Manipulação de Provas Semânticas e Sintáticas em Cálculo Diferencial e Seus Potenciais Conflitos

Diego de Souza Nicodemos

PEMAT-UFRJ

Dezembro de 2010

Manipulação de Provas Semânticas e Sintáticas em Cálculo Diferencial e Seus Potenciais Conflitos

por

Diego de Souza Nicodemos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Co-orientador: Carlos Eduardo Mathias Motta

Rio de Janeiro

Dezembro de 2010

Manipulação de Provas Semânticas e Sintáticas em Cálculo Diferencial e Seus Potenciais Conflitos

por

Diego de Souza Nicodemos

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Co-orientador: Carlos Eduardo Mathias Motta

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Victor Augusto Giraldo, D.Sc, PEMAT-UFRJ (Orientador)

____

Carlos Eduardo Mathias Motta, D.Sc., UFF (Coorientador)

____

Claudia Coelho de Segadas Vianna, Ph.D., PEMAT-UFRJ

____

Marco Aurélio Palumbo Cabral, Ph.D., PEMAT-UFRJ

____

Wanderley Moura Rezende, D.Sc., UFF

Rio de Janeiro

Dezembro, de 2010

Dedico este trabalho aos meus pais que sempre me apoiaram incondicionalmente, à Gabi minha mais nova paixão e à Ana Luisa, amor meu, fonte de inspiração.

Agradecimentos

A Deus, pela força, me fazendo acreditar que este trabalho se concretizaria.

Aos meus pais, Mara e Jorge, pelo amor incondicional que têm por mim, pelo carinho e compreensão que demonstraram ter frente a todas as dificuldades que passei para concluir este trabalho: amo vocês.

À minha irmã, minha grande amiga, pela confiança em mim e por sua ternura. Mesmo longe tenho você sempre aqui comigo. Obrigado pela filha linda. Amo vocês.

Às aulas de filosofia que me fizeram conhecer o amor.

À Ana Luisa, amor meu, presença crescente em minha vida. Inspiração, companheira, compreensiva, compartilhou de todo este trabalho, que também é muito seu. Amo-te hoje mais que ontem, dois meses à frente.

Aos novos amigos, melhor riqueza nesta vida, especialmente ao Luis Marcos que fez de momentos difíceis eu entender que a humildade deve sempre prevalecer, dando significado real à palavra amigo.

Aos amigos de mestrado, companheiros de batalha: Fábio, Roberta (muito obrigado) e Masé.

Aos antigos amigos: Felipe e Rafael. Parceiros sempre.

Ao PEMAT que me abriu as portas oferecendo todos os recursos necessários para que esta e outras tantas pesquisas pudessem ser realizadas e que, sem dúvida, contribuirão para uma melhora sensível na educação deste país.

Aos meus orientadores, Victor e Mathias, professores brilhantes, exemplo de educadores.

À banca por dispor de paciência e de tempo, contribuindo, efetivamente, para que este trabalho se realizasse.

O grande amor há de estar na

estrada,

não na pousada

Cervantes (1547-1616)

Resumo

MANIPULAÇÃO DE PROVAS SEMÂNTICAS E SINTÁTICAS EM CÁLCULO DIFERENCIAL E SEUS POTENCIAIS CONFLITOS

Diego de Souza Nicodemos

Dezembro/2010

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Co-orientador: Carlos Eduardo Mathias Motta

O foco central desta dissertação está em identificar o uso de provas(demonstrações) sintáticas e semânticas, e eventuais fatores de conflitos causados por cada tipo de prova(demonstração), bem como a frequência desses conflitos.

Palavras-chaves: Prova Sintática - Prova Semântica - Imagem de Conceito - Definição de Conceito.

Abstract

SEMANTICS AND SYNTACTICS PROOFS MANIPULATIONS IN DIFFERENTIAL CALCULUS AND IT´S POWERFUL CONFLICTS

Diego de Souza Nicodemos

Dezembro/2010

Advisor: Victor Augusto Giraldo

Co-Advisor: Carlos Eduardo Mathias Motta

The focal point of this work is to recognize the use of semantic and syntactic proofs, and occasional conflict factors caused by each type of proof, as well as these conflict's incidence.

Key-words: Syntatic Proof; Semantic Proof; Concept Image; Concept Definition.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O interesse nesta pesquisa surgiu a partir de concepções pessoais de que para verdadeiramente aprender e fazer matemática é fundamental termos uma ampla compreensão de seus conceitos. Não acreditamos ser possível a existência de um aprendizado pautado em reproduções vazias de algoritmos e teoremas, sem atribuir significado a eles.

Acreditamos que compreender os conceitos matemáticos tem maior valor do que saber apenas realizar cálculos. Sem dúvida o campo das idéias é mais sutil e mais complexo do que a apropriação da manipulação de símbolos e fórmulas. Cremos que, na matemática, a dedução é mais relevante do que o processo.

Este trabalho consiste em analisar respostas dadas às questões de cálculo diferencial e integral na prova de seleção para o Mestrado de Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro (2006, 2007, 2008 e 2009). Essas respostas serão discutidas a partir do referencial teórico que aborda a produção de demonstrações sintáticas e semânticas de Weber e Alcock (2004).

A produção de uma demonstração sintática reflete a tendência em manipular frequentemente símbolos, enquanto que a produção semântica predomina-se por uma manipulação de sentidos e conceitos. Um tipo de produção não é mais nem menos formal ou correta que a outra, ter ou não ter rigor não está, necessariamente, relacionado a um ou a outro tipo de produção. Quando tratamos da produção de demonstrações sintáticas ou semânticas o processo usado para obtê-la ou o resultado é o mais importante. Desta forma é de se esperar que o resultado final, em ambas as escolhas, seja minimamente formalizado. Ressaltamos que este é um estudo inicial, que sugere algumas questões de pesquisa. Acreditamos que para entender melhor estas questões, poderá ser realizado, no futuro, um estudo mais aprofundado, envolvendo entrevistas.

Definições, propriedades e teoremas devem ser bem explorados e discutidos, tanto sintática quanto semanticamente. Analisaremos o produto final do pensar matemático de indivíduos de variadas formações: bacharéis em matemática, licenciados em matemática e até possivelmente engenheiros. Por ter sido inviável estabelecer qualquer contato com os candidatos, nenhuma entrevista foi realizada. Consideraremos apenas suas respostas, porém cada desenvolvimento será exaustivamente analisado e revisto, e por se tratar de uma seleção ao Mestrado em Ensino de Matemática, para a Universidade Federal do Rio de Janeiro, podemos esperar que os candidatos tenham respondido às questões utilizando todos os seus recursos, o que torna suas respostam minimante fiéis a seus conhecimentos e crenças.

Utilizaremos, nesta pesquisa, a teoria de imagem de conceito e definição de conceito de Tall e Vinner (1981). Investigaremos se uma imagem de conceito consistente conduz de maneira natural à definição de conceito, assim como se uma definição de conceito bem compreendida nos leva a promover uma boa e satisfatória imagem de conceito.

Na matemática, os exemplos sempre foram poderosas armas didáticas, promovendo um melhor entendimento de teoremas e definições, muitas vezes obscuras e sem sentido para os estudantes. Enquanto professores propomos, na maior parte das vezes, os exemplos mais convencionais, conhecidos como “exemplos estereótipos”. É difícil nos depararmos com exemplos menos padronizados: funções contínuas costumam ser representadas em intervalos da reta, seqüências convergentes costumam ser monótonas, funções integráveis costumam ser contínuas. Enfim, nossos exemplos tendem a ser os mais simples possíveis, sempre pensamos nas situações mais fáceis para discutir novos ou antigos conceitos. Isto gera uma banalização dos objetos matemáticos causando sérios entraves na compreensão plena do conceito discutido, tornando-se muitas vezes, um fator de conflito entre a imagem de conceito adquirida e a definição de conceito formal.

Giraldo discute o conceito de derivada de uma função real, em um ambiente computacional, com um grupo de alunos - iniciantes em cálculo diferencial e integral. Durante uma das etapas de sua pesquisa, introduz a definição formal de derivada utilizando epsilons e deltas, ressaltando o seguinte:

> Não se espera dos alunos a compreensão do enunciado formal da definição, no sentido da formação de uma imagem de conceito ampla a ponto de operar simbólica e logicamente com ela nos primeiros cursos de cálculo, supõe-se que a abordagem formal seja apenas sugerida, para ser coberta em detalhes nos futuros cursos de análise (2004, p.100).

Seu trabalho sugere que, com o tempo, os graduandos se apropriem de conceitos melhor estruturados, estabelecendo imagens de conceito naturalmente mais pluralizadas com os diversos conteúdos da matemática.

Giraldo (2004) verifica que os conflitos teórico-computacionais motivam a compreensão mais profunda da teoria trabalhada.

Aqui, nesta pesquisa, nossa expectativa é que surjam conflitos entre imagem de conceito e definição de conceito. Esperamos que seja possível detectar que as respostas dadas às questões levantadas são evidências contundentes de que é necessário nos preocuparmos com o entendimento pleno dos conceitos matemáticos.

Acreditamos que vários fatores de conflitos são causados por inconsistentes imagens de conceitos, tanto num ambiente de produção sintática, quanto no de produção semântica. Pretendemos verificar se o procedimento sintático produz, com maior freqüência, fatores de conflitos (se comparado ao procedimento semântico). Identificaremos cada tipo de argumento, traçando paralelos entre esses dois tipos de produções de demonstrações. Isto nos possibilitará levantar aspectos positivos e negativos que ora viabilizam, ora atrapalham o processo de ensino-aprendizagem.

Discutiremos diversas produções que certamente trarão à tona a necessidade e a importância em se repensar o ensino da matemática, tornando-o mais comprometido com sua natureza investigativa e lógica que tanto o caracteriza. Esperamos desta forma, discutindo a variedade das produções matemáticas, contribuir chamando a atenção para o fato de que diferentes tipos de produção podem, se bem conduzidas, alcançarem êxito efetivamente.

Capítulo 2

Referencial Teórico

Neste capítulo, discutiremos a linha teórica que permeará toda a pesquisa. Ao longo do trabalho, investigaremos respostas dadas às questões de cálculo diferencial, examinaremos como se dão as definições e como as provas (demonstrações) se desenvolvem.

Sobre conceitos e definições, Pais afirma que:

> Uma definição matemática é como uma expressão lingüística formal, que resume por meio de palavras e expressões as características essenciais de determinado conceito. Entretanto, essas características essenciais devem expressar, de forma objetiva, a totalidade da ideia representada, e não deixar dúvidas em relação a noções correlatas. Em outros termos, o sentido de uma definição se traduz como o registro de uma ideia cujo significado encontra-se estabilizado no contexto do saber científico (2006, p.120).

É claro que uma definição matemática pode variar, dependendo da visão que se tem sobre a própria matemática. Frequentemente iniciamos uma teoria axiomatizando certo conceito e demonstrando outros a partir das definições admitidas. Porém, muitas vezes, também é possível axiomatizar objetos, antes demonstrados, e demonstrar aqueles antes tomados como axiomas, isto é, podemos deslocar os objetos matemáticos a fim de tornar a teoria mais adequada às nossas crenças ou torná-la mais didática.

Ainda sobre as definições matemáticas, Tall e Vinner (1981) asseguram que a definição de conceito é a forma verbal utilizada pelo indivíduo para especificar um conceito. A definição de conceito formal é aquela aceita pela comunidade matemática atual, aquela descrita nos livros, enquanto que a definição de conceito pessoal é aquela que o estudante carrega consigo, podendo variar de tempos em tempos.

Segundo Tall e Vinner (1981), existem dois tipos de definições:

• *Definições Formais:* aquelas oriundas dos livros de matemática e consideradas como premissas para a discussão ou introdução dos conceitos

• *Definições Pessoais:* aquelas oriundas da compreensão que temos sobre os conceitos

O saber encontrado nos livros é, segundo Pais (2006), descontextualizado, despersonalizado, mais associado a um contexto científico e cultural. Saber matemático assim refere-se a uma ciência que tem sua concepção estruturada num contexto próprio, enquanto o conhecimento que se adquire a partir de certo conceito diz respeito a um contexto mais individual e subjetivo, revelando algum aspecto com o qual o sujeito tem uma experiência direta e pessoal. Logo, tem um caráter mais experimental.

Sem dúvida cada definição de conceito formal se reflete em nós de maneira distinta, peculiar, e todas as nossas experiências colaboram para formar a definição que temos sobre determinado conceito (definição de conceito pessoal), desenvolvendo-se até estruturar o que Tall e Vinner (1981) chamam de imagem de conceito.

A imagem de conceito descreve toda a estrutura cognitiva que é associada ao conceito e que inclui todos os quadros mentais, as propriedades e os processos associados. Tais estruturas podem conter imagens de representações visuais, impressões e experiências. Esta imagem é construída com o passar dos anos e se modela quando entra em contato com novos estímulos. A partir daí, o indivíduo atribui um nome ou um símbolo a este conceito adquirido.

Ratificamos que a imagem de conceito é responsável pelas idéias, representações e figuras mentais que decorrem dos conceitos. Além disso, os atributos relativos aos conceitos são continuamente incluídos, excluídos e modificados, isto é, a imagem de conceito muda de acordo com as experiências e com os estímulos que o indivíduo sofre.

Ressaltamos que toda imagem de conceito é construída com o auxílio de antigas experiências, isto é, a imagem de conceito nunca está conectada simplesmente a um único conceito, se faz necessário uma teia de conceitos que são inerentes ao novo objeto de estudo.

De acordo com Tall e Vinner (1981), a imagem de conceito nem sempre é consistente com si mesma, isto é, pedaços da imagem de conceito podem, não raramente, se contradizer, se atritar, causando o que chamam de fator de conflito potencial.

A imagem de conceito de um indivíduo pode estar globalmente incoerente, isto é, pode ter aspectos que divergem da definição de conceito formal. Esta diferença entre imagem de conceito e definição de conceito pode gerar conflitos cognitivos.

É relevante observar que a imagem de conceito pode incluir uma definição de conceito, ou seja, parte de sua imagem de conceito pode ser composta pela definição de conceito pessoal, e esta definição de conceito pessoal pode até não estar compatível com a definição de conceito formal. Observe que o indivíduo pode até não ter nenhuma definição de conceito.

Segundo Giraldo,

> [ ]...uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes. Assim sendo, esta teoria sugere que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes (2004, p.10).

Entendemos à luz destas ideias, que a imagem de conceito inconsistente ou descontextualizada com a definição de conceito formal pode atrapalhar no processo de ensino-aprendizagem.

Tall e Vinner (1981) afirmam ainda que apesar de muitos alunos terem sérias dificuldades em manipular, por exemplo, as definições de limite e de continuidade, possuem alguma imagem de conceito associada. Quando esta imagem de conceito não está bem fundamentada, fatores de conflitos podem ocorrer entre definições e imagens de conceito.

Acreditamos que esses conflitos podem contribuir para o enriquecimento e amadurecimento matemático do indivíduo. A comparação entre o certo e o errado, entre aquilo que é aceito pela comunidade científica e aquilo que é repudiado por ela, é valiosa estratégia de ensino e aprendizagem, devendo ser explorada e discutida. Entendemos que evitar tais conflitos é uma maneira cômoda e linearizada (sequencial) de prover o ensino da matemática. Podemos formular uma distinção entre os conceitos matemáticos: conceito formal versus conceito intuitivo. Discutiremos, mais a frente, sobre esta distinção entre conceito formal e conceito intuitivo, abordando as produções sintáticas e semânticas de provas em matemática.

Usamos, enquanto professores, muitos conceitos sem antes definí-los formalmente. Em um segundo momento, temos a preocupação e a necessidade de formalizá-los. Por exemplo: o conceito de continuidade é discutido no ensino médio sempre através da ideia de que funções contínuas são aquelas cujos gráficos não têm saltos ou buracos. Posteriormente, se faz necessário a construção formal do conceito de continuidade, até mesmo para que este conceito possa ser estendido e estudado em outras classes de conjuntos, não ficando restrito aos intervalos.

Neste ínterim, entre apropriação informal e apropriação formal do conceito, potenciais fatores de conflitos costumam ser observados. Entretanto, estes conflitos nos alertam para a necessidade que existe em formalizá-los. Acreditamos que esta é uma das maiores vantagens que há em se formalizar um conceito matemático.

Tall e Vinner (1981) descrevem que a imagem de conceito evocada é a porção da imagem de conceito que é ativada em um determinado momento, devido à necessidade de dar significado ou sentido a algum objeto ou conceito requerido.

Percebemos a existência de fatores de conflito quando partes conflitantes da imagem de conceito são simultaneamente evocadas. A seguir, listaremos alguns pontos destacados por Tall e Vinner (1981) como sérios candidatos a fatores de conflitos potenciais:

$\rightarrow$ *Conflitos entre partes da imagem de conceito.*

$\rightarrow$ *Conflitos entre partes da definição de conceito.*

$\rightarrow$ *Conflitos entre parte da imagem de conceito e parte da definição de conceito formal. De acordo com Tall e Vinner (1981) este é o conflito mais preocupante e aquele que deve ser conduzido com maior cuidado.*

Assim como no trabalho de Tall e Vinner (1981), destacaremos e discutiremos os fatores de conflito relativos às imagens de conceito incoerentes e inconsistentes relativamente às definições de conceito pessoal e formal.

Segundo Pais,

> Demonstrar um teorema é estabelecer uma seqüência de raciocínios lógicos, em que cada afirmação fundamenta-se em conclusões anteriores, resultando na comprovação de sua validade (2006, p.144).

De acordo com Nasser e Tinoco (2001), a prova ou demonstração matemática tem duas funções: validar um resultado e explicá-lo (elucidá-lo).

Nasser e Tinoco (2001) citam De Villiers (1991, p.261) a respeito do papel das provas:

> Em vez de enfatizar na prova apenas seu papel de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de explicação deve ser explorada, a fim de apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos (2001, p.3).

Segundo Nasser e Tinoco (2001), vários autores vêem nas provas outros papéis além da capacidade de validar e explicar determinado resultado. Bell (1976) enfatiza que a prova tem a função de sistematizar, isto é, preparar para o domínio do processo dedutivo, e também tem a função de descoberta (a descoberta de novos resultados) e comunicação (a transmissão do conhecimento matemático).

A seguir, damos a definição de prova formal segundo Nasser e Tinoco:

> No ponto de vista dos matemáticos da academia, a prova é um desenvolvimento formal, que parte dos pressupostos (hipóteses) e, através do encadeamento do raciocínio e de resultados já conhecidos ou de teoremas, chega ao resultado que se quer mostrar que é verdadeiro (tese). Esse tipo de prova é conhecido como prova formal. O que se observa atualmente, é que grande parte dos alunos não dominam esse tipo de prova, nem quando chegam à universidade, nem quando se formam, e nem mesmo depois de alguns anos de exercício do magistério. (2001, p.4)

Sem dúvida no campo da matemática, a prova formal é a única modalidade existente de argumentação, no campo da aprendizagem de matemática, existem outras formas de argumentação válidas, isto é, que contribuem para o desenvolvimento cognitivo. Hanna (1990) e Balacheff (1988) defendem, segundo Nasser e Tinoco (2001), a prova ingênua, que é uma argumentação aceitável, podendo ter vários níveis de rigor, a variar com a idade e o ano de escolaridade do aluno que a produz.

Além dessas modalidades de argumentação (formais e ingênuas), mencionaremos outros quatro tipos de modalidades de argumentação que foram formuladas segundo Rezende e Nasser (1994).

- *Justificativa Pragmática:* quando o aluno atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns casos particulares.
- *Recorrência a uma Autoridade:* quando o aluno afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque está no livro texto.
- *Exemplo Crucial:* quando o aluno desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral.
- *Justificativa Gráfica:* quando o aluno mostra numa figura porque o resultado é verdadeiro.

As demonstrações matemáticas também foram alvo de investigação de Webber e Alcock (2004). Sugerem que um resultado matemático pode ser produzido sintática ou semanticamente.

Segundo Webber e Alcock (2004), a produção sintática ocorre quando um indivíduo obtém deduções através da manipulação de fórmulas, de símbolos, manipulando definições e propriedades associadas ao conceito, enquanto que a produção semântica ocorre quando o indivíduo usa a percepção do significado de determinado conceito matemático. [1]

A matemática de nível superior necessita de uma complexa interação entre rigor e intuição. Neste nível, os conceitos matemáticos diferem daqueles encontrados ou desenvolvidos no ensino básico por conterem ou por serem determinados de uma forma precisa, através de definições não ambíguas, geralmente carregadas por uma árdua notação.

[1] Weber e Alcock (2004) chamam estas percepções de significados de instâncias.

Segundo Tall (1989), aplicar o argumento formal aos conceitos da matemática superior requer o uso de boas definições somadas a procedimentos. No nível superior é exigido certo rigor, porém constata-se que em grande parte das vezes é preciso, além do rigor, da intuição e da não representação formal destes conceitos para que possamos pensar neles efetivamente.

Weber e Alcock (2004) citam William Thurston [2], ao dizerem que não há como descomplicar o estudo da matemática apenas estudando definições e provas rigorosas, a construção de modelos mentais é útil.

De acordo com Weber e Alcock (2004), a produção de provas sintáticas e semânticas requer dos indivíduos a apropriação de diferentes entendimentos qualitativos acerca dos conceitos, ou do desenvolvimento destes conceitos durante as suas provas. A habilidade e o conhecimento requeridos para a produção de provas sintáticas sobre determinado conceito aparentam ser relativamente modestas, se comparadas às produções semânticas.

Nas produções sintáticas, o indivíduo provador necessita ser hábil para recitar a definição, recorrer e lembrar importantes fatos e teoremas correspondentes ao conceito. Se for capaz de decifrar inferências sobre a definição dos conceitos e fatos associados a ele, possui o que Webber e Alcock (2004) chamam de conhecimento sintático ou entendimento formal sobre tal conceito.

Weber e Alcock (2004) asseguram que a produção de provas sintáticas é, em algumas circunstâncias, muito valiosa, porém constatam que este caminho, o da produção de provas sintáticas tem sérias limitações. Seus trabalhos revelam que o número de demonstrações de propriedades que decorrem deste tipo de produção tende a ser relativamente limitado, e que muitas vezes logo após a produção de certas provas sintáticas, o indivíduo provador não se convence que, de fato, demonstrou algo.

Nas produções semânticas é necessário que o indivíduo provador tenha um conhe-

[2] Ganhador da Medalha Fields, em 1982.

cimento consideravelmente mais amplo, mais complexo sobre os conceitos abordados. É necessário ser hábil para intuir relevantes propriedades concernentes aos objetos matemáticos. Sua percepção deve ser tal que lhe conduza à construção correta das demonstrações. Suas instâncias devem refletir exatamente todos os objetos e conceitos discutidos, não podendo associar conceitos que tem propriedades que são inconsistentes ou incompatíveis com a teoria formal.

Aqueles indivíduos que possuem estas habilidades e conhecimentos citados acima, possuem um conhecimento semântico ou um efetivo entendimento intuitivo relativo ao conceito considerado.

Sem dúvida, em ambos os estilos de respostas (sintática e semântica), o indivíduo deve ser capaz de descrever precisa e corretamente os objetos e os conceitos apresentados.

Em seus trabalhos, Weber e Alcock (2004) acreditam que os indivíduos que realizam produções semânticas aparentam estar mais confortáveis com suas compreensões relativas ao conceito, se comparados com os que realizam produções sintáticas. Observam que os indivíduos que produzem provas semânticas vêem diferenças entre como é a definição, de fato, e como eles a entendem, enquanto que aqueles que produzem provas sintáticas as consideram como uma única coisa, afirmam que em grande parte das vezes a estratégia utilizada por aqueles que realizam produções sintáticas é " começar a escrever a definição e ver o que acontece".

