos 379 alunos estão na tabela abaixo:

Tabela 1.1: Exemplos de espaços vetoriais

Conjunto	Porcentagem (em %)	Quantidade de alunos
$\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$	44	167
$\mathbb{R}^n$	32	123
$\mathbb{C}$	20	74
Funções	15	58
Polinômios	39	146
Matriz	8	32
Sem sentido	7	25

O fato do espaço polinomial ser o mais citado pelos alunos não os surpreendeu, pois, segundo o livro, o conjunto é a principal fonte de exemplos e exercícios no 1° ano de Álgebra Linear na Universidade. Porém, afirmam ser curioso o espaço matricial ser raramente citados pelos alunos e que este conjunto aparece em muitos exercícios no 2° ano.

> Isto reflete a cautela exercida pelos professores que são relutantes a introduzir matriz associada a sistemas e transformações lineares e matrizes como vetores no mesmo ano. (Dorier, 1997, p.91)

Já na questão 7, os pontos mais citados pelos alunos como dificuldades no Ensino de Álgebra Linear foram: Abstração (40%), dificuldade numa noção particular, muitas novas definições e teoremas para entender e aprender, cálculos e dificuldades atribuídas aos professores.

A conclusão geral da pesquisa foi:

> Menos de 40% dos alunos sabem como manipular noções de imagem e núcleo da Transformações Lineares.
>
> Menos da metade sabe resolver um sistema de equações lineares (4x4), onde os cálculos numéricos são simples.
>
> Aproximadamente 1/3 dos alunos não sabem como calcular a matriz de uma transformação linear quando o espaço vetorial é diferente de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, e também não percebem o isomorfismo entre os espaços.
>
> Menos de 1 dos alunos cita $\mathbb{R}^n$ como um exemplo de espaço vetorial, ainda que nos trabalhos de Harel (1989a e b e 1990) isto seja um passo necessário na construção da noção de espaço vetorial; há consequentemente trabalho para ser feito na aquisição desta noção.
>
> Para a maioria dos alunos, Álgebra Linear não passa de um catálogo de muitas noções abstratas que eles representam com grande dificuldade. Por hábito, eles são submergidos por uma avalanche de novas palavras, novos símbolos, novas definições e novos teoremas. (Dorier, 1997, p.95)

Uma segunda pesquisa foi feita em 1990 buscando responder se o formalismo é um obstáculo didático relacionado a carência de pré-requisitos. Esta pesquisa foi baseada em testes aplicados aos alunos ao longo de um ano para estudantes no seu 1° ano da Universidade. Analisaram cópias de oito diferentes testes. Nesta análise observavam que tipos de tarefas eram propostas aos alunos dentro de cada questão dada pelos professores nos testes; o tipo de método, procedimentos e erros dos alunos em suas tarefas comparando com suas prévias habilidades em lógica e noções algébricas. Tais habilidades em lógica e noções algébricas foram previamente aferidas com um pré-teste aplicado nas primeiras semanas de aula na Universidade. Queriam a partir disto ser capazes de formular um diagnóstico de diferentes efeitos deste ensino, e propor algumas hipóteses para sua possível mudança.

> Assim, nós exemplificamos não apenas as já sabidas dificuldades com manipulações formais, mas ainda esclarecemos como o conjunto dos principais conhecimentos em lógica e teoria elementar dos conjuntos contribuem para a produção de erros em Álgebra Linear por elas próprias. (Dorier, 1997, p.86)

Observaram que os testes tinham questões de dois tipos. No primeiro tipo, o uso da Álgebra Linear para resolver as questões não era necessário e, portanto, se atribuía a um Contrato Didático. Segundo Brousseau (1986) “chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamento do aluno que são esperados pelo professor”.

As questões do segundo tipo necessitavam de tantas habilidades em diferentes campos que apenas poucos alunos saberiam lidar com elas usando Álgebra Linear. Os alunos foram melhor sucedidos ao usarem habilidades numéricas e conceituais independente de serem bem sucedidos em Álgebra Linear. Segundo o texto,

> [...]isto mostra que os alunos podem ser globalmente bem sucedidos em Álgebra Linear sem ter uma boa base conceitual. Por exemplo, eles podem encontrar a forma triangular de uma matriz sem ter um bom conhecimento do conceito de subespaço suplementar, embora isto seja uma noção básica para a teoria de redução matricial. (Dorier, 1997, p.100)

Por fim, esta pesquisa confirmou sua hipótese e conclui que a correlação entre os pré-testes e a performance nos testes era globalmente bem forte.

Uma terceira e ampla pesquisa foi realizada entre 1991 e 1994(Dorier, 1997, p.103-124). Por se tratar de uma pesquisa muito extensa, com vários testes aplicados aos alunos no primeiro ano na Universidade, não caberá aqui relatá-la. A pesquisa traz hipotéticas causas para a dificuldade em lógica e teoria dos conjuntos. Faz sugestões para tentar remediar este problema num primeiro ano universitário usando um ensino particular de geometria analítica, porém estas sugestões feitas ainda precisam ser devidamente testadas e por enquanto são apenas hipóteses. Este trabalho foi mais detalhado e demorado, chegando à conclusão de que os obstáculos do formalismos ainda não haviam sido superados.

Capítulo 2

Processo, procedimento e proceito

Em 1989, Sfard já questionava *'como pode algo ser um processo e um objeto ao mesmo tempo?'*. Tal questionamento, que Sfard estudou a partir do conceito da encapsulação, Gray e Tall (1991) abordaram em seus trabalhos sugerindo que a resposta está no modo com que os profissionais de matemática superam este problema.

Para melhor estudar objetos matemáticos, os autores utilizaram o termo 'proceito'. A partir do estudo do proceito desejavam compreender o que levava alguns alunos a serem bem sucedidos em matemática e outros não, como é que estes alunos bem sucedidos lidavam com os objetos matemáticos. No presente trabalho, pretendo voltar meu estudo para alunos com desempenho melhor para analisar e compreender de como estes vêem a Álgebra Linear.

Ao longo da história do ensino na Inglaterra, Gray e Tall percebiam a dicotomia entre procedimento e conceito:

> Dentro do Reino Unido a imposição do currículo nacional (1989) objetivava "elevar o desempenho"em todas as matérias, inclusive matemática. Os requisitos deste currículo fazem distinção entre habilidades ou procedimentos que um indivíduo precisa adquirir, a fim de que eles consigam fazer as coisas, e os conceitos ou fatos básicos que se espera que eles saibam, com os quais eles operam com suas habilidades. Isso sugere uma dicotomia fundamental entre procedimentos e conceitos, entre coisas para fazer e coisas para se saber. (Gray e Tall, 1994, p.2)

Para estudarmos o proceito, antes é necessário que tenhamos em mente o que os autores entendem por conceito, processo e procedimento para entendamos o que é proceito elementar e proceito.

- Conceito: A definição de conceito citada pelos autores (1991) é a de Greeno (1983) que define 'entidade conceitual' como um objeto cognitivo que pode ser manipulado como o input para um procedimento mental.
- Processo: Usado para significar um processo cognitivo ou um processo matemático. Exemplos: "processo de adição", "processo de multiplicação", "processo de resolver uma equação"e etc.
- Procedimento: usam o referencial de Davis para referir-se a um algoritmo específico para a implementação de um processo, por exemplo, o "count-on"ou "count-all"são procedimentos para se chegar ao processo de adição. Outro exemplo é o procedimento idiossincrático individual mental ou a partir de propriedades físicas, como contar ou imaginar dedos para efetuar uma adição.

Tendo em mente estes conceitos, Gray e Tall definem (em 1994):

- *Proceito elementar* é a mistura de três componentes: um *processo* que produz *objetos matemáticos*, e um *símbolo* que é usado para representar ao mesmo tempo processo e objeto.
- *Proceito* é uma coleção de proceitos elementares que tem o mesmo objeto.

A distinção entre proceito elementar e proceito é complexa, já que os próprios autores dizem que:

> Nós definimos um proceito como uma mistura de processo e conceito, em que processo e produto são representados pelo mesmo simbolismo. Assim, o símbolo para um proceito pode evocar um processo e um conceito.(Gray e Tall, 1991, p.2)

Ressaltemos o significado de *símbolo*, que é um objeto tão amplamente citado no estudo de proceito. Hielbert (1988, p. 334) define que símbolos "são entidades que representam ou tomam o lugar de outra coisa. As entidades podem tomar uma variedade de formas, desde objetos concretos até marcas escritas em papel".

De modo mais esclarecedor temos que "As funções principais de um símbolo na Matemática são de designar com precisão e clareza e de abreviar"(DAVIS; HERSH, 1986, p. 154-155), e "interpretar um símbolo é associar-lhe algum conceito ou imagem mental, assimilá-lo na consciência humana"(DAVIS; HERSH, 1986, p. 156).

Gray e Tall citam como exemplo de proceitos os números. Por exemplo, o número 6 pode ser pensado como a $2.3, 3+3, 12/2, 8-2$, que são processos que têm como resultado o número 6. Todas estas operações cujos resultados são 6 são proceitos elementares que formam o proceito que é o próprio 6. Quando fazemos 2.3, por exemplo, temos presente o processo da multiplicação, os procedimentos para realizar a multiplicação e o conceito 6. Numa interpretação própria, vejo que é como se o número 6 fosse o proceito que é o representante de uma classe de equivalência de diversos proceitos elementares que resultam 6, como $2.3, 3+3, 12/2, 8-2$. Proceitos elementares podem ser entendidos como procedimentos que levam ao mesmo resultado.

Além disto, *counting on* e *counting all* são procedimentos para somar números. No processo de *counting all*, o indivíduo para somar $2+3$ realiza a contagem "um, dois, três"e depois "quatro e cinco". Logo, são dois processos de contagem embutidos no procedimento de *counting all*. Já no processo de *counting on*, o indivíduo traz o proceito do número 3 e segue contando "quatro, cinco". Logo, dentro do processo de *counting on* existe um proceito (número 3) e um processo (contar até 5).

Vejamos outros exemplos de proceitos:

Tabela 2.1: Exemplos de proceitos (interpretação nossa[1])

Símbolo	Conceito	Processo/Procedimento
7	número	contagem
$2+3$	Soma	Adição ("counting all", "counting on")
4.5	Produto	somas repetidas
$\frac{3}{4}$	Fração	divisão
+2	número positivo	somar 2(2 passos para a direita)
$senA = \frac{oposto}{hipotenusa}$	$senA$	divisão: $\frac{oposto}{hipotenusa}$
$3x+2$	expressão	adicionar 2 à $3x$
$f(x)$	função	atribuição de valores
$\lim f(x)$	valor do limite	tender à um limite

Os autores usaram esta notação $senA = \frac{oposto}{hipotenusa}$, mas devemos entender que é uma forma simplificada de chamar o tamanho do cateto oposto ao ângulo A e o tamanho da hipotenusa.

Os autores salientam os aspectos procedimentais da matemática, que quando bem assimilados são facilmente percebidos:

> Os aspectos procedimentais da matemática focam na rotineira manipulação de objetos que são representados por material concreto, palavras faladas, símbolos escritos ou imagens mentais. É relativamente fácil de ver se procedimentos são conduzidos adequadamente e o desempenho em tarefas similares são muitas vezes tido como medida da execução dessas habilidades. (Gray e Tall, 1994, p.2)

Acredito que os procedimentos são fundamentais para a construção da matemática, assim como os conceitos. Gray e Tall (1994), inclusive chegam a afirmar que os procedimentos ajudam na compreensão de conceitos:

[1] Interpretação nossa a partir de exemplos citados em Gray e Tall, 1991 e 1994.

> Conhecimento conceitual é mais difícil de se acessar (do que o conhecimento procedimental). Isso porque este conhecimento (conceitual) é rico em relações. O pensamento flexível usando um conhecimento conceitual é provavelmente muito diferente do pensamento baseado em procedimentos inflexíveis. Procedimentos ainda formam uma parte básica da matemática desenvolvida. Na verdade, há claras evidências de que procedimentos podem exercer uma sutil função na formação do conceito, em que a interiorização de procedimentos pelos alunos pode conduzir para sua cristalização como objeto mental, que pode constituir o foco de um pensamento conceitual elevado. (Gray e Tall, 1994, p.2)

Gray e Tall (1994) também defendem que a razão que torna a matemática uma área do saber simples para uma minoria de alunos, enquanto que a grande maioria fracassa, é que esta minoria está fazendo uma matemática qualitativamente diferente dos demais. Para eles, o que evidencia esta diferença qualitativa é a existência de uma flexibilidade entre conceito-processo-procedimento.

Eis aqui a questão central do estudo do proceito: a flexibilidade! Em todos os trabalhos de Tall sobre proceito tal flexibilidade entre conceito-procedimento-processo é destacada, mas a partir de seus trabalhos mais recentes, fica mais claro ainda tal fato. Tanto que inicia uma nova teoria: a dos três mundos da matemática.

De acordo com Tall (2004), existem três tipos diferentes de desenvolvimento cognitivo da Matemática, que podem ser categorizados em três diferentes mundos da Matemática.

- O mundo conceitual-corporificado das percepções, com as quais os indivíduos observam os objetos do mundo real para entender e descrever suas propriedades.

- O mundo proceitual-simbólico, no qual os indivíduos relacionam conceitos e propriedades de objetos a símbolos matemáticos, dando a eles flexibilidade de representar tanto procedimentos quanto conceitos.

- O mundo formal-axiomático dos axiomas, definições e teoremas que compõem a estrutura da Matemática.

Tall mostra em seus artigos a relação de cada mundo da matemática com um tipo diferente de desenvolvimento cognitivo. Esses mundos não são isolados e nem são equivalentes a “estágios do desenvolvimento”, apesar de serem o resultado do crescimento cognitivo de cada indivíduo. Cada um destes mundos pode ser usado de modo conveniente a cada situação com que o indivíduo se confronta.

O mundo a que se refere o proceito é o mundo proceitual-simbólico, tanto que a definição para o comportamento dos indivíduos neste mundo se confunde com a definição de proceito.

> No mundo proceitual-simbólico, indivíduos representam e efetuam ações pelo uso de símbolos matemáticos, que podem agir como procedimentos para fazer matemática ou conceitos para pensar sobre matemática.(Lima e Tall, 2006)

Explicando melhor a flexibilidade, Lima e Tall (2006) fazem as seguintes afirmações:

> Quando símbolos são vistos como um proceito, é possível mudar flexivelmente de ponto de vista, de um procedimento que alguém se engaja a executar, para o conceito que resulta da ação efetuada. Essa flexibilidade permite que os indivíduos entendam os símbolos de maneira significativa. (Lima e Tall, 2006)

Lima e Tall (2006) pensam que ao entender que o importante a ser enfatizado é o efeito que diferentes procedimentos podem resultar e ao vê-los como proceitos, os alunos podem dar significado conceitual aos símbolos e sua manipulação, isto é, podem ver os símbolos com o significado que eles carregam no mundo simbólico. O foco em apenas um procedimento pode restringir o significado dado aos símbolos apenas como o de uma letra ou símbolo que deve ser manipulado de acordo com tal procedimento, sem que seu significado conceitual seja compreendido. O procedimento efetuado pode, inclusive, tornar-se um procedimento corporificado, em que os alunos movimentam os símbolos para um lado ou outro do sinal de igual, sem necessariamente compreender as propriedades matemáticas subjacentes a esses movimentos.

Apontam que a ausência deste pensamento proceitual no indivíduo pode fazer com que ele faça um uso indiscriminado da manipulação simbólica, ainda que desprovida de sentido, pois seria uma alternativa para compensar a falta de um entendimento global do proceito. Penso que esta é a solução encontrada pelo aluno de seguir sendo "bem-sucedido", ainda que não tenha um entendimento ideal do conteúdo ensinado.

> Nossa hipótese é de que indivíduos com pensamento proceitual podem ver os símbolos de maneira flexível como processo ou conceito, de acordo com a necessidade, movendo o foco de atenção de um ao outro quando a situação requeresse. Eles também seriam capazes de escolher, dentro de uma gama de diferentes procedimentos que resultam no mesmo efeito, aquele que é mais adequado para a situação em jogo. Além disso, a falta de pensamento proceitual pode confinar os indivíduos ao uso restrito de símbolos e pode resultar em seu uso sem significado, como em Freitas (2002), Sleeman (1984) e Payne e Squibb (1990). (Lima e Tall, 2006)

Lima e Tall (2006), conjecturam que a flexibilidade dos proceitos não está relacionada apenas a ver um símbolo tanto como procedimento quanto como conceito, mas também ao fato de um indivíduo ser capaz de escolher o melhor procedimento para uma tarefa entre aqueles que dariam o mesmo efeito. Os autores trabalharam neste artigo com o estudo da equação do 2° grau, que pode ser resolvida de diferentes formas. Neste caso das equações, tal flexibilidade seria escolher um método de resolução que seja mais adequado para a forma em que a equação é apresentada e que resulte na solução correta. Para os autores "a busca por um procedimento bom para cada equação também mostra pensamento proceitual, já que isso significa entendimento conceitual de símbolos e sua manipulação".

2.1 Proceito e a Álgebra Linear

Da mesma forma que os números, vetores também podem ser encarados como proceitos, pois podem ser vistos como um elemento do espaço vetorial; um ente matemático com módulo, direção e sentido; algo que pode ser estático ou dinâmico; resultado de operação entre outros vetores (soma, homotetia...).

Uma transformação linear também é um proceito, porém seu entendimento é complexo. Segundo Tall, uma função é um proceito, porque podemos pensar na conta que é feita para achar a imagem de um determinado elemento do domínio, mas também é um conceito que vale para qualquer variável.

Parte da definição da Transformação Linear diz respeito a ela ser uma função. Logo, a transformação linear é operacional por relacionar um elemento do domínio a um elemento do contra-domínio e também é um conceito que vale para qualquer variável. Mas, a questão é que a função é um conceito da transformação linear, e a função em si é um proceito. Logo, a função é um proceito e um elemento conceitual de outro proceito, o da transformação linear. Traçando um paralelo com a matemática, um conjunto pode ser elemento de outro conjunto, como por exemplo um elemento do conjunto das partes é um (sub)conjunto.

De modo semelhante, o domínio e contra-domínio da transformação linear são espaços vetoriais, o que é um aspecto conceitual, mas o espaço vetorial em si é um proceito.

Além disso, na própria definição de Transformação Linear, existem procedimentos, que costumam ser averiguados pelos alunos, que são se $T(u+v) = T(u) + T(v)$ e $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, onde u, v pertencem ao domínio da Transformação Linear e λ é um escalar qualquer. Porém, não é possível caracterizar a linearidade como conceitual ou procedimental com exatidão, baseando-se no referencial teórico de Gray e Tall, que não cita tal caso.

Refletindo sobre a Transformação Linear, que é o tema de nossa pesquisa, podemos enxergá-la como um proceito. Entender transformação linear como proceito é compreendê-la em sua totalidade, tendo flexibilidade entre seu conceito e os procedimentos que o cercam. Esta percepção torna mais fácil compreendermos as dificuldades que os alunos sentem ao lidar com o nosso objeto matemático, por estarmos ciente da complexidade que é formar um proceito.

Capítulo 3

Metodologia

3.1 Estrutura geral

A metodologia de pesquisa consistiu em um estudo empírico qualitativo feito em duas etapas: um questionário piloto e um questionário principal, aplicado a diferentes grupos de alunos, seguido de entrevistas semi-estruturadas gravadas e depois transcritas. Estes dois questionários (piloto e principal) abrangiam questões pessoais e questões de Álgebra Linear.

Primeiramente, apliquei um questionário (mais tarde nomeado de questionário piloto) a oito alunos da Universidade Federal do Rio de Janeiro e depois entrevistei-os. Estes alunos eram de diferentes cursos da Engenharia (Civil, Ciclo Básico, Produção...). Selecionamos alunos que tinham acabado de cursar a disciplina Álgebra Linear II no segundo semestre de 2009, sendo que cursaram a matéria pela primeira vez (não eram repetentes). Este questionário piloto foi aplicado em dezembro de 2009 e janeiro de 2010.

Na primeira etapa da pesquisa (questionário piloto), os alunos foram selecionados de um universo de cerca de 800 alunos a partir de suas notas de matemática no vestibular e em Cálculo I, que deveriam ser superiores a seis e oito, respectivamente. Ressaltamos que o Cálculo na UFRJ é unificado para a Engenharia (ou seja, todos os alunos fazem as mesmas avaliações), enquanto que a Álgebra Linear não.

De acordo com estes critérios de nota, 59 alunos foram previamente escolhidos e destes, 8 foram localizados e participaram da primeira etapa da pesquisa. O objetivo desta seleção

Tabela 3.1: Critérios da primeira seleção: Questionário piloto

	Matemática (Vestibular)	Cálculo I
Nota mínima	6	8

foi o de conseguir alunos que fossem bem sucedidos, ao menos, na ênfase procedimental da matemática. Desta forma, pretendíamos atingir alunos estudiosos, embora isto não possa ser garantido totalmente pelo método de seleção.

Tabela 3.2: Quantitativo da primeira seleção

Total de alunos efetivos	808
Alunos que satisfaziam o critério	59
Alunos que participaram da pesquisa	8

Aplicado o questionário piloto, percebemos que algumas questões poderiam ser melhor trabalhadas e que poderíamos abranger um número maior de alunos, fazendo um novo estudo empírico. Elaboramos um novo questionário, bastante semelhante ao anterior, que chamamos de questionário principal. Este questionário principal foi aplicado no final de junho e durante as duas primeiras semanas de julho de 2010, tendo como público alvo os alunos que estavam terminando de cursar Álgebra Linear II naquele momento (2010/01).

Estes alunos foram selecionados por nota, mas com critérios menos exigentes, pois tratava-se de um grupo de alunos que tinham em sua maioria ingressado na Universidade em 2009/02 com notas inferiores aos da primeira seleção, exceto os alunos da Engenharia de Produção, que ingressaram em 2009/01, mas cursam a disciplina no terceiro período. Nesta segunda seleção, encontramos 163 alunos com nota superior a sete em Cálculo I (em 2009/02) de um universo de 472 alunos, porém destes, 120 não se encontravam em pauta alguma de Álgebra Linear II ou haviam cursado a disciplina em 2009. Logo, restaram apenas 43 alunos com nota superior a sete em Cálculo I. Destes 43 alunos, apenas 9 alunos tinham nota superior a seis em Matemática no vestibular, 4 tinham nota superior a cinco e inferior a seis, e 3 alunos tinham nota superior a quatro e inferior a cinco, e o restante (27 alunos) tinham nota inferior à 4,0. Deste modo, optamos por ignorar a nota do vestibular em Matemática como fator de seleção, ainda que a tragamos à tona ao longo da pesquisa, e exigimos apenas que o aluno tivesse nota superior a sete em Cálculo I. Apresentaremos uma tabela com as notas de cada aluno nas próximas seções, antes de revelarmos suas respostas ao questionário.

Para encontrar estes alunos, fui a suas respectivas salas de aula e, para os que não foram encontrados em sala, enviamos e-mail. Por fim, dos 43 alunos com nota superior a sete em Cálculo I, apenas 13 foram encontrados ou responderam ao e-mail aceitando colaborar com a pesquisa. Além disto, mais um aluno que não havia sido selecionado, voluntariou-se a participar por iniciativa própria. Totalizamos assim, 14 alunos na segunda etapa da pesquisa.

Tabela 3.3: Quantitativo da segunda seleção

Total de alunos efetivos	472
Alunos que satisfaziam o critério	43
Alunos que participaram da pesquisa	14

Devemos notar que tais seleções não são simples, pois apenas trabalhamos com uma minoria dos alunos que cursam Álgebra Linear na UFRJ, já que a maioria não se enquadra nos requesitos exigidos. Porém, não foram apenas vinte e um alunos que se enquadraram na seleção (oito na primeira seleção e treze na segunda) e sim 99 (59 na primeira seleção e 43 na segunda). Dsetes 99 alunos, 21 se dispuseram a participar da pesquisa, sendo que os demais nem foram encontrados.

Como os alunos foram selecionados por nota e não são da mesma turma (tiveram professores diferentes), a pesquisa não estará levando em consideração que cada aluno pode ter visto abordagens distintas de uma mesma matéria, já que cada professor imprime em suas aulas um pouco de suas crenças e concepções de ensino e do próprio saber científico(1).

É importante ressaltar que os dois questionários (o piloto e principal) deveriam ser

(1)É um saber acadêmico, segundo Pais (2002).

respondidos exatamente na ordem em que estão configurados e que imediatamente após o término do preenchimento do questionário, foi dada a oportunidade para que o aluno alterasse suas respostas, justificando o porquê. O motivo do questionário ter que ser respondido na ordem é que ele foi elaborado de modo que a questão seguinte pudesse auxiliar na resposta da anterior. Por isso o aluno poderia mudar alguma (ou todas) as respostas no final. Porém, nenhum aluno alterou sua resposta ao final. Destacamos agora o desinteresse em alterar qualquer resposta por parte dos alunos.

Os nomes apresentados neste trabalho não são os nomes verdadeiros dos alunos, para preservar suas identidades.

3.2 Questionário pessoal

No corpo de apresentação de cada aluno, descreverei de forma simplificada suas respostas às seguintes questões:

1. Você se considera um bom aluno em Matemática?
2. Você gosta de matemática?
3. O que achou do curso de Álgebra Linear II?
4. Você gostou mais do curso de Cálculo I ou Álgebra Linear II?
5. Qual é, na sua opinião, a dificuldade do curso de Álgebra Linear II?[2]

Pedimos aos alunos que justificassem todas as respostas a fim de os conhecermos melhor. A quinta questão estava presente na pesquisa de Dorier (1987).

3.3 Questionário piloto

1. (a) Dê três exemplos de espaços vetoriais.

[2] A quinta questão não estava presente no Questionário Piloto.

(b) Um polinômio pode ser um vetor? E uma matriz?

2. Podemos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x+3$ é uma transformação linear? Justifique a partir da definição e por uma característica de transformação linear. Essa função se classifica como função afim e/ou linear?

3. Seja P_2 o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2, ou seja, o conjunto $\{a_0 + a_1x + a_2x^2; a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2\}$. $T : P_2 \to P_2$ tal que $(Tp)(x) = 2p(x)$ é uma transformação linear?

4. (a) Gere uma aplicação que leve elementos de $\mathbb{R}^2$ em elementos de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Gere uma aplicação qualquer que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$ (conjunto das matrizes 2×2).

   (c) A aplicação que construiu na letra (b) é uma transformação linear? Caso não seja, gere uma transformação linear que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$.

5. Seja uma aplicação $T : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x$. T é uma transformação linear?

6. Defina (com suas palavras) transformação linear.

3.4 Conceitos avaliados no questionário piloto

Cada questão tem por objetivo averiguar um determinado conhecimento por parte do aluno. A primeira questão (semelhante à questão 2 do questionário aplicado na França em 1987, ver página 13), na verdade, é um pré-requisito para que o aluno possa fazer a terceira e a quarta questão, pois verifica se o aluno consegue conceber polinômios e matrizes como vetores, ou seja, elementos de um Espaço Vetorial. Ao longo da vida escolar, os alunos são acostumados a chamar de vetores apenas os elementos do $\mathbb{R}^n$ (mais especificamente, do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$), portanto, lidar com outros espaços vetoriais passa por um difícil trabalho de ampliação de um conceito prévio.

A segunda questão aborda uma possível confusão de nomenclatura. A linearidade de funções (vista no Ensino Médio), pode ser confundida com função do 1º grau. A função dada é uma função do 1º grau, mas não é uma transformação linear. Uma forma rápida de constatar isto é que $f(0) \neq 0$.

> Novos conhecimentos muitas vezes contradizem o antigo, e um aprendizado efetivo requer estratégias para resolver tal conflito. Às vezes partes de conhecimento em conflito podem ser reconciliadas, às vezes uma ou outra devem ser abandonadas, e às vezes as duas podem ser conservadas se mantidas a salvo em compartimentos mentais separados. (Papert, 1980, p.121, apud Tall, 1992)

Na terceira questão, olhando apenas para a lei de formação algébrica da aplicação, o aluno pode ser induzido a pensar que a função não é uma transformação linear, por confundir p(x) com x, realizando a seguinte operação: $(Tp)(\alpha x) = 2(a(\alpha x)^2 + b\alpha x + c) \neq 2\alpha(ax^2 + bx + c)$.

Na quarta questão, além de aferir os conhecimentos de transformação linear, busco desafiar o aluno a fazer o inverso do que costuma ser pedido nos livros didáticos: gerar a aplicação e uma transformação linear dados o domínio e contra-domínio.

Na quinta questão compete ao aluno perceber que o domínio não é um espaço vetorial e, portanto, não faz sentido verificar se é uma transformação linear. A função foi escolhida para induzir o aluno a pensar que sim, se apenas observar que T(0) =0 e a soma de dois números inteiros resulta em um número também inteiro. Além do domínio não ser um espaço vetorial, o aluno poderia perceber que não será verdade que $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, para $u \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. De fato, $T(\lambda u)$ nem estará definido caso λ não seja inteiro.

Na sexta e última questão pretendíamos verificar qual a concepção que o aluno tem acerca do proceito de transformação linear e observar quais aspectos do proceito seriam privilegiados por ele. Além disso, ao colocar esta questão como a última do questionário, nossa expectativa era de que isto provocasse uma maior reflexão, já que ao longo do questionário o aluno poderia até ir se lembrando de diferentes aspectos e formular uma melhor definição com suas palavras.

3.5 Questionário Principal

1. (a) Dê três exemplos de espaços vetoriais.

   (b) Um polinômio pode ser um elemento de um espaço vetorial? E uma matriz?

2. Explique o que é uma transformação linear.

3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 3$.

   (a) A função f é uma transformação linear? Justifique.

   (b) Você pode justificar a letra (a) de uma segunda forma?

4. Seja P_2 o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2, isto é, $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Considere $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + 2bx + 2c$. T é uma transformação linear? Justifique.

5. (a) Crie uma função que leve elementos de $\mathbb{R}^2$ em elementos de $\mathbb{R}^3$.

