IM/UFRJ

REVISITANDO EUCLIDES PARA O ENSINO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA PARA AS LICENCIATURAS

Marli Duffles Donato Moreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadores: Gérard Grimberg
João Bosco Pitombeira

Rio de Janeiro
Dezembro de 2010

REVISITANDO EUCLIDES PARA O ENSINO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA PARA AS LICENCIATURAS

Marli Duffles Donato Moreira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA (IM) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Gérard Grimberg, D.Sc.

Prof. João Bosco Pitombeira, Ph.D.

Prof^{a}. Lilian Nasser, Ph.D.

Prof. Gert Schubring, D.Sc.

Prof^{a}. Estela Kaufman Fainguelernt, D.Sc.

Prof^{a}. Flávia dos Santos Soares, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2010

Moreira, Marli Duffles Donato

Revisitando Euclides para o Ensino de Áreas: Uma Proposta para as Licenciaturas/Marli Duffles Donato Moreira. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2010.

X, 165 p. 29, 7cm.

Orientadores: Gérard Grimberg

João Bosco Pitombeira

Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM/Programa de Ensino de Matemática, 2010.

Referências Bibliográficas: p. **??** – **??**.

1. Geometria Euclidiana. 2. Área. 3. Formação de Professores. 4. Pensamento Dedutivo. I. Grimberg, Gérard *et al.*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM, Programa de Ensino de Matemática. III. Título.

Aos meus alunos, de todas as horas, companheiros nas veredas do saber.

Agradecimentos

Agradecer é antes de tudo um ato de reconhecimento! Reconhecimento de quanto do 'outro' há em mim. De outra forma, de como a minha vida revela marcas das pessoas com as quais caminhei, cresci, compartilhei experiências, sonhos, avanços e recuos, risos e lágrimas... Reconhecer que sem elas não estaria aqui. Esta é uma tarefa difícil. Não poderia listar aqui todos os nomes que marcam, para sempre, minha biografia, inclusive aqueles dos quais nem me recordo mais, mas que estão presentes em mim e aos quais sou muito grata. Peço, antecipadamente, desculpas pelas omissões.

Agradeço:

A Deus Pai, Filho e Espírito Santo razão primeira e última de minha existência;

A meus pais pelo dom da vida, especialmente a meu pai Jorge Henrique, meu primeiro amor;

A meu marido Julio Cezar, pela comunhão em todos os momentos;

A meus filhos Juliana, pela presença e torcida, Marcelo, pela ajuda indispensável nos assuntos computacionais, Gabriel, pelos beijos diários de incentivo, Eduardo, pelos lanches nas madrugadas;

Ao professor Gérard, orientador e primeiro a me acompanhar nesta jornada, pela disponibilidade, pelo incentivo e pelo zelo em conduzir-me nesta pesquisa;

Ao professor Pitombeira, co-orientador e companheiro de admiração dos Elementos de Euclides, pela colaboração incansável de todas as horas;

À professora Estela, mestra desde os tempos da escola básica;

Às professoras Lilian Nasser e Flávia Soares pela colaboração, disponibilidade, atenção e carinho.

Ao professor Gert Schubring, pela participação na banca examinadora.

Ao professor Victor, por todas as contribuições diretas e indiretas na realização deste trabalho;

A todos os meus professores, de ontem e de sempre, especialmente à querida professora Franca Cohen Gottlieb, exemplo de amor e dedicação aos alunos.

Aos colegas de Mestrado, pelo convívio e amizade;

Aos licenciandos participantes desta pesquisa, pela alegria e disponibilidade, pela contribuição nesta pesquisa;

Aos funcionários da secretaria do PEMAT, pelo cuidado em todas as etapas deste processo.

Para concluir, agradeço a meus alunos, a todos e a cada um que compartilhou comigo a alegria do aprender e os desafios do saber.

Muito obrigada a todos!

Resumo da Dissertação apresentada ao IM/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre

REVISITANDO EUCLIDES PARA O ENSINO DE ÁREAS: UMA PROPOSTA PARA AS LICENCIATURAS

Marli Duffles Donato Moreira

Dezembro/2010

Orientadores: Gérard Grimberg
João Bosco Pitombeira

Programa: Ensino de Matemática

Nesta pesquisa apresentamos uma proposta de intervenção didática para o ensino do conceito de área a partir da abordagem presente nos Elementos de Euclides. Este trabalho visa contribuir com a formação inicial de professores de Matemática no que diz respeito ao ensino de geometria, particularmente o conceito de área. Realizamos uma experiência didática com alunos da Licenciatura em Matemática da UFRJ. As análises foram feitas a partir dos resultados obtidos por estes alunos nas oficinas desenvolvidas na própria universidade. Nossa pesquisa fundamentou-se no Modelo de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele e no Modelo de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. Procuramos verificar o desenvolvimento do pensamento geométrico alcançado por nossos alunos após a experiência didática proposta. Os resultados alcançados apontam no sentido de uma contribuição positiva da abordagem didática experimentada.

Abstract of Dissertation presented to IM/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master

REVISITING EUCLID FOR THE TEACHING OF AREAS: A PROPOSAL FOR TEACHER EDUCATION

Marli Duffles Donato Moreira

December/2010

Advisors: Gérard Grimberg
João Bosco Pitombeira

Department: Mathematics Teaching

In this research we propose a didactic intervention for teaching the concept of area following the approach taken by Euclid' Elements. This work aims at contributing to the training of mathematics teachers regarding the teaching of geometry, particularly the concept of area. We conducted a teaching experience with college students majoring in Mathematics, UFRJ. Analyses were made from the results obtained by these students in workshops conducted at this university. Our research is based on the van Hiele level theory and the Model of register of semiotic representation of Raymond Duval. We seek to monitor the development of geometrical thinking achieved by our students after the teaching experience proposal. The results point towards a positive contribution to the didactic approach experienced.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

1.1 O Problema

Nas últimas décadas, o ensino de Geometria, no Brasil e em diversos países, tem sido objeto de preocupação de professores e pesquisadores matemáticos (Pavanello, 1989; Miorim, A. M., Miguel, A. e Fiorentini, D., 1993). A Geometria, durante séculos, ocupou um lugar de destaque na formação intelectual e no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos indivíduos (Lorenzato, S. e Vila, M. C., 1993). No entanto, a partir de meados do século XX, o ensino da Matemática passa por modificações procurando ajustar-se às novas concepções e formalizações matemáticas, nos campos da Álgebra, com as estruturas algébricas, e Análise, com os recentes desenvolvimentos teóricos da Matemática dos séculos XIX e XX (D'Ambrósio, 1987; Bürigo, 1989; Vitti, 1998; Soares, 2001). Este movimento, chamado de Matemática Moderna, propunha uma ênfase nas formalizações e nas estruturas matemáticas. Segundo Soares (2001), o Movimento da Matemática Moderna no Brasil é fruto do movimento de modernização do ensino de Matemática que teve início no final do século XIX e início do século XX, na Europa, liderado pelo matemático Félix Klein.

> *"Atrás da bandeira de renovação do ensino estavam alguns ideais do Movimento de reforma que podiam ser melhor identificados nos trabalhos de Bourbaki. O estudo das estruturas e da teoria dos conjuntos seria um dos pontos centrais das mudanças."*

(Soares, 2001)

Estas mudanças favoreceram, segundo Soares (2001), a um abandono do ensino da Geometria por parte dos professores, visto que não tiveram uma preparação adequada no sentido das transformações curriculares apregoadas. Além disso, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação de 1971 permitia, às escolas, liberdade de escolha sobre os programas das diferentes disciplinas escolares. Desta forma, muitos professores deixaram de incluir a Geometria em suas programações de ensino.

As edições dos livros didáticos, principais referenciais pedagógicos dos professores, acompanharam tal tendência, utilizando-se prodigamente da linguagem simbólica da teoria dos conjuntos e do formalismo das estruturas algébricas. O ensino da Geometria passa, então, por mudanças e as figuras são, agora, apresentadas como conjuntos de pontos e os teoremas como proposições sem demonstração. O enfoque principal passa a ser o da geometria das transformações. A Álgebra assume uma posição de destaque no ensino e a Geometria fica, assim, relegada a um segundo plano.

A visão integrada dos diversos campos da Matemática é prejudicada. A formação dos professores também não é satisfatória para os desafios dos novos tempos. O resultado destas mudanças programáticas é um abandono gradual e progressivo do ensino da Geometria. Este quadro se agrava, bastante, no decorrer do século XX .

> *"As tentativas de axiomatizar rigorosamento a Geometria eram (e ainda são!) difíceis para os próprios professores. O resultado é que, no cumprimento dos programas, a Geometria ia sendo relegada para o final do ano e acabava não sendo ensinada devidamente. Desde então, depois de muitas outras reformas do ensino que têm sido implementadas até os dias de hoje, o ensino da Geometria nunca mais foi contemplado com a atenção que deve receber. Do pretenso rigor que os reformistas de 50 anos atrás recomendavam, o que ainda resta hoje em vários livros é um excesso de linguagem e notação de conjuntos."*

(Ávila, G., 2010)

Há, atualmente em curso, ainda que incipiente, um movimento educacional de resgate da importância da Geometria no ensino. Várias pesquisas (Gouvêa, 1998; Maioli, 2002; Facco, 2003; Buratto, 2006) têm sido desenvolvidas sobre o tema nos últimos anos, com a proposta de revalorizar e reafirmar o papel preponderante da Geometria na formação integral do aluno. A presente pesquisa visa contribuir para este esforço de retomada da importância da Geometria na educação. É, também, nosso objetivo colaborar com a formação dos professores de matemática. Sabemos que as dificuldades encontradas no ensino e a aprendizagem da Geometria decorrem de diversos fatores. Um deles, de extrema relevância, refere-se à formação dos professores.