Todos esses indícios nos fazem suspeitar que não há ganhos em realizar uma produção sintática, entretanto podemos destacar alguns aspectos que contrariam essas expectativas: as produções sintáticas servem para construir resultados contra-intuitivos, ajudam a construir uma intuição sobre determinado conceito, sistematizam o estudo da teoria matemática e podem verificar se uma nova definição captura a essência intuitiva de um conceito matemático.

Observamos baseado em Webber e Alcock (2004), que possuir habilidade ou inclinação para realizar apenas provas sintáticas têm dois obstáculos significantes:

1) causa limitações quando se faz necessário provar outras propriedades oriundas deste conceito;

2) nem sempre convencem quem está realizando a prova de que os argumentos utilizados foram suficientes para garantir a veracidade do resultado em questão.

Em matemática uma distinção é comumente traçada entre provas que convencem e provas que explicam (e.g, Davis and Hersh, 1981; Hanna, 1990; Weber, 2002a). Uma prova que convence é um argumento que verifica a veracidade matemática de algo, elas são altamente formais. Uma prova que explica é um argumento que explica, geralmente em um nível intuitivo, mostra porque certo resultado é válido.

Sem dúvida a prova sintática pode vir a convencer quem a escreveu, embora possam surgir dúvidas ao passo que se aprofundem as questões sobre determinado assunto. Já a produção semântica exige um envolvimento muito maior do indivíduo através de suas convicções e compreensões sobre o assunto tratado, sendo que sua experiência e o esclarecimento que possui influenciarão decisivamente no resultado final de seu trabalho. Durante a produção semântica sua imagem de conceito age intensamente no processo de produção. Isto nos acena para a importância em refletirmos previamente sobre a matemática e seus conceitos, entendendo-a e não a decorando.

Entendemos que os indivíduos que realizam produções sintáticas têm um comportamento passivo durante a elaboração do resultado, pois apenas operam símbolos e definições não exibindo suas interpretações para cada resultado utilizado, e os que realizam produções semânticas têm um comportamento ativo diante do trabalho a ser realizado, pois seu conhecimento contribui decisivamente para o sucesso da tarefa. Sem dúvida cabe mencionar que ambos os tipos de produções podem ser satisfatórias, precisas e formais.

Parece-nos oportuno relacionar os conceitos de imagem e definição de conceito com os tipos de produções sintáticas e semânticas.

A produção de provas sintáticas é baseada na definição de conceito, enquanto que a produção de provas semânticas também usa aspectos da imagem de conceito.

Segundo Webber e Alcock (2004), Vinner (1991) afirma que,

> A produção de provas sintáticas é puramente uma dedução formal, já a produção de provas semânticas envolve deduções baseadas em um pensamento intuitivo (2004, p.232), tradução nossa.

Sob o ponto de vista de Weber e Alcock (2004), podemos afirmar que a pesquisa sobre imagem de conceito de Tall e Vinner (1981) mostrou as seguintes coisas:

1) Os estudantes possuem imagens de conceitos matemáticos que são geralmente inconsistentes com a definição formal;

2) Considerando uma exata definição de conceito e uma inexata imagem de conceito como algo reincidente, possíveis entraves no processo de aquisição do raciocínio formal irá se verificar;

3) Em cursos de matemática avançada, como os de análise real, frequentemente os alunos produzem argumentos intuitivos baseados em suas imagens de conceito, e estes não constituem provas matemáticas aceitas no meio acadêmico.

Vale ressaltar que para Vinner (1991), a produção sintática de provas requer apenas a apropriação de uma boa definição de conceito, enquanto que a produção semântica requer, além de boas definições, consideráveis e consistentes imagens de conceitos associadas.

Os trabalhos de Weber e Alcock (2004) diferem dos artigos anteriores produzidos por Tall e Vinner (1981), pois não focam nos argumentos inválidos dos estudantes, nem em expor um descompasso entre a definição de conceito formal e imagens de conceitos do aluno. Em vez disso, seus estudos ilustram a forma como o trabalho semântico, utilizando exemplificações extraídas da imagem de um conceito, pode guiar a manipulação da definição de um conceito, introduzindo propriedades úteis - podendo ser este um fator significativo para a nossa capacidade de produzir provas corretas.

De acordo com Weber e Alcock (2004), aquele que produz sintaticamente uma prova compreende o que fazer, enquanto que aquele que produz semanticamente uma prova entende o que fazer e porque fazer.

Neste trabalho, estaremos mais interessados nos processos que compõem cada resposta, cada prova, se os candidatos optaram por um caminho mais simbólico, descrevendo os conceitos, ou se optaram por caminhos mais interpretativos, dando significados a eles. A ênfase desta pesquisa estará no desenvolvimento de cada resposta, de cada prova apresentada pelos candidatos.

Capítulo 3

Questões de Pesquisa

Neste capítulo discutiremos as questões que foram selecionadas para compor esta pesquisa. Justificaremos porque dentre seis questões inicialmente pensadas para fazer parte do trabalho, apenas quatro questões foram, de fato, consideradas. Apresentaremos soluções a todas as quatro questões de pesquisa, sendo que estas soluções são, segundo o nosso ponto de vista, bem pensadas e refletidas sintática ou semanticamente.

A ideia inicial para esta dissertação era a de investigar a importância dada às hipóteses em alguns teoremas centrais do curso de análise real. Creio que é relevante ao ensino da matemática buscar entender como alunos e professores olham para esta questão, pois, enquanto aluno e professor, sempre procurei dar significado e valor a estas questões.

Daí surgiu a ideia de analisar as provas de seleção ao mestrado de ensino de matemática, curso oferecido pela UFRJ desde 2006.

A Universidade Federal do Rio de Janeiro oferece, anualmente, o curso de mestrado em ensino de matemática, programa aprovado pela Capes em 2005 com a primeira turma em março de 2006. O processo seletivo realizado nesta instituição consta de três fases: um exame de proficiência em língua estrangeira (inglês ou francês), um exame específico de matemática e uma entrevista.

Na segunda etapa, em que é realizado o exame específico de matemática, os candidatos devem demonstrar, por meio de exame escrito, aptidão em conteúdos de cálculo diferencial e integral e geometria analítica, em nível de graduação. Só são considerados aptos à terceira e última etapa do processo seletivo os candidatos que obtiverem nota maior ou igual a seis neste exame específico. [1]

No processo seletivo de 2006, ano da criação deste mestrado, 55 indivíduos fizeram o exame específico de matemática. No ano seguinte, em 2007, registramos 86 candidatos. Constatamos neste período que a instituição ofereceu dez vagas para o programa de mestrado. Este reduzido número de vagas comparado à quantidade de candidatos inscritos no processo de seleção evidencia o grau de dificuldade de ingresso neste programa de mestrado.

Para nós, esta elevada relação candidato-vaga é fundamental para a qualidade de nossa pesquisa, pois um acirrado processo seletivo obriga os candidatos a estarem bem preparados, procurando utilizar, em cada resposta, todos os seus recursos e conhecimentos matemáticos.

Paralelamente a isso, entrei em contato com o artigo de Webber e Alcock (2004), onde discutiam a produção de dois tipos de provas: a semântica e a sintática. Neste referido trabalho, Webber e Alcock (2004) defendiam que a produção semântica, baseada no entendimento pleno de determinado conceito, comparado ao modelo sintático de argumentação, era capaz de conduzir o provador a resultados muito mais expressivos. Além disso, garantem que a produção semântica tem a capacidade de gerar menos conflitos imagem e definição de conceito.

A partir daí, analisando as provas de seleção e tendo contato com este novo referencial

[1] Todas as provas deste exame de seleção podem ser obtidas através do site http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/mestrado.htm

teórico, pensamos quão interessante seria observar como se desenvolviam as respostas dos candidatos durante estas provas de seleção, especificamente, se suas respostas se comportavam sintática ou semanticamente e, de uma forma ou de outra, se conduziam ou não a conflitos com mais ou menos freqüência.

A ideia central desta pesquisa é a de detectar se saber determinado conceito é garantia de conhecer, ter entendimento sobre ele. Ilustramos esta ideia da seguinte maneira: sem dúvida muitos candidatos já estudaram o conceito de derivada, mas será que o entendem, de fato?

Pensando assim, dentre as vinte questões consideradas nos anos de 2006 e 2007, procuramos trabalhar com questões que propunham que os candidatos refletissem sobre conceitos centrais do curso de cálculo diferencial. Além de refletirem sobre tais conceitos, precisávamos que escrevessem sobre eles. Desta forma, descartamos todas as questões cuja proposta era apenas a de realizar cálculos e contas.

Ratificamos que as questões que nos interessavam eram aquelas em que se fazia necessário entender o objeto matemático, refletir minimamente sobre eles de maneira a não possuir apenas um conhecimento prévio, superficial e limitado destes conceitos. Escolhemos questões cujas respostas possibilitem a articulação entre argumentações sintáticas e semânticas.

Inicialmente, procuramos questões nos processos seletivos de 2006, 2007, 2008 e 2009. Chegamos a selecionar seis questões: duas questões de 2006, duas questões de 2007, uma de 2008 e uma de 2009. Decidimos descartar as duas últimas questões, de 2008 e 2009, pois estas questões tratavam de conceitos já abordados nas questões dos anos anteriores e também porque as respostas obtidas foram baseadas estritamente em cálculos, contas, destoando do foco deste trabalho. Acreditamos que os resultados obtidos, nestas duas questões descartadas, poderiam ser aproveitados, porém entendemos que a discussão central desta pesquisa repousa na comparação entre os estilos de argumentação. Ambas as questões desconsideradas acompanhadas de todas as respostas e das análises encontram-se disponíveis para consulta no apêndice desta dissertação.

A tabela a seguir indica como indexamos as questões de pesquisa com suas respectivas questões numeradas originalmente.

Questão 1	Questão 2 de 2006
Questão 2	Questão 10 de 2006
Questão 3	Questão 8 de 2007
Questão 4	Questão 10 de 2007

Tabela 3.1: *Como as questões foram indexadas*

A seguir, apresentaremos as questões escolhidas para fazer parte da pesquisa. Ressaltamos que todas essas questões podem ser encontradas para consulta através do site http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/alvo.htmprograma

Esta primeira questão trata da importância do conceito de limite, onde se faz necessário uma reflexão acerca dos conceitos manipulados.

- **QUESTÃO 1**

Considere a dízima periódica: $\alpha = 0,\overline{9} = 0,999\ldots$

Determine quais das afirmativas abaixo é a correta. Justifique rigorosamente a sua resposta.

(a) $\alpha > 1$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha < 1$

Nesta segunda questão, o conceito de derivada será explorado, assim como a sua interpretação geométrica.

- **QUESTÃO 2**

Enuncie a definição de derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e explique seu significado geometricamente.

Procuraremos estabelecer, nesta terceira questão, como o conceito de limite de sequências e de convergência de sequências são descritos e relacionados.

- **QUESTÃO 3**

A definição formal de sequência convergente é enunciada da seguinte forma:

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e seja $a \in \mathbb{R}$.

Diz-se que x_n convege para a se: $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon, \ \ \forall n \geqslant n_0$.

a) Enuncie a definição de sequência limitada.

b) Mostre, de acordo com a definição formal, que toda sequência convergente é limitada.

c) É verdade que toda sequência limitada é convergente ? Justifique.

Abordaremos nas três questões anteriores os conceitos de limites, de derivada, de sequências limitadas e convergentes. Na última questão, trataremos do conceito de funções contínuas. Acreditamos que estes conceitos são fundamentais dentro da matemática, sendo fundamental uma reflexão cuidadosa acerca do significado de cada um deles.

- **QUESTÃO 4**

O Teorema do Valor Intermediário tem o seguinte enunciado:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(a) < f(b)$ e seja $y_0 \in]f(a), f(b)[$.

Então $\exists\ x_0 \in\ ]a, b[$ tal que $f(x_0) = y_0$.

a) Explique porque a hipótese de continuidade é indispensável para que este teorema seja válido.

b) Podemos afirmar, nas condições do Teorema, que x_0 é único?Justifique sua resposta.

A partir de agora, discutiremos algumas soluções às questões de pesquisa. É óbvio que estas respostas não são únicas, servindo-nos, entre outras coisas, de parâmetros para as análises que serão realizadas a partir das respostas dos candidatos.

• SOLUÇÃO - QUESTÃO 1

Seja $\alpha = 0,999...$

Podemos escrever $\alpha = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ...$

$\mapsto$ a sequência $\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, ...\right\}$ é uma progressão geométrica.

Com efeito: $\frac{\frac{9}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{\frac{9}{1000}}{\frac{9}{100}} = \frac{1}{10} = q$, onde q é a razão da P.G.

Desejamos calcular a soma infinita de uma P.G. Já sabemos que a soma dos n primeiros termos de uma P.G. pode ser obtida fazendo

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}. \quad (*)$$

Queremos calcular $S_{+\infty}$, logo devemos tomar $n \to +\infty$ em $(*)$.

Como $-1 < q = \frac{1}{10} < 1$, $q^n \to 0$ quando $n \to +\infty$, portanto:

$$S_{+\infty} = \frac{a_1}{1 - q}.$$

Na P.G. $\left\{\frac{9}{10}, \frac{9}{100}, \frac{9}{1000}, ...\right\}$, teremos a seguinte soma infinita:

$$S_{+\infty} = \frac{9/10}{1 - 1/10} = \frac{9/10}{9/10} = 1.$$

Isto significa que α, que é uma série, vale exatamente 1.

Destacamos que esta questão traz, implicitamente, várias sutilezas. O tratamento da dízima $0,999...$, se comparado ao de $0,333...$ é muito mais delicado. Sem dúvida, a diferença entre as frações geratrizes dessas duas dízimas pode ser fator decisivo no entendimento ou não deste conceito.

$0,333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ enquanto que $0,999... = \frac{9}{9} = 1$.

Efetuar a simples divisão em $\frac{1}{3}$, já acarreta em $0,333... = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, enquanto que é impossível obter $0,999...$ a partir de 1.

Sem dúvida, esta situação acena para o poder que os exemplos têm, elucidando potenciais fatores de conflitos. Acreditamos que grande parte dos equívocos causados no entendimento sobre o valor de $0,999...$ se deve a falta de exemplos palpáveis. O valor de $0,999...$ repousa no entendimento de convergência de séries, que por sua vez requer o conhecimento do conceito de limite, enquanto que no caso de $\frac{1}{3}$ uma simples divisão já é uma arma didática altamente eficaz.

O conceito de limite foi exaustivamente discutido por inúmeros eminentes matemáticos dos séculos XVII e XVIII (transição do cálculo diferencial e integral para a análise real (ver tese de doutorado de Rezende (2003)), e apesar de se tratar de um conceito complexo e delicado, atualmente é abordado indiretamente já no ensino fundamental, quando se estuda as dízimas periódicas.

Muitos colégios, no sétimo ou oitavo ano de ensino fundamental, introduzem esta questão . Discutem-na resolvendo-a da seguinte maneira:

$$\alpha = 0,999...$$

Equivale a

$$\alpha = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ... \quad (*)$$

Multiplicando a equação $(*)$ por 10:

$$10 \cdot \alpha = 9,999...$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, tem-se:

$$9 \cdot \alpha = 9$$

Portanto, $\alpha = 1$.

Acreditamos que, conceitualmente, não há ganho algum em apresentar apenas esta manipulação algébrica, já que não há qualquer discussão sobre o conceito de séries ou mesmo de limite de sequências. Além disso, realizar tais cálculos, desvinculados de suas justificativas, pode trazer problemas como o apresentado a seguir:

Questão: Calcular o valor de $x = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + ...$

Suposta solução:

$$x = 1 + 2 + 4 + 8 + ... \quad (**)$$

Multiplicando a equação $(**)$ por $\frac{1}{2}$

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4...$$

Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$\frac{x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Concluímos que:

$$x = 1.$$

Observe que, aqui, utilizamos rigorosamente a mesma técnica realizada para o cálculo de $0,999...$. É claro que, no segundo problema, a seqüência é divergente, o que inviabiliza utilizar as propriedades operatórias de limites. Então, para nos apropriarmos desta criação didática, largamente difundida em nossos cursos básicos, seria conveniente introduzirmos alguns critérios de convergência para seqüências de números reais, se não quisermos gerar contradições.

Durante a solução desta questão, percebemos quão importante é manipular as operações de limites, porém esta habilidade desprovida do conhecimento do conceito de convergência se torna algo inútil.

Ressaltamos que, nesta questão, o candidato deverá justificar sua opção através de argumentos logicamente aceitáveis. Prevemos que muitos candidatos concluirão, através de cálculos corretos, que $0,9 + 0,09 + 0,009 + ... = 1$, respondendo entretanto, que pelo fato de α convergir para 1, α deve ser menor que 1.

Em seus trabalhos, Tall e Vinner (1981), alertaram para potenciais fatores de conflitos entre a resposta estruturada nas definições e nos conceitos e aquela assimilada pelos alunos.

Esperamos que esta questão evidencie que as provas matemáticas, as demonstrações, nem sempre têm o poder de convencer o indivíduo provador, fato sugerido por Weber e Alcock (2004), que creditam ao estilo sintático esta impotência, defendendo que só o entendimento semântico tem a capacidade de viabilizar e convencer-nos, efetivamente, daquilo que foi proposto.

• SOLUÇÃO - QUESTÃO 2

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. A derivada de f no ponto $x_0 \in \mathbb{R}$, representada por $f'(x_0)$, é dada pelo seguinte limite, se ele existir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Isto equivale a escrever que $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Geometricamente, isto pode ser entendido da seguinte maneira:

Tomando secantes ao gráfico de f *passando pelos pontos* $(x_0, f(x_0))$ *e* $(x, f(x))$*, e fazendo* x *convergir a* x_0*, estas secantes tendem a "convergir"para a reta tangente ao gráfico de* f *neste ponto* $(x_0, f(x_0))$, ou seja, os coeficientes angulares destas secantes convergem para o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função no ponto considerado.

Esta ideia nos sugere que, a derivada de f em x_0 fornece a inclinação da reta tangente ao gráfico de f neste ponto, ou seja, a derivada $f'(x_0)$, fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$.

Algumas particularidades podem ser observadas nesta questão:

1) Até então, não sabíamos definir, formalmente, o conceito de reta tangente ao gráfico de uma função;

2) Não definimos convergência de retas. Daí, afirmar que as retas secantes convergem para a reta tangente se torna bastante impreciso.

Antes do primeiro curso de cálculo, generalizamos a ideia de reta tangente a circunferência para reta tangente a uma curva qualquer. Desta maneira, até então, uma reta é tangente a uma curva quando ambas se intersectam em exatamente um único ponto.

Ao sermos confrontados com os gráficos de funções seno ou cosseno, por exemplo, detectamos os conflitos causados pela antiga ideia de reta tangente.

A partir do conceito de derivada, temos a possibilidade de reeditar a definição dada para retas tangentes. Um reta é considerada tangente ao gráfico de uma função num ponto $(x_0, f(x_0))$ quando esta reta passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ e, além disso, seu coeficiente angular é dado por $f'(x_0)$.

Destacamos que o conceito de derivada "independe" da ideia de reta tangente, porém a definição de reta tangente requer a noção de derivada.

Outro fator destacado por nós é a noção de convergência de retas, frequentemente usada para exclarecer o significado de $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Entendemos que o rigor matemático é característico desta ciência, porém devemos perceber quantos conceitos intuitivos são usados sem pré-definições, tornando-se didáticos e aceitos até mesmo no meio acadêmico.

• SOLUÇÃO - QUESTÃO 3

a) Uma sequência $\{x_n\}$ de números reais diz-se limitada quando for limitada superior e inferiormente, ou seja, quando existem a e b números reais tais que $|x_n| \subset [a, b]$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

b) Queremos demonstrar que se $\{x_n\}$ converge, então $\{x_n\}$ é limitada.

Com efeito: $x_n \to c$, daí a partir de um certo índice $n_0 \in \mathbb{N}$ todos os termos de $\{x_n\}$ distarão de c menos que ϵ, onde $\epsilon > 0$ é um número pré-fixado. Então, os termos da sequência que distam de c menos que ϵ já são limitados pelo intervalo $(c-\epsilon, c+\epsilon)$. Precisamos controlar os termos de $\{x_n\}$ que têm índices menores ou iguais a n_0, mas estes termos formam um conjunto finito e todo conjunto finito é limitado. Portanto, todos os termos de $\{x_n\}$ são limitados, e isto conclui a prova.

c) É falso, pois uma sequência pode ser limitada e oscilar. Inúmeras sequências tem este comportamento, isto é, são limitadas, porém oscilam. A sequência mais "famosa"com estas características é a sequência $x_n = (-1)^n, \ n \in \mathbb{N}$.

Na letra c, desta questão, prevemos muitas respostas idênticas utilizando o contra-exemplo que fornecemos, já que em todos os livros de cálculo, tomados como referência para esta prova de seleção [2], apresentam este exemplo.

Já nas duas primeiras questões, esperamos encontrar respostas mais diversificadas, isto porque nestes ítens os candidatos devem fornecer uma definição e uma demonstração, ideias abordadas de maneiras distintas nos livros tomados como referências para o processo seletivo do mestrado em ensino de matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro.

No item a, é pedido que os candidatos definam o conceito de sequências limitadas, porém antes deste item, no enunciado da questão, é dada a definição formal de sequências convergentes. Isto sinaliza para o modelo de resposta que a banca espera encontrar: respostas mais formais e menos intuitivas.

Já no enunciado do item b, ao solicitar que a resposta deve ser a partir da definição formal de convergência de sequências, a banca explicita o tipo de produção que espera encontrar: a sintática.

Baseado neste tipo de enunciado, nossa expectativa para as análises das questões é

[2]Referências: Courant, R. Cálculo Diferencial e Integral, vol. 1. Rio de Janeiro: Editora Globo, 1955. Rocha, A. Bianchini, W. Aprendendo Cálculo com Maple. Rio de Janeiro: LTC, 2002. Stewart, J. Cálculo, vol. 1, 4a edição, São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

que encontremos muitas respostas sintáticas e poucas semânticas, porém acreditamos que as produções semânticas terão mais êxito, se comparadas às produções sintáticas.

Esta perspectiva em relação ao tipo de resposta a ser encontrada e a qualidade dessas produções fizeram com que apostássemos nesta questão. Acreditamos que os candidatos que se pautarem unicamente nas definições formais para responderem, principalmente o segundo item desta questão, encontrarão bastante dificuldade em completarem suas respostas, enquanto que os candidatos que se apoiarem nas imagens de conceito de sequências limitadas e convergentes apresentarão respostas mais lúcidas e coerentes.

• SOLUÇÃO PARA A QUESTÃO 4

a) Seja f uma função satisfazendo as hipóteses do teorema do valor intermediário, exceto pelo fato de f ser contínua.

Neste caso, como estamos tratando de uma função definida em um intervalo, para todo $x \in [a, b]$ deve existir um $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.

Exibiremos um exemplo de função, definida em um intervalo fechado, satisfazendo todas as hipóteses do teorema do valor intermediário, exceto a hipótese da continuidade.

$$f : [0, 2] \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x < 1 \\ 2, & x = 1 \\ 3, & 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

Note que esta função é descontínua no ponto $x = 1$, satisfazendo $1 = f(0) < 2 < f((2) = 3$. Ora, é fácil percebermos que não exite $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = \frac{1}{2}$.