   (b) Crie uma função que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$ (conjunto das matrizes 2×2).

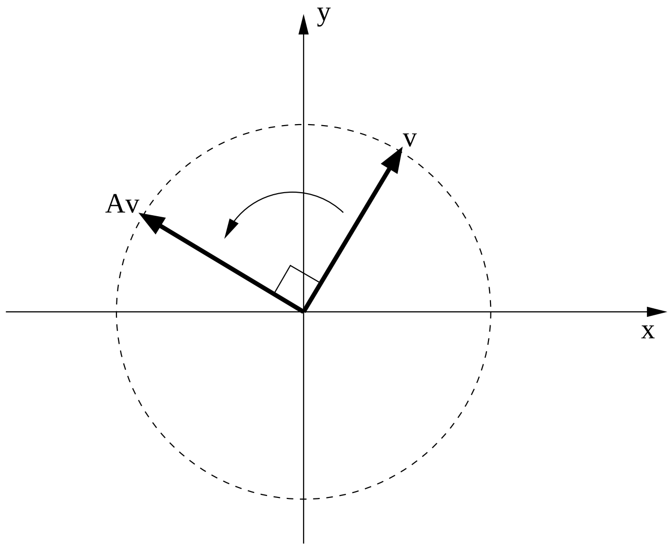
   (c) A função que criou na letra (b) é uma transformação linear? Caso não seja, crie uma transformação linear que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$.

6. Considere a função $T : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x$. T é uma transformação linear? Justifique.

7. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, que representa uma rotação de $90°$ (sentido anti-horário) em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, se aplicarmos A no vetor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, obtemos que:

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ilustramos o efeito de A em v na figura abaixo:



(a) Determine A^4.

(b) Determine A^{101}.

3.6 Conceitos avaliados no questionário principal

Nesta seção, vamos apresentar as razões para as alterações do questionário piloto e a justificativa para as novas questões. A única questão que não sofreu nenhuma alteração foi a quarta.

Na primeira questão optamos por perguntar se um polinômio e uma matriz podem ser elementos de um espaço vetorial, pois previamente havíamos usado a expressão "Um polinômio pode ser um vetor? E uma matriz?"e percebemos que a noção de vetor ainda está bastante comprometida e isto podia causar problemas ao responder, pois não necessariamente o aluno conhece que o elemento do espaço vetorial se chama vetor, seja o espaço vetorial que for. Percebemos, pelo questionário piloto, que alguns associam a ideia de vetor a "setinhas"com direção e sentido, o que é uma interpretação correta para vetores no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

A questão que era a última no questionário piloto, passou a ser a segunda. A razão dela estar previamente como última questão é que pensávamos que ao longo de um questionário todo sobre Transformação Linear, o aluno poderia evocar sua definição e/ou suas concepções relativos à questão. Porém, como isto não ocorreu na fase piloto, julgamos mais conveniente colocá-la como segunda questão para que facilite a análise das questões, já que é fundamental saber o que o aluno pensa sobre o conceito de transformação linear para nos auxiliar na análise das questões posteriores.

A terceira questão (que era a segunda no questionário piloto) sofreu duas alterações. Antes solicitamos que o aluno justificasse se a função era ou não uma transformação linear a partir da definição e "por uma característica de transformação linear", sendo que esta segunda parte é tendenciosa, embora tivesse como objetivo auxiliar o aluno na resposta. Ao invés disto, preferimos elaborar a questão de um modo mais livre, apenas lhe perguntando se é possível justificar a questão de uma segunda forma. Outra modificação foi a retirada do questionamento se a função dada se classificava como função afim e/ou linear. Retiramos esta questão porque os alunos deixavam em branco ou quando respondiam não justificavam. Como a questão de verificar o conflito entre as nomenclaturas era uma curiosidade (não fundamental para tratarmos o tema da Transformação Linear), acreditamos desnecessária sua permanência no novo questionário.

A quinta questão, que antes era a quarta no questionário piloto, sofreu uma pequena alteração no vocabulário, sem alterar o significado. Trocamos a expressão "gere uma aplicação"por "crie uma função", por julgar o vocabulário mais adequado aos alunos no início da graduação.

A sexta questão, que antes era a quinta no questionário piloto, sofreu apenas uma alteração no domínio da função dada, que ao invés de $\mathbb{Z}$ passou a ser o conjunto discreto $\{0, 1, 2, 3\}$, a fim de enfatizarmos que o domínio não é espaço vetorial, já que pelo resultado obtido no questionário piloto percebemos que os alunos não se atentavam para o domínio.

A sétima questão, que é inédita no novo questionário, busca da forma mais clara possível verificar a assimilação do proceito de transformação linear a partir da flexibilidade entre processo e conceito. Quando se pensa em matriz rotação e pede-se A^4, pode-se pensar em A apenas como uma matriz e multiplicá-la por ela mesma ou pensar no conceito de rotação embutido na transformação linear representada pela matriz. A flexibilidade estaria presente (ou não) a partir da escolha feita pelo aluno de como responder esta questão.

Capítulo 4

Resultados do Questionário Principal

Neste capítulo, será relatado com detalhes as respostas dos alunos ao questionário principal. Cada seção deste capítulo se refere a um dos alunos que participaram da pesquisa. Inicialmente são mostradas as notas do aluno em Matemática (no vestibular), Cálculo I e Álgebra Linear II. Em seguida narramos suas respostas ao questionário pessoal e revelamos suas respostas ao questionário principal de Álgebra Linear em si. Estas mesmas respostas serão analisadas tanto do ponto de vista da Álgebra Linear, quanto sob a ótica do proceito.

4.1 Bruno

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
9,88	9,8	9,3

Bruno é aluno de Engenharia e bacharelado em Matemática (duplo diploma). Considera-se um bom aluno em Matemática, por ter facilidade na compreensão das matérias ligadas à Matemática. Explica que esta facilidade vem de um entendimento rápido da matéria dada, além de decorar rapidamente as fórmulas por saber o significado de seus termos. Tem um gosto especial pela Matemática, o que em sua opinião o fez sempre ter sido um bom aluno, tanto que está buscando o diploma duplo.

Bruno achou o curso de Álgebra Linear II interessante, pois nele foram introduzidos conceitos de espaços vetoriais, assim como outros assuntos não apresentados no Ensino Médio. O aluno ainda afirma que “Estes (os novos assuntos) são de essencial importância no entendimento da matéria, que sem estes vira um agregado de fórmulas e contas sem qualquer sentido”. Não é à toa que o aluno preferiu o curso de Álgebra Linear II ao de Cálculo I, por ter sido mais abstrato. Critica o curso de Cálculo I: “O curso de Cálculo I, embora introduza as ideias de infinitésimos e limites, foca muito no cálculo de derivadas e integrais por métodos decorados e repetitivos”.

Embora o aluno tenha gostado da abstração encontrada na Álgebra Linear II, atribui a ela a maior dificuldade do curso, e fornece como exemplos espaços vetoriais, dimensões maiores que três e transformações. Mas, segundo ele “sem os quais a matéria se torna a mesma repetição de resoluções já vistas, que pela ausência do ‘saber o que está fazendo’ leva a erros”.

1. Os exemplos dados por Bruno ao item (a) são:

    - $\mathbb{R}^3$: $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$
    - Espaço dos polinômios: $\{x^n, x^{n-1}, x^{n-2}, ..., x^2, x, 1\}$
    - Espaço das derivadas: $\left\{1, f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n)}(x)\right\}$

    Em seus exemplos, percebemos variedade de conjuntos e um erro na notação, pois o aluno deveria ter usado $\langle ... \rangle$ ao invés de chaves para representar o espaço gerado pela base dada a cada espaço vetorial.

    O aluno afirma no item (b) que polinômios e matrizes podem ser elementos de espaços vetoriais, “pois para serem espaços vetoriais precisa-se que a soma ou multiplicação por escalar estejam no espaço vetorial (que ocorre para polinômios e matrizes)”. Mas, quando lhe arguí se havia mais alguma propriedade, ele afirmou não saber.

    Notamos que o aluno sabe os principais conceitos acerca do proceito de Espaço Vetorial, ainda que esteja incompleto.

2. A explicação de Bruno para o que é Transformação Linear é incompleta. Ele apenas disse que é análogo a uma função, ou seja, que é uma entidade que leva um elemento em outro.

   Quando indagado se estes elementos tinham alguma característica especial, o aluno disse que achava que eles tinham que ser espaços vetoriais. Mas, o aluno confunde as propriedades da transformação linear com as do espaço vetorial e não responde corretamente. Veja um trecho da entrevista:

   Entrevistador E: E além disso, ser uma função que vai de um espaço vetorial no outro, tem mais alguma característica, ou é suficiente para ser transformação linear?

   Aluno A: Não, o domínio e a imagem tem que ser espaços vetoriais. E eles têm soma e produto.

   E: Soma e produto?

   A: Por escalar.

   E: O que você quis dizer com "soma e produto"?

   A: Pra ser espaço vetorial, a soma deles tem que estar contida no espaço vetorial, e o produto por escalar também tem que estar no espaço vetorial.

   O aluno começou respondendo corretamente, mas confunde e explica a preservação da soma e produto por escalar em espaços vetoriais, ao invés de falar na Transformação Linear.

3. Nesta questão, o aluno se equivoca ao responder que a função é sim uma Transformação Linear. Sua justificativa é a seguinte: "Sim, pois ela leva elementos x em $2x+3$, e todos os elementos transformados pertencem ao espaço vetorial de $x(\mathbb{R})$".

   No item (b), ao invés de fornecer outra justificativa, Bruno explica melhor seu raciocínio utilizado no item (a): "A função f, embora altere os elementos originais x, tem como imagem um espaço vetorial, sendo portanto linear".

Bruno deixa claro que para que seja transformação linear basta que seja uma função cuja imagem seja um espaço vetorial. Mas, além disto ser falso, dentro de seu raciocínio a reta $2x + 3$ no $\mathbb{R}^2$ não é um subespaço vetorial, por não passar na origem, sendo apenas um subespaço afim do $\mathbb{R}^2$. O aluno reforça sua confusão na assimilação do proceito de transformação linear, que já havia sinalizado na questão 2. Temos portanto uma visão conceitual equivocada em sua resposta.

4. Seguindo a mesma linha de raciocínio para a averiguação se funções são ou não Transformações Lineares, Bruno responde: "Sim, pois a transformação leva dado elemento no seu dobro, de modo que os elementos são transformados linearmente, ou seja, respeitam as propriedades dos espaços vetoriais".

   Ao ser solicitado que explicasse melhor o que quis dizer com esta justificativa, o aluno deixa transparecer uma visão equivocada que possui de transformação linear. Ele afirma que "assim como o conjunto dos polinômios é um espaço vetorial, o dobro deles também é um espaço vetorial , então a transformação é linear", o que significa que toda função cujo domínio e imagem são espaços vetoriais é transformação linear. O que podemos afirmar é que a imagem de uma transformação linear é um espaço vetorial, e além disso é subespaço do contra-domínio.

   Há portanto uma falha conceitual do aluno.

5. No item (a), Bruno responde corretamente fornecendo a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x, y) = (x + y, x - y, 2x + y)$.

   Já no item (b), o aluno não teve o mesmo êxito. Ele primeiro explicitou $P_2 = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in \mathbb{R}\}$ e a função dada foi: $f(P_2) = \begin{bmatrix} ax + b & c \\ bx & 3ax \end{bmatrix}$.

   No item (c), Bruno sem dar justificativas, apenas respondeu "sim", afirmando que sua suposta função dada no item (b) era uma transformação linear. Na entrevista tenta justificar: "Eu acho que seria basicamente a mesma explicação dos outros que você tá pegando alguns elementos de uma possível base do P_2, pra formar um elemento da matriz, que podem ter as propriedades do espaço vetorial".

6. Bruno começa organizando as suas ideias:

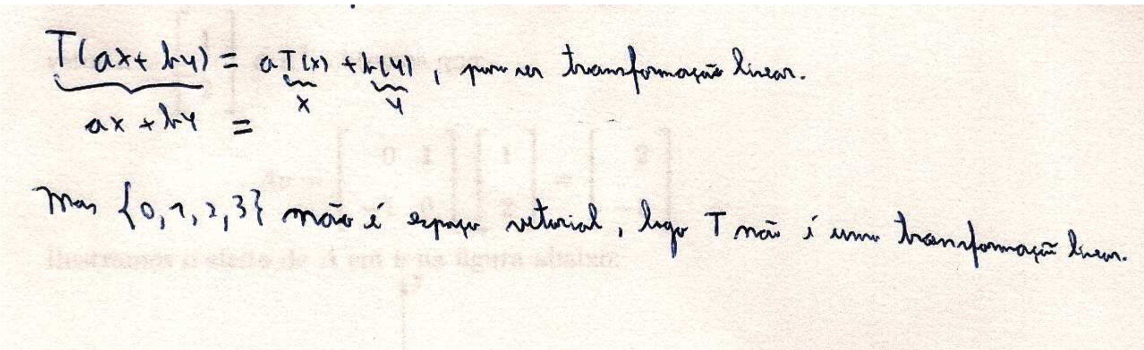


Figura 4.1: Resposta de Bruno à questão 6.

Apesar de evocar as propriedades da linearidade no começo de sua resposta, o aluno responde que $\{0, 1, 2, 3\}$ não é um espaço vetorial, logo T não é uma Transformação Linear.

Bruno tem claro parte do proceito de transformação linear. Não dissocia de seu conceito o fato do domínio e contra-domínio terem que ser necessariamente espaços vetoriais. No entanto, em momento algum do questionário utilizou em sua respostas as propriedades da linearidade, que é uma parte do conceito que consideramos mais procedimental.

7. Na última questão, Bruno multiplica a matriz dada três vezes, fazendo A^4 e chegando ao resultado correto. No item (b), faz $A^{101} = A^{100}A = I^{25}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Perguntei-lhe se podia me fornecer outra resposta para o item (a) e o aluno evoca a visão geométrica: "Ah, sim! Assim eu já tinha algum embasamento de que A^4 seria a identidade, já que A é uma rotação de 90º e assim 4 vezes seria uma rotação de 360º, ou seja, eu voltaria ao mesmo ponto."

A partir de sua resposta, indaguei-lhe se havia pensado em algum momento em registrar este raciocínio (geométrico) como resposta ao questionário e o aluno disse que sim, mas que optou por deixar "só a conta mesmo".

O aluno, que possui uma visão geométrica e conceitual para esta questão, decide deixá-la de lado e valorizar o procedimental, por lhe parecer mais aceitável.

4.2 Caio

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
6,5	6,2	6,6

Observemos que pela sua nota de Matemática no vestibular, Caio foi o aluno que não foi selecionado previamente, mas se voluntariou a participar da pesquisa.

Caio se considera um bom aluno em Matemática e afirma sempre ter tido facilidade em aprender a matéria. Desde pequeno tinha interesse e aprendeu boa parte do que sabe sozinho, estudando em livros. Apesar de ter tido excelentes notas no colégio, na faculdade seu desempenho caiu bastante. Gosta de Matemática, sempre encarou estudar a matéria e fazer exercícios como algo prazeroso e não como obrigação.

O aluno achou o curso de Álgebra Linear II interessante e também que ele lhe mostrou ferramentas úteis, como o método de eliminação de Gauss. Além disso, gostou da análise vetorial dos problemas, fazendo mudança de base e vetores ortonormais. Ainda assim, o aluno preferiu o curso de Cálculo I ao de Álgebra Linear II, pois, segundo ele, o curso de Cálculo I "abre portas para uma abordagem gigantesca e nova da Matemática com derivadas e integrais".

Para Caio, a maior dificuldade do curso de Álgebra Linear II é traduzir todas as leis, teorias e demonstrações em exemplos concretos e práticos.

1. Ao invés de simplesmente dar exemplos no item (a), Caio começa a responder a questão explicando que "espaço vetorial é o espaço gerado por um vetor (ou mais)", e segue com os exemplos:

    - uma reta em $\mathbb{R}^3$
    - um plano em $\mathbb{R}^3$
    - o próprio $\mathbb{R}^3$

Observemos que os dois primeiros exemplos não estão corretos, pois nem toda reta e plano do $\mathbb{R}^3$ são espaços espaços vetoriais.

Pedi que me fornecesse mais exemplos de espaços vetoriais durante a entrevista, e ele apontou $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ e espaço polinomial. Entretanto, o aluno não soube explicar melhor o que é um espaço vetorial:"É o espaço gerado por um vetor, um ou mais vetores. Mas, eu não entendo isso direito..."

O aluno acredita que polinômios e matrizes são elementos de espaço vetoriais, mas sua justificativa é a seguinte:

"Sim. Um elemento de um espaço polinomial é um polinômio. Uma matriz também. A matriz, neste caso, é só uma representação dos vetores que geram o espaço vetorial".

A fim de elucidar o que o aluno verdadeiramente pensa sobre o item (b), segue abaixo um trecho da entrevista:

Entrevistador E: Quando você fala que um polinômio é um elemento deste espaço, ele seria visto como um vetor?

Aluno A: É, ele não é um vetor.

E: Ele é ou não é um vetor?

A: É como se fosse um vetor, mas num espaço polinomial.

E: Você disse que "a matriz é uma representação de vetores que geram um espaço". O conjunto de matrizes pode ser um espaço vetorial?

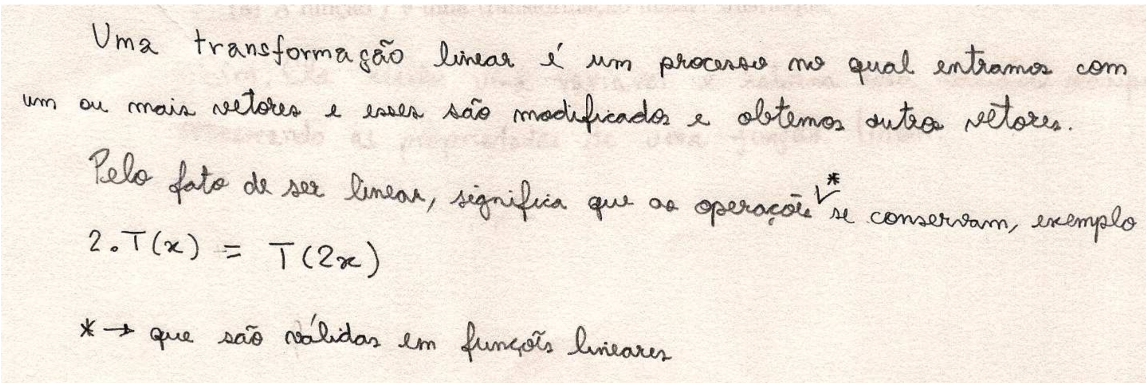
A: Pode, acho que pode. Não sei.

E: Se eu pegar o conjunto de todas as matrizes 2×2, é um espaço vetorial?

A: É. Não sei. Acho que sim.

Percebe-se que o aluno não tem claro o proceito de espaço vetorial e vetor, mas enxerga que polinômios são vetores do espaço polinomial.

2. O aluno fornece a seguinte explicação para o que é uma transformação linear:



Uma transformação linear é um processo no qual entramos com um ou mais vetores e esses são modificados e obtemos outros vetores.

Pelo fato de ser linear, significa que as operações* se conservam, exemplo:

$2.T(x) = T(2x)$

* → que são válidas em funções lineares

Figura 4.2: Resposta de Caio à questão 2.

Mais uma vez, em entrevista, Caio revela uma certa insegurança ao afirmar que uma transformação linear pode ser uma função sim. Ao interrogar se podia ou era uma função, o aluno responde corretamente que é uma função.

Quando lhe questionei sobre a natureza do domínio e contra-domínio da transformação linear (se possuíam alguma característica especial), o aluno responde que não e evoca de forma informal as propriedades da linearidade:

“Não, eles não podem ser qualquer coisa, na transformação eles têm que manter a linearidade, respeitar, tipo, 2 vezes a transformação de um vetor tem que ser a transformação dessa coisa vezes 2, e é uma variável qualquer.”

E continuou: “Tem outras (*propriedades*), tipo somatório de duas tem que ser igual à transformação de uma mais a outra.”

Caio pensa como exemplo de outras propriedade o fato da transformação linear “assumir inversa”, porém isto não é verdade da forma com que ele descreveu. O que temos é um teorema (ou lema, dependendo do referencial bibliográfico) que nos diz que se uma transformação linear é bijetiva (ou invertível), sua inversa também será linear. Logo, há um equívoco conceitual em sua fala.

A noção que Caio possui acerca do proceito da transformação linear é incompleta, pois não sabe que o domínio e contra-domínio da transformação linear precisam ser necessariamente espaços vetoriais. Além disso, salientemos que o aluno evoca as propriedades da linearidade utilizando exemplos (com o escalar igual a dois), ao invés de tomar um escalar qualquer. Esta postura de Caio nos revela aspectos procedimentais de sua compreensão do proceito transformação linear.

3. Equivocadamente, Caio responde que a função dada na terceira questão é uma transformação linear, justificando que "ela recebe uma variável e retorna essa váriável manipulada, conservando as propriedades de uma função linear". Perguntei-lhe durante a entrevista se ele havia chegado a verificar as propriedades que mencionou na questão 2 para auxiliá-lo a chegar a esta conclusão. O aluno responde que não foi necessário, pois a função dada é uma reta, chegando a afirmar que no $\mathbb{R}^2$ toda reta é uma transformação linear.

   A resposta de Caio nos revela um conflito entre nomenclaturas, pois o aluno confundiu função do 1° grau, com função linear, e por sua vez com transformação linear.

   Sugeri-lhe, em entrevista, que verificasse se a soma é preservada nesta questão e o aluno afirma que não e depois muda de ideia, ficando muito confuso. Voltamos a está questão no fim da entrevista e Caio pensa o seguinte: "$f(2) \neq 2f(1)$, então não é transformação. Assim, uma transformação leva uma variável em duas vezes essa variável mais 3, só que se eu pegar 2 vezes essa variável, vai dar $4x + 3$, que não é a mesma coisa que 2 vezes a transformação inteira, que é $2x + 3$, por isso não é linear, mas eu não pensei isso na hora, eu me deixei levar que qualquer reta é linear, mas não é."

   Com a franqueza de quem acabou de refletir sobre o assunto, quando lhe solicitei que tentasse naquele momento responder o item (b), Caio exclama: "Eu acredito que esse +3 é que está atrapalhando, se não fosse esse +3 seria linear, porque tem uma constante que sobra, então não é um vetor livre, eu não posso colocar na origem porque tem esse +3, sei lá..."

   A intuição de Caio é correta, mas ele mesmo ainda não sabe o porquê. O aluno ainda não compreendeu a transformação linear em sua totalidade, seu conceito, sua representação e interpretação, e inicialmente, sequer verificou aspectos procedimentais. Só o fez quando solicitado.

No item (b), o aluno responde que "analisando vetorialmente, ela recebe um vetor em $\mathbb{R}$ e retorna outro vetor que no caso também está em $\mathbb{R}$", porém sua justificativa é vazia e insuficiente como prova, mesmo em caso de verificação de uma função que de fato seja um transformação linear. A sua resposta ao item (b), sugere que basta domínio e contra-domínio serem $\mathbb{R}$, neste caso, o que é falso. O aluno demonstra não ter adquirido o proceito de transformação linear nesta questão.

4. Seguindo a mesma linha de raciocínio, o aluno responde que a função dada nesta questão é uma transformação linear sim (o que está correto), porém a justificativa é incompleta. Diz: "Sim. O que ela faz é retornar o vetor que lhe é fornecido, multiplicado por 2. $T(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + 2bx + 2c = 2(ax^2 + bx + c)$".

   Sua resposta novamente utiliza como escalar o número 2 e não contempla verificação da preservação da soma. Temos portanto uma visão procedimental em sua resposta.

5. O aluno cria corretamente as funções requisitadas nos itens (a) e (b).

   No item (a), sua função é tal que $f(x, y) = (x, y, x + y)$, e no item (b) é $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$.

   Repare que o aluno não especificou o domínio e contra-domínio das funções que criou, o que é aceitável já que é dito no enunciado da questão.

   No item (c), sem justificativa, Caio responde que sim, que a função criada no item (b) é uma transformação linear.

   Solicitei que justificasse o item (c), e o aluno utiliza-se novamente de exemplos numéricos quando explica seu raciocínio: "Porque a linearidade se aplica. Eu acho... Se eu pegar o a e o b e 2 vezes o a e 2 vezes o b, eu vou chegar numa matriz que é duas vezes o a e o b." Compreendemos que o aluno quis dizer que $\begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 2b \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, o que seria uma tentativa de mostrar a preservação do produto por escalar, que na verdade poderia ser estendida para qualquer escalar, mas escrito desta forma não serve como prova, embora mostre perfeitamente o raciocínio do aluno.

Perguntei-lhe se este argumento é suficiente como justificativa e Caio revela não ter certeza se é suficiente, mas que acredita que sua função criada no item (b) seja sim uma transformação linear.

6. O aluno também não se atém ao domínio e responde:

   "Sim. Ela conserva as propriedades de transformações lineares.

   Exemplo: $T(2x) = 2T(x)$

   $$\downarrow^{x=1}$$

   T(2)= 2T(1)

   $2 = 2$"

Indaguei-lhe o que ocorreria se o escalar escolhido fosse o 4 e ele logo respondeu que o 4 não está no domínio da função. Questionado se o escalar escolhido precisa sempre estar no domínio da função, Caio diz que "Ele tem que pertencer ao domínio, mas ele tem que satisfazer que a transformação fique dentro do domínio". E prossegue: "A transformação foi feita para ficar no domínio. Eu acho, porque esse negócio de lei eu não sei, não garanto não".

Com o objetivo de esclarecer o que o aluno quer comunicar, ele me confirma que ao invés deste 2 a que ele havia se referido, podia ser qualquer número desde que o produto por algum elemento do domínio estivesse dentro do mesmo domínio. Está é uma visão equivocada.

O aluno, mesmo quando induzido a refletir sobre o domínio da função dada, reafirma uma visão errada de que toma-se o escalar convenientemente, ao invés de ser qualquer escalar (para realizar a multiplicação por escalar).

7. Caio começa a tentar resolver a questão achando os autovalores, concluindo que $\lambda = \pm i$. Sua solução foi a seguinte:

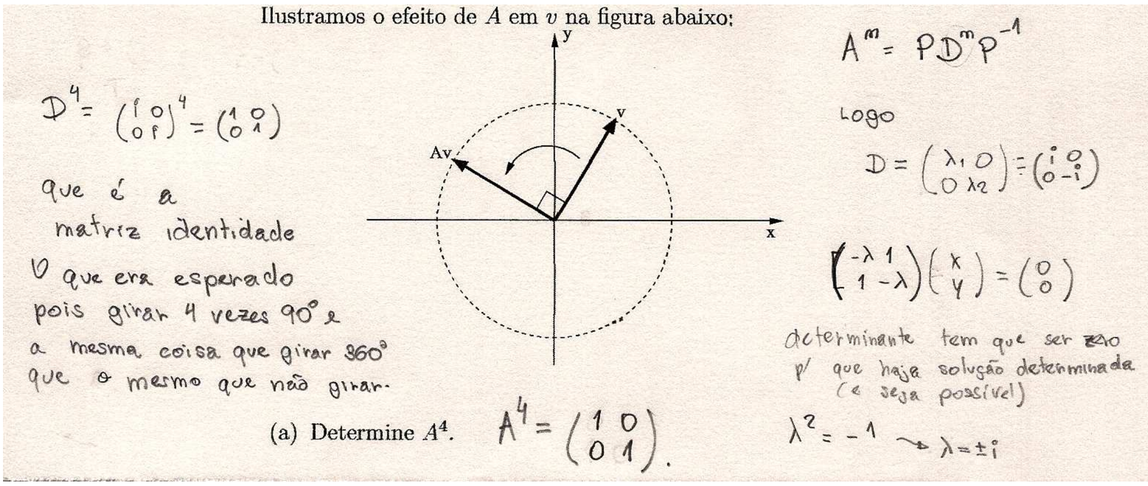


Figura 4.3: Resposta de Caio à questão 7a.

De fato, partindo do pressuposto que $D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$, teremos que $D^4 = I$. Porém há uma falha conceitual, pois o que o aluno tentou fazer foi a decomposição espectral para calcular A^4, mas os valores são números complexos não-reais, neste caso. Além disso, mesmo D^4 sendo igual a I, faltaria fazer a multiplicação PP^{-1}, sendo que para encontrar P seria necessário saber calcular autovetor complexo. No curso de Álgebra Linear II, define-se autovalor apenas como números reais e se ensina apenas a calcular autovetores reais. Logo, o aluno não teria conhecimento suficiente para resolver a questão por decomposição espectral, e não se ateve ao fato de que o autovalor é complexo não-real, o que impediria-o (com o conhecimento que tem até o momento) de resolver corretamente a questão por este método.

Embora tenha optado por resolver usando a decomposição espectral, o aluno afirma que o resultado era esperado, "pois girar 4 vezes é a mesma coisa que girar 360°, que é o mesmo que não girar". Perguntei-lhe em qual solução pensou primeiro e contrariando sua resposta o aluno revela: "Na verdade assim que eu olhei, já vi que o A^4 ia dar uma girada, mas aí eu resolvi mostrar que sabia fazer assim e vai que precisa resolver uma outra que não seja 90o".

De fato a decomposição espectral é extremamente útil para calcular potências de matrizes diagonalizáveis, principalmente quando o expoente é grande ou é difícil ter uma interpretação da matriz transformação, mas faltou-lhe conhecimento para usar o método adequadamente.

No item (b), Caio apresenta uma solução mais algébrica, mas sem esquecer do seu significado geométrico. O aluno registra o seguinte no questionário:

"$A^{101} = A^{100}A^{1}$

Só que $A^{100} = (A^{4})^{25}$= girar 360° 25 vezes $\longrightarrow$ que não muda nada

Assim $A^{101} = A^{1} = A$

$A^{101} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$"

Tanto no item (a) e (b), o aluno apresenta uma visão procedimental (ainda que equivocada no item a) e conceitual, ao mesmo tempo. Sendo que o aluno não escolhe o mais conveniente e sim apresenta as duas soluções, relacionando-as.

