Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos

Roberta Fonseca dos Prazeres

PEMAT-UFRJ
Dezembro / 2010

Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos

por

Roberta Fonseca dos Prazeres

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Tatiana Marins Roque

Rio de Janeiro

Dezembro/2010

Métodos Clássicos e Qualitativos no Estudo do Problema dos Três Corpos

por

Roberta Fonseca dos Prazeres

Orientadora: Tatiana Marins Roque

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Tatiana Marins Roque, D.Sc., PEMAT-UFRJ (Orientadora)

Gert Schubring, D.Sc., IM-UFRJ

Penha Maria Cardoso Dias, Ph.D., IF-UFRJ

Sérgio Bernardo Volchan, Ph.D., PUC-RJ

Rio de Janeiro

Dezembro/2010

Prazeres, Roberta Fonseca dos.
Métodos clássicos e qualitativos no estudo do problema dos três corpos/ Roberta Fonseca dos Prazeres- Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

ix, 113f., 30 cm.
Orientadora: Tatiana Marins Roque.
Dissertação (mestrado)- UFRJ /IM. Programa de pós-graduação em Ensino de Matemática, 2010.
Referências: f. 110-113.

1. Física Matemática-História. I. Roque, Tatiana Marins. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar forças para terminar esse trabalho.

A minha família: minha querida mãe Suelí, meu pai Roberto, minha irmã Talita e meu amado irmão canino Bob, por estarem comigo em todas as horas.

À Tatiana Roque, por aceitar me orientar nesta dissertação e por suas instruções, que sempre me foram de extrema valia.

Ao professor Gert Shubring, pela ajuda no alemão e pelo texto do Whittaker, que me ajudou muito durante a pesquisa.

À Gisele e à Samantha, pela amizade que me concedem e por me aturarem em todos os meus momentos de maluquices e reclamações, que não são raros.

À Leilane, 90% culpada pela minha entrada no mestrado e à Emília, pela companhia durante o final do bacharelado, sempre me apoiando a seguir em frente.

À Ana Luísa que, não sei como, aguentou meus momentos de "tô morrendo, vou desistir" durante a elaboração desse trabalho. Muito obrigada por tudo.

Ao Diego, pelo grande apoio na reta final.

Aos colegas e professores do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática do IM-UFRJ.

À CAPES, pela bolsa de estudos.

Aos membros da banca examinadora, por avaliarem este trabalho.

Le savant n'étudie pas la nature parce que c'est utile, il l'étudie parce qu'il y prend plaisir, et il y prend plaisir parce qu'elle est belle. Si la nature n'était pas belle elle ne vaudrait la peine d'être connue, la vie ne vaudrait pas la peine d'être vécue.

(Henri Poincaré, *Science et méthode*, 1908)

RESUMO

MÉTODOS CLÁSSICOS E QUALITATIVOS NO ESTUDO DO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

Roberta Fonseca dos Prazeres

Dezembro/ 2010

Orientadora: Tatiana Marins Roque

A partir do século XVII, muitos cientistas procuraram demonstrar se a lei da gravitação universal era capaz de promover um entendimento completo do universo. Esse problema ficou conhecido como problema dos *n* corpos. Apesar de o problema dos dois corpos, que envolve um sistema de equações diferenciais de ordem doze, ser totalmente integrável, o problema dos três corpos se mostrou muito mais complicado. Durante os dois séculos seguintes, astrônomos e matemáticos procuraram desenvolver métodos analíticos que fornecessem aproximações para as coordenadas dos três corpos. A partir da segunda metade do século XIX, começou a ficar claro que os métodos tradicionais, que procuravam resolver o problema por meio de séries infinitas, não eram suficientes. A partir de 1881, Henri Poincaré (1854-1912) publica uma série de trabalhos introduzindo novas ferramentas, de natureza qualitativa, que permitiriam um novo tratamento da questão. Esta pesquisa culminou com a publicação, em 1890, de um artigo que se tornou célebre pela quantidade de novas ferramentas que introduz. Para Poincaré, um entendimento global do comportamento de todas as soluções de um sistema era mais importante do que o comportamento local de soluções descritas analiticamente. Essa visão proporcionou, posteriormente, o desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Palavras-chave: problema dos três corpos, métodos qualitativos, Poincaré.

ABSTRACT

CLASSICAL AND QUALITATIVE METHODS IN THE STUDY OF THE THREE BODY PROBLEM

Roberta Fonseca dos Prazeres

December/ 2010

Advisor: Tatiana Marins Roque

From the seventeenth century, many scientists have sought to show that the law of universal gravitation was able to promote a complete understanding of the universe. This problem became known as the *n* body problem. Although the two body problem, which involves a system of differential equations of order twelve, be fully integrated, the three body problem, a problem of order eighteen, has showed be much more complicated. During the next two centuries, astronomers and mathematicians have sought to develop analytical methods that provide approximations for the coordinates of the three bodies. Since the second half of the nineteenth century it had become clear that the traditional methods, which sought to solve the problem by infinite series, were not enough. Henri Poincaré (1854-1912) publishes a series of papers, beginning in 1881, where he introduces new tools of qualitative nature, which would allow a new treatment of the issue. This research has led to the publication, in 1890, of an article that became famous. For Poincaré, a comprehensive understanding of the behavior of all solutions of a system was more important than the local behavior of solutions analytically described. This vision has provided, ultimately, the development of the Theory of Dynamical Systems.

Keywords: three body problem, qualitative methods, Poincaré.

SUMÁRIO

Agradecimentos .... **iv**

Resumo .... **vi**

Abstract .... **vii**

1 Introdução **1**

2 As equações do problema dos três corpos e os métodos clássicos utilizados na tentativa de resolvê-lo **5**

2.1 Equações do problema 5

2.2 Soluções particulares para o problema dos três corpos e o problema restrito dos três corpos 12

2.3 Cálculo das perturbações 16

2.4 Algumas questões referentes ao uso de séries infinitas 23

2.5 A Mecânica Celeste no século XIX 25

3 O estudo de Poincaré sobre o problema dos três corpos 43

3.1 Introdução ao estudo qualitativo de equações diferenciais 43

3.2 Primeiros trabalhos de Poincaré sobre o problema dos três corpos 47

3.3 A competição do rei Oscar II 48

3.4 *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* 53

3.4.1 Invariante Integral 56

3.4.2 Soluções periódicas e expoentes característicos 58

3.4.3 Soluções periódicas de sistemas Hamiltonianos 60

3.4.4 Soluções assintóticas 63

3.4.5 Soluções assintóticas de sistemas Hamiltonianos 65

3.4.6 Estudo das superfícies assintóticas 66

3.4.7 A questão do erro de Poincaré 70

3.4.8 Resultados diversos.. 72

3.4.9 A divergência das séries de Lindstedt.. 73

3.4.10 Não existência de novas integrais para o problema restrito dos três corpos...... 79

3.4.11 Tentativas de generalização para o problema dos *n* corpos.............................. 79

3.4.12 O problema restrito dos três corpos em *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*.. 80

4 A recepção de *Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique* pela comunidade científica e sua influência em pesquisas posteriores 83

4.1 Opiniões dos membros da comissão do concurso 84

4.1.1 A elaboração do relatório do trabalho vencedor 86

4.2 A recepção do trabalho de Poincaré pela comunidade dos astrônomos 90

4.3 *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste* 95

4.4 Desenvolvimentos no estudo do problema dos três corpos 98

4.5 Outros contemporâneos de Poincaré..101

4.6 Resumo sobre a importância de *Sur le Problème des trois corps et les équations de la Dynamique* em pesquisas posteriores 104

5 Conclusão...107

Referências 110

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Apesar de haver muitas análises históricas sobre as contribuições de Henri Poincaré (1854-1912) em Mecânica Celeste, há uma ausência de textos que explicitem as inovações de seus trabalhos em relação aos trabalhos de astrônomos e matemáticos de sua época, relatando também as práticas anteriores que ele utilizou. O objetivo dessa dissertação é fornecer uma pequena contribuição para esse assunto, por meio de um panorama geral sobre quais métodos eram utilizados na tentativa de resolver o problema dos três corpos quando Poincaré começou suas pesquisas e como ele tratou a questão.

Mas do que se trata o problema dos três corpos? Desde a publicação, em 1687, do *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, do físico Isaac Newton (1642-1727), são conhecidas as leis que governam o movimento dos corpos celestes no espaço. A partir de então, os cientistas procuraram verificar se a teoria gravitacional de Newton era capaz de promover um entendimento completo do movimento dos corpos celestes no espaço. Ou seja, dada *n* partículas no espaço sob mútua atração gravitacional, sendo dadas suas condições iniciais, é possível determinar seus movimentos posteriores?

O problema dos dois corpos não era difícil de ser entendido, mas o problema dos três corpos se mostrou muito mais complicado. As dificuldades relacionadas ao problema podem ser comprovadas por números: entre 1750 e o começo do século XX, mais de 800 trabalhos, muitos de grandes matemáticos, foram publicados sobre o assunto.[1]

Com o tratamento dos problemas da dinâmica por métodos analíticos, distintos dos métodos geométricos usados por Newton, as investigações sobre o problema dos três (ou mais) corpos levaram a duas direções de pesquisa: procurar teoremas gerais sobre o movimento dos corpos ou procurar uma boa aproximação para um movimento particular em um determinado período de tempo.

Devido às necessidades da navegação, por exemplo, era importante conhecer o movimento da Lua e vários cientistas se propuseram a estudá-lo. O matemático francês

[1] Whittaker (1937, p. 339).

Alexis-Claude Clairaut (1713-1765) foi o primeiro a anunciar uma solução aproximada para o problema lunar, em *Du Système du Monde dans les Principes de la Gravitation Universelle*, de 1747, utitilizando aproximações para as soluções em forma de séries infinitas.

Em 1748, Leonhard Euler (1707-1783) começou a desenvover um método para calcular as perturbações nos movimentos planetários, em *Theoria motuum planetarum et cometarum*. No ano de 1772, no trabalho *Essai sur le problème des trois corps*, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) mostrou que o problema dos três corpos poderia ser reduzido de um sistema de equações diferenciais de ordem dezoito para um sistema de ordem sete. Carl Jacobi (1804-1851), no ano de 1843, em *Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps*, encontrou mais uma integral para o problema. Jacobi, junto com William Rowan Hamilton (1795-1865), foi responsável pelo desenvolvimento de novos métodos de integração de equações diferenciais que, como veremos, foi importante no estudo do problema dos três corpos pelo francês Poincaré.

A partir da metade do século XIX, o objetivo era melhorar as aproximações de soluções de equações diferenciais dadas por séries infinitas. Além disso, procurava-se também eliminar destas os termos seculares, que são os termos que crescem ou decrescem infinitamente com o tempo e que levam a uma configuração inteiramente nova do sistema.

O astrônomo Charles-Eugène Delaunay (1816-1872), nos tratados de 1860 e 1867, *Théorie du Mouvement de la Lune*, foi o primeiro a conseguir uma eliminação total dos termos seculares no problema da teoria lunar, mas as séries que utilizou para aproximar as soluções convergiam muito lentamente. Outro nome importante é o do americano George Hill (1838-1914) que, em artigos de 1877 e 1878, encontrou soluções periódicas para o problema dos três corpos. Seus trabalhos sobre estas soluções influenciaram muitas pesquisas posteriores, inclusive as de Poincaré.

Na mesma época, Hugo Gyldén (1841-1896), astrônomo finlandês, estudou um modelo que consistia do Sol e mais dois planetas, que ele designava como perturbante e perturbado. O processo usado por ele para obter as séries que forneciam a posição do planeta perturbado era extremamente complicado e foi provado posteriormente, por Poincaré, que essas séries divergiam. O astrônomo sueco Anders Lindstedt (1854-1939) também se interessou pela questão. Ele obteve soluções em séries trigonométricas para o problema dos três corpos, assumindo que era possível escolher constantes de integração de maneira que se pudesse assegurar a convergência de tais séries.

No capítulo 2, intitulado *As equações do problema dos três corpos e os métodos clássicos utilizados na tentativa de resolvê-lo*, apresentaremos as equações gerais do problema dos três corpos, assim como algumas tentativas realizadas com o intuito de solucioná-lo. Faremos uma breve exposição dos métodos analíticos desenvolvidos para tratar do problema, muito usados e conhecidos antes de Poincaré.

No capítulo 3, *O estudo de Poincaré sobre o problema dos três corpos*, o objetivo é expor a nova proposta desenvolvida por Poincaré. Para ele, um entendimento global do comportamento de todas as soluções de um sistema era mais importante do que o comportamento local de soluções dadas analiticamente. O trabalho de Poincaré, *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*,[2] vencedor do prêmio do rei Oscar II, teve como foco uma versão simplificada do problema dos três corpos: o problema restrito dos três corpos.

No problema restrito dos três corpos são consideradas três massas: a primeira muito grande, uma segunda massa pequena em relação à primeira e uma terceira massa desprezível. As duas massas maiores realizam um movimento circular em torno do seu centro comum de gravidade e a terceira se move no mesmo plano que as outras duas massas, sendo que seu movimento é perturbado pelas massas maiores. Porém, sua presença não exerce nenhuma influência sobre os movimentos das duas massas maiores. Dessa forma, conhecemos os movimentos das massas maiores, pois o problema dos dois corpos já havia sido resolvido, e o que falta então é determinar as coordenadas do corpo de massa desprezível.

Embora o enunciado do problema seja simples, Poincaré demonstrou que não era possível encontrar uma solução exata para a posição do terceiro corpo. Em seu estudo, veremos que Poincaré se deparou com um comportamento muito complexo das órbitas, devido à presença do que ele denominou mais tarde *órbitas homoclínicas*, e que hoje é um dos modos de se caracterizar um sistema caótico.

No último capítulo, intitulado *A recepção de Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique pela comunidade científica e sua influência em pesquisas posteriores*, forneceremos um panorama sobre a repercussão do trabalho de Poincaré no meio científico. Além das opiniões dos membros da comissão do prêmio do rei Oscar II, citaremos também comentários de outros contemporâneos de Poincaré.

A memória *Sur le problème de trois corps et les équations de la dynamique* foi aprimorada e estendida, dando origem aos três volumes de *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, publicados entre os anos 1892 a 1899, sobre os quais apresentamos um breve resumo. Também discutiremos a influência de Poincaré no estudo de outros

[2] A versão final desse trabalho foi publicada na revista *Acta Mathematica* 13, em 1890.

matemáticos importantes no desenvolvimento do que chamamos hoje teoria dos sistemas dinâmicos, [3] como Jacques Hadamard (1865-1963) e George David Birkhoff (1884-1944).

Estes trabalhos de Poincaré deram origem à moderna Teoria dos Sistemas Dinâmicos. Algumas de suas vertentes continuam a pesquisa sobre os problemas da Mecânica Celeste por métodos analíticos e qualitativos. Alguns fenômenos descobertos por Poincaré antecipam o que se conhece hoje como comportamento caótico dos sistemas dinâmicos. Não chegaremos até o período em que o estudo dos sistemas dinâmicos se constituiu como uma teoria, mas veremos que, nos seus primórdios, problemas físico-matemáticos motivaram seu desenvolvimento.

[3] A primeira vez que o termo *sistema dinâmico* foi utilizado no lugar de *equação diferencial*, foi em 1912, por George Birkhoff, no artigo *Quelques théorèmes sur le mouvements des systèmes dynamique*.

Capítulo 2

AS EQUAÇÕES DO PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS E OS MÉTODOS CLÁSSICOS UTILIZADOS NA TENTATIVA DE RESOLVÊ-LO

O problema dos três corpos pode ser enunciado da seguinte forma: dadas três partículas no espaço se movendo sob mútua atração gravitacional e suas condições iniciais, determinar seus movimentos subsequentes. O sistema de equações que descreve o problema dos três corpos é composto por nove equações diferenciais de segunda ordem, ou seja, um sistema de ordem dezoito. Como esse sistema não pode ser totalmente integrado, as tentativas em resolvê-lo passaram a envolver o uso de séries infinitas, que forneciam aproximações para as soluções do sistema.

Ao longo deste capítulo, iremos descrever as equações para o problema dos três corpos, as integrais conhecidas para tal problema e os métodos utilizados para o cálculo de soluções aproximadas. Iremos concluir que, apesar de o problema ter um enunciado simples, ele é extremamente complexo.

2.1 As equações do problema

Algumas simplificações são necessárias para que possamos chegar às equações gerais do problema. Iremos assumir que os corpos são esféricos e que se atraem como se toda sua massa estivesse concentrada em seu centro, ou seja, que eles se atraiam como massas pontuais.

Consideremos as massas representadas por m_1, m_2, m_3 e sejam as coordenadas dos corpos m_i representadas por x_i, y_i e z_i, referentes a um sistema de eixos fixos, que tomaremos como x, y, z. Seja a distância entre os centros de m_i e m_j representada por r_{ij} e k^2 uma constante que depende das unidades empregadas.

A lei da gravitação universal estabelece que uma partícula é atraída por outra com uma força diretamente proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional ao quadrado de suas distâncias. Logo, utilizando a lei da gravitação universal, as componentes da força que atua em m_1, paralela ao eixo *x*, são

$$-k^2 \frac{m_1 m_2}{\left(r_{12}\right)^2} \cdot \frac{\left(x_1 - x_2\right)}{r_{12}} \text{ e } -k^2 \frac{m_1 m_3}{\left(r_{13}\right)^2} \cdot \frac{\left(x_1 - x_3\right)}{r_{13}}$$

com equações correspondentes aos eixos y e z. A força total que age no corpo m_1, paralela ao eixo *x*, é dada pela soma dessas componentes.

Pela 2ª Lei de Newton, que é o princípio fundamental da dinâmica, temos que a taxa de variação temporal do momento *p= m.v* é igual à força resultante *F* que atua sobre a partícula, onde *m* é sua massa e *v* é a sua velocidade. Ou seja, considerando o deslocamento de um corpo indicado por χ, temos

$$F = \frac{dp}{dt} = m\frac{dv}{dt} = m\frac{d^2\chi}{dt^2}.$$

Supondo que os corpos estejam se movendo sob mútua atração gravitacional, então a força resultante em cada corpo será igual à força gravitacional que age sobre ele. Assim obtemos, igualando as forças resultantes à gravitacional, que

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k^2 m_1 m_2 \frac{\left(x_1 - x_2\right)}{\left(r_{12}\right)^3} - k^2 m_1 m_3 \frac{\left(x_1 - x_3\right)}{\left(r_{13}\right)^3}$$

cuja integral fornece a coordenada x_1 e a velocidade $\frac{dx_1}{dt}$ do primeiro corpo.

Para cada corpo chegamos a equações similares e, portanto, as equações gerais do problema dos três corpos são:

$$\begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = -k^2 m_i \displaystyle\sum_{j=1}^{3} m_j \dfrac{\left(x_i - x_j\right)}{\left(r_{ij}\right)^3} \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = -k^2 m_i \displaystyle\sum_{j=1}^{3} m_j \dfrac{\left(y_i - y_j\right)}{\left(r_{ij}\right)^3} \\ m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = -k^2 m_i \displaystyle\sum_{j=1}^{3} m_j \dfrac{\left(z_i - z_j\right)}{\left(r_{ij}\right)^3} \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\left(i = 1,...,3;\, j \neq i\right)$$

A solução desse problema depende, portanto, da integração de um sistema composto por nove equações diferenciais de segunda ordem, ou seja, de um sistema de ordem dezoito. A ordem do sistema pode ser reduzida para a ordem doze.

Vejamos como esse processo é explicado por Tisserand (1889) e Moulton (1914), duas referências históricas importantes em suas respectivas épocas, que descrevem o problema de modo similar.

Somando as coordenadas x_1, x_2 e x_3, e repetindo o processo para y_1, y_2 e y_3 e depois para z_1, z_2 e z_3, obtemos as três equações

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = 0 \\ \sum_{i=1}^{3} m_i \dfrac{d^2 z_i}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Tais equações podem ser integradas duas vezes e, então, temos

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} m_i x_i = A_1 t + B_1 \\ \sum_{i=1}^{3} m_i y_i = A_2 t + B_2 \\ \sum_{i=1}^{3} m_i z_i = A_3 t + B_3 \end{cases} \qquad (1.2)$$

onde A_j e B_j são constantes de integração.

Ou seja, se os corpos não estão sujeitos a outras forças que as atrações mútuas, seu centro de massa se move em linha reta.[4] Essas integrais reduzem a ordem do problema em seis unidades e são conhecidas como integrais do centro de massa.

O sistema pode ter a ordem reduzida ainda mais. Multiplicando x_1 por $-y_1$, y_1 por $-y_2$, z_1 por $-y_3$, x_2 por x_1, y_2 por x_2 e z_2 por x_3 e, posteriormente adicionando essas expressões, obtemos

[4] Dado um sistema de corpos com massas $m_1,\ldots,m_n$ e com coordenadas $(x_1, y_1, z_1),\ldots,(x_n, y_n, z_n)$, o centro de massa dos corpos é definido pelas coordenadas $x_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$, $y_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ e $z_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$.

$$\sum_{i=1}^{3} m_i x_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} - \sum_{i=1}^{3} m_i y_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = 0 .$$

Através de procedimentos similares, realizando uma mudança cíclica das variáveis, duas outras equações são obtidas. Tais equações podem ser integradas, portanto

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} m_i \left(y_i \frac{dz_i}{dt} - z_i \frac{dy_i}{dt} \right) = C_1 \\ \sum_{i=1}^{3} m_i \left(z_i \frac{dx_i}{dt} - x_i \frac{dz_i}{dt} \right) = C_2 \\ \sum_{i=1}^{3} m_i \left(x_i \frac{dy_i}{dt} - y_i \frac{dx_i}{dt} \right) = C_3 . \end{cases} \tag{1.3}$$

As equações anteriores representam as integrais de área e reduzem em três a ordem do problema. As expressões em (1.3) são conhecidas como as integrais de área, pois, à medida que um raio vetor se desloca de um ponto fixo até uma partícula em movimento, ele descreve uma superfície que é chamada de velocidade areal em relação a esse ponto.

Seja uma partícula se movendo no plano *xy* e ΔA a área do triângulo *OPQ* percorrida pelo raio vetor no intervalo de tempo Δt. Na figura 1.1, consideramos o ângulo $< ROP = \Delta\theta$ e $< POS = \theta$, então $\Delta A = \frac{r'.r}{2} sen(\Delta\theta)$ e

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r.r'}{2} \frac{sen(\Delta\theta)}{\Delta\theta} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} . \tag{1.4}$$

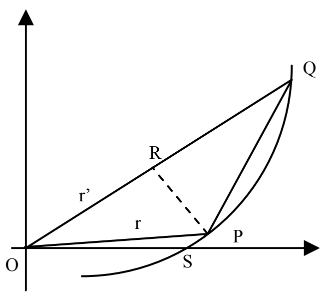

Figura 1.1

Adaptada de Mouton (1914, p. 15).

À medida que o ângulo $\Delta\theta$ diminui, a razão da área do triângulo para a do setor tem como limite a unidade. Além disso, o limite de r' é r e o limite $\dfrac{sen(\Delta\theta)}{\Delta\theta}$ é 1. Assim, reescrevemos a equação (1.4) como

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

que é a expressão da velocidade areal. Utilizando coordenadas retangulares através das expressões

$$r=\sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \tan\theta=\frac{y}{x}$$

temos

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right).$$

Se o movimento está no espaço tridimensional, temos

$$\begin{cases}\dfrac{dA_{xy}}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(x\dfrac{dy}{dt}-y\dfrac{dx}{dt}\right)\\[2mm] \dfrac{dA_{yz}}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(y\dfrac{dz}{dt}-z\dfrac{dy}{dt}\right)\\[2mm] \dfrac{dA_{zx}}{dt}=\dfrac{1}{2}\left(z\dfrac{dx}{dt}-x\dfrac{dz}{dt}\right).\end{cases}$$

Portanto, os parênteses na equação (1.3) são as projeções das velocidades areais dos corpos.

Com as integrais do centro de massa, reduzimos a ordem do problema em seis unidades. Através das integrais de área, a ordem do problema é reduzida então de doze para nove.

Vamos agora efetuar um procedimento que permite mais uma redução na ordem do problema dos três corpos. A função potencial do sistema é dada pela expressão

$$V=\frac{1}{2}k^2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{m_i m_j}{r_{ij}}. \qquad (i\neq j)$$

Logo, podemos reescrever o sistema (1.1) como

$$\begin{cases} m_i \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{\partial V}{\partial x_i} \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{\partial V}{\partial y_i} \\ m_i \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{\partial V}{\partial z_i}. \end{cases} \tag{1.5}$$

$$(i = 1,2,3)$$

Multiplicando as equações de (1.5) por $\dfrac{dx_i}{dt}$, $\dfrac{dy_i}{dt}$ e $\dfrac{dz_i}{dt}$, respectivamente, e adicionando em relação a i, temos

$$\sum_{i=1}^{3} m_i \left(\frac{d^2 x_i}{dt^2}\frac{dx_i}{dt} + \frac{d^2 y_i}{dt^2}\frac{dy_i}{dt} + \frac{d^2 z_i}{dt^2}\frac{dz_i}{dt} \right) = \sum_{i=1}^{3} m_i \left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y_i}\frac{dy_i}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z_i}\frac{dz_i}{dt} \right). \tag{1.6}$$

Como V é uma função somente de x_i, y_i e z_i, então o lado direito de (1.6) é a derivada total de V em relação a t. Integrando (1.6), encontramos

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} m_i \left\{ \left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2 \right\} = V + c. \tag{1.7}$$

O lado esquerdo dessa equação representa a energia cinética do sistema, e o lado direito é a energia potencial adicionada a uma constante. A função potencial V é o negativo da energia potencial U do sistema e representando a energia cinética por T, chegamos, portanto, à expressão $T - V = T + U = c$. Assim, a soma das energias potencial e gravitacional é constante, daí a integral (1.7) ser conhecida como integral de energia.

Essas dez integrais, seis do centro de massa, indicadas em (1.2), três integrais de área (1.3) e a integral da energia (1.7) são conhecidas como as dez integrais clássicas do problema dos três corpos.[5] Essas dez integrais já eram conhecidas por Euler e permitem, portanto, passarmos de um sistema de ordem dezoito para um de ordem oito.

Mas o problema pode ainda ser reduzido para a sétima ordem. Desde que o tempo apareça nas equações somente por meio de seu diferencial dt, essa variável pode ser

[5] Essas dez integrais clássicas também são encontradas no caso geral, ou seja, no problema dos *n* corpos. Em 1887, Heinrich Bruns (1848-1919) demonstrou que as únicas integrais que envolvem as coordenadas e velocidades algebricamente e que não envolvem o tempo explicitamente são as integrais clássicas.

eliminada por meio da utilização de uma das variáveis dependentes como uma variável independente.[6]

Jacobi, em 1843, conseguiu realizar mais uma redução na ordem do problema. O procedimento utilizado por Jacobi, que já havia sido indicado anteriormente por Lagrange, em *Essai sur le problème des trois corps*, de 1772, é conhecido como *eliminação dos nós*.

Sejam m a massa do Sol, m_1 e m_2 a massa de dois planetas, (ξ, υ, ζ), $(\xi_1, \upsilon_1, \zeta_1)$ e $(\xi_2, \upsilon_2, \zeta_2)$ as coordenadas dos três corpos m, m_1 e m_3 com relação ao centro de massa. Supondo que o centro de massa se encontra em repouso, ele obtém

$$\begin{cases} m\xi + m_1\xi_1 + m_2\xi_2 = 0 \\ m\upsilon + m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = 0 \\ m\zeta + m_1\zeta_1 + m_2\zeta_2 = 0 \end{cases}$$

o que lhe permite escrever

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta x_1 \\ \xi_1 = \alpha_1 x + \beta_1 x_1 \\ \xi_2 = \alpha_2 x + \beta_2 x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \upsilon = \alpha y + \beta y_1 \\ \upsilon_1 = \alpha_1 y + \beta_1 y_1 \\ \upsilon_2 = \alpha_2 y + \beta_2 y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \zeta = \alpha z + \beta z_1 \\ \zeta_1 = \alpha_1 z + \beta_1 z_1 \\ \zeta_2 = \alpha_2 z + \beta_2 z_1. \end{cases}$$

As seis constantes α_i, β_i são escolhidas de maneira a satisfazer as relações

$$\begin{cases} m\alpha + m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 = 0 \\ m\beta + m_1\beta_1 + m_2\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Logo, Jacobi realizou uma mudança linear de variáveis que muda a configuração do sistema, obtendo um novo sistema, constituído por seis equações diferenciais de segunda ordem, similares às equações do sistema (1.1). Essas equações representam as coordenadas de dois corpos, chamados por ele de *fictícios*.

Supondo que a intersecção comum dos planos das órbitas dos dois corpos esteja em um plano chamado de plano invariante, Jacobi substitui no sistema de equações diferenciais as coordenadas retangulares dos corpos fictícios por outras variáveis, através das expressões

[6] Whittaker (1899, p. 122).

$$\begin{cases} x = r\left(\cos\Omega\cos\upsilon - \operatorname{sen}\Omega\cos i\operatorname{sen}\upsilon\right) \\ y = r\left(\operatorname{sen}\Omega\cos\upsilon - \cos\Omega\cos i\operatorname{sen}\upsilon\right) \\ z = r\operatorname{sen} i\operatorname{sen}\upsilon \\ x_1 = r_1\left(\cos\Omega\cos\upsilon_1 - \operatorname{sen}\Omega\cos i_1\operatorname{sen}\upsilon_1\right) \\ y_1 = r_1\left(\operatorname{sen}\Omega\cos\upsilon_1 - \cos\Omega\cos i_1\operatorname{sen}\upsilon_1\right) \\ z_1 = r_1\operatorname{sen} i_1\operatorname{sen}\upsilon_1 \end{cases}$$

onde $\left(x, y, z\right)$ e $\left(x_1, y_1, z_1\right)$ são as coordenadas dos corpos fictícios, r e r_1 são os raios que ligam a origem do sistema aos corpos, υ e υ_1 as distâncias dos nós ascendentes ao plano de suas órbitas, i e i_1 as inclinações dos planos de suas órbitas em relação ao plano invariante e Ω o ângulo formado pela intersecção das órbitas dos dois corpos com o eixo x ou longitude do nó ascendente comum.

Jacobi mostra que o ângulo Ω pode ser obtido por meio da fórmula

$$d\Omega = \tan\upsilon.\frac{di}{\operatorname{sen} i}$$

o que se pode fazer por meio de uma simples integração. Logo, ele reduz a ordem do sistema em uma unidade por meio da eliminação da longitude do nó ascendente Ω, daí o nome do processo ser conhecido como eliminação dos nós.

Assim, o uso das dez integrais clássicas, somadas as duas reduções que mostramos, faz com que o problema dos três corpos tenha a ordem reduzida de dezoito para seis.

2.2 Soluções particulares para o problema dos três corpos e o problema restrito dos três corpos

Devido às dificuldades encontradas na tentativa de resolver as equações diferenciais relativas ao problema dos três corpos, os matemáticos começaram a investigar o problema dos três corpos sob várias condições especiais.

Euler, em *Theoria motuum lunae, novo methodo pertractata*, e Lagrange, em *Essai sur le problème des trois corps*, ambos de 1772, obtiveram soluções particulares do problema dos três corpos. As soluções particulares obtidas aqui são aquelas para as quais as configurações geométricas dos corpos continuam inalteradas com relação ao tempo, ou seja, a configuração apenas sofre uma rotação em seu próprio plano em torno do centro de massa ou acontece uma contração ou expansão das distâncias entre os corpos de maneira que estas se mantenham em razões fixas.

As soluções encontradas por Euler eram colineares, enquanto as de Lagrange apresentavam configurações colineares e equiláteras, como vemos na figura a seguir. No caso colinear, os corpos se movem em linha reta, e esta reta, por sua vez, rotaciona em um plano em torno do centro de massa. No caso equilátero, as posições iniciais dos corpos são os vértices de um triângulo equilátero, e os corpos continuam a se mover dessa forma, sendo que o triângulo rotaciona em torno do centro de massa do sistema.

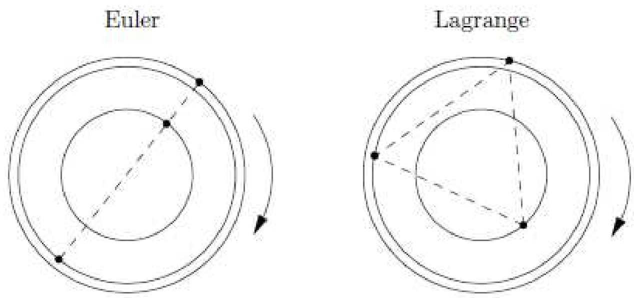

Figura 1.2

Euler, em 1772, foi o primeiro a propor uma reformulação para o problema dos três corpos. O caso particular em questão passou a ser conhecido como *problema restrito dos três corpos*.[7] Nesse caso, dois corpos se movem em torno de seu centro de massa, em órbitas circulares, sob mútua atração gravitacional, formando um sistema com dois corpos, em que seus movimentos são conhecidos. Um terceiro corpo, de massa desprezível é gravitacionalmente atraído pelos dois primeiros, sem perturbar o movimento deles. O sistema de equações do problema restrito dos três corpos será de quarta ordem se considerarmos o movimento do corpo de massa desprezível no plano da órbita dos dois corpos maiores. Caso contrário, o problema restrito dos três corpos terá ordem seis.