Isto é o suficiente para responder a questão.

b) É fácil exibirmos um contra-exemplo que refuta a unicidade do teorema do valor intermediário.

$$\text{Seja } f : [0,2] \to \mathbb{R} \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & 1 \leqslant x < 2 \\ x-1, & 2 \leqslant x \leqslant 3 \end{cases}$$

Verifica-se que $0 = f(0) < 1 < f(3) = 2$, além disso todos os valores de $x \in [1,2]$ são tais que $f(x) = 1$. Daí, temos que X_0 não é único.

A definição de continuidade é um dos conceitos matemáticos que causa muitas controvérsias. Prevemos que vários candidatos irão escrever que se uma função não está definida em um ponto, então ela é descontínua neste ponto, como por exemplo é o caso da função $f(x) = \frac{1}{x}$. O gráfico desta função é composto por duas porções que não se conectam, e em $x = 0$ f não está definida, logo não podemos afirmar que f possui descontinuidade em $x = 0$.

A partir desta observação, certamente encontraremos várias respostas apoiadas neste tipo de descontinuidade que é apenas visual e não estabelecida pela definição formal de descontinuidade. Esperamos, explorar principalmente este conflito, que é comum e freqüente em provas de cálculo.

Observações Finais

De um modo geral, entendemos que é necessário, para a realização da primeira questão, domínio sobre a manipulação simbólica do conceito de limite. Além disso, os candidatos deverão ter refletido a respeito deste conceito, pois a resposta final depende do entendimento que eles possuem acerca do conceito de limite. Acreditamos que, neste caso, possuir conhecimento semântico ajudará bastante na conclusão da resposta.

Na segunda questão, esperamos encontrar respostas sintáticas e semânticas, ora na apresentação formal do conceito de derivada, ora na descrição da interpretação geométrica de tal conceito. Acreditamos que a resposta ideal, para esta questão, seja aquela apoiada na visão plena sobre o significado da derivada de uma função.

Já nas questões três e quatro, desejamos confrontar o conhecimento das definições com as respectivas imagens de conceito (com o entendimento adquirido a partir das definições ou o que ficou delas). Na terceira questão, acreditamos, assim como Weber e Alcock (2004), que respostas baseadas apenas em aspectos sintáticos tendem a não atingir o indivíduo provador, não estabelecendo entendimento suficiente para que efetivamente provem aspectos oriundos dessas definições. Na quarta questão, esperamos verificar a importância do conhecimento sintático para a construção de contra-exemplos, mesmo sendo pavimentados em aspectos semânticos.

Capítulo 4

Metodologia

A exploração do material e o tratamento dos resultados foram realizados em seis etapas: escolha das questões; escolha das respostas; determinação e enquadramento das categorias de respostas; seleção das respostas que representaram cada categoria; análise das categorias e, finalmente, leitura das análises das categorias de resposta.

Discutiremos, a seguir, cada uma dessas etapas.

- **ETAPA 1 - ESCOLHA DAS QUESTÕES**

O exame específico de seleção ao mestrado de ensino de matemática é uma etapa eliminatória e classificatória, sendo composta por dez questões de cálculo diferencial e integral e geometria analítica, a nível de curso de graduação em matemática.

Procuraremos identificar os tipos de produções utilizadas por cada candidato. Por esta razão optamos pelas questões cujas respostas necessitavam de algum conhecimento teórico ao invés daquelas onde os cálculos tornaram-se inevitáveis, ou seja, as questões de pesquisa foram escolhidas projetando-se os tipos de respostas que poderíamos encontrar, privilegiamos aquelas cujas respostas não dependiam apenas de contas e de cálculos sem reflexões ou justificativas, demos preferência às questões onde os candidatos necessitaram argumentar, pois desta forma temos espaço para detectar soluções sintáticas e semânticas e, consequentemente, conflitos ali instaurados. Buscamos questões que possibilitem a articulação da argumentação sintática e semântica, ponto central deste trabalho.

Utilizamos este critério, pois entendemos que esta seria uma maneira de não direcionar a pesquisa para um ou outro tipo de produção, pois se optássemos por questões mais procedimentais, certamente nossas análises ficariam limitadas às produções sintáticas. Acreditamos que optar por questões com este perfil nos dará subsídios para encontrar respostas justificadas tanto através de contas quanto através de reflexões, possibilitando-nos averiguar a incidência de fatores de conflitos relacionados a ambos os tipos de produções.

Pesquisamos questões nos exames de seleção de 2006, 2007, 2008 e 2009. Selecionamos quatro questões. Tendo em vista que nossa intenção é a de trabalhar qualitativamente, julgamos que este reduzido número de questões se adequará convenientemente à proposta de trabalho.

- **ETAPA 2 - ESCOLHA DAS RESPOSTAS**

As questões escolhidas, na etapa 1, nos deram margem a vários tipos de respostas. Tínhamos respostas em branco, respostas baseadas em contas ou justificadas por auto-reflexões, respostas mesclando contas e propriedades pertinentes aos conceitos, enfim, uma ampla gama de soluções.

Decidimos optar por aquelas justificadas de maneira minimamente coerentes, estando ou não corretas. Note que o objetivo central deste trabalho não é o de detectar respostas certas ou respostas erradas, buscamos avaliar a maneira como elas foram produzidas e, a partir daí, se há fatores de conflitos. Acreditamos que a busca por estes fatores deve ser conduzida de maneira natural, sem a obrigatoriedade de apontar, em todas as respostas, evidências de potenciais conflitos.

Desconsideramos, qualitativamente, respostas incompletas ou em branco, pois o objetivo também é avaliar de que maneira cada candidato iniciou seus argumentos e até aonde foi capaz de chegar, e para nós, respostas completas nos dariam indícios mais contundentes sobre como cada candidato entende os conceitos propostos.

- **ETAPA 3 - DETERMINAÇÃO E ENQUADRAMENTO DAS CATEGORIAS DE RESPOSTAS**

Dois motivos levaram-nos a adotar categorias de respostas neste trabalho: um de natureza quantitativa e outro de natureza qualitativa.

O primeiro motivo, de natureza quantitativa, se deve ao elevado número de respostas a serem analisadas, o que inviabilizaria o desenvolvimento desta pesquisa.

O segundo motivo, de natureza quantitativa, se deve a paridade entre inúmeras respostas, isto é, durante à busca pelas respostas a serem consideradas, percebemos que existia um elevado número de respostas contendo argumentos semelhantes.

As respostas dadas por candidatos distintos a uma mesma questão, e que apresentam evocadas as mesmas definições, teoremas, propriedades ou cálculos, serão classificadas, por nós, como respostas pertencentes a uma mesma categoria. Ressaltamos que cada grupo de respostas que compõe uma categoria utiliza-se dos mesmos resultados, propondo resolvê-los através de uma mesma estratégia, não havendo relevantes resultados nem além, nem aquém do que for descrito aqui nesta pesquisa.

Portanto, ao adotarmos categorias de respostas, estaremos considerando uma única resposta que é a representante da "classe de equivalência"daquela categoria. Desta forma, esperamos que as categorias de respostas sirvam para descrever, com precisão, todas aquelas soluções que têm desenvolvimento lógico e argumentos teóricos em comum.

Vale destacar que cada categoria de resposta apresentada nesta pesquisa corresponde a uma única resposta dada na íntegra por um dos candidatos. Não acrescentamos nada e também não omitimos nenhum detalhe de sua solução. Inclusive os erros de gramática foram preservados.

Acreditamos que categorizar as respostas, tende a tornar a pesquisa mais agradável e menos repetitiva, pois sintetizará inúmeras respostas similares em apenas uma, tornando o trabalho mais dinâmico, oferecendo a possibilidade de compararmos, com precisão, quantos candidatos adotaram cada padrão de resposta apresentado.

A seguir, apresentamos uma tabela que resume como categorizamos cada uma das quatro questões da pesquisa.

Tabela 4.1: *Categorização das Questões de Pesquisa*

	Questão 1	Questão 2	Questão 3	Questão 4
Número de Categorias	6	6	7	4

- **ETAPA 4 - SELEÇÃO DAS RESPOSTAS QUE REPRESENTARAM CADA CATEGORIA**

Já tendo decidido adotar padrões de resposta na tentativa de dinamizar a pesquisa e torná-la mais palpável, precisávamos estabelecer um critério para reconhecer quais respostas tomar de modo a representar cada classe de respostas semelhantes (ou similares).

Ratificamos que o critério adotado foi aquele descrito na etapa três: optamos por respostas escritas de modo coerente, estando ou não corretas, isto é, selecionamos aquelas em que o desenvolvimento estivesse integralmente descrito, de preferência apresentando conclusões corretas ou não. Há respostas descritas basicamente por cálculos, respostas descritas pela interpretação do conceito e as que mesclavam cálculos e conceitos.

- **ETAPA 5 - ANÁLISE DAS CATEGORIAS DE RESPOSTAS**

Após transcrever as soluções que representam cada categoria de resposta, iniciaremos uma análise pontual de cada categoria apresentada. Esta análise utilizará os referenciais teóricos discutidos no capítulo dois. A priori, o objetivo desta análise é apenas verificar, de acordo com os referenciais teóricos, como os candidatos descrevem suas respostas, quais os tipos de produção adotam e se há conflitos revelados a partir dessas respostas.

Pelo fato de não entrarmos diretamente em contato com cada candidato, tudo que afirmarmos nesta pesquisa será baseado em suposições e em indícios deixados em cada padrão de resposta.

Destacamos que de acordo com Cury:

> Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou erro em si - que são pontuados em uma prova de avaliação de aprendizagem -, mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem (2007, p.63).

ETAPA 6 - LEITURA DAS ANÁLISES DAS CATEGORIAS DE RESPOSTA

Esta etapa foi pensada com o fim de conectar cada categoria de resposta, apontando globalmente os equívocos mais agudos, aqueles mais freqüentes e os tipos de produções mais utilizadas, dinamizando as evidências deixadas pelas respostas das categorias.

Esta etapa pode ser vista como sendo uma análise de conteúdo. A análise de conteúdo é largamente discutida no ensino de matemática. Cury (2007) traz inúmeras referências às análises de respostas dadas por alunos. Segundo Cury (2007), Navarro e Diaz (1994) consideram que a análise de conteúdo feita sobre um texto tem a "missão de estabelecer conexões existentes entre o nível sintático - em sentido lato - deste texto e suas referências semânticas e pragmáticas"(p.180).

Cury, afirma ainda que:

- Na análise das respostas dos alunos, ao considerar apenas a classificação e a contagem do número de respostas de cada tipo, a investigação fica muito pobre, não trazendo benefícios a alunos e professores. No entanto, ao procurar entender as formas como o aluno produziu a resposta, certa ou errada, o trabalho pode contribuir para a construção de novos patamares de conhecimento (2007, p.63).

Este trabalho se desenvolverá a partir das questões apresentadas e discutidas no capítulo anterior, e a partir das categorias de respostas apresentadas no capítulo seguinte, procuraremos identificar o uso das produções de provas sintáticas e semânticas, e se estas respostas apresentam dificuldades ou fatores de conflitos.

Sem dúvida este trabalho tem suas limitações, já que não foi possível identificar os porquês do uso de um ou de outro tipo de produção. Por outro lado, acreditamos que as respostas analisadas seguramente nos conduzem às convicções sobre o pensar minimamente formalizado dos candidatos ao mestrado de ensino de matemática, que é composto em sua grande maioria de professores.

Capítulo 5

Análise de Dados Empíricos

5.1 Questão 1

Considere a dízima periódica: $\alpha = 0,\overline{9} = 0,999....$ Determine quais das afirmativas abaixo é a correta. Justifique rigorosamente a sua resposta.

(a) $\alpha > 1$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha < 1$

Categoria 1

Quando analisamos o número de casas decimais de α aumentando infinitamente observamos que cada vez mais α se aproxima de 1, porém não chega a 1.

Análise da Categoria 1

Sua resposta parece-nos baseada na compreensão que tem acerca do conceito de limite, sendo classificada por nós como resposta produzida semanticamente.

Note que não foi capaz de intuir conceitos relevantes para a conclusão correta de sua resposta. Este equívoco, o de acreditar que o limite é algo inatingível, é freqüente aos alunos de primeiro ano de graduação.

Outro fator que julgamos relevante observar é a falta de rigor em seus argumentos. Não podemos afirmar que há conflitos gerados por este tipo de resposta, pois aparentemente não houve assimilação de conceito algum.

Categoria 2

$0,\overline{9} = 0,9 + 0,09 + 0,009 + ...$

$0,\overline{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + ...$

A série acima é uma série geométrica de razão $\frac{1}{10}$. Toda série de razão menor que 1 converge.

Pela soma da P.G. infinita, temos:

$S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$ onde $a_1 = \frac{9}{10}$ e $q = \frac{1}{10}$

Logo, $S_\infty = \frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}} = 1.$

Análise da Categoria 2

Suas deduções foram obtidas a partir da manipulação de fórmulas, sendo, portanto classificadas como resposta produzida sintaticamente.

Durante quase toda a prova, apresenta-nos argumentos claros e precisos, cometendo apenas um equívoco ao afirmar que toda série, geométrica, de razão menor que 1 converge. Sabemos que isto, só é válido quando a série geométrica tem razão entre -1 e 1, um contra-exemplo trivial para a afirmação feita pelo candidato é dado pela série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n$, cuja razão $q = -1 < 1$.

Acreditamos que este equívoco tenha ocorrido muito mais pela falta de rigor na confecção de sua resposta do que efetivamente pelo fato de não conhecer esta hipótese.

A conclusão que obtém se dá exclusivamente através de suas contas, em momento algum apropria-se da compreensão que tem sobre o limite de seqüências.

Note que, em sua prova, seus cálculos parecem ser suficientes para convencê-lo da resposta final. De acordo com Weber e Alcock (2004) este indivíduo possui um entendimento formal sobre o conceito de séries geométricas.

Categoria 3

$\alpha = 0,\overline{9} = 0,999...$

$10 \cdot \alpha = 9,999...$

$10 \cdot \alpha - \alpha = 9,999... - 0,999...$

$9 \cdot \alpha = 9 \rightarrow \alpha = \dfrac{9}{9} = 1$

Análise da Categoria 3

Sua resposta é exclusivamente sintática, despreocupada em justificar os argumentos utilizados, limita-se a manipular símbolos.

As operações efetuadas no desenvolvimento da questão são propriedades básicas de limites de seqüências. Vale observar que, atualmente, este modelo de resposta já é discutido no ensino fundamental [1].

Observamos que o candidato se satisfaz com sua resposta, aceitando, sem a necessidade de fornecer justificativa a seus argumentos, que o valor de α, de fato, é igual a 1,

[1] Ver capítulo III

e isto é percebido em todas as respostas que compõem esta categoria. Weber e Alcock (2004), asseguram que, em geral, há um desconforto, um não convencimento de que a prova foi concluída, quando o tipo de produção é o sintático.

Categoria 4

Seja $\alpha = 0,999...$

Então: $10 \cdot \alpha = 9,999...$

$10 \cdot \alpha - \alpha = 9,999... - 0,999...$

$9 \cdot \alpha = 9$

$\alpha = 1$

Existe implícito aqui a idéia de limite. É como se α tivesse um 9 a mais: o "último", pois ao multiplicar α por 10 "perdemos"uma casa decimal. Mas, no infinito, o valor deste "último"nove $(0,000...9)$ é desprezível, ou seja vale zero.

Análise da Categoria 4

Este candidato se apropriou dos dois tipos de produção para confeccionar sua resposta: inicialmente, manipulando contas, foi sintático, porém, ao interpretar as contas realizadas, termina-a de maneira semântica.

Apesar dos dois estilos de respostas fornecidas convergirem para a mesma conclusão, não detectamos coerência na explicação fornecida em suas contas, ou seja, conduz os cálculos de maneira correta (assim como na categoria três não justifica nenhuma das propriedades de limites utilizadas), encerrando sua resposta com um erro conceitual.

De acordo com Weber e Alcock (2004), a produção de provas sintáticas muitas vezes levam os indivíduos provadores a se questionarem a respeito da legitimidade deste tipo de produção, e isto se reflete aqui, nesta categoria, pois o candidato exibe uma resposta extremamente sintática, suficientemente correta, porém sente a necessidade em explicar que, de fato, o resultado encontrado está correto.

Categoria 5

$\alpha = 1$ já que a fração geratriz de α é $\frac{9}{9}$ sendo o numerador o período da dízima e o denominador formado por tantos números 9 quantos algarismos tiver o período.

Análise da Categoria 5

Utiliza um procedimento decorado, sem usar instâncias, sendo considerada como um típica resposta produzida sintaticamente. Estamos diante de certa concepção particular do que é o saber matemático, onde a infalibilidade do algorítmo parece ser mais relevante do que o próprio conceito.

Os algorítmos são importantes intrumentos que nos ajudam a resolver vários problemas. Entretanto, para o ensino da matemática, seria oportuno se justificássemos a sua funcionalidade, a sua legitimidade. Devemos destacar que o candidato reproduziu algo em que acredita e que é reforçado pelos livros didáticos no ensino básico.

Categoria 6

$\alpha = 0,999...$

$\alpha = \dfrac{9}{10} + \dfrac{9}{100} + \dfrac{9}{1000} + ... = 9 \cdot \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + ...\right)$

α é nove vezes a soma da PG infinita de primeiro termo igual a $\frac{1}{10}$ e razão igual a $\frac{1}{10}$.

Logo, $\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\frac{1}{1000}+\ldots=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}\cdot\frac{10}{9}=\frac{1}{9}$.

$\Rightarrow \alpha = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1$

Mas, devemos observar que quando calculamos a soma da PG infinita, na verdade o que estamos observando é o limite da soma. Logo, quando encontramos $\alpha = 1$, o que temos é que α tende a 1. Por isso, $\alpha < 1$.

Análise da Categoria 6

Mais uma vez temos um tipo de resposta que privilegia tanto a produção sintática quanto a produção semântica. Novamente a produção sintática precede a produção semântica, acenando para a insegurança que a produção sintática traz ao candidato.

Este padrão de resposta sugere que o candidato detém boa prática em conduzir símbolos e manipular contas, embora não enfatize que a série por ter razão $\frac{1}{10}$ é convergente. Suas contas não foram suficientes para assegurá-lo do valor de α, apresentou-nos uma porção de sua imagem de conceito contrária as contas exibidas, sinalizando um potencial fator de conflito. Segundo Tall e Vinner (1981), a imagem de conceito bem estruturada, rica e consistente conduz de modo natural ao conceito formal.

Sem dúvida, nesta categoria, podemos perceber que o poder da representação numérica (que sugere que $\alpha < 1$) é tão forte que parece sobrepujar a argumentação formal sintática, mesmo sendo esta impecável. A não compatibilidade entre seus argumentos nos dá indícios de que não entendeu o conceito de convegência de séries e de limites.

Tabela 5.1: *Levantamento do número de Respostas que Compõem cada Categoria*

	Questão 1
Categoria 1	5
Categoria 2	32
Categoria 3	5
Categoria 4	1
Categoria 5	7
Categoria 6	2
Categoria 7	-
Em Branco	2
Incompletas	1
Total	55

Leitura das Análises das Categorias

Pudemos perceber que apenas a categoria 1 não realiza qualquer tipo de argumento sintático em sua resposta. De fato, esta questão tem um apelo muito mais sintático do que semântico quanto à produção de resposta.

Nas categorias 1, 5 e 6 as soluções apresentadas foram insatisfatórias e consideradas erradas pela banca.

Apenas na categoria 1 houve tentativa de produzir resposta exclusivamente semântica, porém as instâncias percebidas nesta resposta não foram suficientes para concluir que $\alpha = 1$. Além da incapacidade de concluir corretamente a resposta, esta solução foi demasiadamente informal.

Nas categorias 2 e 3 as produções foram inteiramente sintáticas, em ambas as categorias as soluções omitem a hipótese que garante a convergência da série $0,999...$, que é o fato desta ter razão entre -1 e 1. Enquanto na categoria 2 o candidato procura desenvolver precisamente seus cálculos, na categoria 3 o candidato expõe contas de uma maneira imprudente, podendo chegar a qualquer resposta. Ressaltamos que nestas categorias os candidatos parecem acreditar nas contas que realizaram.

Na categoria 4, os candidatos iniciaram a resposta sintaticamente, realizando procedimento parecido com os realizados na categoria 3, porém nesta categoria os candidatos procuram justificar que seus cálculos estão, efetivamente, corretos. Portanto, temos um estilo de produção mesclada: sintática e semanticamente. É interessante observarmos que em ambos os tipos de produções seus argumentos foram imprecisos, não apresentando conflitos, mas nos dando indícios de que a assimilação do conceito não está bem estruturada.

Segundo Rezende e Nasser (1994) a resposta dada na categoria 5 é baseada na recorrência a uma autoridade, em que o indivíduo apenas repete uma propriedade pré-estabelecida em um livro ou difundida por um professor. Este tipo de produção é uma mera repetição de uma característica das dízimas periódicas simples. Não entendemos que haja apropriação alguma de saber ou mesmo de conhecimento neste estilo de resposta.

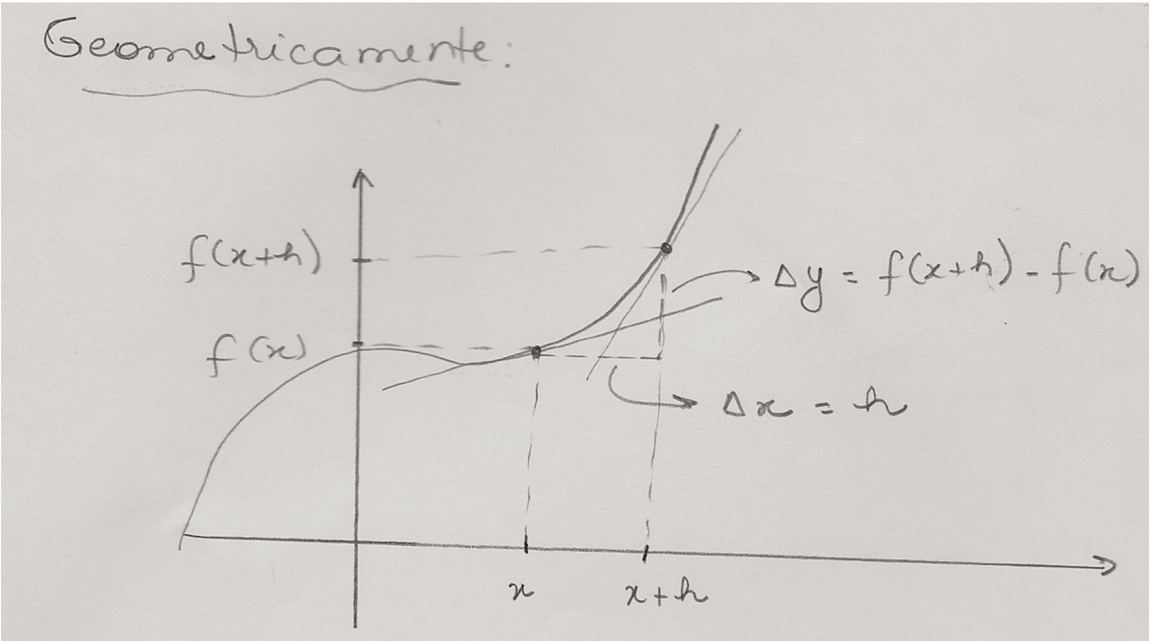
Finalmente, na categoria 6, detectamos um fator de conflito causado pela incompatibilidade entre a resposta sintática e a resposta semântica. De fato, Webber e Alcock (2004), previram que os indivíduos que realizam produções sintáticas freqüentemente não se convencem da suficiência de seus cálculos enquanto respostas, passando a recorrer a figuras mentais, procurando evocar porções de suas imagens de conceito para ratificarem seus argumentos.