4.3 Débora

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
3	9	5,9

Débora pensa que tem alguma facilidade em Matemática, mas não o suficiente para se considerar uma boa aluna. A aluna gosta de Matemática, mas também não se interessa o suficiente para se aprofundar na matéria.

A aluna não possui uma opinião formada sobre o curso de Álgebra Linear II, pois por motivos particulares não pode se dedicar à faculdade neste período (2010/01). Preferiu o curso de Cálculo I ao de Álgebra Linear II, pois pôde se dedicar e aprender melhor Cálculo I. A aluna pensa que a maior dificuldade no curso de Álgebra Linear II é trabalhar em espaços que não se pode "alcançar", que ela exemplifica como "$> \mathbb{R}^3$".

1. A aluna fornece como exemplos $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$. Solicitei que explicasse o que é um espaço vetorial. A resposta de Débora foi a seguinte: "Tenho uma vaga noção. Ele é enorme, mais ou menos. Espaço vetorial é um lugar onde você pode somar, multiplicar por escalar. É um espaço em que você pode fazer operações. "

   A aluna apresenta uma explicação correta, mas traz consigo uma noção de espaço vetorial como um lugar, e segundo ela um lugar enorme. Esta forma de se expressar é um modo informal de representar um conjunto, o que é extremamente válido como resposta numa entrevista informal.

   Já no item (b), Débora apenas responde que sim, que polinômios e matrizes podem ser elementos de espaços vetoriais, mas não apresenta justificativa alguma.

   Durante a entrevista, perguntei-lhe por que polinômios e matrizes são elementos de um espaço vetorial e a aluna afirma não saber justificar, apenas se lembra do fato ser verdadeiro.

2. Débora explica o que é uma transformação linear da seguinte maneira:

   "$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma transformação linear na qual:

   $T(u + v) = T(u) + T(v)$

   $T(ku + kv) = kT(u + v)$" A aluna apresenta alguma noção da definição, mas apresenta falhas. Durante a entrevista a aluna demonstra saber que o T a que se refere é sim uma função, e também sabe que $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ é apenas um exemplo, porém não sabe qual é a caracterização do domínio e contra-domínio da transformação linear: "Eu não tenho ideia do que pode ser. Eu não tenho noção. Pra mim, o que eu sei fazer é assim: um vetor no outro."

   A aluna tem uma visão restrita (e correta) do conceito de Transformação Linear. Seu conhecimento é restrito ao $\mathbb{R}^n$.

3. Apesar da explicação dada na segunda questão para transformação linear, Débora responde corretamente esta questão, recorrendo à propriedade da preservação da soma:

   "$T(x) = 2x + 3$

   T(y) = 2y + 3

   T(x) + T(y) = 2x + 3 + 2y + 3

   T(x + y)= 2x + 2y + 3

   Não é TL, pois não tem $T(x + y) = T(x) + T(y)$".

A aluna justifica o item (b) exibindo um exemplo em que falha a propriedade da preservação do produto por escalar.

"$T(x) = 2x + 3$

T(2x) = 4x + 3 $\neq 2T(x) = 4x + 6$

Não é TL, pois $T(kx) \neq kT(x)$".

4. Em branco.

5. Débora apenas respondeu o item (a) da questão, criando a seguinte função: $f(x, y) = (x, 0, y)$, o que está correto.

6. Em branco.

7. Em branco. Antes que eu lhe perguntasse qualquer coisa, a aluna aponta para esta questão durante a entrevista e exclama que não tinha a menor noção de como resolvê-la. Afirmei que ela poderia multiplicar matrizes se quisesse, mas ela se opõe: "Eu pensei nisso, mas não tive coragem de escrever. Pô, muito bobo".

   Afirmei também que poderia ser resolvido geometricamente e pedi-lhe que tentasse observar novamente a questão, mas a aluna diz não conseguir "enxergar nada geometricamente".

4.4 Fernando

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
7,0	9,3	9,3

Fernando se considera um bom aluno em Matemática, porque sempre tirou boas notas no colégio e na faculdade, tendo facilidade para entender as matérias e fazer exercícios. Além disso, ele diz que sempre pôde ajudar os colegas que tinham mais dificuldade. Gosta de matemática, mas prefere os problemas mais práticos, em oposição a teorias, que segundo ele, não mostram sua real utilidade. "Por exemplo, matérias como probabilidade, geometria, combinatória me parecem mais interessantes do que estudar vetores em várias dimensões".

Coerentemente com a sua opinião exposta anteriormente, o aluno afirma que achou o curso de Álgebra Linear II pouco prático. "Existe muita teoria, para a qual não vejo muita utilidade. Me parece que são conceitos que eu usarei apenas para fazer provas e logo esquecerei". Preferiu o curso de Cálculo I ao de Álgebra Linear II. Sua justificativa foi a seguinte: "porque me deu abertura para conceitos como derivada e integral que podem ser usados em muitas situações, como cálculo de áreas e de volumes, pontos críticos de funções e descobrir relações entre funções diferentes que representam uma a derivada da outra". Resta-nos questionar se isto é de fato uma aplicação ou é mais uma falsa sensação de aplicação.

O aluno mais uma vez aponta como dificuldade no curso de Álgebra Linear II o fato da matéria ser "pouco prática, com muitos conceitos abstratos, além do professor não ter conseguido passar o conteúdo para os alunos".

1. Fernando aponta como exemplos de espaços vetoriais a reta, o plano e o volume, e tenta fornecer bases para cada espaço citado, mas se equivoca fornecendo no exemplo do plano e "volume"conjuntos que não são base, por serem formados por vetores

linearmente dependentes. E ainda se expressa mal ao citar volume, ao invés de espaço. Os exemplos dados foram:

- Reta $\longrightarrow \langle(1,1,1)\rangle$
- Plano $\longrightarrow \langle(1,1,1),(1,1,1)\rangle$
- Volume $\longrightarrow \langle(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1)\rangle$

Perguntei-lhe na entrevista em que conjunto esta reta e plano citados estavam, e o aluno respondeu que ambos estariam no espaço. De fato, considerando esta observação, a reta gerada por $\langle(1,1,1)\rangle$ será um subespaço do $\mathbb{R}^3$ e consequentemente um espaço vetorial. Observemos que nem toda reta no $\mathbb{R}^3$ é espaço vetorial, apenas aquelas que passam pela origem, o que é satisfeito neste exemplos. Mas os demais conjuntos são formados por vetores linearmente dependentes, não formando base.

Já no item (b), o aluno responde:

"Pode, já que polinômio de grau n representa um espaço vetorial de grau $n+1$. Por exemplo, um polinômio de terceiro grau representa um espaço vetorial de quarto grau. Uma matriz também pode representar, já que suas linhas ou colunas podem representar os vetores da base que gera o espaço vetorial".

Solicitei-lhe que explicasse melhor o que quis dizer com a declaração acima, mas o aluno disse não saber explicar melhor e apenas repete o que já havia dito. O mais próximo do que disse que é verdade é que o conjunto dos polinômios de grau n é um espaço vetorial de dimensão $n+1$. A resposta do aluno é correta, mas com uma justificativa confusa.

2. A explicação de Fernando para o que é uma transformação linear é a seguinte: "transformação linear é uma função que pode transformar números, vetores ou outras funções em outra coisa, como por exemplo, transformar um vetor em uma função, ou transformar um número em outro número".

   Durante a entrevista, questionei-lhe qual era o domínio e contra-domínio da referida função e o aluno respondeu que são espaços vetoriais. Porém, não obtive êxito ao perguntar sobre as propriedades da transformação linear. Fernando respondeu: “Ah, sei lá... É só isso... O domínio é transformado no contra-domínio, podendo virar qualquer coisa”.

O aluno possui uma visão conceitual (ainda que não compatível com a definição exatamente) e não vislumbra os aspectos procedimentais do proceito transformação linear.

3. A resposta de Fernando à questão três item (a) mais parece uma noção de função. Ele erradamente diz que a função é sim uma transformação linear, porque transforma o número x em um número $2x+3$. E ainda acrescenta que “essa transformação gera tanto um novo número $2x+3$, como também um par ordenado (x, 2x+3)”. E repete no item (b), o argumento do par ordenado, exatamente com as mesmas palavras.

   Durante a entrevista, o aluno repete seu argumento pautado na ideia de função. Seu raciocínio é coerente com sua resposta à questão 2, em que demonstra confundir função e transformação linear.

   Novamente o aluno tomou uma postura conceitual e equivocada, tanto no resultado, quanto na justificativa.

4. O aluno respondeu que sim, que a função é uma transformação linear, mas a notação apresentada é falha e a justificativa vazia em explicações. Escreveu:

   “$2ax^2 + 2bx + 2c = 2(ax^2 + bx + c) = 2T$

   Como foram feitas apenas operações lineares, podemos dizer que T é uma transformação linear”.

   Arguí-lhe a que operações lineares ele se referia, e me explicou que “ah, quando você faz a transformação do dobro de uma coisa, tem que dar o dobro da transformação dessa coisa”. Continuei questionando se esta era a única operação linear presente numa transformação linear. O aluno afirmou: “”Não tenho certeza, acho que tem outra coisa, mas não me lembro”.

Está foi a primeira questão em que o aluno evocou alguma noção acerca das propriedades da linearidade, no caso, apenas fez menção a preservação do produto por escalar.

Ainda perguntei-lhe se sua verificação era suficiente para provar que a função é uma transformação linear e o aluno revela não saber, mas afirma achar que é sim uma transformação linear, ainda que não saiba se seu argumento está correto, pois já viu "coisas parecidas que eram transformação linear".

5. O aluno criou as seguintes funções:

   No item (a): $f(x,y) = (x,y,x+y)$

   No item (b): $f(i) = i^2 + i + c$ e $a_{ij} = f(i)$.

   O aluno em nenhum dos itens explicitou o domínio e contra-domínio. No item (a), a função está correta, porém no item (b) ainda que seja possível entender o que o aluno quis expressar, não foi deixado claro por ele, e a notação está confusa. O aluno não especifica a que conjunto c pertence.

   Compreendemos que o aluno quis dizer que a matriz-imagem é dada da seguinte forma: $\begin{bmatrix} 2+c & 2+c \\ 5+c & 5+c \end{bmatrix}$, para algum c.

   Questionei-lhe quem é c e Fernando disse que é qualquer número real.

   Apesar de uma notação mais incoerente ainda no item (c), o aluno demonstra possuir uma noção de como analisar se uma função é ou não uma transformação linear de modo a verificar a propriedade da linearidade. Sua resposta é a seguinte:

   "Não, pois $f(1) = 2 + c$ e $f(2) = 6 + c$ e $f(2) \neq 2f(1)$.

   Acho que não é possível criar tal transformação".

   O aluno evoca a propriedade de preservação do produto, mas de modo totalmente equivocado, ainda que a resposta final esteja correta.

6. O aluno ignora totalmente o domínio da função dada e responde que ela é uma transformação linear, simplesmente porque $T(x) = x$ e exemplifica que $T(2x) = 2x$ e $2T(x) = 2x$.

   Durante a entrevista, pedi-lhe que tentasse fazer o mesmo para o escalar sendo 4, ao invés de 2, e o aluno faz "$T(4x) = 4x$ e $4T(x) = 4x$, então tá certo, dá na mesma", sem perceber que $4x$ não estaria no domínio da função caso $x \in \{1, 2, 3\}$.

7. O aluno multiplica matrizes no item (a), mas erra contas e chega ao resultado errado, achando que $A^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   O equívoco do aluno foi ao fazer A^3A, escrever A^3 corretamente, mas errar ao dizer que $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$:

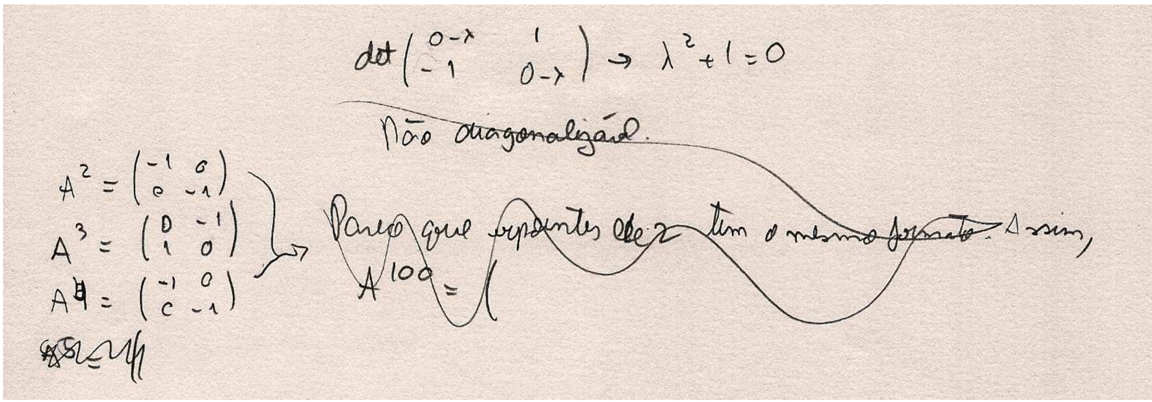
   "$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

   $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$"

   Notamos assim, que houve uma falha na execução do aspecto procedimental da questão. Questionei-o se havia alguma outra solução e o aluno disse que achava que não.

   Já no item (b), Fernando faz alguns esboços, mas não conclui nada.



$\det\begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{pmatrix} \to \lambda^2+1=0$

~~Não diagonalizável.~~

$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$A^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

~~Parece que expoentes de 2 têm o mesmo formato.~~ Assim,

~~$A^{100} = ($~~

Figura 4.4: Resposta de Fernando à questão 7b.

Notamos neste item (b) uma falha no aspecto procedimental, em que o aluno não conseguiu realizar sequer manipulações algébricas e revelou durante a entrevista não ter “a menor noção de como resolver esta questão”.

4.5 Fábio

Tabela 4.1: Notas de Fabio

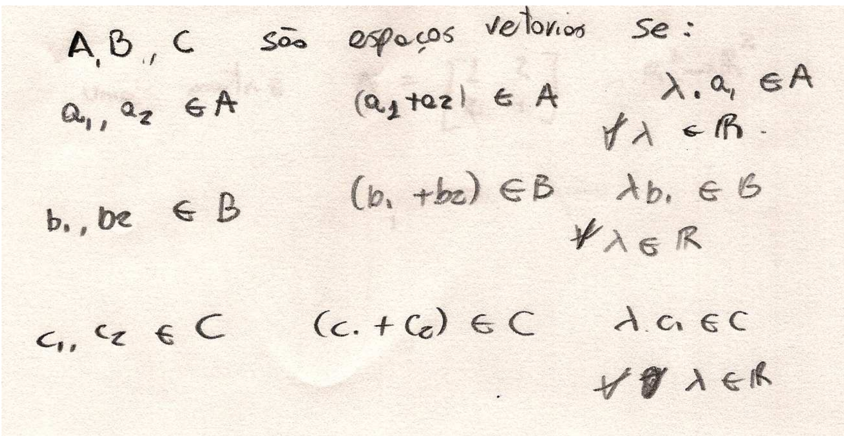
Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
4,63	7,6	8,8

O aluno se considera bom aluno em Matemática, pois sempre gostou da matéria, números e calcular coisas. O aluno diz se dedicar bastante ao seu estudo. Fábio acha que a Matemática é uma matéria que se relaciona muito com o dia-a-dia de todos nós.

Fabio achou o curso de Álgebra Linear II um pouco abstrato demais, pois acha difícil visualizar um espaço com mais de três dimensões, o que é muito recorrente no curso.

Quando questionado sobre qual curso preferiu, o aluno responde: "Com certeza Cálculo I, além de ser uma coisa nova, que eu nunca tinha visto, gostei porque me cobrou bastante atenção e raciocínio rápido. Álgebra é um pouco abstrato demais para mim". E aponta que a maior dificuldade do curso de Álgebra Linear II é "conseguir ABSTRAIR um pouco o mundo real e as coisas que se vêem em 3 dimensões, para ter uma visão melhor do curso"e diz que teve que "batalhar muito para conseguir"isto.

1. Ao invés de fornecer exemplos, como lhe foi requisitado no item (a), Fábio toma três conjuntos quaisquer que nomeou de A, B e C, e explicou matematicamente a preservação da soma e do produto por escalar em cada conjunto. Segue abaixo:



A, B, C são espaços vetorios se:

$a_1, a_2 \in A$ $(a_1+a_2) \in A$ $\lambda . a_1 \in A$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$b_1, b_2 \in B$ $(b_1+b_2) \in B$ $\lambda b_1 \in B$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$c_1, c_2 \in C$ $(c_1+c_2) \in C$ $\lambda . c_1 \in C$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

Figura 4.5: Resposta de Fabio à questão 1a.

Questionei-lhe porque havia definido espaço vetorial ao invés de fornecer exemplo, como havia requisitado a questão, e o aluno respondeu que "defini, porque exemplo numérico é mais difícil, eu sei mais literal mesmo." E o aluno não é capaz de fornecer nenhum exemplo. Arguí se estas duas propriedades eram suficientes para definir espaço vetorial ou se havia algo mais e o aluno disse só se lembrar destas duas propriedades mesmo.

O aluno demonstra ter uma postura bastante conceitual e com carência em sua prática, por não fornecer nenhum exemplo, nem dos mais simples como $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Já no item (b), a resposta foi a seguinte:

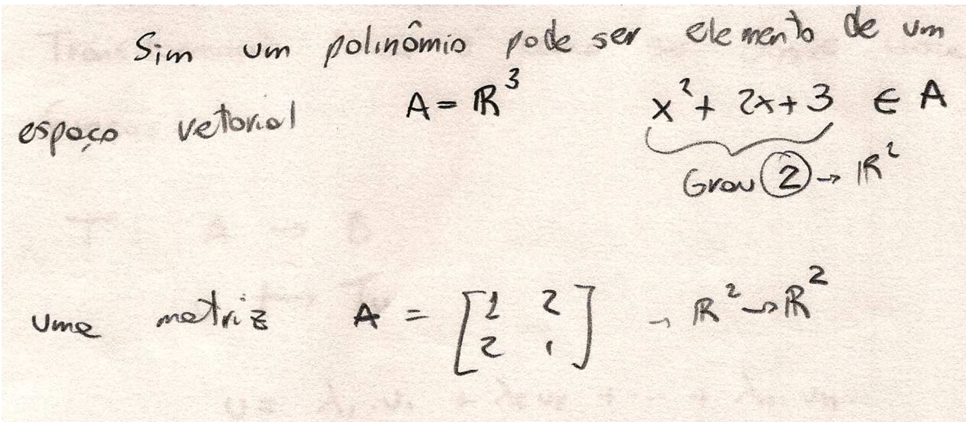


Figura 4.6: Resposta de Fabio à questão 1b.

A resposta de Fábio é altamente confusa. Ao falar de polinômio, o aluno dá um exemplo de polinômio de grau 2 e diz que este polinômio pertence a $A = \mathbb{R}^3$ e em baixo do polinômio faz menção a ser do $\mathbb{R}^2$, que é além de uma contradição, um equívoco. E fala de uma matriz como sendo $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, sem especificar se é ou não um espaço vetorial.

Na entrevista, perguntei se a matriz era ou não um elemento de um espaço vetorial, e o aluno respondeu que não sabia. Sua justificativa para que o polinômio seja um elemento de espaço vetorial é que "o polinômio de grau 2 está contido no espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, que teria dimensão 3, no caso o polinômio de grau 2, teria dimensão 2. Eu não sei explicar direito".

Primeiramente, vamos observar que o espaço dos polinômios de grau 2 não tem dimensão 2, e sim dimensão 3, tendo como base $\{1, x, x^2\}$. O que podemos afirmar é que se um conjunto A é subespaço de B, então $dimA \leq dimB$.

2. Sua explicação para o que é transformação linear foi a seguinte:

   "Transformação Linear é como se fosse uma função.

   $T : A \to B$

u $\mapsto Tu$

u $= \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n$

Tu= $\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$".

O aluno já iniciou a questão dando margem à dúvida se era ou não uma função, porém na entrevista disse que é sim uma função. Depois não especificou nada sobre domínio e contra-domínio, e confundiu totalmente o conceito abordado, fazendo uma combinação linear de vetores. De fato, se considerássemos A um espaço vetorial, e $u \in A$, u poderia ser escrito como uma combinação linear de vetores de uma base de A, mas em momento algum foi dito que $u_1, ..., u_n$ formam base para A. E ainda assim, está não é uma definição de transformação linear.

Em entrevista, questionei-lhe sobre a natureza de A e B, e o aluno respondeu que "o A seria um conjunto, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$... O A é o domínio e o B, o contra-domínio", sendo que sua resposta não elucida nada. Insisti se os conjuntos em questão tinham "algo de especial"e Fábio afirmou não se lembrar. O aluno embora tenha confundido a definição de transformação linear, afirmou em entrevista que a transformação linear tem sim propriedades: "Que são iguais as outras, né... No caso $T(\lambda u) = \lambda T(u)$, o produto por escalar seria igual; e no caso também a soma, $T(u + v) = T(u) + T(v)$".

Podemos julgar que o proceito de transformação linear ainda não está claro para o aluno, mas que ele o conhece, ainda que se confunda com sua definição.

3. Surpreendentemente, o aluno evoca nesta questão as propriedades da linearidade, que omitiu na questão anterior e apenas mencionou na entrevista. Sua resposta foi pautada na verificação da preservação da soma e do produto por escalar, dando exemplos numéricos.

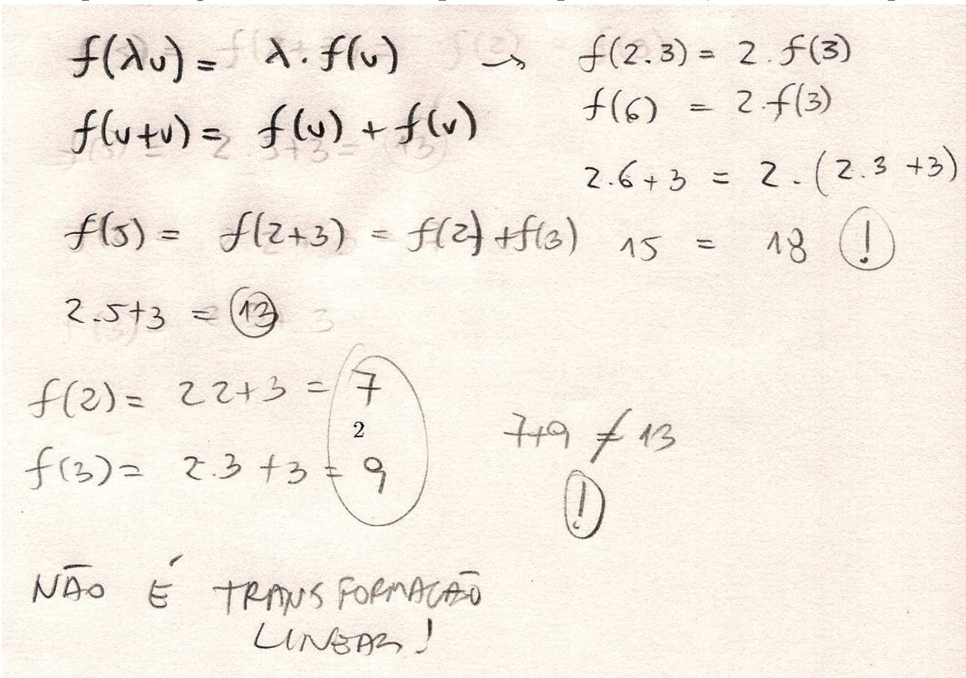


Figura 4.7: Resposta de Fabio à questão 3a.

O aluno deixou o item (b) em branco.

4. O aluno peca ao responder esta questão, por tentar justificá-la dando um exemplo numérico apenas, que não garante nada. Fez o seguinte:

   $T(x^2 + 6x + 9) = 2x^2 + 12x + 18$

   $\mathrm{T}(2\mathrm{x}^2 + 12x + 18) = 4x^2 + 24x + 36$

   $\mathrm{T}(2[x^2 + 6x + 9]) = 2T(x^2 + 6x + 9)$.

   O aluno demonstra, durante a entrevista, que tem consciência de que usou apenas a propriedade da multiplicação por escalar, mas quando indagado se usar um polinômio específico garantirá para qualquer polinômio o aluno diz que “Essa prova acho que não garante não... Mas, acho que é transformação linear sim. Eu não escrevi, só dei um exemplo numérico..."

O aluno fica apenas repetindo o que fez e em nada acrescenta para a correta resolução da questão.

Observamos que o aluno lança mão de uma visão bem mais procedimental, e desprovida de aspectos conceituais, pois não evoca o proceito, e apenas faz uma verificação insuficiente utilizando um exemplo, ao invés de tomar um polinômio qualquer $a_0 + a_1x + a_2x^2$.

5. O aluno afirma, no item (a), que a função integral leva elementos de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, confundindo polinômio de grau 2 e 3, com $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Fornece três exemplos, são eles:

   $T(1) = x - 1$

   $T(x-1) = \frac{(x-1)^2}{2}$

   $T\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right] = \frac{(x-1)^3}{6}$

   Logo, percebemos uma ênfase no procedimental, com falhas devido à carência de um entendimento do conceito. A ausência de compreensão do proceito, levou o aluno ao erro. Quando questionado porque havia escolhido a integral como a função no item (a), o aluno revela que "nunca tinha visto essa questão... (...) Eu não tava lembrando como colocava no papel essa solução."

   Já no item (b), o aluno apenas rascunha o polinômio $ax^2 + bx + c$ e uma matriz 2×2 com entradas genéricas a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}, mas sem conectá-las. Fábio deixou o item (c) em branco.

6. Novamente, semelhante às duas questões anteriores, o aluno trabalha com exemplos numéricos, sendo que chega a um resultado equivocado.

   Fabio escreveu o seguinte:

   $T(0) = 0, T(1) = 1, T(2) = 2, T(3) = 3$

   $T(\lambda U) = \lambda T(u)$

T(2 . 1) = 2.T(1)

T(u + v) = T(u) + T(v)

T(2 + 1) = T(2) + T(1)

T(3) = 2 + 1 = 3

E conclui que "sim, é transformação linear". O aluno apenas considerou em suas contas, elementos que pertenciam ao domínio, inclusive seu escalar escolhido para executar a multiplicação por escalar foi o 2, que pertence ao domínio. Indaguei-lhe o que ocorreria se o λ fosse 4, e o aluno exclama: "Ah, aí não vai estar no domínio. Se não pertencer ao domínio não é transformação linear. Aí no caso, não sei."

Insistindo na pergunta, perguntei se era necessário que o λ pertencesse ao domínio da função em questão, e o aluno afirmou que não e mostrou-se confuso: "Não. O λ qualquer seja, real. Mas, só vai funcionar com o $\lambda = 4$, quando pegar o 0. Não sei, não deve ser então... Não é? risos".

O aluno mostrou-se novamente mais habituado a trabalhar com o lado procedimental do proceito de transformação linear, utilizando uma verificação numérica, sem se ater ao domínio e contra-domínio da função.

7. O aluno, desordenadamente, multiplica matrizes chegando ao resultado correto no item (a). No item (b), Fábio manipula algebricamente e com falhas na notação ao dizer que $A^{100} = (A^4)^{25}.A$, ao invés de $A^{101} = (A^4)^{25}.A$. Mas, percebemos que foi apenas uma falha ocorrida por distração.

   Indagado se havia outra solução, se ao olhar para a figura surgia alguma ideia, o aluno apenas responde que não tem nenhuma outra ideia para resolvê-la, revelando mais uma vez um ponto de vista procedimental e inflexível, por não transitar entre conceitual e procedimental quando é conveniente ou quando é solicitado.

4.6 Luigi

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
2,25	7,5	6,4

Ao contrário de todos os alunos entrevistados, Luigi não se considera um bom aluno em Matemática, pois diz não ter a rapidez de um bom aluno. Ainda assim, gosta de Matemática, porque é através dela que é possível analisar, descrever e quantificar fenômenos. O aluno caracterizou o curso de Álgebra Linear II como intensivo. Houve pouco tempo de curso para aprender uma linguagem nova ou menos utilizada pelos estudantes.

O aluno gostou mais do curso de Cálculo I do que de Álgebra Linear II. No Cálculo I é possível ver as aplicações de uma forma mais imediata, enquanto que na Álgebra Linear II, demora-se mais aprendendo os conceitos, em sua opinião. Para Luigi a maior dificuldade encontrada no curso de Álgebra Linear II é aprender uma nova linguagem matemática diferente de tudo aquilo que foi aprendido até então.

1. Os exemplos de espaços vetoriais fornecido pelo aluno foram: $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$. Notemos que não houve exemplos variados e que há um uso incomum de notação, o $\mathbb{R}^1$.

   Durante a entrevista, solicitei que fornecesse mais exemplos de espaços vetoriais e aluno respondeu $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \mathbb{R}^6, ..., \mathbb{R}^n$.

   No item (b), o aluno apenas responde que sim em ambos os casos.

   Durante a entrevista o aluno aparenta ter apenas uma vaga recordação de ter ouvido falar de espaço vetorial, que para ele é "como se fosse um espaço de trabalho", algo que não nos acrescenta nada. Quando questionado se o espaço vetorial tem propriedades, ele fala que deve ser fechado, mas diz não saber direito, demonstrando que não sabe o que significa ser "fechado". E sua resposta positiva para polinômios e matrizes serem elementos de espaços vetoriais é devida a uma lembrança do que viu, mas também não sabe justificar.

2. Sua explicação para transformação linear é a seguinte: "É uma mudança de um espaço vetorial para o outro através de uma matriz transformação". O que nos sugere uma visão bem matricial de transformação linear, que como ele mesmo afirmou, seu curso foi mais baseado em matrizes, vendo matrizes rotação, reflexão. Mas, ao ser entrevistado o aluno afirma que é uma função, "você quer trabalhar elementos de um conjunto de uma outra forma". Mas, o aluno desconhece as propriedades da linearidade e quando arguído sobre fornece uma resposta confusa e vazia de significado: "Os elementos têm que existir no outro... Não... Acho que eu tô confundindo com espaço vetorial... Não lembro".