O primeiro trabalho a alcançar um resultado importante concernente a essa restrição do problema foi Jacobi, em *Sur le mouvement d'un point et sur un cas particulier du problème des trois corps*, de 1836. Jacobi reduziu a ordem do problema para cinco, mas apresentou o resultado sem demonstração. As equações do problema e o resultado de Jacobi são descritos a seguir.[8]

A unidade de massa será escolhida de maneira que a soma das massas dos corpos seja a unidade, sendo representadas por $1-\mu$ e μ, com $\mu \leq \frac{1}{2}$. Seja a unidade de distância

[7] Esse termo foi utilizado pela primeira vez por Poincaré (1893, p. 69).
[8] Moulton (1914).

escolhida de maneira que a distância entre os corpos seja unitária, assim como a constante gravitacional.

A origem das coordenadas será o centro de massa dos corpos finitos e a direção dos eixos é tal que o plano $\xi\eta$ é o plano de seu movimento. Sejam as coordenadas de $1-\mu$, μ e o do corpo infinitesimal representadas por, respectivamente, ξ_1, η_1, 0; ξ_2, η_2, 0 ; ξ, η, ζ e r_1 e r_2 as distâncias dos corpos de massas $1-\mu$ e μ, respectivamente, ao corpo de massa desprezível.

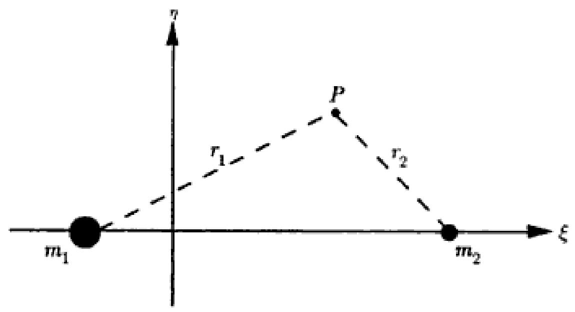

Figura 1.3

Fonte: Barrow-Green (1997, p. 12).

Portanto, as equações do corpo de massa desprezível são

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -(1-\mu)\dfrac{(\xi-\xi_1)}{r_1^3} - \mu\dfrac{(\xi-\xi_2)}{r_2^3} \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = -(1-\mu)\dfrac{(\eta-\eta_1)}{r_1^3} - \mu\dfrac{(\eta-\eta_2)}{r_2^3} \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} = -(1-\mu)\dfrac{\zeta}{r_1^3} - \mu\dfrac{\zeta}{r_2^3}. \end{cases} \tag{1.8}$$

Consideremos um novo sistema de eixos, com a mesma origem que o anterior, e rotacionando no plano $\xi\eta$ na direção em que os corpos finitos se movem com velocidade angular uniforme. Logo, temos, em relação a esse novo sistema, que

$$\begin{cases} \xi = x\cos t - y\,sen\,t \\ \eta = x\,sen\,t + y\cos t \\ \zeta = z. \end{cases}$$

As equações das coordenadas do corpo infinitesimal, supondo que o eixo x passe continuamente pelo centro dos corpos finitos, ou seja, que $y_1 = y_2 = 0$, são

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} = x - (1-\mu)\dfrac{(x-x_1)}{r_1^3} - \mu\dfrac{(x-x_2)}{r_2^3} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dx}{dt} = y - (1-\mu)\dfrac{y}{r_1^3} - \mu\dfrac{y}{r_2^3} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = -(1-\mu)\dfrac{z}{r_1^3} - \mu\dfrac{z}{r_2^3}. \end{cases} \tag{1.9}$$

As equações acima representam as equações de movimento do corpo de massa desprezível referente a eixos móveis, sendo um problema de sexta ordem. Se o corpo infinitesimal se move no mesmo plano que os outros dois, então o problema é de quarta ordem, pois $z = 0$.

Jacobi mostrou que esse sistema pode ter a ordem reduzida em uma unidade, e a integral encontrada por ele hoje é conhecida como integral de Jacobi.

Para encontrar essa integral, primeiro é necessário definir a função

$$U = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1-\mu}{r_1} + \frac{\mu}{r_2}.$$

As equações (1.9) podem ser escritas então na forma

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} - 2\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{\partial U}{\partial z}. \end{cases}$$

Multiplicando por $2\dfrac{dx}{dt}$, $2\dfrac{dy}{dt}$ e $2\dfrac{dz}{dt}$, respectivamente, as equações acima e adicionando os resultados, temos que a equação assim obtida pode ser integrada, considerando que U seja uma função de x, y e z. A integral de Jacobi é expressa pela seguinte expressão

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2U - c = x^2 + y^2 + \frac{2(1-\mu)}{r_1} + \frac{2\mu}{r_2} - c$$

que reduz em uma unidade a ordem do sistema. O primeiro membro da expressão acima representa o quadrado da velocidade das coordenadas do corpo de massa desprezível, ou planetóide, em relação aos eixos móveis. Quando a constante c é determinada pelas condições iniciais, a integral de Jacobi determina a velocidade com que o corpo infinitesimal irá se mover. Se a velocidade for dada, a equação anterior fornece o lugar onde o corpo infinitesimal está. Se considerarmos a velocidade nula, a equação irá definir superfícies que serão utilizadas por Hill, como veremos mais adiante.

As equações (1.8) podem ser escritas na forma Hamiltoniana. Essa forma foi utilizada no trabalho de Poincaré, que discutiremos no próximo capítulo. Vamos mostrar, portanto, como se dá esse processo.[9]

Para escrever as equações (1.8) na forma Hamiltoniana, primeiro as escrevemos da seguinte maneira

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \xi}, \ \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{\partial F}{\partial \eta}$$

onde $F = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}$. Posteriormente, tomemos $\xi = q_1$, $\eta = q_2$, $\frac{d\xi}{dt} = p_1$ e $\frac{d\eta}{dt} = p_2$. Assim, o sistema é reescrito na forma Hamiltoniana

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (i = 1,2)$$

onde $H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) - F$ é chamado de Hamiltoniano do sistema.

Para encontrar a integral de Jacobi do sistema acima, ver o procedimento indicado em Whittaker (1937, p. 354). De maneira breve, como F é uma função de q_i e do tempo t, então a função H é dependente do tempo. Assim, $H = \text{constante}$ não é uma integral do sistema. Uma transformação das variáveis então é feita, com o intuito de substituir H por um novo Hamiltoniano $H' = \text{constante}$, que corresponde então à integral Jacobiana do sistema.

2.3 Cálculo das perturbações

Como o problema dos três corpos não podia ser resolvido pelo método das quadraturas, ou seja, através de integração direta, um novo método precisava ser adotado. O método se baseava na possibilidade de se descrever a trajetória de um corpo através das mudanças temporais sofridas pelos elementos orbitais como, por exemplo, a excentricidade da elipse, e começou a ser aplicado ao movimento dos planetas com Euler.

---

[9] Poincaré supôs que o planetóide se movia no mesmo plano que os dois outros corpos, considerando $\zeta = 0$.

Seu trabalho sobre as mútuas perturbações de Júpiter e Saturno, *Recherches due les questions des inégalities du mouvement de Saturne et de Júpiter*, por exemplo, ganhou um prêmio na Academia Francesa em 1748. Nessa memória de Euler, foram fornecidos os primeiros desenvolvimentos analíticos do método de variação dos elementos orbitais ou keplerianos.

Johannes Kepler (1571-1630) publicara, em 1619, em *Harmonice Mundi*, suas três leis, sendo que as duas primeiras já se encontravam em trabalhos dele que datam de 1609. Em linguagem moderna, as Leis de Kepler são

1. A órbita de cada planeta descreve uma elipse em torno do Sol, estando este em um dos focos;
2. Uma reta imaginária ligando um planeta ao Sol percorre áreas iguais em intervalos de tempos iguais;
3. A razão dos quadrados do período de revolução para dois planetas é igual à razão dos cubos dos seus semi-eixos maiores. [10]

Segundo as leis de Kepler os planetas descrevem um movimento periódico, se deslocando sobre elipses fixas em torno do Sol. Vamos ver os elementos que definem essa elipse.

O tamanho e a forma da elipse são definidos pelo semi-eixo maior a e a excentricidade e. A primeira lei implica que o movimento se realiza em um plano orbital, e é caracterizado por dois ângulos: Ω , que é a longitude do nó ascendente[11] e a inclinação i com respeito a um plano de referenciado sistema de coordenadas, que, em aplicações no sistema planetário, é tomado como a eclíptica.[12]

Além disso, a primeira lei implica que deve haver um ponto da órbita de um corpo que está mais próximo do Sol. Tal ponto é chamado de periélio. O periélio é caracterizado pelo ângulo ω, que é o ângulo entre o nó ascendente e o periélio.

[10] O termo *revolução* se refere ao tempo que o planeta leva para descrever uma órbita.
[11] O nó ascendente é o ponto em uma órbita onde um corpo, viajando de sul a norte, atravessa um plano de referência, que, no presente caso, é a eclíptica.
[12] A esfera celeste é uma esfera imaginária, de raio indefinido, centrada na Terra. Todos os objetos que podem ser vistos no céu podem ser "vistos" como estando à superfície desta esfera. Se marcarmos sobre a Esfera Celeste a posição do Sol ao meio-dia durante um ano, ele vai descrever uma circunferência, inclinada 23º 30' em relação ao equador da Esfera Celeste. Esta órbita aparente do Sol na esfera celeste chama-se eclíptica.

Se, além dos elementos anteriormente citados, adicionarmos o tempo T_0 de passagem do periélio, obtemos um conjunto com seis elementos orbitais, a, e, i, ω, Ω e T_0. A inclinação e a longitude do nó ascendente indicam o plano da órbita, o argumento de periélio orienta essa órbita em seu plano e o semi-eixo maior determina seu tamanho. Além disso, a excentricidade determina sua forma e o tempo de passagem pelo periélio permite situar o objeto dentro dela.

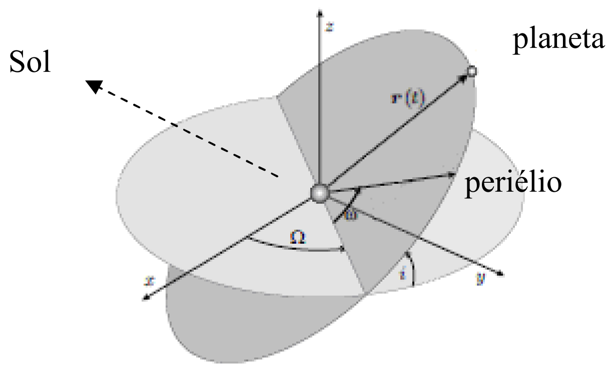

Figura 1.4

Então, com esse conjunto de seis elementos orbitais, a, e, i, ω, Ω e T_0, podemos caracterizar as órbitas dos corpos celestes.

De acordo com o método de variação dos parâmetros orbitais, um corpo sujeito a Lei da Gravitação Universal está sempre se movimentando em uma secção cônica que muda a todo instante. As perturbações são as diferenças entre os elementos da órbita inicial e a cônica oscilante em determinado instante.

Agora, veremos como o método de variação de parâmetros se aplica ao problema dos três corpos. Consideremos dois corpos, de massas m_1 e m_2, o Sol, de massa m_S e que as distâncias do Sol em relação aos corpos sejam r_1 e r_2, respectivamente. Seja

$$\begin{cases} R_{12} = k^2\left(-\dfrac{1}{r_1} + \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{r_2^3}\right) \\ R_{21} = k^2\left(-\dfrac{1}{r_2} + \dfrac{x_2x_1 + y_2y_1 + z_2z_1}{r_1^3}\right). \end{cases}$$

Portanto, as equações de movimento, considerando o Sol como origem do sistema e o sistema de eixos sendo formado pelo eixo x tomado na direção da linha dos nós e o eixo y no plano da eclíptica são

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} + k^2\left(m_S + m_1\right)\dfrac{x_1}{r_1^3} = m_2\dfrac{\partial R_{12}}{\partial x_1} \\ \dfrac{d^2y_1}{dt^2} + k^2\left(m_S + m_1\right)\dfrac{y_1}{r_1^3} = m_2\dfrac{\partial R_{12}}{\partial y_1} \\ \dfrac{d^2z_1}{dt^2} + k^2\left(m_S + m_1\right)\dfrac{z_1}{r_1^3} = m_2\dfrac{\partial R_{12}}{\partial z_1} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} + k^2\left(m_S + m_2\right)\dfrac{x_2}{r_2^3} = m_1\dfrac{\partial R_{21}}{\partial x_2} \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} + k^2\left(m_S + m_2\right)\dfrac{y_2}{r_2^3} = m_1\dfrac{\partial R_{21}}{\partial y_2} \\ \dfrac{d^2z_2}{dt^2} + k^2\left(m_S + m_2\right)\dfrac{z_2}{r_2^3} = m_1\dfrac{\partial R_{21}}{\partial z_2} \end{cases} \qquad (1.10)$$

Considerando

$$x_i^{'} = \frac{dx_i}{dt},\ y_i^{'} = \frac{dy_i}{dt} \text{ e } z_i^{'} = \frac{dz_i}{dt}$$

temos

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} - x_1^{'} = 0 \\ \dfrac{dy_1}{dt} - y_1^{'} = 0 \\ \dfrac{dz_1}{dt} - z_1^{'} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1^{'}}{dt} + k^2\left(m_S + m_1\right)\dfrac{x_1}{r_1^3} = m_2\dfrac{\partial R_{12}}{\partial x_1} \\ \dfrac{dy_1^{'}}{dt} + k^2\left(m_S + m_1\right)\dfrac{y_1}{r_1^3} = m_2\dfrac{\partial R_{12}}{\partial y_1} \\ \dfrac{dz_1^{'}}{dt} + k^2\left(m_S + m_1\right)\dfrac{z_1}{r_1^3} = m_2\dfrac{\partial R_{12}}{\partial z_1}, \end{cases} \qquad (1.11)$$

com equações similares envolvendo as coordenadas do segundo corpo.

Se, no lado direito de (1.10), considerarmos $m_1 = m_2 = 0$, as equações para as coordenadas do primeiro corpo e do segundo formarão dois conjuntos independentes um do outro. Dessa forma, cada conjunto é reduzido ao problema dos dois corpos, que pode ser totalmente resolvido. Assim, podemos escrever as coordenadas e velocidades dos dois corpos como

$$\begin{cases} x_1 = f\left(\alpha_1,...,\alpha_n,t\right) & x_1^{'} = \theta\left(\alpha_1,...,\alpha_n,t\right) \\ y_1 = g\left(\alpha_1,...,\alpha_n,t\right) & y_1^{'} = \phi\left(\alpha_1,...,\alpha_n,t\right) \\ z_1 = h\left(\alpha_1,...,\alpha_n,t\right) & z_1^{'} = \psi\left(\alpha_1,...,\alpha_n,t\right) \\ x_2 = f\left(\beta_1,...,\beta_n,t\right) & x_2^{'} = \theta\left(\beta_1,...,\beta_n,t\right) \\ y_2 = g\left(\beta_1,...,\beta_n,t\right) & y_2^{'} = \phi\left(\beta_1,...,\beta_n,t\right) \\ z_2 = h\left(\beta_1,...,\beta_n,t\right) & z_2^{'} = \psi\left(\beta_1,...,\beta_n,t\right) \end{cases} \tag{1.12}$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ são os elementos da órbita de m_1 e $\beta_1, \ldots, \beta_6$ são os elementos da órbita de m_2.

Mesmo que as equações anteriores representem as soluções do problema dos dois corpos, vamos considerar que essas equações transformem as antigas variáveis x_i, y_i, z_i, $x_i^{'}$, $y_i^{'}$ e $z_i^{'}$ de (1.11) em um sistema de equações equivalentes relativas às variáveis α_1,..., α_6, β_1,..., β_6.

Através de uma série de transformações,[13] obtemos as equações

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = 0 & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial x_1^{'}}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial q_{11}} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial y_1}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = 0 & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial y_1^{'}}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial q_{12}} \\ \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial z_1}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = 0 & \sum_{i=1}^{6} \frac{\partial z_1^{'}}{\partial \alpha_i} \frac{d\alpha_i}{dt} = m_2 \frac{\partial R_{12}}{\partial q_{13}} \end{cases} \tag{1.13}$$

com relações equivalentes em β_i. Resolvendo (1.13), obtemos

$$\begin{cases} \frac{d\alpha_i}{dt} = m_2\phi_i\left(\alpha_1,...,\alpha_n;\beta_1,...,\beta_n;t\right) \\ \frac{d\beta_i}{dt} = m_2\psi_i\left(\alpha_1,...,\alpha_n;\beta_1,...,\beta_n;t\right) \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\left(i = 1,...,6\right)$$

As equações (1.10), assim como (1.13), são equações gerais do problema dos três corpos. A única diferença entre elas é que a integração de (1.14) fornece os elementos das órbitas e a integração de (1.10) fornecem as coordenadas dos corpos.

As massas de m_1 e m_2 são muito pequenas quando comparadas com a massa do Sol. Portanto, as órbitas são próximas de elipses fixas e, assim, os elementos das órbitas, α_i e β_i,

[13] Para entender os procedimentos realizados em tais transformações, ver Mouton (1914).

mudam muito lentamente. Dessa forma, esses elementos podem ser tomados como constantes no lado direito das equações (1.14) e integrando as equações, valores aproximados dos elementos podem ser obtidos para valores próximos de t.

Considerando um intervalo não muito grande de *t*, as soluções da equação (1.14) podem ser expressas em séries da forma

$$\begin{cases} \alpha_i = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_i^{(j,k)} m_1^j m_2^k \\ \beta_i = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \beta_i^{(j,k)} m_1^j m_2^k \end{cases} \tag{1.15}$$

onde os índices de α_i e β_i indicam a ordem do coeficiente. $\alpha_i^{(j,k)}$ e $\beta_i^{(j,k)}$ são funções do tempo a serem determinadas. Moulton (1914, p. 378), afirma que era comum, nos cálculos das perturbações, assumir, sem demonstração, que a expansão em (1.15) fosse válida para qualquer intervalo do tempo.[14]

Substituindo (1.15) em (1.14) e desenvolvendo com respeito a m_1 e m_2, podemos calcular os coeficientes das séries (1.15) e

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha_i^{(0,0)}}{dt} + \frac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt} m_2 + \frac{d\alpha_i^{(1,0)}}{dt} m_1 + \frac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt} m_1 m_2 + \frac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt} m_2^2 + \frac{d\alpha_i^{(2,0)}}{dt} m_1^2 + \ldots = \\ &= m_2 \phi_i \left(\alpha_1^{(0,0)},\ldots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\ldots,\beta_6^{(0,0)};t\right) + m_2 \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \phi_i}{\partial \alpha_j}\left(\alpha_j^{(0,1)} m_2 + \alpha_j^{(1,0)} m_1\right) + \\ &+ m_2 \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \phi_i}{\partial \beta_j}\left(\beta_j^{(0,1)} m_2 + \beta_j^{(1,0)} m_1\right) + \ldots \frac{d\beta_i^{(0,0)}}{dt} + \frac{d\beta_i^{(0,1)}}{dt} m_2 + \frac{d\beta_i^{(1,0)}}{dt} m_1 + \\ &+ \frac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt} m_1 m_2 + \frac{d\beta_i^{(0,2)}}{dt} m_2^2 + \frac{d\beta_i^{(2,0)}}{dt} m_1^2 + \ldots = \\ &m_1 \psi_i \left(\alpha_1^{(0,0)},\ldots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\ldots,\beta_6^{(0,0)};t\right) + m_1 \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j}\left(\alpha_j^{(0,1)} m_2 + \alpha_j^{(1,0)} m_1\right) + \\ &+ m_1 \sum_{j=1}^{6} \frac{\partial \psi_i}{\partial \beta_j}\left(\beta_j^{(0,1)} m_2 + \beta_j^{(1,0)} m_1\right) + \ldots \end{aligned}$$

---

[14] Foi demonstrado posteriomente por Poincaré (1892, p. 58) que se as órbitas dos corpos, para determinado t_0, não se interceptam, então, para qualquer intervalo finito de *t*, as massas m_1 e m_2 podem ser tomadas tão pequenas que as soluções convergem para os valores de *t* nesse intervalo. No entanto, como não lidamos com massas que podem ser tomadas arbitrariamente pequenas, a importância do teorema se refere ao fato de que, quaisquer que sejam os valores das massas, existe um intervalo restrito de *t* de tal maneira que as soluções de (1.10) como séries de potências de m_1 e m_2 convergem nesse intervalo de tempo. De forma geral, quanto maior os valores dos parâmetros, menor será o valor do intervalo de *t*. No contexto da teoria planetária, esse intervalo de tempo equivale a algumas centenas de anos.

Igualando os coeficientes com potências iguais de m_1 e m_2 dos dois lados da equação, obtemos

$$(1.16)\begin{cases} \dfrac{d\alpha_i^{(0,0)}}{dt}=0 \\ \dfrac{d\beta_i^{(0,0)}}{dt}=0 \end{cases}$$

$$(1.17)\begin{cases} \dfrac{d\alpha_i^{(0,1)}}{dt}=\phi_i\left(\alpha_1^{(0,0)},\ldots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\ldots,\beta_6^{(0,0)};t\right) \\ \dfrac{d\alpha_i^{(1,0)}}{dt}=0 \\ \dfrac{d\beta_i^{(0,1)}}{dt}=0 \\ \dfrac{d\beta_i^{(1,0)}}{dt}=\psi_i\left(\alpha_1^{(0,0)},\ldots,\alpha_6^{(0,0)};\beta_1^{(0,0)},\ldots,\beta_6^{(0,0)};t\right) \end{cases}$$

$$(1.18)\begin{cases} \dfrac{d\alpha_i^{(1,1)}}{dt}=\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(1,0)}+\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(1,0)} \\ \dfrac{d\alpha_i^{(0,2)}}{dt}=\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(0,1)}+\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\phi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(0,1)} \\ \dfrac{d\alpha_i^{(2,0)}}{dt}=0 \\ \dfrac{d\beta_i^{(1,1)}}{dt}=\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(0,1)}+\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(0,1)} \\ \dfrac{d\beta_i^{(2,0)}}{dt}=\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_j}\alpha_j^{(1,0)}+\sum_{j=1}^{6}\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\beta_j}\beta_j^{(1,0)} \\ \dfrac{d\beta_i^{(0,2)}}{dt}=0 \end{cases}$$

$$\vdots$$

Integramos as equações (1.16) e substituímos os valores de $\alpha_i^{(0,0)}$ e $\beta_i^{(0,0)}$ obtidos em (1.17) e, assim, este último pode ser integrado. Repetimos esse processo de substituição, depois de (1.17) em (1.18), e assim sucessivamente. Dessa forma, os coeficientes das séries de (1.15) podem ser determinados e os valores de α_i e β_i são encontrados com o grau de precisão desejado, para valores do tempo em que a série converge.

Os valores de α_i e β_i são encontrados com o grau de precisão desejado, para valores do tempo em que a série converge. Temos ainda que as quantidades $\alpha_i^{(0,1)}$ e $\beta_i^{(1,0)}$ são chamadas de perturbações de primeira ordem com relação às massas, pois elas correspondem aos coeficientes multiplicados por m_2 e m_1.

2.4 Algumas questões referentes ao uso de séries infinitas

Como vimos, o sistema que representa o movimento dos três corpos não é totalmente integrável. Devido à primeira lei de Kepler, sabemos que um planeta se move em uma órbita elíptica em torno do Sol. Então, quando lidamos com o problema dos três corpos, consideramos como primeira aproximação para a órbita de um planeta a elipse, calculando em seguida as variações dos elementos orbitais, que são causadas pela presença do terceiro corpo. Através dos cálculos das perturbações, podemos obter aproximações para as coordenadas dos corpos.

Temos, então, que os elementos das órbitas dos corpos são representados por meio de séries infinitas. Algumas variações desses elementos elípticos, ou desigualdades, são periódicas, ou seja, podem ser expressas através de termos da forma $a.\text{sen}(bt+c)$, onde a, b e c são constantes. Outras variações são expressas da forma $at+bt^2+\ldots$ ou sob a forma de funções trigonométricas multiplicadas pelo tempo, e são chamadas de variações seculares. Ao contrário das variações periódicas, as variações seculares têm o efeito de alterar continuamente as órbitas dos corpos, podendo gerar grandes alterações na configuração do sistema.

Uma questão estudada por Laplace era a de saber se existiam termos seculares nos eixos maiores, ou, de forma equivalente, nos movimentos médios dos planetas,[15] que são relacionados pela terceira lei de Kepler (n^2a^3= constante, onde n é o movimento médio e a é o semi-eixo maior da órbita planetária). Uma mudança nos semi-eixos maiores pode significar que um planeta escape do sistema ou que ocorra uma colisão entre planetas.

---

[15] O movimento médio, em um movimento kepleriano, se refere à velocidade angular média de um planeta ao realizar uma revolução completa sobre sua órbita (segundo as leis de Kepler, essa órbita será uma elipse). O movimento médio é dado pela fórmula $n_1 = \frac{K\sqrt{m_n + m_1}}{a^{3/2}} = \frac{2\pi}{P}$, sendo P o tempo que o planeta leva para percorrer seu caminho elíptico em torno do Sol, K a constante gravitacional, m_S a massa do Sol e m_1 a massa do planeta.

No ano de 1773, Laplace apresentou uma memória à Academia Francesa de Ciências onde demonstrou que, em relação à segunda potência das excentricidades, os eixos maiores e o movimento médio dos planetas não continham termos seculares. Já as séries utilizadas por Lagrange utilizavam três parâmetros pequenos, como a excentricidade, o ângulo de inclinação entre os planos das órbitas e a eclíptica e a razão entre a massa dos planetas e a massa do Sol. Lagrange demonstrou, no trabalho *Sur l'altération des moyens mouvements des planètes*, em 1776, que não há termos seculares nessas séries, para todas as ordens de aproximação da excentricidade das órbitas elípticas e também do seno do ângulo de inclinação do plano que contém tal órbita, em relação à eclíptica, considerando perturbações de primeira ordem em relação às massas.

Por não conterem termos seculares, as soluções obtidas por Laplace e Lagrange não podem crescer indefinidamente. Sistemas como esse, cujos elementos das órbitas dos planetas permanecem confinados dentro de certos limites, são conhecidos hoje como *estáveis no sentido de Lagrange*.[16]

Laplace, em *Sur les inégalités séculaires des planètes et des satellites*, do ano de 1785, estudou as mútuas perturbações planetárias, principalmente focando nas anomalias entre os movimentos médios de Júpiter e Saturno. Laplace sabia que havia variações nos movimentos de Júpiter e Saturno pois Edmond Halley (1656-1742), em 1693, havia obtido resultados que indicavam uma aceleração no movimento de Júpiter e uma desaceleração no movimento de Saturno.

Laplace observou que os movimentos médios de Júpiter e Saturno estavam em uma razão de 5 para 2, ou seja, que a cada cinco movimentos de translação de Júpiter em torno do Sol, Saturno realiza dois. Devido a esse fato, termos com pequenos denominadores apareciam nas expressões para as coordenadas dos planetas. Tal situação é conhecida como o *problema dos pequenos divisores*. Esses termos provocam alterações nos elementos orbitais destes planetas em uma escala de aproximadamente 900 anos.

Isso ocorre porque, na teoria da perturbação planetária, a função perturbação pode ser expandida em uma série de termos periódicos. Quando integrada, aparecem termos da forma

$$\frac{A_{ij}}{(jn_1 + kn_2)} sen\left[(jn_1 + kn_2)t + B_{jk}\right],$$

onde j e k são inteiros, n_1 e n_2 são os movimentos médios dos planetas (no caso dos planetas Saturno e Júpiter, esses números são 2 e 5, como vimos acima), A e B são

[16] Goroff (1993, p. I64).

constantes, e tal que a ordem de magnitude de A decresça rapidamente à medida que j e k decrescem. Se os movimentos médios são comensuráveis, então os termos com argumentos $\left[\left(jn_1+kn_2\right)t+b\right]$ contribuem para os termos seculares, que são os termos que crescem ou decrescem proporcionalmente com o tempo. Caso contrário, o denominador pode se tornar arbitrariamente próximo de zero. O caso da incomensurabilidade leva a um problema quando os movimentos médios podem ser aproximados pela razão de dois inteiros pequenos, desde que o valor de A seja grande.

O fenômeno de pequenos divisores tem consequências importantes pois, à medida que as aproximações das soluções para as coordenadas dos corpos são estendidas, os coeficientes de ordens mais altas possuem coeficientes maiores que os de ordem mais baixa. Isso leva a uma dependência da convergência das soluções em relação às condições iniciais, problema que, como veremos adiante, foi tratado por Urbain Le Verrier (1811-1877).

2.5 A Mecânica Celeste no século XIX

Os sucessores de Lagrange e Laplace, no século XIX, procuraram desenvolver a teoria planetária e lunar com maiores graus de aproximação. Poincaré explica os objetivos da Mecânica Celeste durante o século XIX:

> *A meta da Mecânica Celeste é resolver a importante questão se a lei de Newton sozinha explica todos os fenômenos astronômicos; a única maneira de realizar isso é fazer observações tão precisas quanto possível e então compará-las com os resultados dos cálculos. O cálculo pode ser somente aproximado e, além disso, não seria a intenção calcular mais casas decimais do que as observações podem tornar conhecidas. É então inútil requerer maior precisão dos cálculos que das observações; mas ninguém poderia, por outro lado, requerer menos.* (Poincaré, 1892, p. xiii, tradução nossa)

A Mecânica Celeste nessa época era dedicada quase que exclusivamente ao problema dos movimentos dos corpos no Sistema Solar. A integração completa das equações que representavam o movimento dos corpos se atraindo de acordo com a lei de Newton, principalmente devido aos trabalhos de Lagrange e Laplace no século anterior, já se mostrava pouco provável.

No ano de 1809, Siméon Denis Poisson (1781-1840) demonstrou, em *Mémoire sur les inégalités séculaires des moyens mouvements des planètes,* que, considerando perturbações de segunda ordem com relação às massas, os eixos maiores dos planetas não contêm termos seculares.[17] Em sua investigação, ele encontrou termos que são produtos entre t e termos periódicos. Embora não limitadas, tais funções retornam infinitas vezes próximas ao valor inicial. Logo, enquanto para Lagrange soluções aproximadas devem ser limitadas na vizinhança das órbitas elípticas para que se garanta a estabilidade, para Poisson as soluções podem se afastar da órbita periódica, desde que em algum momento elas retornem para a vizinhança dessa órbita. Essa concepção de estabilidade, dada por Poisson, foi utilizada, como veremos mais adiante, por Poincaré.

Outras importantes contribuições foram feitas para a teoria planetária utilizando os resultados de Laplace e Lagrange. Estudando o planeta Urano, por exemplo, John Couch Adams (1819-1892) e Le Verrier chegaram à conclusão, de maneira independente, de que as perturbações na órbita desse planeta não poderiam ser explicadas somente pela presença de Júpiter e Saturno. Como consequência, no ano de 1846 foi anunciada a descoberta de um novo planeta, que foi chamado por Le Verrier de Netuno.

Os métodos utilizados por Le Verrier envolviam a procura de soluções para as equações diferenciais do movimento dos corpos sob a forma de séries dependendo de um pequeno parâmetro, como massa, excentricidade ou inclinação. Para ele, se os primeiros termos de uma série representando um elemento da órbita fossem decrescendo, então a série convergia. Ele pensava que essa condição era suficiente para se obter séries que aproximassem corretamente o movimento dos planetas. Mas essa convergência dependia das condições iniciais e Le Verrier sabia que, para determinadas condições iniciais, a presença de pequenos divisores comprometia a convergência das séries. Por isso, Le Verrier não estava certo sobre a estabilidade do Sistema Solar, ou seja, não se podia afirmar que os planetas não escaparão do sistema ou que colisões não ocorrerão entre eles.

Le Verrier esperava que os matemáticos pudessem encontrar novos métodos para a integração das equações de movimento dos planetas, de tal forma que fossem capazes de resolver esse importante problema. A resposta para Le Verrier veio com os trabalhos de Poincaré, que estudaremos no próximo capítulo.

---

[17] No ano de 1878, o matemático romeno Spiru Haret (1851-1912) mostrou, em sua tese de doutorado *Sur l'invariabilite des grandes axes des orbites planetaires* que, realizando uma aproximação com relação às massas de terceira ordem, obteremos termos seculares nas soluções. Portanto, os movimentos dos planetas não são, necessariamente, limitados, anulando os resultados de estabilidade alcançados por Laplace, Lagrange e Poisson.

Na segunda metade do século XIX e começo do século XX, muitos astrônomos procuraram aprimorar os trabalhos de Le Verrier. Como exemplo, podemos citar Newcomb, Lindstedt e Gyldén, que propuseram novos métodos com o intuito de melhorar as aproximações para as coordenadas dos corpos e de evitar que o tempo aparecesse fora de termos trigonométricos. Tal fato explicita a identificação do critério de estabilidade com a redução dos desenvolvimentos das séries a termos estritamente trigonométricos.