> *"Entre os obstáculos que o Brasil tem enfrentado em relação ao ensino de Matemática, aponta-se a falta de uma formação profissional qualificada, as restrições ligadas às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais efetivas e as interpretações equivocadas de concepções pedagógicas.*
>
> *...*
>
> *A formação dos professores, por exemplo, tanto a inicial quanto a continuada, pouco tem contribuído para qualificá-los para o exercício da docência."*
>
> (PCNs, 1998)

Muitos professores afirmam não se sentirem seguros na apresentação dos conceitos geométricos para seus alunos e mesmo não terem aprendido grande parte do conteúdo que deve ser ensinado. Isto faz com que muitos deles adiem os tópicos geométricos para serem apresentados no final do ano letivo e, na maior parte das vezes, alegam não terem tido tempo para ensinar tais conteúdos. Isto cria um círculo vicioso que tem como resultado o não aprendizado de Geometria por parte expressiva dos alunos. Para interromper este círculo negativo devemos enfrentar o problema da formação dos professores nas licenciaturas. É necessário oferecer aos licenciandos uma sólida formação geométrica. Segundo Even (1990) os saberes do professor sobre determinado tópico matemático englobam não só o saber do conteúdo disciplinar mas também seu saber pedagógico, ou seja, se o professor dispõe de estratégias de ensino para auxiliar seus alunos na aquisição do conhecimento em questão. Even defende a idéia de que para o professor ter sucesso no ensino de um tema qualquer deve possuir um sólido conhecimento matemático do mesmo assim como saber articulá-lo com outros conceitos e situá-lo dentro da Matemática enquanto corpo científico.

Para uma aprendizagem significativa, o aluno deve contar com um professor bem preparado para apresentar o conceito de diferentes formas (Even,1990).

1.2 A Proposta

Este trabalho se propõe a verificar de que forma o retorno aos Elementos de Euclides, no sentido de modelo didático de estruturação lógica do raciocínio, pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos das Licenciaturas, futuros professores de Matemática, particularmente quanto ao conceito de área. Buscamos responder à seguinte pergunta:

> *Qual a contribuição que uma intervenção didática para o ensino de áreas baseada nos Elementos pode dar para a formação inicial dos professores de Matemática?*

Elegemos o conceito de área para esta pesquisa dada a sua importância para a vida cotidiana e para as ciências e, também, por verificarmos que os alunos dispõem de uma construção incompleta deste conceito (percepção preponderantemente algébrica). Utilizamos como referencial teórico o modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico e a Teoria de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval.

A intervenção didática proposta aborda o conceito de área enquanto grandeza geométrica, não vinculando-o a uma medida numérica e, muito menos, a fórmulas de cálculo, como habitualmente aparece nos livros didáticos atuais. Em nossa experiência didática, exploramos o objeto matemático *área* a partir das representações figural e discursiva. Como sugere Duval, utilizamos as transformações[1] destas representações para favorecer o aprendizado. Os alunos desenvolveram atividades de tratamento (figural e discursivo) bem como de conversão entre essas representações.

O caminho pedagógico adotado é aquele presente nos Elementos de Euclides que parte do conceito de equivalência de áreas (igualdade de figuras poligonais planas) e, por um processo de transformações de figuras em outras equivalentes (mesma

[1]Duval define dois tipos de transformação de representações semióticas: *tratamento* como sendo a transformação interna, dentro do próprio registro, e *conversão* quando há mudança de registro de representação semiótica (Duval, 2009).

área), chega-se ao quadrado de área igual à figura inicial (processo grego de quadratura de figuras). Também apresentamos a demonstração do Teorema de Pitágoras (proposição I.47) conforme Euclides, isto é, a partir da equivalência de áreas (demonstração não algébrica). Para concluir, trabalhamos os aspectos envolvidos numa demonstração matemática a partir das proposições I.35, I.37 e I.43 dos Elementos.

Em nossa proposta privilegiamos a abordagem da matemática enquanto linguagem (representação semiótica discursiva), procurando desenvolver nos alunos um discurso argumentativo, base do raciocínio lógico-dedutivo. Trabalhamos o conceito de área segundo dois registros de representação semiótica distintos para o conceito de área: registro discursivo e registro figural.

Utilizamos o Modelo de van Hiele como forma de avaliação do nível de pensamento geométrico dos alunos e seu desenvolvimento. Buscamos, também, fundamentação em van Hiele para trabalhar os conceitos de forma progressiva e respeitando o sistema lingüístico apropriado por cada aluno.

1.3 Objetivos da Dissertação

Diante de um problema de tal magnitude, a situação precária do ensino de Geometria e o quadro de carências mais geral da educação brasileira, não temos (nem poderíamos ter) a pretensão de esgotar o tema. Nossa contribuição, ainda que modesta, é no sentido de dar visibilidade à questão e de fomentar a discussão acadêmica da mesma, preponderantemente no que tange à formação inicial dos professores de Matemática, especialmente em Geometria. Elegemos o conceito de área como objeto matemático do estudo. Nossa abordagem visa desenvolver o olhar geométrico em complementação ao enfoque algébrico, que é preponderante.

Esta dissertação não é uma pesquisa histórica mas se utiliza de uma referência histórica, Os Elementos de Euclides, para dar significado ao ensino do conceito de área. Trata-se de um relato de experiência didática realizada com a participação de licenciandos de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

Esta dissertação insere-se na interseção de duas linhas de pesquisa do Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ: "História e Epistemologia da Matemática" e "Saberes docentes e aprendizagem de Matemática". Por um lado, há uma concordância entre os pesquisadores de educação que a melhoria da qualificação dos professores de matemática deve ser tomada como questão preponderante de análise visando contribuir para o ganho de qualidade na educação que o sistema brasileiro demanda. Por esta razão escolhemos os alunos de Licenciatura em Matemática da UFRJ como sujeitos da pesquisa. Por outro, um interesse crescente em investigar as diferentes formas possíveis de relação entre a história da Matemática e seu ensino. Este o motivo da escolha de trabalharmos o conceito de área a partir dos Elementos de Euclides. Sendo assim, este trabalho propõe uma intervenção didática que busca conciliar estes dois propósitos:

1. a melhoria da formação do professor através de uma experiência didática;
2. conciliar história e ensino da Matemática através do uso de uma obra clássica, os Elementos de Euclides.

Em primeiro lugar, a formação inicial do professor deve promover a aquisição dos saberes disciplinar e pedagógico, bem como favorecer o desenvolvimento de uma postura crítico-reflexiva do professor perante o ensino. O professor não deve ser um mero repetidor de fórmulas prontas apresentadas nos livros didáticos. Em segundo lugar, buscando relacionar história e ensino de Matemática na formação básica do professor, propomos uma sequência didática alternativa para o ensino de Geometria, especificamente do conceito de área.

Os Elementos de Euclides são, antes de tudo, um formidável acervo de saberes acumulados pela humanidade na Idade Antiga que instruiu gerações por mais de 2000 anos. É um patrimônio cultural da humanidade. Atualmente especula-se muito sobre como utilizar a história da Matemática no ensino. Os Elementos são uma notável obra para estabelecer esta vinculação da Matemática, especificamente seu ensino, com sua História.

O ensino de Matemática, como uma construção social, deve possibilitar ao aluno tomar conhecimento das noções e teorias matemáticas (aspectos internos) bem como do tecido histórico-cultural em que estes conceitos e teorias matemáticas se desenvolveram (aspectos externos). Os aspectos culturais das sociedades interferem diretamente na construção dos objetos matemáticos. A Educação Matemática, para os dias de hoje, deve promover a compreensão integrada destes dois aspectos.

1.4 Referenciais Teóricos

Utilizamos como referenciais teóricos o **Modelo de van Hiele** para o desenvolvimento do pensamento geométrico e a **Teoria de Representações Semióticas de Raymond Duval**. Ambas as abordagens privilegiam o aspecto da Matemática considerada como linguagem, o que temos em conta como fator essencial na educação matemática.

O Modelo de van Hiele (Nasser, L., 1992) sugere um quadro de níveis cognitivos para o pensamento geométrico e sustenta a tese de que o aluno só progride em níveis de raciocínio geométrico em face de situações didáticas específicas preparadas pelo professor. Não há um progresso natural. Destaca-se, desta forma, o papel fundamental do professor no processo de ensino e de aprendizagem da Geometria. Além disso, a cada nível corresponde uma linguagem geométrica específica que progride segundo estágios sucessivos de complexidade. Van Hiele considera, como um dos fatores do insucesso no ensino e na aprendizagem de geometria, a falta de compatibilidade de linguagem entre professor e aluno.

Raymond Duval (2009), por sua vez, sustenta a ideia de que a apreensão de um conceito matemático qualquer só é possível a partir de suas representações semióticas, incluindo, entre elas, a língua natural. Cabe ao professor formular estratégias de ensino que possibilitem ao aluno desenvolver representações semióticas diversas do mesmo objeto e transitar entre elas (coordenação de registros) sem, no entanto, confundir as representações com o próprio objeto matemático.

1.5 Metodologia Utilizada

Desenvolvemos, inicialmente, uma pesquisa teórica do ensino de geometria, sua história e principais referenciais, particularmente no que concerne ao conceito de área (Euclides e Hilbert). Estruturamos, então, uma proposta de intervenção didática, a partir da abordagem geométrica dos gregos. Esta proposta organizou-se em 5 oficinas[2] realizadas na Universidade Federal do Rio de Janeiro com 8 licenciandos

[2] As oficinas foram adaptadas de uma sequência didática elaborada pelo Professor J. B. Pitombeira para um minicurso do V EEMAT - Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro - fev-2010, Colégio Pedro II.

de Matemática, entre os meses de abril e maio de 2010. Os participantes foram convidados e aderiram voluntariamente à pesquisa. Anteriormente ao início das oficinas, realizamos uma avaliação inicial dos alunos quanto a seu nível de pensamento geométrico e sua história escolar. Para isto, utilizamos um questionário inicial e o teste de van Hiele (anexos 5 e 4), aplicados em nosso primeiro encontro. Ao final das 5 oficinas foi realizada uma análise dos resultados obtidos. A intervenção didática proposta baseou-se na hipótese teórica de que a utilização dos Elementos de Euclides (obra clássica de ensino de Matemática) para o estudo do conceito de área pode representar uma estratégia de intervenção didática bem sucedida para o desenvolvimento do raciocínio geométrico do aluno e a compreensão do conceito de área como grandeza geométrica.