3. O argumento de Luigi para justificar que f é uma transformação linear, o que não é verdade, é vago e mais parece como uma visão que possui de função, pois diz que sim, porque "existe uma mudança do domínio para um contra-domínio através de uma função". E o aluno diz que não há outra forma de justificar o item (a).

   Indaguei-lhe se isto era suficiente para que f fosse uma transformação linear e aluno respondeu: "Essa é minha dúvida. Não sei se eu tô pensando certo ou não, mas tem uma relação nessa primeira parte, o domínio, ele tem que estar preso a essas exigências, desse espaço vetorial, e o contra-domínio a mesma coisa.". Mais uma resposta confusa.

   O aluno sugere que basta que exista uma função, cujo domínio e contra-domínio sejam espaços vetoriais, mas o conjunto $\{2x + 3; x \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço afim, e não espaço vetorial. Logo, nota-se uma falha conceitual tanto no proceito de espaço vetorial, quanto no de transformação linear. O aluno não utiliza-se das propriedades da linearidade, que coerentemente não havia mencionado na questão anterior.

4. A justificava de Luigi também não é muito esclarecedora nesta questão. Ele respondeu: "Sim, pois foi feita uma multiplicação por um escalar o que mantém a transformação pertencendo a P_2".

   Novamente, Luigi se baseia na ideia de que uma função cujo domínio e contra-domínio são espaços vetoriais é uma transformação linear, o que não é verdade. A postura do aluno é conceitual, ainda que equivocada, revelando não ter compreendido o proceito de transformação linear.

5. O aluno fez apenas o item (a) desta questão, que está correto, embora com um notação incompleta, por não mencionar o domínio e contra-domínio. Sua função criada foi: $(x, y) \longmapsto (x, y, x + y)$.

   Quando interrogado porque não fez o item (b), o aluno diz que não chegou a estudar "essas coisas para a prova. Era mais com $\mathbb{R}$ mesmo. Você tinha um vetor e queria chegar no outro. E com a história de rotação, reflexão...", e o aluno não consegue imaginar como criar a função pedida.

   O aluno deixou o item (c) em branco, já que não fez o item (b).

6. Luigi diz que a função dada é sim uma transformação linear e usa argumentação de forma idêntica a da questão 4. Diz que sim, pois a função gera elementos pertencentes a $\mathbb{R}$.

7. Na última questão, Luigi faz multiplicação de matrizes, mas erra contas e não chega ao resultado correto no item (a):

   "$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$"

E o aluno deixou o item (b) em branco. Solicitei que ele buscasse outra forma de encontrar A^4 e lhe sugeri que olhasse para a figura, mas ainda assim o aluno o aluno afirma não saber outra forma de responder à questão e acrescenta: “Pô, meu curso de Álgebra Linear foi muito rápido. A gente passou muito tempo do curso falando de determinante, sistema... ”.

O aluno tem uma postura diferente nesta questão e age de forma procedimental, ainda que não tenha tido êxito, e não consegue enxergar a questão conceitualmente.

4.7 Luciano

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
3,63	8,2	7,7

Luciano se considera bom aluno em Matemática, porque suas notas são boas. O aluno diz gostar de Matemática Aplicada, porque pode ver aplicações para a sua área, mas não gosta de Matemática Pura.

O aluno achou "legal"a parte da aplicação do curso de Álgebra Linear II, e acrescenta que "as aulas do meu professor eu não assisti, porque eram muito ruins e chatas, mas o livro que usei (Strang) me deu ânimo para estudar a disciplina". Luciano preferiu o curso de Cálculo I ao de Álgebra Linear II, porque, segundo o aluno, o Cálculo I é a base para todo a matemática de seu curso (Engenharia) e porque já se aprende algumas aplicações importantes em diversas áreas.

Diferentemente dos outros alunos entrevistados, Luciano achou que a maior dificuldade no curso de Álgebra Linear II foram as contas com matrizes, principalmente, durante a prova. Para ele, a teoria não é difícil de se entender.

1. Os exemplos de espaços vetoriais dados por Luciano foram:

    - O espaço $\mathbb{R}^3$ formado por 3 vetores LI;
    - O conjunto de polinômios;
    - O espaço nulo;

    O aluno fornece três exemplos corretos, porém ao pensar no $\mathbb{R}^3$, se expressou mal ao dizer que o $\mathbb{R}^3$ é formado por três vetores linearmente independentes, ao invés de dizer que é gerado por três vetores linearmente independentes.

O aluno responde que polinômios e matrizes são elementos de espaços vetoriais, porque para ambos existe um conjunto, de polinômios e matrizes, que são fechados para a soma e para o produto por escalar.

2. Para Luciano, uma Transformação Linear é "uma operação que transforma linearmente um vetor. Para ser linear, um vetor com componentes x e y, tem que ter estas componentes transformadas em ax e by, $a, b \in \mathbb{R}$".

   Indaguei-lhe, durante a entrevista, o que significava um vetor com componentes x e y ter estas componentes transformadas em ax e by e o aluno explica através de exemplo que a e b podem ser quaisquer escalares: " a e b podem ser qualquer número, por exemplo, $a = 0$ e $b = 4$".

   Apenas respondendo que sim, sem justificar, o aluno afirma que esta operação é uma função e que esta transformação a que se referiu é ser "linear".

   Já quando questionado sobre o domínio e contra-domínio da transformação linear, Luciano revela um conceito equivocado ao dizer: "O domínio tem que ser igual ao contra-domínio. Não pode fazer $\mathbb{R}^2$ chegando em $\mathbb{R}^3$, por exemplo", que é uma afirmação falsa. Quando o domínio e contra-domínio de uma Transformação Linear são iguais a Transformação Linear é chamada de Operador Linear, mas isto é apenas um caso particular, não sendo regra.

   A explicação do aluno para o proceito de transformação linear é equivocada, inicialmente, principalmente por afirmar que transforma x e y em ax e by, o que fica sem sentido. Na entrevista o aluno reforça este equívoco e revela outros mais.

3. O aluno com simplicidade, responde equivocadamente que a função dada é sim uma transformação linear, porque se trata de um polinômio.

   Questionei-o se sempre que uma função for polinomial será transformação linear e o aluno explica de modo informal o seguinte: "Se pensar que cada ponto é um vetor e a função só vai mexendo no ponto, vai mudando o vetor no mesmo espaço, então eu acho que pode ser". Insisti e arguí se continuaria sendo verdade caso fosse um polinômio do 2° grau e Luciano apenas diz achar que sim.

Concluímos assim, que o aluno apresenta um conflito em seu entendimento do proceito transformação linear, pois sua resposta nesta questão não é coerente com o que havia respondido na questão anterior. Aqui utiliza-se do fato da função ser polinomial, e não pensa na multiplicação das componentes como havia citado antes.

4. Embora o aluno tenha respondido que a função dada é uma transformação linear, a justificativa não é esclarecedora: "Sim, pois o conjunto dos polinômios foi multiplicado por um escalar, o que é uma transformação linear".

   Luciano, durante a entrevista, apenas repete o que escreveu e em nada colabora para a resolução da questão. Não se posiciona de forma procedimental, mas também não é possível afirmar que sua resposta é conceitual.

5. Visto que Luciano afirmou anteriormente durante a entrevista que não é possível existir uma Transformação linear com domínio e contra-domínio diferentes, indaguei-lhe se seria possível gerar uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ (que é o solicitado no item a). O aluno respondeu que acha que sim, mas que uma função definida desta forma não seria uma transformação linear, reforçando seu pensamento equivocado.

   No item (a), o aluno primeiramente responde que teria que "adicionar um vetor L.I. dos demais", porém ao lhe questionar o que quis dizer em sua justificativa, o aluno não soube explicar, deixando transparecer "Eu não sabia como fazer. Os elementos no $\mathbb{R}^2$ seriam vetores?", me indagou, e achou melhor desconsiderar a resposta dada. Após refletir, o aluno rascunha que teria um vetor (a, b) que teria como imagem um vetor (a, b, c), sendo que não soube dizer bem como seria definida esta coordenada c, nomeada por ele próprio, apenas afirmando que seria um número qualquer. Esta visão é conceitual e correta. Diferente dos demais alunos que responderam corretamente a questão, fornecendo a função explicitamente, Luciano na entrevista revela um posicionamento conceitual satisfatório, após ter fornecido respostas e justificativas equivocadas.

O aluno deixou os itens (b) e (c) em branco.

6. O aluno mais um vez responde certo, com justificativa incoerente. Segundo ele a função não é transformação linear, porque "para ser linear, a transformação deve manter a dimensão do espaço".

   Questionei-lhe o queria dizer com ter que manter a dimensão do espaço, e o aluno justificasse, esclarecendo a que dimensão se refere: "É porque esse daqui você só tem 4 (*o aluno aponta para o conjunto* $\{0, 1, 2, 3\}$) componentes e esse aqui tem infinitas componentes (*o aluno aponta para o conjunto* $\mathbb{R}$)". O aluno revela quer que este fato, domínio e contra-domínio com dimensões distintas, ser um problema para que a função seja uma transformação linear.

   Porém o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ sequer é espaço vetorial, logo não faz sentido falar em transformação linear. E a dimensão do conjunto $\mathbb{R}$ é 1, e não infinito. O aluno foi coerente com suas visões equivocadas de transformação linear, e consequentemente, se equivocou. Revela não se ater ao domínio e contra-domínio serem espaços vetoriais e confunde o termo dimensão, com cardinalidade de conjunto.

7. O aluno responde com precisão a questão, mas deixa registrado apenas a resposta, sem nenhuma justificativa, ou anotações de como chegou ao resultado.

   Quando questionado sobre o processo utilizado para chegar às respostas, o aluno revela-se conceitualmente correto. Sua visão é geométrica.

   "Ah, porque fazer A^4 é fazer a transformação linear 4 vezes, aí ele vai voltar aqui. Fez 1, 2, 3 e 4. (*gesticulando*)".

   E no item b, a justificativa segue a mesma linha de raciocínio: "Se eu fizer 100 vou voltar para aqui. Se eu fizer 100 + 1 tem que andar mais 1".

A fala de Luciano durante a entrevista não é formal, mas explica exatamente o que ele pensou. Não podemos dizer, no entanto, que o aluno apresentou flexibilidade entre conceito e procedimento, pois ao longo de todo o questionário, o aluno teve um posicionamento conceitual, ainda quando se equivocou. Em momento algum do questionário ou da entrevista as respostas de Luciano foram pautadas em procedimentos.

4.8 Lucio

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
8,5	7,5	9,6

Aluno da Engenharia de Produção e Matemática (por complementação), o aluno se considera um bom aluno em Matemática, pois julga conseguir entender rapidamente a matéria e não costuma esquecer o que aprende depois das provas. Afirma gostar muito de matemática.

"Acho muito interessante a forma de pensar, o que se consegue fazer em termos de aplicações com algo tão abstrato e também gosto da matemática pura."

Lucio achou o curso de Álgebra Linear ótimo, principalmente, porque sentiu que aprendeu coisas importantes e não apenas coisas superficiais, que o aluno denomina de "basicão". Gostou mais do curso de Álgebra Linear do que de Cálculo I, porém sua justificativa é pautada no fato de não ter gostado do curso de Cálculo I. Um dos motivos apontados foi o professor que lecionou Cálculo. E faz uma critica ao ensino da disciplina: "atualmente, sinto que o cálculo está buscando um meio termo entre o puro e o aplicado, mas não está muito bem em nenhum dos dois".

A resposta mais interessante do aluno foi referente a qual é a dificuldade do curso de Álgebra Linear. Ele demonstra uma certa maturidade ao responder que é "dissociar o conceito de vetor das setinhas e pensar de maneira abstrata".

1. Logo na primeira questão, o aluno expõe como exemplos de espaços vetoriais os conjuntos $\mathbb{R}^n, P_n$ e espaço das funções de classe "C_1"(o aluno quis dizer C^1). São exemplos bons e amplos, sugerindo que o aluno viu com certa profundidade o tema espaços vetoriais. Coerentemente, afirma que polinômios e matrizes são elementos

de espaços vetoriais, por "obedecerem às propriedades dos espaços vetoriais". Na entrevista, quando indagado de que propriedades estava falando, o aluno afirma que não se lembra de todas, mas sabe que "que a soma tem que estar definida, ou seja, se você somar dos elementos ainda tem que pertencer ao conjunto; e o produto por escalar tem que estar bem definido, se multiplicar". O aluno cita a associatividade como umas propriedades do espaço vetorial, mas não se recorda bem de todas.

2. Sua explicação sobre o que é uma Transformação Linear é baseada apenas na propriedade da linearidade:

   "É uma função que obedece $f(ax + by) = af(x) + bf(y)$". O que o aluno evoca inicialmente é uma visão que privilegia o aspecto mais procedimental do conceito de Transformação Linear. Porém, na entrevista quando questionado sobre qual é o domínio e contra-domínio da transformação linear, o aluno prontamente responde que são dois espaços vetoriais não necessariamente iguais, revelando que embora não tenha privilegiado tal fato em sua resposta, tem conhecimento a respeito.

3. No item (a), o Lucio mostra que a função não é Transformação Linear a partir da verificação da propriedade da linearidade, da seguinte forma:

   "$f(ax + by) = 2(ax + by) + 3 = 2ax + 2by + 3 \neq af(x) + bf(y)$".

   Porém, ao buscar uma justificativa alternativa, o aluno diz que "A reta $2x + 3$ não é um espaço vetorial"e acrescenta uma expressão indicativa de dúvida ao final: "eu acho". Na entrevista, o aluno acrescenta que não sabe se essa é uma boa justificativa. "Eu tenho noção que essa reta não é um espaço vetorial, porque ela não passa na origem, então você não tem aquelas propriedades. Aí a soma dos vetores não estaria nessa reta".

   A noção de Lucio é correta e conceitual. Logo, notamos a presença de um ponto de vista procedimental e conceitual na resolução do aluno, em que transita livremente quando lhe é solicitado, o que caracteriza a noção de proceito. Destaquemos que primeiramente o aluno opta por uma ênfase procedimental e fica inseguro sobre sua resposta conceitual, ainda que ela esteja coerente.

4. Novamente o aluno busca uma solução algébrica a partir da propriedade da linearidade:

   "$T(m(a_1x^2 + b_1x + c_1) + n(a_2x^2 + b_2x + c_2)) = 2(m(a_1x^2 + b_1x + c_1) + 2n(a_2x^2 + b_2x + c_2)) = mT(a_1x^2 + b_1x + c_1) + nT(a_2x^2 + b_2x + c_2)$"

   Há um erro na segunda passagem (por parênteses exageradamente aberto em $2(m(a_1x^2 + b_1x + c_1)$, que não foi fechado), mas é perceptível de que se trata de uma distração e não de um erro conceitual.

   Mais uma vez o aluno evoca um aspecto procedimental do proceito de Transformação Linear. Mas, em momento algum, isto é ruim. Deixemos claro mais uma vez que não há prejuízos em utilizar procedimentos, quando seu uso é bem feito. O problema está em apenas evocar procedimentos, sem nunca associar ao seu conceito, o que não é o caso de Lucio.

5. O aluno fornece como exemplo ao item (a) a seguinte matriz:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

   Já no item (b), ele apresenta a seguinte função:

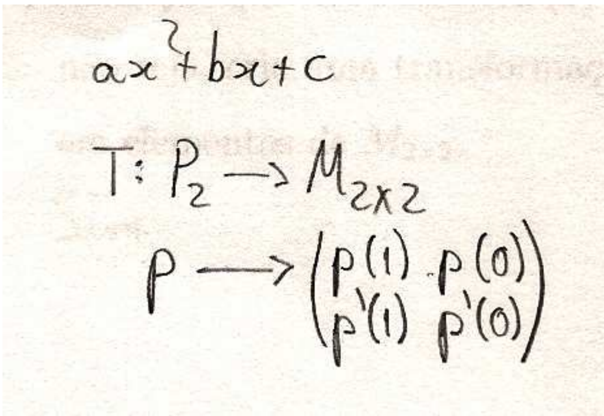


Figura 4.8: Resposta de Lucio à questão 5b.

Quando lhe questionei porque ficou na dúvida ao responder este item, o aluno afirmou que se pode colocar qualquer coisa nessa matriz e justifica sua dúvida: "Não tá muito intuitivo trabalhar com isso daqui, porque eu não vejo muitas aplicações, mas eu acho que está razoavelmente bem definida aqui a função e inclusive na (c) eu respondi que é transformação linear sim, porque a derivada é linear".

Porém não justifica no item (c), que sua função era uma Transformação Linear, apenas responde que sim.

Indaguei-lhe se chegou a verificar que realmente é uma transformação linear, o aluno afirma que não verificou, pois "quis passar mais rápido", mas ainda assim acha que é uma transformação. Segundo Lucio: "eu já fiz muita coisa com p' e com p, botando alguma entrada ali e não só $p'(x)$ e $p(x)$, colocando $p(1)$, $p(0)$, p de alguma coisa e sempre deu certo , coloquei que sim, é isso aí e vamos embora! Mas, eu acho que sim. Eu já vi algumas funções assim que obedeciam as propriedades".

A função fornecida pelo aluno é de fato uma transformação linear, ainda que não tenha verificado formalmente. Destacamos que esta transformação linear não é um exemplo óbvio e comum, tendo sido bem diferente dos exemplos fornecidos pelos demais alunos.

6. A resposta de Lucio à questão seis é exatamente a mais simples esperada: "Acho que não, porque $0, 1, 2, 3$ não é E.V., logo $T(ax)$ não está definido $\forall a \in \mathbb{R}$".

O aluno demonstrou conhecer bem o proceito de Transformação Linear, pois se ateve a sua definição, em que é necessário que o domínio seja espaço vetorial. Notemos, que esta era a resposta mais simples à questão, que ele poderia ter usado a propriedade da linearidade para mostrar a solução, mas soube optar pela solução mais simples. Ao contrário do que fez na questões anteriores, utilizou-se do conceito nesta questão, mais uma vez transitando entre conceito e procedimento.

7. No item (a), o aluno chega a rascunhar a matriz $A_\lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$, mas apaga, já que estava à lápis. Deixa como resposta apenas que $A^4 = I =$ rotação de 360º.

   Novamente, escolhe uma solução mais simples e conceitual, em que evoca o significado da matriz, que é uma transformação linear rotação.

   Antes que eu pudesse emitir qualquer comentário sobre esta questão, o aluno exclamou que "essa daí foi a macetada. Tá vendo esse meu esboçinho aqui? Eu ia achar os autovalores". Questionei-lhe se resolver a questão por autovalores seria mais fácil e ele argumenta que não seria para esta matriz, mas que dependendo da matriz poderia ser.

   Lucio demonstra estar familiarizado com questões de potência de matriz, tanto que sabe que utilizar o teorema espectral, dependendo da matriz e da potência pedida, é a melhor solução, o que é uma verdade. O aluno revela ter adquirido o proceito de matriz transformação, desta forma.

   E no item (b), que $A^4 = I \Rightarrow (A^4)^{25} = I \Rightarrow A^{101} = IA = A$.

   Utilizou-se de recurso algébrico simples para solucionar o item (b), o que é uma postura procedimental, escolhida como a mais simples neste caso.

4.9 Marcel

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
2,0	8,2	7,7

Marcel se considera um bom aluno em Matemática, pois costuma tirar boas notas e tem bom entendimento da matéria. Gosta de matemática, que é um assunto pelo qual tem interesse e procura aprender bem.

O aluno não gostou do curso de Álgebra Linear, pois além de ser muito abstrato, as aulas não eram interessantes. Julga que a abstração é a maior dificuldade no curso em questão. Ele preferiu o curso de Cálculo I ao de Álgebra Linear II, acrescentando que o curso de Cálculo I tem seu conteúdo visto com algumas aplicações.

1. Os exemplos fornecidos pelo aluno foram: espaço nulo, espaço linha e $\mathbb{R}^3$. No item (b), a resposta foi simples: "Sim, por ser possível aplicar as propriedades do espaço vetorial, soma e multiplicação por escalar".

   Não houve necessidade de pedir que o aluno explicasse o que é espaço vetorial, pois no item (b) o aluno já o fez.

2. Sua explicação para o que é uma transformação linear também é muito sucinta e geométrica: "são mudanças lineares (rotação, projeção) em um espaço vetorial".

   Questionei-lhe se estas "mudanças lineares"eram funções e o aluno disse achar que sim, mas afirma que "isso não importa", e acrescenta: "no meu curso a gente não se preocupava com essas coisas não".

   Insisti e lhe perguntei se esta função ("mudança linear") possuía alguma propriedade e o aluno diz não saber; seu conhecimento é limitado a aplicações geométricas de transformação linear. Apenas respondeu: "Ah, vai de um espaço vetorial para o outro".

3. Marcel se equivoca ao analisar a função na terceira questão e responde que é uma transformação linear sim, “pois por meio de operadores lineares um elemento de $\mathbb{R}$ é transformado”. E responde que não sabe dar uma outra justificativa.

   Perguntei-lhe a que “operações lineares”se referia e o aluno diz tratar-se da “multiplicação por 3 e soma 1, que são operações lineares, se fosse x^2 não seria linear”.

   Sua resposta nos revela que Marcel confunde transformação linear com função do 1° grau. Há, portanto, uma falha conceitual e ausência de aspectos procedimentais.

4. Ao responder esta questão, o aluno é vago e não acrescenta nada em sua justificativa, apenas diz que: “Sim, pois a transformação feita foi a multiplicação por um escalar”.

   Durante a entrevista, o aluno reforça o pensamento apresentado na questão anterior de que multiplicação por escalar caracteriza uma transformação linear, repetindo sua falha conceitual e mostrando ausência de aspectos procedimentais.

5. Na questão 5, o aluno apenas faz o item (a), mas incorretamente, pois cria a função cuja imagem é dada por $f(x, y) = 2x + 2$, que não é uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, e sim de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$.

   Questionei-lhe se sua resposta ao item (a) era ou não uma função do $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ e o aluno percebe que não: “Ih, o que fiz é de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$!”

   Solicitei-lhe que tentasse criar a função pedida, mas o aluno interfere: “não faço a menor ideia, por exemplo de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ eu sei, porque pego o vetor (x, y) e translado ou rotaciono, mas não dá para fazer isso de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Para matriz que eu não sei mesmo...”

   O aluno limita o proceito de transformação linear a um apelo visual e não é capaz de fazer a questão 5.

6. Marcel mais uma vez demonstra uma visão geométrica ao responder, ainda que erradamente, esta questão. Afirma que "sim, pode ser, por exemplo, uma homotetia de grau 1. Mesmo não ocorrendo diferença nos valores, pode ser considerado uma transformação".

   Como o aluno demonstra desconhecer as propriedades da linearidade, não fez-se necessário qualquer pergunta durante a entrevista.

   Novamente, temos uma resposta conceitualmente equivocada, baseada em conceito apenas geométrico.

7. No item (a), o aluno multiplica matrizes chegando ao resultado correto, porém com uma notação equivocada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Durante a entrevista, questionei-lhe se havia outro modo de resolver o tem (a) e o aluno surpreendentemente diz que não. Digo surpreendentemente , pois durante todo o questionário o aluno acenava para uma visão geométrica de transformação linear.

   Sugeri-lhe então que olhasse para a figura e então Marcel exclamou: "Ah, é uma rotação! Então roda 360° e volta para o mesmo lugar!"

   Já no item (b), o aluno não consegue chegar a resposta, mas começa numa tentativa de encontrar os autovalores encontrando que $\lambda^2 = -1$.

   Perguntei-lhe porque deixou a questão em branco e ele argumentou: "ah, porque multiplicar matrizes 101 vezes é absurdo e quando tentei encontrar os autovalores, vi que não eram reais, aí não dá para fazer nada".

O aluno não percebeu que a mesma visão geométrica, a qual havia sido induzido a pensar também poderia se aplicar ao item (b). Sua postura nesta questão foi procedimental, refletindo conceitualmente apenas quando lhe foi sugerido.

4.10 Márcio

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
7,0	8,8	8,1

Márcio é aluno de Engenharia de Produção e se considera um bom aluno em Matemática por acreditar ter uma certa facilidade durante o seu estudo, em comparação com algumas outras disciplinas, além de se motivar em estudá-la devido ao seu interesse e gosto. O aluno se identifica com a área de exatas, especialmente com a Matemática porque considera "interessante a ideia de se chegar a conclusões, muitas vezes inesperadas, partindo de raciocínios mais simples".

O aluno achou o curso de Álgebra Linear muito interessante, principalmente, por poder compreender como o estudo de sistemas simples, matrizes, transformações lineares podem dar base para entender problemas com grandes níveis de complexidade. O aluno aponta como um fator a colaborar para seu interesse, o fato de ser uma disciplina tratada de "forma geral". Márcio preferiu o curso de Álgebra Linear ao de Cálculo I, embora julgue que ambos os cursos são grandes ferramentas para o desenvolvimento de várias áreas. "O curso de Cálculo I é um curso mais prático, mais técnico, enquanto que o de Álgebra Linear II é mais teórico. Por este motivo, o curso de Álgebra Linear II, me interessa mais.

Em sua opinião, a dificuldade do curso de Álgebra Linear II está, em muitas vezes, no fato dele ser um curso muito teórico e, por vezes, abstrato, ainda mais quando não se faz o curso de Álgebra I, o qual o aluno cursou e que julga tê-lo ajudado muito a compreender os conceitos do curso de Álgebra Linear II.

1. O aluno não forneceu três exemplos de espaços vetoriais, e sim apenas dois, no item (a). Foram eles: o conjunto dos números reais e o conjunto dos polinômios de grau 1.

Perguntei-lhe se podia fornecer o terceiro exemplo e o aluno, após refletir por uns cinco minutos, responde perguntando: "$\mathbb{R}^2$? Ah, não sei, uso mais os reais mesmo..."

Já no item (b), Márcio afirmou que um polinômio pode ser elemento de um espaço vetorial, mas que uma matriz não.

2. Sua explicação para o que é uma transformação linear foi a seguinte:

   "Uma transformação linear é uma aplicação (função), que leva os elementos de um espaço vetorial em elementos de outro espaço vetorial, de modo a preservar a soma e o produto por escalar.

   T é linear se: $T : V \to U$, Tal que $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ e $T(kv_1) = kT(v_1)$, unde $k \in \mathbb{R}$, V e U são espaços vetoriais, $v_1, v_2 \in V$ e $T(v_1), T(v_2) \in U$."

   A resposta apresentada por Márcio é correta e bem explicada, estando de acordo com a definição formal.

3. A resposta de Márcio ao item (a) foi a seguinte:

   $f(x_1) = 2x_1 + 3$

   $f(3x_1) = 2.3x_1 + 3 = 6x_1 + 3$

   Como $f(3x_1) \neq 3f(x_1) = 6x_1 + 9$, não é linear.

   No item (b), o aluno apenas justifica pela propriedade da preservação da soma:

   $f(x_1) = 2x_1 + 3$, $f(x_2) = 2x_2 + 3$

   $f(x_1 + x_2) = 2(x_1 + x_2) + 3$

   $f(x_1) + f(x_2) = 2x_1 + 3 + 2x_2 + 3 = 2(x_1 + x_2) + 3.2$

   Como $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$, f não é linear.

   A resposta é correta e baseada em aspectos procedimentais de verificação da soma e produto por escalar, tendo êxito.

4. A verificação do aluno a questão 4 é correta. Segue abaixo:

   "Seja $p(x) \in P_2$.

   $T(p(x)) = 2p(x)$, $T(q(x)) = 2q(x)$

   $T(p(x) + q(x)) = 2(p(x) + q(x)) = 2p(x) + 2q(x) \longrightarrow$ preserva a soma

   $T(kp(x)) = T(kax^2 + kbx + kc) = 2kax^2 + 2kbx + 2kc,\ k \in \mathbb{R} \longrightarrow (Tk(p(x))) = k(T(p(x))) \longrightarrow$ preserva produto por escalar.

   É transformação linear."

   A notação $T(p(x))$ é compreensível e aceitável, embora não seja a ideal.

   O aluno optou por uma abordagem procedimental, sendo formal e cuidado durante a manipulação da notação matemática.

5. O aluno não encontrou dificuldade em criar as funções requisitadas nesta questão. No item (a), criou a função:

   $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

   $f(x, y) = (x, y, x + y)$

   E no item (b):

   $T : P_2 \to M_{2\times 2}$

   $p(x) = ax^2 + bx + c \to \begin{bmatrix} a & b \\ b - a & c \end{bmatrix}$.

   E no item (c), Márcio corretamente mostra que a função criada no item (b) é uma transformação linear:

   "É linear, pois sejam $p(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $q(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, então: $T(p(x)) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 - a_1 & c_1 \end{bmatrix}$, $T(q(x)) = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 - a_2 & c_2 \end{bmatrix}$

$T(p(x)+q(x)) = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ b_1 + b_2 - (a_1 + a_2) & c_1 + c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 - a_1 & c_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 - a_2 & c_2 \end{bmatrix} = T(p(x)) + T(q(x))$

$T(kp(x)) = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ k(b_1 - a_1) & kc_1 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 - a_1 & c_1 \end{bmatrix} = kT(p(x))$".

O aluno foi capaz nos itens (a) e (b), de gerar as funções pedidas, e no item (c) verificou corretamente que a função gerada no item (b) é uma transformação linear de modo procedimental.

6. O raciocínio usado por Márcio para resolver esta questão é numérico e não vislumbra o fato do domínio não ser espaço vetorial, ainda que ele tenha exposto tal restrição para funções serem transformações lineares na questão 2. Seu argumento foi:

   "Não, pois se tomarmos, por exemplo, $x_1 = 2$ e $x_2 = 3$, temos:

   $T(x_1) = 2$, $T(x_2) = 3$

   $T(x_1) + T(x_2) = 5$

   Mas, $T(x_1 + x_2) = T(5)$ não está definida."