Além de analisarmos os trabalhos destes astrônomos, faremos uma breve exposição sobre a teoria da Lua, feita por Delaunay e Hill, que também foi responsável pelo desenvolvimento de métodos importantes para o tratamento do problema dos três corpos e, em particular, para a nova abordagem sugerida por Poincaré. O problema lunar é um exemplo do problema restrito dos três corpos, em que uma das massas, no presente caso, a da Lua, é desprezível, comparando-se com as massas do Sol e da Terra.

Na tentativa de eliminar os termos seculares das expansões das coordenadas no problema da teoria lunar, um nome importante foi o do francês Delaunay. Em 1846, Delaunay propôs, em *Nouvelle théorie analytique du mouvement de la lune*, uma nova maneira de estudar o movimento da Lua, ao qual ele se dedicou os vinte anos subsequentes:

> *A memória que eu apresento hoje à Academia é apenas a primeira parte de um trabalho considerável que eu empreendi, e que consiste em refazer inteiramente a teoria da Lua, por meios diferentes daqueles que foram empregados até o momento. Na teoria da Lua, as fórmulas do movimento elíptico estão muito mais longe de representar o movimento real do que na teoria dos planetas; a ação perturbativa do Sol dá lugar a um grande número de desigualdades, que são muito consideráveis, e o cálculo dessas desigualdades apresenta grandes dificuldades. Os métodos imaginados pelos matemáticos para efetuar esse cálculo consistem todos em determinar, em uma primeira aproximação, as desigualdades que são de primeira ordem em relação à força perturbativa; em uma segunda aproximação, aquelas que são de segunda ordem em relação a essa força, e assim por diante. Mas essas aproximações sucessivas ficam mais e mais complicadas à medida que as fazemos, e as últimas se compõem de cálculos verdadeiramente inextricáveis; resulta que é impossível que tenhamos uma segurança completa sobre a exatidão dos resultados, e que seria bem difícil ter mais aproximações relativas às potências da força perturbativa. O objetivo a que me propus foi fazer desaparecerem esses dois graves*

> *inconvenientes; eu espero que a Academia julgue que eu o tenha alcançado.* (Delaunay, p. 968-969, 1846, tradução nossa)

O enorme trabalho realizado por Delaunay está contido nas 883 páginas do primeiro volume de *Théorie du Mouvement de la Lune*, de 1860, e nas 931 páginas do segundo volume, de 1867.[18] No prefácio de *Théorie du Mouvement de la Lune*, Delaunay expôs o principal objetivo de seu trabalho:

> *Determinar, sob uma forma analítica, todas as desigualdades do movimento da Lua em torno da Terra, até quantidades de sétima ordem inclusive, tomando os dois corpos como simples pontos materiais, e considerando somente a ação perturbativa do Sol, cujo movimento aparente em torno da Terra é suposto que se realize seguindo as leis do movimento elíptico.* (Delaunay, 1860, p. xxvi, tradução nossa)

Delaunay supôs que o movimento do Sol era fixo em relação a um plano de referência e a primeira aproximação para a órbita da Lua era suposta sendo, então, uma elipse em torno da Terra, negligenciando a ação do Sol.[19]

Delaunay utilizou o método de variação de parâmetros que, como vimos acima, é empregado no cálculo das perturbações. Quando o movimento é não perturbado, temos, conforme as equações (1.8), que as coordenadas do corpo podem ser expressas por meio dos elementos da elipse e do tempo. Para representar o movimento da Lua, Delaunay utilizou três pares de elementos orbitais, com os quais podemos escrever as equações de movimento da Lua na forma Hamiltoniana.

Seja a o eixo-maior, i a inclinação da órbita, h a longitude do nó ascendente e g o ângulo entre o nó ascendente e o perigeu.[20] No lugar do elemento T_0, que representa o tempo de passagem do perigeu, ele utiliza o elemento orbital l, que representa a anomalia média.[21]

---

[18] No período entre 1846 e 1860, ano da publicação do primeiro dos dois volumes de *Théorie du Mouvement de la Lune*, nenhum trabalho de Delaunay sobre esse tema foi publicado.

[19] A essência do método de Delaunay pode ser encontrada em Tisserand (1894), Brown (1896) e Whittaker (1899).

[20] O perigeu corresponde à distância mais curta entre a Terra e a Lua.

[21] A anomalia média é definida pela equação $l = 2\pi \frac{T_0}{p}$, onde p representa, nesse caso, o tempo que a Lua leva para decrescer uma órbita completa em torno da Terra. Logo, a anomalia média é o ângulo que o raio vetor

Além disso, consideremos $L=\sqrt{\left(m_S+m_T\right)a}$, $G=L\sqrt{\left(1-e^2\right)}$, $H=G\cos(i)$ e $R=k^2\left(-\frac{1}{r_1}+\frac{x_1x_S+y_1y_S+z_1z_S}{r_S^3}\right)$. Nessa expressão da função perturbação, r_1 e r_S representam, respectivamente, as distâncias da Lua e do Sol à Terra e x_S, y_S e z_S as coordenadas do Sol.

As equações de Delaunay que representam o movimento da Lua, utilizando a forma Hamiltoniana e considerando a perturbação exercida pelo Sol, são[22]

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l};\ \frac{dG}{dt}=\frac{\partial F}{\partial g};\ \frac{dH}{dt}=\frac{\partial F}{\partial h} \qquad (1.19)$$

$$\frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L};\ \frac{dg}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial G};\ \frac{dh}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial H}.$$

onde $F = R + \frac{\left(m_n + m_T\right)}{2L^2}$, sendo m_T a massa da Terra.

Delaunay expandiu o Hamiltoniano F por meio de uma série infinita (sua expansão contém 320 termos), onde os coeficientes do desenvolvimento de F são funções dos elementos orbitais. Seu método de integração consistia, a cada estágio, em escolher a parte constante de F e um dos termos periódicos, negligenciando os outros.

Ou seja, sendo

$$F=-B-A\cos\varphi+R_1,$$

para integrar o sistema (1.19), ele começou então não considerando R_1. Dessa maneira, ele pode integrar o sistema por meio de séries, onde as variáveis L, G, H, l, g e h podem ser expressas como funções do tempo e de seis novas constantes arbitrárias. Quando essa mudança de variáveis é realizada, o termo periódico considerado desaparece. Através de uma série de 497 operações, a função perturbação é reduzida ao termo não-periódico, ou seja, ao termo que não depende dos elementos angulares l, g e h. Logo, escrevemos (1.19) como

$$\frac{dL}{dt}=0;\ \frac{dG}{dt}=0;\ \frac{dH}{dt}=0$$

$$\frac{dl}{dt}=\frac{\partial B}{\partial L};\ \frac{dg}{dt}=\frac{\partial B}{\partial G};\ \frac{dh}{dt}=\frac{\partial B}{\partial H}$$

ligando a origem do sistema de coordenadas ao perigeu descreveria caso se movesse uniformemente com velocidade média de $\frac{2\pi}{p}$.

[22] Ao utilizar o método para o cálculo de perturbações no movimento lunar, a origem do sistema de coordenadas, nesse caso, passa a ser a Terra.

pois $\frac{\partial F}{\partial g} = \frac{\partial F}{\partial h} = \frac{\partial F}{\partial l} = 0$.

Daí, os valores para *L*, *G* e *H*, e, portanto, para a, e e i não são alterados, enquanto obtemos que $l = (l) + l_0 t$, $g = (g) + g_0 t$ e $h = (h) + h_0 t$, onde (l), (g) e (h) são termos constantes em relação ao tempo. Nessas expressões, $l_0 = \frac{\partial B}{\partial L}$, $g_0 = \frac{\partial B}{\partial G}$ e $h_0 = \frac{\partial B}{\partial H}$. Assim, por essa relação entre *L*, *G* e *H* e l_0, g_0 e h_0, essas últimas quantidades são expressas também como funções de a, e e i.

Assim, as coordenadas da Lua podem ser expressas por meio do tempo e de seis novas constantes (l), (g),(h), *L*, *G* e *H*. Quando substituímos, nas coordenadas da Lua, as antigas expressões para os elementos orbitais por (l), (g),(h), *L*, *G* e *H*, temos que o tempo aparece somente dentro do argumento de termos periódicos.

Sobre o método de Delaunay, Tisserand disse:

> *Essa teoria é muito interessante do ponto de vista analítico; na prática, ela atinge o objetivo almejado, mas ao custo de cálculos algébricos assustadores. É como uma máquina com rodas sabiamente combinadas que se aplicaria quase indefinidamente para ultrapassar obstáculos, pouco a pouco. Não se pode deixar de admirar a paciência do autor, que dedicou mais de vinte anos de sua vida à execução material de cálculos algébricos que ele efetuou sozinho.* (Tisserand, 1894, p. 232, tradução nossa)

Considerando a teoria lunar, Delaunay foi o primeiro pesquisador a obter séries gerais puramente trigonométricas que satisfaziam formalmente às equações de movimento. Porém, a complexidade das expressões envolvidas, como Tisserand afirma acima, combinada com a convergência lenta de suas séries, dificultou o uso de seu método.

Em *Note sur um théorème de mécanique céleste*, de 1872, Simon Newcomb (1835-1909) assumiu que as coordenadas dos planetas poderiam ser expressas através de séries trigonométricas, como na teoria de Delaunay. Dois anos depois, em *On the General Integrals of Planetary Motion*, Newcomb procurou justificar sua hipótese sobre as expressões para as coordenadas dos corpos como funções do tempo, considerando que um conjunto de séries infinitas da forma

$$p_i = \sum K_{i_1, i_2, \ldots, i_{3n}} \begin{matrix} sen \\ \cos \end{matrix} \left(i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + \ldots + i_{3n}\lambda_{3n}\right)$$

poderia ser encontrado, onde p_i representa as coordenadas e $\lambda_r = l_r + b_r t$. As quantidades l são $3n$ constantes arbitrárias, e as quantidades b e K são funções de $3n$ outras constantes arbitrárias, de maneira que as equações diferenciais sejam aproximadamente satisfeitas por essas séries. No entanto, o método de Newcomb, assim como o de Delaunay, envolvia um grande número de complicadas mudanças de variáveis.

Outro nome importante nas investigações sobre a teoria lunar é o de Hill. Ele foi muito influenciado pelos trabalhos de Delaunay, fato esse ratificado por Poincaré:

> *Hill assimila prontamente o método de Delaunay, fazendo-o de objeto de vários de seus escritos, mas o que ele propôs foi totalmente diferente e muito original.* [...] *Ele compreendeu igualmente o alcance do método de Delaunay, em várias notas ele mostrou que esse método não está limitado à teoria da Lua e que podemos empregá-lo no cálculo de perturbações planetárias.* (Poincaré, 1905, p. xi-xiii, tradução nossa)

Hill publicou, em 1877, *On the part of the Motion of the Lunar Perigee which is a Function of the Mean Motions of the Sun and the Moon*, que continha a primeira solução periódica para o problema dos três corpos depois das descobertas por Lagrange e Euler, em 1772.[23]

No ano seguinte, ele publicou *Researches in Lunar Theory*. Apesar de ter sido publicado antes, seu trabalho de 1877 é uma continuação do artigo de 1878, e é difícil entendê-lo sem o suporte desse último.

Sobre a situação em que se encontrava o estudo da teoria lunar, assunto por ele tratado, Hill afirmou:

> *Quando consideramos como nós podemos contribuir para o avanço desse assunto muito tratado* [teoria lunar], *nós não podemos deixar de observar que a grande maioria dos pesquisadores teve, como seus principais objetivos, a construção de tabelas; ou seja, eles* [astrônomos] *analisavam o problema de um ponto de vista da prática astronômica em vez da matemática.* [...] *De novo, seu objetivo os convence de atingir um estudo completo do tema, e eles deixaram de notar muitos pontos menores de*

[23] Assim como Euler e Lagrange, ele chamava a solução por ele obtida de *solução particular*.

> *grande interesse para o matemático, simplesmente porque o conhecimento desses pontos era desnecessário para a formação das tabelas.* (Hill, 1878, p. 284, tradução nossa)

A primeira inovação de Hill em relação aos trabalhos de outros astrônomos foi deixar de negligenciar a ação do Sol sobre o movimento da Lua, passando a resolver assim uma versão simplificada do problema dos três corpos. Anteriormente, os astrônomos primeiro resolviam o problema dos dois corpos e, então, tentavam resolver o problema dos três corpos através de mudanças na solução obtida. Vamos ver como Hill obtém essa primeira aproximação para a o movimento da Lua.

Delaunay, em vez de utilizar coordenadas retangulares x, y e z para representar a posição da Lua, ele utilizou, como disse, *as coordenadas adotadas pelos astrônomos*, que são a latitude, a longitude[24] e o valor inverso da distância da Lua à Terra.[25] As séries utilizadas por Delaunay no desenvolvimento periódico das coordenadas da Lua dependiam de cinco parâmetros, a saber: excentricidade das órbitas da Lua e do Sol, inclinação do plano da órbita da Lua em relação à eclíptica , paralaxe do Sol e razão entre os movimentos médios de Sol e Lua.

Examinando as expressões finais para latitude, longitude e para o valor inverso da distância da Lua à Terra, por meio de séries que dependiam dos cinco parâmetros acima citados, é visto que o parâmetro que era responsável pela convergência mais lenta era a razão entre os movimentos médios do Sol e da Lua. Hill (1878) então negligenciou todos os outros parâmetros, obtendo uma solução particular para as equações diferenciais que representam o movimento da Lua. Sua ideia era encontrar séries para as coordenadas da Lua em termos somente desse parâmetro, com um alto grau de exatidão.

Essa solução particular, apesar de não representar exatamente a órbita da Lua, servia como primeira aproximação para seu movimento. As equações para o movimento da Lua então são simplificadas, pois Hill considerou as excentricidades, a inclinação e a paralaxe do Sol como sendo nulas.

---

[24] Da mesma maneira que usamos o equador celeste como base para o sistema equatorial, podemos usar o plano da eclíptica, o plano da órbita da Terra, projetado na esfera celeste como base de outro sistema: o sistema de coordenadas eclípticas. Neste caso utilizaremos a longitude celeste, medida em graus, de 0º a 360º, no sentido leste a partir do ponto vernal; e a latitude celeste, que varia de -90° a 90°. O ponto vernal é o ponto, no equador celeste (projeção do equador terrestre na esfera celeste), ocupado pelo Sol no equinócio de primavera.

[25] Esse último valor, sendo multiplicado pelo raio do equador terrestre, fornece a palalaxe da Lua. Em astronomia, paralaxe é a diferença na posição aparente de um objeto visto por observadores em locais distintos. A paralaxe da Lua também varia com a distância Lua-Terra, tendo seu valor máximo quando a Lua está mais próxima da Terra e mínimo quando está mais afastada.

Escolhendo um sistema de coordenadas retangulares, tendo como origem a Terra, o eixo x sendo constantemente direcionado em direção ao centro do Sol e o eixo y no plano da eclíptica, elas são colocadas da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} - 2n'\dfrac{dy}{dt} + \left[\dfrac{\mu}{r^3} - 3n'^2\right]x = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2n'\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\mu}{r^3}y = 0 \end{cases}$$

onde n' é a velocidade angular média do Sol em relação à Terra, μ a soma das massas da Terra e da Lua e r é a distância entre elas. Devido a essa escolha de coordenadas, Hill pode expressar as coordenadas x e y da Lua por meio de séries de Fourier, ou seja, por meio de séries infinitas de termos periódicos. Logo, a órbita resultante é fechada.

Para determinar os coeficientes das séries, ele substituiu essas séries nas equações que representam o movimento da Lua, obtendo os coeficientes como funções de um parâmetro m, que depende da razão entre os movimentos médios do Sol e da Lua.

Tendo demonstrado a existência de uma solução periódica para o problema lunar, Hill estudaou em detalhes essa órbita, determinando cada ponto dessa trajetória fechada e calculando as coordenadas desses pontos com várias casas decimais.

Variando o valor do parâmetro *m*, tendo em vista a aplicação de seu método ao estudo do movimento de outros satélites, ele encontrou diferentes soluções periódicas. Sua última solução periódica envolvia uma Lua com uma órbita cúspide, chamada de Lua com lunação[26] máxima (figura 1.5).[27]

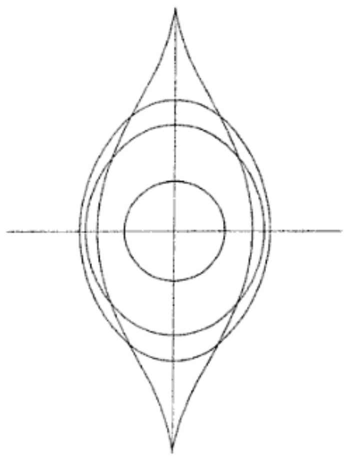

Figura 1.5

Fonte: Hill (1878, p. 335).

[26] Lunação é um ciclo lunar completo, correspondendo ao espaço de tempo entre duas luas novas consecutivas.
[27] Nessa figura, Hill construiu a solução periódica da Lua (da Terra), das luas de três e quatro lunações, e da Lua com lunação máxima.

Foi mostrado posteriormente, por Poincaré, que a órbita cúspide era sucedida por órbitas em forma de laço, como na figura 1.6.

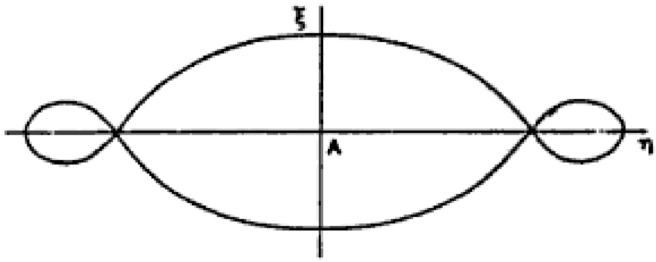

Figura 1.6
Fonte: Hill (1878, p. 109).

Uma outra ideia importante no trabalho de Hill de 1878 é o de curvas de velocidade zero, que foi usada para mostrar que a Lua não pode escapar de sua órbita em torno da Terra. Igualando a zero a integral de Jacobi, que fornece o quadrado da velocidade relativa aos eixos móveis, obteremos a equação de uma superfície que separa o espaço em duas partes, aquela em que a velocidade é real e a outra em que a velocidade é imaginária.

Apesar de ser complicada a tarefa de entendê-la em detalhes, essa superfície mostra algumas limitações do movimento da órbita lunar, o que permite chegar a certas conclusões sobre a estabilidade de seu movimento. Essa ideia foi usada posteriormente pelo matemático Sir George Howard Darwin (1845-1912), em 1897, no trabalho *Periodic Orbits*.

Sobre o trabalho de Hill de 1878, o matemático e astrônomo americano Ernest William Brown (1866-1938) afirmou:

> *Então essa memória, com apenas cinquenta e quatro páginas, tem se tornado fundamental para o desenvolvimento da Mecânica Celeste* [...]. *Poincaré observa que nela podemos perceber a origem de todo progresso que tem sido feito em Mecânica Celeste desde sua publicação e tal fato é, sem dúvida, totalmente justificado. Algumas vezes, tem sido dito que Hill não avaliou, no momento, a importância de seu trabalho. Hill era muito modesto sobre suas próprias realizações para colocar qualquer ênfase em suas produções como manda o mundo científico. Mas não é necessário um estudo extenso de suas memórias para ver que sua visão frequentemente foi além dos assuntos em questão.* (Brown, 1916, p. 286, tradução nossa)

O problema que serviu de base para o trabalho de Hill, de 1877, foi a diferença entre os valores calculados para o perigeu lunar e os valores derivados das observações. A questão era saber se essa diferença se devia as aproximações, que não haviam sido estendidas o suficiente, ou se havia outras forças agindo no movimento da Lua, que ainda não tinham sido consideradas.

> *Se outras forças, além da gravidade, têm um papel na determinação da posição dos corpos rígidos, a Lua é inquestionavelmente aquela que irá exibir mais cedo traços dessas ações; e o movimento do perigeu é uma das coisas que provavelmente nos informam sobre elas. Portanto eu proponho, nessa memória, calcular o valor dessa quantidade, que depende dos movimentos médios do Sol e Lua, com um grau de precisão que não deixará nada a desejar.* (Hill, 1877, p. 243, tradução nossa)

A partir das equações diferenciais da Lua

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dx}, \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\Omega}{dy}$$

Hill encontrou uma solução periódica para o movimento da Lua, que continha apenas duas das quatro constantes arbitrárias que uma solução completa das equações diferenciais requeriam (pois o sistema é de quarta ordem).

Considerando a órbita periódica, temos que as coordenadas da Lua podem ser expressas como somas de senos e cossenos de múltiplos de uma função linear do tempo. As oscilações da Lua a partir dessa órbita, que ocorrem quando as condições iniciais são diferentes daquelas que levam à órbita periódica, representam as desigualdades do movimento lunar. O objetivo de Hill era encontrar uma órbita que satisfizesse as equações diferenciais, diferindo ligeiramente da periódica, sendo que suas desigualdades em relação à órbita periódica dependessem apenas da primeira potência da excentricidade lunar.

A partir dessas condições e do uso de integrais conhecidas combinadas com algumas transformações, Hill reduziu o sistema de quarta ordem para um de segunda ordem, obtendo a equação

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \Theta\,\omega = 0\,, \tag{1.20}$$

onde ω é o desvio normal da Lua a partir de sua órbita periódica e Θ depende somente da posição relativa da Lua com referência ao Sol. Ele então afirmou que a função Θ poderia ser expressa sob a forma

$$\Theta = \theta_0 + \theta_1 \cos(2t) + \theta_2 \cos(4t) + \ldots = \sum_j \theta_j \zeta^{2j} ,$$

onde $\theta_0, \theta_1, \ldots$ são constantes. Tomando $\zeta = e^{it}$ e $\theta_i = \theta_{-i}$, a equação (1.20) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \omega \sum_{j=-\infty}^{\infty} \theta_j \zeta^{2j} = 0. \qquad (1.21)$$

Se θ_0 é muito maior que θ_i, para $i \geq 1$, então uma forma aproximada da equação (1.20) é

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \theta_0 \omega = 0,$$

cuja solução particular é

$$\omega = K\zeta^{c} + K'\zeta^{-c}.$$

Nessa igualdade, $c = \sqrt{\theta_0}$ é a razão da lunação e o mês anomalístico[28] e, além disso, *K* e *K'* são constantes arbitrárias. Quando os termos adicionais de Θ são considerados, o valor de *c* é modificado e termos extras são adicionados a ω, e são da forma $A\zeta^{\pm c+2i}$, e uma solução particular de (1.20) é portanto

$$\omega = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i \zeta^{c+2i}$$

em que b_i é um coeficiente constante e o valor de *c* deve ser determinado. Ele então substituiu o valor de ω em (1.21). Como todos os coeficientes de cada potência de ζ deveriam ser nulos, um número infinito de equações é obtido.

Essas equações podem ser usadas para determinar a razão de todos os coeficientes b_j em relação a um deles, b_0, que pode ser tomado como uma constante arbitrária. Se todos os b_j são eliminados dessas equações, então temos um determinante infinito envolvendo *c*, denotado por $D(c)$, que, quando igualado a zero, determina *c* e, consequentemente, o movimento do perigeu lunar.[29]

---

[28] Mês anomalístico é o período de tempo que decorre entre dois perigeus consecutivos.

[29] A convergência do determinante infinito não foi considerada por Hill, mas foi mais tarde estudada por Poincaré, em 1886. Esse trabalho de Poincaré é intitulado *Sur les déterminantsd'ordre infini*, publicado no Bulletin de la Société mathématique de France 14, p. 77-90.

O trabalho de Hill levou a mais desenvolvimentos. Em *Sur certaines Solutions particulières du problème des trois corps*, de 1883, Poincaré, demonstrou a existência de um número finito de soluções periódicas no problema geral dos três corpos.

Em 1877, o astrônomo inglês Adams, na memória *On the motion of the Moon's Node in the case when the orbits of the Sun and Moon are supposed to have no eccentricities, and when their mutual inclination is supposed to be indefinitely small*, se referindo à Hill (1877) diz que, muitos anos antes, havia utilizado um método similar para investigar o movimento do nó ascendente relacionado à Lua, encontrando da mesma forma um determinante infinito. Infelizmente, suas investigações não haviam sido publicadas, pois Adams as tinha considerado incompletas.

Os resultados obtidos por Hill demoraram um pouco para receber o reconhecimento devido. Em 1888, quando Darwin começou a estudar os trabalhos de Hill, ele observou que os resultados obtidos por Hill pareciam ser muito bons, mas poucas pessoas os conheciam. Isso ocorreu porque a matemática americana estava ainda começando a ganhar representatividade e também por causa da dificuldade na leitura de seus trabalhos, aliada à deficiência em sua teoria de determinantes infinitos.

Quando Poincaré publicou sua memória sobre o problema dos três corpos, em 1890, que continha a teoria de soluções periódicas de Poincaré, o trabalho de Hill começou enfim a ganhar reconhecimento. Brown comentou, sobre a importância de Hill:

> *Hill percebeu que existiam outros problemas, além da mera verificação da lei da gravitação através de comparações entre a teoria e observação dos principais corpos no sistema solar, que necessitavam de solução. Ele também observou, em parte devido ao laborioso trabalho de Newcomb em antigas e recentes observações da Lua, e também devido aos enormes trabalhos de Hansen e Delaunay na teoria de seu movimento, que os métodos necessitavam de extensão e verificação, caso um teste da lei Newtoniana, para o grau de exatidão das observações, fosse requerido. Em relação à primeira questão, um novo conjunto de problemas deveria ser formulado e um avanço feito em direção a sua solução; para a última questão, novos procedimentos eram praticamente necessários, pois era quase certo que ninguém repetiria cálculos já existentes para entendê-los tanto quanto fosse humanamente possível com os métodos adotados. Esses dois lados nos trabalhos de Hill eram bastante distintos, embora ambos*

> *tenham começado a partir da mesma memória.*[30] (Brown, 1916, p. 281, tradução nossa)

Portanto, os estudos de Hill foram muito importantes, visto que deram um novo impulso às pesquisas em Mecânica Celeste.

Em 1881, o finlandês Hugo Gyldén, diretor do observatório de Estocolmo, começou a publicar uma série de trabalhos sobre movimentos planetários, como por exemplo, *Sur la théorie du mouvement des corps celestes*.[31] Gyldén desenvolveu um novo método para calcular movimentos de corpos rígidos.

Sobre Gyldén, Poincaré afirmou:

> *O cientista que tem dado a esse ramo da astronomia o mais eminente serviço é, sem dúvida, Gyldén. Seu trabalho alcança todas as partes da Mecânica Celeste, e ele usa com facilidade todos os recursos da análise moderna. Gyldén conseguiu eliminar inteiramente de seu desenvolvimento todos os termos seculares, que tanto incomodaram seus antecessores.* (Poincaré, 1892, p. xxii, tradução nossa)

O sistema estudado por Gyldén consistia do Sol e de dois planetas, que ele chamou de perturbante e perturbado, estando os três corpos se movendo em um mesmo plano. Em qualquer instante, o movimento do planeta perturbado é considerado sobre um plano em movimento, que passa pelo Sol, e que é chamado de plano da órbita instantânea.

Sejam r a distância do Sol ao planeta perturbado, υ o ângulo formado por uma perpendicular ao plano da órbita instantânea e r, chamado de longitude real do planeta, Ω a função perturbação e M a soma das massas do Sol e do planeta perturbado. As equações diferenciais para que descrevem movimento do corpo perturbado serão

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(r^2 \dfrac{d\upsilon}{dt}\right) = M\dfrac{d\Omega}{d\upsilon} \\ r\dfrac{d^2r}{dt^2} - r^2\left(\dfrac{d\upsilon}{dt}\right)^2 + \dfrac{M}{r} = M\dfrac{d\Omega}{d\upsilon} \\ \dfrac{d^2(zr)}{dt^2} + Mzr = f \end{cases}$$

onde f é uma função das posições dos planetas.

[30] Hill (1877).

[31] Para referências sobre os trabalhos de Gyldén, consultar Whittaker (1899).

As equações diferenciais que representam o movimento do planeta perturbado são resolvidas por meio da soma de termos periódicos, cujos argumentos são funções lineares do que Gyldén chama de longitude real do planeta. Os termos que são anulados, quando consideramos a massa do planeta igualada a zero, são chamados *termos coordenados*, enquanto aqueles que não são anulados são chamados de *termos elementares*.

Se todos os termos coordenados são removidos na expressão para coordenadas então, a expressão modificada irá conter somente termos elementares e irá definir uma nova órbita próxima verdadeira. Essa nova órbita é chamada de *órbita absoluta*. Substituindo a expansão da função perturbação nas equações diferenciais e integrando-as, obtemos a solução das equações diferenciais. As seis constantes de integração são elementos que corrigem a órbita absoluta, para que ela se torne uma órbita verdadeira do planeta perturbado.

Sobre o método de Gyldén, Hill comentou:

> *Talvez os trabalhos mais notáveis em nosso assunto, durante o período de tempo que consideramos* [a partir da metade do século XIX], *são aqueles do professor Gyldén e do senhor Poincaré.* [...] *As vantagens alegadas pelo seu método* [método de Gydén] *são que impedem que o tempo apareça fora de funções trigonométricas, e que tal fato permite escapar de todas as críticas sobre convergência. A primeira vantagem é facilmente admitida, mas muitos métodos mais simples, que possuem essa vantagem, já foram elaborados, e não é tão claro que a segunda vantagem seja garantida. Nenhum outro artigo, como exemplo da aplicação de seu método, foi publicado. O grande trabalho envolvido irá naturalmente intimidar investigadores que tenham o intuito de empregá-lo.* (Hill, 1896, p. 130-133, tradução nossa)

Além de envolver transformações complicadas combinadas com um processo extremamente complexo, foi provado por Poincaré que as séries de Gyldén divergiam, como veremos no capítulo III. Apesar de tal fato, Poincaré era um grande admirador do trabalho de Gyldén, a quem agradeceu as contribuições dadas à Mecânica Celeste nos dois primeiros volumes de *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste.*[32]

[32] O trabalho de Gydén culminou em 1893, com a publicação do primeiro volume de uma série de três volumes dedicados a sua teoria. Porém, devido a sua morte em 1896, os outros dois volumes não chegaram a ser completados.

Com o intuito de simplificar o método de Gyldén, Lindstedt começou a estudar tal questão. No ano de 1883, na memória *Beitrag zur integration der differentialgleichungen der störungstheorie*, Lindstedt considerou uma classe de equações diferenciais de segunda ordem que desempenhava um papel importante na teoria das perturbações e, em particular, na teoria de Gyldén.

Essas equações têm a forma geral

$$\frac{d^2x}{dt^2}+n^2x=\alpha\Phi\left(x,t\right),$$

onde $\Phi\left(x,t\right)$ é uma função expandida em potências crescentes de x. Ele introduziu um método de integração para essa classe de equações diferenciais. O método de Lindstedt evita termos seculares e mostra como as equações podem ser satisfeitas por x expandido como uma série trigonométrica.

Lindstedt não discutiu as condições de convergência de suas séries por considerar tal questão difícil. Tal fato se deve, segundo ele, *ao atual estado da Análise*.[33]

No mesmo ano, Lindstedt aplicou o método ao problema dos três corpos. Ele começou considerando as equações diferenciais dos movimentos relativos de dois corpos de massas m e m' em torno de outro de massa M, que são

$$\begin{cases}
\dfrac{d^2x}{dt^2}+x\left(\dfrac{M+m}{r^3}+\dfrac{m'}{\Delta^3}\right)=m'x'\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{r'^3}\right)\\
\dfrac{d^2x'}{dt^2}+x'\left(\dfrac{M+m'}{r^3}+\dfrac{m}{\Delta^3}\right)=mx\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{r^3}\right)\\
\dfrac{d^2y}{dt^2}+y\left(\dfrac{M+m}{r^3}+\dfrac{m'}{\Delta^3}\right)=m'y'\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{r'^3}\right)\\
\dfrac{d^2y'}{dt^2}+y'\left(\dfrac{M+m'}{r^3}+\dfrac{m}{\Delta^3}\right)=my\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{r^3}\right)\\
\dfrac{d^2z}{dt^2}+z\left(\dfrac{M+m}{r^3}+\dfrac{m'}{\Delta^3}\right)=m'z'\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{r'^3}\right)\\
\dfrac{d^2z'}{dt^2}+z'\left(\dfrac{M+m'}{r^3}+\dfrac{m}{\Delta^3}\right)=mz\left(\dfrac{1}{\Delta^3}-\dfrac{1}{r^3}\right)
\end{cases}$$

[33] Lindstedt (1884, p. 86).

onde r, r' e Δ representam as distâncias de M à m, de M à m' e de m à m', respectivamente. Supondo conhecidas as expressões para r, r' e Δ sob a forma de séries trigonométricas e substituindo nas equações anteriores, elas poderiam ser escritas da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \Phi x = \Psi' x' \\ \dfrac{d^2x'}{dt^2} + \Phi' x' = \Psi x \end{cases}$$

com expressões equivalentes para y, y', z, z'. Assim, como ele mostrou no trabalho de 1883, a partir de sucessivas aproximações, ele chega às coordenadas dos corpos como séries trigonométricas de quatro argumentos, cada um como função linear do tempo. Ele assume, erroneamente, que é possível escolher as constantes de integração de tal forma que a convergência possa ser garantida.