5.2 Questão 2

Enuncie a definição de derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e explique seu significado geometricamente.

Categoria 1

A derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.



Geometricamente ela indica o coeficiente angular da reta tangente.

Análise da Categoria 1

A definição dada inicialmente sugere-nos que conhece o conceito de derivada. Sintaticamente produz uma resposta simples e correta, porém incompleta, pois não trata o conceito de derivada localmente, o que é uma característica central deste conceito. Esta despreocupação também pode ser percebida em seu gráfico, ao não destacar onde a derivada está sendo discutida. Fornece-nos o gráfico de f e sua visão geométrica para a definição de conceito de derivada, sendo este o momento semântico de sua resposta. Vale ressaltar que não associa a definição dada com o desenho descrito, não deixa claro a relação entre o limite definido e seu gráfico.

Categoria 2

Se uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e diferenciável num ponto x_0, possui uma derivada $f'(x_0)$.

Geometricamente falando, a derivada é a tangente à função f no ponto x_0.

Análise da Categoria 2

Procura recitar a definição do conceito de derivada sendo redundante ao afirmar que se f é diferenciável num ponto x_0, possui $f'(x_0)$. Conclui sua breve resposta de modo impreciso, garantindo que a derivada é a tangente à função no ponto x_0. Seu discurso, a priori, parece-nos semântico, pois tenta fornecer características de funções deriváveis, exibindo uma definição pessoal deste conceito, além da interpretação geométrica de derivada. Apesar deste aparente tipo de produção de resposta, é possível olhá-la de outra maneira: como uma resposta produzida sintaticamente. Isto se deve pois procura recitar a definição e lembrar importantes fatos pertinentes ao conceito de derivada, o que para Weber e Alcock (2004) é determinante do tipo de produção sintática.

Destacamos pontos positivos em sua resposta: identifica a natureza local que é inerente ao conceito de derivada e descreve, mesmo que de modo impreciso, que a derivada é o coeficiente angular da reta tangente.

Acreditamos que há potenciais fatores de conflitos em seus argumentos: escreve que se f é diferenciável num ponto x_0, possui $f'(x_0)$, este discurso parece lhe ser algo natural, apenas mais uma hipótese necessária para que seja possível descrever o conceito de derivada, além disso, parece convencer-se que a notação f' define o conceito de derivada. Estes conflitos sinalizados, nos levam a supor que seu conhecimento está mais voltado para a questão procedimental, tendo em vista que a questão conceitual parece-nos estar bastante confusa.

Categoria 3

Derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = m(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

Quando calculamos a primeira derivada de uma função, e fazemos o teste da derivada primeira, podemos encontrar os pontos críticos dessa função, os máximos e mínimos relativos, sem precisar, antes construir o gráfico.

Quando calculamos a segunda derivada de uma função, e fazemos o teste da derivada segunda, podemos encontrar os pontos de inflexão e concavidades.

Após todos esses processos utilizamos os resultados obtidos para a construção do gráfico da função.

Daí seu significado, geometricamente, é facilitar a construção de gráficos e conhecer elementos deste gráfico, e a derivada é tangente à função.

Análise da Categoria 3

Novamente um candidato define a derivada desconsiderando a “vocação” local deste conceito. Esta definição, produzida sintaticamente, limita-se a descrever simbolicamente o conceito de derivada.

Em um segundo momento, descreve os passos para a construção de gráficos a partir do conceito de derivada (testes da derivada primeira e derivada segunda). Acredita que a aplicabilidade do conceito de derivada equivale a uma interpretação geométrica, equívoco cometido por vários estudantes nas diversas áreas da matemática que confundem o algorítmo de esboço do gráfico de uma função com sua interpretação geométrica. Note que neste momento, seus argumentos são pessoais, é o que compreende, o que entende por interpretação geométrica, sendo esta a parte semântica de sua produção.

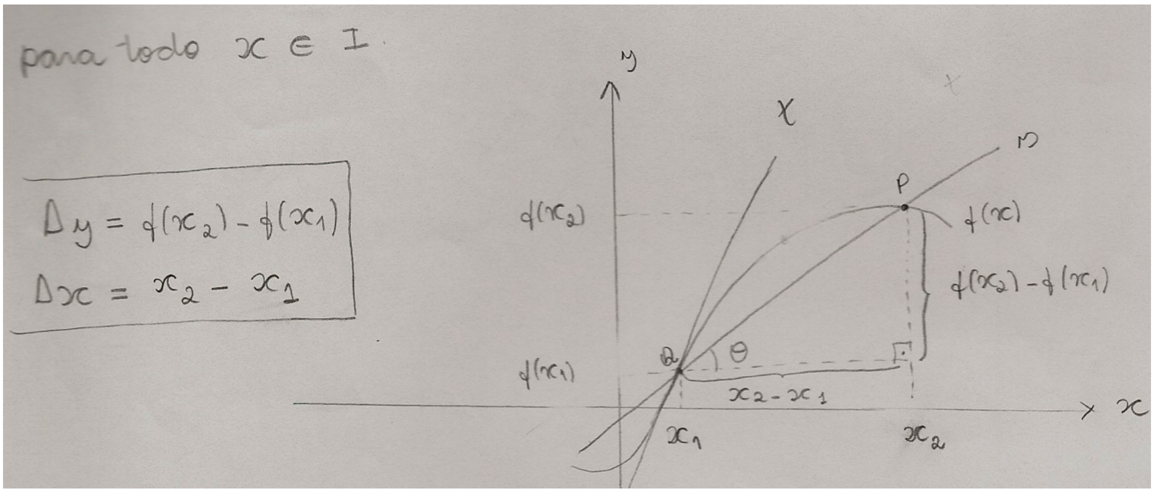
Finaliza afirmando que a derivada é tangente à função. Isto reflete o descuido ou talvez o desconhecimento para com o conceito de derivada que é um número real e não uma reta.

Exibe deficiências tanto relacionadas à definição de conceito, desconsiderando o aspecto local, fundamental para a compreensão do conceito, quanto na imagem de conceito descrevendo fatores que não refletem a natureza geométrica da derivada, mas sim uma de suas várias aplicações, além de descrever, de modo relapso, a tão esperada interpretação geométrica para a derivada.

Este candidato não demonstrou apropriação da imagem de conceito, apenas deu-nos provas de que sabe um pouco sobre a definição de derivada, e onde usá-la.

Categoria 4

Seja f uma função contínua em um intervalo $I = [a, b]$ a função derivada de f, escrita como f' é $\lim_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ para todo $x \in I$.



Fazendo o ponto P deslizar sobre a curva $f(x)$ até chegar ao ponto Q: Δx vai diminuir, consequentemente Δy também o que fará a reta s tender para a reta t. Assim, a derivada é o limite das secantes a uma curva, ou seja, a tangente.

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Calculando o limite desse quociente, temos:

$$\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\theta \qquad \Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}.$$

Análise da Categoria 4

Este candidato realiza os dois tipos de produções: sintática e semântica. Define a derivada para todos os pontos do intervalo descrito, não explicita o ponto onde a derivada irá ser considerada, além disso escreve que a definição é válida para todo ponto de I, onde I é um intervalo fechado, o que inviabiliza o uso da definição nos pontos a e b, fornecidos por ele. Aqui repousa sua produção sintática.

Em seguida, exibe um gráfico, onde procura mostrar de maneira detalhada sua visão do conceito de derivada. Note que não indexa Δx, mas define-o em termos de x_1 e de x_2. Explica a relação que sua definição, descrita inicialmente, tem com o gráfico traçado. Semanticamente, concluiu que "a derivada é o limite das secantes a uma curva, ou seja, a tangente". Apesar de desconsiderar na definição o ponto onde irá definir a derivada, graficamente tentou explicitar esta questão, demonstrando razoável compreensão do conceito de derivada.

Encaminha sua resposta a partir de uma boa imagem de conceito e de uma imprecisa definição de conceito, conectando satisfatoriamente ambos os momentos (semântico e sintático).

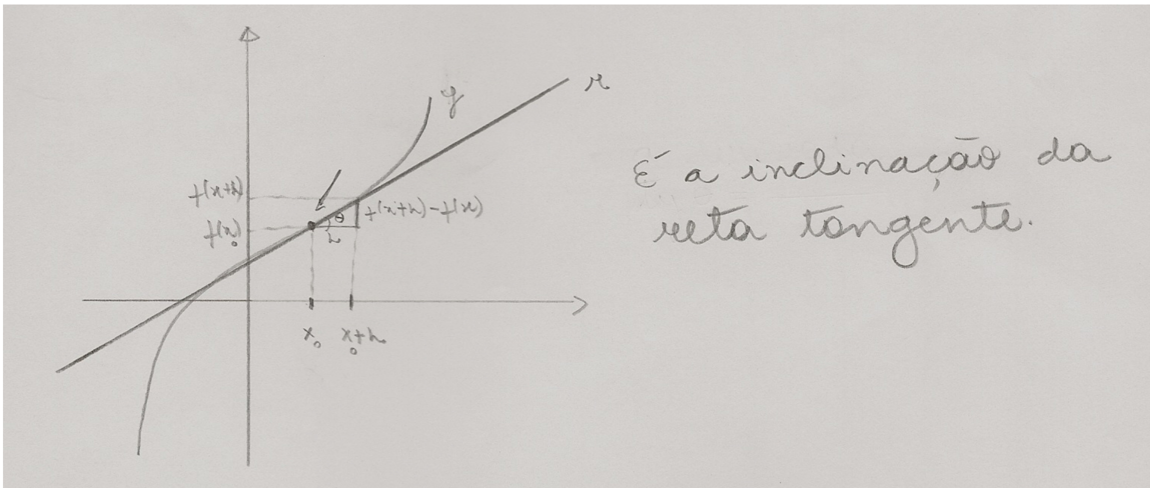
Nas últimas linhas de sua resposta, comete um pequeno erro ao definir $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e, em seguida, chama a mesma $\operatorname{tg}\theta$ de $\displaystyle\lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Note que ao escrever isto, desconsidera o conceito de limite. Pensamos que este é um erro devido muito mais a falta de atenção do que propriamente a um equívoco conceitual.

Categoria 5

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

O significado geométrico da derivada de uma função é o coeficiente da reta tangente num determinado ponto da função.



Análise da Categoria 5

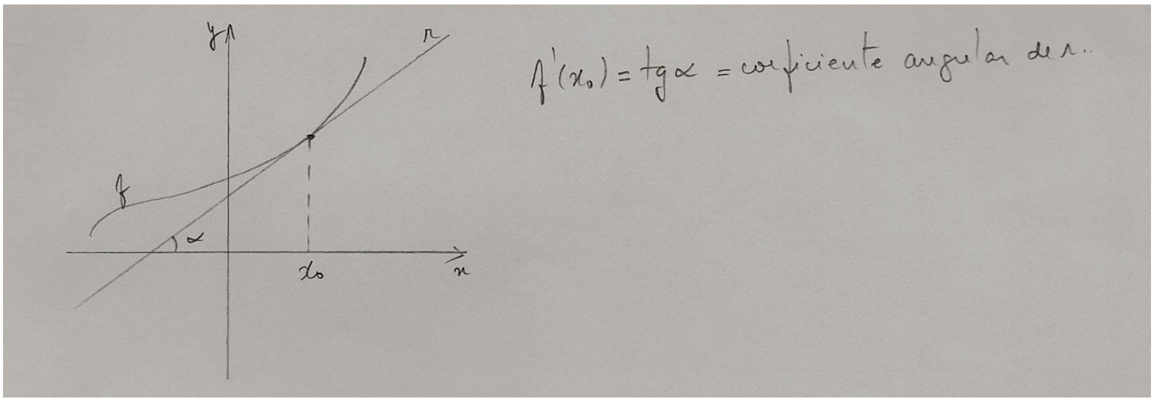
Este candidato se apropriou da produção sintática e da produção semântica em sua resposta, porém foi impreciso ao definir o conceito de derivada, omitindo que este deve ser entendido localmente. Lembra da questão local quando parte para o significado geométrico, porém aí mostra-se despreocupado em relacionar a razão $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ com o fato da derivada fornecer o coeficiente angular da reta tangente.

Esta resposta nos sugere conhecer a definição de derivada e o produto final de sua interpretação geométrica, no entanto não nos acena possuir efetivo entendimento semântico.

Categoria 6

Derivada de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função f' cuja sentença é obtida calculando o $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Esta função assim obtida permite calcular a variação instantânea da função f num ponto x_0 qualquer de seu domínio.

Geometricamente, calcular a derivada de uma função f num ponto x_0 de seu domínio é determinar o coeficiente angular da reta tangente neste ponto considerado.



Análise da Categoria 6

Percebemos que o candidato parece conhecer o conceito de derivada, referindo-se a ela como uma função dada por um limite, calculada a partir de um ponto inicial. Note que após definí-la, refere-se a ela sempre tomando como referencial o ponto x_0. Este argumento é típico de uma produção sintática.

Já na questão da interpretação geométrica, repete o clássico discurso que descreve a derivada de uma função num ponto x_0 como o coeficiente angular da reta tangente à função neste ponto x_0. Esta é a contribuição semântica que dá a sua resposta.

Apesar de identificarmos os dois tipos de produção nesta resposta, o sintático e o semântico, acreditamos que sua produção é predominantemente sintática, pois manipula palavras como se fossem símbolos.

Não percebemos conflitos instaurados entre sua resposta, sua definição de conceito e sua imagem de conceito, embora produzidas de maneiras óbvias, estão todas corretas.

Tabela 5.2: *Levantamento do número de Respostas que Compõem cada Categoria*

	Questão 2
Categoria 1	5
Categoria 2	2
Categoria 3	1
Categoria 4	14
Categoria 5	22
Categoria 6	2
Categoria 7	-
Em Branco	2
Incompletas	7
Total	55

Leitura das Análises das Categorias

Mencionaremos, inicialmente, que praticamente todas as categorias de resposta desconsideraram, em suas definições, que o conceito de derivada de função real deve ser tratado localmente. O caráter local da derivada é o que impulsiona sua interpretação geométrica, e esta interpretação dá sentido concreto a este conceito. As categorias 1, 3 e 4 definiram corretamente a derivada de uma função real, mas mostraram-se despreocupadas em destacar que a derivada é definida ponto a ponto.

A resposta da categoria 2 cita que a derivada deve ser pensada localmente, porém produz uma solução integralmente equivocada, pondo hipóteses que não condizem com este conceito como o fato da função ser contínua e diferenciável no ponto considerado.

Já a resposta da categoria 6 foi a única que remete, corretamente, a definição de derivada à questão local, ratificando que o caráter local da derivada pode servir no cálculo de variações instantâneas.

Enquanto ao significado geométrico, destacamos que apenas a categoria 4 parece ter efetivo entendimento intuitivo relativo ao conceito de derivada, pois retoma a questão local esquecida em sua definição e demonstra satisfatório conhecimento do conceito de derivada, discorrendo, precisamente, sobre a definição deste conceito.

As categorias 2, 5 e 6 apresentaram um discurso pronto para o significado geométrico da derivada. A solução da categoria 2 se deteve a enunciar, de modo impreciso, que a derivada é tangente à função no ponto, não exibindo qualquer representação gráfica. As categorias 5 e 6 exibem gráficos mas estes se mostram descontextualizados com suas definições. Notamos que a resposta da categoria 6 para o significado geométrico da derivada fica aquém daquilo que esperávamos, uma vez que esta foi a única categoria que enunciou precisamente a definição deste conceito. Acreditamos que este vão entre definição de conceito e imagem de conceito encobre potenciais fatores de conflitos.

A resposta dada pela categoria 3 ao significado geométrico da derivada, sinaliza para uma completa desconexão entre o conceito de derivada e seu significado geométrico. Não prevemos fatores de conflito a partir da imagem e da definição de conceito, pois, apesar de ver a aplicação da derivada como seu sentido geométrico, não comete equívocos. Pensando de maneira análoga, muitos alunos vêem, por exemplo, a integral como sendo a área abaixo da curva considerada. Isto reflete a falta de preocupação em compreender a diferença entre o objeto matemático aplicado e seu sentido geométrico.

Sobre a categoria 1, nossa análise constata que foi impreciso na construção do significado geométrico para a derivada, descrevendo um gráfico descontextualizado com a definição fornecida. Mais uma vez não se importa com a questão local deste conceito. Estes aspectos nos sinalizam para uma possível falta de solidez tanto na definição de conceito formal, quanto na representação geométrica dada - aspecto ligado a imagem de conceito, pois não há reflexão alguma a partir do gráfico e muito menos a partir da definição exibida.

Enfatizamos que o conceito de derivada, fundamental em praticamente todos os cursos da graduação em matemática e áreas afins, é tratado de modo impreciso e, em geral, sem real significado geométrico. Fatores de conflitos foram observados apenas na categoria 2, acreditamos que isto se deve pois grande parte das resposta se detiveram a argumentos ensaiados, procurando recitar definições e propriedades relativas ao conceito de derivada. Pensamos que esta falta de hábito em investigar uma definição ou propriedade colabora para o aparecimento de fatores de conflitos principalmente em questões mais elaboradas, em que somos obrigados a desenvolver nossa argumentação a partir de definições, propriedades e teoremas.

5.3 Questão 3

A definição formal de sequência convergente é enunciada da seguinte forma:

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais e seja $a \in \mathbb{R}$.

Diz-se que x_n convege para a se: $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon, \ \ \forall n \geqslant n_0$.

a) Enuncie a definição de sequência limitada.

b) Mostre, de acordo com a definição formal, que toda sequência convergente é limitada.

c) É verdade que toda sequência limitada é convergente ? Justifique.

Categoria 1

a) Seja $a \in \mathbb{R}$, uma sequência x_n será limitada se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, ou seja, $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geqslant n_0$.

b) Seja $x_n = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$. Como x_n é convergente para a, então existe $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geqslant n_0$.

Sendo assim, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Suponha, por absurdo, $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$, sendo $b > a$.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - b| < \epsilon, \quad \forall n \geqslant n_0$.

(impossível) $\rightarrow$ pois $b > a$.

c) Não.

Contra-exemplo: $x_n = \begin{cases} -1 \ ; \ \text{para n par} \\ \\ 1 \ ; \ \text{para n ímpar} \end{cases}$

Análise da Categoria 1

Letra a

Sua resposta, produzida sintaticamente, baseia-se na utilização da definição através de símbolos, não recorre a qualquer representação intuitiva. Apresenta-nos a definição de convergência de seqüência como sendo a definição de seqüência limitada. Pensamos que este equívoco pode ser devido à proximidade entre a nomenclatura que damos a estes dois conceitos: seqüências limitadas e limite de seqüências.

Detectamos, a partir da confusão feita na descrição da definição de seqüências limitadas, um fator de conflito entre as definições de conceitos de seqüência limitada e seqüência convergente.

Letra b

Seus argumentos são produzidos sintaticamente, pois manipula símbolos, notações e definições. Apresenta um erro ao descrever a definição de seqüência convergente: "então existe $\forall \epsilon > 0$..."

Acreditamos que esta deficiência provavelmente se deve por não ter refletido a respeito desta definição. Em seguida, muitos argumentos incoerentes são admitidos. Ao tentar fazer uma prova por absurdo, chega a um resultado desconectado do proposto pela questão, que era concluir que as seqüências deveriam ser limitadas. Na letra a, fornece a definição de seqüência convergente como sendo a definição de seqüência limitada, este erro é decisivo para o resultado no item b. A hipótese dada é a de seqüências convergentes e sua tese é de que estas devem ser limitadas, porém sua hipótese se confronta com sua tese, sugerindo-nos que não soube o que era para ser demonstrado.

Esta confusão entre a definição de seqüências limitadas e seqüências convergentes nos leva a suspeitar que há aí um fator de conflito potencial, gerando falta de compreensão no objeto proposto.

Letra c

Limitou-se a exibir, como contra-exemplo, a seqüência $x_n = (-1)^n$.

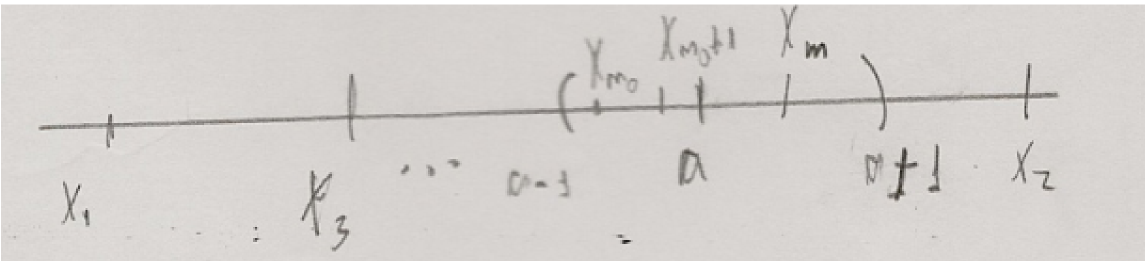
Weber e Alcock (2004), afirmam que a produção de provas sintáticas tem grande valor já que contribuem para a criação de contra-exemplos. Se nos basearmos estritamente na definição de conceito e nas propriedades que a cercam esta tarefa torna-se bem menos árdua.

Categoria 2

a) Seja $(x_n)_{n \in N}$ uma sequência de números reais em $\mathbb{R}$.

Diz-se que (x_n) é limitada se: $\exists M \in \mathbb{R}_+$ tal que $\forall n \quad |x_n| < M$.

b) Consideremos uma sequência convergente, isto é, $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon \quad \forall n \geqslant n_0$



Tomemos agora $M = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_{n_0}|, |a-1|, |a+1|\}$ implica que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|x_n| < M$.

c) Não é verdade. Ex.: (x_n), onde $x_n = (-1)^n$ é limitada, pois $|x_n| < 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e é divergente pois possui duas subsequências que convergem para lugares diferentes que são $(x_n)_{n\text{ par}}$ e $(x_n)_{n\text{ ímpar}}$.

Análise da Categoria 2

Letra a

Apresenta uma definição formal e exclusivamente simbólica, sendo por isso produzida sintaticamente. Não intui nada relativo à definição de seqüências limitadas.

Letra b

Sua resposta é tipicamente oriunda de uma produção semântica, pois parte da definição de seqüências convergentes, dá significado geométrico a esta definição e em seguida conclui a prova.

Durante a definição de seqüências convergentes, omite o valor para o qual a seqüência converge (número real a), não explica que tomou ϵ igual a 1, porém procede de maneira correta ao definir o conceito de convergência. Estes dois detalhes, omitidos na definição, são esclarecidos em seu desenho. Um detalhe que nos chama atenção é o fato de tomar a seqüência x_n oscilante (veja a ordem entre os termos das posições 1, 2 e 3). Interpreta a convergência de x_n de modo bem coerente com a definição exibida, o que lhe deu subsídios para concluir correta e sintaticamente, a demonstração.

Esta resposta sugere-nos que o candidato se apropriou satisfatoriamente das definições de seqüência limitada e de seqüência convergente, sabendo relacioná-las. Resposta sem fatores de conflito.

Letra c

Além de fornecer a seqüência $x_n = (-1)^n$ como contra-exemplo, fornece uma explicação para o fato desta seqüência não satisfazer a propriedade descrita no enunciado da questão. Explica que apesar de x_n ser limitada por 2, ela possui duas subseqüências que convergem para valores distintos, logo diverge.

Este tipo de produção revela-nos a preocupação em atender precisamente à questão, isto é, diz que a afirmação feita é falsa e dá argumentos que a refutam. Típica produção semântica.