   Ainda que o aluno não tenha observado que o domínio da função não é um espaço vetorial, o aluno utiliza-se deste fato indiretamente, já que num espaço vetorial, a soma de dois de seus elementos têm que estar contida no próprio espaço vetorial em questão.

   A resposta de Márcio é procedimental e conceitual.

7. A resposta de Márcio é baseada numa visão geométrica do que representa a matriz. O aluno respondeu no item (a): "Sendo A, uma rotação de 90º no sentido anti-horário, temos que A^4 seriam 4 rotações de 90º; resultando numa rotação de 360º, que significa voltar ao ponto inicial. Assim, $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$".

E no item (b): “Analogamente, temos 101 rotações de 360°, o que nos dá 25 rotações de 360° mais uma rotação de 90°. Assim, $A^{101} = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$”.

A resposta de Márcio é bem explicada e conceitual. O aluno, que predominantemente teve posturas procedimentais ao longo do questionário, quando lhe foi conveniente observou aspectos conceituais nesta questão, revelando-se flexível ao transitar entre conceito e procedimento quando o tema é transformação linear.

4.11 Raul

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
8,38	9,5	8,8

Raul é aluno da Engenharia de Produção e se consideram um bom aluno em Matemática, sempre participou de Olimpíadas de Matemática e conseguiu alguns bons resultados. O aluno gosta de Matemática, lê alguns livros e se interessa por sua história e curiosidades.

Ao responder sobre o que achou do curso de Álgebra Linear, o aluno diz achar ter aprendido algo, mas que não vê muito os professores aplicando o seu conteúdo em outras matérias. O aluno atribui a isto que provavelmente os professores de Álgebra Linear ensinam um conteúdo reduzido. Raul preferiu o curso de Cálculo I ao de Álgebra Linear II, pois julga o Cálculo I uma parte da Matemática interessante e aplicada e que "precisou de dois gênios para ser descoberto e desenvolvido".

Na sua opinião, a maior dificuldade do curso de Álgebra Linear está na abstração necessária para entender os conceitos e definições.

1. Os exemplos de espaços vetoriais dados por Raul foram os seguintes:

   - $V = \{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$
   - $V = \{(x^3);(x^2);(x);1\}$
   - $V = \{(1,1,1);(1,-1,0);(0,-1,1)\}$

   O aluno forneceu o $\mathbb{R}^3$ e P_3, mas o seu primeiro e terceiro exemplo são bases distintas que geram o $\mathbb{R}^3$. Logo, acabou fornecendo apenas dois exemplos, ao invés de três.

Perguntei-lhe o que representavam o primeiro e terceiro exemplos dados e, prontamente, o aluno respondeu que representavam o mesmo espaço vetorial e questionou-me se "era pra ser diferente", e afirmei que sim. Raul então forneceu o terceiro exemplo: "Uma base no $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0);(0,1)\}$". O aluno sempre associa um espaço vetorial a uma de suas bases.

Durante a entrevista, Raul afirma não saber explicar o que é um espaço vetorial, apenas sabe que é um conjunto em que se pode fazer operações e que sempre tem uma base para representar o espaço vetorial.

Raul, sem justificar, apenas afirma que polinômios podem sim ser elementos de um espaço vetorial, porém responde que não sabe afirmar algo sobre as matrizes poderem ou não. Durante a entrevista o aluno afirma não ter trabalhado com matriz como espaço vetorial em seu curso, por isso alega não saber responder.

2. Primeiramente o aluno escreve:

   $T : U \to V; Tu = v$

   (i) $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

   (ii) $T(ku) = kTu$

   E segue explicando o que é uma transformação linear da seguinte forma: "é uma matriz que transforma um vetor u do espaço vetorial U em um vetor v do espaço vetorial V que obedece às condições de linearidade (i e ii)".

   A resposta de Raul é correta e contempla uma visão matricial de transformação linear, além de especificar o fato de U, V serem espaços vetoriais. O aluno apenas não especifica que $k \in \mathbb{R}$. Embora tenha respondido corretamente, Raul mostra-se inseguro durante a entrevista, quando questionado porque afirmou que uma transformação linear é uma matriz. Ele revela: "Eu não consegui achar a palavra certa, é porque eu não sabia definir bem transformação linear".

   Indaguei o que representava T em $T : U \to V; Tu = v$, se era um operador, uma função. O aluno inseguro novamente afirma que não sabe ao certo, mas que acha que é uma função.

O aluno ao escrever sua resposta no questionário nos leva a crer que absorveu bem a definição de Transformação Linear, mas durante a entrevista o aluno se mostra inseguro e com dúvidas.

3. A resposta de Raul é baseada na verificação da propriedade da preservação da soma:

"$f(x+y) = 2(x+y)+3 = 2x+2y+3$

$f(x) = 2x+3$

$f(y) = 2y+6$

Como $f(x+y) \neq f(x)+f(y)$, f não é uma transformação linear."

O raciocínio de Raul está correto e sua solução só não está perfeita porque cometeu um equívoco ao dizer que $f(y) = 2y+6$, quando na verdade $f(y) = 2y+3$. Mas, este foi apenas um descuido que em nada prejudica o entendimento do aluno.

Ao tentar uma nova justificativa para a questão no item (b), o aluno usa raciocínio semelhante, pois apenas realiza uma verificação da preservação do produto, ao invés de soma, como no item (a). Seu procedimento é o seguinte:

"$f(kx) = 2kx+3$

$kf(x) = 2kx+3k$

Como $f(kx) \neq kf(x)$, f não é uma transformação linear."

As resposta de Raul estão corretas e procedimentais. O aluno baseou-se em contas presentes nas propriedades da definição de Transformação Linear.

Durante a entrevista, indaguei se poderia pensar numa terceira justificativa e o aluno responde que "Acho que é culpa deste 3, para não ser linear", e não fornece maiores explicações. Essa “intuição”pode ser considerada conceitual, mas não é plena pois não é fruto de uma reflexão e há insegurança ao responder.

4. Raul toma $v = ax^2 + bx + c$ para facilitar, mas se equivoca ao afirmar que $T(v) = v$, quando o certo, segundo a notação do aluno, seria dizer que $T(v) = 2v$. E sem mencionar o que está designando por v', segue apenas reproduzindo a propriedade da linearidade:

   “$T(v + v') = T(v) + T(v')$ e $T(xv) = xT(v)$”, sendo que não explicita quem é x. Assim o aluno conclui que T é uma transformação linear.

   Há pequenas falhas procedimentais, mas a solução do aluno é válida. Quando questionado porque optou por usar esta notação o aluno explica: “Porque eu disse que isso era um vetor, então é a mesma coisa escrever do jeito que eu escrevi ou escrever tudo por extenso. Só que ia dar muito trabalho.”

   Há a presença de fatores procedimentais e conceituais em sua resposta.

5. O aluno fornece a seguinte função no item (a):

   $f(ax^2 + bx + c) = (ax^2 + bx + c)^2 - a^2x^4$.

   Porém, ao ser questionado porque havia dado como exemplo de função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$ uma função polinomial, o aluno exclama “Ih, é... Era para ser em $\mathbb{R}^3$... Tá errado.”, e risca o que havia feito, deixando a questão em branco. Além da função ser polinomial, o domínio também era um polinômio (de grau 2).

   Solicitei ao aluno que tentasse refazer o item a, o aluno pensa por uns cinco minutos e diz não saber gerar a função pedida.

   Já no item (b), o aluno apresentou a seguinte função:

   $$T(ax^2 + bx + c) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} ij(ax^2 + bx + c)$$

   .

Quando perguntei se a imagem de sua função era uma matriz, ele primeiramente disse que sim, e depois percebeu que não e explicou-me que ao escrever ij, queria atribuir a cada entrada a_{ij} da matriz 2×2, o resultado $ij(ax^2 + bx + c)$, obtendo deste modo a matriz abaixo:

$$\begin{bmatrix} ax^2 + bx + c & 2ax^2 + 2bx + 2c \\ 2ax^2 + 2bx + 2c & 4ax^2 + 4bx + 4c \end{bmatrix}$$

Perguntei-lhe se o fato de ter variável x na imagem traria algum problema à função gerada e o aluno diz não saber.

No item (c), o aluno respondeu que não sabe.

6. Sua resposta foi simples e incorreta: "Sim, apenas para $x \in \{0, 1, 2, 3\}$". Ao ser indagado durante a entrevista sobre o quis dizer com "apenas para este domínio", o aluno responde que "Não precisava nem dizer isso. Já é uma transformação linear". Então questionei-lhe como é que ele mostraria que a função dada é de fato uma transformação linear. Ele pega o papel para tentar resolver a questão. Neste momento, volta atrás em sua resposta e vê que "$T(3) = 3$ e $T(2) = 2$. Porém, não é possível se obter T(3 + 2), pois 5 não pertence ao domínio. Então T não é uma transformação linear".

   A resposta dada durante a entrevista é satisfatória e de caráter procedimental. Porém, ao ser questionado se o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ é espaço vetorial, o aluno diz não saber se é, o que é uma falha conceitual, que o impede no momento de vislumbrar o proceito de transformação linear, pois apenas é capaz de observar o aspecto procedimental.

7. No item (a), o aluno primeiramente tenta encontrar os autovalores, mas desiste e risca seu esboço. E começa a multiplicar matrizes, mas curiosamente atribuindo em cada multiplicação a respectiva rotação ao lado, em parêntesis.

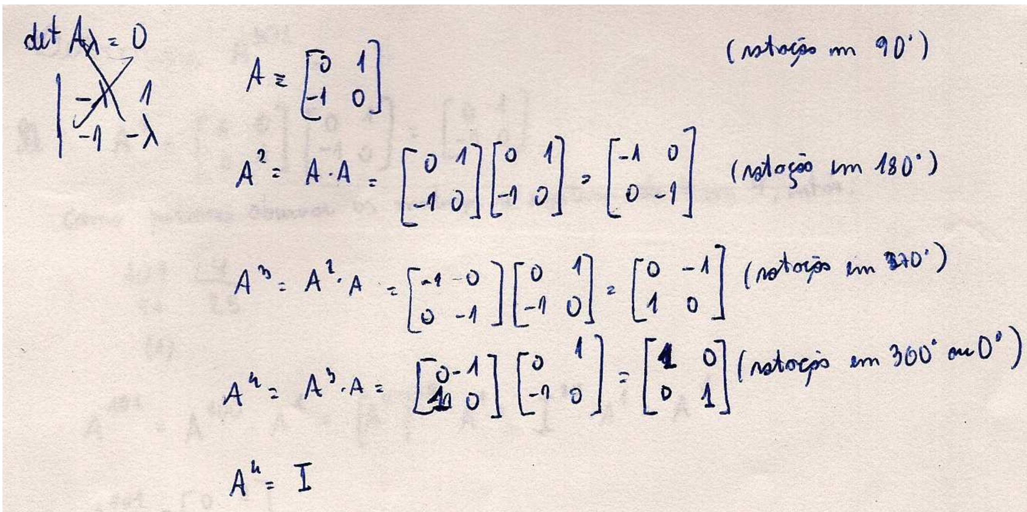


Figura 4.9: Resposta de Raul à questão 7a.

Durante a entrevista, o aluno conta que desistiu de encontrar os autovalores, porque viu que seriam complexos e acrescenta: “Eu não trabalhei com isto, mas talvez o que dê para fazer é trabalhar com os autovalores e autovetores imaginários”.

Perguntei-lhe se havia uma terceira solução e o aluno responde que geometricamente seria uma outra solução, só que “No caso eu não usaria Álgebra Linear. No caso A^1 rotaciona 90°, A^2 rotaciona 180°, A^3 rotaciona 3 vezes 90°, e aí A^n seria a rotação de n vezes 90°”, e deste modo segundo ele o A^4 “seria 360°”(querendo, obviamente, com isto dizer que rotaciona o vetor por 360°).

O aluno ainda revela que pensou nesta solução geométrica primeiro, mas que optou por não escrevê-la pura e simplesmente como resposta porque “não estaria usando Álgebra Linear”. Percebemos em seu discurso que há flexibilidade conceito-procedimento no seu pensamento, mas acha a resposta apenas conceitual não muito aceitável.

Já no item (b), Raul argumenta que “podemos observar que as matrizes se repetem de 4 em 4”e faz a conta $\frac{101}{4}$ encontrando resto 1. Segue fazendo: $A^{101} = A^{100}A^1 = [A^4]^{25} A^1 = I^{25}A^1 = A^1$

$$A^{101} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sua solução para o item (b) é também procedimental, embora pela sua fala anterior percebamos que o aluno é capaz de vislumbrar a questão geometricamente.

4.12 Rodrigo

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
2,63	8,1	9,9

Rodrigo é aluno da Engenharia Naval e Oceânica. Considera-se um bom aluno em Matemática porque a julga um resultado de estudo e aplicações e se considera um aluno aplicado. Gosta do raciocínio lógico e dos desafios da Matemática.

O aluno acha que o curso de Álgebra Linear desenvolve muito o pensamento lógico e abstrato, e aprendeu bastante estudando esta disciplina. O curso de Álgebra Linear o incentivou bastante a buscar mais conhecimentos sobre a Matemática. Ainda assim, o aluno preferiu o curso de Cálculo I, por ter tido contato com esta matéria logo que entrou na Faculdade e ter visto que Matemática "vai muito mais longe do que a que aprendemos nos anos anteriores". O aluno pensa que as maiores dificuldades "do curso da Álgebra Linear é a abstração e o raciocínio lógico, além da geometria e dos cálculos convencionais".

1. Os exemplos de Espaço Vetorial dados por Rodrigo foram: $\mathbb{R}^n$, $\left\{\vec{0}\right\}$ e polinômios de grau n. Os três exemplos estão corretos.

   Quando questionado sobre o que é um espaço vetorial, o aluno responde que "você sente que o vetor nulo é espaço do vetor $\mathbb{R}^n$ é linear. Sei lá, eu acho que espaço vetorial é muito estranho. Tem que ver as propriedades para ser espaço vetorial e vê se satisfaz, e espaço nulo satisfaz".

   Sua resposta foi confusa, então segui arguindo a que propriedades havia se referido e o aluno satisfatoriamente diz que "Tem que ter a soma e produto por escalar, tem que ter um vetor nulo, tem que ter o oposto, que é menos..."

   No item (b), o aluno corretamente diz que os dois (polinômios e matrizes) podem ser elementos do espaço vetorial, mas não justifica.

2. Rodrigo explica o que é transformação linear da seguinte maneira: "é uma operação sobre um vetor que preserva a propriedade linear".

   Perguntei-lhe se esta operação podia ser uma função, e o aluno diz que sim, porém o aluno não sabe nada a respeito do domínio e contra-domínio desta função, apenas diz que há "Transformação do domínio no contra-domínio".

   Ainda na entrevista, questionei o que seria a propriedade linear e o aluno explica que "seria a soma e a multiplicação por escalar, fechado". A definição de Rodrigo, acrescida das devidas explicações durante a entrevista é bem próxima a definição formal, faltando informar que domínio e contra-domínio são espaços vetoriais.

3. O aluno começa respondendo o item (a) reproduzindo a propriedade da linearidade em que "$u, v \in \mathbb{R}$ e $f(\alpha u+v) = \alpha f(u) + f(v)$". E em seguida apenas responde erroneamente que "sim, a função f é transformação linear porque preserva a propriedade linear".

   Indaguei-o se havia verificado que de fato há a preservação da propriedade linear e aluno respondeu que "viu que se tratava do conjunto $\mathbb{R}$ e, assim, viu que preservava". O aluno revela, mesmo sem ter verificado, crer que é uma transformação linear. E tenta justificar dizendo: "Não sei se o fato de ser uma função do primeiro grau, é linear", confundindo função do primeiro grau com transformação linear, porque, segundo Rodrigo, "transformação linear tem a ver com coisas lineares, sei lá, uma reta".

   Pedi para que explicasse o que quis dizer com a expressão "coisas lineares"e o aluno responde que "Coisas lineares, quando você pega essas operações, tipo elevar x^2, tá saindo do campo das coisas lineares", o que confirma sua ideia equivocada, pautada num conflito entre nomenclaturas.

   Já no item (b), o aluno curiosamente diz: "Não tão confiante, mas como a função f é escrita com operações de primeiro grau sobre os vetores isso a tornaria uma transformação linear".

O aluno é conceitual, mas sem sucesso, e não demonstra nenhum aspecto procedimental nesta questão.

4. Rodrigo crê que a função dada é sim uma transformação linear, mas novamente não justifica adequadamente, pois diz apenas que preserva a propriedade linear, sem demonstrar o fato. Acrescenta ainda que "essa transformação tem o 2 como autovalor".

   Ao ser solicitado para que justifique porque a função preserva a linearidade, Rodrigo afirma que verificaria de modo semelhante a última questão: "Da mesma forma: pegando 2 vetores e vendo se é fechado para a soma e produto por escalar". Lembremos que na última questão, o aluno apenas reproduziu a propriedade da linearidade, mas não a usou de fato.

   O aluno se apega à definição, mas não a utiliza para justificar corretamente a questão. Não evoca o procedimental, nem o conceitual.

5. O aluno apresenta duas respostas ao item (a). A segunda estaria correta, mas a primeira função não deixa claro a natureza da terceira coordenada z, que pode ser um escalar qualquer ou uma função $z = f(x, y)$. Em ambos os casos estaria correto, só faltou explicitar a que se referia.

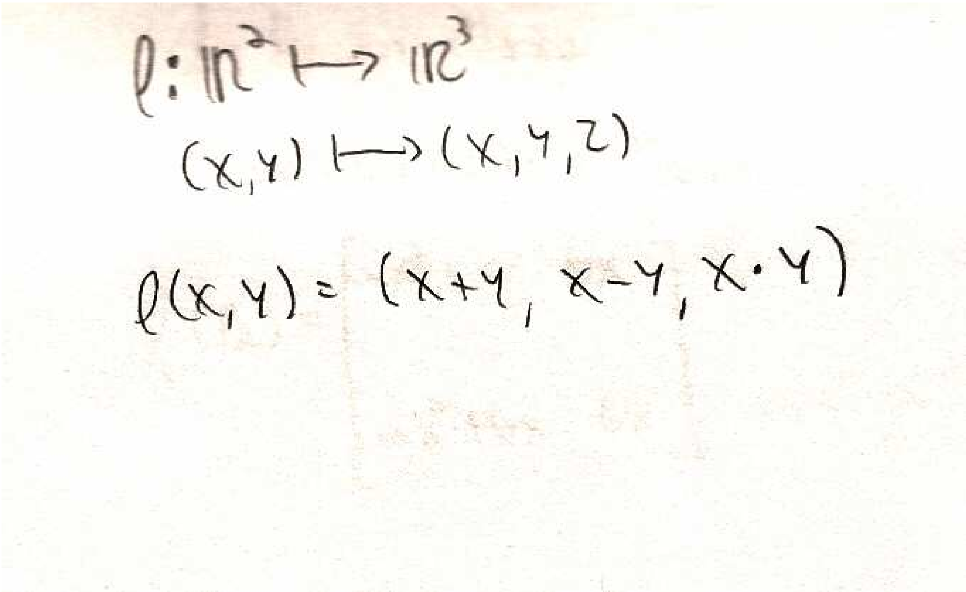


Figura 4.10: Resposta de Rodrigo à questão 5a.

No item (b), fica mais claro o que o aluno quis evocar do que no item (a), pois aqui responde:

$$f : P_2 \to M_{2x2}$$
$$(ax^2 + bx + c) \to M_{2x2}$$
$$f(P_2) = \begin{bmatrix} ax^2 + c & bx \\ ax^2 + bx & bx \end{bmatrix}$$

Quando questionado se a presença da variável x na matriz traria problema à função, o aluno disse não saber.

E no item (c), mais uma vez responde que sim, pois preserva a propriedade linear e rascunha as expressões: $f(2(ax_1^2 + bx_1 + c) + (dx_2^2 + ex_1 + f))$ e $2f(ax_1^2 + bx_1 + c) + f(dx_2^2 + ex_1 + f)$. Não relaciona as duas expressões dizendo que são iguais ou não.

Pedi que relacionasse as expressões, mas aluno alega não saber como fazê-lo e apenas acha "que era por aí (*a solução*)...", revelando mais uma vez uma carência no aspecto procedimental de seu fazer.

6. Rodrigo novamente acha que a função dada é uma transformação linear sim, porque preserva a propriedade linear e escreve-a: $T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v)$. Só que nesta questão, o aluno explicita com um exemplo numérico em que $T(2.2 + 3) = 2T(2) + T(3) = 7$, o que de fato é verdade, mas não é suficiente para garantir o resultado, que na verdade é falso.

   Questionei-o sobre o que ocorreria se ao invés de tomar $\alpha = 2$, fosse tomado $\alpha = 4$, se mudaria algo. Rodrigo diz que não mudaria nada, já que "o 4 iria para fora e 2.4, 8". Argumentei que $T(2 \cdot 2 + 3)$, que foi o exemplo que citou, seria igual a $T(7)$, e indaguei-lhe qual era a imagem de 7. E o aluno exclama: "É verdade, não vai ter imagem. Não sei...", e não responde a questão.

   No momento em que o aluno optou por uma ênfase procedimental, falha por não se ater ao conceitual.

7. O aluno faz a multiplicação de quatro matrizes, fazendo A^4 e encontra o resultado correto.

   Inquiri a Rodrigo se ele conseguia vislumbrar outra solução para esta questão, e ele me perguntou se servia a geométrica. Disse que geometricamente "seria girar 90 graus".

   Nesta questão o aluno transita entre os aspectos conceituais e procedimentais. Conceituais ao exibir sua visão geométrica e procedimental ao multiplicar matrizes.

   No item (b), semelhante a outros alunos, escreveu que "como $A^4 = I$
   $A^{101} = (A^4)^{25} A$
   $A^{101} = IA = A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$".

   No item (b), o raciocío utilizado é procedimental.

4.13 Ronaldo

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
7,38	7,8	7,1

Ronaldo se considera bom aluno em Matemática, porque seu interesse o leva a considerar o seu estudo fundamental e encará-lo com seriedade. Gosta bastante de Matemática e diz tratar-se da área da qual mais gosta, principalmente Matemática Pura.

O aluno achou que o curso de Álgebra Linear teve aulas de um nível muito bom, com a teoria muito bem desenvolvida, nos aspectos teóricos. Mas, acrescenta que apesar disto as avaliações se voltaram mais para o lado prático. Rodrigo gostou mais do curso de Álgebra Linear II do que de Cálculo I, pois prefere uma abordagem formal da Matemática, construída com teoremas, a partir de seus axiomas. E critica o curso de Cálculo I que segundo ele: "tem a pretensão de ser prático para a Engenharia (mas falha neste objetivo)".

Ele julga que para o aluno de engenharia a maior dificuldade do curso de Álgebra Linear é se familiarizar com conceitos mais teóricos e demonstrações.

1. O aluno fornece como exemplos de espaços vetoriais os seguinte conjuntos:

    - $\mathbb{R}$
    - $V = \{f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})\}$
    - $X = [(1,1)] = \{(x, y) \in \mathbb{R}, x = y\}$

    O aluno entende por espaço vetorial um conjunto fechado para a soma e multiplicação por escalar, além disto, quando questionado se há mais propriedades, o aluno afirma que há as propriedades relativas a cada uma dessas duas operações, mas não nos fornece maiores detalhes. Logo, o aluno tem uma boa noção de espaço vetorial.

    Já no item (b) o aluno Ronaldo respondeu o seguinte:

- Sim, o espaço vetorial P, dos polinômios, é um espaço de dimensão infinita, e é constituído por polinômios.
- Uma matriz pode também. Exemplo: $M_{n\times m}$ é o espaço vetorial de todas as matrizes $m \times n$ (a soma precisa estar bem definida).

2. A sua explicação de transformação linear é a seguinte:

   "Uma T.L. T é uma função que respeita axiomas lineares, com relação a:

   - Adição (associatividade, elemento neutro, etc)
   - Multiplicação por escalar."

   Embora não tenha dito, na entrevista revela saber que o domínio e contra-domínio da transformação linear são espaços vetoriais.

   Quando lhe solicitei que explicasse melhor o que quis dizer com o parêntesis após a adição dizendo associatividade, elemento neutro, o aluno se equivocou e disse o seguinte: "No caso, que $T(x) + T(x^2)$ tem que ser igual a $T(x^2) + T(x)$", apenas dando um exemplo de comutatividade da soma.

   Apesar de citar aspectos que são decorrentes da transformação linear, o aluno não cita as propriedades da linearidade na entrevista, mesmo quando indiretamente questionado durante a entrevista.

3. No item (a), o aluno apenas diz que sim e explicita a propriedade da linearidade como $f(ka + b) = kf(a) + f(b)$, sem verificar nada. É interessante observar que anteriormente o aluno não havia citado a propriedade da linearidade, nem ao lhe ser pedido.

O aluno revelou na entrevista não ter visto necessidade de verificar no item (a), se a função era uma transformação linear, pois sabe que f é um polinômio e que por este motivo, já sabia que é uma transformação linear, o que não é verdade.

Logo, o aluno opta por um aspecto conceitual em sua resposta, mas erra por partir de uma afirmação falsa, possivelmente, oriunda de uma confusão com nomenclaturas.

No item (b), ao tentar justificar de outra forma, Ronaldo diz que $f(x)$ pertence ao espaço P_1, que obedece às mesmas propriedades que as transformações lineares. O aluno nem mesmo conhece a diferença entre polinômio e função.

4. Na quarta questão, novamente há ausência de justificativa. Ronaldo apenas diz que sim, que $T(p) = 2p$ e reproduz a propriedade $T(kt + u) = kT(t) + T(u)$.

   O aluno apenas evocou indiscriminadamente a propriedade da linearidade, mas demonstra não saber trabalhá-la para desenvolver a justificativa.

5. A quinta questão é toda respondida adequadamente. No item (a), o aluno cria a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(x, y) \to (y, x, y - x)$.

   No item (b), cria a função $f : P_2 \to M_{2\times 2}$ tal que $(ax^2 + bx + c) \to \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$. Corretamente demonstra, no item (c), que a função criada no item (b) é sim uma transformação linear. Diferentemente das outras questões, nesta o aluno deixa explicado cada passo verificado, da seguinte forma:

$$\text{“}f(k(ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)) = \begin{bmatrix} ka + d & kb + e \\ kc + f & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & 0 \end{bmatrix} = k \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d & e \\ f & 0 \end{bmatrix} =$$

$$kf(ax^2 + bx + c) + f(dx^2 + ex + f)."$$

Logo, seria um transformação linear.

O aluno foi capaz de criar as funções pedidas e soube no item (c) fazer um bom uso dos aspectos procedimentais da transformação linear, tendo êxito em sua justificativa.

6. Ronaldo erra esta questão por não se ater ao domínio da função. Responde que é uma transformação linear sim e argumenta que $T(ax_1 + x_2) = ax_1 + x_2 = aT(x_1) + T(x_2)$ o que segundo ele, mostra que obedece aos axiomas da adição e multiplicação por escalar.

   Novamente, o aluno apenas evoca a propriedade da linearidade, sem desenvolvê-la positivamente.

   Ao sugerir que o a fosse igual a 4, o aluno percebe que não estaria no domínio e observa o seguinte: “Não sendo espaço vetorial, não tem como ser transformação linear. Mas passei batido”.

   O aluno percebe, portanto, que o domínio e contra-domínio da transformação linear não são espaços vetoriais, ainda que apenas o tenha feito ao ser “induzido” durante a entrevista.

7. Ronaldo utiliza a Decomposição Espectral para resolver a questão, no item (a) e (b):

   O aluno não levou em conta que os autovalores são complexos não-reais $\lambda = \pm i$. Logo, suas contas não possuem fundamento. Além disso, a resposta final está errada e não corresponde a A^4.

   Perguntei-lhe se teria outra forma de encontrar A^4 e o aluno afirma que o único jeito seria fazer uma multiplicação de A por A quatro vezes, mas que no item (b) isto ficaria inviável. Sugeri-lhe que olhasse para a figura e Ronaldo se deu conta de que poderia resolver geometricamente, pois “girando um vetor quatro vezes 90, volta nele mesmo”. O

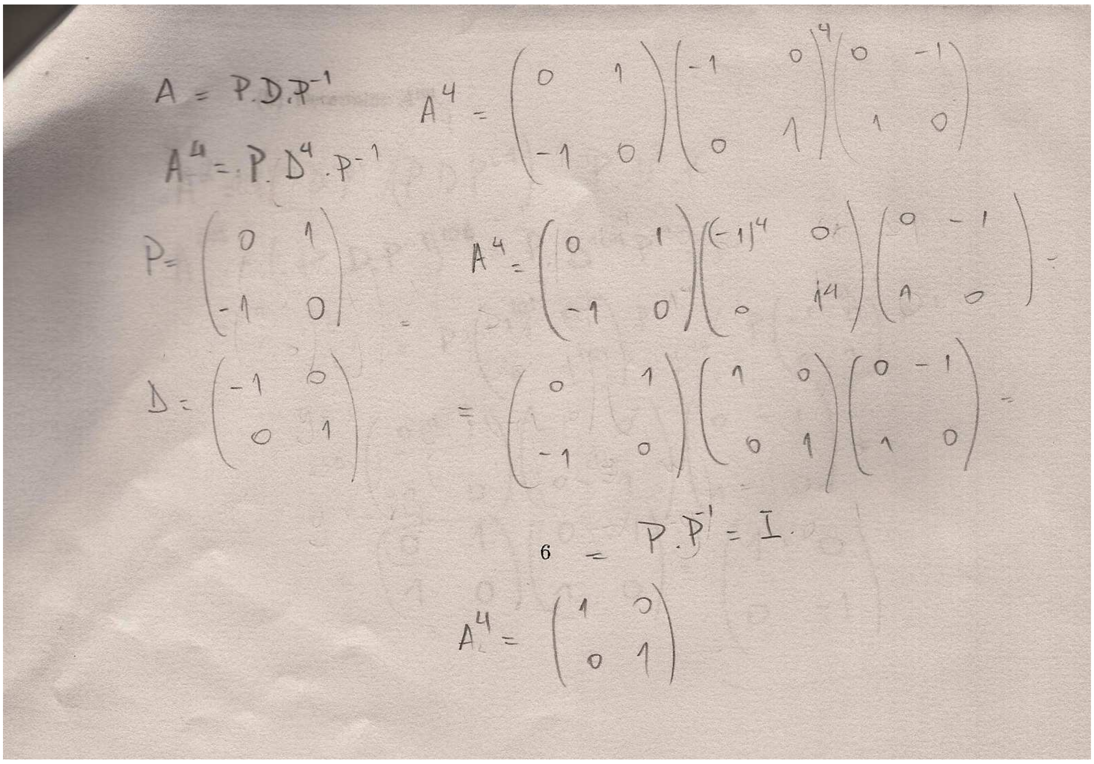


Figura 4.11: Resposta de Ronaldo à questão 7a.

aluno afirma que olhar geometricamente é sempre sua segunda opção, sendo a primeira, algébrica, numa revelação franca.