Embora haja falhas teóricas no trabalho de Lindstedt, de um ponto de vista prático, seu método era considerado muito útil, como afirmou Poincaré:

> *Lindstedt propôs séries que não são convergentes no sentido rigoroso da palavra, mas que podem render grandes serviços na prática, pois os termos das séries vão decrescendo muito rapidamente e tomando a soma de um pequeno número desses termos, só cometemos um erro muito baixo* [comparando com as observações]. (Poincaré, 1889, p. 21, tradução nossa)

A questão da divergência das séries de Lindstedt foi um dos importantes assuntos tratados na memória de Poincaré de 1890. Tal questão será analisada posteriormente.

Ao longo desse capítulo, discutimos os métodos clássicos utilizados para obtermos as coordenadas no problema dos três corpos. Como as equações diferenciais do problema não podem ser totalmente integradas, podemos obter somente aproximações para suas coordenadas. Partindo de uma primeira aproximação para a órbita dos corpos que era, como vimos, geralmente uma elipse, as coordenadas dos corpos eram obtidas por meio do cálculo das perturbações dos elementos dessa órbita. Tais processos envolviam muitas transformações e inúmeros cálculos, para obter os elementos das órbitas com o grau de precisão desejado.

Os problemas advindos do uso de séries para representar as coordenadas dos corpos, como a lenta convergência e a presença de termos seculares, levaram à necessidade de novos métodos para se tratar o problema, principalmente para responder as questões ligadas à estabilidade. Esses novos métodos começaram a ser desenvolvidos por Poincaré em 1890, em sua memória *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, que estudaremos a seguir.

Capítulo 3

O ESTUDO DE POINCARÉ SOBRE O PROBLEMA DOS TRÊS CORPOS

No capítulo anterior, vimos que os métodos utilizados para o estudo do problema dos três corpos tinham como principal objetivo, devido à não integrabilidade do sistema, obter as coordenadas dos corpos através de séries infinitas. Além disso, essas séries deveriam fornecer boas aproximações para as soluções das equações diferenciais em relação às observações.

Poincaré, em seu estudo sobre o problema dos três corpos, promoveu uma mudança na maneira de analisar o problema. No lugar de calcular a trajetória que realiza cada corpo, Poincaré procurou entender o comportamento das trajetórias. Para isso, ele introduziu novas ferramentas e métodos que permitiram tratar do problema dos três corpos de uma maneira qualitativa. O estudo das inovações de Poincaré será tratado neste capítulo.

3.1 Introdução ao estudo qualitativo de equações diferenciais

Poincaré começou seu estudo sobre equações diferencias, na década de 1880. Nessa época, as pesquisas relacionadas ao estudo de funções, sendo definidas por meio de equações diferenciais, estavam centradas na análise de propriedades locais de uma solução para determinada equação diferencial.

Poincaré, em sua série de trabalhos *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, publicados em quatro partes nos anos de 1881, 1882, 1885 e 1886, apresentou uma descrição do comportamento das soluções de equações diferenciais na vizinhança de uma singularidade e utilizou uma variedade de conceitos e métodos procurando ter uma visão geral dessas soluções, sem resolver as equações diferenciais explicitamente.

Na introdução da primeira parte desse trabalho, Poincaré explicou que uma das motivações para seu estudo qualitativo era o problema dos três corpos:

> *Além disso, esse estudo qualitativo tem em si mesmo um interesse de primeira ordem. Várias questões importantes da análise e da mecânica são*

> *reduzidas a ele. Tomemos por exemplo o problema dos três corpos: não podemos nos perguntar se um dos corpos irá sempre permanecer dentro de certa região do céu ou mesmo se ele irá se mover indefinidamente; se a distância entre dois corpos irá crescer ou decrescer indefinidamente, ou mesmo se essa distância irá permanecer dentro de certos limites. Não podemos fazer mil questões desse tipo, que serão todas resolvidas quando construímos qualitativamente as trajetórias dos três corpos? E se consideramos um número maior de corpos, o que é a questão da invariabilidade dos elementos dos planetas, senão uma verdadeira questão da Geometria qualitativa desde que, ver que o eixo maior não tem variações seculares, é mostrar que ele oscila constantemente entre certos limites?* (Poincaré, 1881, p. 376-377, tradução nossa)

Poincaré começa construindo as curvas que são soluções da equação

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} \qquad (2.1)$$

onde X e Y são polinômios em x e y, sendo então $\frac{dy}{dx}$ uma função racional de também de x e y.[34]

Procurando relações entre diferentes curvas soluções da mesma equação diferencial, Poincaré procurou examinar o comportamento dessas curvas na vizinhança de pontos singulares, que são pontos situados na intersecção das curvas de equação $X(x, y) = 0$ e $Y(x, y) = 0$.

Ele estabeleceu, assim, uma classificação geral das soluções de equações bidimensionais em torno de pontos singulares, mostrando que existem quatro tipos de pontos singulares: nó, quando através dele passam um número infinito de curvas soluções; sela, quando por ele só passam duas soluções; foco, onde as curvas soluções se aproximam dele como uma espiral logarítmica e centro, em torno do qual as soluções são fechadas.

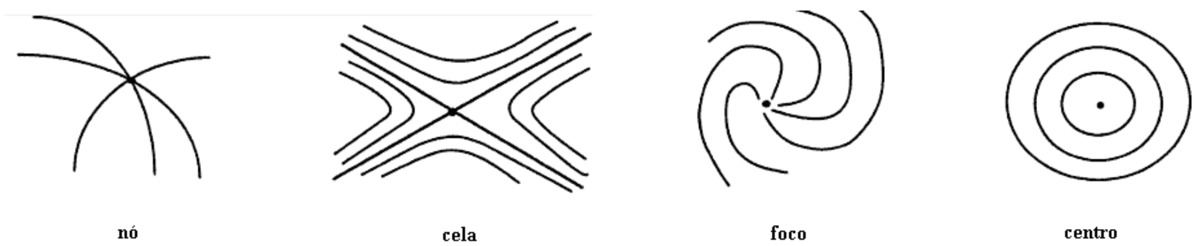

Figura 2.1

Fonte: Barrow-Green (1997, p. 32).

[34] Embora essa equação não tenha aplicação direta na Mecânica Celeste, a partir dos resultados obtidos em seu estudo, Poincaré os estendeu para sistemas mais complexos, como veremos em Poicaré (1890).

No espaço das soluções, hoje conhecido como *espaço de fases*, Poincaré introduziu a noção de arco transverso que permite a redução do estudo de uma curva no espaço bidimensional ao estudo de uma sequência de pontos na reta real. Posteriormente, Poincaré chegou a um resultado muito importante: entre todas as curvas que não tendem para um ponto singular, algumas são periódicas (chamadas de ciclos limites) e todas as outras vão se envolvendo assintoticamente em torno dos ciclos limites (figura 2.2). Essa afirmação lhe permitiu um conhecimento mais preciso das trajetórias de um sistema no espaço bidimensional.

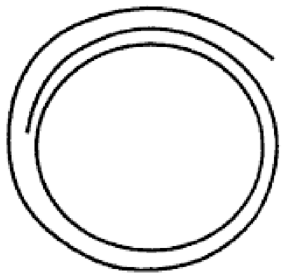

Figura 2.2
Fonte: Barrow-Green (1997, p. 33).

Para demonstrar a existência desses ciclos, Poincaré considerou uma curva solução não fechada C e uma outra curva L (arco transverso), que interceptava a primeira em infinitos pontos. Ele então introduz a ideia de *consequentes* (iterados), quer dizer, se M_1 e M_2 fossem dois pontos de interseção sucessivos, então M_2 era o consequente de M_1 (figura 2.3). Ele mostrou que a sequência de consequentes se aproxima de um limite H. Como H é seu iterado, a curva solução que passa por H é fechada e é então o ciclo limite para a curva C.

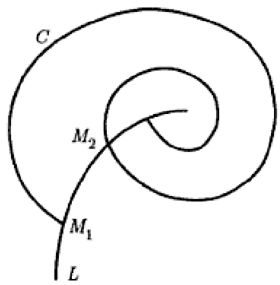

Figura 2.3
Fonte: Barrow-Green (1997, p. 34).

Os ciclos limites e os arcos transversos permitem subdividir o plano em regiões que fornecem, a partir da vizinhança de pontos singulares, um entendimento global das curvas soluções das equações diferenciais.

Nessa série de trabalhos, em que Poincaré se dedicou a uma análise de natureza qualitativa de equações diferenciais, ele introduziu ainda outras noções que viriam a desempenhar um papel muito importante em suas futuras pesquisas. Ele desenvolveu, por exemplo, a ideia de *superfície sem contato*, que é importante na aplicação do *método da secção transversa*.

Com o intuito de estudar o comportamento das trajetórias (soluções de equações diferenciais onde a variável independente é o tempo) das equações[35]

$$\frac{dx}{dt} = X, \frac{dy}{dt} = Y, \frac{dz}{dt} = Z \tag{2.2}$$

na vizinhança de uma trajetória fechada *C*, Poincaré construiu uma secção transversa Σ para cada ponto M de C. A secção transversa é um plano normal a *C* no ponto *M*. Seja P_0 um ponto da secção transversa, muito próximo de *M*. A trajetória de P_0, depois de realizado uma órbita na vizinhança da curva *C*, irá interceptar a secção transversa em um ponto P_1, dito iterado de P_0. A trajetória irá continuar e similarmente irá encontrar a secção transversa em um ponto P_2 com sua intersecção com o plano, e assim sucessivamente.

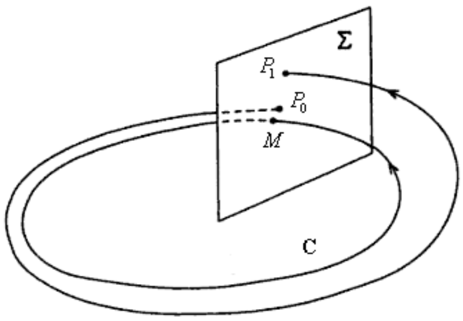

Figura 2.4

Esse método tornou possível reduzir o estudo de um conjunto de trajetórias no espaço tridimenional ao estudo de ume transformação de pontos definida sobre o plano normal. Assim, a investigação das trajetórias se reduz à investigação de uma sequência de iterados desta transformação.

[35] X, Y e Z são polinômios em x, y e z.

Ao estudar as equações (2.1), Poincaré procurou entender o comportamento das soluções na vizinhança dos pontos singulares. Ao analisar as soluções das equações (2.2), ele procurou analisar o comportamento das trajetórias na vizinhança das trajetórias fechadas. Ou seja, nesse último caso, as trajetórias fechadas, ou periódicas, desempenham papel análogo aos pontos singulares em (2.1).

Veremos, ao longo desse capítulo, que o uso de soluções periódicas para entender o comportamento das soluções de equações diferenciais foi de fundamental importância no estudo de Poincaré sobre o problema dos três corpos.

3.2 Primeiros trabalhos de Poincaré sobre o problema dos três corpos

A partir de 1882, com *Sur les séries trigonométriques*, Poincaré publicou uma série de trabalhos sobre a convergência de séries trigonométricas, estando interessado, em particular, nas séries obtidas por Gyldén e Lindstedt. Seu objetivo era estudar a convergência de séries da forma

$$\sum A_n \operatorname{sen} \alpha_n t + \sum B_n \cos \alpha_n t$$

que eram utilizadas pelo astrônomos para integrar equações diferenciais da forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + n^2 x = \Phi\left(x, t\right).$$

Em *Sur la convergence des séries trigonométriques*, de 1884, Poincaré mostrou que a convergência simples dessas séries não era condição suficiente para assegurar resultados sobre estabilidade, pois a série poderia assumir valores arbitrariamente grandes. Para isso, a série deveria ser uniformemente convergente.[36] Esse foi um resultado importante, pois os astrônomos acreditavam que bastava a convergência simples para estabelecer resultados relativos à estabilidade do Sistema Solar.

Poincaré também já considerava soluções particulares para o problema dos três corpos. Em 1884, publicou *Sur certaines solutions paticulières du problème des trois corps*, cujo resumo havia sido publicado um ano antes. Nesses trabalhos, Poincaré manifestou pela primeira vez o interesse no estudo de soluções periódicas.

---

[36] Em linguagem atual, uma série de funções $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função f em um conjunto X se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o resto $r_n\left(x\right)$, definido por $f(x) = f_1\left(x\right) + \ldots + f_n\left(x\right) + r_n\left(x\right)$ cumpre a condição $\left|r_n\left(x\right)\right| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$ e todo $x \in X$.

> *A solução geral do problema dos três corpos ainda está para ser encontrada e, apesar de termos, nos últimos tempos, fornecido desenvolvimentos puramente trigonométricos das distâncias mútuas, essas séries, que podem ser úteis na prática, não são teoricamente suficientes, porque a convergência só é verdadeira se demonstrada. Há, no entanto, certas soluções particulares para as quais essas relativas dificuldades em relação à convergência não existem: aquelas cujas distâncias mútuas são funções periódicas do tempo e que podemos chamar de soluções periódicas.* (Poincaré, p. 65, 1884, tradução nossa)

Poincaré demonstrou, considerando o caso em que duas das massas são relativamente pequenas em relação à terceira, que é possível escolher condições iniciais de maneira que as distâncias mútuas entre os corpos possam ser expressas como funções periódicas do tempo.

O movimento dos corpos é então periódico, visto que, considerando as posições dos corpos em determinado instante, depois de um certo período de tempo, os três corpos retornarão à mesma posição relativa.

Embora a ocorrência de soluções periódicas seja pequena, pois essas soluções ocorrem devido à escolha de valores particulares para os elementos orbitais iniciais, Poincaré percebeu a importância de estudar soluções vizinhas a elas.

Veremos em seguida como Poincaré empregou esse e outros novos métodos no trabalho que concorreu ao prêmio do rei Oscar II.

3.3 A competição do rei Oscar II

Em 1884, o matemático sueco Mittag-Leffler (1846-1927) se reuniu com o rei da Suécia e Noruega, Oscar II, e os dois decidiram organizar uma competição matemática com o intuito de comemorar os 60 anos do rei, fato esse que se daria em 21 de janeiro de 1889.[37] Mittag-Leffler, que era o editor-chefe de uma importante revista matemática, *Acta Mathematica*, ficou responsável pela organização de tal evento. A comissão do concurso foi formada pelo matemático francês Charles Hermite, pelo matemático alemão Karl Weierstrass e pelo próprio Mittag-Leffler.[38]

O anúncio oficial da competição se deu em 1885 e visava à resolução de quatro questões principais: o problema dos *n* corpos, que se propunha especialmente a responder a

[37] Para mais detalhes sobre a competição do rei Oscar II e o trabalho vencedor de Poincaré, ver Barrow-Green (1997).

[38] O concurso do rei Oscar II oferecia como prêmio uma medalha de outro, no valor de mil francos, e uma quantia de duas mil e quinhentas coroas (moeda sueca), que hoje equivaleria a pouco menos de R$ 625,00. Contudo, o item mais valioso para os interessados no concurso era o prestígio acadêmico.

questão da estabilidade do sistema solar; uma análise detalhada da teoria de equações diferenciais de Fuchs; maiores investigações em equações diferenciais não lineares de primeira ordem estudadas por Briot e Bouquet e um estudo das relações algébricas conectando funções Fushsianas de Poincaré que tem o mesmo grupo de automorfismo. Porém, se nenhuma das memórias enviadas fosse merecedora do prêmio, este poderia ir para a memória que contivesse uma solução completa de uma importante questão da teoria de funções, diferentes das propostas pela comissão.

Os trabalhos deveriam ser enviados ao editor chefe da revista, Mittag-Leffler, antes do dia 1º de junho de 1888, e eles deveriam ser enviados anonimamente, sendo identificado apenas por uma epígrafe e acompanhado por um envelope selado, contendo a epígrafe, o nome e endereço do autor. Ao todo, foram enviados doze trabalhos à competição. Uma lista com os títulos dos trabalhos e suas respectivas epígrafes foi publicada na *Acta Mathematica* 11, em 1888. Cinco dos trabalhos se relacionavam à primeira questão, incluindo o de Poincaré, um se destinava à resposta de terceira questão e os seis restantes tratavam de outros tópicos, diferentes das questões propostas pela competição.

Os trabalhos foram numerados de acordo com a ordem em que foram enviados:

1- *Mémoire sur l'équation trinôme de degré impar* $x^m \pm x = r$;
2- *Nuova Teoria dei Massimi e Minimi degli Integrali definiti*;
3- *Algemeine Entwicklung der Functionen* (acompanhado de uma versão em francês: *Développement général des fonctions*);
4- *Les Fonctions Pseudo- et Hyper-Bernoulliennes et leurs premières applications*- Contribuition élémentaire à l'intégration des équations différentielles;
5- *Uber die Bewegungen in einem System von Massepunkten mit Kräften der Form* $-\frac{1}{r^2}$;
6- *Intégration des équations simultanées aux derives partielles du premier ordre d'un nombre quelconque de functions de plusieurs variables indépendantes*;
7- *Uber die Integration der Differentialgleichungen, welche die Bewegungen eines Systems von Punten bestimmen* (com uma tradução em francês: *Sur l'intégration des équations différentielles qui déterminent les mouvements d'un système de points matériels*);
8- *Sur les intégrales de functions à multiplicateurs et leur application au développement des functions abéliennes en séries trigonométriques*;

9- *Sur le Problème des trois Corps et les Équations de la Dynamique*;

10- *Sur le Problème des trois Corps*;

11- *Uber die Bewegung der Himmelskörper im widerstehenden Mittel;formule*;

12- *Recherches sur la sommatoire d'Euler.*

Quando Poincaré enviou seu trabalho, era claro que sua leitura sobre as regras do concurso haviam sido um tanto superficiais. Em vez de enviar um envelope selado contendo seu nome, Poincaré enviou, em 17 de maio de 1888, uma carta de apresentação assinada e ainda contendo uma nota pessoal para Mittag-Leffler:

> *Senhor, eu tenho a honra de vos endereçar em anexo uma memória destinada ao concurso para o prêmio fundado pro Sua Majestade o rei da Suécia. Essa memória está inscrita sob o lema: "Nunquam præsciptos transibunt sidera fines."*[39] (La Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sob a direção de *Archives Henri Poincaré*, tradução nossa)

Tal ato de Poincaré, segundo Barrow-Green (1997), não deve ser tomado como um menosprezo às regras da competição. Isso porque, além do fato de que Hermite e Mittag-Leffler já estivessem cientes da entrada de Poincaré na competição, o autor poderia ser facilmente reconhecido pelo conteúdo do texto, que era o desenvolvimento de seus trabalhos em equações diferenciais, comentados anteriormente. Excluindo o trabalho de Poincaré, somente outros três trabalhos foram até agora identificados, que foram os de números 4, 8 e 10.[40]

Inicialmente, os membros da comissão pensaram que o trabalho de número 8 era de um aluno de Paul Appell (1855-1930), professor de mecânica na Universidade de Sorbonne, por conter uma referência a ele. Como podemos confirmar pela carta Mittag-Leffler a Hermite, datada de 8 de junho de 1888:

> *Nós recebemos um número muito grande de memórias, mas eu creio que não há pouco mais que três que são dignas de consideração. Primeiro a memória de Poincaré, que parece ser de uma importância extrema e que receberá, não tenho dúvida, o prêmio. Depois, uma memória de um aluno de Appell sobre o desenvolvimento de funções Abelianas em séries trigonométricas e ainda uma memória vinda de Heidelberg, onde a primeira questão é tratada do ponto de vista astronômico.* (La

[39] *Nunquam praescriptos transibunt sidera fines*= Nada excede o limite das estrelas.

[40] Os autores dos trabalhos 4 e 10 foram identificados devido a cartas que trocaram com os membros da comissão do concurso, após o anúncio do vencedor. O autor do trabalho de número 4 era Guy de Longchamps, um professor de Paris, e o autor do número 10 era Jean Escary, um professor da Escola Militar de La Fleche, que depois se tornou professor do Lycée de Constantine, na Argélia (Barrow-Green, 1997).

> Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sob a direção de *Archives Henri Poincaré*, tradução nossa)

Mas logo os membros da comissão perceberam que o trabalho era de autoria do próprio Appell (Barrow-Green, 1997, p. 62).

Grande parte da avaliação dos trabalhos enviados à comissão da competição foi feita por meio de correspondências. Um dos editores da *Acta*, Edvard Phragmén (1863-1937), foi incumbido da tarefa de fazer uma avaliação desses doze trabalhos. Como vimos acima, na carta de Mittag-Leffler a Hermite, os trabalhos considerados mais interessantes foram o de Poincaré, o de Appell e um vindo da cidade alemã de Heidelberg, correspondente ao de número 5. Além disso, já era dada como certa a premiação a Poincaré.

Embora a decisão tenha sido tomada rapidamente, o trabalho de Poincaré era difícil de ser entendido, por conter vários novos resultados e ideias, além de ser extenso.[41] Como os três membros da comissão estavam com dificuldades em várias partes da memória de Poincaré, e como Mittag-Leffler decidiu que a versão entregue ao rei deveria ser o mais completa possível, ele pediu a Poincaré, antes do anúncio do resultado final da competição, que esclarecesse algumas questões referentes a sua memória. Em 15 de novembro de 1888, ele escreveu a Poincaré:

> *Meu querido amigo; Hermite, Weierstrass e eu mesmo enfim chegamos ao final do estudo de sua memória. Eu me permitirei lhe confiar, sob a permissão de maior segredo, que nós somos da opinião unânime de que você fez uma obra prima de primeira espécie e que a publicação de sua memória será o começo de uma nova época na Mecânica Celeste. Mas eu não vou esconder que o estudo de seu trabalho nos pareceu oferecer dificuldades muito grandes. Você frequentemente omitiu demonstrações de teoremas muito gerais e muito difíceis, para as quais forneceu indicações tão curtas que é necessário atormentar-se durante dias antes que se possa conseguir medir exatamente a profundidade de suas ideias. Weierstrass me perguntou se eu não me oporia em propor a você, visto a amizade que você há muito me deu a honra, anexar à sua memória, antes que ela seja publicada, alguns desenvolvimentos sobre os pontos essenciais que foram ali tratados, de uma maneira muito breve. Minha resposta a Weierstrass é que eu não hesito em escrever-lhe porque sei bem que você não leva a mal propostas com interesse exclusivo da ciência e para facilitar a difusão de suas ideias. Dentre esses pontos que me parecem dever ser mais aprofundados, um é a sua proposição de que os desenvolvimentos do tipo de Lindstedt são divergentes. Eu passei um mês todo, durante esse verão, na casa de Weierstrass, ocupado unicamente no estudo de sua memória. Quando eu parti, nós ainda não tínhamos conseguido entender como você demonstrou essa proposição. Weierstrass me escreveu agora que ele está convencido de que você tem razão. Mas eu creio que a memória ganharia*

[41] A primeira versão enviada por Poincaré continha 158 páginas.

> *muito se você quisesse tratar em detalhes esse ponto que será, como você não duvida, fortemente discutido.* (La Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sob a direção de *Archives Henri Poincaré*, tradução nossa)

Como resultado ao pedido de Mittag-Leffler, Poincaré anexou notas ao seu trabalho, que somavam mais 93 páginas à memória original.

Poincaré foi anunciado oficialmente como vencedor da competição em janeiro de 1889. Em julho de 1889, Phragmén alertou Mittag-Leffler de que havia alguma coisa errada com o trabalho vencedor. Poincaré, em dezembro do mesmo ano, confirmou a Mittag-Leffler que realmente havia um erro em seu trabalho, fato este que não foi muito bem recebido pelo editor-chefe da *Acta*, visto que alguns números da revista com o trabalho vencedor do prêmio já tinham sido impressos e alguns já estavam até circulando. [42]

Como consequência, o volume 13 da revista, com a segunda versão, corrigida e estendida, do trabalho vencedor *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* e com o trabalho de Appell, que recebeu uma menção honrosa, só foram oficialmente publicados em novembro de 1890.

Poincaré cita o erro na introdução na segunda versão de seu trabalho, apesar de não indicar em que parte da memória se encontrava, fato esse explicitado a seguir:

> *Eu devo muitos agradecimentos ao senhor Phragmén, que não somente reviu as demonstrações com muito cuidado, mas que leu a memória com atenção e que entendeu seu sentido com grande refinamento, e me mostrou os pontos onde explicações complementares lhe pareciam necessárias para facilitar o entendimento completo de meu pensamento. Eu lhe devo a forma elegante que dou ao cálculo de* S_i^m *e de* T_i^m *ao fim da seção 12. Foi ele mesmo que, chamando minha atenção sobre um ponto delicado, me permitiu descobrir e retificar um importante erro.* (Poincaré, 1890, p. 5, tradução nossa)

O erro cometido por Poincaré, em seu primeiro trabalho enviado à comissão, levou à descoberta de um fato de considerável importância. Os resultados a que Poincaré chegou posteriormente permitem concluir que sistemas deterministas simples podem apresentar um comportamento extremamente complexo. Trataremos desse erro mais adiante.

O trabalho de Poincaré tratava de uma versão simplificada do problema dos *n* corpos: o problema restrito dos três corpos. Como vimos, no problema restrito são consideradas três massas com as seguintes características: a primeira massa muito grande, a segunda pequena, mas finita e a terceira, infinitamente pequena. As duas massas menores realizam um

[42] O erro de Poincaré é estudado detalhadamente em Barrow-Green (1997).

movimento circular em torno do seu centro comum de gravidade e a terceira se move no mesmo plano que as outras duas massas, sendo que seu movimento é perturbado pelas massas maiores, mas sua presença não exerce nenhuma influência sobre o movimento delas. Dessa forma, podemos conhecer o movimento das massas maiores, pois o problema dos dois corpos já havia sido resolvido, e o que faltava então era determinar as coordenadas do terceiro corpo.

Ainda na introdução da memória corrigida, Poincaré afirma estar longe de resolver completamente o problema por ele abordado e que seu estudo é focado especialmente em um caso particular do problema dos três corpos, o problema restrito dos três corpos. Com base nesse estudo, ele diz ter concluído que os três corpos passarão uma infinidade de vezes muito próximos de suas posições iniciais, a menos de certas condições iniciais excepcionais.

Ele também chama atenção para os resultados negativos que são apresentados no fim da memória. Por exemplo, Poincaré chegou à conclusão de que não existe, fora as integrais conhecidas, nenhuma outra integral analítica e uniforme para o problema dos três corpos. Logo, a possibilidade de uma solução completa desse problema, se possível, exigiria instrumentos analíticos absolutamente diferentes e infinitamente mais complicados do que ele conhecia. Ao contrário da introdução do trabalho originalmente apresentado à comissão do concurso, onde Poincaré parecia possuir certo otimismo com a resolução do problema, após a descoberta do erro, essa resolução perde seu ar de inevitabilidade.

O trabalho de Poincaré é dividido em duas partes, sendo a primeira composta por três capítulos, onde ele tratou das propriedades gerais das equações diferenciais, da teoria das invariantes integrais e da teoria das funções periódicas. A segunda parte é composta por quatro capítulos, onde o autor aplica os resultados obtidos na primeira parte ao problema restrito dos três corpos. No final de sua memória, Poincaré apresenta resultados diversos, onde trata, por exemplo, da divergência das séries de Lindstedt, que foi um dos pontos para os quais Mittag-Leffler havia pedido maiores esclarecimentos.[43]

3.4 *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*

Poincaré estudou o caso do problema restrito dos três corpos quando as três massas se movem em um mesmo plano. Como já dissemos anteriormente, a massa de um corpo A é muito grande, a de um corpo B é bem pequena e a de em corpo C é desprezível, não perturbando o movimento dos outros dois corpos maiores. Então, podemos supor que A e B

[43] Uma maior discussão sobre as opiniões dos membros da comissão do prêmio acerca do trabalho de Poincaré é feita no próximo capítulo.

se movem segundo as leis de Kepler. Poincaré supõe também que as excentricidades das órbitas de A e B são nulas, de tal forma que essas duas massas descrevem, em torno de seu centro de gravidade, circunferências. Portanto, o problema se reduz a estudar o movimento de C, sob a atração de A e B, no plano dessas circunferências.

Ele diz que esse é o caso, por exemplo, de um pequeno planeta se movendo sob a infuência do Sol e de Júpiter, quando negligenciamos a excentricidade da órbita de Júpiter e a inclinação dessas órbitas. O problema restrito dos três corpos modela também o caso da Lua se movendo sob a influência do Sol e da Terra, quando negligenciamos a excentricidade da órbita terrestre e a inclinação da órbita lunar sobre a eclíptica.

Ele definiu a posição do planetóide através do uso dos elementos osculadores, isto é, pelas variáveis definidas por meio da elipse instantânea descrita pelo planetóide em torno do centro de gravidade do sistema. Poincaré, se referindo ao corpo C, designa por a o eixo maior, e a excentricidade, n o movimento médio, y_2 a anomalia média e g a longitude do periélio. Considerando $1-\mu$ a massa de A e por μ a massa de B, sendo μ será uma quantidade pequena. Ele escolhe as unidades e a origem de maneira que a constante gravitacional seja 1, e a longitude igual a t.

Considerando

$$x_1 = \sqrt{a\left(1-e^2\right)},\ x_2 = \sqrt{a},\ y_1 = g - t$$

F será a função perturbação acrescida de $x_1 + \dfrac{1}{2x_2^2}$, e as equações que descrevem o movimento do corpo C são, sob a forma Hamiltoniana[44]

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ &\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_2}. \end{aligned} \qquad (2.3)$$

A função F poderá ser desenvolvida por meio de potências de μ, ou seja, pode ser escrita da forma

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

onde

[44] Tais sistemas de equações são tratados por Poincaré pelo nome de *équations de la dynamique*, como no título de seu trabalho. Em vez de usar a expressão de Poincaré, iremos nos referir a essas equações como sistemas Hamiltonianos, como em Barrow-Green (1997).

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

e $F_1, F_2 ...$ são funções de todas as variáveis x, y e periódicas de período 2π com relação a cada y.[45]

A função F depende das quatro variáveis x_1, x_2, y_1, y_2 sendo x_1, x_2 variáveis lineares enquanto y_1, y_2 são variáveis angulares de período 2π. Em relação às equações (2.3), temos que F é uma integral particular desse sistema, conhecida como integral de Jacobi. Essa integral é expressa da forma

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = K$$

ou seja, as quantidades x_1, x_2, y_1 e y_2 são relacionas pela igualdade anterior, onde K é uma constante. Logo, para determinar a situação do sistema, é suficiente conhecer três dessas quantidades. Dessa forma, é possível representar cada estado do sistema por um ponto no espaço tridimensional.

O conhecimento dessa integral permite, é claro, a redução da ordem do sistema em uma unidade. Assim, as equações do movimento do planetóide, de ordem quatro, são reduzidas para ordem três.

A representação de cada estado do sistema (2.3) envolve o uso das quatro variáveis x_1, x_2, y_1 e y_2. O objetivo de Poincaré é representar o sistema utilizando somente três variáveis. Para $\mu = 0$, Poincaré considerou uma nova variável

$$\xi = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}.$$

Para pequenos valores de μ a expressão para ξ é a mesma, segundo Poincaré, desde que $x_2 > 0$ e que o determinante funcional (que hoje chamamos de Jacobiano) $\dfrac{\partial(\xi, F)}{\partial(x_1, x_2)}$ não seja nulo. Portanto, ξ pode ser escolhida como variável independente para pequenos valores do parâmetro de massa μ.

Seja

[45] Para obter essas equações, Poincaré utilizaou o trabalho do matemático François Félix Tisserand (1845-1896), *Sur la commensurabilité des moyens mouvements dans le système solaire*, de 1887.

$$\begin{cases} x_1^{'} = x_1 + x_2 \\ y_1^{'} = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^{'} = x_1 - x_2 \\ y_2^{'} = \frac{1}{2}(y_1 - y_2). \end{cases}$$

Após essa mudança de variáveis, as equações conservam a forma canônica

$$\frac{dx_1^{'}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1^{'}}, \frac{dx_2^{'}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_2^{'}}$$

$$\frac{dy_1^{'}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1^{'}}, \frac{dy_2^{'}}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_2^{'}}.$$

Além disso, $y_1^{'}$ e $y_2^{'}$ são ainda variáveis angulares. Considerando

$$X = e^{\xi \cos y_2^{'}} \cos y_1^{'},\ Y = e^{\xi \cos y_2^{'}} seny_1^{'},\ Z = \xi seny_2^{'},$$

Poincaré conseguiu então criar uma representação geométrica para o problema restrito dos três corpos no espaço tridimensional.

Antes de tratar desse problema, Poincaré forneceu a base teórica para as principais ferramentas de que ele faria uso, sendo que muitas delas já haviam sido introduzidas em seus trabalhos anteriores, como *Sur les courbes définies par une équation différentielle*. A primeira parte da segunda versão sua memória foi utilizada para expor esses resultados, ocupando as primeiras 158 páginas. Depois, das páginas 166 a 227, ele aplicou os resultados obtidos ao problema restrito dos três corpos. A seguir, iremos expor alguns dos tópicos mais importantes relacionados à primeira parte do trabalho.