Categoria 3

a) Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diz-se limitada se for limitada inferiormente e superiormente; para isso seja $a =$infx_n e $b =$supx_n; tomando $k =$máx$\{a, b\}$ então $|x_n| \leqslant k$.

b) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$.

Pela definição: $\forall\epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, $\forall n \geqslant n_0$, o que significa que $x_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ quando $n \geqslant n_0$.

Seja o conjunto $S = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n_0}, x_{n_0+1}, ..., a - \epsilon, a + \epsilon\}$.

Seja $a =$min$S$ e $b =$max$S$.

Temos que $a \leqslant x_n \leqslant b$. Logo é limitada.

c) Falso. A sequência $(2, 0, 2, 0, 2, 0, ...)$ é limitada pelo intervalo $[0, 2]$, no entanto possui 2 subsequências constantes convergindo para valores distintos. Logo a sequência

$(2, 0, 2, 0, 2, ...)$ diverge.

Análise da Categoria 3

Letra a

Sua resposta, a priori, reflete a preocupação em explicar o conceito de seqüências limitadas. Neste momento, seu argumento é relativo a produções semânticas, em seguida procura formalizar tal conceito de um modo rigoroso, momento sintático de seu desenvolvimento. Este estilo de resposta nos sinaliza que houve a tentativa em estabelecer uma conexão entre o que entende a respeito do conceito de seqüências limitadas e o modo como o formaliza. Garante a existência do sup e do inf de x_n, sem a garantia que x_n seja efetivamente limitada. Só podemos garantir que uma sequência tenha sup e inf se esta sequência for limitada e isto nos acena para a presença de conflitos em sua resposta.

Letra b

Sua resposta reproduz apenas aspectos sintáticos. Não revela nada sobre a imagem de conceito acerca de seqüências limitadas e convergentes.

Parte de uma definição precisa e formal de seqüências convergentes toma um conjunto S formado por todos os termos de x_n, além de $a - \epsilon$ e $a + \epsilon$, e conclui que x_n possuirá um limitante inferior e um limitante superior, chegando à definição fornecida no item a, para seqüências limitadas. Comete um equívoco de notação ao escrever que $\lim x_n = a = minS$.

Segundo a teoria proposta por Weber e Alcock (2004), este candidato se apropriou do conhecimento formal de seqüências limitadas, não apresentando fatores de conflito.

Letra c

Este candidato exibiu o mesmo padrão de resposta dada na categoria dois: exibe um contra-exemplo e, em seguida, explica porque a seqüência apesar de limitada é divergente.

Categoria 4

a) Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais é uma sequência limitada, se existirem a e b, como $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$, tal que $(x_n) \in]a, b[$.

b) Pela definição de sequência convergente, temos que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon, \forall n \geqslant n_0$.

De $|x_n - a| < \epsilon$, temos que: $-\epsilon < x_n - a < \epsilon$.

Assim, $a - \epsilon < x_n < \epsilon + a \Rightarrow (x_n) \in]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

Logo, (x_n) é convergente e limitada.

c) Não. O teorema garante que toda sequência monótona limitada é convergente.

Pelo item anterior, fazendo a volta da demonstração chegaremos a conclusão do teorema.

Análise da Categoria 4

Letra a

Este candidato nos fornece uma resposta simples, objetiva e sintática. Limitou seus argumentos à definição formal do conceito de seqüências limitadas.

Letra b

Apresenta-nos um padrão de resposta estritamente sintático, escreve a definição formal de seqüências convergentes, manipulando-a simbolicamente, além de se apropriar de algumas propriedades de módulo. Conclui a prova sem fornecer qualquer interpretação para a definição de seqüência convergente ou para as propriedades (aritméticas) ali descritas.

Sua prova contém um erro conceitual, provavelmente fruto da desconexão entre definição e compreensão do conceito de convergência: desconsidera que pode haver uma quantidade finita de termos fora do intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, e que estes termos devem ser controlados, para que, de fato, a seqüência seja limitada.

Acreditamos que o candidato não teve a intenção de abordar o problema sintaticamente, e sim procurou usar a simbologia (por exemplo), e isto refletiu em uma produção sintática equivocada.

Letra c

Sua resposta assegura que a afirmação é falsa, porém não exibe nenhum contra-exemplo. Sua resposta é baseada em afirmações: recita o teorema que caracteriza as seqüências convergentes e conclui escrevendo que "Pelo item anterior, fazendo a volta da demonstração chegaremos à conclusão do teorema". Estas duas afirmações isoladas não justificam porque a questão é falsa, mostram no máximo que sabe um importante resultado a respeito de seqüências convergentes. Sua resposta é sintática, pois não apresenta nenhuma "instância", recorre apenas à propriedades relativas ao conceito de seqüências.

Categoria 5

a) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Dizemos que x_n é uma sequência limitada se existir $K > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ tem-se $|x_n| < K$.

b) Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência que converge para $a \in \mathbb{R}$.

Assim, tome $\epsilon = K$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$.

Existe uma quantidade finita de elementos da sequência que se encontram fora do intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.

Seja $x_{k_M} = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}\}$ e $x_{k_m} = \min\{x_1, x_2, ..., x_{n_0}\}$. Seja $K = x_{k_M} - x_{k_m}$.

$a - \epsilon < x_n < a + \epsilon = K$

c) Não. Contra-exemplo:

$x_n = (-1)^n = -1, 1 - 1, 1, ...$

Observe que x_n é uma sequência limitada pois $\exists K > 0$ tal que $|x_n| < K$, mas diverge.

O fato de uma sequência ser limitada não garante que a mesma convirja. Sequências como $y_n = sen\dfrac{(2n+1)\pi}{2}$ são exemplos de sequências limitadas que divergem.

Análise da Categoria 5

Letra a

Resposta correta, simples e sintática. Reprodução precisa daquela encontrada nos livros.

Letra b

Sua resposta possui produção sintática, pois define a convergência da seqüência x_n. Possui também produção semântica, pois interpreta esta definição afirmando que a convergência garante uma quantidade finita de termos da seqüência fora do raio de convergência.

De um modo geral sua resposta não nos acena para fatores de conflito.

Letra c

Sua resposta exibe o contra-exemplo clássico de uma seqüência limitada que diverge: $x_n = (-1)^n$. Recita a definição de seqüência limitada, dizendo que x_n se enquadra nesta definição. Fato: não explicita um valor concreto para K (aqui K é um número real que limita sua seqüência).

Não explica porque esta seqüência diverge. Parece-nos que, para ele, isto é algo trivial.

Finalmente, escreve que todas as seqüências do tipo $y_n = sen\frac{(2n+1)\pi}{2}$ são limitadas e divergentes. Esta é apenas uma seqüência, e, além disso, esta seqüência, calculada em cada ponto, é exatamente a mesma seqüência descrita como contra-exemplo. Isto nos sugere um conflito, pois parece desconhecer que a nova seqüência é apenas uma e a mesma daquela descrita inicialmente. Sua resposta se manteve integralmente sintática, não explicando nada através de sua compreensão relativa aos conceitos de seqüências limitados e convergentes.

Categoria 6

a) Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.

A sequência $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$ é limitada se existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $k \leqslant N$.

b) Definição formal: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sequência de números reais e $a \in \mathbb{R}$: x_n converge para a se $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon$, $\forall n \geqslant n_0$.

Logo $-\epsilon < x_n - a < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < x_n < a + \epsilon$, $\forall n \geqslant n_0$.

Então podemos afirmar que $a + \epsilon$ limita toda a sequência, ou melhor: $a + \epsilon$ é a menor cota superior da sequência.

Pela definição de sequência limitada com a afirmação acima, toda sequência convergente é limitada.

c) A recíproca da afirmação: "Toda sequência convergente é limitada" não é válida.

Para isto, basta tomarmos uma sequência limitada onde $|x_n - a| > \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$.

Exemplo: Tomemos a sequência de números reais: $(1, 10, 10^2, 10^3, ..., 10^{100})$

Esta sequência é limitada, mas ao tomarmos $\epsilon > 0$, por exemplo, $\epsilon = 10$ não existe nenhum $n \geqslant n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - 10^{100}| < \epsilon$. Logo a sequência não é convergente.

Análise da Categoria 6

Letra a

Baseada numa justificativa sintática, sua resposta nos revela um equívoco: concebeu que seqüência limitada é um conjunto finito de números reais, ou seja, seqüência limitada é o mesmo que seqüência cujos índices são limitados e, portanto é um conjunto com finitos termos. Sua resposta sugere que não compreendeu o conceito de seqüências limitadas.

Letra b

Apesar de ter respondido o item a de modo equivocado, consegue, agora, desenvolver argumentos consistentes de forma sintática e semântica.

Inicialmente descreve a definição de seqüências convergentes, em seguida inicia uma objetiva manipulação desta definição de modo simbólico, chegando a descrever que todos os termos cujos índices são maiores ou iguais a n_0 pertencem ao intervalo $a - \epsilon, a + \epsilon$, conclui sua resposta dando significado a este conceito.

Seu argumento seguinte ("Então podemos afirmar ... é a menor cota superior da seqüência"), fornece-nos uma breve declaração de seu entendimento sobre a definição de seqüência convergente (contribuição semântica de sua resposta).

Outra vez, os possíveis finitos termos que se encontram fora do raio de convergência foram desprezados, reside aí um equívoco de sua resposta.

Finalmente, encerra a demonstração afirmando que "Pela definição de seqüência limitada com a afirmação acima, toda seqüência convergente é limitada". Esta afirmação se conflita com a resposta fornecida no item a, pois descreveu de maneira totalmente diferente o conceito de seqüências limitadas. Ora, é de se esperar que conclua algo próximo à definição firmada anteriormente, porém conclui a prova admitindo que seqüências convergentes devem ter cotas que as limite. Neste momento, nos acena para um potencial fator de conflito, proveniente da diferença entre a definição de seqüências limitadas dada no item a e o conceito trabalhado, no item b, para seqüências limitadas.

Letra c

Responde corretamente à questão proposta, porém seus argumentos mostram-se integralmente equivocados.

Comete erro conceitual afirmando que a seqüência $(1, 10, 10^2, 10^3, ..., 10^{100}, ...)$ é limitada.

Sem dúvida o critério que usou para garantir que sua seqüência é limitada está de acordo com a definição estabelecida no item a. Para este candidato, seqüências são limitadas quando seus índices são limitados, e como a seqüência acima termina na 101ª posição, ela é limitada.

Produz sintaticamente sua resposta, porém suas definições se mostram imprecisas.

Tudo isto nos sugere que há latentes fatores de conflitos, causados, provavelmente, por equivocadas definições de conceito.

Categoria 7

c) A afirmação é falsa, ou seja, um sequência pode ser limitada mas não ser convergente. Exemplo: $x_n = (-1)^n$. É uma sequência limitada em $[-1, 1]$, no entanto, é divergente.

a) Uma sequência é limitada quando for limitada superiormente e inferiormente por algum número. $\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = a$.

b) $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geqslant n_0$.

Análise da Categoria 7

Letra a

Iniciou sua resposta pelo item c, o item a foi o segundo item a ser respondido.

Apresenta-nos uma resposta produzida semanticamente e, em seguida, representa simbolicamente esta resposta. Fornece-nos uma explicação para o conceito de seqüências limitadas e mostra-nos que se preocupa com a compreensão do conceito matemático, mas não o formaliza.

Cremos que na tentativa de formalizar minimamente seus argumentos, exibe a notação de seqüência convergente. Parece-nos provável que haja conflito entre a imagem de conceito e a definição de conceito de seqüência limitada.

Letra b

Limitou-se a descrever a definição de seqüência convergente.

Letra c

Limita-se a fornecer o contra-exemplo $x_n = (-1)^n$, escrevendo que esta seqüência é limitada pelo intervalo $[-1, 1]$, porém não explica porque ela é divergente. Sua resposta é produzida de maneira sintática, usa um contra-exemplo típico, e mostra que ele está de acordo com a definição de seqüências convergentes.

Tabela 5.3: *Levantamento do número de Respostas que Compõem cada Categoria*

	Questão 3a	Questão 3b	Questão 3c
Categoria 1	11	1	46
Categoria 2	0	7	0
Categoria 3	6	5	15
Categoria 4	8	24	1
Categoria 5	29	3	0
Categoria 6	3	1	1
Categoria 7	1	4	0
Em Branco	13	31	17
Incompletas	15	10	6
Total	86	86	86

Leitura das Análises das Categorias

Resumindo, podemos assegurar que o conceito de seqüência limitada apresentou elevado índice de erro, sendo duas vezes confundido com o conceito de limite de seqüência. Acreditávamos que este item apresentaria uma freqüência menor de erros.

A letra b era considerada por nós como um item bastante delicado e projetávamos que poucos candidatos teriam êxito, pois se trata de um problema que requeria razoável conhecimento simbólico ou certa interpretação do conceito de convergência. Apenas três categorias foram integralmente mal sucedidas, as demais conseguiram desenvolver a ideia central da demonstração.

O item c apresentou duas categorias cujas respostas estavam equivocadas, três categorias apresentaram contra-exemplo correto sem justificativa e apenas duas categorias exibiram contra-exemplo correto acompanhado de justificativa.

A resposta da categoria 1 misturou o conceito de seqüência limitada com o conceito de limite de seqüência. Este equívoco é carregado para a letra b quando tenta demonstrar o problema proposto levando em consideração que sua tese é mostrar que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. É interessante observar que a definição dada para seqüências limitadas não baseia sua resposta na letra c - veja que o exemplo que fornece não se enquadra em sua definição de seqüências limitadas. Certamente a porção evocada da imagem de conceito relativa às seqüências limitadas conflita-se com a definição de conceito pessoal. Ressaltamos que, de acordo com Tall e Vinner (1981), este é o tipo de conflito mais preocupante, tendo que ser conduzido com o máximo de cuidado.

Acreditamos que é imprescindível destacar que seqüências limitadas e limite de seqüências são conceitos distintos, cabendo a nós professores, enfatizar que a notação $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ indica que a seqüência x_n converge à a e não que a seqüência é limitada por a.

Já a resposta da categoria 2 apresentou-se muito bem estruturada. Utilizou o procedimento sintático no item a e o semântico nos itens b e c. Destacamos que, no segundo item, o limite da seqüência considerada engloba os termos desta seqüência que estão fora do raio de convergência, coisa freqüentemente deixada de lado nas demonstrações, explicando de maneira satisfatória as contas realizadas a partir do desenho apresentado.

Ressaltamos que apenas nas categorias 2 e 3 as respostas dadas ao item c são bem explicadas, trazendo propriedades oriundas da definição do conceito de seqüências convergentes e mostrando que seus contra-exemplos, de fato, respondem o problema.

A resposta à letra a da categoria 3 é a única que procura formalizar o conceito de seqüência limitada a partir de uma produção semântica, descrevendo precisamente a definição pedida. A resposta deste item pela categoria 7 inicia-se de forma análoga a categoria 3, porém falha ao confundir, assim como a resposta dada pela categoria 1, o conceito de seqüência limitada com o de seqüência convergente.

As categorias 2, 4 e 5 fornecem para a letra a respostas similares: definem de maneira correta o conceito de seqüência limitada, recorrendo diretamente a definição de conceito formal. A resposta a esse item dada pela categoria 6 nos chamou a atenção, pois descreve que seqüências limitadas são aquelas com finitos termos. Apesar deste equívoco conceitual, manipula satisfatoriamente a definição do conceito de convergência de seqüências. Ainda relativo à categoria 6, apresenta um exemplo de seqüência finita como sendo seqüência limitada. Erra o conceito mais primitivo relativo a esta questão que é o de seqüência.

As categorias 3, 4 e 5 têm soluções similares para o item b. Há uma pequena diferença entre essas respostas que se deve principalmente ao modo como cada solução interpreta ou desenvolve a desigualdade $|x_n - a| < \epsilon$. Observe que as categorias 3 e 5 se atém ao fato de que existem termos fora do intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, coisa omitida pela resposta da categoria 4.

A categoria 6 consegue, apesar do equívoco cometido na letra a, desenvolver uma resposta satisfatória (dentro daquilo que havíamos previsto), para a letra b. Veja que procura dar sentido ao fato da seqüência ser convergente, concluído que ela possui limitante inferior superior.

5.4 Questão 4

O Teorema do Valor Intermediário tem o seguinte enunciado:

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $f(a) < f(b)$ e seja $y_0 \in]f(a), f(b)[$.

Então $\exists\ x_0 \in\ ]a, b[$ tal que $f(x_0) = y_0$.

a) Explique porque a hipótese de continuidade é indispensável para que este teorema seja válido.

b) Podemos afirmar, nas condições do Teorema, que x_0 é único?Justifique sua resposta.

Categoria 1

a) Para que haja continuidade num ponto x_0 temos que:

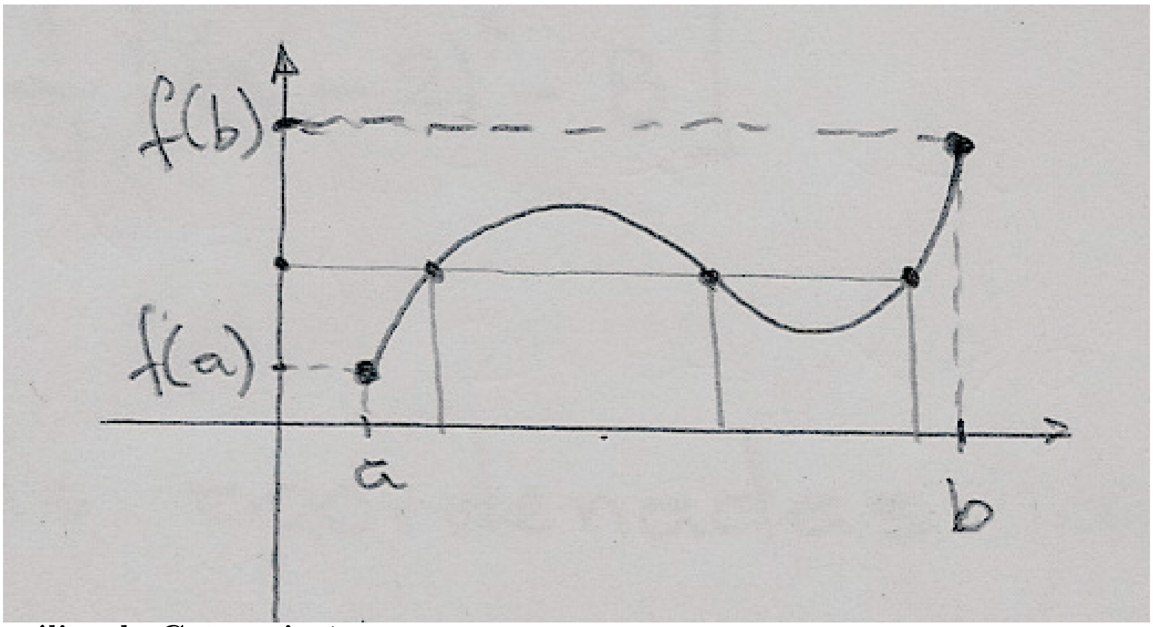
1) $f(x_0)$ exista

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ exista

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Se considerarmos uma função descontínua, a função pode não estar definida em x_0 e assim , não poderíamos afirmar que $f(x_0) = y_0$.

b) Não se pode afirmar que x_0 é único. Considerando, por exemplo, uma f com o aspecto a seguir, ela satisfaz às condições do teorema, mas encontramos valores de y_0 que são imagens de valores distintos de x.



Análise da Categoria 1

Letra a

Procura fornecer a definição formal do conceito de continuidade em um ponto, sendo hábil para enunciar corretamente esta definição. Podemos classificar que, neste momento, sua resposta é uma legítima produção sintática.

A seguir, argumenta que considerando uma função descontínua em x_0 esta poderia não estar definida neste ponto, e isto garantiria a indispensabilidade da hipótese de continuidade, já que poderia existir um valor para y que se corresponderia exclusivamente a este x_0.

Explorando a compreensão da definição de continuidade, nos fornece argumentos para garantir que procura reproduzir semanticamente sua conclusão.

Sua resposta, nos sugere que conhece bem a definição de continuidade, e sua imagem de conceito evocada parece estar de acordo com a definição que escolheu para o objeto matemático estudado.

Letra b

Neste momento de sua resposta, nenhuma definição, nem manipulação simbólica são evocadas. Sua resposta repousa inteiramente no gráfico fornecido, se apropria do teorema e desta representação visual para consolidar corretamente seus argumentos. Esta é uma produção semântica, não apresentando fatores de conflito.

Categoria 2

a) Se f não fosse contínua poderia haver "saltos"no gráfico de f, onde y_0 não seria correspondido para algum x_0 que fosse ponto de descontinuidade de f.

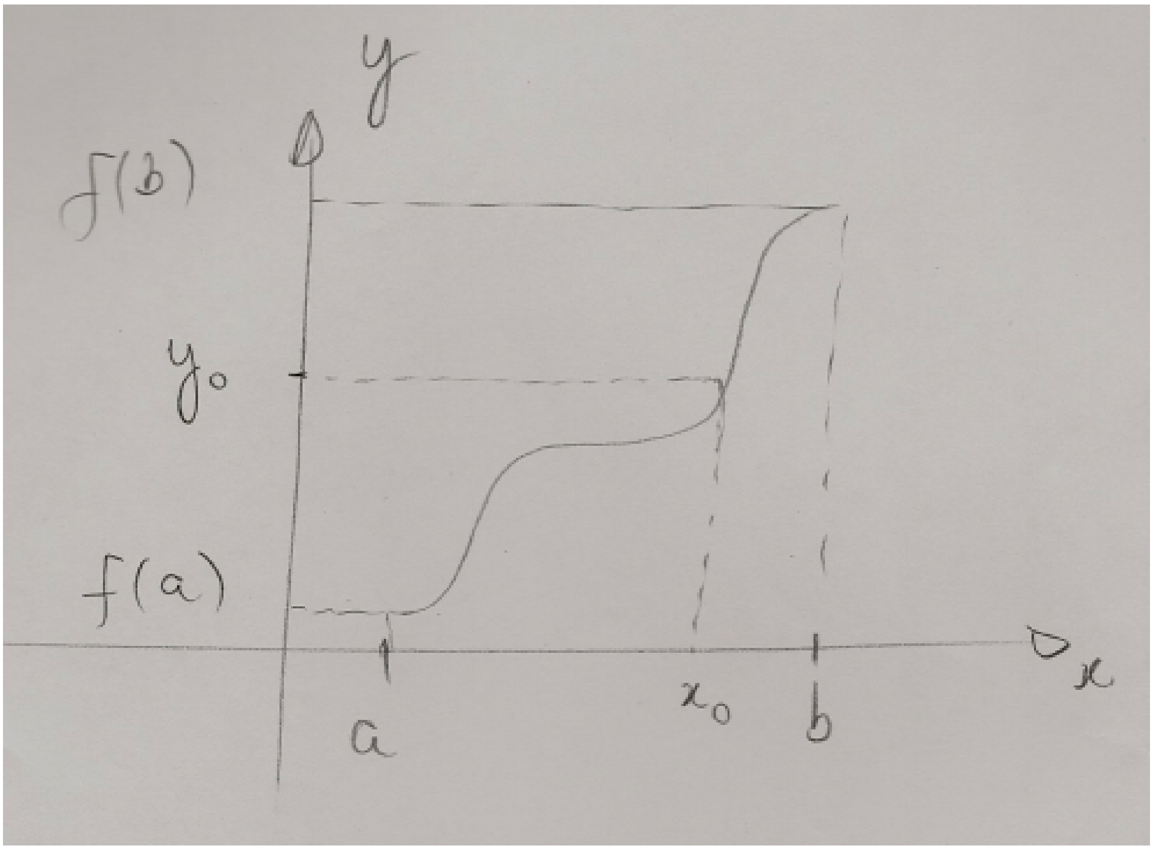


Figura 5.1: relativa à questão 10a de 2007 do candidato 058.

b) f é injetiva, portanto não pode haver x_1 e x_0 tais que $f(x_1) = y_0$ e $f(x_0) = y_0$

Análise da Categoria 2

Letra a

Sua resposta foi produzida utilizando argumentos vindos do entendimento que detém sobre o conceito de continuidade. Não recita definições, nem exibe propriedades pré-estabelecidas, ainda exibe uma situação gráfica que pode tê-lo auxiliado durante a produção de sua resposta. Enfatizamos que apesar de sua resposta ser fundamentada de maneira correta, não fica claro que $f(x_0) \neq y_0$. Podemos classificar este tipo de prova como sendo de caráter semântico, esta resposta justifica corretamente a necessidade da função ser contínua, parecendo-nos livre de conflitos.