1.6 Organização da Dissertação

O restante desta dissertação está organizado da forma a seguir.

Capítulo 2

Exposição do conceito de área segundo três enfoques:

1. sua história e ensino;

   Situamos o conceito de área historicamente e apresentamos, brevemente, a forma como este conceito é ensinado hoje em dia.

2. sua abordagem nos Elementos de Euclides;

   Apresentamos o conceito de área do ponto de vista geométrico, como aparece nos Elementos de Euclides.

3. sua formulação por Hilbert.

   Apresentamos a formulação axiomática de Hilbert para o conceito de área, destacando a concepção do conceito de área como uma função.

Capítulo 3

Breve descrição das teorias de Van Hiele e Raymond Duval, os referenciais teóricos desta pesquisa. Destacamos as idéias centrais destas teorias que nos servirão de base para o presente trabalho. A referência ao papel da linguagem nos dois referenciais é preponderante na concepção da intervenção didática proposta por nós. O modelo de van Hiele é utilizado, nesta pesquisa, tanto como meio de identificar o nível de maturidade geométrica dos licenciandos como, também, indicação de caminhos para auxiliá-los na progressão para níveis mais avançados de pensamento geométrico. O modelo de Duval auxilia na concepção do objeto matemático e na compreensão da forma como se dá a aprendizagem matemática.

Capítulo 4

Relato da experiência de ensino realizada pela intervenção didática proposta: as atividades desenvolvidas nas 5 oficinas com os licenciandos, seus objetivos e seus resultados. A proposta utiliza o tratamento do conceito de área enquanto grandeza, desvinculado de sua medida numérica, como presente nos Elementos de Euclides. Cabe notar, que, na maior parte dos livros didáticos atuais, o tratamento conferido ao conceito de área é basicamente numérico e através de fórmulas, empobrecendo a formação do conceito matemático.

Capítulo 5

São feitas as considerações finais da presente pesquisa e as sugestões para futuros estudos.

Anexos

Nos anexos estão reproduzidos os modelos das atividades propostas bem como o questionário e teste aplicados. Há ainda a reprodução da correspondência eletrônica de autorização para usar o Teste de van Hiele. Apresentamos, também, os modelos axiomáticos de Euclides e de Hilbert para o conceito de área.

Capítulo 2

O Conceito de Área

2.1 O Conceito de Área: História e Ensino

2.1.1 Um Pouco de História

O homem, provavelmente, desenvolveu suas primeiras noções geométricas (Cajori, 2007) ao observar as formas presentes na Natureza, fabricar suas primeiras ferramentas e objetos de uso doméstico e fazer medições no trato com a agricultura ou nas primeiras obras de engenharia. Cajori cita Heródoto (historiador grego que viveu entre, aproximadamente, 484 e 420 a.C.) segundo o qual a Geometria teve origem no Egito antigo, quando, por conta das cheias periódicas do rio Nilo, os agricultores tinham que remarcar suas terras, cujas fronteiras haviam sido apagadas pelas águas das enchentes. Para isso, faziam uso de técnicas apuradas de medição de comprimentos e áreas.

> *"Eles disseram também que este rei (Sésotris) dividiu a terra entre todos os egípcios, de modo a doar a cada pessoa um quadrângulo de mesmo tamanho, e para extrair disto dividendos pela imposição de uma taxa anual de impostos. Mas cada um dos que o rio tirou algum pedaço de Terra foi até ele e notificou o que acontecia; ele então mandou observadores, os quais tinham que resolver o quanto ficou menor cada parte e, assim, estipular o que cada um devia proporcionalmente ao que sobrara das suas terras, levando em conta a taxa anual estabelecida. Deste modo,*

> *me parece, originou-se a geometria, que então passou para Helas"*
>
> (Heródoto II.c.109, apud Cajori, 2007)

Nota-se que o cálculo de área era necessário para resolver problemas práticos de cobrança de impostos no Egito antigo. Há, no papiro de Rhind, datado de aproximadamente 1700 a.C. (copiado pelo escriba egípcio Ahmes de um original ainda mais antigo escrito entre 2000 e 1800 a.C.) problemas práticos de medições e cálculos de áreas.

> *"Seu título é* **Indicações para Obter o Conhecimento de Todas as Coisas Obscuras**. *Nesta obra percebe-se que os egípcios pouco se importavam com resultados teóricos. Nela não há, em absoluto, teoremas.(...) Em geometria o forte dos egípcios repousa em construções e cálculo de áreas. A área de um triângulo isósceles, cujos lados medem 10 khets e a base 4 khets, está tomada erroneamente como 20 khets quadrados, ou a metade da base do produto por um dos lados. A área de um trapézio isósceles é calculada multiplicando-se a metade da soma dos lados paralelos por um dos lados não-paralelos. A área de um círculo é encontrada subtraindo do diâmetro* 1/9 *do seu comprimento e elevando a diferença ao quadrado."*
>
> (Cajori, 2007, p. 34)

A civilização que desenvolveu-se entre os rios Tigre e Eufrates, na antiga Mesopotâmia (Babilônia), também fazia uso de uma matemática prática. Segundo Aaboe (1984), os babilônios eram excelentes calculistas e tinham preferência pelo que hoje chamamos de álgebra e teoria dos números. Mas estudos recentes mostram que as práticas "algébricas" dos Babilônios utilizavam e manipulavam representações geométricas. (cf Horup, 2010, pp. 103-104)

Nos tabletes de argila de escrita cuneiforme dos babilônios encontramos problemas envolvendo áreas e tabelas de números pitagóricos (tablete Plimpton 322). Conheciam, também, as fórmulas para o cálculo de áreas de figuras geométricas simples (triângulos e trapézios) mas, para o círculo, faziam aproximações grosseiras para a área e o perímetro.

Na Grécia antiga deu-se uma mudança radical quanto ao tratamento dos problemas matemáticos: a matemática puramente experimental cedeu lugar a uma matemática dedutiva.

Os gregos também resolviam problemas práticos envolvendo o cálculo de comprimentos, áreas e volumes mas, segundo Pitombeira (2008), a partir de 600 a.C.,desenvolveram "um pensamento geométrico especulativo, sem preocupações com aplicações imediatas".

Provavelmente, esta mudança no caráter da matemática deveu-se, em parte, à formação das cidades gregas e sua política (Pitombeira, 2008). Havia, nas 'polis' gregas, uma sociedade, com dirigentes não vinculados à classe sacerdotal, que prezava as idéias bem fundamentadas através de uma argumentação convincente (retórica). A Filosofia e a Matemática gregas nasceram irmanadas.

> *"Platão (427-347 a.C.) ressaltou a importância da Matemática para a formação do espírito, a fim de desprendê-lo das coisas sensíveis, mutáveis, sobre as quais o conhecimento é impossível. Somente as idéias, imutáveis e eternas, podiam realmente ser conhecidas. Em seus diálogos, abundam exemplos e analogias utilizando conceitos e resultados matemáticos, especialmente geométricos".*
>
> (Pitombeira, 2008, p. 6)

A matemática grega desenvolveu-se consideravelmente. Na geometria, a matemática grega alcançou seu ápice. Os Elementos, escrito por Euclides em torno de 300 a.C., é uma obra formidável de compilação do conhecimento matemático da época, organizado como sistema dedutivo (axiomático). Euclides utiliza-se das figuras geométricas de áreas iguais em muitas demonstrações nos Elementos. Os gregos utilizavam-se de um método para medição de áreas chamado 'quadratura'. Não recorriam aos números para o cálculo de áreas. Seu método consistia em transformar as figuras em outras de mesma área e, posteriormente, em um quadrado de área igual à figura original. Utilizavam o quadrado como padrão de comparação. Nos Elementos, Euclides mostra como, a partir de qualquer polígono, é possível construir, usando régua e compasso, um quadrado de área igual à da figura original.

Constatamos que o cálculo de áreas é um problema que se coloca historicamente desde a Antiguidade e permanece como um campo de interesse nos dias atuais.

2.1.2 O Conceito de Área no Ensino

O livro didático é, atualmente, um instrumento de ensino muito valorizado e, muitas vezes, a única fonte de consulta e trabalho para o professor (Lorenzato, 1995). Auxilia o trabalho de organização didática do professor e, para o aluno, é uma fonte privilegiada do conteúdo estudado. Assim sendo, procedemos a um exame de alguns livros didáticos do Ensino Fundamental e Médio. Nossa seleção baseou-se no critério de livros mais vendidos[1]. Buscamos, também, conhecer as propostas oficiais do Ministério de Educação para a área, através dos PCNs. Reconhecemos que a proposta curricular oficial bem como os livros didáticos adotados têm uma grande influência na forma como o conhecimento matemático chega aos alunos.

Livros Didáticos

Nossa análise dos livros didáticos restringiu-se à abordagem do conceito de área. Os livros selecionados são:

- Luiz Roberto Dante, *Tudo é Matemática*, 6ª série, Editora Ática, São Paulo, 2006.
- Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, *Matemática para todos*, 8ª série, Editora Scipione, São Paulo, 2002.
- Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, *Matemática e Realidade*, 8ª série, Editora Atual, São Paulo, 2001.
- Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn e Roberto Perigo, *Matemática*, volume único, Editora Atual, São Paulo, 2002.
- Luiz Roberto Dante, *Matemática*, volume único, Editora Ática, São Paulo, 2008.