3.4.1 Invariante integral

As principais técnicas matemáticas utilizadas por Poincaré em seu trabalho foram seus próprios métodos geométricos, apresentados em trabalhos anteriores e uma nova ferramenta denominada invariante integral, que permitiu aplicar os métodos geométricos às equações da dinâmica. Além disso, Poincaré introduziu o conceito de *invariante integral*. Consideremos um sistema de equações diferenciais da forma

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i$$

onde X_i são funções dadas das variáveis $x_1,...,x_n$.

Suponhamos que essas equações definam o movimento de um ponto com coordenadas $(x_1,..., x_n)$ em um espaço com dimensão n. Se as posições iniciais de um número infinito de pontos formam um arco de curva *C* em um espaço n dimensional, então, em um tempo *t* eles irão formar um arco de curva deslocado *C'*, cuja forma é determinada pelas equações diferenciais. A invariante integral de um sistema é uma expressão $\int \sum V_i dx_i$, cujo valor é mantido constante para todo tempo *t*. Nesse caso, V_i são funções de *x* e a integração é tomada sob o arco da curva.

Para fornecer uma interpretação geométrica da ideia, Poincaré utilizou o exemplo do movimento das moléculas do fluido incompressível,[46] que é descrito por meio de equações diferenciais da forma

$$\frac{dx}{dt} = X\,,\ \frac{dy}{dt} = Y\,,\ \frac{dz}{dt} = Z$$

com a condição de que

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Nessas equações, X, Y e Z correspondem às componentes da velocidade de uma molécula, sendo funções de x, y e z, que são as coordenadas dessa molécula. Suponhamos que as moléculas ocupem um certo volume em um instante inicial. As moléculas se deslocarão mas, em virtude da incompressibilidade do fluido, o volume que essas moléculas ocuparão permanecerá invariável.

Em outros termos, a integral tripla

$$\int\int\int dxdydz$$

será uma integral invariante. A definição de invariante integral foi relacionada à estabilidade de soluções para o problema restrito dos três corpos. Poincaré utilizava a definição de estabilidade que é conhecida por *estabilidade Poisson*.

Segundo essa definição, o movimento de um ponto *P* é dito estável se ele retorna a posições arbitrariamente próximas de sua posição inicial. A partir desses conceitos, ele enunciou o teorema da recorrência que afirma que, se um sistema com três graus de liberdade tem o volume é preservado, ou seja, o volume é um invariante integral, então existe um número infinito de soluções que são estáveis no sentido de Poisson.

[46] Um fluido incompressível é qualquer fluido cuja densidade se mantém constante apesar das variações na pressão e na temperatura.

3.4.2 Soluções periódicas e expoentes característicos

Consideremos um sistema de equações diferenciais da forma

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ldots, \frac{dx_n}{dt} = X_n, \qquad (2.4)$$

onde $X_1, \ldots, X_n$ são funções analíticas de n variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

Seja uma solução particular para (2.4) da forma $x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$. A partir da solução particular e de uma vizinhança $x = \varphi + \xi$, ele definiu as equações variacionais

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1}\xi_1 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n}\xi_n. \qquad (2.5)$$

Posteriormente, ele considerou o caso em que $n = 3$. Dessa maneira, podemos considerar x_1, x_2, x_3 como as coordenadas de um ponto *P* no espaço. Logo, as equações

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \ \frac{dx_2}{dt} = X_2, \ \frac{dx_3}{dt} = X_3$$

definem a velocidade do ponto *P* em função de suas coordenadas. À medida que o tempo varia, o ponto *P* descreverá certa curva no espaço, que é chamada de trajetória. A cada solução particular corresponde uma trajetória. Considerando o conjunto de trajetórias passando por uma dada curva o espaço, ele formou uma superfície que chamou de superfície de trajetória. Poincaré afirma, então, que um sistema é dito estável se todas as suas superfícies de trajetórias são fechadas. Ou seja, se, para qualquer ponto *P*, tivermos que *P* permanece dentro de uma região limitada do espaço.

Uma solução particular de (2.4) é dita periódica com período h se, quando x_i é uma variável linear,

$$\varphi_i(t+h) = \varphi_i(t)$$

e, quando x_i é uma variável angular,

$$\varphi_i(t+h) = \varphi_i(t) + 2k\pi$$

onde *k* é inteiro.

Poincaré estudou também as equações da forma (2.4) quando X_i são funções de x, e de um parâmetro μ. Para $\mu = 0$, assumindo a existência de uma solução periódica, Poincaré mostrou que essa solução periódica poderia ser analiticamente estendida para pequenos valores do parâmetro μ.

Se, para $\mu = 0$, as equações têm uma solução periódica de período T e, para pequenos valores do parâmetro de massa

$$x_i(0) = \varphi_i(0) + \beta_i, \quad x_i(T+\tau) = \varphi_1(0) + \beta_i + \Psi_i$$

onde Ψ_i são funções analíticas de $\mu, \beta_1, \ldots, \beta_n, \tau$, então existirão soluções periódicas para pequenos valore do parâmetro de massa se for possível resolver as n equações

$$\Psi_1 = \ldots = \Psi_n = 0$$

em relação a $\beta_1, \ldots, \beta_n, \tau$.

Poincaré mostrou que, escolhendo, para algum i, $\beta_i = 0$, então uma condição suficiente para a existência de soluções periódicas para pequenos valores de μ é que

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \beta_n} & \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial \beta_n} & \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial \tau} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial \Psi_n}{\partial \beta_1} & \cdots & \dfrac{\partial \Psi_n}{\partial \beta_n} & \dfrac{\partial \Psi_n}{\partial \tau} \end{vmatrix} \neq 0$$

para $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Depois de demonstrar a existência de soluções periódicas para pequenos valores de μ, Poincaré se voltou para a questão se sua estabilidade. Sendo $\varphi(t)$ uma solução periódica de (2.4), ele estudou o comportamento de soluções em sua vizinhança a partir das equações variacionais (2.5).

Como as equações variacionais são equações diferenciais lineares com respeito a ξ e seus coeficientes $\dfrac{dX_i}{dx_k}$ são funções periódicas de t, existem n soluções particulares da forma

$$\xi_{1.k} = e^{\alpha_k t} S_{1k}, \ldots, \xi_{n.k} = e^{\alpha_k t} S_{nk}, \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Na expressão acima, α são constantes e S_{ik} são funções periódicas de t com o mesmo período de $\varphi(t)$. Poincaré chamou as constantes α de expoentes característicos da solução periódica, e elas são importantes para a questão da estabilidade. Se α é puramente imaginário tal que seu quadrado é negativo, o módulo de $e^{\alpha t}$ é constante e igual a um.[47] Caso

[47] O módulo de $e^{\alpha t}$ será um pois $e^{\alpha t} = \cos \alpha t + i \operatorname{sen} \alpha t \Rightarrow \left| e^{\alpha t} \right| = \sqrt{\cos^2 \alpha t + \operatorname{sen}^2 \alpha t} = 1$.

α seja real, ou seja, complexo de tal forma que seu quadrado não é real, o módulo de $e^{\alpha t}$ tende ao infinito de $t = \pm\infty$. Portanto, se α, elevado ao quadrado, é negativo e real, as quantidades $\xi_1, \ldots, \xi_n$ permanecem finitas, logo, a solução periódica $x_i = \varphi_i(t)$ é estável. Caso contrário, a solução é dita instável.

Com relação aos sistemas Hamiltonianos autônomos, ou seja, onde F é independente do tempo, ele concluiu que os expoentes característicos podem sempre ser colocados em pares de igual magnitude, mas de sinais opostos. As n quantidades α^2, assim obtidas, ele chamou de coeficientes de estabilidade da soução periódica.

3.4.3 Soluções periódicas de sistemas Hamiltonianos

Consideremos o sistema Hamiltoniano

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (2.6)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

assumindo que F é uma função independente do tempo e que possa ser expandida da forma

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

onde F_0 é uma função de x e $F_1, F_2 \ldots$ são funções das variáveis x, y e periódicas de período 2π com relação a cada y.

Quando $\mu = 0$, x_i são constantes e $y_i = n_i t + \varpi_i$, onde $n_i = -\dfrac{\partial F_0}{\partial x_i}$ e ϖ_i são constantes de integração. Para garantir a existência de uma solução periódica para $\mu = 0$, é é necessário e suficiente que n_1, n_2 e n_3 sejam comensuráveis entre eles. Desde que $\dfrac{\partial F_0}{\partial x_i}$ sejam independentes um do outro então, para $\mu = 0$, existirão um número infinito de escolhas para as constantes x_i que levarão a soluções periódicas. Além disso, o período T da solução periódica será o menor múltiplo comum das quantidades $\dfrac{2\pi}{n_1}$, $\dfrac{2\pi}{n_2}$ e $\dfrac{2\pi}{n_3}$.

O próximo passo do autor é investigar a existência de soluções periódicas para $\mu \neq 0$. Consideremos, para $\mu \neq 0$, uma solução particular, para $t = 0$, da forma

$$x_i = a_i + \delta a_i, \; y_i = \varpi_i + \delta\varpi_i$$

e, para $t = T$,

$$x_i = a_i + \delta a_i + \Delta a_i,\ y_i = \varpi_i + \delta\varpi_i + n_i T + \Delta\varpi_i.$$

Logo, a solução será periódica se

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \Delta\varpi_1 = \Delta\varpi_2 = \Delta\varpi_3 = 0.$$

Sendo F = **constante** uma integral do sistema (2.6) e F periódica com relação à y, essas equações não serão independentes. Portanto, é necessário então satisfazer apenas cinco dessas relações. Considerando F_1 como uma função periódica do tempo, e uma função ψ tal que

$$\int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial \varpi_2}\, dt = T\frac{\partial \psi}{\partial \varpi_2} \quad \text{e} \quad \int_0^T \frac{\partial F_1}{\partial \varpi_3}\, dt = T\frac{\partial \psi}{\partial \varpi_3}$$

então, as equações poderão ser satisfeitas desde que ϖ_2 e ϖ_3 sejam escolhidos tais que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varpi_2} = \frac{\partial \psi}{\partial \varpi_3} = 0$$

e que nem a Hessiana de ψ com relação a ϖ_2 e ϖ_3 nem a Hessiana de F_0 com relação a x_i^0 sejam nulas.

Poincaré mostra que as soluções periódicas, de período T, podem ser expressas na forma de séries convergentes em potências de μ

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0 + \mu x_i^1 + \mu^2 x_i^2 + \ldots \\ y_i &= y_i^0 + \mu y_i^1 + \mu^2 y_i^2 + \ldots \end{aligned} \qquad (i = 1,2,3).$$[48]

Essas demonstrações feitas por Poincaré, sobre a existência de soluções periódicas para pequenos valores do parâmetro μ, são aplicadas ao problema restrito dos três corpos. Todavia quando Poinaré considerou o problema dos três corpos, ele encontrou que a Hessiana com respeito a F_0 é nula. Assim, os resultados obtidos anteriormente não poderiam ser aplicados. Mas Poincaré conseguiu substituir nas equações Hamiltonianas a função F de maneira que o resultado pudesse ser válido. Ao considerar o problema dos *n* corpos, ele não conseguiu aplicar o mesmo método. Poincaré só resolveu esse problema no primeiro volume de *Les Méthodes Nouvelles da la Mécanique Céleste*, de 1892, demonstrando assim a existência de soluções periódicas no problema dos *n* corpos.

Para calcular os expoentes característicos do sistema Hamiltoniano, Poincaré começou com uma solução periódica para o sistema dada por $x_i = \varphi_i(t)$ e $y_i = \Psi_i(t)$. Seja uma

[48] Os coeficientes que acompanham *x* e *y* são índices, e não expoentes. (Poincaré, 1890, p. 111)

vizinhança dessa solução periódica dada por $x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$ e $y_i = \Psi_i(t) + \eta_i$. As equações variacionais são da forma

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \sum \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial x_k}\xi_k + \sum \dfrac{\partial^2 F}{\partial y_i \partial y_k}\eta_k \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\sum \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}\xi_k - \sum \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y_k}\eta_k \end{cases} \qquad (i,k = 1,2,3).$$

cujas soluções são expressas como

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i, \quad \eta_i = e^{\alpha t} T_i \qquad (2.6)$$

sendo S_i e T_i funções periódicas de t. Considerando um sistema Hamiltoniano autônomo, ele afirma que dois dos expoentes característicos são nulos, e então existem somente quatro soluções particulares.

Quando $\mu = 0$, F se reduz à F_0, e as equações variacionais são

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\eta_i}{dt} = -\sum \dfrac{\partial^2 F_0}{\partial x_i^0 \partial x_k^0}\xi_k \end{cases}$$

sendo os coeficientes da segunda equação constantes. Nesse caso, a solução geral é dada por $\xi_i = 0$ e $\eta_i = \eta_i^0$, onde η_i^0 são constantes de integração, e então os seis expoentes característicos são nulos.

Poincaré, para encontrar valores para as funções α, S_i, T_i que satisfazem (2.6), para pequenos valores de μ, procurou expansões em séries de potências desse parâmetro. Porém, como todos os expoentes característicos, para $\mu = 0$, são nulos, então α não pode ser expandido em potências inteiras do parâmetro, por não satisfazer, dessa forma, as condições de validade para o teorema da função implícita. Assim, Poincaré escreveu α, S_i, T_i como

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_1\sqrt{\mu} + \alpha_2\mu + \ldots \\ S_i = S_i^0 + S_i^1\sqrt{\mu} + S_i^2\mu + \ldots \\ T_i = T_i^0 + T_i^1\sqrt{\mu} + T_i^2\mu + \ldots \end{cases}$$

Com o intuito de calcular os coeficientes dessa série, ele primeiro substituiu essas séries em (2.6) e, posteriormente, diferenciou em relação ao tempo. Expandindo a segunda derivada de F como séries em potências inteiras de μ, ele realizou substituições nas equações variacionais e então determinou os coeficientes igualando as potências de μ. Assim, ele foi capaz de calcular os coeficientes de α, S_i, T_i.

3.4.4 Soluções assintóticas

Poincaré então voltou sua atenção para as soluções periódicas instáveis e o comportamento de outras soluções em sua vizinhança. Ele foi o responsável pela descoberta de uma nova classe de soluções, sendo que essas que se aproximam assintoticamente de uma solução periódica instável.

Essas soluções formam as chamadas superfícies assintóticas, que são superfícies formadas pelo conjunto de curvas que se aproximam assintoticamente de uma curva fechada *C*. Com a intenção de estudar as soluções periódicas instáveis, representadas geometricamente no espaço por uma curva fechada e duas superfícies assintóticas, Poincaré procurou entender o comportamento dessas soluções. Ele objetivava, então, chegar às equações exatas das superfícies assintóticas.

Consideremos o sistema

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sendo X_i funções de x e t.[49]

Seja $x_i = x_i^0$ uma solução periódica conhecida. Consideremos $x_i = x_i^0 + \xi_i$. Derivando um sistema para determinar ξ_i,

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i,$$

sendo Ξ funções de ξ e t, periódicas com relação a t e que podem ser expandidas em potências de ξ, além de não possuírem termos independentes de ξ. Se os valores de ξ são pequenos tais que possamos negligenciar seus quadrados, as equações se reduzem a

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0}\xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0}\xi_2 + \ldots + \frac{dX_i}{dx_n^0}\xi_n.$$

Elas são lineares e com coeficientes periódicos. Uma solução geral é da forma

$$\xi_i = A_1 e^{\alpha_1 t}\phi_{1i} + A_2 e^{\alpha_2 t}\phi_{2i} + \ldots + A_n e^{\alpha_n t}\phi_{ni}$$

---

[49] Nesse caso, o sistema é dito não-autônomo, pois as funções X_i são dependentes do tempo.

onde os coeficientes A_i são constantes de integração, os α_i são os coeficientes característicos e os ϕ's são funções periódicas de t.

Para resolver as equações quando as potências de ξ não são negligenciadas, Poincaré assume que

$$\xi_i = \eta_1\phi_{1i} + \eta_2\phi_{2i} + \ldots + \eta_n\phi_{ni}$$

e assim

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + \ldots + H_i^n + \ldots$$

onde H_i são funções de t e η da mesma maneira que Ξ, e H_i^p representam os termos de H_i com grau p com respeito a η. Ele demonstrou que essas equações podem ser resolvidas assumindo cada uma das quantidades η como uma série de potências crescentes de $A_1e^{\alpha_1 t}, \ldots, A_n e^{\alpha_n t}$, sendo A_i constantes de integração, cujos coeficientes são funções periódicas do tempo.

Considerando um caso particular, quando $n = 2$, ele considerou a condição adicional

$$\frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} = 0$$

que implica que o volume é um invariante integral. A situação do sistema depende das quantidades x_1, x_2 e t, que pode ser representada pela posição de um ponto no espaço com coordenadas $e^{x_1}\cos(t)$, $e^{x_1}sen(t)$, x_2. Se a solução é periódica, ela pode ser representada por uma curva fechada no espaço, e se a solução periódica é instável o coeficiente de estabilidade α^2 será real e positiva. Nesse caso, η_i pode ser expandido como uma série em $Ae^{\alpha t}$ e $Be^{-\alpha t}$.

Se $A = 0$ e $t \to +\infty$, então $\eta_1 \to 0$, assim como η_2. Além disso, a solução correspondente se aproxima assintoticamente da solução periódica. Situação análoga ocorre se $B = 0$ e $t \to -\infty$. Essas duas séries de soluções são chamadas por Poincaré de assintóticas. As curvas assintóticas formam duas superfícies assintóticas, uma correspondendo a $t = +\infty$ e outra correspondendo a $t = -\infty$, sendo que ambas as superfícies passam pela curva fechada que representa a solução periódica.

Poincaré demonstrou que η pode ser representado por uma série em μ, e que essa série será convergente se três condições forem satisfeitas. A primeira condição é que as funções X dependam de um parâmetro μ e que possam ser desenvolvidas em séries de potências do mesmo. Outra condição é de que para $\mu = 0$, todos os expoentes característicos α sejam distintos e possam ser expandidos em potências inteiras de μ e que, também, seja possível anular todas as constantes A que correspondam a um α cuja parte real seja negativa ou nula.

3.4.5 Soluções assintóticas de sistemas Hamiltonianos

Poincaré começa relembrando as equações Hamiltonianas

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Ele já tinha mostrado que os expoentes característicos α podem ser desenvolvidos em potências de $\sqrt{\mu}$, e que são todos nulos quando $\mu = 0$. Ele agora demonstra que as séries podem ser colocadas em termos ascendentes das quantidades $\mu, A_i e^{\alpha_i t}, e^{t\sqrt{-1}}$ e $e^{-t\sqrt{-1}}$, além disso, satisfazendo as equações diferenciais, mas tais séries não são convergentes. Essas séries pertencem a uma importante classe de séries divergentes, chamadas de *expansões assintóticas*.

Poincaré exemplifica tal caso coma a função

$$F(w, \mu) = \sum_n \frac{w^n}{1 + n\mu}.$$

Essa série converge uniformemente quando μ é positivo e $|w| < w_0$, sendo $0 \le w_0 < 1$. Se $F(w, \mu)$ é desenvolvida em potências crescentes de μ, logo

$$F(w, \mu) = \sum_{n,p} w^n (-n)^p \mu^p.$$

Essa série não converge, mas é uma expansão assintótica, ou seja, se ϕ_p denota a soma dos termos em que o índice de μ é menor que p, então

$$\frac{F(w, \mu) - \phi_p}{\mu^p}$$

tende a zero quando μ tende a zero por valores positivos. Essa série, portanto, representa a função $F(w, \mu)$ para pequenos valores do parâmetro μ.

Já tendo obtido que os expoentes característicos podem ser expandidos em potências de μ, ele escreve então as séries para soluções assintóticas da forma

$$x_i = x_i^0 + x_i^1\sqrt{\mu} + x_i^2\mu + \ldots$$
$$y_i = n_i t + y_i^0 + y_i^1\sqrt{\mu} + \ldots$$

que são expansões assintóticas.

3.4.6 Estudo das superfícies assintóticas

Em uma representação geométrica do problema dos três corpos, uma solução periódica instável e as soluções assintóticas a ela associadas são representadas em um espaço tridimensional por uma curva fechada e duas superfícies assintóticas.

Poincaré notou que se poderia, a partir da equação de uma superfície assintótica, obter uma outra equação de superfície assintótica mudando apenas o sinal do parâmetro μ na equação da primeira superfície. Além disso, essas superfícies se interceptavam, sendo consideradas, portanto, dois lados de uma mesma superfície. A curva obtida por essa intersecção é conhecida por *curva dupla* dessa superfície.

As equações dessas superfícies são da forma

$$x_1 = f_1(y_1, y_2)$$
$$x_2 = f_2(y_1, y_2)$$

sendo x_1 e x_2 são dadas por meio de séries assintóticas

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1\left(y_1, y_2, \sqrt{\mu}\right) \\ x_2 &= s_2\left(y_1, y_2, \sqrt{\mu}\right) \end{aligned} \qquad (2.7)$$

e satisfazem a relação

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_i}{\partial y_2} + \frac{\partial F}{\partial y_i} = 0. \qquad (2.8)$$

Para calcular as equações exatas para essas superfícies, Poincaré utiliza três estágios, por meio de aproximações sucessivas. Na primeira aproximação, ele calcula os dois primeiros termos das séries (2.7). Na segunda aproximação, ele calcula mais termos das séries e, no último estágio, ele procura evidenciar as propriedades das equações exatas das superfícies assintóticas.

Ele começa considerando as equações

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_2}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_2}$$

assumindo que F pode ser expandida em potências do parâmetro μ,

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \ldots$$

sendo F_0 independente de y.

Para garantir a existência de uma solução periódica, ele supõe que, para certos valores de x_1 e x_2, que ele chamou de x_1^0 e x_2^0, tenhamos $\frac{\partial F_0}{\partial x_1} = n_1$ e $\frac{\partial F_0}{\partial x_2} = n_2$ comensuráveis entre si. A forma geral de uma superfície de trajetória é

$$x_1 = \Phi_1(y_1, y_2)$$

$$x_2 = \Phi_2(y_1, y_2)$$

e essas funções Φ são escolhidas tais que $F(\Phi_1, \Phi_2, y_1, y_2) = C$, e que satisfaçam (2.8). Para integrar as equações (2.8), Poincaré supôs que x_1 e x_2 podem ser escritas da forma

$$x_i = x_i^0 + \sqrt{\mu} x_i^1 + \mu x_i^2 + \ldots \qquad (2.9)$$

e procurou determinar as funções x_i^k de tal maneira que substituindo as séries (2.9) no em(2.8) as equações sejam satisfeitas.

Objetivando gerar uma sequência de equações que pudessem determinar x_i^k, Poincaré substituiu as séries para x_i nas séries para F, então igualando as potências de μ. Na determinação dos coeficientes x_i^k, Poincaré mostrou que eles eram funções periódicas de y_1, e chegou às expressões

$$x_1^1 = 0,\ x_2^1 = \sqrt{\frac{2\mu}{N}\left([F_1] + C_1\right)}.$$

Assim, como primeira aproximação para as séries, ele obteve

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0 + \sqrt{\frac{2\mu}{N}\left([F_1] + C_1\right)},$$

onde F_1 é uma função periódica de y_1, $N = -\frac{\partial^2 F_0}{\left(\partial x_2^0\right)^2}$ e C_1 é uma constante de integração.

Poincaré havia mostrado, como vimos, em relação ao problema restrito dos três corpos, que a situação do sistema poderia ser representada pela posição de um ponto P com coordenadas

$$e^{\xi\cos y_2^{'}}\cos y_1^{'},\ e^{\xi\cos y_2^{'}} sen y_1^{'},\ \xi sen y_2^{'}.$$

Ele então observa que se pode considerar $\xi, y_1^{'}, y_2^{'}$ como um sistema particular de coordenadas definindo a posição de um ponto P no espaço, de tal forma que a relação entre $\xi, y_1^{'}, y_2^{'}$ é a equação de uma superfície. Seu próximo passo é realizar uma nova transformação de variáveis, chamadas de x_i e y_i, para evitar mais notações (essas não devem ser confundidas com as originais x_1, x_2, y_1 e y_2), onde as novas y_i são funções lineares de $y_1^{'}$ e $y_2^{'}$, e a razão $\frac{x_2}{x_1}$ é uma função linear de ξ.

Poincaré afirma que podemos concluir, assim, que é possível definir completamente a posição de um ponto P no espaço através das variáveis y_1, y_2 e $\frac{x_2}{x_1}$, de tal maneira que toda relação entre essas variáveis é a equação de uma superfície.

Utilizando as novas variáveis, a primeira aproximação para a equação das superfícies de trajetórias é

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}\left(\left[F_1\right] + C_1\right)}.$$

Sua proposta era construir as superfícies representadas pela equação anterior. Para isso, ele utilizou uma secção transversa S, definida pela superfície $y_1 = 0$. Para investigar as curvas formadas por essa intersecção, Poincaré procurou entender a natureza da função $\left[F_1\right]$, e chegou ao resultado de que ela era uma função periódica finita de y_2.

Ele supôs y_2 variando de zero à 2π e $\left[F_1\right]$ variando como na figura a seguir:

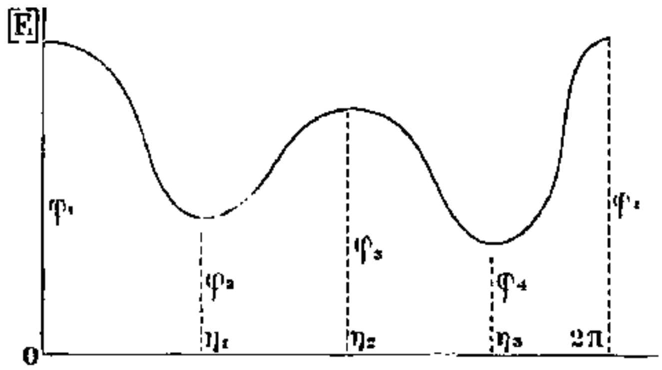

Figura 2.5

Fonte: Poincaré (1890, p. 194).

Ele então constrói as curvas

$$y_1 = 0, \ \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_2^0}{x_1^0} + \frac{\sqrt{\mu}}{x_1^0}\sqrt{\frac{2}{N}\left([F_1] + C_1\right)}$$

cujas formas dependem do valor da constante de integração C_1.

Poincaré mostrou que cada uma das raízes da equação $\frac{[dF_1]}{dy_2} = 0$ representa uma solução periódica, que correspondem aos pontos extremos de $[F_1]$, que são quatro. Na figura 2.4, as linhas cheias $(-)$ representam as curvas duplas das superfícies $C_1 = -\varphi_2$ e $C_1 = -\varphi_4$. Como seu interesse é em soluções periódicas instáveis, que correspondem a essas curvas duplas, Poincaré as considera como a primeira aproximação das superfícies assintóticas.

Na segunda aproximação, utilizando a teoria de Jacobi,[50] diz que se x_1 e x_2 são funções de y_1 e y_2 satisfazendo (2.8), a expressão

$$x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

é uma equação diferencial exata. Então, Poincaré escreve

$$dS = x_1 dy_1 + x_2 dy_2$$

sendo S uma função de y_1 e y_2 uma solução da equação da equação diferencial parcial de Hamilton –Jacobi

$$F\left(\frac{\partial S}{\partial y_1}, \frac{\partial S}{\partial y_2}, y_1, y_2\right) = C.$$

Além disso, S pode ser expandida em potências de $\sqrt{\mu}$,

[50] Poincaré (1890, p. 198).

$$S = S_0 + S_1\sqrt{\mu} + S_2\mu + S_3\mu\sqrt{\mu} + \dots$$

onde S_i são funções de y_1 e y_2, e

$$\frac{\partial S_k}{\partial y_1} = x_1^k, \ \frac{\partial S_k}{\partial y_2} = x_2^k.$$

Logo, o problema de determinar os coeficientes das séries assintóticas leva ao problema de determinar as derivadas parciais dos coeficientes na série para S e daí, determinar os próprios coeficientes dessa série. Primeiro ele prova que $\frac{\partial S_p}{\partial y_1}$ e são funções periódicas de y_1 e y_2, e então ele aproxima as equações para as superfícies assintóticas por meio das séries assintóticas

$$x_1 = \sum_{p=0}^{n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{\partial S_p}{\partial y_1}, \ x_2 = \sum_{p=0}^{n} \mu^{\frac{p}{2}} \frac{\partial S_p}{\partial y_2}.$$

3.4.7 A questão do erro de Poincaré

Na terceira aproximação para as equações das superfícies assintóticas, Poincaré constrói a intersecção dessas superfícies com a secção transversa $y_1 = 0$. Nesse ponto, ocorre uma grande diferença entre os resultados obtidos no primeiro trabalho entregue à comissão do concurso e o trabalho publicado na *Acta 13*.

Consideremos a figura a seguir:

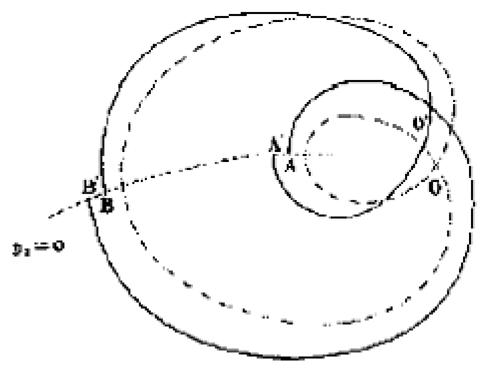

Figura 2.6

Fonte: Poincaré (1890, p. 220).

As linhas cheias $(-)$ identificam as curvas $AO'B'$ e $A'O'B$, que representam a intersecção de duas superfícies assintóticas com a superfície $y_1 = 0$. A curva pontilhada que possui um ponto duplo em O representa a intersecção da equação resultante da primeira aproximação para as equações das superfícies assintóticas com $y_1 = 0$. A solução periódica instável é representada por uma trajetória fechada cortando a superfície $y_1 = 0$ no ponto O'.

Na seção referente ao uso do invariante integral, Poincaré enuncia um teorema que, na versão original do trabalho, continha um erro. A ideia do teorema é expressa a seguir:

Seja A_1AMB_1B uma curva invariante, de tal forma que A_1 e B_1 sejam iterados de A e B. Suponha que os arcos AA_1 e BB_1 sejam pequenos. Suponhamos que exista uma integral invariante. Logo, os arcos AA_1 e BB_1 se interceptam.

Na primeira versão do trabalho, Poincaré havia inferido que a curva A_1AMB_1B era fechada, em consequência da invariante integral. Esse resultado errôneo foi utilizado no estudo do comportamento de superfícies assintóticas.

Poincaré considerou, primeiramente, que B e B' coincidiam, logo, as superfícies assintóticas eram fechadas. Assim, a curva $BO'B'$ delimita uma superfície fechada. Portanto, uma solução periódica instável corresponde a um sistema de soluções assintóticas confinadas a uma região do espaço, que foi tomado como um resultado de estabilidade. Tal resultado havia sido informado por Poincaré à Mittag-Leffler antes do envio de seu trabalho à comissão do concurso, numa carta que data de 16 de julho de 1887. Um trecho de tal carta é transcrito a seguir:

> *Minha ambição era resolver a primeira questão, que se refere ao problema dos n corpos. Mas eu não cheguei ainda a resultados completamente satisfatórios, ao menos no caso geral.*
> *Todavia, obtive alguns resultados que não são desinteressantes, e eu vou citar só um.* [...] *Nesse caso particular* [problema restrito dos três corpos], *eu encontrei uma demonstração rigorosa da estabilidade e um meio de determinar limites precisos para os elementos do terceiro corpo.* (Lettres d'Henri Poincaré à Mittag-Leffler concernant le mémoire couronné du prix de S. M. Le Roi Oscar II, *Acta Mathematica* 38, 1921, p. 162, tradução nossa)

Após a descoberta do erro no teorema e aplicando sua versão corrigida ao estudo das superfícies assintóticas, Poincaré concluiu que, por toda trajetória periódica instável, se as curvas AOB' e $A'O'B$ tem mais de um ponto em comum, então ela se cortam uma infinidade de vezes. Por esses pontos de intersecção passaram uma infinidade de curvas que pertencem as duas superfícies assintóticas.[51] Essas curvas são chamadas de *trajetórias duplamente assintóticas*.