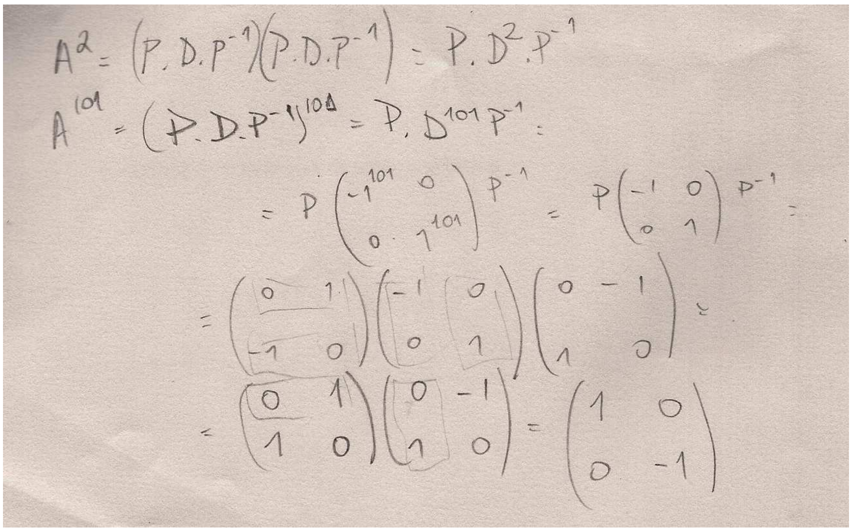


Figura 4.12: Resposta de Ronaldo à questão 7b.

4.14 Thaís

Matemática (Vestibular)	Cálculo I	Álgebra Linear II
6,88	8,6	7,3

Thaís se considera uma boa aluna em Matemática por sempre ter se dedicado bastante a disciplina, por gostar de estudá-la, e afirma costumar obter bons resultados em provas. Procura "praticar ao máximo"fazendo bastante exercícios e acredita que isso a tenha ajudado a se tornar uma boa aluna em Matemática. A aluna tem facilidade em entender a disciplina, por isso tem gosto em estudá-la. Também acha interessante ver na Matemática aplicações de "problemas"ou situações da vida cotidiana.

Já quando questionada sobre o curso de Álgebra Linear, Thaís afirma o seguinte: "Ainda estou cursando Álgebra Linear. Tenho gostado bastante pois é uma disciplina que 'abre os horizontes' do aluno, e possui aplicações em diversas áreas da Matemática. Podemos entender melhor pela Álgebra Linear, por exemplo, o jacobiano de mudança de variáveis de integrais e a resolução de equações diferenciais".

Ainda que tenha gostado do curso de Álgebra Linear, preferiu o de Cálculo I, que julga ser menos "rico"em fundamentos do que a Álgebra Linear. Mas, Cálculo I foi, na sua opinião, o curso que mais a auxiliou e ao qual mais vezes teve que recorrer enquanto estudava outras disciplinas, como Física I, II e III e Cálculo II e III.

Para Thaís, a maior dificuldade encontrada no curso de Álgebra Linear foi no início do curso, o completo entendimento da teoria e como ela pode ser aplicada nos problemas e exercícios. Relata ter tido certa dificuldade no início em entender a ideia de bases de espaços vetoriais, e como lidar com elas na resolução de problemas.

1. Os exemplos fornecidos pela aluna são:

   - $\mathbb{R}^3$
   - $\beta = (1, 1, 1, 1) \rightarrow$ uma reta em $\mathbb{R}^4$
   - $x + y = 2 \rightarrow$ plano

O segundo exemplo de Thaís está com uma notação errada, mas podemos entender que a aluna quis se referir à reta em que $x = y = z = w$ em $\mathbb{R}^4$, cuja uma possível base para o dado subespaço seria $\langle(1, 1, 1, 1)\rangle$, ao invés de $\{(1, 1, 1, 1)\}$.

O terceiro exemplo da aluna está equivocado. A equação $x + y = 2$ será um plano no $\mathbb{R}^3$, mas não será um subespaço do $\mathbb{R}^3$ (e consequentemente, um espaço vetorial). Este plano é apenas um subespaço afim do $\mathbb{R}^3$, pois não passa pela origem.

Quando questionada sobre o que é um espaço vetorial, sua resposta é confusa e pouco elucidativa: "É difícil falar... É como se fosse, como se determinasse uma direção ou várias direções determinados por vetores... Pode ser um vetor, pode ser um plano determinado por dois vetores, ou o $\mathbb{R}^3$ que teriam três direções...". Thaís chega a afirmar que espaços vetoriais tem propriedades, mas não sabe dizer quais.

A aluna julga que polinômios podem ser elementos de um espaço vetorial, mas uma matriz não. Mas suas justificativas para ambos casos são confusas. Apresenta o seguinte discurso:

- Sim, um polinômio pode ser por exemplo um elemento do espaço vetorial dos polinômios de grau 3.
- Não, uma matriz representa um espaço vetorial, mas não é um elemento de espaço vetorial.

Perguntei o que quis dizer com este segundo item e a resposta de Thaís revela uma confusão com o conceito de Transformação Linear. Diz que ficou na dúvida e que acha que pode sim uma matriz ser um elemento de um espaço vetorial. E explica seu raciocínio: "Eu pensei o seguinte: uma transformação linear você pode escrever algebricamente ou na forma de matriz. Então foi isso que eu quis dizer... E uma transformação passa de um espaço para o outro."

A aluna revela, com suas respostas ao questionário e à entrevista, que não compreendeu o proceito de espaço vetorial, pois não compreendeu o conceito e nem assimilou os procedimentos envoltos em sua definição. Ela possui apenas parte de recordações do que estudou, sem diferenciar bem espaço vetorial de transformação linear. Os próprios exemplos dados não demonstram maturidade no assunto por parte da aluna.

2. Sua resposta foi:

   “Uma Transformação Linear é a transformação de um espaço vetorial em outro. Ela pode representar uma rotação, projeção, reflexão de vetores, aumento/redução de área ou volume, e muitas outras aplicações.”

   A noção de transformação linear da aluna é predominantemente aplicada e geométrica, o que caracteriza uma noção conceitual de transformação linear. Porém depois ela demonstra conhecer as propriedades da linearidade, ainda que as revele aos poucos durante a entrevista e que use exemplos numéricos para explicar:

   Thaís: Tem a linearidade. A transformação de x=2 tem que ser 2 vezes a transformação de 1. Multiplicação.

   Eu: Tem mais alguma (propriedade)?

   Thaís: Tem soma. Eu até escrevi depois.

   Ao contrário de sua visão de espaço vetorial, Thaís demonstra compreender melhor o que é uma transformação linear, tendo uma postura conceitual, ao explicar inicialmente o que é transformação linear, e procedimental ao descrever as propriedades da preservação do produto por escalar e soma, com exemplos numéricos.

3. No item (a), Thaís corretamente mostrou que a função dada não era uma Transformação Linear e justificou a partir da falha da propriedade da preservação do produto, dando exemplos numéricos: “$f(1) = 2 + 3 = 5$ e $f(2) = 4 + 3 = 7 \Rightarrow 2f(1) \neq f(2)$”.

   A aluna optou por uma solução procedimental, e não notou que esta função se trata de uma transformação afim, por não passar na origem.

Thaís deixou o item (b) em branco.

4. Thaís responde que a função dada é sim uma transformação linear, e afirma que "essa transformação respeita as propriedades da linearidade", porém seu argumento é fraco, pois apenas utiliza-se da preservação do produto por escalar, e ainda assim mostra apenas um caso particular, quando o escalar é 2:

$$\text{“}2T(ax^2 + bx + c) = 4ax^2 + 4bx + 4c = T(2ax^2 + 2bx + 2c)\text{”}$$

Percebemos que a aluna optou pela ênfase procedimental, mas não usou-a corretamente.

5. A aluna cria com êxito funções no item (a) e (b). No item (a) apresenta a seguinte função: $T(x, y) = (x + y, x - y, x^2 - y^2)$.
E no item (b): $T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Porém, no item (c), embora lhe tenha sido pedido para que justificasse, a aluna apenas responde que sim. A aluna afirma em entrevista que não sabe como fazê-lo. Ressaltamos que a aluna não usou uma ênfase procedimental para tentar justificar o item (b), como fez nas outras questões. Podemos sugerir como justificativa para este evento, o fato de na questão 1b, a aluna ter respondido que matriz não é elemento de espaço vetorial e ter fornecido uma resposta confusa para tal. Isto sugere-nos que Thaís não está familiarizada com a manipulação de matrizes como elementos e, consequentemente, teria encontrado dificuldades para trabalhar com a imagem da transformação linear que ela mesma criou.

6. Thaís, nesta questão, se equivoca e afirma que a função dada é sim uma Transformação Linear, por respeitar a linearidade. Só que sua justificativa, para a

afirmação que é falsa, é baseada em apenas um limitado exemplo numérico, em que de fato seria válido a preservação da soma.

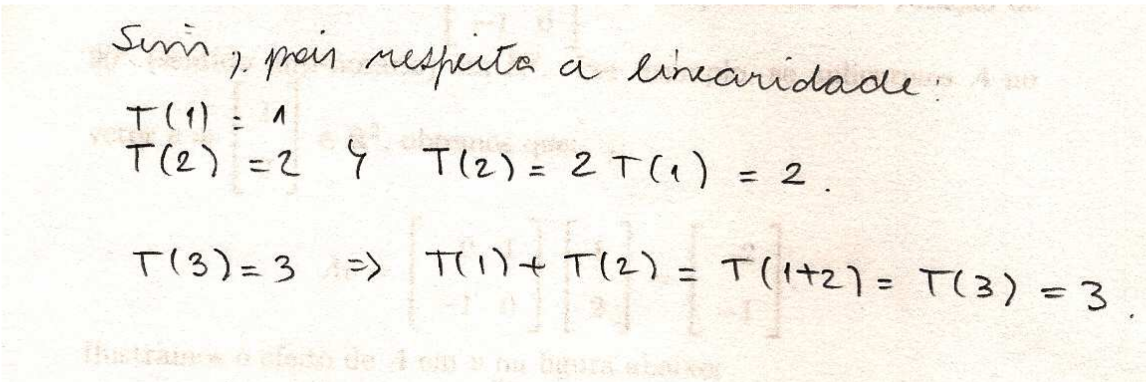

Sim, pois respeita a linearidade:
$T(1) = 1$
$T(2) = 2$ e $T(2) = 2T(1) = 2$.
$T(3) = 3 \Rightarrow T(1) + T(2) = T(1+2) = T(3) = 3$.

Figura 4.13: Resposta de Thaís à questão 6.

Indaguei-lhe o que aconteceria se tomássemos $\lambda = 4$ e a aluna prontamente verificou que não estaria no domínio. Mas, insistindo perguntei se o λ precisa estar no domínio da função e aluna respondeu que não e acrescentou que "não teria como fazer isso aqui (esta operação). Não teria como colocar o 4 aqui".

7. Nesta questão da matriz rotação, a aluna primeiramente tenta aplicar a Decomposição Espectral, chegando a enunciar que $A^4 = PD^4P^{-1}$ e chega a encontrar o polinômio característico. Porém, ao perceber que não há autovalores reais para esta matriz, a aluna desiste do método e começa a resolver a questão multiplicando as matrizes, até que encontrou a matriz identidade. Vale notar que para fazer A^4, ela realiza três multiplicações de matrizes[(1)].

   A aluna demonstra na entrevista não conseguir imaginar outra forma de responder à questão sem ser por autovalores ou multiplicação. Isto nos revela neste questão uma ênfase totalmente procedimental e rejeição a uma visão mais simples, que seria a conceitual. Thaís não transitou bem entre conceito da matriz rotação e procedimento.

[(1)] Quando poderia ter feito A^2 e depois $A^2.A^2$.

Já no item (b), ela evoca o item (a) para a sua resolução, percebendo que $A^{100} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pois 100 é múltiplo de 4.

E dando sequência ao raciocínio, faz que

$$A^{101} = A^{100}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

.

E constata que $A^{101} = A$.

A aluna, neste item, optou por solução simples, que era a procedimental. Embora a visão geométrica fosse igualmente simples, mas como não enxergou no item (a), era esperado que não fosse tomar tal postura no item (b).

Capítulo 5

Análise do Questionário Principal

5.1 Questão 1 - item a

Dê três exemplos de espaços vetoriais.

A tabela abaixo ilustra a quantidade de alunos que acertaram três, dois, um ou nenhum exemplo de espaço vetorial.

Tabela 5.1: Exemplos corretos por um mesmo aluno

	3 exemplos	2 exemplos	1 exemplo	nenhum exemplo
Alunos	8	3	2	1

Consideramos como exemplo correto um exemplo que não estava com a notação correta, porém sua ideia estava. É ele: $\beta = (1, 1, 1, 1) \rightarrow$ uma reta em $\mathbb{R}^4$, fornecido por Thaís. Entendemos que a aluna está se referindo à reta em que $x = y = z = w$ em $\mathbb{R}^4$.

Não foi contabilizado duas vezes nesta tabela exemplos equivalentes fornecidos pelo mesmo aluno, como aconteceu com Raul, que forneceu como exemplos bases distintas para o $\mathbb{R}^3$: $V = \{(1, 0, 0); (0, 1, 0); (0, 0, 1)\}$ e $V = \{(1, 1, 1); (1, -1, 0); (0, -1, 1)\}$.

No único caso em que os três exemplos estão incorretos, o aluno (Fábio) escreveu a definição de espaço vetorial.

Os outros cinco exemplos incorretos foram:

- reta em $\mathbb{R}^3$ e plano em $\mathbb{R}^3$ (fornecidos por Caio)
- Plano $\longrightarrow \langle(1,1,1),(1,1,1)\rangle$ e volume $\longrightarrow \langle(1,1,1),(1,1,1),(1,1,1)\rangle$ (fornecidos por Fernando)
- $x+y=2 \rightarrow$ plano (fornecido por Thaís)

Observemos agora a relação dos oito exemplos que foram citados pelos catorze alunos e com que frequência foram citados.

Tabela 5.2: Tipos de exemplos citados

Tipo de exemplo	Quant. de alunos
$\mathbb{R},\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3$	11
$\mathbb{R}^n$	2
Polinômios	6
Matrizes	0
Funções	2
Espaço-Nulo	3
Espaço-Linha	1
Funções deriváveis	1

A maioria dos alunos forneceu-nos como exemplo de espaço vetorial $\mathbb{R},\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, sendo que 4 destes alunos evocaram estes conjuntos mais de uma vez. Isto enfatiza o quanto no curso de Álgebra Linear predomina uma visão simplificada de espaço vetorial, trabalhando-se mais com estes conjuntos, em detrimento de trabalhar com o conjunto das matrizes, por exemplo, que não foi citado por nenhum aluno.

5.2 Questão 1 - item b

Um polinômio pode ser um elemento de um espaço vetorial? E uma matriz?

Tabela 5.3:

	Polinômio	Matriz
Resp. e Just. Correta	5	5
Resp. correta e Just. ausente/confusa	9	5
Resp. Incorreta	0	4

Observando a tabela temos que apenas 5 alunos responderam que matriz e polinômio são elementos de um espaço vetorial e justificaram corretamente. Embora a tabela não revele, estes cinco alunos que justificaram corretamente, responderam que ambos são elementos de espaço vetoriais. Vale ressaltar que essas justificativas consideradas corretas não foram nem um pouco rigorosas, apenas tinham coerência com o proceito de espaço vetorial.

Outros cinco alunos responderam que ambos são elementos de espaços vetoriais, mas não justificaram ou forneceram uma justificativa confusa. Os 4 alunos restantes disseram que apenas polinômios eram elementos de espaços vetoriais e matrizes não, mas nenhum dos 4 alunos justificou corretamente (o fato do polinômio ser elemento de espaço vetorial).

Não nos surpreende notar que todos os alunos concebem polinômio como elemento de em espaço vetorial, mas apenas dez alunos consideram que matriz o seja. Isto está de acordo com o fato de que seis alunos citaram o conjunto dos polinômios com espaço vetorial no item (a), enquanto que nenhum aluno citou o conjunto das matrizes.

5.3 Questão 2

Explique o que é uma transformação linear.

Nas respostas para esta questão apareceram cinco aspectos da transformação linear citados pelos alunos (sendo que nenhum aluno citou todos os cinco). Foram eles:

- afirmar que T é uma função;
- afirmar que tanto o domínio quanto o contra-domínio da transformação linear são espaços vetoriais (E.V.);
- evocar as propriedades da linearidade;
- apresentar a transformação linear como uma matriz;
- apresentar uma visão geométrica de transformação linear (como rotação, translação...);

Nesta questão, levaremos em conta as respostas que foram dadas tanto no questionário, quanto nas entrevistas, porque notamos que muitos alunos simplesmente se esqueciam de mencionar alguns aspectos que conheciam, privilegiando os que naquele momento se fizeram mais presentes em suas recordações. Também ressaltemos que durante a entrevista, os alunos eram induzidos à resposta.

Veja a tabela 5.4 que contempla o número de alunos que citou cada um dos cinco aspectos da transformação linear durante o questionário e entrevista.

Nitidamente os dois aspectos mais citados pelos alunos foram os que revelam uma visão procedimental do proceito de transformação linear.

Durante a entrevista, mais alunos mencionaram que uma transformação linear é uma função e que satisfaz as propriedades da linearidade (aspectos procedimentais), mas além

Tabela 5.4: Aspectos da T.L. apresentados durante o questionário e a entrevista

	Questionário	Entrevista	Total
T é função	8	4	12
Domínio e contra-domínio são E.V.	4	4	8
Linearidade	7	3	10
Visão matricial	2	0	2
Visão geométrica/aplicação	2	0	2

disto mais quatro alunos mencionaram que o domínio e contra-domínio de uma transformação linear são espaços vetoriais, dobrando o número no total, já que no questionário apenas quatro alunos haviam citado o fato.

5.4 Questão 3 - item a

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 3$. A função f é uma transformação linear? Justifique.

Classificamos as justificativas apresentadas a esta questão em três categorias:

- Procedimental: justificativa a partir da verificação das (ou de umas das) propriedades da linearidade da transformação linear;
- Conceitual;
- Insuficiente ou ausente;

Estas três categorias de justificativas podem estar aliadas a respostas corretas (em que o aluno afirma que a função dada não é transformação linear) ou não.

Tabela 5.5: Relação das justificativas apresentadas

Argumento	Resp. Correta	Resp. Incorreta
Procedimental (linearidade)	6	0
Conceitual	0	5
Insuficiente ou ausente	0	3
Total	6	8

Notemos que a maioria dos alunos errou esta questão, e os tipos de erros presentes se dividem em equívocos conceituais ou simplesmente na ausência de argumento ou argumento insuficiente.

Os erros conceituais nesta questão foram de duas naturezas:

- Considerar $2x+3$ e afirmar que se o domínio e contra-domínio de uma função são espaços vetoriais, então a função é transformação linear.

- Considerar que toda função do 1° grau é uma transformação linear.

Já o argumento considerado insuficiente foi o de apenas afirmar que a função satisfaz à linearidade, sendo que alguns dos alunos chegavam a reproduzir as propriedades, mas não as verificavam.

É importante notar que apenas teve êxito nesta questão quem utilizou argumento procedimental. Todos os que tentaram usar base conceitual, lançaram mão de argumentos conceituais falsos, que os conduziram ao erro. Nenhum aluno observou neste item que a função dada não passava pela origem (logo, não seria transformação linear), o que seria um argumento conceitual correto.

5.5 Questão 3 - item b

Você pode justificar a letra (a) de uma segunda forma?

Tabela 5.6:

Correto	Incorreto	Em branco
4	5	5

Os tipos de argumentos considerados neste item são os mesmos considerados no item (a). Segue tabela com os resultados:

Tabela 5.7: Tipos de argumentos

Argumento	Resp. Correta	Resp. Incorreta
Procedimental (linearidade)	3	0
Conceitual	1	4
Insuficiente ou ausente	0	1
Total	4	5

Ressaltamos que os três alunos que responderam corretamente o item (b), a partir das propriedades da preservação para soma e produto por escalar, também tinham usado este argumento no item (a), sendo que num item utilizavam-se da preservação da soma e no outro, produto por escalar.

Apenas um aluno forneceu-nos uma resposta conceitualmente classificada correta, Lucio, que no item (a) optou por um argumento procedimental (de verificação da propriedade da linearidade). Lucio afirmou no item (b) "achar que $2x + 3$"não é espaço vetorial.

Os demais alunos que forneceram respostas conceituais, porém incorretas, usaram um argumento que confundia transformação linear com o conceito de função. Dos quatro alunos que responderam deste modo, dois já haviam fornecido esta resposta no item (a) e apenas repetiram o argumento, mudando o modo de explicar. Eles apenas afirmaram que a função levava os elementos do domínio em $2x + 3 \in \mathbb{R}$, o que nada acrescenta à resposta e muito menos serve como prova de nada, mesmo quando tratar-se de uma função que de fato seja transformação linear.

5.6 Questão 4

> Seja P_2 o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2, isto é, $P_2 = \{ax^2 + bx + c \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$. Considere $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + 2bx + 2c$. T é uma transformação linear? Justifique.

Apresentemos o números de alunos que responderam que a função em questão é uma transformação linear ou não, ou deixaram em branco a questão. A tabela abaixo apresentará como entradas “correto”e “incorreto”, sem considerar a justificativa dada à questão, que será analisada posteriormente.

Tabela 5.8:

Correto	Incorreto	Em branco
13	0	1

Dos 14 alunos selecionados apenas 1 aluno deixou a questão em branco e os demais responderam corretamente que a função em questão era uma transformação linear, mas nenhum destes 13 alunos justificou corretamente. Segue abaixo tabela relacionando os tipos de argumento (conceitual ou procedimental) e se foram suficientes ou não.

Tabela 5.9:

	Argumento suficiente	Argumento insuficiente
Conceitual	-	4
Procedimental	-	9

Resumindo, todos os alunos que responderam à questão responderam corretamente e justificaram insatisfatoriamente. O tipo de erro nas justificativas foram de três tipos:

- Apenas afirmaram que o polinômio estava sendo transformado no seu dobro.
- Afirmaram que o polinômio estava sendo transformado no seu dobro e que o conjunto $2p(x)$ é um espaço vetorial (sem maiores justificativas).
- Apenas evocaram as propriedades da linearidade e não as verificavam.

5.7 Questão 5 - item a

Crie uma função que leve elementos de $\mathbb{R}^2$ em elementos de $\mathbb{R}^3$.

Tabela 5.10:

Correto	Incorreto	Em branco
10	4	-

Ressaltemos que dos dez alunos que criaram corretamente funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, quatro deles forneceram a mesma função. Foi ela: $f(x, y) = (x, y, x + y)$. É interessante notar que houve um exemplo em comum, ainda que sejam apenas 4 pessoas, mas considerando 14 como espaço amostral, 4 não é um número insignificante.

O item teve um bom número de acertos, o que esperávamos, já que os alunos provavelmente estão acostumados a trabalhar com funções deste tipo, tanto que nenhum aluno deixou-o em branco.

Dentre as respostas corretas, destacamos a de Lúcio em especial:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Lúcio, podia como os demais alunos, ter respondido da seguinte forma: $f(x, y) = (x + 2y, 3x + 4y, 5x + 6y)$, mas ao invés disto optou por escrever sua função na forma matricial, revelando um conhecimento extra em relação aos outros alunos.

As quatro respostas equivocadas foram as seguintes:

- Confundir $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ com polinômio de grau 2 e 3 (Fábio): $T(1) = x - 1$, $T(x - 1) = \frac{(x-1)^2}{2}$, $T\left[\frac{(x-1)^2}{2}\right] = \frac{(x-1)^3}{6}$.
- Criar função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ (Marcel): $f(x, y) = 2x + 2$.

- Resposta confusa (Luciano): "adicionar um vetor L.I. dos demais".
- Confunde $\mathbb{R}^2$ com polinômio de grau 2 e também se equivoca ao gerar uma função cuja imagem é um polinômio de grau 3 (Raul): $f(ax^2+bx+c) = (ax^2+bx+c)^2 - a^2x^4$.

Percebemos que em todos os equívocos apresentados os alunos não souberam trabalhar com elementos do $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

5.8 Questão 5 - item b

Crie uma função que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$ (conjunto das matrizes 2×2).

Tabela 5.11:

Correto	Incorreto	Em branco
5	5	4

Neste item o número de acertos diminui bastante, sendo a metade do item (a). Isso naturalmente se deve ao fato dos alunos estarem menos acostumados a trabalhar com espaços vetoriais que não sejam $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Dentre as respostas erradas estão:

- Apresentou a variável x nas entradas da matriz (Bruno): $f(P_2) = \begin{bmatrix} ax+b & c \\ bx & 3ax \end{bmatrix}$
- Três alunos apresentaram matrizes cujas entradas eram imagem de uma função polinomial (Fernando, Raul e Rodrigo):
  - $f(i) = i^2 + i + c$ e $a_{ij} = f(i)$
  - $T(ax^2 + bx + c) = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} ij(ax^2 + bx + c)$ (notação errada)
  - $f(P_2) = \begin{bmatrix} ax^2 + c & bx \\ ax^2 + bx & bx \end{bmatrix}$
- Apenas rascunhou uma matriz de entradas genéricas a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22} (Fábio).

Dentre as respostas corretas daremos destaque à resposta de Lúcio, que diferente dos demais alunos, cria uma matriz composta por polinômio e derivada de polinômio. Sua função foi a seguinte: $\begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p'(1) & p'(0) \end{bmatrix}$.

5.9 Questão 5 - item c

A função que criou na letra (b) é uma transformação linear? Caso não seja, crie uma transformação linear que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$.

Tabela 5.12:

Correto	Incorreto	Em branco
5	5	4

Como o item (c) dependia do item (b), os quatro alunos que deixaram o item (b) em branco, consequentemente deixaram o item (c) em branco. Dos cinco alunos que erraram o item (b), quatro tentaram justificar suas respostas e um deixou em branco. Como o item (b) estava errado, consequentemente qualquer justificativa para a falsa função ser ou não transformação linear estará errada também.

Dos cinco alunos que responderam o item (b) corretamente, todos responderam o item (c) também corretamente, porém não necessariamente a justificativa era satisfatória. Segue abaixo tabela com os resultados.

Tabela 5.13: Argumentos dos 5 alunos que responderam corretamente

Argumento Correto	Argumento insuficiente ou ausente
2	3

5.10 Questão 6

Considere a função $T : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$ tal que $T(x) = x$. T é uma transformação linear? Justifique.

Tabela 5.14: Levantamento do número de Respostas

Correta	Incorreta	Em branco
5	8	1

Vemos que a maioria dos alunos erraram esta questão, tendo sido em vão nossa mudança no enunciado em relação ao questionário piloto, em que o domínio da função era o conjunto dos inteiros. Tentamos chamar a atenção dos alunos para um conjunto discreto, mas não tivemos êxito, o que ratifica que os alunos têm dificuldades (ou falta de hábito) em observar o domínio de transformação linear.

Tabela 5.15: Argumento dos alunos que responderam corretamente

Percebeu que não é E.V.	2
Argumento numérico	2
Argumento sem sentido	1

Os dois alunos que responderam corretamente à questão baseando-se em argumentos numéricos, notaram que era possível somar dois elementos do conjunto e sua soma não pertencer ao domínio, logo a função não era transformação linear. Foi uma forma indireta de perceber que o conjunto não é espaço vetorial, ainda que não o tenham notado.

O aluno que argumentou equivocadamente afirmou que o conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$ tem dimensão 4 (logo é espaço vetorial) e que $\mathbb{R}$ tem dimensão infinita e, portanto, segundo o aluno a função não seria transformação linear. Há 3 afirmações equivocadas e uma só justificativa. (Luciano)

Apenas dois alunos dos catorze responderam da maneira ideal a partir de uma observação consciente do domínio da função, que não é espaço vetorial. É qualitativamente um resultado ruim, já que oito tinham conhecimento de que o domínio e contra-domínio de uma transformação linear são espaços vetoriais (ver questão 2).

Tabela 5.16: Argumento dos alunos que responderam incorretamente

Argumento sem sentido ou ausente	5
Argumento numérico	3

Dos cinco alunos que erraram a questão e afirmaram que a função dada era sim uma transformação linear baseados em argumentos sem sentido ou ausentes, as respostas foram diversificadas:

- Simples evocação das propriedades da linearidade. (Ronaldo e Fernando)
- A função representa uma homotetia de grau 1. (Marcel)
- Afirma que a função gera elementos pertencentes à $\mathbb{R}$, o que é um argumento vazio. (Luigi)
- A função é transformação linear apenas para $x \in \{0, 1, 2, 3\}$. (Raul)

Aqueles que responderam equivocadamente baseando-se em exemplos numéricos, verificaram uma das propriedades do linearidade (preservação da soma ou produto por escalar) para algum caso específico em que valia a propriedade e tiraram conclusões precipitadas.