Os três primeiros exemplares destinam-se ao 2º segmento do Ensino Fundamental e os dois últimos ao Ensino Médio.

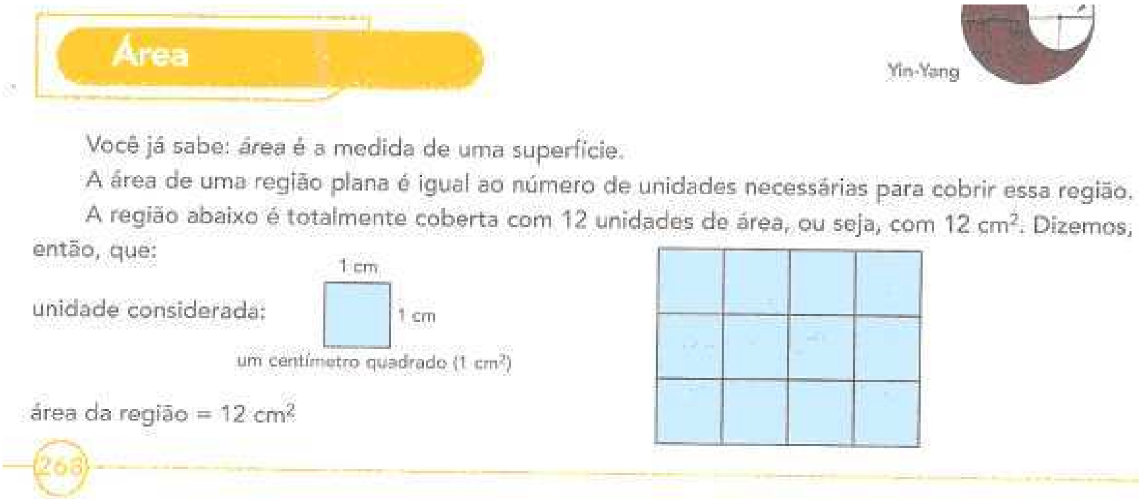
[1]Fonte: Abrelivros (Associação Brasileira de Editores de Livros Escolares), entidade civil sem fins lucrativos, fundada em 15 de abril de 1991, para congregar editoras de livros educativos do país.

Luiz Roberto Dante, Tudo é Matemática, 6ª série, Editora Ática, São Paulo, 2006.

O volume analisado (6ª série/7º ano) faz parte de uma coleção de 4 volumes destinada aos alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental. O livro da 6ª série é dividido em 10 capítulos sendo 5 deles destinados ao ensino de Geometria. São eles: Capítulo 2, Formas geométricas; Capítulo 4, Grandezas e medidas; Capítulo 6, Ângulos, polígonos e circunferências; Capítulo 9, Perímetros, áreas e volumes; Capítulo 10, Construções geométricas e simetria.

O conceito de área é introduzido no Capítulo 2 (Formas Geométricas) através de atividades (p. 58-59) com figuras planas desenhadas sobre uma malha quadriculada. São 3 atividades propostas com o objetivo de descobrir o número de quadradinhos (1 quadradinho = unidade de medida) que cobrem cada região. Há, ainda, mais adiante (p. 68), 1 único exercício associando perímetro e área. No capítulo 4 (Grandezas e medidas) (p. 114) há um exercício vinculando a grandeza área e sua medida,estabelecida uma unidade. Na página 123, há um sub item da questão 41 que apresenta o que é um hectare. Posteriormente, no Capítulo 8, (Proporcionalidade) é apresentado em uma questão (p. 235) um sub item relacionando o lado de um quadrado (em cm) a sua área (em cm^2) e na página 242, um exercício envolvendo uma planta baixa de um escritório. Há, também, uma definição de densidade demográfica (p. 244). A seção específica para o conceito de área está localizada no Capítulo 9, na página 268. O conceito é apresentado (veja na figura a seguir) da seguinte forma: "Você já sabe: área é a medida de uma superfície."

Após esta definição, há a apresentação das fórmulas para cálculo da área do retângulo e do quadrado. Depois, exercícios numéricos. O conceito de área não é trabalhado enquanto atributo geométrico das diferentes figuras. Há um trabalho de vinculação da área de uma figura a um número,correspondente a sua medida, favorecendo à não distinção entre grandeza e medida. Além disso, é dado um tratamento prioritário às fórmulas. Nas páginas 272 e 273, são apresentadas as fórmulas para o cálculo de área de paralelogramos e triângulos.



Área

Yin-Yang

Você já sabe: *área* é a medida de uma superfície.

A área de uma região plana é igual ao número de unidades necessárias para cobrir essa região.

A região abaixo é totalmente coberta com 12 unidades de área, ou seja, com 12 cm^2. Dizemos, então, que:

unidade considerada: 1 cm, 1 cm, um centímetro quadrado (1 cm^2)

área da região = 12 cm^2

268

Figura 2.1: Dante, "Tudo é matemática", Capítulo 9 - Perímetros, áreas e volumes, 2006.

Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis, Matemática para todos, 8ª série, Editora Scipione, São Paulo, 2002.

O volume analisado (8ª série/9º ano) faz parte de uma coleção de 4 volumes destinada aos alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental. O livro da 8ª série é dividido em 14 capítulos sendo 6 deles destinados ao ensino de Geometria. São eles: Capítulo 1, Semelhança; Capítulo 4, Medidas; Capítulo 7, Geometria dedutiva; Capítulo 9, Trigonometria; Capítulo 11, Construções geométricas; Capítulo 12, Círculo e cilindro.

No Capítulo 4 (Medidas) são apresentadas as unidades de área do sistema métrico decimal e 1 exercício de conversão de km^2 para m^2. Posteriormente, na página 80, há uma 'recordação' das fórmulas de áreas (ver figura a seguir) e muitos exercícios para o cálculo numérico de áreas diversas.

No Capítulo 12, há a apresentação da área de um círculo por aproximação dos polígonos inscritos e cicunscritos e mais exercícios numéricos. Mais uma vez, a abordagem numérica é a preponderante. Não há distinção entre a grandeza e sua medida.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado, Matemática e Realidade, 8ª série/9º ano, Editora Atual, São Paulo, 2001.

O volume analisado (8ª série/9º ano) faz parte de uma coleção de 4 volumes destinada aos alunos dos últimos anos do Ensino Fundamental. O livro da 8ª série/9º ano é dividido em 8 unidades. Três unidades são dedicadas ao ensino de Geometria: Unidade 4,Semelhança; Unidade 6, Polígonos e circunferência e Unidade 8, Complementos de Geometria. A Unidade 2, Cálculo algébrico, faz uma integração da geometria e da álgebra, ao trabalhar os produtos notáveis. O conceito de área é trabalhado especificamente na Unidade 6, Polígonos e circunferências. Esta unidade é dividida em 6 capítulos. Destes, os que tratam de área são:

- Capítulo 17 - área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo;
- Capítulo 18 - área do triângulo, do losango e do trapézio;
- Capítulo 19 - polígonos regulares;
- Capítulo 20 - lado e apótema de polígonos regulares;
- Capítulo 22 - areado círculo e de suas partes.

Novamente a abordagem empreendida trata da área vinculada tão somente a sua medida e prioriza o uso de fórmulas. Não há um tratamento do conceito de área enquanto atributo geométrico das figuras.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn e Roberto Perigo, Matemática, volume único, Editora Atual, São Paulo, 2002.

O volume analisado é volume único destinado aos alunos das três séries do Ensino Médio. O livro é organizado 8 partes. Três partes são dedicadas ao ensino de Geometria: Parte 3, Trigonometria; Parte 6, Geometria e Parte 7, Geometria Analítica. O conceito de área é trabalhado especificamente na Parte 6. Esta unidade é dividida em 8 capítulos. Destes, os que tratam de área são:

- Capítulo 28 - áreas de superfícies planas;
- Capítulo 29 - prisma;
- Capítulo 30 - pirâmide;
- Capítulo 31 - cilindro;
- Capítulo 32 - cone;
- Capítulo 33 - esfera.

Na Parte 7, Geometria Analítica, no capítulo 35 (reta) há um item sobre área de um triângulo.

No Capítulo 28, há uma definição do conceito de área:

"Toda superfície plana ocupa uma extensão do plano. Determinar a área de uma superfície significa medir tal extensão. Assim como para toda medição que se faz, é necessário definir uma unidade; no caso, vamos estabelecer um quadrado unitário, ou seja, um quadrado de lado 1, o qual possui, igualmente, área 1." (ver figura a seguir).

Após esta definição, há a apresentação das fórmulas para o cálculo de áreas das diferentes figuras e vários exercícios de fixação. Na parte referente às figuras geométricas espaciais o tratamento do conceito de área é o mesmo, ou seja, privilegiando o uso de fórmulas. A abordagem do conceito de área adotado possibilita ao aluno uma construção incompleta do conceito, não diferenciando a grandeza de sua medida.

Luiz Roberto Dante, Matemática, volume único, Editora Ática, São Paulo, 2008.

O volume analisado é volume único destinado aos alunos das três séries do Ensino Médio. O livro é organizado 8 unidades, sendo 4 delas destinadas ao ensino de Geometria. Unidade 2, Geometria plana; Unidade 3, Trigonometria; Unidade 6, Geometria espacial:de posição e métrica e Unidade 7, Geometria Analítica. O conceito de área é trabalhado especificamente na Unidade 2. Esta unidade é dividida em 5 capítulos. O capítulo 13 intitula-se áreas: medidas de superfícies. Na Unidade 7, Geometria Analítica, no capítulo 31, o item 13 versa sobre área de uma região triângular.