A existência dessas trajetórias implica uma grande complexidade na compreensão do conjunto de trajetórias. Isto decorre do fato de que, arbitrariamente próximo de um ponto sobre a curva AOB', existem em geral pontos situados sobre a curva $A'O'B$, pontos situados na intersecção das duas curvas e também pontos que não pertencem a nenhuma das curvas.[52]

A perplexidade diante de sua descoberta foi revelada à Mittag-Leffler, em uma carta datada de 1° de dezembro de 1889. Um trecho desta carta é transcrito a seguir:

> *Eu escrevi essa manhã ao senhor Phragmén para lhe falar sobre um erro que cometi e sem dúvida ele mostrou a você minha carta. Mas as consequências desse erro são mais sérias do que eu pensava. Não é verdade que as superfícies assintóticas são fechadas, pelo menos no sentido que eu originalmente pretendia. O que é verdade é que se ambos os lados dessa superfície são considerados (que eu ainda acredito serem conectados um ao outro) eles se interceptarão ao longo de um número infinito de trajetórias assintóticas* [...] *Eu tinha pensado que todas essas curvas assintóticas, tendo se afastado de uma curva fechada representando uma solução periódica, deveriam então se aproximar assintoticamente da mesma curva fechada. O que é verdade é que existe uma infinidade que possuem essa propriedade. Eu não vou esconder o desgosto que me causa essa descoberta. Em primeiro lugar, eu não sei se você acha que os resultados que ainda permanecem, a saber, a existência de soluções periódicas, a teoria dos expoentes característicos, a não existência de integrais e a divergência das séries de Lindstedt, mereçam o grande prêmio que recebi. Por outro lado, muitas mudanças são necessárias e eu não sei se a memória já começou a ser impressa*. (La Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sob a direção de *Archives Henri Poincaré*, tradução nossa)

Vejamos quais são estes outros resultados que Poincaré menciona na carta e que podem valer o prêmio, apesar do erro.

3.4.8 Resultados diversos

O penúltimo capítulo do trabalho de *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* é dedicado aos tópicos: soluções periódicas de segundo tipo, a divergência

---

[51] Esses pontos de intersecção foram posteriormente chamados de *intersecções homoclínicas*. Poincaré utilizou essa nomenclatura pela primeira vez em *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste III*, p. 384.

[52] Essa foi a primeira descrição matemática do fenômeno de sensibilidade às condições iniciais que caracteriza o movimento caótico de um sistema dinâmico.

das séries de Lindstedt e a não existência de quaisquer novas integrais para o problema restrito dos três corpos.

Poincaré, na seção dedicada ao estudo das superfícies assintóticas, centrou sua discussão na solução periódica instável correspondente à $C_1 = \varphi_4$. Nessa seção, ele considera o caso em que $C_1 < -\varphi_4$. Ele conclui que, para pequenos valores de μ, se um sistema tem uma solução periódica de período T, então há soluções periódicas próximas da solução periódica inicial, mas cujos períodos são múltiplos de T, e suas expressões para coordenadas podem ser expandidas em potências racionais positivas de $(\mu - \mu_0)$. Essas soluções são chamadas de soluções periódicas de segundo tipo.

3.4.9 A divergência das séries de Lindstedt

Na introdução de sua memória, Poincaré fez observações sobre os resultados expostos a seguir:

> *Eu vou igualmente mostrar que a maior parte das séries empregadas na Mecânica Celeste, em particular, as de Lindstedt, que são as mais simples, não são convergentes. Eu ficaria desolado de lançar qualquer descrédito sobre os trabalhos de Lindstedt, ou sobre as pesquisas mais profundas de Gyldén. Nada estaria mais distante de meu pensamento. Os métodos que eles propõem conservam todo seu valor prático.* (Poincaré, 1890, p. 6, tradução nossa)

Devido à investigação de soluções aproximadas para as equações que descreviam os movimentos dos corpos por meio de séries, o estudo de sua convergência se tornou importante. Esta questão colocou em lados diferentes matemáticos e astrônomos. Para os astrônomos, uma série convergia se seus termos fossem decrescendo rapidamente; para os matemáticos, uma série só seria convergente se tal fato fosse rigorosamente demonstrado.[53]

Para ilustrarmos as posições de astrônomos e matemáticos, tomemos o exemplo dado por Poincaré em *Les Méthodes Nouvelles de La Mécanique Céleste II*. Consideremos duas séries que possuem os seguintes termos gerais

[53]Em 1821, o matemático francês Augustin Louis Cauchy (1789-1857) deu sua moderna definição de convergência. De acordo com essa definição, uma sequência de números $S_1, S_2, \ldots$ é converge para S se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número N tal que $|S_i - S| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Seus resultados estão em *Cours d'Analyse*, onde Cauchy expõe teoremas básicos do cálculo.

$$\frac{1000^n}{1.2.3\ldots n} \text{ e } \frac{1.2.3\ldots n}{1000^n}.$$

Para os matemáticos, a primeira série converge rapidamente, pois o milionésimo termo é muito menor que o anterior. A segunda diverge, visto que o termo geral cresce indefinidamente. Por outro lado, os astrônomos consideram que a primeira série diverge, pois os primeiros mil termos crescem, enquanto a segunda converge, visto que os primeiros mil termos decrescem rapidamente. Segundo Poincaré, ambas as regras são legítimas, a primeira do ponto de vista teórico e a segunda para aplicações numéricas, não atendendo a resultados teóricos rigorosos, como a questão da estabilidade do Sistema Solar.

Poincaré explicou o método de Lindstedt e demonstrou a divergência de suas séries utilizando as notações que ele adota ao longo de seu trabalho. Ele começou considerando as equações

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1},\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_2},\ \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1},\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_2}$$

onde F será uma função de x_1 e x_2, independente de y_1 e y_2; μ um coeficiente pequeno de tal forma que μF_1 será a função perturbação. Poincaré afirmou que é dessa forma que se apresentam os problemas da dinâmica e, em particular, os problemas da mecânica celeste.

Se μ não é nulo, mas tem um valor bem pequeno, chamando de ξ_1 e ξ_2 os valores iniciais de x_1 e x_2, as diferenças de $x_1 - \xi_1$ e $x_2 - \xi_2$ serão da mesma ordem de grandeza que μ.[54] Denominando de n_1 e n_2 os valores $-\frac{\partial F_0}{\partial x_1}$ e $-\frac{\partial F_0}{\partial x_2}$ para $x_1 = \xi_1$ e $x_2 = \xi_2$, as diferenças $\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_1} - n_1\right)$ e $\left(\frac{\partial F_0}{\partial x_2} - n_2\right)$ serão da mesma ordem de grandeza que μ. Por isso, ele supõe que

$$-\frac{\partial F_0}{\partial x_1} - n_1 = \mu\varphi_1(x_1, x_2)$$
$$-\frac{\partial F_0}{\partial x_2} - n_2 = \mu\varphi_2(x_1, x_2).$$

Assim, ele reescreve as equações de movimento

$$\frac{dx_1}{dt} = \mu\frac{\partial F_1}{\partial y_1},\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F_1}{\partial y_2}$$

[54] Quando estamos interessados em obter a ordem de grandeza de um número, queremos descobrir qual potência inteira de 10 melhor aproxima tal número.

$$\frac{dy_1}{dt} = n_1 + \mu\left(\varphi_1 - \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right), \; \frac{dy_2}{dt} = n_2 + \mu\left(\varphi_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right).$$

Então, ele supõe que x_1, x_2, y_1 e y_2, em vez de serem consideradas como funções do tempo, sejam consideradas como funções de duas variáveis, a saber, w_1 e w_2, onde

$$w_1 = \lambda_1 t + \varpi_1, \; w_2 = \lambda_2 t + \varpi_2.$$

Nas expressões acima, ϖ_1 e ϖ_2 são constantes de integração arbitrárias e λ_1 e λ_2 são constantes a serem calculadas. Logo, as equações de movimento se tornam

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \frac{dx_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_1}{dw_2} - \mu \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = 0 \\
&\lambda_1 \frac{dx_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dx_2}{dw_2} - \mu \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 0 \\
&\lambda_1 \frac{dy_1}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_1}{dw_2} - n_1 - \mu\left(\varphi_1 - \frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right) = 0 \\
&\lambda_1 \frac{dy_2}{dw_1} + \lambda_2 \frac{dy_2}{dw_2} - n_2 - \mu\left(\varphi_2 - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right) = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Em seguida, Poincaré considerou

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \mu^3 x_1^3 + \ldots \\
x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \mu^3 x_2^3 + \ldots \\
y_1 - w_1 &= \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \mu^3 y_1^3 + \ldots \\
y_2 - w_2 &= \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \mu^3 y_2^3 + \ldots \\
\lambda_1 &= \lambda_1^0 + \mu \lambda_1^1 + \mu^2 \lambda_1^2 + \mu^3 \lambda_1^3 + \ldots \\
\lambda_2 &= \lambda_2^0 + \mu \lambda_2^1 + \mu^2 \lambda_2^2 + \mu^3 \lambda_2^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ele então supõe que os coeficientes λ_i^k são constantes, que os coeficientes x_i^k e y_i^k são séries trigonométricas de senos e cossenos de múltiplos de w_1 e w_2 e que F_1 é uma série de senos e cossenos de múltiplos de y_1 e y_2, onde os coeficientes são funções analíticas de x_1 e x_2. Quando escrevermos F_1 como uma série de múltiplos de funções trigonométricas de y_1 e y_2, que por sua vez são funções de w_1 e w_2, então as frequências das funções trigonométricas serão múltiplos λ_1 e λ_2.[55]

[55] Em uma função trigonométrica da forma $(A \operatorname{sen} Bx + C)$ ou $(A \cos Bx + C)$, o valor B representa a frequência da função.

Nessas condições, substituindo as expressões em (2.11) nas equações (2.10), quatro funções, a saber, ϕ_1, ϕ_2, $\phi_1^{'}$ e $\phi_2^{'}$, desenvolvidas em termos de potências crescentes de μ.

O teorema de Lindstedt diz que é possível, para q arbitrariamente grande, determinar as $2q+2$ constantes $\lambda_1^0,...,\lambda_1^q,\lambda_2^0,...,\lambda_2^q$ e as $4q$ séries trigonométricas $x_1^0,...,x_1^q,x_2^0,...,x_2^q,y_1^0,...,y_1^q,y_2^0,...,y_2^q$ de maneira a anular nas funções ϕ_1, ϕ_2, $\phi_1^{'}$ e $\phi_2^{'}$ os termos independentes de μ e os coeficientes das q primeiras potências de μ. Assim, as equações do movimento serão satisfeitas por quantidades perto da ordem de μ^{q+1}.

E ainda,

$$\lambda_1^0 = n_1,\ \lambda_2^0 = n_2,\ x_1^0 = \xi_1 + \omega_1,\ x_2^0 = \xi_2 + \omega_2.$$

Nas expressões acima, ω_1 e ω_2 são constantes de integração da ordem de μ.

Supondo que já tenhamos determinado $\lambda_1^0,...,\lambda_1^{q-1},\lambda_2^0,...,\lambda_2^{q-1}$, $x_1^0,...,x_1^{q-1},x_2^0,...,x_2^{q-1}$, $y_1^0,...,y_1^{q-1},y_2^0,...,y_2^{q-1}$, o objetivo é então determinar $\lambda_1^q,\lambda_2^q,x_1^q,x_2^q y_1^q,y_2^q$, para isso escrevendo o coeficiente de μ^q nulo em ϕ_1, ϕ_2, $\phi_1^{'}$ e $\phi_2^{'}$.

Assim, as equações de movimento são reescritas como

$$\begin{aligned} n_1\frac{dx_1^q}{dw_1}+n_2\frac{dx_1^q}{dw_2} &= X_1\\ n_1\frac{dx_2^q}{dw_1}+n_2\frac{dx_2^q}{dw_2} &= X_2\\ n_1\frac{dy_1^q}{dw_1}+n_2\frac{dy_1^q}{dw_2}+\lambda_1^q &= Y_1\\ n_1\frac{dy_2^q}{dw_1}+n_2\frac{dy_2^q}{dw_2}+\lambda_2^q &= Y_2, \end{aligned} \qquad (2.12)$$

onde X_1, X_2, Y_1 e Y_2 são séries trigonométricas em w_1 e w_2.

Para que essas equações possam ser integradas, é necessário que a razão $\frac{n_1}{n_2}$ seja irracional, que os termos constantes em X_1 e X_2 sejam nulos e que em Y_1 e Y_2 os termos constantes sejam reduzidos a λ_1^q e λ_2^q.

As séries trigonométricas de w_1 e w_2, obtidas pelo método de Lindstedt, satisfazem formalmente as equações de movimento. Se elas fossem uniformemente convergentes, elas forneceriam as integrais gerais das equações. Poincaré diz que tal situação não é possível.

Ele começa supondo que as séries convergem uniformemente para todos os valores do tempo e para valores suficientemente pequenos de μ , ω_1 e ω_2.

As constantes λ_1 e λ_2 podem ser expandidas em potências de μ , ω_1 e ω_2. Para certos valores de ω_1 e ω_2 a razão $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ é um número racional, ou seja, as frequências são comensuráveis. As soluções correspondentes a esses valores de constantes de integração são soluções periódicas.

Poincaré afirma então que já foi visto a toda solução periódica corresponde um certo número de expoentes característicos, tendo mostrado como calculá-los. Seja

$$x_1 = \psi_1\left(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2\right),\ x_2 = \psi_2\left(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2\right)$$

$$y_1 = \psi_1^{'}\left(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2\right), y_2 = \psi_2^{'}\left(t, \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \varpi_2\right)$$

a integral geral do sistema. Sejam dados os valores de $\omega_1, \omega_2, \varpi_1$ e ϖ_2, a saber, $\omega_1^0, \omega_2^0, \varpi_1^0$ e ϖ_2^0, de maneira que as funções ψ_1, ψ_2, $\psi_1^{'}$ e $\psi_2^{'}$ sejam periódicas em t. Para determinar os expoentes característicos da solução periódicas então obtida, ele utiliza as dezesseis derivadas parciais

$$\frac{dx_1}{d\omega_1}, \frac{dx_2}{d\omega_1}, \frac{dy_1}{d\omega_1}, \frac{dy_2}{d\omega_1}, \frac{dx_1}{d\omega_2}, \frac{dx_2}{d\omega_2}, \frac{dy_1}{d\omega_2}, \frac{dy_2}{d\omega_2}$$
$$\frac{dx_1}{d\varpi_1}, \frac{dx_2}{d\varpi_1}, \frac{dy_1}{d\varpi_1}, \frac{dy_2}{d\varpi_1}, \frac{dx_1}{d\varpi_2}, \frac{dx_2}{d\varpi_2}, \frac{dy_1}{d\varpi_2}, \frac{dy_2}{d\varpi_2}.$$

Por exemplo, a expressão para $\frac{dx_1}{d\omega_1}$ terá a forma

$$\frac{dx_1}{d\omega_1} = e^{\alpha_1 t}\theta_1\left(t\right) + e^{\alpha_2 t}\theta_2\left(t\right) + e^{\alpha_3 t}\theta_3\left(t\right) + e^{\alpha_4 t}\theta_4\left(t\right)$$

sendo α constantes e θ funções periódicas. As constantes α são os expoentes característicos procurados.

Considerando $x_1 = \varphi_1\left(\omega_1, \omega_2, w_1, w_2\right)$, temos

$$\frac{dx_1}{dw_1} = \frac{d\varphi_1}{dw_1},\ \frac{dx_1}{d\omega_1} = \frac{d\varphi_1}{d\omega_1} + \left(\frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}\right)t\,.$$

As três funções $\frac{d\varphi_1}{dw_1}$, $\frac{d\varphi_1}{d\omega_1}$, $\frac{d\lambda_1}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_1} + \frac{d\lambda_2}{d\omega_1}\frac{d\varphi_1}{dw_2}$ são periódicas em w_1 e w_2 e, por consequência, em t. Para $\frac{dx_1}{dw_2}$ e $\frac{dx_1}{d\omega_2}$ tem-se expressões análogas e, portanto, os expoentes característicos são nulos. Assim, as séries de Lindstedt sendo convergentes, todos os expoentes característicos serão nulos.

Poincaré aplica tal resultado ao problema restrito dos três corpos, retomando as expressões para obtenção dos expoentes característicos, processo realizado anteriormente. Considerando que os expoentes característicos sejam nulos, podemos escrever a função perturbação como uma função periódica do tempo. Considerando que existem uma infinidade de soluções periódicas correspondentes a cada valor racional de $\frac{n_1}{n_2}$, Poincaré afirma que tal condição não leva à introdução de termos seculares na função perturbação. Em relação ao problema dos três corpos, ele havia dito que tal fato não poderia ocorrer.

Vamos entender a contradição a que chega Poincaré. Uma das condições para que as equações (2.12) pudessem ser integradas, de acordo com o método de Lindstedt, era que a razão $\frac{n_1}{n_2}$ fosse irracional. Poincaré disse que as soluções expressas por meio das séries trigonométricas de Lindstedt, para serem integrais gerais do sistema (2.12), deveriam ser uniformemente convergentes.

Considerando então que as séries de Lindstedt fossem uniformemente convergentes, como termos seculares não seriam introduzidos na função perturbação, devido ao fato de que todos os expoentes característicos são nulos, as soluções periódicas correspondentes a cada valor racional de $\frac{n_1}{n_2}$ seriam todas estáveis. Logo, não existiriam soluções assintóticas no problema restrito dos três corpos. Todavia, Poincaré havia demonstrado a existência de soluções assintóticas nesse problema, chegando assim a uma contradição.

Poincaré, assim, mostrou que a afirmação de que as séries de Lindstedt são uniformente convergentes não é válida no problema restrito dos três corpos, concluindo ainda que:

> *Assim, no caso do problema restrito dos três corpos que nós estudamos e por consequência também no caso geral, as séries de Lindstedt não convergem uniformemente para todos os valores das constantes arbitrárias de integração que elas envolvem.* (Poincaré, 1890, p. 259, tradução nossa)

Segundo Laskar (1992), a divergência das séries de Lindstedt exemplifica o fenômeno dos pequenos divisores, que sempre aparecem nos coeficientes das séries trigonométricas por ele obtidas.

3.4.10 Não existência de novas integrais para o problema restrito dos três corpos

Esse é o próximo tópico abordado por Poincaré. Considerando novamente as equações

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_1}, \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_2}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_2}$$

que tem como integral $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = c^{te}$, ele supôs a existência de uma outra solução da mesma forma, $\phi(x_1, x_2, y_1, y_2) = c^{te}$. Ele mostrou que, partindo dessas hipóteses, ϕ era uma função de F e, portanto, as duas integrais não eram distintas.

Daí, não existe outra integral, além de F, que seja uma função analítica de x_1, x_2, y_1, y_2, μ para todos os valores de y_1 e y_2, para pequenos valores de μ, e para valores de x_1 e x_2 contidos em certos limites e, além disso, periódica com relação à y_1 e y_2.

3.4.11 Tentativas de generalização para o problema dos *n* corpos

No último capítulo do trabalho aqui tratado, Poincaré tenta generalizar os resultados obtidos ao problema dos n corpos. A dificuldade em estender os resultados obtidos na primeira parte da memória se refere ao fato de que, em um sistema com dois graus de liberdade, um estado do sistema é representado pela posição de um ponto em um espaço tridimensional, enquanto em um sistema com p graus de liberdade, essa representação é feita em um espaço com $2p-1$ dimensões. Os resultados referentes a soluções periódicas e assintóticas do problema dos três corpos podem ser generalizados com relativa facilidade para o problema dos n corpos. Por exemplo, é possível mostrar que existem infinitas soluções periódicas, estáveis e instáveis, assim como infinitas soluções assintóticas para o problema dos n corpos.

Quanto aos resultados obtidos na segunda parte da memória, Poincaré encontrou mais dificuldades. Por exemplo, considerando o sistema Hamiltoniano com três graus de liberdade, o objetivo era então encontrar três funções $x_i = \Phi_i(y_1, y_2, y_3)$ satisfazendo a relação

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}+\frac{\partial x_i}{\partial y_3}\frac{\partial F}{\partial x_3}+\frac{\partial F}{\partial y_i}=0\,, \qquad i=1,2,3\,.$$

Analisando esse caso, ele chegou ao problema dos pequenos divisores. Além de dificuldades como essa, existiram outras questões ligadas à dificuldade de generalização dos resultados que estavam além do alcance das técnicas utilizadas. Poincaré afirma que, além da falta de tempo, eu tinha a opinião de que essa tentativa era ainda prematura[56].

Ele conclui seu trabalho dizendo que esperava, por fim, futuros progressos nesse campo.

3.4.12 O problema restrito dos três corpos em *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*

Nessa seção, vamos fazer um resumo sobre o tratamento de Poincaré do problema restrito dos três corpos. Como vimos, Poincaré utiliza novas ferramentas, como o conceito de invariante integral e o método de secção, que o permitem tratar de maneira qualitativa tal problema. O cerne do trabalho de Poincaré é o estudo de soluções periódicas. A partir delas, por meio do uso das equações variacionais, ele pode analisar o comportamento das soluções das equações diferenciais na vizinhança de trajetórias periódicas.

Partindo das equações na forma Hamiltoniana para o movimento do planetóide

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial y_1}, \dfrac{dx_2}{dt}=\dfrac{\partial F}{\partial y_2} \\ \dfrac{dy_1}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial x_1}, \dfrac{dy_2}{dt}=-\dfrac{\partial F}{\partial x_2} \end{cases}$$

ele realizou uma mudança de variáveis, como vimos, que o permitiu representar o movimento do planetóide no espaço tridimensional.

Ele reconheceu que era mais conveniente analisar as trajetórias do planetóide no espaço bidimensional, através das hoje conhecidas como secções de Poincaré. A partir de uma trajetória periódica, ele então considera um plano intersectando essa solução periódica em um ponto M e, tomando um ponto próximo a M, digamos P_0, no plano de secção, a trajetória por P_0 irá intersectar novamente esse plano em um ponto P_1, e assim sucessivamente. Esse processo permite reduzir o estudo de uma trajetória ao estudo de uma sequência de ponto no plano. Por exemplo, uma solução periódica, que no espaço tridimensional, é representada por

56 Poincaré (1890, p.269).

uma curva fechada, através do método de secção, essa solução periódica será reduzida a um ponto fixo.

O problema restrito dos três corpos envolve uma massa muito grande A, uma outra massa B, menor em comparação com a primeira, e uma terceira massa C, considerada desprezível, que corresponde ao planetóide. Poincaré utilizou, na expansão em séries de potências para a solução do sistema anterior, referente ao movimento do planetóide, o parâmetro μ, que representa a massa de B.

Quando $\mu = 0$, o problema restrito dos três corpos é reduzido a um problema de Kepler, pois então teremos um sistema com apenas dois corpos, pois, nesse caso, o sistema se reduz ao planetóide sendo atraído pela massa A. Supondo que para $\mu = 0$ existam soluções periódicas da forma

$$x_i = \varphi_i(t),\ y_i = \psi_i(t)$$

Poincaré mostrou que, para pequenos valores de μ, existem também soluções periódicas, da forma

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i\ ,\ y_i = \Psi_i(t) + \eta_i$$

onde

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i,\ \ \eta_i = e^{\alpha t} T_i$$

sendo S_i e T_i funções periódicas de t, e α_k constantes que ele chamou de expoentes característicos. Ele percebeu ainda que, se esses expoentes característicos poderiam indicar se as soluções eram ou não estáveis. A definição de estabilidade utilizada por Poincaré é devida a Poisson. Segundo essa definição, o movimento de um ponto é estável se ele retorna para posições arbitrariamente próximas de sua condição inicial.

Se os expoentes característicos são puramente imaginários, o módulo de $e^{\alpha t}$ é 1 e, assim, ξ permanecerá finito. Então a solução periódica $x_i = \varphi_i(t)$ é dita estável. Caso contrário, se α é real ou se é um complexo de tal maneira que seu quadrado não é um número real, o módulo de $e^{\alpha t}$ tende ao infinito para $t \to \pm\infty$, e a solução periódica é dita instável.

Por meio do estudo da vizinhança de soluções periódicas, foi levado à descoberta de soluções assintóticas, que ou se aproximam ou se afastam lentamente da solução periódica instável. Ele mostrou que, no caso do problema restrito dos três corpos, as soluções assintóticas geram famílias de curvas, cada família associada a uma solução periódica instável. Cada uma dessas famílias pode ser representada por uma superfície, chamada de superfície assintótica. Para estudar as superfícies assintóticas, Poincaré utilizou o método de secção pois, assim, o estudo de uma superfície assintótica é reduzido ao estudo de uma curva na secção transversa. Relativo à investigação das superfícies assintóticas, Poincaré ainda utilizou o conceito de invariante integral, que se revelou como uma importante propriedade de equações diferenciais.

A cada solução periódica instável estão relacionadas duas superfícies assintóticas, uma correspondente às soluções que se aproximam assintoticamente da solução periódica quando $t \to +\infty$, e outra correspondendo às soluções que se aproximam assintoticamente da solução periódica quando $t \to -\infty$. Para entender o comportamento dessas soluções assintóticas, Poincaré procurou as equações exatas das superfícies assintóticas, expressas por meio de séries de potências infinitas do parâmetro μ. Para isso, ele utilizou as intersecções das superfícies com uma secção transversa.

Na primeira versão de seu trabalho, a versão que foi enviada para concorrer ao prêmio do rei Oscar II, Poincaré pensou que as intersecções das superfícies assintóticas com a secção transversa eram curvas fechadas, concluindo que as superfícies assintóticas eram fechadas. Esse resultado implicava a estabilidade, visto que as soluções permaneciam então em uma região limitado de espaço. Ou seja, para pequenos valores de μ, Poincaré acreditou que tinha demonstrado que, relativo a uma solução periódica instável, existia um conjunto de soluções assintóticas que poderiam ser consideradas estáveis.

Quando Poincaré foi alertado sobre um possível erro em seu trabalho por um dos editores da *Acta Mathematica*, Phragmén, ele chegou a conclusões diferentes sobre tal fato. Corrigindo seu trabalho, Poincaré percebeu que as curvas representando as superfícies assintóticas não eram fechadas e que, além disso, se interceptavam infinitas vezes. Ele chamou as trajetórias que passavam por esses pontos de trajetórias duplamente assintóticas. Esse último resultado, portanto, arruinou suas pretensões em alcançar a demonstração da estabilidade no problema restrito dos três corpos.

As inovações de Poincaré deram início a uma nova maneira de se tratar problemas que envolvem equações diferenciais. No capítulo a seguir, discutiremos a recepção de *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, incluindo as opiniões dos membros da comissão do concurso do rei Oscar, além de comentários de outros matemáticos e astrônomos. Além disso, falaremos também sobre a incorporação das novas ideias de Poincaré pelos matemáticos, que levou ao desenvolvimento da Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Capítulo 4

A RECEPÇÃO DE *SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS ET LES ÉQUATIONS DE LA DYNAMIQUE* PELA COMUNIDADE CIENTÍFICA E SUA INFLUÊNCIA EM PESQUISAS POSTERIORES

O concurso do rei Oscar II foi encerrado dia 1º de junho de 1888 e, no total, foram enviados 12 trabalhos à comissão. No dia 20 de janeiro de 1889, o resultado do prêmio foi oficialmente aprovado. Eis o que dizia o anúncio do resultado da competição, que foi enviado a Poincaré:

> *Resulta deste relatório que a comissão foi de opinião unânime, que a memória intitulada "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", com o lema "Nunquam praescriptos transibunt sidera fines", é a obra profunda e original de um gênio matemático cujo lugar está marcado entre os grandes matemáticos do século. As mais importantes e difíceis questões, como a estabilidade do sistema do mundo, a expressão analítica das coordenadas dos planetas por meio de séries de senos e cossenos de múltiplos do tempo, em seguida, o estudo, que não poderia ser mais notável, dos movimentos assintóticos, a descoberta de formas de movimentos onde as distâncias dos corpos permanecem entre limites fixos, mas nós não podemos, contudo, exprimir suas coordenadas através de séries trigonométricas, além de outros assuntos que aqui não indicamos, são tratados por meio de métodos que abrem, é justo dizer, uma nova época na mecânica celeste.* (*Oeuvres de Henri Poincaré vol XI*, 1956, p. 286, tradução nossa)

Quase dois anos e meio se passaram entre a submissão do trabalho à competição e a publicação do trabalho na revista, devido ao erro na versão original. Como a primeira versão ficou pouco tempo em circulação, as únicas pessoas que tiveram tempo de analisá-la foram os membros da comissão.

Nesse capítulo, iremos expor as opiniões dos membros da comissão do concurso sobre o trabalho de Poincaré, além da recepção de suas ideias pela comunidade científica.

4.1 Opiniões dos membros da comissão do concurso

O reconhecimento do erro, em dezembro de 1889, não foi uma boa notícia para Mittag-Leffler pois, embora o volume da *Acta Mathematica* não tivesse sido publicado, algumas cópias da memória já estavam circulando. Embora ciente de que seria impossível um total segredo sobre o caso, Mittag-Leffler procurou reaver todas as cópias, para que nenhuma evidência substancial do erro circulasse (Barrow-Green, 1997, p. 67). Mesmo com o ocorrido, Mittag-Leffer, em carta a Poincaré datada de 4 de dezembro de 1889, disse:

> *Eu não tenho dúvida que sua memória será, em todo caso, vista como uma obra genial por muitos matemáticos e que ela será o ponto de partida de todos os esforços que faremos na geometria celeste. Não pense, por isso, que eu lamente o prêmio que foi dignamente dado.* (La Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sob a direção de *Archives Henri Poincaré*, tradução nossa)

Em 5 de dezembro, ele escreveu novamente a Poincaré:

> *E aqui agora o que eu proponho a você fazer e que será, na opinião, o mais honroso tanto para você quanto para nós. Você escreve uma nova memória, na qual você introduzirá tudo o que resta de sua memória original, assim como os outros desenvolvimentos que você julgar bons para serem introduzidos. Você escreve nessa nova memória uma introdução na qual você dirá que ela é uma revisão da memória premiada na qual os desenvolvimentos que se encontravam apenas indicados na memória original são dados com todos os detalhes e na qual um erro que você indicou e que escapou em suas primeiras pesquisas foi corrigido. Dessa maneira, eu espero que tudo saia bem. Somente o custo será muito considerável* [da reimpressão da revista]. *Você sabe que eu recebo subsídios contados da Suécia, Noruega e Dinamarca, mas também devo informar todos os gastos para o jornal. Seria impossível então, pagar, dos fundos da Acta, os custos com a memória excluída, e eu me permito perguntar se você está disposto a assumir esses encargos por sua conta.* [...] *Eu acho que essa história deve ficar entre nós até a publicação de sua nova memória. E então nem a ciência, nem você mesmo, perderão nesse caso, que terá sido tratado, me parece, de uma maneira perfeitamente honrosa.* (La Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sob a direção de *Archives Henri Poincaré*, tradução nossa)

Poincaré então pagou os gastos da publicação da memória, que lhe custou 3. 587 coroas, gastando assim uma quantia consideravelmente maior do que o valor do prêmio.[57]

[57] Diacu; Holmes (1996, p. 47).

Em quinze dias, Poincaré fez uma nova versão de sua memória, organizando todos os resultados afetados pelo erro.[58]

Em relação ao erro, presente na memória original, como Hermite estava em contato direto com Poincaré em Paris, Mittag-Leffer decidiu logo informar-lhe sobre o caso. Em uma carta à Hermite, do dia 5 de dezembro de 1889, Mittag-Leffler disse:

> *Venho lhe informar que é enviado por Hermann a você o exemplar da memória premiada de Poincaré que lhe foi entregue por correio. Um erro que ali se encontra deve ser corrigido antes que a memória apareça e eu não quero que nenhum exemplar com esse erro exista. Eu lhe darei todos os detalhes amanhã. Entretanto, eu peço a você que não diga nenhuma palavra a ninguém sobre essa história lamentável.* (La Correspondance d'Henri Poincaré, édition électronique, sob a direção de *Archives Henri Poincaré*, tradução nossa)

No dia 10 de dezembro, Hermite lhe respondeu:

> *Eu saio de um auditório da faculdade onde eu pude conversar longamente com Poincaré; eu te dou a segurança que eu não disse a ele uma só palavra do que você me escreveu* [...]. *É uma verdadeira satisfação informar a você que a situação não é assim tão grave como Poincaré havia pensado, quando ele te escreveu a carta que você me deu uma cópia* [a carta que Poincaré reconhece o erro], *e que eu ouvi dele mesmo, da nossa recente conversa, que se trata apenas de uma revisão da redação de seu magnífico trabalho.* (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite a Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 180, tradução nossa)

Ainda nessa carta, Hermite diz que Poincaré iria ajudá-lo a preparar um resumo sobre os principais resultados de *Sur les problèmes des trois corps et les équations de la dynamique*, para que ele pudesse apresentar na Academia de Ciências de Paris na semana seguinte. Uma semana depois dessa carta, Hermite escreveu novamente a Mittag-Leffler, dizendo que a situação deveria ser mais séria do que ele pensava.

> *Eu acredito e lamento muito em dizer, que eu acho que me é necessário renunciar às esperanças que eu tinha há oito dias, e sobre as quais eu expressei a você, depois de uma conversa com Poincaré. Você sabe que ele tinha acolhido minha intenção de mencionar o prêmio que ele recebeu do*

[58] Em 1985, o professor da Universidade de Minnesota, Richard Mcghee, estava realizando pesquisas no Instituto Mittag-Leffler, que fica em Djursholm, pequena cidade sueca, quando encontrou antigos documentos de Mittag-Leffler. Ele abriu uma caixa que aparentemente continha várias cópias do volume 13 da *Acta.* Ele então pegou uma dessas cópias e começou a estudá-la em detalhes. Posteriormente, ele pegou o mesmo volume, pertencente à coleção da biblioteca, para comparar as cópias, e percebeu que as duas eram diferentes. O que tinha permanecido desconhecido até a acidental descoberta de McGehee era a versão original do trabalho de Poincaré. No Instituto Mittag-Leffer se encontram, entre essas cópias, a versão original do trabalho de Poincaré com anotações feitas por ele mesmo, e um versão com uma frase em sueco, escrita por Mittag-Lefller, dizendo que toda aquela edição havia sido destruída. Em (Diacu; Holmes, 1996, p. 49), o fato de algumas cópias terem escapado da destruição se deve à *negligência secretarial*.