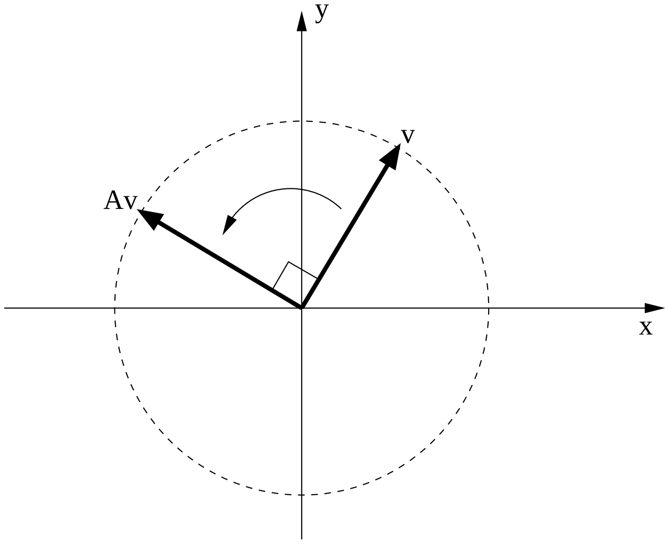
Logo, percebemos que neste caso a ênfase procedimental, que consistia em verificar se $f(x + y) = f(x) + f(y)$ para x e y específicos, conduziu alunos ao erro, sem notar que o domínio e contra-domínio não são espaços vetoriais.

5.11 Questão 7- item a

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, que representa uma rotação de 90° (sentido anti-horário) em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, se aplicarmos A no vetor $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$, obtemos que:

$$Av = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Ilustramos o efeito de A em v na figura abaixo:



Determine A^4.

Tabela 5.17: Levantamento do número de Respostas

Correta	Incorreta	Em branco
10	3	1

Abaixo segue tabela contabilizando cada tipo de argumento, que levou alunos à resposta correta e a respostas erradas, neste último caso por falha no desenvolvimento do argumento.

Tabela 5.18:

	Correta	Incorreta
Multiplicação matricial	6	2
Visão geométrica	5	-
Decomposição espectral	1	1

Notemos que todos os alunos que utilizaram-se de uma visão geométrica, em que a matriz transformação dada era a matriz rotação, responderam com êxito a questão, que vista sob este prisma pode ser considerada uma questão bem simples e conceitual.

No entanto, os alunos que optaram por uma ênfase procedimental se dividiram em acertos e erros. Dois alunos erraram ao multiplicar seguidamente matrizes e um aluno utilizou descriteriosamente a decomposição espectral, partindo de contas com matrizes erradas e sem justificá-las.

Era esperado por nós que neste item um número considerável de alunos realizasse multiplicação de matrizes e de fato oito de catorze alunos o fizeram.

Também observa-se que a soma de argumentos corretos é doze, enquanto que apenas 10 alunos acertaram a questão. Tal fato é devido a dois alunos terem apresentado em suas respostas dois argumentos distintos (Caio e Raul). Raul realizou multiplicação matricial e a cada conta que fazia atribuía ao lado a sua interpretação geométrica. E Caio realizou a decomposição espectral, em que manipula corretamente com autovalores complexos, ainda que tal conteúdo não costume ser ensinado no curso de Álgebra Linear II. O aluno não precisou encontrar a matriz formada por base para os autovetores complexos associados aos autovalores i e $-i$, já que a matriz $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}^4 = I$, o que pode ter disfarçado a provável falta de conhecimento do aluno sobre como trabalhar com espaços vetoriais complexos.

5.12 Questão 7 - item b

Determine A^{101}.

Tabela 5.19: Levantamento do número de Respostas

Correta	Incorreta	Em branco
9	1	4

Notemos que a maioria dos alunos responderam corretamente esta questão, sendo que o grupo dos nove alunos que tiveram êxito neste item (b), também o tiveram no item (a). Apenas um aluno (Marcel) acertou o item (a), através da multiplicação de matrizes, e deixou o item (b) em branco.

Tabela 5.20: Argumentos dos alunos que responderam corretamente

Desenvolvimento Algébrico correto	7
Visão geométrica correta	3

Chamamos de "desenvolvimento algébrico correto"o raciocínio usado de que $A^{101} = (A^4)^{25}.A$, que foi usado pela maioria dos alunos que resolveram esta questão.

Repare que se somarmos os tipos de argumentos usados pelos alunos que acertaram o item, a soma é 10, enquanto o esperado é que desse 9. Assim como no item (a), isto ocorreu porque um aluno (Caio) forneceu-nos dois argumentos, o algébrico e o geométrico.

Consideramos como resposta correta com argumento geométrico, a resposta de Luciano, que na verdade ao responder o questionário apenas colocou o resultado sem nada justificar e veio a explicar seu raciocínio durante a entrevista.

Apenas um aluno que fez a questão, chegou a um resultado equivocado (Ronaldo). O aluno tentou utilizar a decomposição espectral, mas sem nenhum sucesso, cometendo uma sucessão de erros.

Por fim, notemos que apenas três alunos usaram como argumento uma visão geométrica, enquanto que no item (a) foram cinco. Este número é baixo e enfatiza o quanto os alunos tendem a buscar resoluções algébricas, em que “podem confiar”. Isto é um reflexo de um ensino formal a partir de definições, teoremas e suas respectivas provas.

Capítulo 6

Conclusão

A partir da breve exibição de resultados temos evidências de que há uma grande dificuldade por parte dos alunos em abstrair o proceito que lhes é ensinado. Os alunos não foram capazes de transitar livremente entre conceito-processo-procedimento, o que é caracterizado por Gray e Tall como flexibilidade (apenas Lucio o fez, e Márcio deu-nos fortes indícios). Podemos constatar assim, uma fraqueza na construção destes por parte dos alunos.

Mais especificamente, os alunos não souberam reconhecer uma Transformação Linear. Apenas metade dos alunos citaram a propriedade da linearidade ao definir Transformação linear na questão 2, e a maioria não citou que seu domínio e contra-domínio são espaços vetoriais. A maioria dos alunos considerou que a função real do 1° grau $2x+3$ é equivocadamente uma transformação linear (6 acertos). Os alunos conseguiram, em sua maioria, gerar uma função de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$(10 acertos), mas não tiveram o mesmo êxito ao gerar função de P_2 em $M_{2\times 2}$ (5 acertos). A maioria não observa com cuidado o domínio e contra-dominio de uma função para caracterizá-la com transformação linear ou não (apenas 4 o fizeram). Tais fatos nos sugerem uma fraqueza no ensino da Álgebra Linear, que não está sendo eficiente quanto à compreensão dos proceitos abstratos.

Grande parte dos alunos tentou resolver as questões a partir de visões procedimentais, e muitas das vezes em que investiam em uma resposta conceitual, usavam conceitos equivocados, revelando despreparo frente ao tópico transformação linear.

Ressaltamos que este é um estudo qualitativo, que abrangeu um grupo seleto dos alunos bem sucedidos em matemática da UFRJ. Trabalhamos com catorze alunos, porém apenas foram encontrados quarenta e três alunos cursando Álgebra Linear II em 2010/01 que satisfaziam nosso critério. Logo, catorze de quarenta e três é representativo (33% dos selecionados), e apesar do número de alunos ser pequeno é expressivo. Esta constatação nos leva a questionar o ensino de Álgebra Linear, mesmo tendo consultado poucos alunos.

Dos catorze alunos, nove apontaram explicitamente a abstração presente no curso de Álgebra Linear como a maior dificuldade da disciplina. Outros quatro alunos citaram a falta de aplicação como um dificultador. Apenas quatro alunos preferiram o curso de Álgebra Linear ao de Cálculo I. Estes quatro alunos preferiram o curso de Álgebra Linear justamente porque gostaram do curso mais abstrato e teórico.

É preciso uma reflexão sobre que tipo de alunos queremos formar. Com a resposta em mente, uma reforma curricular poderia ser realizada, a fim de tornar nosso ensino mais pragmático e computacional (formando profissionais bons e pragmáticos, que foi o esforço americano a partir do LACSG) ou um ensino que dialogue mais com o aluno sobre conceitos delicados e que tanto custou a humanidade desenvolver (formando profissionais com maior embasamento teórico capazes de atuar no desenvolvimento da ciência). Cremos que a sociedade necessite de todo tipo de profissional. Logo, não se pode abrir mão de pessoas qualificadas para atuarem como agentes do crescimento tecnológico.

O grupo do LACSG propôs que houvesse um primeiro curso que usa matrizes como seu eixo principal para só depois ser introduzida a teoria da Álgebra Linear para espaços vetoriais quaisquer (e nem todos os alunos fariam obrigatoriamente este segundo curso). Nós julgamos esta proposta positivamente e pensamos que pode ser uma boa solução, embora ainda não se tenha provas de que o resultado de seu uso foi proveitoso ou não. Dubinsky afirma que apenas este semestre a mais para o amadurecimento da abstração matemática do aluno não é garantidamente suficiente.

O trabalho do grupo francês coordenado por Dorier aponta para outro problema: a inexistência de situação problema que os alunos possam utilizar em um primeiro curso de Álgebra Linear que dê origem ao desenvolvimento de suas principais questões. Logo, este fato continuaria afetando o segundo curso proposto pelo LACSG e é inegavelmente um grande obstáculo no ensino da Álgebra Linear.

É necessário repensar a ideia do potencial de aplicações de conceitos matemáticos no ensino e aprofundar um estudo histórico que suporte uma reflexão epistemológica para sermos mais compreensivos e sensíveis com as dificuldades que os nossos alunos encontram ao estudar Álgebra Linear.

Pensamos que este trabalho suporta muitos desdobramentos, visto que ainda há muito a ser pesquisado nesta área, que é nova dentro do Ensino da Matemática. Os dados e constatações aqui obtidos mostram que mesmo os “melhores”alunos têm dificuldades em assimilar proceitos em Álgebra Linear. Então naturalmente algumas perguntas surgem, podendo desencadear futuras pesquisas, como: relacionar as dificuldades dos alunos em Álgebra Linear com o ensino que tiveram anteriormente (no Ensino Médio), refazer o estudo com alunos de notas inferiores as do critério utilizado neste trabalho (a fim de buscar a existência de correlação ou não), estudo de novas metodologias de ensino (como um software interativo que permita aos alunos verem o que acontece com as operações da Álgebra Linear), estudo do próprio currículo brasileiro de Álgebra Linear e investigação de possíveis (e prováveis) dificuldades em outros tópicos.

Referências Bibliográficas

[1] BROUSSEAU, G. *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques.* Recgherches en Didactique des Mathématiques, v.7, n.2, pp. 33-115. Grenoble, 1986.

[2] CELESTINO, Marcos Roberto. *Ensino-aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90* PUC - São Paulo, 2000.

[3] DAVIS, P. J.;HERSH, R. *A Experência Matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

[4] DORIER, Jean-Luc. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.* França: La Pensée Sauvage Éditions, 1997, p. 291-297.

[5] DORIER, Jean-Luc. *État de l'art de la recherche en didactique- À propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire* França: Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 18, nº2, pp. 191 - 230, 1998.

[6] DORIER, Jean-Luc. et al *On the teaching of Linear Algebra.* Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 151-175.

[7] DUBINSKY, Ed *Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level*, in D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, A. Duane Porter, A. Watkins and W. Watkins (eds.). Resources for Teaching Linear Algebra, Mathematical Association of America, MAA Notes Volume 42, pp. 85-105, 1997.

[8] GRAY,Eddie ;TALL, David. *Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking.* PME 15, Assisi, 2 72-79, 1991.

[9] GRAY,Eddie ;TALL, David. *Duality, ambiguity e flexibility in successful mathematical thinking.* The jornal for research in mathematics education, 26(2), 115-141, 1994.

[10] HIEBERT,J.. *A Theory of Developing Competence with Written Mathematical Symbols.* In: Educational Studies in Mathematics. [S.l.]: Kluwer Academic Publishers, v. 19, 1988. p. 333-355.

[11] NISS, M.. *Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education.* Educational Studies in Mathematics, nº 40, pp. 1 -24, 1999.

[12] PAIS, L.C. *Transposição Didática.* In: Machado, S. et al. (eds.), Educação Matemática: uma introdução, pp. 13-42. São Paulo: PUC-SP, 2002.

[13] TALL, David *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof.* Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning. Ed. D. Grouws, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1992, p. 495-511.

[14] TALL, David *Thinking through three worlds of mathematics.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 4, 281288.

[15] TALL, DavidVINNER, S. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics. 12, pp. 151-157, 1981.

Anexo: Questionário Piloto

Perfil dos alunos

Foram feitas as seguintes perguntas aos entrevistados:

1. Nome:
2. Curso:
3. Você se considera um bom aluno em matemática?
4. Você gosta de matemática?
5. O que achou do curso de Álgebra Linear II?
6. Você gostou mais do curso de Cálculo I ou Álgebra Linear II?

Anderson

Anderson se considera um bom aluno em Matemática, pois afirma que sempre tirou ótimas notas no ensino médio, inclusive no vestibular. Gosta de matemática por ser uma matéria pela qual sempre se interessou. Sua impressão sobre o curso de Álgebra Linear é que foi um curso com muitas definições novas e pouca aplicabilidade. Preferiu o curso de Cálculo I, pois entendia melhor a proposta da disciplina, já que no curso de Álgebra Linear as coisas pareciam muito conceituais e pouco procedimentais.

No discurso de Anderson percebemos com clareza a separação de conceito e procedimento, embora o aluno não possua a percepção de mesmo no que ele considera mais conceitual existe uma dualidade procedimento-conceito. O aluno se refere à parte procedimental da Álgebra Linear, quando pensam na manipulação de matrizes, resolução de sistemas de equação linear...

Jonas

Jonas se considera um bom aluno e gosta de Matemática. Achou que o curso de Álgebra Linear conseguiu passar "de uma forma boa a matéria, embora ache que faltou exemplificar as aplicações da teoria". O aluno também preferiu o curso de Cálculo I, por achar que a matéria ministrada é mais objetiva que a de Álgebra Linear II. Afirmou ainda que a aula de Álgebra Linear, às vezes, ficava "subjetiva demais".

Pablo

Pablo é aluno da Engenharia Civil e se considera um bom aluno em Matemática, porque "realmente"tira boas notas. Tanto gosta de Matemática que chegou a pensar em cursar faculdade de Matemática quando estava escolhendo em que curso seguir. Gostou do curso de Álgebra Linear, pois achou a matéria interessante, principalmente, a que fugia de apenas fazer contas. Porém, preferiu o curso de Cálculo I, mesmo tendo gostado muito do curso de Álgebra Linear II. O aluno crê que esta predileção se dê por conseguir aplicar mais o Cálculo I nas outras matérias que cursa na Faculdade.

Fabiana

Fabiana cursa Engenharia - Ciclo Básico. Considera-se boa aluna em Matemática, pois tira boas notas e gosta da área do conhecimento, especialmente, Álgebra. Achou o curso de Álgebra Linear II ótimo, porém teve dificuldades com o professor, mas acha que conseguiu aprender bem a matéria. Embora tenha dito que gosta especialmente de Álgebra, preferiu o curso de Cálculo I também, pois julga que esta matéria necessita de um grande raciocínio matemático e despertou um grande interesse nela.

Danilo

Danilo cursa o Ciclo Básico da Engenharia. Acha que é bom aluno em Matemática, por sempre ter tirado notas altas. Diz que “adora”matemática, que para ele é “o melhor método de analisar o mundo a nossa volta”. Achou o curso Álgebra Linear II ruim. Acrescenta que o curso de Álgebra Linear foi dado fora de ordem. Ainda assim, o aluno prefere o curso de Álgebra Linear ao de Cálculo, porque acredita que foi onde aprendeu a aplicar métodos matemáticos a coisas simples.

Bianca

Bianca é estundante de Engenharia - Ciclo Básico. Considera-se boa aluna em Matemática e gosta da disciplina. Achou o curso de Álgebra Linear interessante por aprofundar uma matéria que já havia visto no ensino médio de forma superficial. A aluna gostou mais do curso de Cálculo I, por ter se interessado mais pelo conteúdo desta disciplina.

Vinicius

Vinícius é estudante de Ciências Atuariais. Considera-se bom aluno, mas ressalta que é mais esforçado do que bom aluno. Gosta de matemática. Na verdade, todas as matérias exatas são suas prediletas. Achou a teoria de Álgebra Linear um pouco confusa e sentiu uma certa dificuldade em compreendê-la, porém julga que sua aplicação é simples e de fácil entendimento. O aluno, gostou mais do curso de Cálculo I, por achar esta matéria mais exata, que trata de problemas e não somente aplicações.

Carla

Carla é aluna do Ciclo Básico e se considera também uma boa aluna, embora enfatize que se vê mais como uma aluna dedicada. Gosta de Matemática, pois é uma matéria muito objetiva, em sua opinião, de forma que ou se aprende ou não se aprende. A estudante também cursa Nutrição. Carla achou o curso de Álgebra Linear um pouco “chato”, principalmente, porque tinha que fazer muitas contas. Ainda assim, gostou igualmente de Álgebra Linear e Cálculo, julgando que cada um tem sua parte “legal” e sua parte “chata”.

Questão 1

Letra a: Dê três exemplos de espaços vetoriais.

Fabiana: "$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{Z}$ ".

Bianca: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$.

Anderson: $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$

As respostas de Bianca e Fabiana são semelhantes, exceto pelo fato de Fabiana ter se equivocado ao dizer que o conjunto dos números inteiros é um espaço vetorial. Suas respostas são pouco criativas e limitadas.

Jonas: $\mathbb{R}^n, \{(x, y)|y = 2x\}, \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 0, 0)\}$.

Pablo:

- Reta: $\langle(1, 0, 0)\rangle$
- Plano: $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$
- Espaço Tridimensional: $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$"

Danilo: A reta, o plano e o sólido.

Para Danilo o sólido não precisa ser "fechado". Disse que sólido é o espaço definido por três vetores independentes.

Carla:"$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$."

Vinícius: $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n$.

Letra b: Um polinômio pode ser um vetor? E uma matriz?

aluno	polinômio	matriz
Jonas	sim	não
Bianca	sim	sim
Fabiana	não	sim
Pablo	sim	sim
Anderson	não	não
Danilo	sim	sim
Vinícius	não	sim
Carla	sim	sim

Anderson: "Um vetor não, nenhum dos dois, pois vetor é algo que possui direção, sentido e tamanho."

Após a entrevista, ele mudaria sua resposta: "Se esta pergunta estivesse contextualizada em Espaços Vetoriais, aí sim já que existe Espaço Vetorial dos polinômios de graus finitos e matrizes de ordem $n \times m$, $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Danilo: "Pois, vector e matriz são relações e incógnitas (seus coeficientes e expoentes) com outras incógnitas, e o polinômio é justamente o conjunto matemático que se faz presente na incógnita (coeficiente e expoente)."

Pedi à Danilo que explicasse melhor o que ele entendia sobre vetor e ele afirmou que "vetor é a relação entre duas incógnitas, onde matematicamente, não existe incógnita com expoente igual a 2 ou superior."

Vinícius acredita que um polinômio não pode ser um vetor "pois vetor representa a distância de um ponto ao outro, sendo desta forma representado por coordenadas. Já a matriz pode ser escrita através de polinômios, uma vez que se trata de uma tabela de números, os quais podem ser somados, ou subtraídos ou até multiplicados por um escalar ou uma matriz."

Carla acrescenta como justificativa para o fato de que polinômios e matrizes poderem ser considerados vetores se dá "porque a soma de dois vetores é um vetor e de duas matrizes também."E ainda que "o produto de um número por um vetor dá um vetor e por uma matriz, continua dando uma matriz". De forma não tão formal, a aluna está descrevendo as propriedades de fechamento para a soma e produto, que são necessárias para um conjunto ser um Espaço Vetorial. A estudante ainda faz uma representação (através de desenho) da soma de dois vetores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Questão 2

Podemos dizer que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 3$ é uma transformação linear? Justifique a partir da definição e por uma característica de transformação linear. Essa função se classifica como função afim e/ou linear?

Pablo: "Não é uma transformação linear, pois $f(2x) \neq 2f(x)$. A função é afim (linear)."

Fabiana: "Sim, pois a função depende de uma variável, encontrando assim diversos resultados. Essa função é afim e linear."

Bianca: "Sim, pois a função f, para qualquer x real, será um número real; formando pares ordenados de números reais. A função é linear."

Jonas: "Pela definição de TL é fechada pela soma e pelo produto com escalar: $f(\lambda x) = 2\lambda + 3 \neq \lambda f(x) = 2\lambda x + 3\lambda$. Dizemos que essa transformação é afim, uma translação da transformação linear."

Anderson: "Não, pois T. Linear leva zero no zero e $f(0) = 2.0 + 3 = 3 \neq 0$". O aluno chama atenção para dois fatos: que levar zero no zero é uma definição e que é uma característica da TL ter que passar na origem.

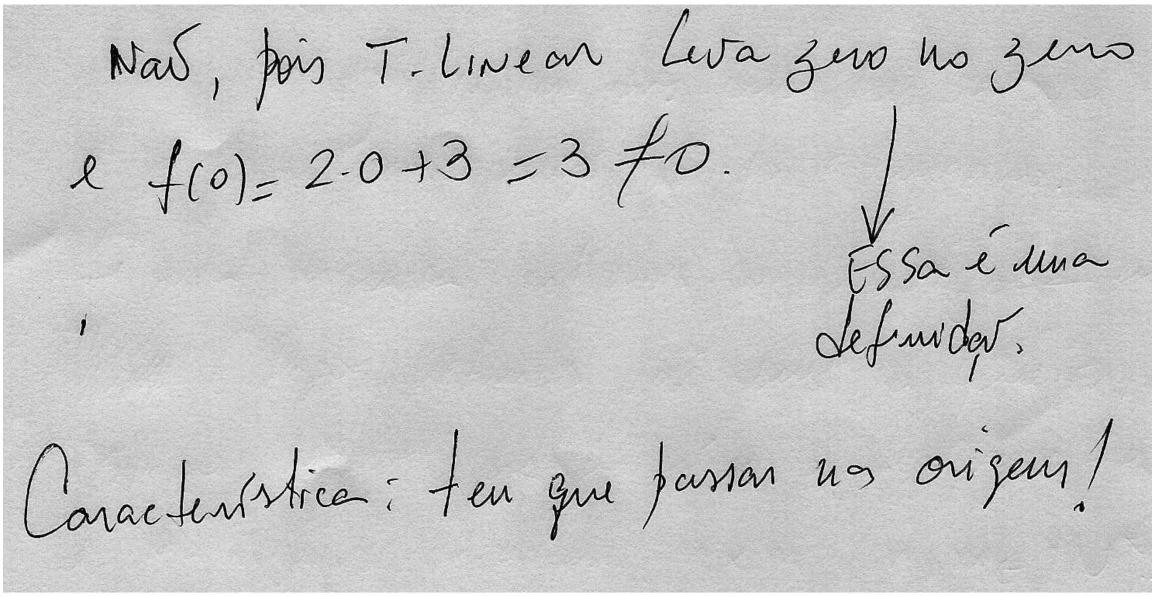


Figura 6.1: Resposta de Anderson à questão 2.

Daniel: "Não é TL, $T(au) \neq aT(u)$: $T(1) = 5$, $T(2) = 7 \neq 2T(1) = 10$. Uma transformação deste jeito nunca seria linear, pois há um termo independente da incógnita (+3)."

Já **Vinícius** considerou equivocadamente o domínio como sendo o $\mathbb{R}^2$, ainda que isto não tenha alterado muito sua resposta. O aluno conclui que a aplicação não é uma transformação linear, pois não é fechada para a soma e afirma que a função é afim.

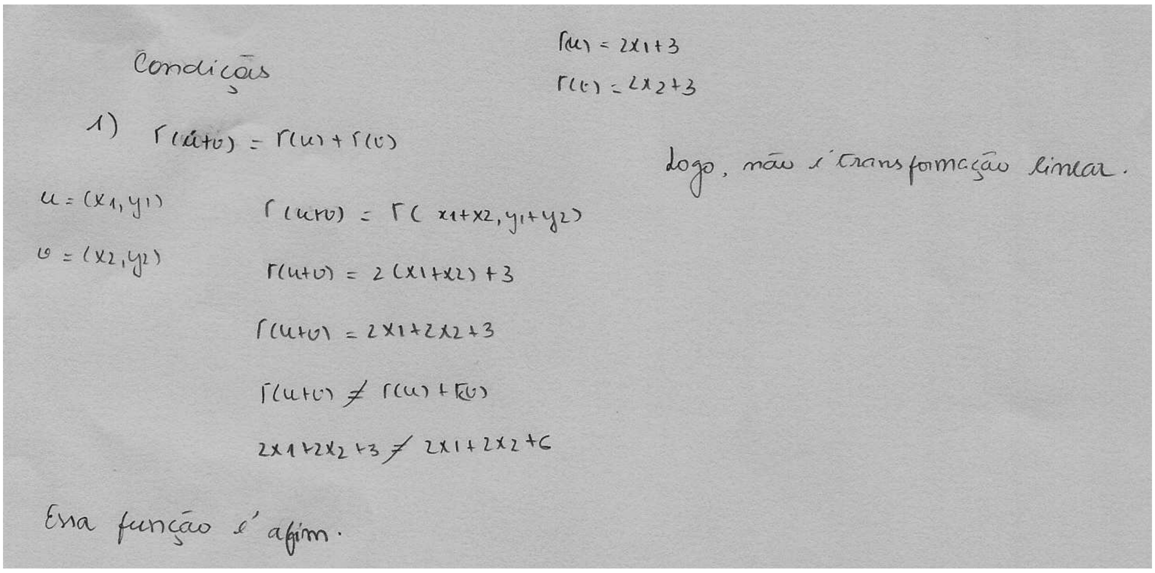


Figura 6.2: Resposta de Vinícius à questão 2.

Carla faz um esboço do gráfico da função dada e chega a conclusão de que não é um Transformação Linear e sua justificativa é que o gráfico não passa na origem. Afirma erroneamente que a função é linear, pois "é do 1º grau, seu gráfico é uma reta". Diz que é afim também.

Questão 3

`Seja` $P_2 = \{$`conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a 2` $=$ $\{a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2\}$. $T : P_2 \to P_2$ `tal que` $(Tp)(x) = 2p(x)$ `é uma transformação linear?`

Jonas: “Sim, pois é fechada pela soma e pelo produto com escalar: $T(x_1 + \alpha x_2) = 2x_1 + 2\alpha x_2 = 2x_1 + \alpha 2x_2 = T(2x_1) + \alpha T(2x_2)$.”

Fabiana: “Sim, pois modifica o polinômio de modo que $T(x)$ seja linearmente dependente de P_2.”

Pablo: “Sim, é uma transformação linear. Conclui isso usando as propriedades de linearidade.”

Bianca: “$T(a_2x^2+a_1x+a_0) = 2(a_2x^2+a_1x+a_0) = 2a_2x^2+2a_1x+2a_0 = a_2^{'}x^2+a_1^{'}x+a_0^{'}$, Como $a_2^{'}x^2 + a_1^{'}x + a_0^{'}$ está dentro do conjunto P_2, então $T(x) = 2x$ é uma transformação linear $T : P_2 \to P_2$.”

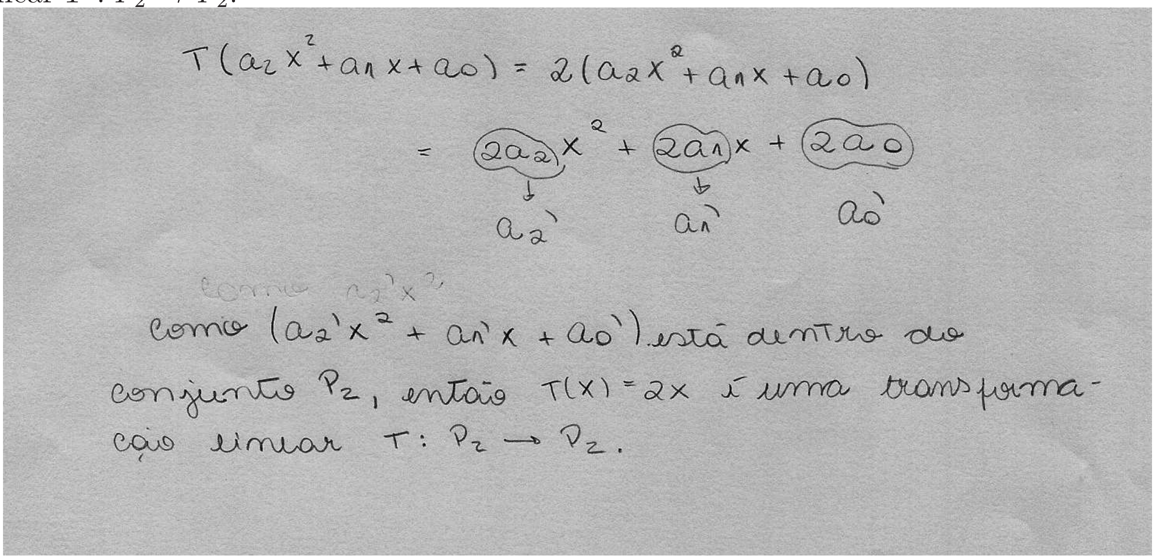


Figura 6.3: Resposta de Bianca à questão 3.

Anderson: “Sim, pois $T(0) = 2.0 = 0$ e $T(u + \lambda v) = 2(u + \lambda v) = 2u + 2\lambda v = 2.u + 2.\lambda v = T(u) + T(\lambda v) = T(u) + \lambda T(v)$.”

Daniel: “Apenas será TL se $a_0 = 0$, pois é um termo independente da incógnita, logo pode-se pegar qualquer a $(T(au) = aT(u))$, que não será TL pois a_0 não foi alterado.”