A abordagem do conceito de área adotado neste livro não é diferente dos anteriores. Há uma apresentação do conceito que não permite a distinção entre a grandeza e a sua medida. Além disto, o trabalho com as fórmulas é destacado.

Após a observação atenta dos livros selecionados, constatamos uma ênfase no tratamento numérico do conceito de área. Os livros didáticos atuais apresentam uma abordagem geométrica semelhante àquela presente nos papiros egípcios e nas tabuletas de argila babilônias, dos povos antigos, explorando basicamente problemas práticos. A geometria é desenvolvida a partir de um raciocínio indutivo, pela observação e experimentação (geometria empírica). Não há um trabalho estruturado voltado à construção do conceito de área enquanto atributo geométrico das figuras. O tratamento aritmético sobrepuja o tratamento geométrico, não sendo disponibilizadas experiências integradas destas diferentes visões ao aluno. A vinculação da grandeza à sua medida é destacada e permite ao aluno uma construção distorcida do conceito. Não há um trabalho pedagógico consistente no sentido de distinguir e, ao mesmo tempo, articular os aspectos geométrico e numérico do objeto matemático *área* (grandeza x medidas). Em outras palavras, há um confusão entre a grandeza área e a sua medida numérica. Visando colaborar na solução deste problema, nossa proposta busca desenvolver o enfoque geométrico do conceito de área, a partir da abordagem clássica dos gregos, complementando a abordagem numérico-algébrica presente nos livros didáticos atuais.

O governo brasileiro tem um programa de análise e aquisição de livros didáticos, Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), destinado à distribuição de obras didáticas à rede pública de ensino brasileira. Através deste programa ele disponibiliza uma lista com as resenhas e análises de livros indicados para escolha dos professores das escolas públicas. No PNLD/2008, foram aprovadas 16 coleções de Matemática. Entre as análises feitas, destacamos:

> *"Os estudos didáticos relativos às grandezas geométricas têm proposto que, no ensino das grandezas geométricas,* **é desejável que sejam distinguidos e articulados à figura a grandeza a ela associada e a medida dessa grandeza obtida como resultado de um processo de medição**. *Nesse sentido, tais estudos recomendam que* **os alunos sejam expostos a situações de comparação de grandezas sem medição**. *Comparar os comprimentos de dois caminhos, as áreas de duas superfícies, as capacidades de dois recipientes são exemplos de situações em que é possível apenas estabelecer uma relação - maior, menor,*

igual - entre as grandezas, sem que seja preciso efetuar medições. Essas atividades podem contribuir para **uma abordagem intuitiva das grandezas** *e, ao mesmo tempo,* **favorecer a compreensão das especificidades** *de cada uma delas.* **Este tipo de atividade é muito pouco freqüente na maioria das obras**, *embora em algumas delas seja feita a comparação entre as áreas de duas figuras geométricas planas pelo procedimento de composição e decomposição dessas figuras."*
(grifo nosso)

A análise acima vem corroborar com as conclusões a que chegamos na amostra de livros analisada. Isto posto, e dada a posição de destaque que possuem, hoje em dia, os livros didáticos nas salas de aula, é de se esperar que nossos alunos estejam construindo um conceito distorcido e incompleto de área de figuras planas.

Propostas Curriculares Oficiais

O Ministério de Educação do Brasil disponibilizou, a partir de 1997, diretrizes curriculares para a Educação Básica brasileira. Tais documentos, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) abordam os diversos aspectos do ensino das diferentes disciplinas. Cumprem um papel de orientações e sugestões educacionais para todo o país. A Matemática foi dividida em 4 áreas de ensino: Números e operações; Espaço e forma; Grandezas e medidas; Tratamento da informação. A geometria é contemplada em duas destas áreas: Espaço e forma e Grandezas e medidas. O conceito de área deve ser abordado a partir destes dois referenciais.

"No entanto, a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, **confunde-se seu ensino com o das medidas**. *Em que se pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo que vive" (PCN,1998)*
(grifo nosso)

Os PCNs preconizam, ainda, a exploração dos diferentes tratamentos conferidos aos conceitos geométricos ao longo da história. Como exemplo, destacam o conceito de área (PCNs, 1998, p. 129) desenvolvido pelos egípcios e babilônios de forma empírica enquanto os gregos “teorizaram a Geometria separadamente da Aritmética e consideravam que as medidas podiam estabelecer articulações entre esses dois campos”.

Concluindo, os PCNs aconselham um ensino voltado para a construção significativa do conceito de área, fazendo uso dos contextos históricos em que se desenvolveu e articulando os diferentes campos da Matemática. A intervenção didática proposta neste trabalho procura contemplar esta abordagem.

2.1.3 O Conceito de Área e o Teorema de Pitágoras

O Teorema de Pitágoras - “o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos” - é, provavelmente, a proposição matemática mais famosa e, também, a que apresenta maior número de demonstrações ao longo da história. Esta relação matemática já era conhecida pelos povos antigos, chineses, indianos e babilônios, muito antes do matemático grego Pitagóras de Samos (570 a.C.-496 a.C.).

Os primeiros registros históricos apresentando a relação entre as medidas dos lados de um triângulo retângulo de que dispomos são as tabuletas de argila babilônicas datadas de aproximadamente 1000 a.C.. Há imagens exibindo a relação entre os lados para o caso em que o triângulo retângulo é isósceles (a ilustração mais antiga conhecida até hoje).

O Teorema de Pitágoras possibilita um trabalho pedagógico extremamente rico para o ensino da Matemática. Isto se dá pois permite trabalhar de forma integrada os domínios da Geometria e da Álgebra. A formulação matemática do Teorema de Pitágoras admite dupla interpretação: enquanto uma relação entre áreas bem como uma relação entre comprimentos. Tamanha riqueza de significados foi fartamente explorada por diversos matemáticos e estudiosos no decorrer dos tempos em diversas demonstrações.

O tratamento dado por Euclides em Os Elementos ao Teorema de Pitágoras é o de comparação de áreas (enfoque geométrico). O tratamento privilegiado nos livros didáticos atuais é o de comparação dos comprimentos (medidas) dos lados do triângulo retângulo (enfoque algébrico). Considerando a Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval, o trabalho pedagógico integrado entre estas duas abordagens favorecerá a construção conceitual do aluno para o objeto matemático área. O registro figural é parte importante (e mesmo indispensável) das demonstrações de Euclides bem como em diversas outras demonstrações do teorema de Pitágoras.

Apresento, a seguir, três demonstrações "sem palavras" do Teorema de Pitágoras presentes no livro "Proofs without words" (Nelsen, R.B., 1993) onde a figura assume o papel de destaque para comunicar relações matemáticas. Destaco a demonstração dada por Bháskara, matemático hindu do século XII, onde além da figura há apenas um imperativo: veja! A representação figural não deve ser preterida na construção conceitual dos objetos matemáticos a fim de tornar a experiência matemática educacional verdadeiramente significativa desenvolvendo o pensamento geométrico de forma integrada ao pensamento algébrico. Nossa proposta de intervenção didática para o ensino de áreas a partir de Euclides contempla esta abordagem pedagógica.

2.2 O Conceito de Área em Euclides

Os 'Elementos' de Euclides são uma grande obra, composta por 13 livros. Nem todos tratam de Geometria. Os livros sobre Geometria são os livros I-IV, VI, e XI-XIII. A Geometria plana é tratada nos livros I-IV e VI. Euclides constrói seu modelo axiomático a partir de algumas definições, postulados e noções comuns, princípios aceitos sem demonstração. Todas as demais proposições (teoremas) são derivadas destas, por deduções lógicas. Tomaremos por base para este trabalho o Livro I dos Elementos. Nele aparecem 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns. A partir delas são demonstradas 48 proposições (teoremas), conforme apresentado no Anexo 1. O objetivo desta pesquisa restringe-se ao estudo de áreas de figuras poligonais planas. Basearemos nosso estudo no Livro I dos 'Elementos' de Euclides, tradução de Irineu Bicudo (2009).

Do ponto de vista didático, não estamos propondo uma utilização do texto de Euclides para uma simples apresentação estéril de teoremas que devem ser memorizados pelos alunos. Propomos, sim, visando a melhoria da formação do professor, um trabalho com o discurso lógico-dedutivo do texto, acompanhado das construções geométricas com régua e compasso. Especialmente para o ensino de áreas de figuras planas, é nossa intenção reforçar o enfoque no aspecto geométrico da grandeza área.