Letra b

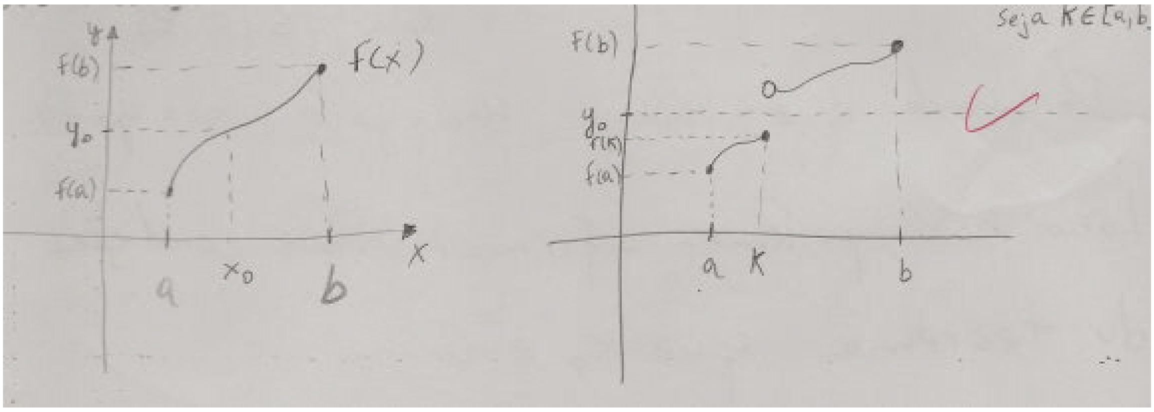
Sua resposta é breve e equivocada, sendo fundamentada na afirmação de que f deve ser injetiva, hipótese inicialmente admitida pelo próprio candidato. Esta afirmação errada pode ter sido influenciada pelo gráfico que construiu no item (a) (descreve a função f como sendo estritamente crescente e por hipótese contínua, logo deve ter imaginado que f, necessariamente, deveria ser injetora).

Esta resposta parece se enquadrar em um tipo de produção semântica, pois de alguma forma interpretando o teorema e, provavelmente, pensando graficamente, qualifica a função f como injetora.

Este fator de conflito explícito, pode ter sido causado pelo gráfico pensado no item anterior. Segundo Tall e Vinner (1981), quando a imagem de conceito não está bem fundamentada, bem conectada com as diversas representações e significados possíveis para um determinado conceito, podem ocorrem vários conflitos entre definição de conceito e imagem de conceito, conflitos estes que, segundo estes autores, devem ser trabalhados para que não confundam nem atrapalhem no processo de aprendizagem.

Categoria 3

a) Considere duas funções $F(x)$ e $g(x)$, ambas com o domínio no intervalo $[a, b]$, de modo que $F(x)$ seja contínua em $[a, b]$ e $g(x)$ seja descontínua em $[a, b]$. Considere o esboço do gráfico de $F(x)$ e $g(x)$ abaixo:



No primeiro caso, dado qualquer $y_0 \in]F(a), F(b)[$ é possível encontrar $x_0 \in [a, b]$ de modo que $F(x_0) = y_0$. No segundo caso, $\exists y_0 \in]F(a), F(b)[$ que $\forall x_0 \in [a, b] \quad F(x_0) \neq y_0$.

Por isso, torna-se indispensável a hipótese de continuidade para que este teorema seja válido.

b) Não podemos afirmar se x_0 é único.

Por exemplo, considere $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada pelo gráfico a seguir.

Seja $a' \in [a, b]$ e $b' \in [a, b]$. É possível encontrar $y_0 \in]F(a'), F(b')[$ onde $F(a') \in]F(a), F(b)[$ e $F(b') \in]F(a), F(b)[$ de modo que dado $y_0 \in]F(a), F(b)[\quad x_0, x_1, x_2 \in [a, b]$ de modo que $F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_0$ e $F(x_2) = y_0$. Logo, não podemos afirmar nas condições do teorema que x_0 é único.

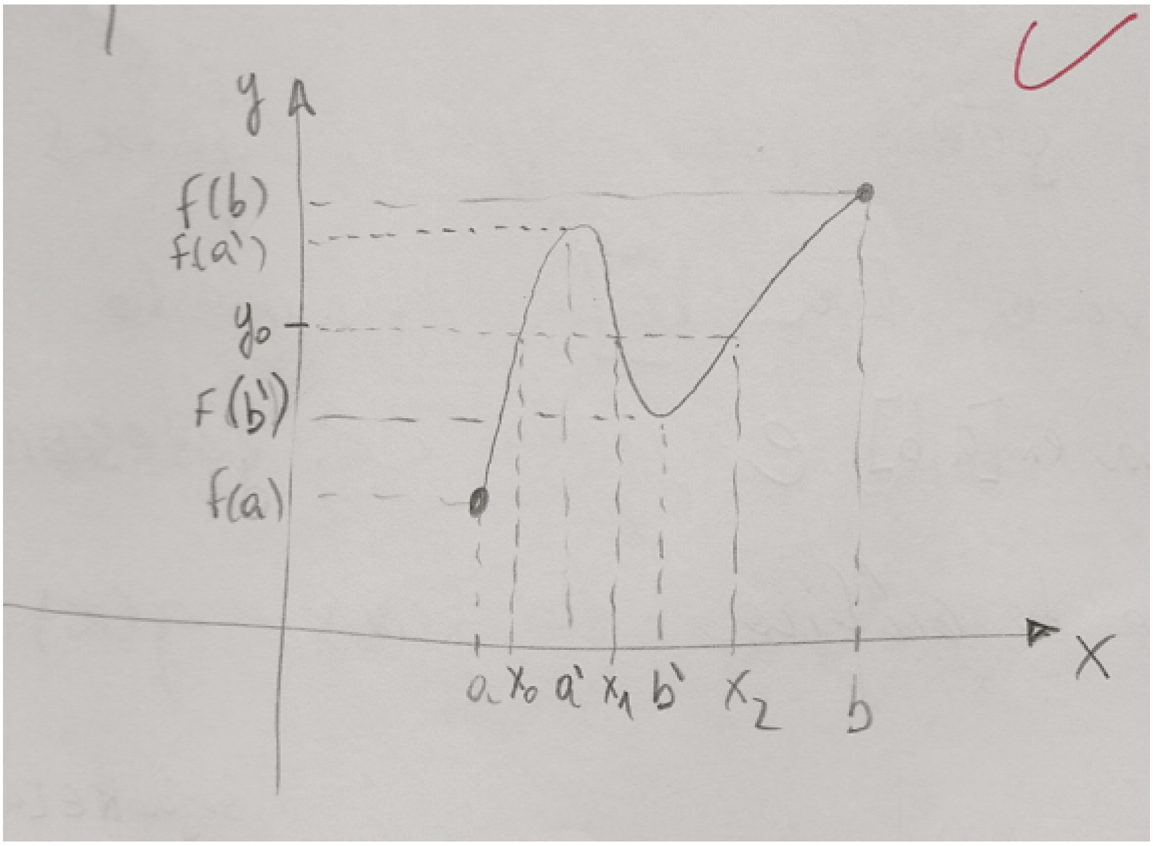


Figura 5.2: relativa à questão 10b de 2007 do candidato 095.

Análise da Categoria 3

Letra a

Seus argumentos comportam-se de maneira semântica, intui o significado do teorema do valor intermediário, apresenta-nos duas situações gráficas, que se confrontam, uma explicitando o teorema com a hipótese de continuidade e outra sem esta hipótese.

A seguir, se apropria de uma considerável habilidade sintática, explicando a indispensabilidade da continuidade da função no teorema, respaldando-se nos dois gráficos fornecidos.

Conecta de maneira satisfatória a definição de conceito com a sua imagem de conceito, chamando nossa atenção para o fato de que inicia sua resposta com figuras, com representações gráficas para, a partir daí, basear seus argumentos de um modo mais rigoroso. Note que, para nós, esta resposta está dentro dos padrões estabelecidos no capítulo 3, sendo, por isso, considerada como resposta satisfatória.

Letra b

Inicia a questão através de um gráfico em que a sua função se comporta de modo não monótono. Vale destacar que este candidato havia exibido dois gráficos no item (a) desta questão, em que ambas as funções eram injetivas, e agora produz outro tipo de função. Esta porção de sua imagem de conceito se mostra, por estas duas situações, pluralizada. Houve, devido a esta representação geométrica, uma produção semântica em sua questão.

Logo a seguir, justifica rigorosamente que o ponto x_0 não é, necessariamente, único. Preocupa-se em utilizar, neste momento, a notação matemática, argumentando detalhadamente que, de acordo com seu gráfico, podem existir vários outros pontos do domínio que possuem a mesma imagem. Tamanho cuidado em se justificar usando símbolos através de uma linguagem matemática, revelam que houve, também, produção sintática, sendo coerente em ambas as produções.

Categoria 4

a) Porque caso a função fosse descontínua poderíamos tomar um $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) \notin]f(a), f(b)[$:

Observe que tomamos uma função descontínua a situação do gráfico ao lado poderia acontecer. Assim a hipótese da f ser contínua é indispensável.

b) Não, visto que em um intervalo temos infinitos pontos e nas condições do teorema para todos os pontos pertencentes ao intervalo no domínio existirá uma imagem no intervalo $]f(a), f(b)[$ conforme o teorema.

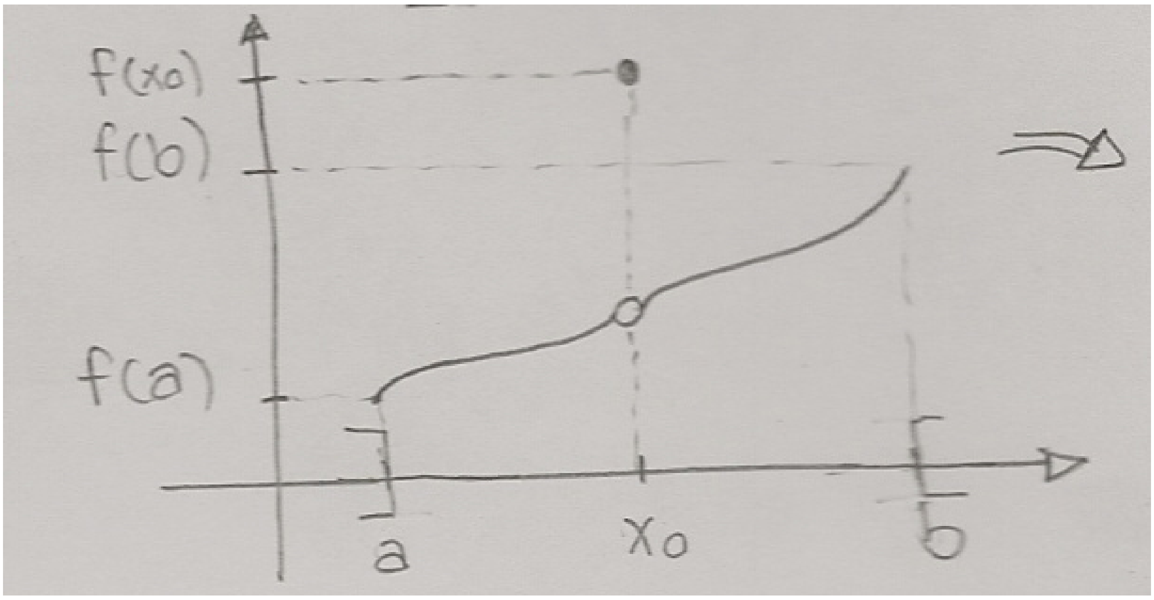


Figura 5.3: Relativa à questão 10a de 2007 do candidato 23

Análise da Categoria 4

Letra a

Inicia sua resposta de um modo formal, utilizando símbolos, procura transcrever o que foi perguntado, não esclarecendo nada, apenas reproduz o enunciado da questão.

Em seguida, exibe um gráfico que não satisfaz às hipóteses do teorema, pois $f(x_0)$ não está entre $(f(a), f(b))$. Entendemos que a imagem de conceito que estruturou para esta situação não é suficiente para estabelecer argumentos precisos e capazes de fundamentar sua resposta, isto é, a deficiência demonstrada no momento que visa representar graficamente o problema colabora para concluir fatos incompatíveis com a necessidade da hipótese de continuidade.

Letra b

Garante algo que é inerente a todas as funções contínuas definidas em intervalos da reta. Sua resposta não manipula símbolos, nem utiliza definições, está apoiada no entendimento que tem sobre o teorema do valor intermediário, sendo uma produção semântica.

Por se tratar de uma justificativa sem coerência e sem considerar conceitos relativos ao teorema do valor intermediário, não temos meios de identificar fatores de conflitos.

Tabela 5.4: *Levantamento do número de Respostas que Compõem cada Categoria*

	Questão 4a	Questão 4b
Categoria 1	6	8
Categoria 2	6	3
Categoria 3	18	20
Categoria 4	10	13
Categoria 5	-	-
Categoria 6	-	-
Categoria 7	-	-
Em Branco	14	20
Incompletas	32	22
Total	86	86

Leitura das Análises das Categorias

Destacamos que a categoria 3 chamou nossa atenção para o fato de desenvolver sua resposta a partir de dois gráficos, fazendo, a priori, um caminho geométrico-gráfico, para, a partir daí, formalizar a solução garantindo a necessidade da hipótese de continuidade.

A categoria 4 tem uma característica peculiar: o gráfico descrito é de uma função cuja descontinuidade é removível, enquanto que nas demais categorias, onde houve representação gráfica, as descontinuidades citadas são de salto. Apesar de seu gráfico ser distinto dos demais apresentados, seus argumentos divergiram da proposta da questão, fato justificado pela posição do ponto $(x_0, f(x_0))$.

Relativamente ao primeiro item desta questão detectamos a presença de conflitos nas categorias 1 - em que a solução apresenta argumento incompatível com o problema proposto - e na categoria 4 - onde sua interpretação gráfica não condiz com as hipóteses do problema..

Referente ao segundo item, onde a unicidade é questionada, todas as respostas dadas apelaram para a produção semântica. As categorias 2 e 4 mostraram-se equivocadas argumentando características que não são necessariamente compatíveis com funções contínuas.

A resposta da segunda categoria garante que a função deve ser injetora e isto é um conflito - provavelmente causado por porções distintas e não conectadas de sua imagem de conceito. Note que seu gráfico não representa uma função injetora em toda parte. Sem dúvida isto estabelece que há conflitos aí instaurados.

A categoria quatro apresenta argumentos que não são suficientes para garantir a unicidade no teorema do valor intermediário. Ressaltamos que na letra a já havia fornecido um gráfico também incoerente com a situação descrita pelo teorema.

As categorias 1 e 3 fornecem gráficos similares porém justificativas com graus de formalidade distintos. A categoria 1 faz uso de uma linguagem mais verbal, enquanto que a categoria 3 após apresentar o gráfico dá uma extensa justificativa simbólica para a questão.

Capítulo 6

Conclusão

Destacamos que relativamente à questão 1 apenas a resposta da primeira categoria foi integralmente semântica. Já as respostas das categorias 2 e 3 foram apenas sintáticas, sendo que tivemos ao todo trinta e sete respostas compondo estas duas categorias (2 e 3), enquanto somente cinco respostas optaram pela produção semântica (categoria 1).

Ainda sobre a questão 1, destacamos que a categoria 6 apresenta resposta produzida tanto sintática quanto semanticamente. Somente duas respostas se enquadraram nesta categoria. De um modo geral, isto acena para o fato que poucos candidatos não se convenceram de suas respostas quando a produção se fez de maneira sintática. O único vestígio de conflito que detectamos foi na resposta da categoria 6, o que evidencia que esta resposta teve maciço desenvolvimento sintático e que estas respostas foram satisfatórias, convencendo a maioria dos participantes que optaram por este caminho.

Quanto à segunda questão, detectamos que, com exceção da segunda categoria, todas conseguiram desenvolver a definição do conceito de derivada de uma função real de variável real, no entanto três categorias (1, 3 e 4) desprezaram o ponto onde a derivada estava sendo definida. Estas três categorias correspondem a aproximadamente 44% das respostas consideradas, e isto indica que quase metade das respostas não deram importância a este detalhe conceitual que é uma das características predominantes deste conceito.

Com respeito ao significado geométrico da derivada, perguntado ainda na segunda questão, das categorias que ilustraram graficamente suas respostas (categorias 1, 4, 5 e 6), apenas as respostas da categoria 4 conectaram a definição dada com a situação descrita graficamente.

Esta questão apresenta indícios de fatores de conflitos apenas nas respostas da categoria 2. Ratificamos a nossa crença no fato de que esta reduzida quantidade de fatores de conflitos se deve ao tipo de resposta encontrado na maioria das categorias: respostas clássicas, encontradas na maior parte dos livros didáticos de matemática.

Na terceira questão tivemos aproximadamente 26% de respostas erradas no item a, onde era solicitada a definição de seqüências limitadas. Entendemos que este é um número elevado, pois este é um conceito básico. Detectamos poucos fatores de conflitos, apenas nas categorias 1, 6 e 7, provenientes de inconsistentes definições de seqüências limitadas.

Verificamos que dentre as sete categorias presentes nesta terceira questão, três delas utilizaram argumentos semânticos para resolver o item b, porém estas três categorias totalizam apenas onze respostas. Fica evidente que neste item, as respostas foram predominantemente sintáticas (trinta e quatro ao todo). Estes dados estão de acordo com o que projetamos inicialmente: quantidade de respostas mais sintáticas e menos semânticas.

A quarta questão foi marcada por ter sido justificada integralmente através de produções semânticas, apresentando fatores de conflitos nas categorias 1 e 4 (item a), e nas categorias 2 e 4 (item b). Destacamos o elevado número de respostas incompletas (ver tabela 1.3).

Propusemos verificar se o procedimento sintático produz com maior frequência fatores de conflitos se comparado ao procedimento semântico. Os resultados mostrados no corpo da pesquisa nos dão indícios para afirmarmos que ambas as produções apresentaram dificuldades, sendo que as respostas produzidas semanticamente ficaram aquém das nossas expectativas, uma vez que esperávamos encontrar, além de uma quantidade muito maior deste tipo de resposta, maior qualidade principalmente quanto à formalização delas comparativamente às produções sintáticas.

Destacamos que ambas as produções, sintáticas e semânticas, obtiveram êxito. Sem dúvida, as produções sintáticas foram mais freqüentes que as produções semânticas. Cremos que por se tratar de respostas dadas em um processo seletivo ao mestrado, em que muitas vezes apenas a formalização rigorosa das respostas é entendida como solução correta os candidatos se sentiram mais confiantes manipulando definições e propriedades do que desenvolvendo suas respostas a partir das instâncias que têm sobre determinado conceito.

Enfatizamos a necessidade de possuirmos definições de conceito consistentes e tê-las compatíveis com a definição de conceito formal. Ressaltamos que Giraldo (2004) também previu em seus trabalhos que uma definição de conceito formal, uma definição de conceito pessoal e uma imagem de conceito, quando bem estruturadas, são fenômenos independentes e isto fica explícito na presente pesquisa.

É sabido o quanto nós professores influenciamos nossos alunos e, portanto, temos o dever de colaborarmos ativamente na construção de seus conceitos matemáticos. Penso que um bom caminho para isto é trabalhar os conceitos de forma sintática (mostrando-lhes a importância de definições e provas) e de forma semântica (revelando-lhes a beleza e significado da Matemática, do pensar Matemático). Não há forma predominante. Ambas são importantes e fundamentais, mas é essencial que se tenha a concepção de que apenas manipular símbolos, sem refletir no que representam, não é fazer Matemática e muito menos entendê-la.

Referências Bibliográficas

[1] ALCOCK, Lara; WEBER, Keith *Semantic and syntatic proof productions.* Educational Studies in Mathematics. 3, pp. 209-234, 2004.

[2] BALACHEFF, N. *Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics.* Em D.Pimm (Ed.): Mathematics Teachers and Children, pp. 216-235, Londres: Hodder stoughton, 1988.

[3] BELL, A. *A study of pupil's proof-explanations in mathematical situations.* Educational Studies in Mathematics. 7, pp. 23-40, 1976.

[4] COURANT, R. *Cálculo Diferencial e Integral*; vol.1. Rio de Janeiro (RJ): Globo, 1995.

[5] CURY, H.N. *Análise de erros:* o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1.ed. Belo Horizonte (MG): Autêntica, 2007.

[6] DAVIS, P. J.; HERSH, R. *A Experência Matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1986.

[7] De VILLIERS, M.D. *Pupil's needs for conviction and explanation within the context of geometry.* Atas do PME-15, Vol. 1, pp. 255-262, Assissi, Itália, 1991.

[8] GIRALDO, Victor *Descrições e conflitos computacionais: o caso da derivada*, 2004. Tese (Doutorado em Ciências). Universidade Federal do Rio de Janeiro, UFRJ, Rio de Janeiro (RJ).

[9] GUIDORIZZI, H.L. *Um curso de cálculo*; vol.1. 5.ed. Rio de Janeiro (RJ): LTC, 2001.

[10] HANNA, G. *Some pedagogical aspects of proof.* Interchange , 21(1), pp. 6-13, 1990.

[11] LIMA, Elon lages *Curso de análise*; vol.1. 10.ed. Rio de Janeiro (RJ): Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2002.

[12] NASSER, Lílian; TINOCO, Lúcia *Argumentação e provas no ensino de matemática.* 1.ed. Rio de Janeiro (RJ): Projeto Fundão - IM/UFRJ, 2001.

[13] PAIS, Luiz Carlos *Ensinar e aprender matemática.* 1.ed. Belo Horizonte (MG): Autêntica, 2006.

[14] PAIS, L.C. *Transposição Didática.* In: Machado, S. et al. (eds.), Educação Matemática: uma introdução, pp. 13-42. São Paulo: PUC-SP, 2002.

[15] PINTO, Marcia; TALL, David *Student constructions of formal theory: giving and extracting meaning.* Proceedings of the 23rd Conference of PME, Haifa, Israel. 3, pp. 281288, 1999.

[16] REZENDE, J;NASSER, L.*Kinds of argumentation used in geometry.* Atas do PME-18, Vol. 1, pp.66, Lisboa, Portugal, 1994.

[17] REZENDE, Wandereley *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*, 2003. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade de São Paulo, USP, São Paulo (SP).

[18] ROCHA, A.; BIANCHINI, W. *Aprendendo cálculo com Maple.* Rio de Janeiro (RJ): LTC, 2002.

[19] STEWART, J. *Cálculo*; vol.1. 4.ed. São Paulo (SP): Pioneira Thomson Learning, 2003.