Daniel durante a entrevista acrescenta: “Se existe termo independente da incógnita na função, você pode alterá-lo por qualquer constante **a** que o termo independente não se alterará. Logo, não é mantida a proporção $T(au) = aT(u)$.”

O estudante **Vinícius**, embora se atrapalhe um pouco com a nomenclatura, responde com êxito que se trata sim de uma Transformação Linear. Chega a esta conclusão através de muito cálculos para verificação das propriedades de linearidade.

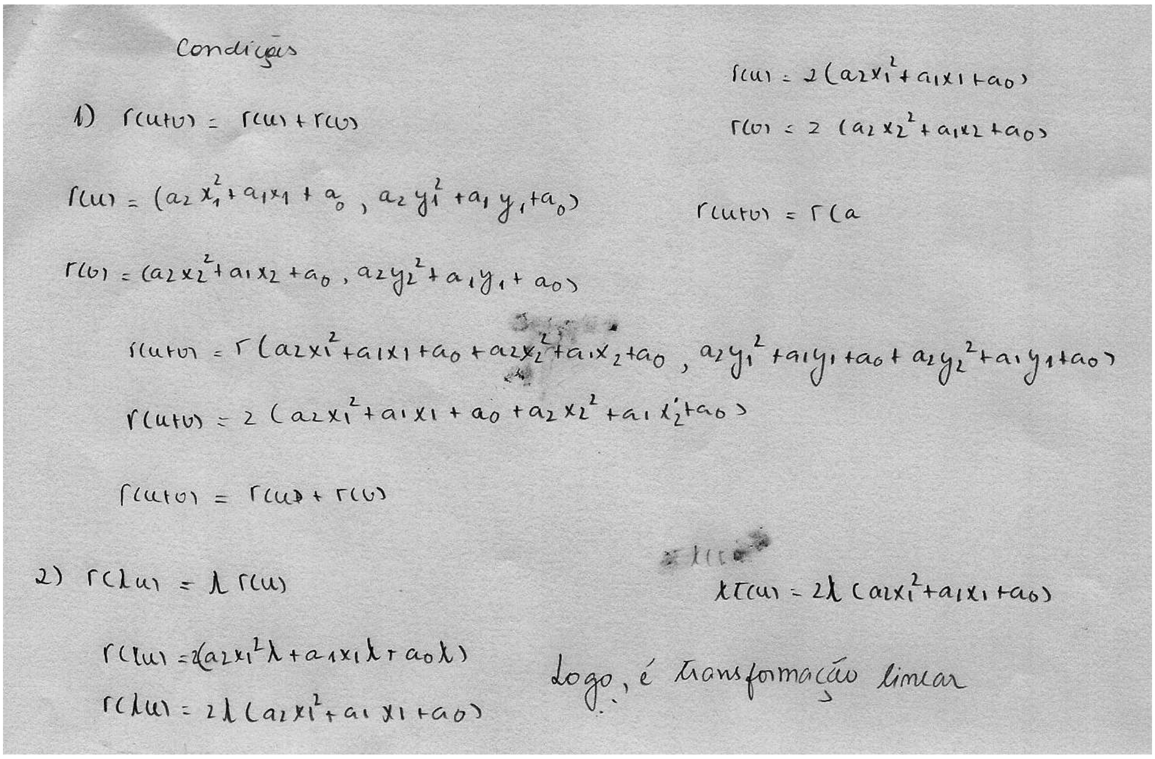


Figura 6.4: Resposta de Vinícius à questão 3.

Carla primeiramente responde que a aplicação não é Transformação Linear, porque “quando fizer $\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2)$ vai ter problema com o a_0”. Depois a aluna, se equivocou mais ainda ao tentar consertar sua resposta. Afirmou que a aplicação era sim uma Transformação Linear, “porque o gráfico é uma reta”.

Questão 4

Letra a: Gere uma aplicação que leve elementos de $\mathbb{R}^2$ em elementos de $\mathbb{R}^3$.

Jonas: "T:$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x,y) = (x+y, -x, 2y)$". O aluno fez também a representação matricial. Jonas sabia a propriedade da linearidade presente na definição de Transformação Linear. Também soube corretamente gerar a aplicação pedida. É interessante observar que a aplicação escolhida por ele envolve soma, simétrico e multiplicação, o que foge dos exemplos mais triviais.

Bianca:

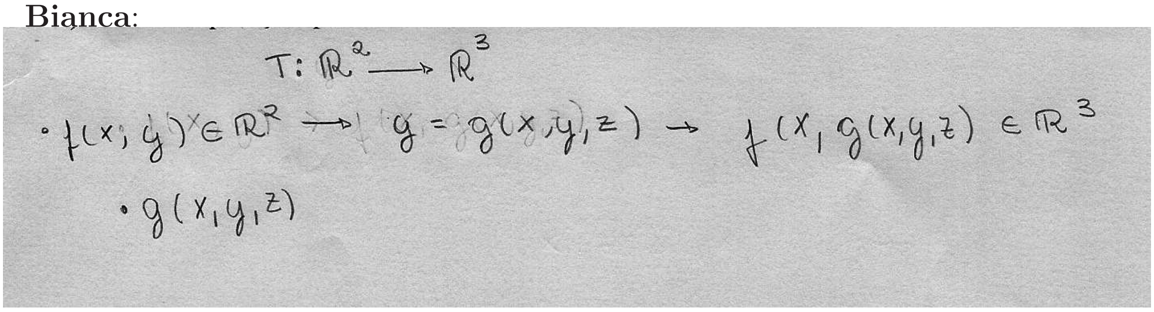


Figura 6.5: Resposta de Bianca à questão 4a.

Pablo: "Uma transformação linear que envolve integral. $T(\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3), T(x) = \int x dx$."Pablo, embora tenha definido corretamente as propriedades de Transformação Linear, se confundiu ao gerar a aplicação pedida. O aluno afirmou em entrevista que a integral elevaria o grau do "x", já que estava passando de $\mathbb{R}^2$ para o $\mathbb{R}^3$.

Fabiana: "$f(x,y) = 2x + y, \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, onde $f(x,y) \to g(x,y,z)$ e $g(x,y,z) = 5x + 3y + 7z$."

Anderson: "$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $f(x,y) = (x,y,0)$"

Anderson ainda acrescenta que $f(0,0) = (0,0,0)$ e que a função é linear em cada coordenada.

Danilo não conseguiu fazer a questão. O aluno não consegue imaginar tal aplicação e sequer entende bem o que é uma aplicação. Mesmo eu lhe explicando o que é, o aluno não se julga capaz de fazer a questão.

Vinícius gera corretamente uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$, porém não especifica seu domínio e contra-domínio, o que é aceitável, já que já está escrito nno enunciado. A aplicação gerada pelo aluno é: $T(x,y) = (2x, x-y, y)$.

É interessante que o aluno tenha respondido adequadamente, já que sua definição de Transformação Linear era equivocada. O aluno definiu-a como: "Consiste em um conjunto de coordenadas, nas quais podemos formar a partir de uma coordenada predisposta concedida. Essas transformações ocorrem segundo a lei formada. Exemplo: T(x,y) = (2x,y)." Logo, o aluno não tem a definição correta, mas está familiarizado com exemplos, o que provavelmente lhe ajudou a gerar a aplicação pedida.

Carla responde de forma simples e correta a seguinte aplicação: $A(x, y) = (x, y, x)$.

Letra b: Gere uma aplicação qualquer que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$ (conjunto das matrizes 2×2).

Jonas e **Danilo** deixaram em branco.

Apenas **Pablo** respondeu corretamente:

Pablo: $T : P_2 \to M_{2x2}$, com $T(ax^2 + bx + c) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a \end{bmatrix}$

O aluno embora não tenha respondido corretamente a letra a, na letra b, com simplicidade, gerou uma aplicação desejada. Além de ser uma aplicação, também é uma transformação linear.

Já **Fabiana** e **Bianca** fizeram exatamente a mesma coisa: escreveram o polinômio como produto de duas matrizes!

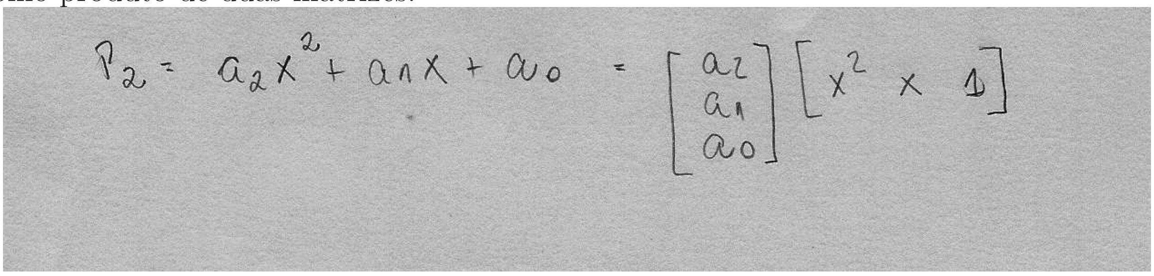


Figura 6.6: Resposta de Bianca à questão 4b.

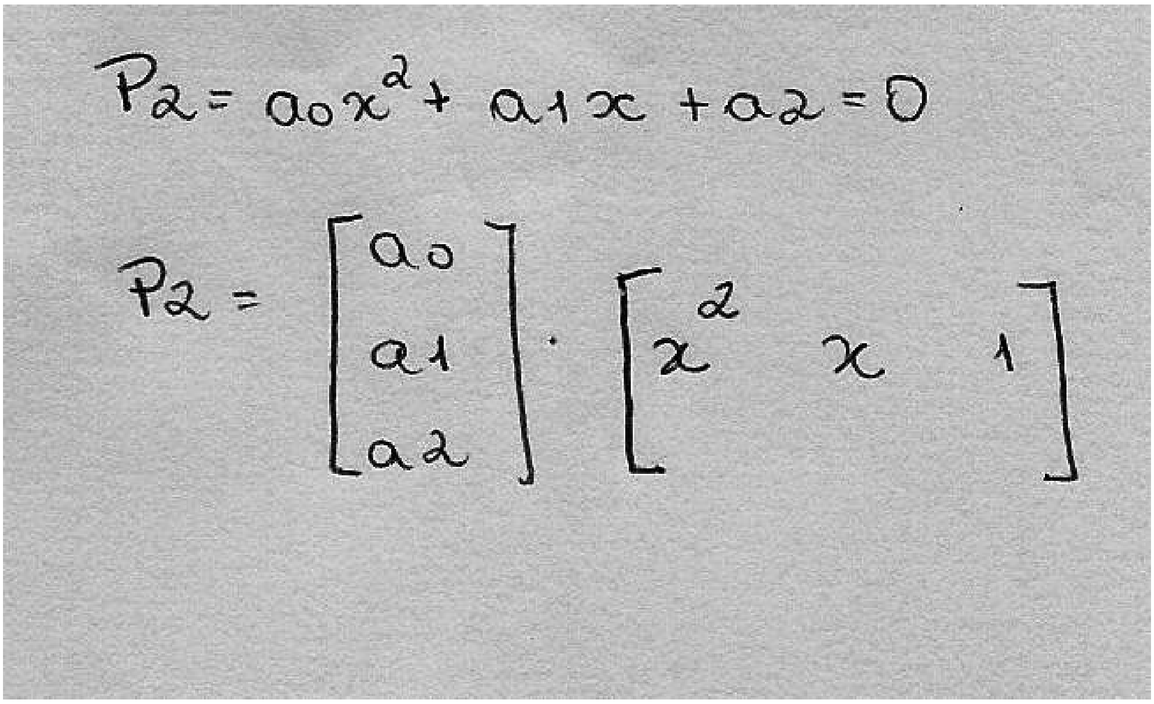


Figura 6.7: Resposta de Fabiana à questão 4b.

Já **Anderson**, faz o seguinte:

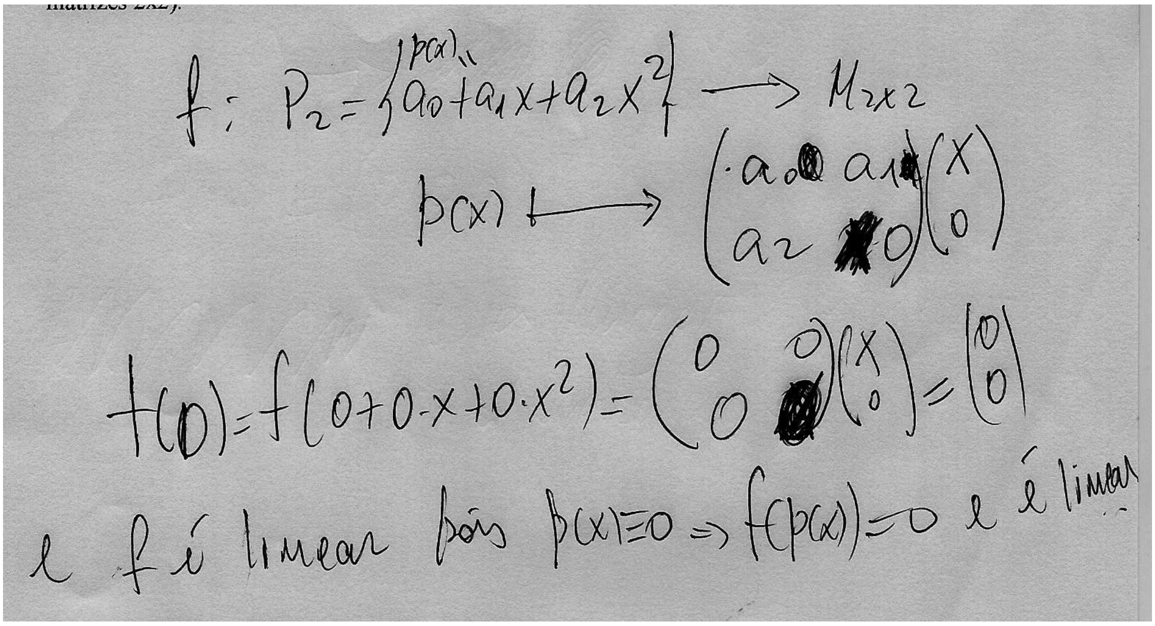


Figura 6.8: Resposta de Anderson à questão 4b.

A resposta de **Anderson** está totalmente equivocada, porque multiplicou por uma matriz $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, uma hipotética resposta que já estaria correta. O aluno se confundiu por pensar que a aplicação necessariamente tem uma lei de formação algébrica em que a variável "x"esteja presente.

Carla demonstrou uma vaga noção de saber o que deveria fazer, porém não o fez. Deixou indicado que seria algo do tipo: $A(a_0 + a_1x + a_2x^2) = \begin{bmatrix} -- & -- \\ -- & -- \end{bmatrix}$

A aluna compreende bem que a imagem da aplicação deve ser uma matriz 2x2, porém não consegue abstrair como poderiam ser suas entradas. Vale lembrar que Carla conhece a definição de Transformação Linear e foi capaz de responder corretamente o item a. Logo, a dificuldade que enfrentou foi realmente a de abstrair o conceito.

Letra c: A aplicação que construiu na letra (b) é uma transformação linear? Caso não seja, gere uma transformação linear que leve elementos de P_2 em elementos de $M_{2\times 2}$.

Além de **Danilo**, Vinícius e Jonas, Carla também deixou este item em branco.

Apenas **Pablo** respondeu corretamente, porém a justificativa é pobre, pois apenas responde que sim e repete as propriedades da linearidade, sem sequer aplicá-las a Transformação Linear feita.

Já **Fabiana** e **Bianca** não souberam responder. Fabiana apenas disse que sim, sem justificar. Bianca, repete exatamente a mesma representação que havia feito na letra b.

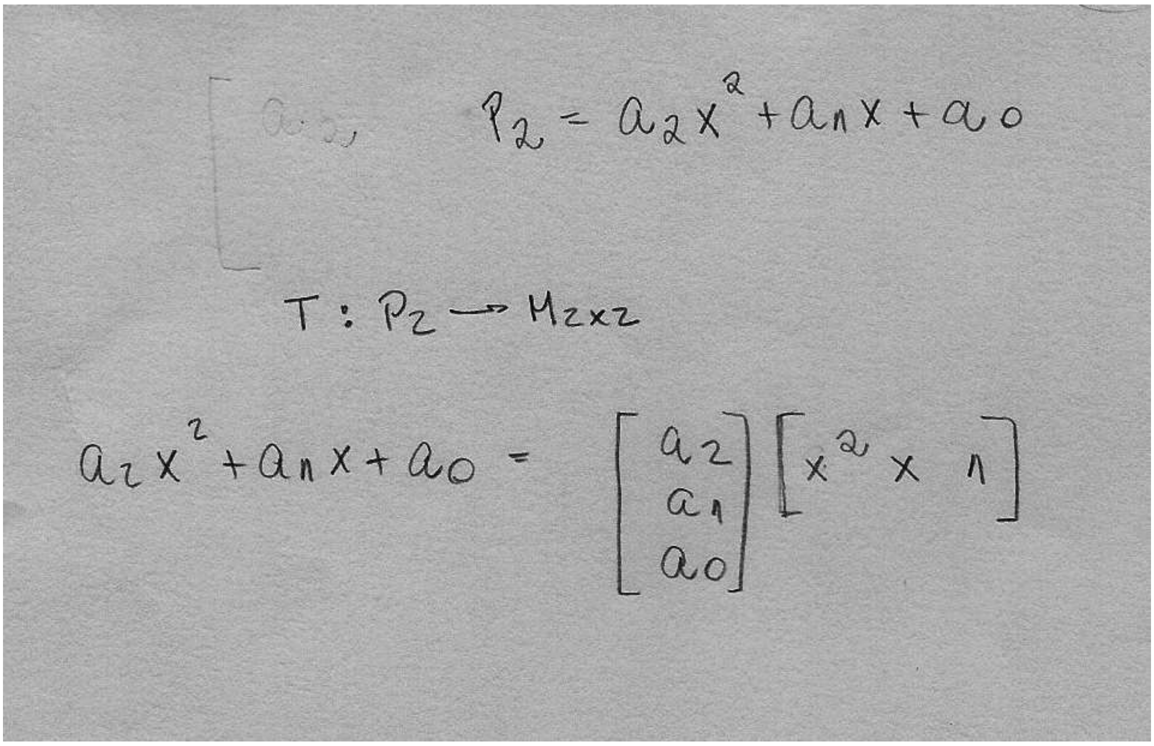


Figura 6.9: Resposta de Bianca à questão 4c.

Anderson responde que sua suposta aplicação é uma Transformação Linear, porque $f(0) = 0$ e reproduz a propriedade da linearidade em que $f(u + \lambda v) = f(u) + (v)$. Mas, o que o aluno criou nem mesmo é uma aplicação, logo sua resposta não faz sentido.

Vinícius:

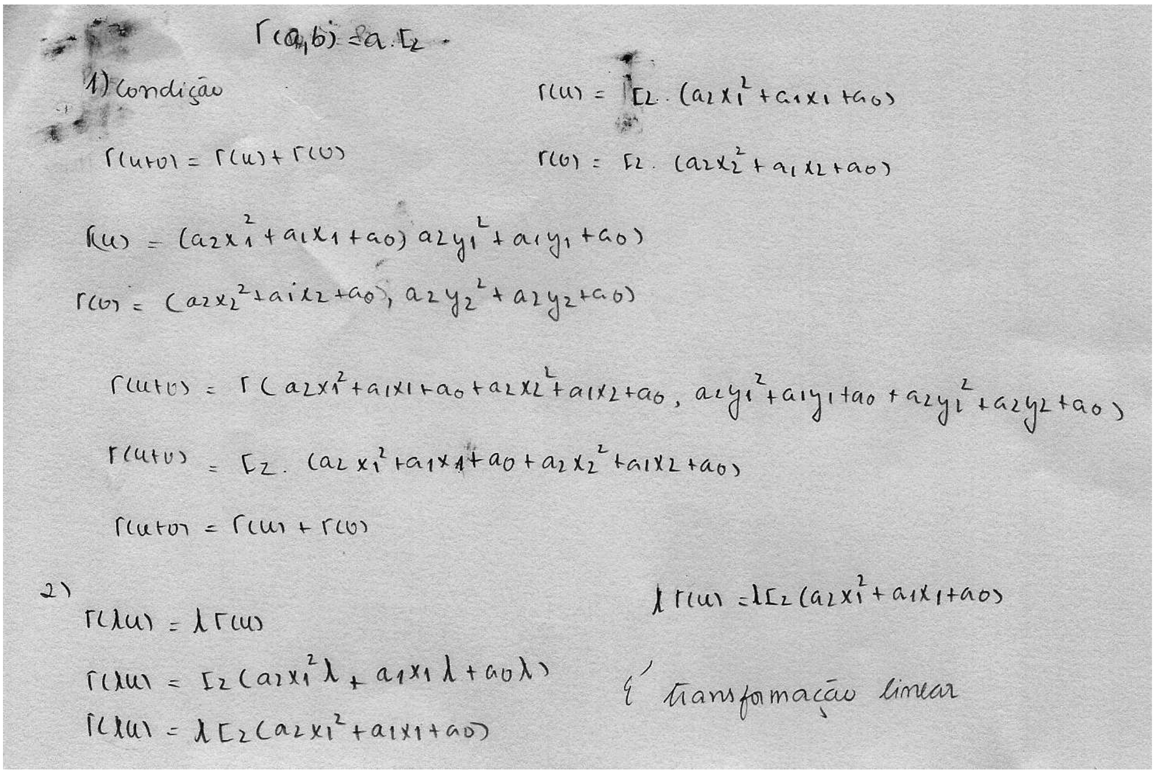


Figura 6.10: Resposta de Vinícius à questão 4c.

Questão 5

Seja uma aplicação $T : A \to B$ tal que $T(x) = x$, em que A é o conjunto dos números inteiros e B é o conjunto dos números reais. T é uma transformação linear?

Fabiana: "Não pois não tem como fazer uma transformação de um espaço menos complexo para um espaço mais complexo, somente o inverso."

Bianca: "Não. Pois há números que não são inteiros e satisfazem a aplicação $T(x) = x$."

Jonas: "Pela definição de linearidade a TL acima satisfaz: $T(x + \lambda y) = T(x) + T(y), x, y \in A, \lambda \in \mathbb{R}$.

Anderson: "Não, pois T(A) deve ser um subespaço vetorial de $\mathbb{R}$ e $T(A) = \mathbb{N}$"

Danilo: "Sim, pois T(au)= aT(u)."

Ao revelar a Danilo que sua resposta estava errada, ele pensou e esboçou o seguinte: "0,9999... = 1. Mas, se eu multiplicar por 20, isso fica diferente. Ah, sei lá..."

Vinícius responde que a aplicação identidade de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}$ é uma transformação linear e reproduz as propriedades de linearidade, sem perceber que ao fazer $T(\lambda u)$, como λ é um escalar qualquer(embora o aluno não tenha mencionado este fato), λu pode não pertencer ao domínio da aplicação que é o conjunto dos inteiros. Ele ainda escreveu que "qualquer inteiro somado a um inteiro ou multiplicado por um escalar dará um número real". Isto é verdade, porém pode haver falha no domínio como foi dito anteriormente.

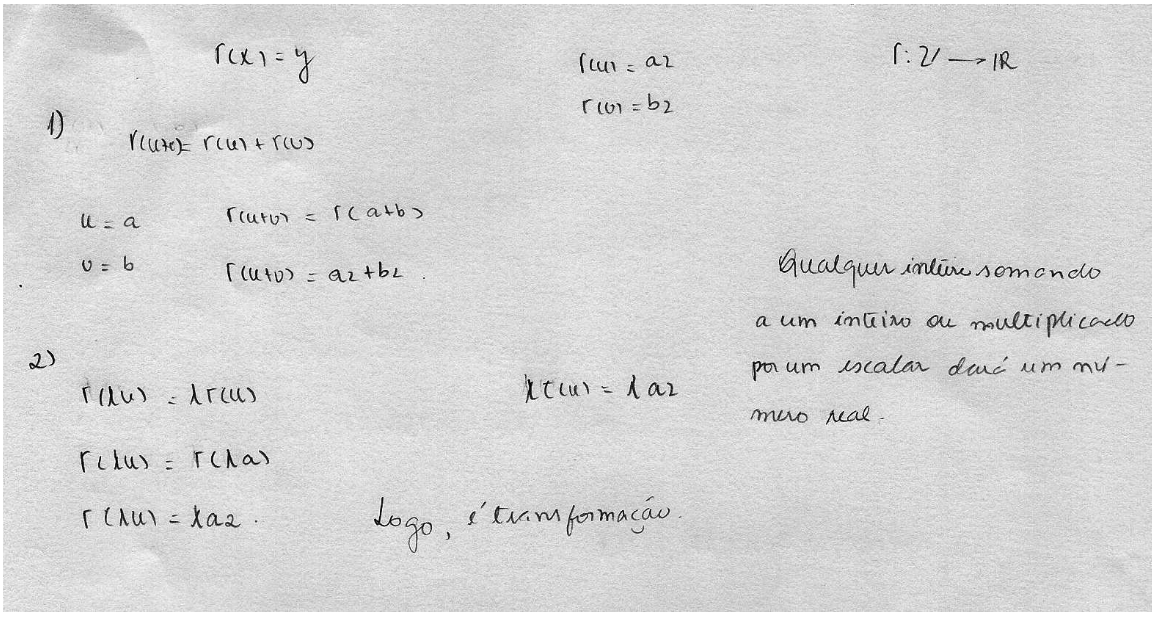


Figura 6.11: Resposta de Vinícius à questão 5.

Carla mais um vez desenha o gráfico que representa a aplicação. Responde que é uma Transformação Linear sim, pois o gráfico é uma reta. Ela mesma acrescenta duas informações: diz que "na verdade, são vários pontos, em formato de reta"e observa que o gráfico passa na origem.

Questão 6

`Defina (com suas palavras) transformação linear.`

Jonas: "Definimos Transformação Linear qualquer transformação que receba um vetor e retorne outro vetor, satisfazendo às condições de linearidade (fechada pela soma e pelo produto), na prática, vale dizer: f é TL de $D \to W$ se $f(d_1) + \lambda f(d_2), d_1, d_2 \in D$ e $f(d_1), f(d_2) \in W, \lambda \in \mathbb{R}$."

A resposta de Jonas está correta. Só é interessante como ele utiliza a expressão "na prática". Quando lhe indaguei a razão de ter se expressado assim, o aluno me respondeu que é porque quando está fazendo exercícios sempre basta verificar estas propriedades. O aluno demonstra assim uma boa assimilação do processo da Transformação Linear, assim como descreve bem a definição, porém não possui uma compreensão do proceito, pois ....

Bianca: "Transformação Linear é uma função, na qual o seu contra-domínio e sua imagem são especificados e devem compreender por todo o seu conjunto, sem qualquer solução fora dele."

A definição fornecida por Bianca não tem nenhum valor matemático. Ao questioná-la sobre o que ela quis dizer, percebi que a aluna não tinha sequer o conceito de função assimilado.

Fabiana: "Transformação linear é a maneira de mudar uma função a partir da outra, mudando de um espaço vetorial para o outro e assim encontrando funções linearmente independentes da primeira."

Fabiana, assim como Bianca deram indícios de não saber do que se trata uma Transformação Linear, apenas sabe que tem algo a ver com Espaços Vetoriais e função, mas sem compreender bem sua definição e nem é capaz de reproduzi-la. A aluna confunde a definição de Transformação Linear com a de um conjunto linearmente dependente.

As alunas Bianca e Fabiana, não alcançaram, então, nem o aspecto conceitual nem o procedural do proceito em questão.

Pablo: "Transformação Linear é uma operação que gera alterações nos elementos, conservando suas propriedades lineares. Respeita as propriedades:

- $T(\alpha x) = \alpha T(x), \alpha \in \mathbb{R}$
- $T(\alpha x + \beta) = \alpha T(x) + T(\beta), \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$
- $T(0) = 0$"

Pablo descreve corretamente as propriedades de linearidade (até excessivamente), mas não menciona nada a respeito do domínio e contra-domínio da Transformação. Também não cita que se trata de uma função. O foco da definição que o aluno apresenta está no processo.

Danilo: "É uma função que mantém a proporção entre o que está servindo de incógnita e o resultado da função."

Anderson: "Uma Transformação Linear T é uma aplicação que é linear e leva o zero no zero". O aluno explica o que é linear: "Linear é: $T(u+\lambda v) = T(u)+\lambda T(v)$, $u \in D(T)$ e $v \in CD(T)$".

A resposta de Anderson próxima a definição formal, porém faltando alguns detalhes. O aluno não explicitou que domínio e contra-domínio são espaços vetoriais e nem disse a que conjunto pertence λ. Também disse que a Transformação Linear é uma aplicação, ao invés, de ser uma função. Quando lhe perguntei sobre isto, ele disse que aplicação e função eram a mesma coisa, o que demonstra um equivoco na formação de conceitos anteriores.

Vinícius: "Consiste em um conjunto de coordenadas, nas quais podemos formar a partir de um coordenada predisposta concedida. Essas transformações ocorrem segundo a lei formada. Exemplo: $T(x, y) = (2x, y)$.

O aluno tem uma visão de Transformação Linear limitada ao conjunto $\mathbb{R}^n$, pois apenas se refere às coordenadas. Talvez o motivo desta limitação esteja no fato de que muitos professores insistem em só dar estes exemplos. Além disto, vincula Transformação Linear a uma lei de formação algébrica. Em momento algum, ele menciona a necessidade de se manter a linearidade da Transformação. Deste modo, percebemos uma ausência de conhecimento da definição e apenas uma lembrança de exemplos vistos.

Carla: "Transformação Linear é uma função bem comportada que passa na origem! Possui as seguintes propriedades:

- $T(u+v) = T(u) + T(v)$

- $T(\alpha u) = \alpha T(u)$"

A aluna ainda exemplifica com a função identidade de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ e seu gráfico, salientando que seu gráfico passa pela origem. Carla, demonstra um conhecimento razoável do conceito e do processo, mas não se preocupou em explicitar qual é o domínio e o contra-domínio e qual a natureza de α.