Embora apareça a palavra área no item 9 das noções comuns, este termo não é definido nos 'Elementos'. Euclides faz alusão, pela primeira vez nos 'Elementos', à noção de área na proposição I.35, quando afirma a igualdade entre dois paralelogramos dispostos sobre a mesma base e entre as mesmas paralelas. Euclides não define formalmente o conceito de área, mas utiliza-se, no decorrer de sua exposição, a noção de que área é a superfície (conteúdo) de uma figura. Área é uma grandeza, é um atributo geométrico da figura. O conceito de área nos Elementos de Euclides é trabalhado a partir de duas abordagens complementares: a equivalência de áreas (figuras com o mesmo conteúdo) e a transformação de figuras (construção de uma figura com forma diferente da primeira mas com o mesmo conteúdo). Os gregos não vinculavam a um segmento de reta o número correspondente à sua medida, em uma determinada unidade. Assim como também não relacionavam a área de uma figura com sua medida numérica. É importante ter em mente que o conceito de número para os gregos antigos era profundamente diverso do nosso conceito atual. Eles só admitiam como números os inteiros. A geometria euclidiana não levava em conta os números reais. Além disso, para os matemáticos gregos, a Aritmética e a Geometria tratavam de campos distintos. Enquanto a Geometria se ocupava das formas e grandezas, a Aritmética lidava com os números. A geometria grega prescindia dos números (e ignorava os números reais). Tratando-se de terminologia, Euclides refere-se a duas figuras como sendo iguais em dois casos: quando são congruentes e, também, quando elas possuem a mesma área (o mesmo conteúdo). Não há fórmulas para cálculo de áreas nem a preocupação de atribuir valores numéricos a qualquer medida. Euclides trata a noção de área como uma relação de equivalência (não explicitada formalmente) que satisfaz às seguintes noções comuns (em termos modernos):

- Figuras congruentes tem 'conteúdo' igual (mesma área);
- Se duas figuras têm 'conteúdo' igual a uma terceira figura, elas têm 'conteúdo' igual entre si;
- Se pares de figura com 'conteúdo' igual são 'somados', no sentido de serem juntados sem sobreposição, fazendo figuras maiores, então, estas figuras maiores têm 'conteúdo' igual;
- O mesmo vale para a subtração, observando que a igualdade de conteúdo da diferença não depende de onde as peças iguais foram removidas;
- Metades de figuras com 'conteúdo' igual têm 'conteúdo' igual. (Também, dobro de iguais são iguais);
- O todo é maior que as partes, o que neste caso, significa que se uma figura está contida totalmente em outra (não congruente) então, as duas figuras não podem ter 'conteúdo' igual (estabelece uma relação de ordem sobre a grandeza área).

Assim, os gregos 'medem' a área das figuras poligonais planas a partir da transformação (adicionando e/ou subtraindo figuras de mesmo 'conteúdo') destas figuras em quadrados (quadratura de figuras - dado qualquer polígono construir, com régua e compasso, um quadrado de mesma área). O quadrado é a figura mais simples considerada pelos gregos como unidade de comparação. Ora, todo polígono pode ser repartido em triângulos, conforme mostrado na Figura 2.13. Todo triângulo pode ser 'transformado' em um paralelogramo de igual 'conteúdo' (mesma área). Todo paralelogramo pode ser 'transformado' em um quadrado de 'conteúdo' igual. Assim, percorrendo este caminho de sucessivas transformações de figuras em outras figuras de áreas equivalentes, os gregos eram capazes de dimensionar a área de qualquer figura plana.

Euclides desenvolve sua teoria de área iniciando com o conceito de congruência de triângulos.

Euclides, a partir dos casos de congruências de triângulos, (I.4), (I.8), (I.26), e da propriedade dos paralelogramos (I.34), desenvolveu sua teoria de equivalência de áreas. As proposições I.35 e I.36 tratarão de paralelogramos iguais (lembrar que este 'iguais' não significa congruentes, mas sim paralelogramos de mesma área). As proposições I.37 e I.38 versarão sobre triângulos iguais (da mesma forma que para os paralelogramos, Euclides usa, nestas proposições, a palavra 'iguais' para designar 'de mesma área'). Na proposição I.43, Euclides expressará um resultado muito valioso na teoria de áreas, "em qualquer paralelogramo, os complementos em torno da diagonal são iguais entre si". Finalmente, Euclides apresenta sua demonstração do Teorema de Pitágoras, totalmente diversa daquela demonstração algébrica que estamos acostumados a ver nos livros didáticos. Este resultado nos habilitará a transformar retângulos em quadrados de mesma área. Há muito mais resultados nos 'Elementos' sobre áreas, principalmente nos livros II e VI, mas, para os objetivos deste trabalho, iremos nos deter nas proposições apresentadas do Livro I.

A teoria de área de Euclides constitui-se um modelo muito importante na Geometria Clássica e está presente, além dos livros I e II também, nos outros livros dos Elementos. Aparece, por exemplo, no livro IV, proposição 11, na construção do pentágono regular. As proposições (I.35)-(I.48), (II.1)-(II.14), (III.35)-(III.37), (IV.10) contêm o fundamento da teoria de área desenvolvida por Euclides. É importante notar como Euclides utiliza-se do conceito de área no lugar de uma abordagem algébrica, como faríamos atualmente. Euclides manipula com áreas e segmentos como operamos expressões algébricas criando, podemos dizer, uma álgebra geométrica.

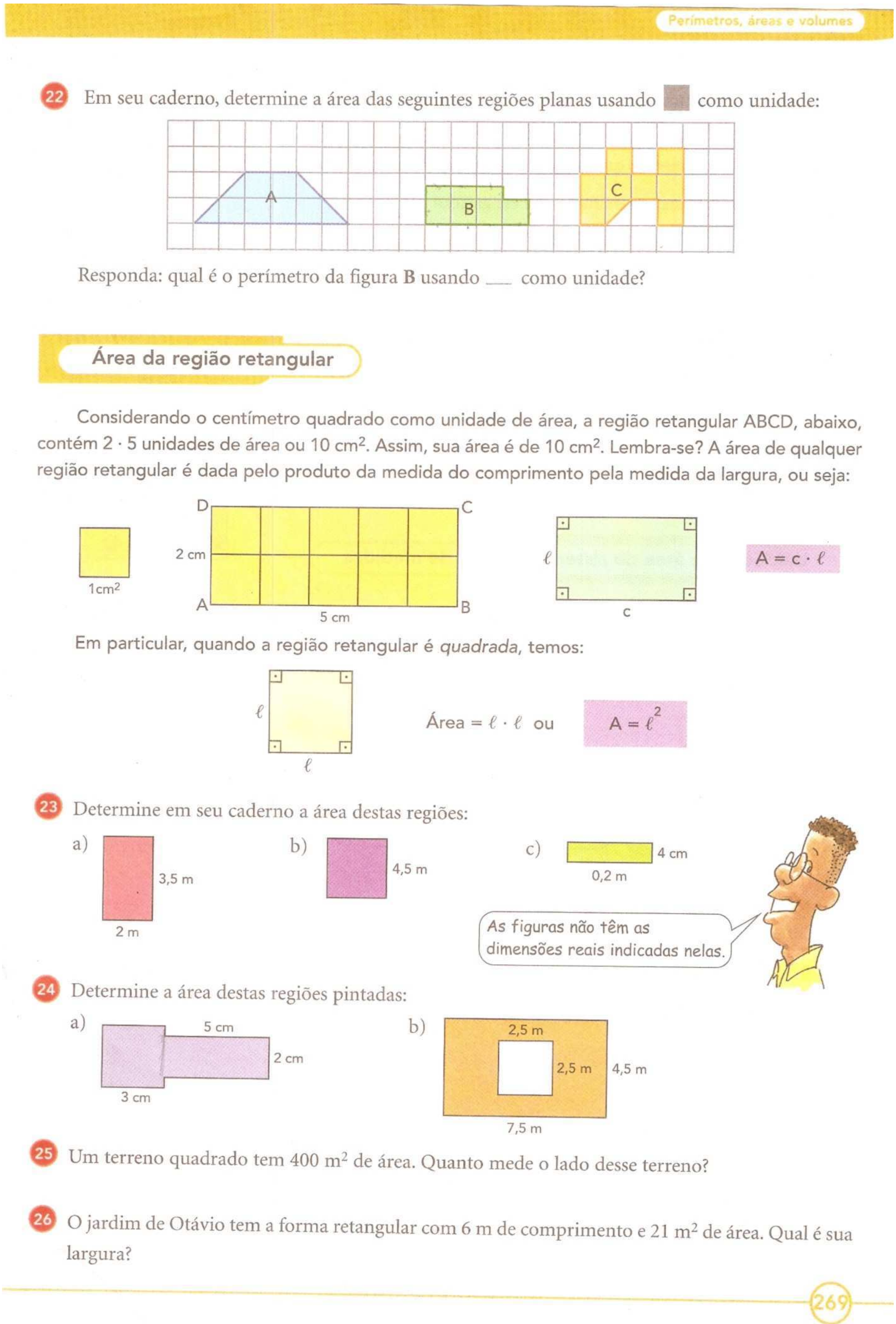
2.3 O Conceito de Área em Hilbert

David Hilbert (1862-1943), matemático alemão, um dos maiores matemáticos do século XX, publicou, em 1899, seu trabalho intitulado Grundlagen der Geometrie, obra de grande influência, onde desenvolve uma nova axiomática para a geometria a partir das insuficiências lógicas presentes na Geometria de Euclides (Hartshorne, 2000). Hilbert propõe um novo sistema de axiomas para a Geometria Euclidiana plana e espacial e mostra que todos os resultados dos Elementos permanecem válidos assumindo seus postulados. Seu sistema axiomático é um dos marcos na História da Matemática já que organiza os fundamentos da Geometria e da Análise. Segundo Hartshorne, a abordagem de Hilbert marca a transição para o método axiomático moderno, no qual axiomas não são mais verdades auto-evidentes. Os objetos geométricos não estão mais submetidos a uma vinculação com o mundo objetivo e com nossas intuições, adquirindo, desta maneira, uma liberdade de existência limitada apenas pela imaginação humana e a coerência lógica. Não há necessidade de um significado explícito para conceitos indefinidos tais como o ponto, a reta, o plano e as relações de pertinência, congruência e ordem. A discussão importante não se baseia mais nos objetos e sim nas suas relações. Um sistema axiomático deve satisfazer a três condições: ser consistente, isto é, os postulados não podem contradizer uns aos outros, por si mesmos ou por suas consequências; deve ser completo, o que significa que deve ser suficiente para provar a veracidade ou não de todas as proposições formuladas no contexto da teoria em questão; e ainda cada postulado deve ser independente dos demais, no sentido de que não é consequência deles, sob pena de ser supérfluo. Ao estudar a consistência dos postulados de Euclides, os matemáticos dos séculos XIX e XX perceberam que estes postulados eram insuficientes para provar os teoremas conhecidos. Analisando os 'Elementos' sob esse novo ponto de vista, descobriram que a axiomática euclidiana era incompleta e continha inconsistências lógicas. Tornava-se, portanto, necessário reorganizar a própria geometria euclidiana, suprindo, inclusive, os postulados que faltavam. Isso foi feito por vários matemáticos no final do século XIX, dentre eles Hilbert. Durante o século XIX, as pesquisas que eram realizadas na Geometria, na Álgebra e na Análise convergiram para uma preocupação com os fundamentos de toda a Matemática. Como vimos na seção anterior, Euclides desenvolve sua teoria de área, nos livros I-IV, a partir da relação[2] (igualdade de figura) $\leftrightarrow$ (igual conteúdo), transformando figuras em outras de mesmo conteúdo por adição e/ou subtração de figuras congruentes. Assume várias propriedades sem demonstrá-las, como sendo noções comuns. Hilbert providencia uma fundamentação lógica sólida para o modelo de Euclides. Apresenta uma teoria de área rigorosa, formalizando a noção de "igual conteúdo" usada sem definição por Euclides. O modelo de Hilbert estabelece uma correspondência entre a noção geométrica de "igual conteúdo" com a noção aritmética de "medida de área". À noção de igualdade de figuras proposta por Euclides, corresponderá a noção de igualdade de área (igual conteúdo) em Hilbert. Hilbert associa a cada figura um número, a medida de sua área (função área).