> *rei da Suécia, e também a menção honrosa e a medalha de ouro dada a Appell, na sessão pública da Academia de Ciências. Não somente ele parecia satisfeito, ele tinha se comprometido em escrever uma nota especificando os pontos de seu trabalho que seriam convenientes de mencionar, e que deveria me servir de guia. Esperei essa nota durante toda a semana passada, e nada me chegou. Minha inquietude foi ainda maior quando ontem, na sessão na Academia, na qual eu esperava receber a nota de suas mãos, e de conversar com ele, eu tive o pesar de nem mesmo o ver.* (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite a Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 181-182, tradução nossa)

Hermite acrescentou que não sabia o que pensar do silêncio de Poincaré, fazendo-o crer que não era uma simples revisão de redação na memória vencedora do concurso que Poincaré fazia. Ele ainda disse que iria se resignar a guardar silêncio, e que deixaria nas mãos de Mittag-Leffler a condução do assunto, visto que não pretendia aborrecer nem constranger Poincaré lhe escrevendo.

Em relação a Weierstrass, Mittag-Leffler tentou diminuir a seriedade do problema, devido ao delicado estado de saúde do primeiro. Em fevereiro de 1890, havia rumores em Berlim, levantados por Gyldén, de que a memória de Poincaré continha graves erros. Weierstrass então ficou preocupado, pedindo que Mittag-Leffler enviasse a ele uma nova versão o mais rápido possível, pois era ele o responsável pelo relatório sobre a memória vencedora. Como veremos a seguir, suas opiniões sobre tal trabalho continuavam válidas, devido à generalidade de suas colocações.

4.1.1 A elaboração do relatório sobre o trabalho vencedor

As opiniões da comissão do concurso, portanto, foram principalmente devidas a Weierstrass, que começou a redigir um relatório concernente à primeira versão do trabalho. Como seu relatório falava somente de maneira geral do trabalho de Poincaré, a falta de detalhes matemáticos significou que suas considerações continuavam válidas após a descoberta do erro, ou seja, para a versão revisada da memória.

Hermite, por ser o único a estar em Paris, era o único membro da comissão que podia falar diretamente com Poincaré sobre seu trabalho. No dia 17 de outubro de 1888, ele escreveu a Mittag-Leffler:

> *A memória de Poincaré é de uma profundidade e de um poder de invenção bem raros, e fará certamente época na ciência tanto do ponto de vista da*

análise quanto de consequências astronômicas. Mas maiores explicações serão necessárias e no momento eu estou pedindo ao eminente autor maiores esclarecimentos sobre vários pontos importantes. (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite a Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 146, tradução nossa)

Embora tenha sido Weierstrass quem propôs a questão, devido ao fato de que sua saúde não estava muito boa, Mittag-Leffer havia sugerido que Hermite fizesse o relatório sobre a memória. Mas a resposta de Hermite, em 22 de outubro de 1888, não foi positiva:

A tarefa de escrever o relatório cabe por direito a Weierstrass, que propôs a questão, que pode com autoridade expressar reservas que me colocariam em uma posição indescritivelmente difícil se eu tivesse que fazê-las. [...] Eu devo ser franco, se eu tiver que fazer o relatório, seria o eco do que eu ouvi do autor, com a intenção de justificar minha admiração por sua genialidade... Além disso, para satisfazer a demanda da opinião pública, e levando em conta a importância e seriedade do anúncio do prêmio, você acha, meu caro amigo, que é aconselhável que o prêmio vencido por um francês seja apoiado em um relatório de um francês, que é seu colega e amigo? (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite a Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 147-148, tradução nossa)

Na verdade, Mittag-Leffer não insistiu, e a tarefa de fazer o relatório continuou com Weierstrass. O próprio Weierstrass mostrou que tinha dúvidas sobre a habilidade de Hermite em tratar da matemática presente no trabalho de Poincaré.[59]

As considerações de Weierstrass sobre *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* estão presentes principalmente em três cartas que foram enviadas a Mittag-Leffler. Na primeira carta, do dia 15 de novembro de 1888, Weierstrass escreveu a Mittag-Leffler:

Eu não tenho dificuldade em declarar que a memória em questão mereça o prêmio. Você pode dizer ao seu soberano que esse trabalho não pode, na verdade, ser considerado como fornecendo uma solução completa para a questão que nós originalmente propusemos mas ela é, todavia, de tal importância que sua publicação irá iniciar uma nova era na história da mecânica celeste. A meta de sua Majestade ao abrir o concurso pode, portanto, ser considerada alcançada. (Mittag-Leffler, 1912, p. 52, tradução nossa)

Como pontos mais importantes do trabalho de Poincaré, Weierstrass considerou os resultados negativos, ou seja, a divergência das séries de Lindstedt e o teorema de não-existência de novas integrais. Embora tenha considerado que o trabalho ratificava que uma

[59] Barrow-Green (1997, p. 135).

nova abordagem deveria ser utilizada para que o problema fosse resolvido, ele achou o trabalho muito difícil de ser lido.

Em relação aos resultados obtidos por Poincaré, ele destacou a importância das descobertas sobre estabilidade, a teoria de invariante integral e o estudo sobre soluções periódicas e assintóticas. Na segunda carta, de 8 de janeiro de 1889, Weierstrass comentou com Mittag-Leffler que tinha dúvidas sobre certos pontos da memória de Poincaré:

> *Além disso, eu dediquei praticamente todo o meu tempo ao estudo da memória respectiva. Ela é muito difícil de se ler.* [...] *Eu encontrei várias dúvidas e vários pontos que ainda não estão claros para mim.* (Mittag-Leffler, 1912, p. 53, tradução nossa)

Apesar de continuar entusiasmado com a memória de Poincaré, Weierstrass estava tendo dificuldades em compreendê-la totalmente. Ele destacou a grande importância sobre os resultados alcançados sobre soluções periódicas e o movimento assintótico. Contudo, ele não foi favorável quanto à noção de estabilidade utilizada por Poincaré, que parecia colocar um limite superior na distância entre dois pontos sem considerar o que aconteceria se os dois pontos se tornassem infinitamente próximos. Tal fato, segundo Weierstrass, afetaria a forma do movimento.

No dia 2 de fevereiro de 1889, na terceira carta, Weierstrass explica que, ao contrário do que havia dito na carta anterior, agora ele estava satisfeito com a análise de Poincaré, que garantia que o planetóide não estaria infinitamente próximo dos dois outros corpos. Ainda que Weierstrass tenha terminado a introdução de seu relatório, enviando uma cópia para Mittag-Leffler em março do mesmo ano, ele não chegou a finalizá-lo, devido a problemas de saúde. Em outra carta, de 12 de junho, Weierstrass reafirmou que, para ele, a impossibilidade de se exprimir as soluções do problema dos três corpos sob a forma de séries trigonométricas convergentes, como as obtidas por Lindstedt, é um dos resultados mais importantes do trabalho de Poincaré.

Na introdução de seu relatório, enviada a Mittag-Leffer em março de 1889, Weierstrass explicou a formulação do problema para o concurso do rei e o critério utilizado para julgar os trabalhos que tentavam resolvê-lo.[60] A intenção de Weierstrass, ao propor a questão, era a de encontrar uma expansão das coordenadas dos corpos através de séries infinitas de funções conhecidas do tempo. Além disso, que essas séries fossem uniformemente

[60] Barrow-Green (1997, p. 136).

convergentes para um valor qualquer fixado do mesmo, ou seja, para $0 \leq t \leq a \quad (a < \infty)$. Weierstrass acreditava que havia demonstrado que tais séries existiam, e essa prova dependia da capacidade de mostrar que a distância entre dois pontos quaisquer não se tornaria infinitamente grande ou pequena à medida que o tempo se aproxima de um limite fixo.

Mostrar que a distância entre dois pontos não pode se tornar infinitamente pequena equivale a trabalhar com a possibilidade de colisões. Na carta para Mittag-Leffler, Weierstrass esboça uma demonstração sobre condições que levam a impossibilidade de colisões binárias e conjectura resultados sobre colisões triplas. Ele disse que era fácil mostrar que três pontos podem colidir somente se as constantes referentes às integrais de área (ver capítulo 2) fossem nulas. Essa conjectura de Weierstrass foi demonstrada, posteriormente, por Karl Sundman (1873-1949). Já a impossibilidade de as distâncias entre os pontos se tornarem infinitamente grandes, caso não estudado por Weierstrass, foi estudada por Paul Painlevé (1863-1933). Essas questões serão tratadas mais adiante.

A confiança de Weierstrass em resolver o problema provém também do seguinte fato. O matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), em 1858, já tinha dito a seu aluno Leopold Kronecker (1823 - 1891), que tinha descoberto um novo método de tratar os problemas da mecânica. Os trabalhos de Dirichlet eram conhecidos pelo rigor de suas demonstrações e métodos. Como não havia dúvidas na seriedade de seus escritos, Weierstrass procurou esclarecer tal assunto.[61] Tal fato é evidenciado na proposta da questão, referente ao problema dos *n* corpos, feita no anúncio da competição do rei Oscar II:

> *Sendo dado um sistema com um número qualquer de partículas que se atraem mutuamente segundo a lei de Newton, propõe-se, sob a suposição de que um choque de duas partículas não ocorra, representar as coordenadas de cada partícula sob a forma de séries de funções conhecidas do tempo e que convergem uniformemente para todo valor real dessa variável. Esse problema, cuja solução expandirá consideravelmente nossos conhecimentos com respeito ao sistema do universo, parece poder ser resolvido com o auxílio de meios analíticos que nós temos atualmente a nossa disposição; nós pelo menos o podemos supor, pois Lejeune Dirichlet comunicou, um pouco antes de sua morte, a um de seus amigos matemáticos, que ele tinha descoberto um método de integração de equações diferenciais da mecânica e que, aplicando esse método, ele podia chegar à demonstração de uma maneira absolutamente rigorosa da estabilidade de nosso sistema planetário. Infelizmente, nós não conhecemos nada sobre esse método.* (*Acta Mathematica* 7, 1885, p. II, tradução nossa)

[61] Moser (1989, p. 66).

Embora o enunciado do problema dos três corpos seja simples, Poincaré demonstrou que não era possível encontrar uma solução exata para a posição do terceiro corpo. Logo, o trabalho de Poincaré acabou por desapontar Weierstrass. Poincaré mostrou que as séries de Lindstedt, que eram escritas como a soma de funções trigonométricas, com as quais Weierstrass supunha que se poderiam representar as coordenadas dos corpos, na verdade, não convergiam uniformemente para todos os valores das constantes de integração.

Embora Weierstrass tenha considerado que o trabalho de Poincaré apresentava uma nova abordagem para o problema dos três corpos, ele ainda estava convencido de que as coordenadas dos corpos poderiam ser desenvolvidas em séries como especificadas na questão, por não ter considerado a discussão de Poincaré sobre esse tópico completa. Poincaré não considerou as circunstâncias em que a convergência das séries poderia ocorrer nem indicou a proporção de séries divergentes.[62]

Então, ainda que Poincaré acreditasse na divergência dessas séries, era claro que ele não tinha fornecido uma prova completa para tal fato. Por volta de 1960, a hoje conhecida como teoria KAM, resultado do trabalho dos matemáticos Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903-1987), Vladimir Igorevich Arnold (1937-2010) e Jurgen Kurt Moser (1928-1999), mostra que certas condições iniciais podem levar a séries uniformemente convergentes, ou seja, as trajetórias permaneceriam confinadas em certas regiões do espaço.

Como resultado da teoria KAM temos, então, que as soluções para os sistemas de equações diferenciais que representam o movimento de três ou mais corpos podem ser representadas por séries convergentes ou divergentes, dependendo das condições iniciais.

4.2 A recepção do trabalho de Poincaré pela comunidade dos astrônomos

Gyldén, que era membro do conselho editorial da *Acta*, foi um das primeiras pessoas fora da comissão do prêmio a ter conhecimento sobre o trabalho de Poincaré. Ele reclamou prioridade sobre os resultados de Poincaré referente a soluções assintóticas, e disse que seus resultados já haviam sido publicados na *Acta Mathematica.*[63] Mittag-Leffler, ciente do caso, escreveu a Poincaré para perguntar-lhe sobre o trabalho de Gyldén.

[62] Barrow-Green (1997, p. 127).
[63] Untersuchungen uber die Convergenz der Reigen, welche zur Darstellung der Coordinaten der Planeten angewendet werden, *Acta Mathematica 9*, p. 185-294, 1887.

Os trabalhos de Gyldén apresentavam um conflito sobre a convergência de certas séries de potências. Enquanto ele acreditava na convergência de tais séries, Poincaré tinha opinião contrária.

Como primeira resposta, em fevereiro de 1889, Poincaré disse a Mittag-Leffler que achou o trabalho de Gyldén difícil de ser lido e que ele ainda era incapaz de afirmar se o método de Gyldén conduzia a séries convergentes ou divergentes, mas que era muito provável que fossem divergentes.[64]

Enquanto isso, o rei tinha pedido a Mittag-Lefffler que falasse sobre o trabalho de Poincaré no encontro, ocorrido em fevereiro, da Academia Sueca de Ciências. Como Mittag-Leffer ficou doente, ele não pode atender ao pedido do rei, embora já não lhe agradasse a ideia de falar publicamente da memória de Poincaré sem o apoio de Weierstrass.

Mas Gyldén compareceu ao encontro, falou sobre a memória de Poincaré e declarou que havia obtido tais resultados anteriormente. Por isso, Mittag-Leffer foi mais uma vez colocado em uma difícil posição, pois o rei esperava que ele respondesse a Gyldén no encontro do próximo mês. Mittag-Leffer teve então que pedir auxílio a Poincaré, pedindo que ele lhe explicasse o trabalho de Gyldén.

Poincaré respondeu em mais duas longas cartas, no começo de março. Ele disse que tal posição de Gyldén colocava em foco a diferença entre a interpretação de convergência entre matemáticos e astrônomos, como vemos a seguir:

> *Vamos ao que você me disse de Gyldén. Gyldén disse ter demonstrado a existência de soluções assintóticas e nós afirmamos que ele não o fez. De onde vem isso! De que as palavras demonstração e convergência não tem o mesmo sentido para ele e para nós. Gyldén acredita ter demonstrado a convergência de uma série quando ele fez ver que os primeiros termos vem decrescendo e que é improvável que um dos 99 primeiros termos, por exemplo, tenha um valor maior. Isso pode ser suficiente para as aplicações astronômicas mas não contentaria ao matemático.* (*Acta Mathematica* 38, 1921, p. 164, tradução nossa)

Nessa carta, ele demonstra que as demonstrações de convergência de Gyldén não são suficientes. Na segunda carta, ele examinou se, no caso em que existem soluções assintóticas, os desenvolvimentos são convergentes. Mas ele afirmou:

> *Relendo minha carta eu percebi que parece que eu quero demolir completamente a memória de Gyldén; não é de forma alguma minha*

[64] As carta de Poincaré a Mittag-Leffer, referentes ao prêmio do rei Oscar II, aparecem transcritas na *Acta Mathematica 38* (1912, p. 163-164).

> *intenção; eu acho nela belas coisas; eu procurei somente mostrar o quanto as palavras demonstração e convergência têm um sentido diferente para ele e para nós. O problema só é abordado do ponto de vista da astronomia puramente prática que é talvez a mais importante, mas que não é o meu. Eu acredito que mesmo desse ponto de vista, meus métodos serão mais simples e pareciam quando eu os tinha desenvolvido suficientemente; mas pode ser que eu ainda não tenha compreendido bem os de Gyldén.* (*Acta Mathematica* 38, 1921, p. 164, tradução nossa)

Poincaré afirmou que acreditava que o método de Gyldén conduzia a uma situação em se chegava a uma infinidade de séries sendo que somente uma seria convergente, daí então a demonstração de soluções assintóticas. Todavia, o método do astrônomo não forneceu uma maneira de reconhecer tal série, e que ele mesmo só conseguiu chegar a essa afirmação aplicando os resultados obtidos em seu trabalho premiado.

Mittag-Leffler ministrou sua palestra na Academia, mas seu triunfo durou pouco. A comunidade acadêmica de Estocolmo decidiu apoiar Gyldén e, mesmo que a memória de Poincaré não tivesse sido publicada, adotou a ideia de que Gyldén havia publicado demonstrações de tudo o que Poincaré havia feito.

Mittag-Leffler e Poincaré continuaram argumentando contra Gyldén. Além disso, Mittag-Leffler chegou a dizer a Weierstrass que achava que Gyldén não era matemático suficiente para entender.

Hermite recebeu uma carta de Gyldén, e em 12 de abril de 1889, Hermite escreveu à Mittag-Leffer:

> *Eu recebi de Gyldén um escrito em sueco que eu não pude ler, mas as fórmulas me parecem mostrar claramente que é sobre a convergência das séries empregadas para o cálculo das perturbações, isso seria a abertura de hostilidades contra a memória de Poincaré?* (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite à Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 175, tradução nossa)

Após a publicação de *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, Gyldén tentou reabrir o debate, que vinha gradualmente caindo no esquecimento. Ele provavelmente contava com o apoio de Hermite, pois esse último simpatizava com seus trabalhos. Contudo, Hermite se manteve leal ao julgamento da comissão do concurso.[65]

Sobre tal fato, Hermite escreveu novamente a Mittag-Leffer, em 10 de janeiro de 1891:

> *Me permita informar que Gyldén me escreveu, protestando contra os resultados estabelecidos na memória de Poincaré, ele apóia fielmente as séries trigonométricas,sendo mais do que nunca da opinião de que elas*

[65] Barrow-Green (1997, p. 139-143).

> *fornecem, no caso dos planetas, soluções válidas para todo tempo, e que ele me enviará a demonstração.* [...] *Eu receio ser obrigado de lhe dizer que eu não aceiti ser colocado por ele em oposição ao julgamento encaminhado à memória de Poincaré, e eu não devo estar separado nem de você nem de Weierstarss, sob pena de deslealdade e de falha grave.* (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite a Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 188-189, tradução nossa)

Mas Gyldén era insistente. Em março de 1891, Hermite comentou:

> *Gyldén acabou de me enviar as 40 primeiras páginas impressas de um grande trabalho tendo como título "Nouvelles recherches sur les séries employées dans la théorie des planètes"*[66] *que deve ser publicado na Acta, e que você certamente leu. Eu me apressei em lhe escrever que as questões extremamente difíceis e importantes da mecânica celeste que ele abordou fogem inteiramente de meu domínio matemático* [...]. *Eu me coloco então fora da polêmica sobre a convergência das séries trigonométricas, e ele deve estar bem convencido de que eu não vou interferir nesse ponto* [...]. (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite a Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 193, tradução nossa)

Posteriormente, em outra carta de março, ele disse:

> *Gyldén é um fantasma de outra época, o mundo analítico se transformou em torno dele, sem ele, e para sua grande surpresa uma nova ordem surge em seu domínio, e ele fecha a cara para novas concepções que aparecem e se impõe.* (Charles Hermite: Lettres de Charles Hermite à Gosta Mittag-Leffler (1884-1891). *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* 6, 1985, p. 196, tradução nossa)

A primeira pessoa a falar notoriamente sobre os resultados obtidos por Poincaré foi Hill. Em 1896 foi publicado *Remarks on the progress Celestial Mechanics since the middle of the century*. Com relação a Poincaré, ele cita o trabalho *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* e os dois primeiros volumes de *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*. Ele foca principalmente em *Méthodes Nouvelles*, mas suas observações são igualmente aplicadas a ambos os trabalhos.[67]

O seu primeiro foco é sobre as soluções periódicas citando, posteriormente, as soluções assintóticas, que surgem quando consideramos soluções diferindo muito pouco da solução periódica. Segundo Hill, todos os casos apresentados na astronomia se referem a

---

[66] *Acta Mathematica* 15 (1891, p. 65-189).
[67] Barrow-Green (1997, p. 145).

sistemas que descrevem um movimento quase circular. Quando uma solução periódica é considerada uma primeira aproximação do movimento, os quadrados dos coeficientes característicos serão todos reais e negativos, logo, estáveis. Assim, não há razão para considerar as soluções assintóticas, e tal fato desestimula o interesse do astrônomo nesse tipo de solução.[68] Apesar disso, ele afirmou que Poincaré elaborou seu trabalho com muito esforço, mostrando que o efeito de aproximações de ordens mais altas dos desvios em relação à solução periódica podem ser consideradas relevantes.

Poincaré (1896) argumentou que Hill se baseou na ideia errada de que soluções assintóticas só poderiam existir quando as variáveis satisfizessem certas desigualdades. Ele deixou claro que havia provado a existência de soluções assintóticas para o problema restrito dos três corpos em qualquer domínio, para valores pequenos da massa perturbante. Poincaré atribuiu tal erro ao fato de que Hill ter considerado somente soluções periódicas de primeiro tipo.[69]

Hill questionou Poincaré sobre a afirmação de que a convergência das séries de Lindstedt implicaria a não existência de soluções assintóticas. Ele disse que essa observação era irrelevante, pela simples razão de que os domínios das duas coisas são distintos. Segundo Hill, em qualquer caso em que as séries de Lindstedt são aplicadas, não existem soluções assintóticas.

Sobre a divergência das séries de Lindstedt, Hill acreditava que as séries convergiam desde que as variáveis permanecessem dentro de certo domínio. Poincaré declarou ter demonstrado somente que as séries não podem convergir para todos os valores das variáveis. Segundo ele, as séries não podem convergir em um domínio qualquer que contenha uma solução periódica, mas todo domínio, por menor que seja, contém uma solução periódica. Se as séries convergem, então, é só para certos valores discretos das variáveis e não para todos os valores dentro de certos limites, mesmo sendo esses limites bem restritos.

Edmund Taylor Whittaker (1873-1956), em 1899, publicou *Report on the progress of the solution of the problem of three bodies*, uma memória que continha um comentário detalhado sobre *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Segundo ele, um novo ímpeto foi dado à astronomia dinâmica com a publicação desse trabalho. Além disso, ele citou o estímulo que esse trabalho proporcionou ao estudo de soluções periódicas. Whittaker apresentou uma breve discussão sobre, por exemplo, invariante integral, estabilidade, soluções periódicas e soluções assintóticas. Os comentários de Whittaker são

[68] Hill (1896, p. 133-134).
[69] Poincaré (1896, p. 559).

bem concisos, e proporcionam um entendimento global das principais ideias empregadas por Poincaré.

Em seu livro *A treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*, cuja primeira edição é de 1904, Whittaker disse que o problema dos três corpos é o mais celebrado de todos os problemas dinâmicos. No capítulo XIV desse livro, ele expõe o teorema de Poincaré sobre a não existência de um certo tipo de integrais no problema restrito dos três corpos, que consta primeiramente na memória *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. No capítulo seguinte, que estuda a teoria geral das órbitas, ele tratou, por exemplo, das soluções duplamente assintóticas, dos expoentes característicos e da aplicação do conceito de invariante integral no estudo sobre estabilidade.

4.3 *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*

Poincaré publicou, entre os anos 1892 a 1899, *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, que continham os métodos que permitiram um novo olhar sobre os problemas da mecânica celeste, como o problema dos três corpos. Publicados em três volumes, entre 1892 a 1899, encontramos nessa obra um grande número de novos teoremas.[70]

No primeiro volume, de 1892, a maior parte dos métodos analíticos é exposta. A questão sobre soluções periódicas é colocada em detalhes, assim como o estudo sobre os expoentes característicos, soluções assintóticas e a existência de integrais no problema dos três corpos.

Sobre o estudo das soluções periódicas, Poincaré afirmou:

> *Pode parecer que esse fato* [que o problema dos três corpos admite uma infinidade de soluções periódicas] *não tenha interesse na prática. De fato, existe uma probabilidade nula de as condições iniciais do movimento serem precisamente aquelas correspondendo a uma solução periódica. No entanto, pode acontecer que elas difiram muito pouco delas, e isso acontece precisamente no caso onde os antigos métodos não são aplicáveis. Nós podemos então tomar vantajosamente a solução periódica como primeira aproximação, como órbita intermediária, usando a linguagem de Gyldén.* (Poincaré, 1892, p. 81, tradução nossa)

O segundo volume data de 1893, e é dedicado ao estudo das séries utilizadas pelos astrônomos, envolvendo a consideração de diversos processos de integração das equações diferenciais a partir de séries desenvolvidas em potências de um pequeno parâmetro. Nesse volume, são discutidos os métodos de Delaunay, Gyldén, Newcomb, Lindstedt e Karl Bohlin

[70] Hill (1896, p. 133).

(1860-1939). Além disso, ele reitera sua conclusão sobre a divergência sobre as séries de Lindstedt sem, contudo, uma prova definitiva. Como ele mesmo afirma:

> *Os argumentos apresentados nesse capítulo não me permitem afirmar que isso* [que as séries de Linsdetdt sejam convergentes] *não possa ocorrer. Tudo que me permite dizer é que é fortemente improvável.* (Poincaré, 1893, p. 104-105, tradução nossa)

No último volume, Poincaré retomou sua visão geométrica do problema dos três corpos. Encontramos aqui a teoria sobre a invariante-integral, além de uma longa discussão sobre soluções assintóticas.

Sobre o estudo de soluções assintóticas, Barrow-Green observou:

> *Apesar do sucesso da memória de Poincaré sobre o problema dos três corpos, é de se notar que durante os primeiros anos do século XX nenhuma tentativa séria foi feita para investigar mais sobre o comportamento das soluções assintóticas de Poincaré. Isso pode ser amplamente explicado pela falta de habilidade em ocupar-se com uma análise qualitativa, devido à falta do poder da computação. Mas com a chegada do computador moderno, tal análise tem agora se tornado possível, que resulta no fato de que nos últimos 30 anos tem se visto uma explosão de pesquisa em sistemas não lineares com o concomitante desdobramento da teoria matemática do caos.*
>
> *Finalmente, existe uma outra razão por que as soluções assintóticas de Poincaré podem ter sido ignoradas: seu comportamento aparentemente aleatório não se encaixa com o então amplamente aceito modelo Laplaciano do universo mecânico. De fato, pode ser essa crença em algum tipo de ordem definitiva foi em parte responsável pelo próprio Poincaré ter deixado escapar o comportamento caótico em seu ensaio original.* (Barrow-Green, 2005, p. 637-638, tradução nossa)

O capítulo final desse volume foi dedicado à discussão de soluções duplamente assintóticas. A essência desse estudo é a mesma que aparece em *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*. Nesse último, Poincaré tinha provado que a cada solução periódica instável existente correspondia um sistema de soluções assintóticas. Duas famílias distintas de soluções assintóticas ocorrem, uma correspondente às curvas que se aproximam assintoticamente da solução periódica quando $t \to +\infty$ e outras quando $t \to -\infty$. Ele então tinha demonstrado que duas curvas assintóticas poderiam se interceptar somente se não fossem da mesma família, chamando tal solução de duplamente assintótica.

Essas soluções, em *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, volume 3, são chamadas de soluções homoclínicas.[71] Poincaré ainda obtém um novo tipo de solução

[71] Poincaré (1899, p. 384).

duplamente assintótica, que acontecia quando soluções assintóticas referentes a diferentes soluções periódicas instáveis se interceptavam. Essas soluções são chamadas de *soluções heteroclínicas*. Da mesma maneira que no caso homoclínico, Poincaré provou que uma solução heteroclínica é suficiente para provar a existência de um número infinito delas.

Tendo estabelecido a existência de soluções homoclínicas no problema restrito dos três corpos, Poincaré observou:

> *Quando procuramos representar a figura formada por essas duas curvas e suas interseções em número infinito, cada uma correspondendo a uma solução duplamente assintótica, essas interseções formam um tipo de rede, teia, de uma rede de malhas infinitamente cerradas; cada uma das curvas não deve jamais de autocruzar, mas elas devem se dobrar sobre elas mesmas de uma maneira muito complexa para interceptar todas as ligações da malha infinitas vezes. Nós iremos nos deparar com a complexidade dessa figura, que eu nem mesmo procuro traçar. Nada melhor pode nos dar uma ideia da complicação do problema dos três corpos e, em geral, de todos os problemas da dinâmica, onde não há integrais uniformes e as séries de Bohlin são divergentes.* (Poincaré, 1899, p.389, tradução nossa)

Uma ideia da complexidade dessas órbitas, observada por Poincaré na citação anterior, pode ser ilustrada na figura a seguir. Os diagramas representam as interseções das superfícies assintóticas com a secção transversa. Temos que os pontos S e S' representam soluções periódicas instáveis, C e C' curvas assintóticas correspondentes à S, enquanto D e D' são duas curvas assintóticas relacionadas à S'. Concluímos, assim, que o ponto P representa um ponto homoclínico e Q, um ponto heteroclínico.

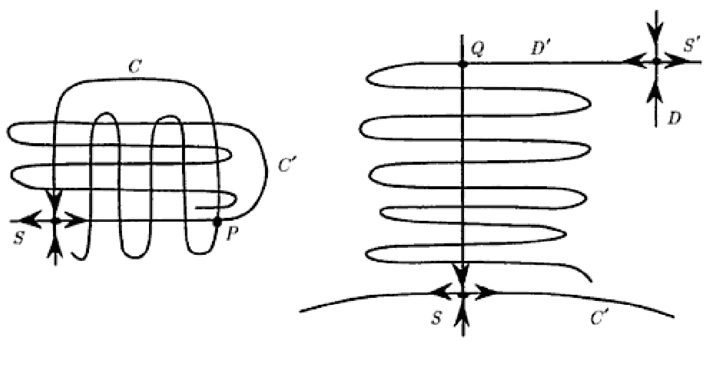

Figura 3.1

Fonte: Barrow-Green (1997, p. 163).

4.4 Desenvolvimentos no estudo do problema dos três corpos

Ao fim do séc. XIX, a maior parte dos matemáticos trabalhava os aspectos quantitativos da teoria das equações diferenciais, mais determinantes em questões práticas. Todavia, alguns matemáticos se preocupavam com o estudo qualitativo, e seguiram o ponto de vista de Poincaré. Como por exemplo, podemos citar o matemático francês Emile Picard (1856-1941), que, em *Traité d'Analyse*, de 1896, dedicou um capítulo de seu livro às soluções periódicas de certas equações diferenciais, baseando seu estudo na teoria de Poincaré.

Tullio Levi-Cevita (1873-1941), matemático italiano, realizou estudos qualitativos referentes ao problema dos três corpos. Em relação às ideias de Poincaré, Levi-Cevita utilizou um modelo geométrico similar à noção de secção transversa, além de ter realizado um estudo alternativo sobre a questão da estabilidade.

O matemático sueco Ivar Bendixson (1861-1935), em relação à teoria de equações diferenciais ordinárias, estendeu as idéias de Poincaré referentes ao comportamento das soluções próximas de singularidades, no trabalho *Sur les courbes définies par des équations différentielles*, de 1901. Ele estabeleceu um critério para a existência de soluções periódicas em sistemas dinâmicos com um grau de liberdade, e tal resultado é conhecido hoje como teorema de Poincaré-Bendixson.

Os matemáticos considerados mais importantes nessa época, interessados nos trabalhos de Poincaré, foram o russo Alexander Liapunov (1857-1918) e francês Jacques Hadamard.

O trabalho de Liapunov, *Problème général de la stabilité du mouvement*, foi finalizado em 1890, mas foi publicado originalmente somente dois anos depois. Durante esses dois anos, houve a publicação de *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique* e *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste I*. Liapunov explica, no prefácio de seu trabalho, que a publicação do primeiro lhe permitiu adicionar notas a seu texto, apontando analogias entre as duas obras.[72] Além disso, ele também se inspira em *Sur les courbes définies par les équations différentielles*, que, como ele mesmo afirma, inspirou uma parte de seu trabalho. Ele ressaltou:

> *Ainda que Poincaré se limite a um caso muito particular, os métodos de que ele se serve permitem aplicações muito mais gerais e podem ainda conduzir a vários novos resultados. É isso que veremos a seguir, pois, em*

[72] Liapunov (1907, p. 207).

> *uma grande parte de minhas pesquisas, eu me guiei pelas idéias desenvolvidas na memória citada.* (Liapunov, 1907, p. 205, tradução nossa)

Com relação ao trabalho publicado na *Acta XIII*, Liapunov disse:

> *Durante a impressão desta obra, que se estendeu por dois anos, apareceram dois trabalhos muito interessantes do senhor Poincaré, que tratam de questões que se aproximam muito daquelas que foram consideradas por mim. Eu falo da memória "Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique", que foi publicada na Acta Mathematica XIII, pouco tempo depois que eu comecei a imprimir meu trabalho, assim como o primeiro volume, que veio a ser publicado, do tratado intitulado: Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Paris, 1912. No primeiro, encontram-se certos resultados análogos aos que eu obtive, e que eu indico nos lugares convenientes de minha obra.* (Liapunov, pp. 207-208, 1907, tradução nossa)

Liapunov definiu a estabilidade de uma solução de uma equação diferencial. De forma simplificada, segundo essa definição, uma solução é estável se outras soluções, próximas a essa em um instante inicial, ainda permanecem próximas a ela à medida que o tempo varia.