[20] TALL, DAVID *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof.* Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning. Ed. D. Grouws, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1992, p. 495-511.

[21] TALL, DAVID; VINNER, S. *Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity*. Educational Studies in Mathematics. 12, pp. 151-169, 1981.

[22] TALL, DAVID *The nature of mathematical proof.* Mathematics Teaching. 127, pp. 2832, 1989.

[23] TALL, DAVID *To prove or not to prove*. Mathematics Review 13, pp. 21-32, 1991.

[24] TALL, DAVID *The cognitive development of proof: is mathematical mroof for all or for some?*. Conference of the University of Chicago School Mathematics. 1998.

[25] WEBER, KEITH *Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge*. Educational Studies in Mathematics. 48, pp. 101-119, 2001.

Capítulo 7

Apêndice

A seguir exibiremos as duas questões que foram descartadas do corpo de pesquisa, mas que foram inicialmente consideradas. Enfatizamos que estas questões fizeram parte das provas de admissão ao mestrado de ensino de matemática (2008 e 2009), curso oferecido pela Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Lembramos que estas duas questões foram desconsideradas desta pesquisa, pois a incidência de respostas repetidas e baseadas exclusivamente em cálculos e contas não nos deu margem a realizar conexão entre os estilos sintáticos e semânticos de respostas.

7.1 Questão 5

Considere a sequência de números reais definida recursivamente da seguinte forma:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n{}^2 + 1) \ \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Mostre que (a_n) é estritamente crescente. Sugestão: use indução.

b)Considere o seguinte argumento para determinar o limite de (a_n):

Temos que $x = \lim a_{n+1} = \lim a_n$. Então, podemos tomar $x = \lim a_{n+1} = \lim a_n$. Logo:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}({a_n}^2 + 1) \Rightarrow \lim a_{n+1} = \frac{1}{2}((\lim a_n)^2 + 1) \Rightarrow$$

$$x = \frac{1}{2}(x^2 + 1) \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Logo, $\lim a_n = 1$.

Este argumento está correto? Justifique sua resposta.

c) É verdade que $\lim a_n = 1$? Justifique sua resposta.

Categoria 1

a) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, onde $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}((a_n)^2 + 1), \forall n \geqslant 1. \end{cases}$

Mostraremos, por indução, que a_n é monótona crescente, isto é, $a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n < a_{n-1} < a_{n+1} < ... \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Seja $n = 1$. Assim: $a_2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + 1) = \frac{1}{2}(2^2 + 1) = \frac{1}{2}(5) = \frac{5}{2} > 2$

(Hipótese de indução). Seja $n = k$. Suponhamos que até o índice k, a_n é estritamente crescente, ou seja, $a_1 < a_2 < ... < a_{k-1} < a_k = \frac{1}{2}(a_k^2 + 1)$.

Mostremos para $k + 1$.

Dessa forma:

$... < a_{k-1} < a_k < a_{k+1} \Rightarrow \frac{1}{2}(a_{k-1}^2 + 1) < \frac{1}{2}(a_k^2 + 1) \Rightarrow a_{k-1}^2 + 1 < a_k^2 + 1 \Rightarrow a_{k-1}^2 < a_k^2 \Rightarrow \sqrt{a_{k-1}^2} < \sqrt{a_k^2} \Rightarrow a_{k-1} < a_k$.

Portanto, a_n é estritamente crescente, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Sim. Partindo da hipótese de que $\lim a_n = x$, então por definição, $\lim a_{n+1} = x$, pois $\forall \epsilon > 0, \exists n_0$, tal que $n > n_0 \Rightarrow x_n \in (x - \epsilon, x + \epsilon), \forall n > n_0$.

e a partir da fórmula de recurssividade de a_n e aplicando o operador limite, que apresenta propriedades como $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} k = k, k \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)^n = (\lim\limits_{x \to a} f(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Tem-se:

$\lim a_{n+1} = \lim(\frac{1}{2}a_n^2 + 1) \Rightarrow x = \frac{1}{2}\lim a_n^2 + \lim 1$

$x = \frac{1}{2}(\lim a_n)^2 + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}x^2 + 1$

$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1$.

Supondo a existência do limite, foi possível, através da definição do limite de uma sequência e das propriedades de limites, "determinar" o candidato a limite.

c) Apesar dos cálculos anteriores levarem a $\lim a_n = 1$, segue a monotonicidade da sequência que a_n diverge, pois $a_n \to \infty$, quando $n \to \infty$ (a_n é estritamente crescente).

a_n só teria limite se fosse, por hipótese, limitada também.

Categoria 2

a) $a_1 = 2$

$a_2 = a_{1+1} = \frac{1}{2}(a_1^2 + 1) \quad n = 1$, daí $a_2 = \frac{1}{2}(2^2 + 1) = \frac{5}{2}$

$a_3 = a_{2+1} = \frac{1}{2}(a_2^2 + 1) \quad n = 2$, daí $a_3 = \frac{1}{2}((\frac{5}{2})^2 + 1) = \frac{1}{2}(\frac{25}{4} + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{4} = \frac{29}{8}$

.

.

.

Temos que mostrar que:

$2 < \frac{5}{2} < \frac{29}{8} < ... < a_n$, onde $a_{n-1+1} = \frac{1}{2}((a_{n-1})^2 + 1)$

$2 < \frac{5}{2} < \frac{29}{8} < ... < a_{n-1} < a_n = \qquad a_n = \frac{1}{2}((a_{n-1})^2 + 1)$

$a_{n-2+1} < \frac{1}{2}((a_{n-2})^2 + 1)$

$a_{n-1} < \frac{1}{2}((a_{n-2})^2 + 1)$. Como $a_1 < a_2 < a_3$, temos que $a_{n-1} < a_n < a_{n+1}$. De fato, pois

$\frac{1}{2}((a_{n-2})^2 + 1) < \frac{1}{2}((a_{n-1})^2 + 1) < \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$

$a_{n-2}^2 + 1 < (a_{n-1})^2 + 1 < a_n^2 + 1$, daí $a_{n-2}^2 < a_{n-1}^2 < a_n^2 \Rightarrow a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$

Logo a_n é estritamente crescente.

b) Não.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1), \forall n \geqslant 1$

$x = \lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$, daí

$x = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2} \lim(a_n^2 + 1)$

$x = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2}(\lim a_n^2 + \lim 1)$

$x = \lim a_{n+1} = \frac{1}{2} \lim a_n^2 + \frac{1}{2} \lim 1$

$x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{x^2+1}{2} \Rightarrow 2x = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

Não, o fato de afirmar que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$ está errado.

c) Não, pois a_n é o enésimo termo de uma sequência crescente, onde $n \geqslant 1$, logo $\lim a_n$ diverge.

Categoria 3

a) Para $n = 1 \rightarrow a_1 = 2$

Para $n = k \rightarrow a_k = \frac{1}{2}(a_{k-1}^2 + 1)$

Para $n = k + 1 \rightarrow a_{K+1} =$ $\qquad\qquad$ $a_{n+1} > a_n$

b) Errado. Ao "aplicar"o limite dos dois lados da igualdade foi feito:

$\lim a_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(a_n^2 + 1) \overset{=}{\text{erro}} \frac{1}{2}((\lim a_n)^2 + 1)$

c) $\lim a_n = 1$ $\qquad \leftarrow$ FALSO

$\lim a_n = \lim \frac{1}{2}(a_{n-1}^2 + 1) = \lim \frac{a_{n-1}^2}{2} + \frac{1}{2}$

Como a função é ESTRITAMENTE CRESCENTE, temos que $\frac{a_{n-1}^2}{2}$ sempre crescente e como $\lim a_1 = 2$ $\quad \lim a_n$ não pode ser 1.

Categoria 4

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}({a_n}^2 + 1) \ \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

a) Em branco.

b) Está correto o argumento, como a sequência é convergente os $\lim a_n$ e $\lim a_{n+1}$ são iguais e por isso podem ser chamados de x. Na passagem $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n^2 + 1) \Rightarrow \lim a_{n+1} = \frac{1}{2}((\lim a_n^2) + 1)$ os trechos omitidos referem-se as propriedades de limite o $\frac{1}{2}$ por ser constante foi colocado para fora, $\lim(a_n^2 + 1) = \lim a_n^2 + \lim 1 = (\lim a_n)^2 + 1$ e a outra parte trata-se de uma substituição do valor x pelos limites de a_n e a_{n+1}.

c) Sim, é verdade. A sequência é convergente e converge para 1, pois a sequência converge para o valor do $\lim a_n$.

Categoria 5

a) Dada a sequência $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2 + 1}{2}, \forall n \geqslant 1$, temos;

Para $n = 1, a_2 = \dfrac{a_1^2 + 1}{2}$, ou seja, $a_2 = \dfrac{5}{2}$. Temos $a_2 > a_1$.

H: Consideremos que para $n = k \in \mathbb{N}, k \geqslant 1$.

$$a_k > a_{k-1}$$

Tomemos $n = k + 1$, então $a_{k+1} = \dfrac{(a_k)^2 + 1}{2}$

b) Não. Como a_n é estritamente crescente com $a_n > 1$, temos que a_n é divergente.

c) não. Como $a_n > 1$, para todo n natural, temos que limite de a_n, quando n tende o infinito é $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Categoria 6

a)

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_{n+1} = \frac{1}{2}({a_n}^2 + 1) \ \forall n \geqslant 1 \end{cases}$$

1) $a_1 = 2$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + 1) = \frac{1}{2}(4+1) = \frac{5}{2} \Rightarrow a_2 > a_1$$

2) Seja $k \geqslant 1$.

Suponhamos que $a_{k+1} > a_k$.

Então, $\frac{1}{2}(a_k^2 + 1) > \frac{1}{2}(a_{k-1}^2 + 1)$

Logo, $\frac{a_k^2 + 1}{2} > \frac{a_{k-1}^2 + 1}{2} \Rightarrow a_k^2 > a_{k-1}^2$

Como $\forall k, a_k > 0$, então $a_k > a_{k-1}$

Por 1), 2) e o Princípio da Indução, temos que (a_n) é estritamente crescente.

b) Não. O argumento está incorreto porque ele supôs que o limite da subsequência a_{n+1} é igual o limite da sequência a_n, e isso só ocorrerá se a sequência (a_n) for convergente, e isso não podemos afirmar pois não temos dados suficientes.

c) Não. Como a_n é estritamente crescente e $a_n > 2, \forall n > 1$, pois o primeiro termo da sequência vale 2 e (a_n) é estritamente crescente, então o limite de a_n é maior que 2. Logo, 1 não pode ser o limite de a_n

Categoria 7

a) $a_1 = 2$

$n = 1 \rightarrow a_2 = \frac{1}{2}(a_1^2 + 1) = \frac{1}{2}(2^2 + 1) = \frac{5}{2}$ 2,5

$n = 2 \rightarrow a_3 = \frac{1}{2}(a_2^2 + 1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{29}{4} = \frac{29}{8}$ 3,6

$n = 3 \rightarrow$

.

.

.

b) não. não podemos substituir $(\lim a_n)$ como se fosse um número. A sequência não é limitada logo é divergente

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty$$

c) não

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{a_n^2}{2} + \dfrac{1}{2}\right) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = +\infty$ divergente monótona crescente $\searrow$

a) $a_1 = 2$

$n = 1 \rightarrow a_2 = \dfrac{5}{2}$

n=2 $\rightarrow a_3 = \dfrac{29}{8}$ ok! é crescente

Supor a_n é crescente.

Verificar $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(a_n^2 + 1) \quad \forall n \geqslant 1$

Como a_{n+1} é uma sequência não limitada, crescente e divergente

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \infty \Rightarrow a_n$ é estritamente crescente

Análise do Item a da Questão 5

Análise da Categoria 1

Este candidato demonstra ser um bom manipulador de símbolos, de contas, porém comete um erro decisivo: considera que $a_k = \dfrac{1}{2}(a_k^2 + 1)$. Este equívoco leva-o a concluir que $a_{k-1} < a_k$, o que havia sido admitido como hipótese de indução.

Já no fim de suas contas, escreve que $a_{k-1}^2 < a_k^2 \Rightarrow \sqrt{a_{k-1}^2} < \sqrt{a_k^2} \Rightarrow a_{k-1} < a_k$. Outro erro, pois se $a_{k-1} = 1$ e $a_k = -2$, então seu argumento é falso.

Sua resposta pode ser vista como uma tentativa de produção sintática.

Análise da Categoria 2

Apresenta muitas contas e poucas ideias, cometendo alguns erros. Assim como no padrão anterior desconsidera o fato de que $x^2 < y^2$ implica em $x < y$ apenas quando x e y são números positivos.

Além disso, a estratégia escolhida para tentar resolver o problema conduz a uma propriedade já garantida pela hipótese de indução, isto é, sua hipótese é a de que $a_{n-1} < a_n < a_{n+1}$ e, após alguns cálculos, conclui que $a_{n-2} < a_{n-1} < a_n$. O erro nesta estratégia se dá porque parte das desigualdades $\frac{1}{2}(a_{n-1}^2 + 1) < \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$ e as simplifica, enquanto deveria ter partido de $a_{n-1} < a_n$ manipulando operações até chegar nas desigualdades $\frac{1}{2}(a_{n-1}^2 + 1) < \frac{1}{2}(a_n^2 + 1)$, que é o mesmo que $a_n < a_{n+1}$.

Sua resposta é mais uma tentativa de produção sintática mal sucedida.

Análise da Categoria 3

Sua resposta está incompleta, verifica apenas que $a_1 = 2$.

Análise da Categoria 4

Sua resposta está em branco.

Análise da Categoria 5

Verifica apenas que, de fato, $a_1 < a_2$.

Análise da Categoria 6

Manipula corretamente as contas durante a prova por indução, lembra de enfatizar que pelo fato de $a_k > 0, \forall k$, então $a_k^2 > a_{k-1}^2$ implica em $a_k > a_{k-1}$, procede de maneira sintática.

Outro candidato a cometer o mesmo tipo de erro: ao invés de provar que se $a_k > a_{k-1}$, então $a_{k+1} > a_k$, prova exatamente o contrário.

Análise da Categoria 7

Limita-se a verificar que $a_1 < a_2 < a_3$, não exibe outros argumentos.

Análise do Item b da Questão 5

Análise da Categoria 1

Exibe razoável conhecimento acerca das propriedades operatórias de limites. Interpreta, a partir da definição formal de sequências convergentes, que se $\lim a_n = x$, então $\lim a_{n+1} = x$.

No fim de sua resposta, comenta que todas as contas feitas e justificadas, só foram possíveis de serem realizadas porque partimos da hipótese de que existe o limite da sequência a_n, enfatiza que tal valor não é o limite da sequência a_n, mas sim o candidato a limite.

Percebemos, ao argumentar baseado na definição e nas propriedades de limite, um tipo de produção sintática. Quando se preocupou em exclarecer que tais argumentos só valem garantida a convergência da sequência, detectamos um tipo de produção semântica.

Análise da Categoria 2

Garante que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$ é falso, porém não justifica este argumento. Não podemos concluir se já sabe que a_n diverge e, por este motivo, é falso escrever que $\lim a_{n+1} = \lim a_n$, ou então se, de fato, não compreende o conceito de sequências convergentes. Podemos garantir que sua resposta foi bastante superficial e sem justificativa alguma, sendo uma mera reprodução do que foi enunciado.

A resposta dada, por este candidato, não torna possível qualificá-la quanto a nenhum tipo de produção, nem sintática, nem semântica.

Análise da Categoria 3

Este candidato parece-nos desconhecer uma das propriedades mais elementares sobre limites: $\lim c \cdot a_n = c \cdot \lim a_n$.

Parece-nos nem suspeitar que a questão propõe que se justifique porque estas contas podem ou não serem realizadas.

Análise da Categoria 4

Em sua resposta, garante, sem quaisquer justificativas, que a sequência a_n é convergente. Vale ressaltar que, até este momento, só nos foi pedido que provássemos que a_n é estritamente crescente, e isto não basta para concluirmos que a_n converge.

Além de supor erradamente a convergência de a_n, afirma, sem maiores detalhes, que "como a sequência é convergente os $\lim a_n$ e $\lim a_{n+1}$ são iguais e podem ser chamados de x".

Apesar de toda esta despreocupação em não justificar aspectos importantes sobre a sequência a_n, descreve que todas as contas, chamadas por ele de "trechos omitidos" referencem-se a propriedades de limites.

Análise da Categoria 5

Sua resposta foi produzida semanticamente a partir de características da sequência a_n e de algum entendimento que acredita deter sobre sequências.

Embora correta, encontra-se baseada em argumentos inconsistentes. Garante que a_n por ser estritamente crescente e maior que 1 deve ser convergente. Vejamos um simples contra-exemplo: tome $x_n = 3 - \dfrac{1}{n}$. Esta sequência é estritamente crescente, e verifica-se facilmente que é limitada, por exemplo por 3, logo deve convergir.

Seus argumentos, sugere-nos que há, possivelmente, um potencial fator de conflito (concebe que toda sequência crescente diverge). A porção da imagem de conceito evocada para justificar sua resposta encontra-se em conflito com o teorema (toda sequência monótona limita é convergente) que caracteriza sequências convergentes.

Análise da Categoria 6

Este candidato descreve, com precisão, que as operações feitas pelo enunciado só são possíveis de serem realizadas quando a sequência a_n for convergente. Acreditamos que sua resposta esteja respaldada em aspectos muito mais semânticos que sintáticos, pois necessita recorrer a sua compreensão sobre o conceito de sequências (definições e propriedades).

Termina sua resposta de maneira equivocada, afirmando que não há dados suficientes para determinar se a sequência é ou não convergente. Note que, neste momento, já é sabido que a_n é monótona, faltando detectar se a_n é ou não limitada para estabelecermos ou não a sua convergência.

Em seu discurso não destaca que a convergência depende do fato de a_n ser ou não limitada. Isto não é o suficiente para garantirmos que desconhece o teorema que caracteriza as sequências convergentes, mas já acena para um possível descuido durante a produção de sua resposta.

Análise da Categoria 7

Este candidato responde corretamente à questão, porem exibe um argumento fundamental sem justificá-lo: afirma que a_n é divergente.

Apesar desta falta de rigor em não demonstrar porque a_n diverge, cita que a sequência a_n não é limitada e por isto diverge. Note que basea seus argumentos no conhecimento que tem sobre o conceito de sequências, não descreve definições, não manipula símbolos, realiza uma produção semântica.

Supomos que, talvez, não ter justificado porque a_n é ilimitada, deve-se ao fato de não ter recursos sintáticos para realizar tal tarefa, tendo em vista que esta subquestão requer considerável talento sintático para poder ser efetuada.

Análise do Item c da Questão 5

Análise da Categoria 1

Observando o item anterior, e agora este item, percebemos que lá naquele momento, já sabia que todas as contas só seriam possíveis se garantíssimos a_n limitada. Agora, neste momento, escreve, em sua última linha, que a_n só teria limite se fosse, por hipótese, limitada também. Note que durante esta resposta, não confronta o fato de $a_1 = 2$ e a_n ser estritamente crescente para refutar que a_n diverge. Parece-nos que escreve o que acha que a banca queria ler.

Sua resposta exibe argumentos idependentes de definições e de quaisquer manipulações algébricas, sendo um tipo de produção semântica.

Análise da Categoria 2

Sua resposta é coerente, apela para a lógica de termos $a_1 = 2$ e a_n estritamente crescente, e conclui que a_n deve divergir. Sua resposta usa argumentos semânticos.

Confrontando sua respostas em b e em c, suspeitamos que garante $\lim a_{n+1} \neq \lim a_n$, pois já teria concluído que a_n é divergente.

Análise da Categoria 3

Sua resposta, produzida semanticamente, está justificada corretamente, porém de uma maneira bastante confusa. Basicamente, apoia-se no fato de $a_1 = 2$ e de a_n ser estritamente crescente.

Análise da Categoria 4

Afirma que a_n de fato é convergente e converge para 1. Esta resposta pode ser reflexo de não ter realizado conta alguma no item a, onde se propõe provar, a partir do fato de $a_1 = 2$, que a sequência a_n é estritamente convergente. Como parece nem ter refletido sobre o item a, não podemos dizer que há um fator de conflito entre sua imagem de conceito e a definição de conceito de sequências convergentes. Podemos afirmar que sua resposta está errada, e sua justificativa é totalmente inconsistente, pois escreve que "A sequência converge e converge para 1, pois a sequência converge para o valor do $\lim a_n$".

Análise da Categoria 5

Este candidato fornece os mesmos argumentos dados como resposta ao item b. Sua resposta possui contra-exemplo (veja a análise do item b padrão 05), e basea-se em aspectos nada genéricos. É uma produção semântica, pois escreve algo proveniente de sua compreensão sobre sequências convergentes.

Análise da Categoria 6

Sua resposta obedece os argumentos lógicos presentes, justifica que a_n diverge, pois a_n é estritamente crescente, com $a_1 = 2$. É uma produção semântica, pois parte da interpretação que deu aos dados da questão.

Análise da Categoria 7

Sua resposta está correta, porém origina-se de argumentos inconsistentes. Descreve, inicialmente, que a_n é divergente monótona crescente. Logo após esta afirmação, começa a reescrever o item a e termina afirmando que a_{n+1} é uma sequência não limitada, crescente e divergente. Note que não exibe quaisquer argumentos que possam garantir que a_n é limitada.

Termina escrevendo que a_{n+1} diverge e isto implica em a_n ser estritamente crescente.

Vale ressaltar que este candidato já havia, no item b, garantido que a_n era ilimitada, mesmo sem exibir qualquer justificativa para isso.

Iremos considerar que esta é mais uma resposta produzida semanticamente, pelo fato de procurar manipular as qualidades que a_n possui e que também não possui.

7.2 Questão 6

a) Enuncie a definição de convergência de sequências de números reais e interprete esta definição geometricamente.

b) Considere $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais.

Suponha que exista um $x_0 \in \mathbb{R}$ com a seguinte propriedade: $\forall\ \epsilon > 0$ existem infinitos índices n tais que $|x_n - x_0| < \epsilon$. Podemos afirmar que x_0 é o limite de (x_n)?

Categoria 1

a) Uma sequência de números reais converge quando $\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,$ tal que $\exists x_0 \in X,\ |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \epsilon$. (para $x_n \in X$).

b) Sim, pois

$\forall\epsilon > 0,\ |x_n - x_0| < \epsilon$

$x_0 - \epsilon < x_n < x_0 + \epsilon$

Por exemplo: $n = 0$ e $n = 5$ então:

$x_0 - \epsilon < x_0 < x_0 + \epsilon$ $\qquad$ $x_0 - \epsilon < x_5 < x_0 + \epsilon$

$\epsilon > 0$ $\qquad$ $|x_5 - x_0| < \epsilon$

Independente do valor do índice, x_0 será o valor do limite.

Categoria 2

a) Se uma sequência de números reais é limitada, então ela converge.