Hilbert formulou 21 postulados geométricos conhecidos como Axiomas de Hilbert. (veja Anexo 2)

A partir desta axiomática define-se Plano de Hilbert. Um plano de Hilbert é um conjunto de pontos juntamente com determinados subconjuntos ('retas') e noções não definidas de ordem ('estar entre'), congruência de segmentos de retas e congruência de ângulos que satisfazem os axiomas de incidência (I.1)-(I.3), os axiomas de ordem (B.1)-(B.4) e os axiomas de congruência (C.1)-(C.6). Importante notar que o axioma das paralelas (P) não está incluído no Plano de Hilbert. Os axiomas do Plano de Hilbert formam a base para as geometrias euclidiana e não-euclidiana sendo chamado de geometria neutra, já que não inclui o axioma das paralelas. No Plano de Hilbert, as definições, postulados e noções comuns de Euclides são substituídos pelas noções não definidas, definições e axiomas de Hilbert (Hartshorne, 2000). O plano de Euclides representa a moderna formulação da base axiomática para o desenvolvimento da geometria dos 'Elementos' de Euclides.

[2]Hilbert também utiliza-se desta relação.



Perímetros, áreas e volumes

22 Em seu caderno, determine a área das seguintes regiões planas usando ▪ como unidade:

Responda: qual é o perímetro da figura **B** usando ___ como unidade?

Área da região retangular

Considerando o centímetro quadrado como unidade de área, a região retangular ABCD, abaixo, contém $2 \cdot 5$ unidades de área ou 10 cm^2. Assim, sua área é de 10 cm^2. Lembra-se? A área de qualquer região retangular é dada pelo produto da medida do comprimento pela medida da largura, ou seja:

$A = c \cdot \ell$

Em particular, quando a região retangular é *quadrada*, temos:

$\text{Área} = \ell \cdot \ell$ ou $A = \ell^2$

23 Determine em seu caderno a área destas regiões:

a) 3,5 m; 2 m

b) 4,5 m

c) 4 cm; 0,2 m

24 Determine a área destas regiões pintadas:

a) 5 cm; 2 cm; 3 cm

b) 2,5 m; 2,5 m; 4,5 m; 7,5 m

25 Um terreno quadrado tem 400 m^2 de área. Quanto mede o lado desse terreno?

26 O jardim de Otávio tem a forma retangular com 6 m de comprimento e 21 m^2 de área. Qual é sua largura?

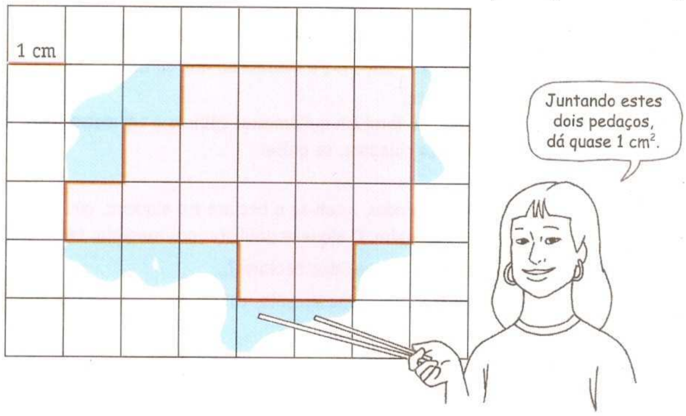
269

Figura 2.2: Dante, "Tudo é matemática", Capítulo 9 - Perímetros, áreas e volumes, 2006.

Calculando áreas e volumes

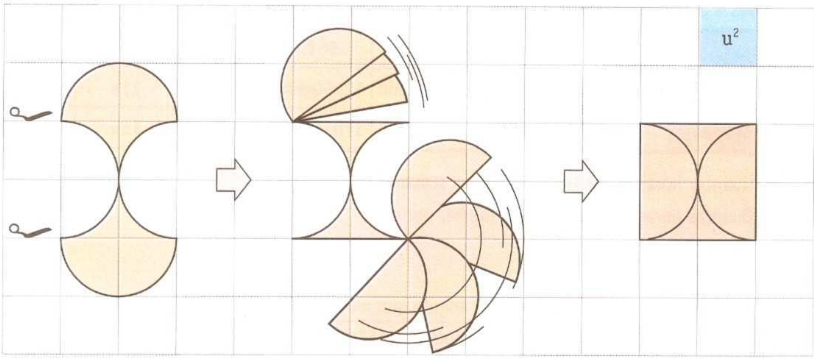
A geometria envolve o cálculo de perímetros, áreas e volumes das formas geométricas. Para o cálculo de uma área, há vários recursos.

Há casos em que contamos os quadradinhos, fazendo compensações com os pedaços. Veja:



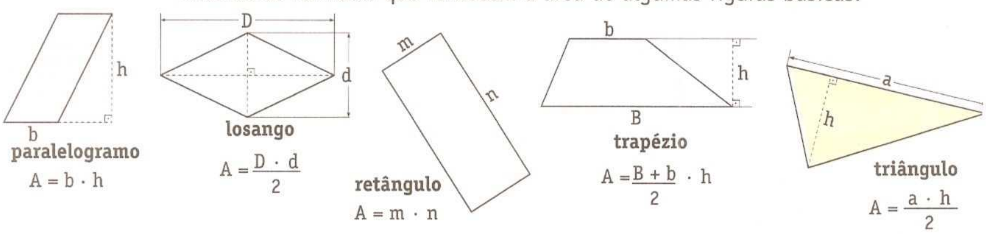
inteiros: 17 cm²
pedaços: 6,5 cm²
total: 23,5 cm²
área aproximada = 23,5 cm²

Em outras situações, decompomos a figura e recompomos suas partes. Neste exemplo, a figura é transformada num quadrado equivalente, isto é, de mesma área. Logo, a área da figura original é 4 u².



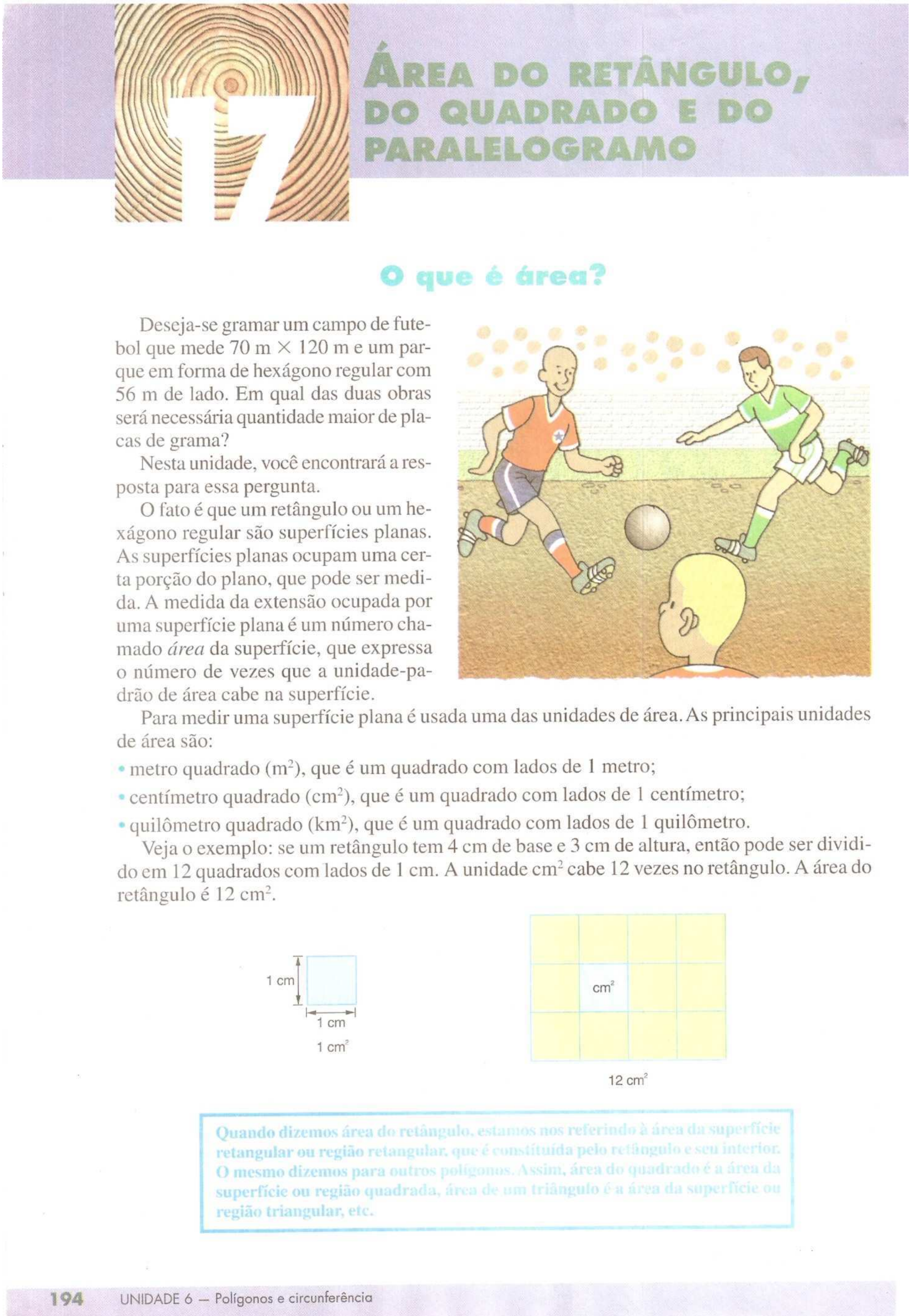
*Todas as fórmulas citadas ao lado foram justificadas na 7ª série e as idéias envolvidas são retomadas no **Conversando sobre o texto** e nos **Problemas e exercícios**.*