A teoria de estabilidade de Liapunov, que se tornou amplamente conhecida, devido a sua grande capacidade de generalização, é reconhecida hoje como um dos principais avanços na teoria qualitativa de equações diferenciais.

Para se obter uma solução completa para o problema dos três corpos, devemos considerar os casos em que ocorrem colisões entre eles. As colisões são representadas pelas singularidades nas equações diferenciais. A tentativa de eliminar as singularidades levanta outras questões, por exemplo, se poderia existir outro comportamento nas singularidades.

No ano de 1895, Painlevé demonstrou que todas as singularidades são colisões. Excluindo as condições iniciais em que dois ou três corpos colidem em um tempo finito, Painlevé mostrou que o problema dos três corpos poderia ser resolvido utilizando séries de potências convergentes equivalentes as séries de Taylor. Ele conjecturou que as condições iniciais do problema, para que ocorresse colisão, deveriam satisfazer duas relações analíticas distintas ou uma, no caso do movimento planar.

Levi-Cevita, em 1903, encontrou a relação prevista por Painlevé, no caso do problema restrito dos três corpos e, três anos depois, Giulio Bisconcini (1880-1969) chegou as duas relações que deveriam ser satisfeitas pelas condições iniciais, no caso geral do problema. Porém, nem Levi-Cevita nem Bisconcini consideraram o caso de uma colisão tripla. Uma solução completa para o problema dos três corpos foi alcançada por Sundman. As principais características de seu trabalho são encontradas na *Acta Mathematica* do ano de 1912.

Considerando as colisões binárias, Sundman mostrou que a singularidade das equações diferenciais pode ser removida através de uma mudança de variáveis e em relação às colisões triplas, ele demonstrou que tal evento só poderia ocorrer se todas as constantes de momento angular (constantes relacionadas às integrais de área do problema dos três corpos) fossem nulas simultaneamente, resultado esse que já havia sido conjecturado por Weierstrass por volta de vinte anos antes, como vimos na seção 4.1.

Seu trabalho é resumido em seu último teorema, na *Acta*. Se as constantes de momento angular não são todas nulas e se as coordenadas e velocidades iniciais dos corpos são dadas em um tempo finito então as coordenadas dos três corpos, suas mútuas distâncias e o tempo podem ser expandidos em séries de potências de uma nova variável definida por ele. Essas séries representam o movimento dos corpos para qualquer instante, mesmo que ocorra colisões binárias, desde que o movimento continue nas condições anteriores.

Sundman então resolveu teoricamente o problema dos três corpos, ao contrário das expectativas de Poincaré, doze anos antes:

> *Mas eu chamo a atenção do leitor, sobretudo aos resultados negativos que são desenvolvidos ao fim da memória. Eu estabeleci, por exemplo, que o problema dos três corpos não comporta fora as integrais conhecidas, nenhuma integral analítica e uniforme. Essas circunstâncias nos fazer prever que a solução completa, se jamais poderemos a descobrir, exigirá instrumentos analíticos absolutamente diferentes desses que possuímos e infinitamente mais complicados.* (Poincaré, 1890, p. 6, tradução nossa).

Em 1913, Mittag-Leffler convidou Sundman para se juntar à comissão editorial da *Acta Mathematica* e também pediu a ele que escrevesse um comentário sobre a memória de Poincaré vencedora do prêmio. Mas Sundman não pode aceitar, devido a outros compromissos, e escreveu a Mittag-Leffler:

> *Eu preciso primeiro agradecer muito sua gentil carta incluindo a análise do trabalho de Poincaré. Nos últimos dois dias eu examinei o trabalho vencedor de Poincaré para ver se possivelmente poderia satisfazer seu desejo em relação a um ensaio sobre ele. Eu achei essa questão muito delicada. Esse assunto requer uma investigação aprofundada. Eu não acho que o trabalho premiado corresponda ao que Weierstrass queria. É provavelmente por essa razão que ele teve tanta dificuldade em expor suas declarações sobre o trabalho. Sem dúvida o trabalho premiado é de alto valor, mas quando o assunto é expressar-se em conexão com a questão do prêmio deve-se ter cuidado para não fazer um julgamento precipitado. Pressionado como eu estou por outros trabalhos inevitáveis, é impossível eu encontrar paz e silêncio suficientes para escrever sobre uma questão tão exigente.* (Barrow-Green, 2010, p. 186, tradução nossa)

Como dito anteriormente, Weierstrass nunca conseguiu terminar seu comentário sobre o trabalho de Poincaré, e não se sabe se Mittag-Leffler pediu a outra pessoa, que não Sundman, para que realizasse tal tarefa.

Apesar da importância do trabalho de Sundman, ele praticamente caiu no esquecimento durante trinta anos. A primeira causa desse fato é que a razão de convergência de suas séries é muito lenta, sendo as séries clássicas divergentes mais úteis na prática. Além disso, elas não forneciam nenhuma informação qualitativa sobre a natureza do movimento dos corpos, ou seja, nenhuma informação geral sobre a forma de suas trajetórias. Quarenta anos depois de ter sido publicado na *Acta Mathematica*, o estudo de Sundman sobre o problema dos três corpos atraiu o interesse de Jean Chazy (1882-1955), que comentou sobre os conteúdos trabalhados por Sundman, assim como sua influência.

> *A integração do problema do problema dos três corpos por Sundman, além de seu valor intrínsico, tem um efeito moral. Depois de vários esforços inúteis, depois do enorme trabalho de Poincaré, os pesquisadores se afastaram do problema dos três corpos: a integração de Sundman tem mostrado que nesse problema alguém é capaz de 'fazer alguma coisa'. Progresso fundamental nessa questão tem produzido novos aspectos da questão, e inevitavelmente tem consequências indiretas e profundas. Mas já essa solução* [a de Sundman] *tem por um lado tem levado a pesquisas em colisões e aproximações entre os três corpos, e por outro levado ao estudo de infinitas trajetórias dos três corpos, e o estudo do movimento como o tempo tende ao infinito.* [...] *Sem ter resolvido de uma só vez todas as questões qualitativas colocadas pelo problema dos três corpos, a integração de Sundman tem aumentado o progresso essencial na solução dessas questões. E várias questões permanecem abertas depois do trabalho de Sundman- assim como depois do trabalho de Poincaré.* (Chazy, 1952, p. 180-190, tradução nossa)

Chazy também realizou pesquisas sobre o problema dos três e *n* corpos, utilizando métodos de Sundman e a teoria de invariante-integral de Poincaré.

4.5 Outros contemporâneos de Poincaré

Em 1896, o matemático François Félix Tisserand (1845-1896), no prefácio do quarto volume de *Traité de Mécanique Celeste*, afirmou que seria impossível redigir um tratado sem falar das belas pesquisas de Poincaré sobre o problema dos três corpos. Por isso, um capítulo de seu livro é destinado a ele.

Tisserand inicia o capítulo dedicado aos trabalhos de Poincaré sobre o problema dos três corpos dizendo que a solução rigorosa de tal questão não estava mais avançada que na época de Lagrange. Além disso, ele destacou que os trabalhos de Poincaré trouxeram uma renovação em tal estudo, em primeiro lugar, graças ao conhecimento das soluções periódicas e, em segundo lugar, à demonstração rigorosa do importante fato que as séries utilizadas nos métodos de aproximação para as coordenadas dos três corpos não são absolutamente convergentes, fato que não impede, no entanto, de serem utilizadas pelos astrônomos.

Ele ainda observou que essas descobertas, acompanhadas de outros resultados importantes, estão presentes na memória *Sur le Problème des trois corps et les équations de la Dynamique,*que foi estendida em *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste*, sendo os dois primeiros volumes já publicados. Em seguida, Tisserand reproduziu o trabalho de Poincaré publicado em 1891, onde Poincaré resumiu sua memória vencedora do prêmio do rei Oscar II. Depois da transcrição desse trabalho, Tisserand afirma que ele dá uma boa ideia da profundidade e originalidade do autor.

Apesar das tentativas para encobrir o erro cometido por Poincaré, alguns matemáticos estavam cientes de tal fato. Moulton, em 1912, defendeu o prêmio dado a Poincaré:

> *Tem sido observado algumas vezes, recentemente, que a memória de Poincaré sobre o problema dos três corpos, que foi vencedor do prêmio de rei Oscar II, continha um erro, e que o artigo publicado diferia do primeiro originalmente submetido. Infelizmente e erroneamente, a impressão que tem sido deixada em algumas declarações é de que a primeira investigação estava bastante errada e era de pouco valor. A memória original continha um erro que foi descoberto por Phragmén, de Estocolmo, mas isso afetou somente a discussão da existência de soluções assintóticas e, corrigindo essa parte, Poincaré não tentou ocultar os fatos, e confessou completamente seus agradecimentos a Phragmén. Embora o erro tenha sido inoportuno, não existe a menor dúvida de que, apesar disso, e mesmo se ele tivesse sido reconhecido a tempo, o prêmio foi corretamente lhe outorgado. Se todas as partes afetadas pelo erro são omitidas, a memória ainda permanece igual em originalidade, em resultados obtidos e na extensão de uma valiosa especialidade aberta, e que é difícil de ser encontrada em outro lugar. Existem poucos homens, mesmo de alta reputação, que tenham produzido, em toda vida, algo mais novo e valioso do que aquilo que foi corrigido na investigação original submetida por Poincaré.* (Goroff, 1993, p. I13, tradução nossa).

Em 1902, Moulton[73] já ressaltava a importância dos métodos utilizados por Poincaré:

> *O próximo importante avanço foi feito por Poincaré que, em uma memória no Bulletin Astronomique, vol. I, provou que quando massas de dois dos*

[73] 1902 é o ano da primeira edição de *An introduction to Celestial Mechanics*.

> *corpos são pequenas comparadas ao terceiro, existe um número infinito de conjuntos de condições iniciais para os quais o movimento é periódico. Essas idéias forma elaboradas e os resultados forma estendidos em uma memória coroada com o prêmio oferecido pelo falecido rei Oscar da Suécia. Essa memória apareceu na Acta Mathematica, vol. XIII. Os métodos empregados por Poincaré são incomparavelmente mais profundos e poderosos que qualquer anteriormente utilizado na mecânica celeste, e marca uma época no desenvolvimento da ciência.* (Moulton, 1914, p. 320, tradução nossa).

Após a morte de Poincaré, em 1912, a descoberta de soluções homoclínicas passou por um breve período de esquecimento. Durante a primeira metade do séc. XX, poucos matemáticos se dedicaram ao estudo das propriedades qualitativas de sistemas de equações diferenciais.

A análise qualitativa na teoria de equações diferenciais influenciou também trabalhos de Jacques Hadamard. Sobre a importância da análise qualitativa iniciada por Poincaré, Hadamard afirmou:

> *A mais importante delas* [questões da astronomia] *é bem conhecida, e seu exemplo representa ele mesmo todo espírito da astronomia: é a estabilidade do sistema solar. O simples fato de essa questão ser essencialmente qualitativa é suficiente para mostrar a necessidade de seu* [Poincaré] *ponto de vista.* (Hadamard, 1912, p. 240, tradução nossa).

Sobre a importância do uso de soluções periódicas, ele disse:

> *A honra de ter pesquisado especialmente, entre todas as soluções de equações diferenciais do movimento dos planetas, uma solução periódica, aquela, dita de outra forma, em que os diferentes corpos móveis descrevem curvas fechadas (pelo menos em relação a um sistema de eixos convenientemente escolhidos)-é devida ao astrônomo Hill, que deu um primeiro exemplo notável a esse respeito, no que concerne ao problema dos três corpos. Mas foi Poincaré que mostrou que as soluções periódicas são um instrumento, um dos mais potentes de que dispomos, para a pesquisa e estudo de outras soluções.* (Hadamard, 1921, p. 249, tradução nossa)

O estudo qualitativo de equações diferenciais, introduzido por Poincaré, é o marco inicial na Teoria dos Sistemas Dinâmicos, que começou a ser desenvolvida posteriormente pelo matemático americano George David Birkhoff. Ele foi o pioneiro no uso da expressão S*istemas Dinâmicos* para se referir às equações diferenciais onde a variável independente é o tempo. Birkhoff foi professor de Edward Lorenz (1917-2008), que é considerado um dos nomes mais importantes na Teoria do Caos, ou seja, no estudo da dependência sensível de equações diferenciais às condições iniciais.

Birkhoff declarou, em 1938, que o trabalho de Moulton foi o primeiro que atraiu a atenção dos matemáticos americanos para os avanços fundamentais de Poincaré.[74] Birkhoff é considerado como o matemático mais influenciado por *Sur le Problème des trois corps et les équations de la Dynamique* e *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste.*[75] Incorporando o uso da topologia, ele generalizou e estendeu as ideias de Poincaré e, assim como nos trabalhos dele, os movimentos periódicos desempenham um papel fundamental em sua teoria.

4.6 Resumo sobre a importância de *Sur le Problème des trois corps et les équations de la Dynamique* em pesquisas posteriores

No discurso feito no funeral de Poincaré, que ocorreu no dia 19 de julho de 1912, o matemático francês Paul Painlevé declarou:

> *Seu trabalho em mecânica celeste bastaria a sua glória. É ele que o revelou pela primeira vez ao grande público. O rei Oscar II da Suécia, patrocinador das ciências, tanto esclarecido como generoso, abriu, em 1887* [na verdade, foi em 1885], *um concurso internacional de matemática. Em 1889, ao fim do concurso, a França soube com alegria que a grande medalha de ouro, suprema recompensa do novo torneio, foi atribuída a um de seus filhos, a um jovem cientista de trinta e cinco anos, por um maravilhoso estudo da estabilidade mecânica do nosso universo; e é assim que o nome de Henri Poincaré torna-se popular.* (Funérailles de M. Henri Poincaré, *Institut de France*, 1912, p. 9, tradução nossa).

A partir desse discurso, podemos ratificar a grande importância que teve o trabalho *Sur le Problème des trois corps et les équations de la Dynamique* na vida acadêmica de Poincaré.

O volume 38 da *Acta Mathematica*, no ano de 1921, foi dedicado a Poincaré. Essa edição da revista inclui dois longos artigos seus trabalho, um feito por Hadamard, intitulado *L'oeuvre mathématique de Poincaré*, e outro de Edvard Hugo von Zeipel (1873-1959), *L'oeuvre astronomique d'Henri Poincaré*. Sobre as contribuições de Poincaré para a astronomia, von Zeipel disse:

---

[74] Goroff (1993, p. I13).
[75] Barrow-Green (2005, p. 637).

> *Na história da astronomia, Poincaré permanecerá sempre no primeiro escalão de exploradores mais eminentes que pela força irresistível de seu gênio conseguiram expandir os limites da ciência do universo. À primeira vista, essa opinião pode parecer estranha, pois Poincaré não era nem observador nem calculador. Mas para justificar nosso sentimento, é suficiente se lembrar que a astronomia - em seus esforços para conhecer as leis do movimento e o estado físico dos corpos celestes e do universo - deve necessariamente ficar em cooperação íntima com a análise matemática, a mecânica e a física. É a glória de Poincaré ter reforçado as ligações que devem reatar a astronomia a outros ramos da ciência. Assim, a astronomia pode apreciar o rigor e a elegância dos métodos da análise moderna e dos progressos recentes da física matemática.* (von Zeipel, 1921, p. 309-310, tradução nossa)

Durante a primeira metade do século XX o estudo em sistemas dinâmicos entrou em declínio, salvo na então União Soviética, destacando-se nessa área, dentre outros, os matemáticos Alexander Lyapunov (1857-1918), Lev Pontryagin (1908-1988) e Alexander Andronov (1901-1952). Lyapunov alcançou resultados na teoria da estabilidade e também introduziu o conceito de *expoente de Lyapunov*, que serve para identificar se um sistema dinâmico é ou não caótico. Pontryagin e Andronov, em 1937, estudaram sistemas dinâmicos em um espaço bidimensional. Eles foram responsáveis pela definição de *sistema robusto*, que é um sistema em que suas trajetórias permanecem qualitativamente equivalentes às de um sistema homeomorfo a ele.

Os trabalhos de Pontryagin e Andronov chegaram aos Estados Unidos pelas mãos do matemático russo Solomon Lefschetz (1884-1972), que substituiu o nome *sistema robusto* por *sistema estruturalmente estável*. Lefschetz veio a influenciar trabalhos de outros matemáticos, como o do brasileiro Maurício Peixoto (1921-), que procurou expressar a Teoria dos Sistemas Dinâmicos tendo como base a Teoria dos Conjuntos. Para isso, considerou um sistema dinâmico como um ponto no espaço de Banach (espaço vetorial normado e completo), e propôs que a relação de equivalência entre dois sistemas dinâmicos no espaço seria o homeomorfismo, sendo essa definição inspirada em Pontryagin e Andronov. Em 1958, Peixoto conhece o matemático americano Steve Smale (1930-), que procurou estender os resultados alcançados por Peixoto e se tornou um dos matemáticos mais importantes na Teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Em 1954, Andrei Kolmogorov (1903-1987) enunciou um teorema que veio a ser provado na década seguinte por Vladimir I. Arnold (1937-) e por Jurgen Moser (1928-1999), que ficou conhecido como teorema KAM. A estabilidade do sistema solar é um problema de grande importância na Mecânica Celeste e o teorema KAM mostra que, sob certas condições, as órbitas permanecem confinadas em toros. Em particular, a teoria KAM estabelece a existência de soluções, escritas sob a forma de séries convergentes, para o problema dos *n* corpos.

A descoberta de sistemas caóticos estáveis, como o sistema metereológico de Lorenz, em 1963, tem convencido cientistas de que existem muito mais tipos de comportamentos dinâmicos que os pontos singulares e os ciclos limites. Além disso, nomes destacados da matemática no Brasil, como o premiado Jacob Palis Jr. (1940-) e César Camacho, fazem parte de uma geração de pesquisadores que iniciou nos anos 1990 a tentativa de formular uma abordagem global do comportamento dos sistemas dinâmicos. Diversas conjecturas foram formuladas por Palis e matemáticos do Impa debruçaram-se sobre elas com a ambição de comprová-las.

Portanto, muitos avanços na Teoria dos Sistemas Dinâmicos ainda podem ser feitos, mostrando que essa é uma área em contínua expansão e que há muitos caminhos a serem percorridos.

Analisando a contribuição dos estudos de Poincaré, podemos concluir que suas palavras no final de *Sur le Problème des trois corps et les équations de la Dynamique* expressam, de fato, a realidade que estava por vir:

> *De fato, eu não pude fazer ainda, mesmo no caso particular que eu me restringi, um estudo suficientemente profundo. Só depois de muitas pesquisas e esforços que os matemáticos conhecerão completamente esse domínio, onde eu pude apenas fazer um simples reconhecimento, e eles encontrarão aqui um terreno sólido onde podem se lançar para novas conquistas.* (Poincaré, 1890, p. 270, tradução nossa).

Capítulo 5

CONCLUSÃO

O objetivo desse trabalho foi investigar as tentativas de resolução para o problema dos três corpos, principalmente a partir da segunda metade do século XIX. Para isso, descrevemos os métodos clássicos, que procuravam desenvolver analiticamente as coordenadas dos três corpos, como encontrados nos trabalhos de astrônomos como Delaunay e Lindstedt, e mostramos as inovações introduzidas por Poincaré, em *Sur les problème des trois corps et les équations de la dynamique*, de 1890, que trouxeram um enfoque qualitativo as estudo do problema.

No primeiro capítulo, apresentamos as equações diferenciais do problema dos três corpos, que constituem um sistema de ordem dezoito e cujas soluções fornecem descrições matemáticas das trajetórias dos corpos em questão. A partir do conhecimento das dez integrais clássicas do problema, somadas a duas reduções de ordem, vimos que este problema se torna um sistema de ordem seis, e que novas reduções de ordem não são possíveis. Como todas as integrais do sistema não podem ser encontradas, as tentativas de resolução para o problema dos três corpos passaram a envolver o uso de séries infinitas, que fornecem soluções aproximadas para as trajetórias dos corpos.

Dessa situação emergia a questão da convergência, colocando em lados opostos matemáticos e astrônomos. Para os astrônomos, uma série convergia se seus termos fossem decrescendo rapidamente; para os matemáticos, uma série só seria convergente se tal fato fosse rigorosamente demonstrado.

Durante os séculos XVIII e XIX, havia a ênfase na análise de propriedades locais de de funções, ou seja, o estudo do comportamento de uma função na vizinhança de um ponto no plano. Poincaré, em sua série de trabalhos *Sur les courbes définies par une équation différentielle*, publicados entre 1881 e 1886, começou a estudar funções definidas por equações diferenciais com uma abordagem diferente. Ele apresentou uma descrição do comportamento das soluções de equações diferenciais na vizinhança de uma singularidade e utilizou uma variedade de conceitos e métodos procurando ter uma visão geral das soluções em todo o plano, sem resolver as equações explicitamente.

Essa nova abordagem culminou com sua memória *Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*, de 1890. Ele enviou essa memória ao concurso do rei Oscar II, e esse trabalho tratava, como vimos, de uma versão simplificada do problema dos três corpos: o problema restrito dos três corpos. Contudo, a primeira versão do trabalho de Poincaré continha um erro, que levou à descoberta de um fato de considerável importância: as trajetórias homoclínicas. A descoberta dessas trajetórias é considerada como a primeira descrição matemática de movimento caótico dentro de um sistema dinâmico. Os resultados obtidos por Poincaré permitem concluir que sistemas simples podem apresentar um comportamento extremamente complexo.

Poincaré publicou, posteriormente, entre os anos de 1892 e 1899, os três volumes de *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, contendo a descrição dos métodos qualitativos que propunham um novo olhar sobre os problemas da Mecânica Celeste, como o problema dos três corpos. Como vimos, apesar de não haver uma solução analítica para este problema, um estudo qualitativo permite descrever as principais propriedades geométricas de suas possíveis soluções. Esta visão é o marco inicial na história da Teoria dos Sistemas Dinâmicos, que começou a ser desenvolvida posteriormente pelo matemático americano George Birkhoff.

A história das contribuições de Poincaré para o estudo de equações diferenciais é bem recente, e não há muitas pesquisas sobre o assunto. A única referência atual consultada nesta dissertação, que apresenta a matemática envolvida no trabalho de Poincaré e expõe as razões do erro por ele cometido, ao invés somente de citá-lo, é Barrow-Green (1997). Por isso, este livro foi de grande importância ao longo dessa pesquisa, mas ainda há muito a ser estudado em relação com a memória de 270 páginas vencedora do prêmio do rei Oscar II, bem como ao conjunto dos trabalhos de Poincaré sobre este assunto.

Além disso, mesmo na análise histórica dos trabalhos de Poincaré, constata-se uma ausência total de estudos que comparem suas contribuições com o contexto da Mecânica Celeste antes dele. Em geral, são feitas afirmações vagas como "os métodos analíticos utilizados pelos astrônomos foram substituídos por métodos qualitativos". Do ponto de vista histórico, no entanto, cabe precisar, na frase acima, a que se referem os termos "analítico" e "qualitativo". Nos trabalhos de Poincaré encontram-se, seguramente, diversos métodos que eram usados na Mecânica Celeste de sua época e mesmo as novas abordagens propostas podem ser associadas com práticas empregadas pelos astrônomos (ainda que não tematizadas). O árduo trabalho que resta por fazer, ao qual esperamos ter dado uma ínfima contribuição, é investigar nos textos de Mecânica Celeste da segunda metade do século XIX quais eram as práticas comuns que Poincaré empregou, ou com as quais ele rompeu.

Há, portanto, muitos outros textos a serem analisados, relativos aos trabalhos dos astrônomos e de outros autores, como Tisserand, que também publicou muitas memórias em Mecânica Celeste. A quantidade de artigos de matemáticos e astrônomos sobre assunto na segunda metade do século XIX é muito grande, e seria interessante que mais historiadores da matemática pudessem s ededicar a eles. A aridez desta área de pesquisa, que pode justificar a ausência de trablhos históricos sobre o assunto, pode ser verificada pela imensa quantidade de cálculos, muitas vezes extensos, presentes nestes textos. A tarefa mais difícil é identificar que parte deles consiste somente em uma repetição obssessiva de contas e o que pode significar alguma inovação. Os próprios autores, como de costume, não indicam esta diferença, pois estavam mais preocupados em obter resultados. A tarefa do historiador, contudo, é identificar, em meio às práticas matemáticas da época, uma cultura comum no tratamento dos problemas da Mecânica Celeste. Somente com a identificação deste contexto poderemos compreender o que os trabalhos de Poincaré possuem de realmente inovador, mas também em que eles são herdeiros de uma tradição, ou melhor, de uma cultura.

A pesquisa sobre esse tema é importante também para, utilizando um estudo histórico como alicerce, ajudar a compreender os desenvolvimentos recentes na área de Sistemas Dinâmicos. É preciso compreender como estes estudos, responsáveis pelo desenvolvimento de técnicas modernas, presentes em diferentes áreas da matemática, se relacionam com os métodos e as ferramentas propostas no tratamento do problema dos três corpos, e do problema geral dos *n* corpos, principalmente entre os séculos XVIII e XIX.

REFERÊNCIAS

1. BARROW-GREEN, June. *Poincaré and the Three Body Problem*. Providence: American Mathematical Society, 1997.
2. BARROW-GREEN, June. Henri Poincaré, Memoir on the three body problem (1890). *Landmark Writings in Western Mathematics, 1640-1940*. Amsterdã: Elsevier B. V., 2005.
3. BARROW-GREEN, June. The dramatic episode of Sundman. *Historia Mathematica 37 (2)*, p. 164-203, 2010.
4. BEUTLER, Gerhard. *Methods of Celestial Mechanics: Volume I: Physical, Mathematical, and Numerical Principles*, v. 1. Berlim: Springer-Verlag, 2005.
5. BÖLLING, Reinhard. Briefwechsel, Karl Weierstrass- Soffia Kowalewskaja. Berlim: Springer-Verlag, 1993.
6. BROWN, Ernest W. *An introductory Treatise on the Lunar Theory*. Nova York: Cambridge University Press, 1896.
7. BROWN, Ernest W. Biographical Memoir of George William Hill. *Biographical Memoirs , National Academy of Sciences 8*, p. 275-306, 1916.
8. CAYLEY, Arthur. Report on the Progress of the solution of Certain Special Problems of Dynamics. *Mathematical Papers 4*, p. 513-593, 1862.
9. CHAZY, Jean. L'intégration du movement dans le problème des trois corps par Sundman, et ses consequences. *Bulletin Astronomique 16*, p. 175-190, 1952.
10. DELAUNAY, Charles Eugène. Nouvelle théorie analytique du mouvement de la lune. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, p. 968-970, 1846.
11. DELAUNAY, Charles Eugène. Théorie du mouvement de la lune I. *Mémoire de l'Académie des Sciences 28*, p. 1-183, 1860.
12. DIACU, Florin; HOLMES, Philip. *Celestial Encounters: the origins of chaos and stabiliy*. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1996.
13. GAUTIER, Alfred. *Essai historique sur le problème des trois corps*. Paris, 1817.
14. GREGORY, R. Douglas. *Classical Mechanics*. Nova York: Cambridge University Press, 2006.

15. GUTZWILLER, Martin C. Moon-Earth-Sun: The oldest three-body problem. *Reviews of Modern Physics*, v. 70, n° 2, p. 589-639, 1998.
16. HILL, George William. On the part of the Motion of the Lunar Perigee which is a function of the Mean Motions of the Sun and Moon. *Collected Mathematical Works of George William Hill 1*, p. 243-270, 1877.
17. HILL, George William. Researches into the Lunar Theory. *Collected Mathematical Works of George William Hill 1*, p. 284-335, 1878.
18. HILL, George William. Remarks on the Progress of Celestial Mechanics since the Middle of the Century, Presidential Address delivered before the American Mathematical Society. *Bulletin of the American Mathematical Society 2*, p. 125-133, 1896.
19. HOLMES, Philip. Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and "chaos". *Physics Reports* 193, n° 3, p. 137-163, 1990.
20. JACOBI, Carl. Sur l'élimination des noeuds dans le problème des trois corps. *Journal fur die eine und Angewandte Mathematik 26*, p. 115-131, 1843.
21. LAGRANGE, Joseph Louis. Essai sur le problème des trois corps. *Oeuvres de Lagrange 6*, p. 229-331, 1772.
22. LASKAR, Jacques. La stabilité du système solaire. *Chaos et déteminisme*, p. 170-211, 1992.
23. LIAPUNOV, Alexander. Problème général de la stabilité du mouvement, *Annals de La Faculté des Sciences de Toulouse 9*, p. 203-474, 1907.
24. LINDSTEDT, Anders. Sur la détermination des distances mutuelles dans le problème des trois corps. *Annales de l'École Normale (3) 1*, p. 85-102, 1884.
25. MITTAG-LEFFLER, Gösta. Zur Biographie von Weierstrass. *Acta Mathematica 35*, p. 29-65, 1912.
26. MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo: Livraria da Física, 2002.
27. MOSER, Jurgen. O Sistema solar é estável? *Matemática Universitária*, n° 9/10, p. 51-67. 1989.
28. MOULTON, Forest Ray. *An introduction to Celestial Mechanics*. 2ª ed. Nova York: Ferris Printing Company, 1914.
29. NAKANE, Michiyo; FRASER, Craig. The early history of Hamilton-Jacobi dynamics 1834-1837. *Centaurus*, p. 161-227, v. 44, 2002.

30. POINCARÉ, Henri. Sur les séries trigonométriques. *Oeuvres de Henri Poincaré IV*, p. 585-587, 1882.
31. POINCARÉ, Henri. Sur les séries trigonométriques. *Oeuvres de Henri Poincaré IV*, p. 588-590, 1883.
32. POINCARÉ, Henri. Sur certaines solutions particulières du problème des trois corps. *Oeuvres de Henri Poincaré VII*, p. 253- 261, 1884.
33. POINCARÉ, Henri. Sur la convergence des séries trigonométriques. *Oeuvres de Henri Poincaré IV*, p. 591-598, 1884.
34. POINCARÉ, Henri. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica 13*, p. 1-270, 1890.
35. POINCARÉ, Henri. Sur le problème des trois corps. *Oeuvres de Henri Poincaré VII*, p. 480-490, 1891.
36. POINCARÉ, Henri. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste I*. Paris: Gauthier-Villars, 1892.
37. POINCARÉ, Henri. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste II*. Paris: Gauthier-Villars, 1893.
38. POINCARÉ, Henri. Sur la divergence des séries trigonométriques. *Oeuvres de Henri Poincaré VII*, p. 561, 563, 1896.
39. POINCARÉ, Henri. *Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste III*. Paris: Gauthier-Villars, 1899.
40. POINCARÉ, Henri. *Introduction to the Collected Mathematical Works of George William Hill*, *Volume 1*, p. vii-xviii, 1905.
41. POLLARD, Harry. *Mathematical Introduction to Celestial Mechanics.* New Jersey: Prentice-Hall, 1966.
42. SANJUÁN, Miguel A. F.; VÁZQUEZ, José Manuel Casado. Dinámica No Lineal: Orígenes y Futuro. *RUISF Enero 2005*. Disponível em: http://fisica.Ciens.ucv.ve/svf /Feiasofi/dinamica.pdf. Acesso em: 07 dez. 2009.
43. SIEGEL, Carl Ludwig; MOSER, Jurgen K. *Lectures on Celestial Mechanics*. Berlim: Springer-Verlag, 1995.
44. SIMON, Newcomb. On the General Integrals of Planetary Motion. *Smithsonian Contribuition to Knowledge 31*, p. 1-31, 1874.
45. TERESA, Luz de. Euler y el cálculo de variaciones. *Miscelánea Matemática 45*, p. 25-31, 2007.

46. TISSERAND, François Félix. *Traité de Mécanique Celeste I*. Paris: Gauthier-Villars, 1889.

47. TISSERAND, François Félix. *Traité de Mécanique Celeste IV*. Paris: Gauthier-Villars, 1896.

48. VALTONEN, Mauri; KARTTUNEN, Hannu. *The three-body problem*. Nova York: Cambridge University Press, 2005.

49. VOLCHAN, Sérgio Bernardo. *Uma Introdução à Mecânica Celeste*. Rio de Janeiro: IMPA, v. 1, 82 p., 2007.

50. ZEIPEL, Hugo von. L'Oeuvre Astronomique de Henri Poincaré. *Acta Mathematica 38*, p. 309-385, 1921.

51. WHITTAKER, Edmund Taylor. Report on the progress of the solution of the problem of three bodies. *BAAS Report 1899*, p. 121-159.

52. WHITTAKER, Edmund Taylor. *A treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies*. 4ª ed. Nova York: Cambridge University Press, 1944. Primeira edição: 1904.