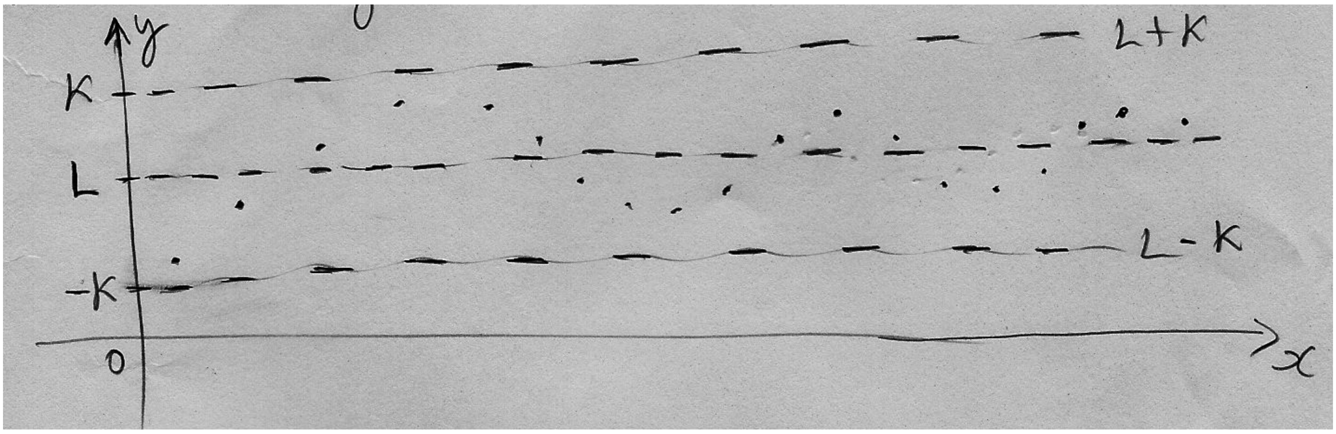


Figura 7.1: Figura apresentada pelo padrão 2

b) Em branco.

Categoria 3

a) Seja x_n uma sequência de números reais com $n \in \mathbb{N}$.

x_n é dita convergente quando $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, sendo a o ponto de acumulação.

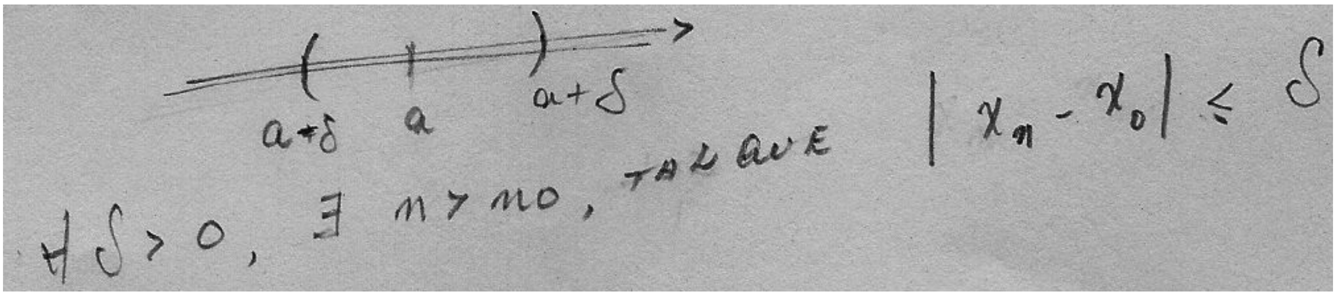
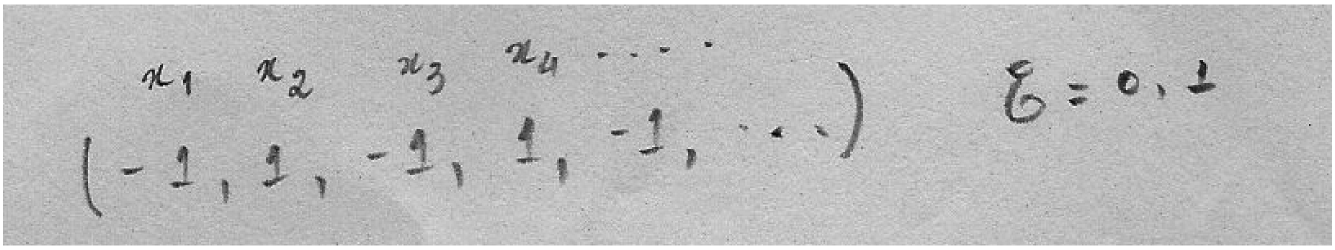


Figura 7.2: Figura relativa ao padrão 3

b) Falso.



$x_4 = 1$

$$\Rightarrow x_4 - x_3 < 0,1 \to 1 - (-1) < 0,1 \to 2 < 0,1 \quad \text{FALSO.}$$

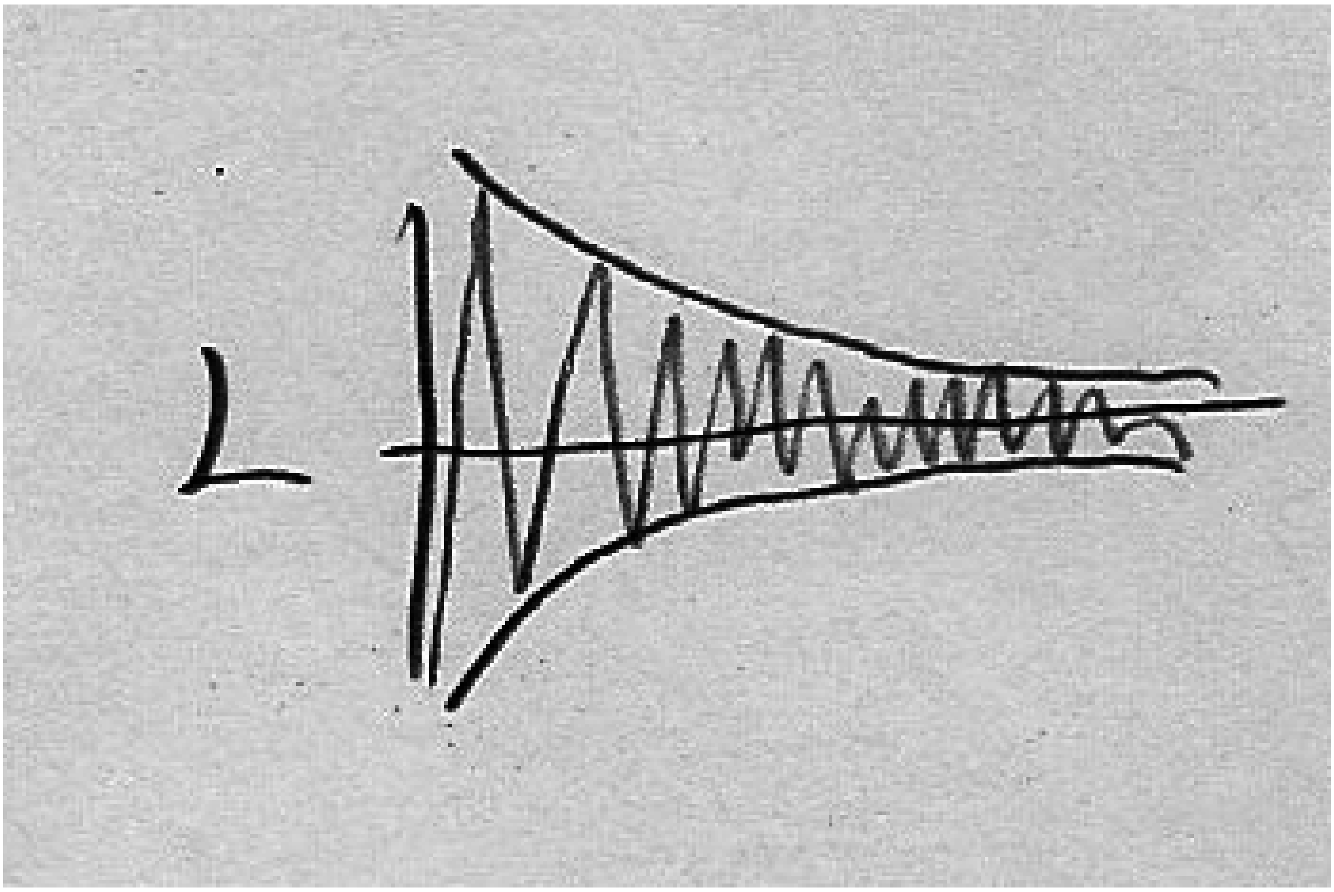
$x_3 = -1$

Categoria 4

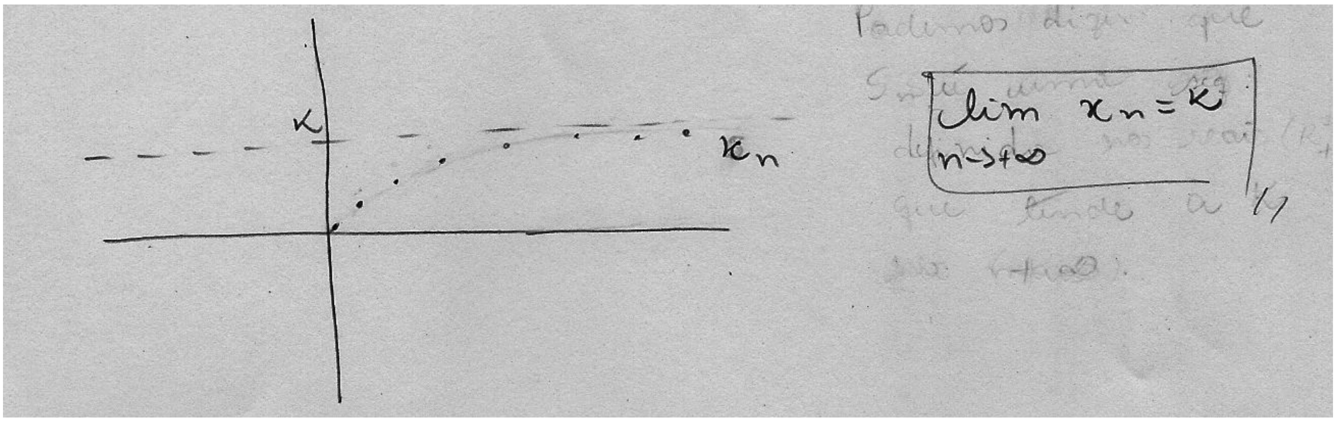
a) Dizemos que (x_n) converge para L se, dado $\epsilon > 0, \forall x_n > x_0 \ |x_n - L| < \epsilon$

Geometricamente, isso significa que quanto maior for n, mais próximo de L estará x_n:

Categoria 5



a) Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais convergente se para n tendendo ao $+\infty$ temos os elementos desta sequência tendendo a um valor fixo.



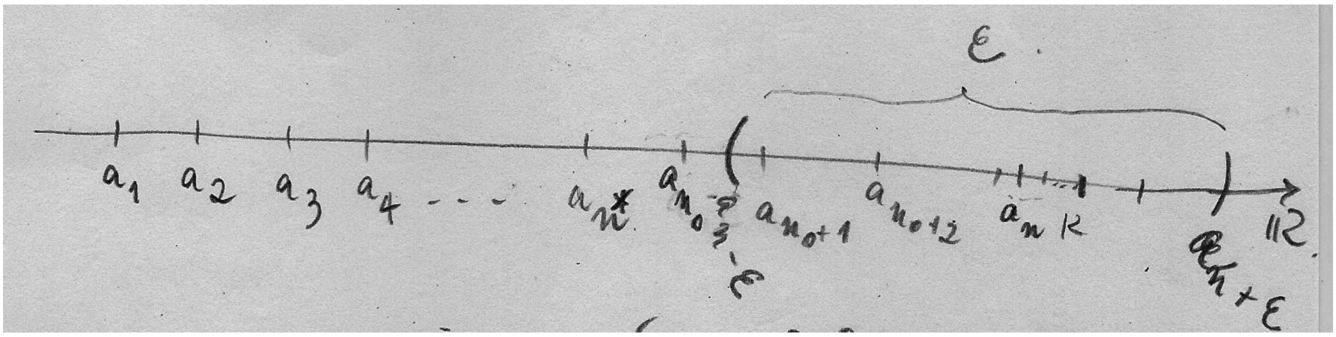
b) Sim, pois pela definição de seq. temos que neste caso nosso valor de tendência é x_0 onde para infinitos elementos da seq. com índice n temos uma diferença bem próxima de zero do valor x_0.

$$\text{Logo} \lim x_n = x_0$$

Categoria 6

a) Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência. Dizemos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a um valor $k \in \mathbb{R}$, se $\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $n > n_0 \Rightarrow |a_n - k| < \epsilon \Leftrightarrow \lim a_n = k$.

Isso significa, na reta, que qualquer raio $\epsilon > 0$ que eu tome, haverá um índice $n_0 \in \mathbb{N}$, a partir do qual os valores de a_n ficam a uma distância de k, cada vez menor que ϵ.



b) Sim. Basta aplicar a própria definição de limite de uma sequência. Quando, $\forall\epsilon > 0$, existem infinitos índices n, onde $|x_n - x_0| < \epsilon$, significa dizer que a partir de um dado índice, todos os outros infinitos índices fazem com que x_n se aproxime de x_0 por uma distância menor que o $\epsilon > 0$ dado.

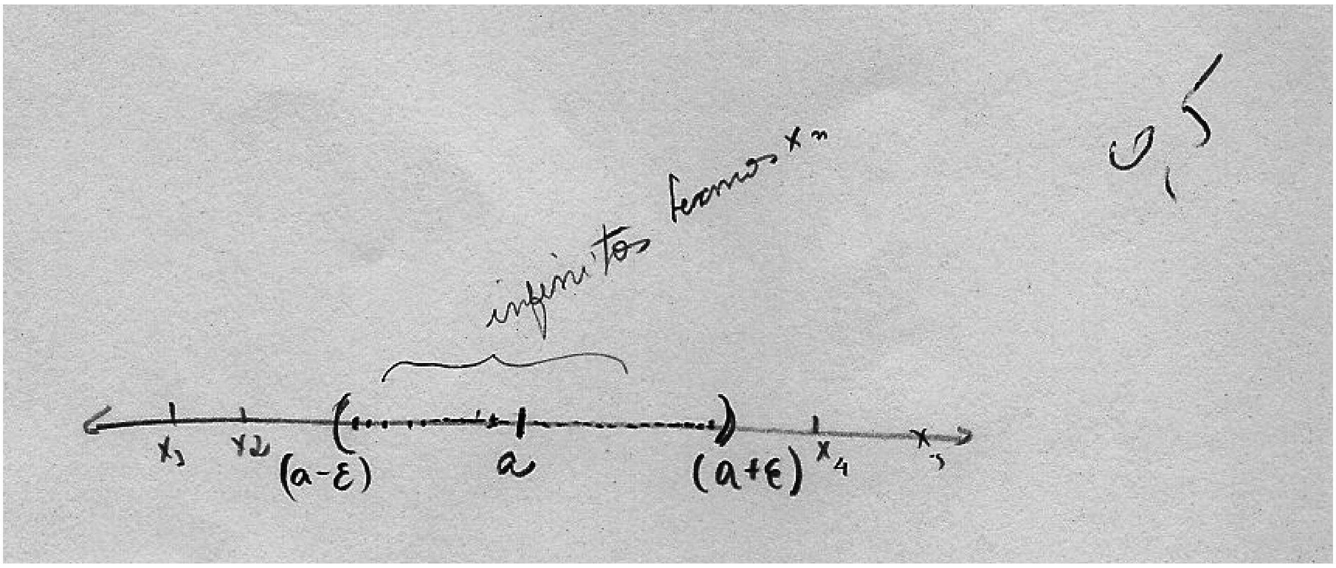
Categoria 7

a) Seja x_n um sequência convergente, isto é $\lim\limits_{n\to+\infty} = a$.

Então $\forall\epsilon > 0$, $\exists n_0, n \in \mathbb{N}$; $n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

b) Não podemos afirmar que $\lim\limits_{n\to+\infty} = x_0$ pois para que isso aconteça é necessário que infinitos termos de x_n estejam no intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$ e apenas uma quantidade finita de termos esteja "fora"desse intervalo, isto, existam finitos índices n tais que $|x_n - x_0| > \epsilon$, o que não foi abordado no enunciado.

Exemplo: $x_n = \text{sen} x$. Seja $x_0 = 0$



$\forall \epsilon > 0$, existem inifnitos índices n tais que $|x_n| < \epsilon$, mas também existem infinitos índices n tais que $|x_n| > \epsilon$.

Categoria 8

a) Seja $x_k = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\, n \in \mathbb{N}$ uma sequência de números reais. Diremos que x_k converge para x_0 quando $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \epsilon$.

b) Sim, x_0 é um ponto de acumulação, pois existem infinitos termos da sequência x_n perto dele. Como $|x_n - x_0| < \epsilon$ temos que x_n também é um ponto de aderência. Logo a sequência x_n converge para x_0.

Análise do Item a da Questão 6

Análise da Categoria 1

Tentou desenvolver sintaticamente a definição de convergência, porém errou misturando os conceitos de convergência de sequência com o de funções contínuas. Errando a definição e não fornecendo a interpretação geométrica para sequências convergentes, este candidato nos sugere que não se apropriou plenamente de tal conceito. Parece-nos que descreveu ou esteve muito mais próximo de descrever o critério sequencial para funções contínuas. Ao omitir qualquer representação geométrica para o conceito em questão, nos acena para uma possível deficiência relativa ao conceito de convergência.

Análise da Categoria 2

Este candidato garante um resultado falso: toda sequência limitada é convergente. Isto reflete que desconhece alguns exemplos triviais de sequências limitadas que divergem ([1]). Além dessa afirmação equivocada, é possivel crer, de acordo com o seu gráfico, que possui certo conhecimento, ainda que intuitivo, do conceito avaliado (convergência de sequências). Descreve que uma sequência, sendo limitada, deve oscilar sempre "em torno"de um valor pré-fixado. A imagem de conceito apresentada sugere um fator de conflito entre a definição de sequência limitada e a de sequência monótona. Note que seus argumentos foram muito mais semânticos do que sintáticos, isto porque foram baseados na compreensão que tem sobre o conceito de convergência.

Análise da Categoria 3

Antes de analisarmos este padrão, é oportuno destacar o seguinte: escrever que $x_n \to a$ é o mesmo que escrever que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, ou seja, nenhum conhecimento prévio sobre convergência foi revelado, apenas a apropriação de uma outra notação para descrever o mesmo conceito.

Sobre a resposta dada por este candidato, sintaticamente afirma que convergir é o mesmo que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, e isto não afere nenhum conceito novo, como acabamos de citar, apenas é uma nova nomenclatura para a mesma definição de conceito. Em sua resposta, ainda destaca o fato de que o número a deve ser ponto de acumulação, o que contraria, por exemplo, a família de sequências constantes, que convergem para o próprio valor a e atingem este valor. Não expõe qualquer imagem de conceito sobre convergência, consequentemente não apresenta nenhuma interpretação geométrica para convergência de sequência.

[1] Ver discussão da Questão 02 item c

Análise da Categoria 4

Procurou dar uma resposta sintática baseada na definição estenografada de convergência e, em seguida, dar uma resposta baseada no entendimento que tem sobre o conceito em discussão.

Na primeira parte de sua resposta, não descreve com exatidão o conceito de sequência convergente, apresenta um padrão de resposta incoerente e sem muito sentido lógico, escreve que x_n deve ser maior que x_0, contudo não especifica o que é x_0, se perde bastante neste momento em sua resposta. Em um segundo momento pensávamos que o candidato nos revelaria algum conhecimento pessoal acerca do conceito, isto é, sua visão semântica sobre a convergência. Frustradamente, repete um discursso ensaiado que se resume a leitura da notação $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$.

Análise da Categoria 5

Mais um candidato que se limita a descrever, com suas palavras, o significado da expressão $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$. Não considero esta descrição dada como uma resposta satisfatória para a definição de sequência convergente. Já na parte final de sua resposta, seus desenhos revelam-nos algum entendimento pessoal que possui sobre o conceito de convergência: no primeiro, descreve uma sequência não monótona e convergente, o que nos leva a suspeitar que entende que convergência não está relacionada a monotonicidade e sim a noção de proximidade; no segundo, descreve uma sequência estritamente crescente que converge por ser limitada. Sua imagem acerca do conceito de convergência se mostrou pluralizada e com bons exemplos, mesmo apresentando uma definição pouco esclarecedora e tímida. Este candidato forneceu os dois tipos de produção de respostas: o sintático e o semântico.

Análise da Categoria 6

Este candidato atingiu plenamente o que foi proposto por este item: ora descreveu precisamente o conceito de sequência convergente (produção sintática), ora forneceu convincentes argumentos a respeito da interpretação geométrica de sequência convergente (produção semântica). Além de apresentar boas justificativas para o conceito de convergência, ainda ilustrou com um didático desenho o conceito em questão. Boa definição de conceito pessoal e boa imagem de conceito, ambas coerentes e bem conectadas.

Análise da Categoria 7 Limitou-se a fornecer a definição de sequência convergente. Preciso, simples e correto. É um exemplo de resposta produzida sintaticamente.

Análise da Categoria 8

Outro candidato que se limitou a dar a resposta correta de modo exclusivamente sintático. Podemos destacar que a notação usada para representar a sequência x_k está bastante inadequada.

Análise do Item b da Questão 6

Análise da Categoria 1

Em seu item a, este candidato garantiu que a definição de convergência deveria ser associada ao conceito de função. Já neste novo item, em momento algum ele lança mão de sua equivocada definição de convergência dada inicialmente. Procurou manipular a desigualdade modular $|x_n - x_0| < \epsilon$, revelando uma resposta absolutamente sintática, sem recorrer em nenhum momento a um possível entendimento que possa ter (ou conhecer) a respeito de sequências convergentes. Acena para um total desconhecimento do conceito de convergência.

Análise da Categoria 2

Resposta em branco.

Análise da Categoria 3

Sua resposta revela uma ótima resposta sintática, mesmo estando mal justificada. Seu contra-exemplo garante que a sequência $x_n = (-1)^n$ satisfaz o enunciado da questão, porém diverge. Ilustra o intervalo $(a - \epsilon, a + \epsilon)$, mas não menciona que o número a é candidato ao limite da sequência x_n. Em um segundo momento, escreve que $|x_n - x_0| \leqslant \delta$, e não especifica, outra vez o que é x_0. Apesar desta falta de rigor, sua resposta mostra que, considerando $x_0 = -1$, os termos de índices pares não convergem para x_0, mesmo tendo inifinitos termos de x_n no intervalo $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$. Vale lembrar que este candidato, no item a, se limitou a escrever com outra notação o conceito de sequência convergente. (produção sintática - boa pra dar contra-exemplos).

Análise da Categoria 4

Resposta em branco.

Análise da Categoria 5

Sua resposta a, nos levou a suspeitar que possuía uma razoável imagem de conceito relativa à convergência, contudo, agora neste item, sua resposta reproduziu+ com outras palavras o que foi enunciado e afirmar, erradamente, que a questão está correta. Nenhum tipo de produção pode ser creditada por este candidato neste item, pois se limitou a escrever com palavras que $\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$.

Análise da Categoria 6

Este candidato forneceu a melhor resposta a dentre todos os candidatos analisados. Esperávamos que sua resposta b estivesse pautada em bons exemplos e em algumas justificativas plausíveis de acordo com o nível de sua resposta anterior. Não foi capaz de prover um contra-exemplo à questão, errou não conseguiu enxergar as possíveis variações que esta definição traz. Sua resposta tem o caráter semântico, pois fala com propriedade a respeito do enunciado descrito, garante que a partir de um certo momento, todos os outros termos se aproximam de x_0. Suas respostam sinalizam para uma excelente definição de conceito e para uma definiciente imagem de conceito, tendo em vista que não considerou analisar as sequências monótonas em seu argumento.

Análise da Categoria 7 Ótima resposta produzida semanticamente, seu contra-exemplo é claro e sua justificativa é bem precisa.

Análise da Categoria 8

O caráter de sua resposta é predominantemente semântico, afirma propriedades sobre ponto de acumulação, e sobre ponto de aderência (este último erradamente). Justifica-se de uma maneira ilógica e incoerente, afirmando algo que não é possível garantir a partir dos dados fornecidos.