Recorde as fórmulas que fornecem a área de algumas figuras básicas:



80

Figura 2.3: Imenes e Lellis, "Matemática para todos", Capítulo 4 - Medidas, 2002.



17 ÁREA DO RETÂNGULO, DO QUADRADO E DO PARALELOGRAMO

O que é área?

Deseja-se gramar um campo de futebol que mede 70 m × 120 m e um parque em forma de hexágono regular com 56 m de lado. Em qual das duas obras será necessária quantidade maior de placas de grama?

Nesta unidade, você encontrará a resposta para essa pergunta.

O fato é que um retângulo ou um hexágono regular são superfícies planas. As superfícies planas ocupam uma certa porção do plano, que pode ser medida. A medida da extensão ocupada por uma superfície plana é um número chamado *área* da superfície, que expressa o número de vezes que a unidade-padrão de área cabe na superfície.

Para medir uma superfície plana é usada uma das unidades de área. As principais unidades de área são:

- metro quadrado (m^2), que é um quadrado com lados de 1 metro;
- centímetro quadrado (cm^2), que é um quadrado com lados de 1 centímetro;
- quilômetro quadrado (km^2), que é um quadrado com lados de 1 quilômetro.

Veja o exemplo: se um retângulo tem 4 cm de base e 3 cm de altura, então pode ser dividido em 12 quadrados com lados de 1 cm. A unidade cm^2 cabe 12 vezes no retângulo. A área do retângulo é 12 cm^2.

Quando dizemos área do retângulo, estamos nos referindo à área da superfície retangular ou região retangular, que é constituída pelo retângulo e seu interior. O mesmo dizemos para outros polígonos. Assim, área do quadrado é a área da superfície ou região quadrada, área de um triângulo é a área da superfície ou região triangular, etc.

194 UNIDADE 6 — Polígonos e circunferência

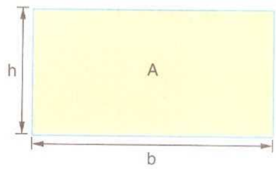
Figura 2.4: Gelson Iezzi e outros, "Matemática e realidade", Capítulo 17 - Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo, 2001.

Não é usual medir diretamente a área de uma superfície. Quando queremos saber a área de um terreno não é usual pegar uma placa de 1 m^2 e verificar quantas vezes ela cabe no terreno. Quando desejamos medir a superfície de uma folha de caderno não é usual pegar uma plaquinha de 1 cm^2 e verificar quantas vezes ela cabe na folha.

Em geral, para medir uma superfície plana com forma simples, usa-se uma fórmula matemática. Nas páginas seguintes deste livro, você encontrará algumas dessas fórmulas.

E se a superfície a ser medida tiver um contorno mais complicado? Também veremos muitos exemplos mais adiante.

Área do retângulo



Área do retângulo é igual ao produto da medida da base pela altura.

Indicamos: área = A, base = b, altura = h.

Temos:

$$\boxed{A = b \times h}$$

Observação:

A base e a altura devem ter medidas na mesma unidade. Se essa unidade for o centímetro, a área será dada em centímetros quadrados; se for o metro, ela será dada em metros quadrados, etc.

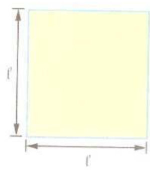
Exemplo:

Vamos calcular a área de um retângulo de base 5 cm e altura 3 cm:

$$\left.\begin{matrix} b = 5 \\ h = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = b \times h = 5 \times 3 = 15$$

Portanto, a área é 15 cm^2.

Área do quadrado



Vamos representar por ℓ o lado do quadrado.

Aplicando a fórmula da área do retângulo, para $b = \ell$ e $h = \ell$, temos:

$$A = b \times h = \ell \times \ell = \ell^2$$

Logo, a área do quadrado é igual ao quadrado da medida do lado:

$$\boxed{A = \ell^2}$$

Exemplo:

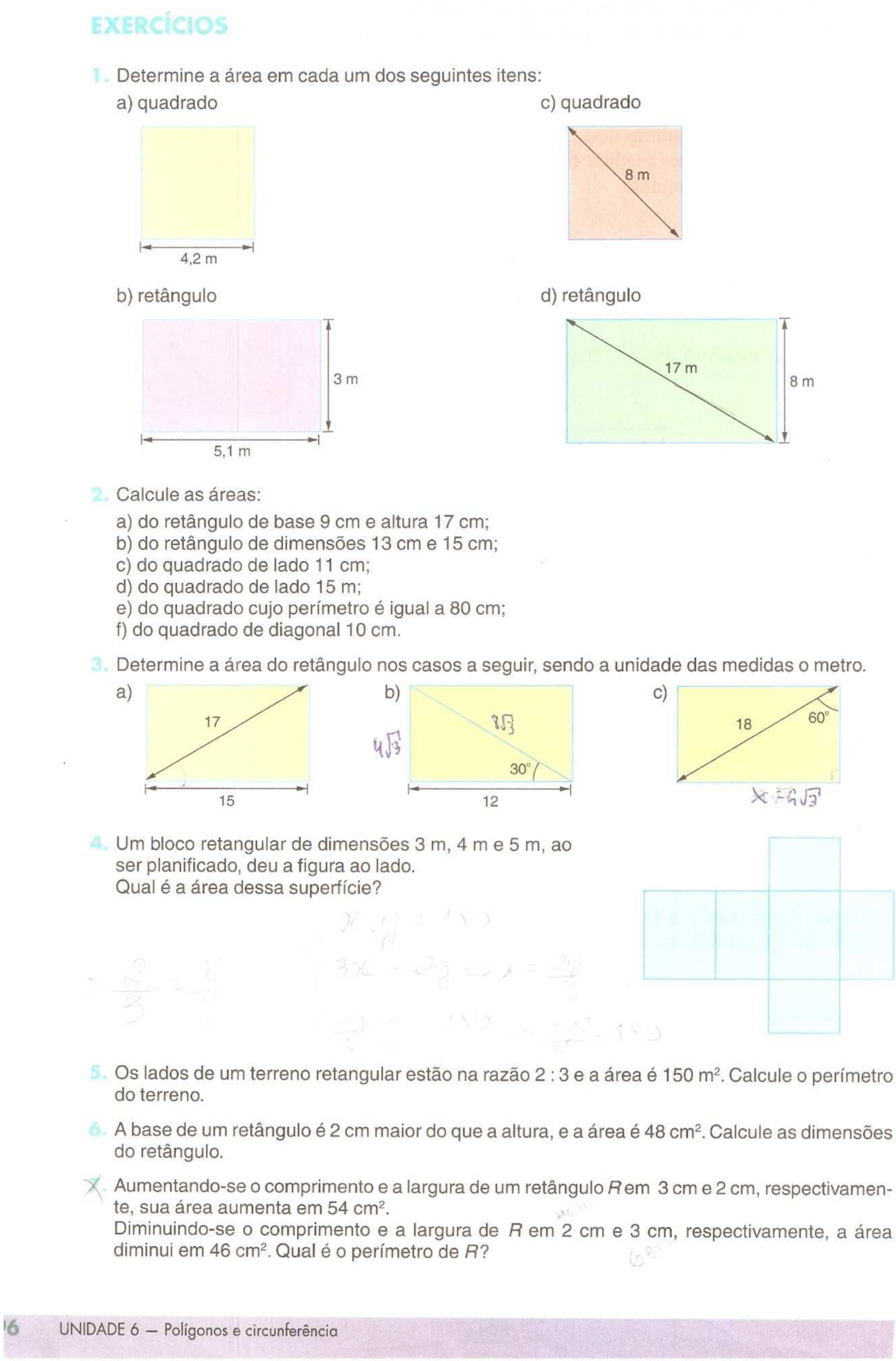
Para um quadrado de lado 2,5 cm, temos:

$$A = \ell^2 = (2{,}5)^2 = 6{,}25$$

Portanto, a área é 6,25 cm^2.

CAPÍTULO 17 — Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo 195

Figura 2.5: Gelson Iezzi e outros, "Matemática e realidade", Capítulo 17 - Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo, 2001.



EXERCÍCIOS

1. Determine a área em cada um dos seguintes itens:

a) quadrado

4,2 m

b) retângulo

3 m

5,1 m

c) quadrado

8 m

d) retângulo

17 m

8 m

2. Calcule as áreas:

a) do retângulo de base 9 cm e altura 17 cm;
b) do retângulo de dimensões 13 cm e 15 cm;
c) do quadrado de lado 11 cm;
d) do quadrado de lado 15 m;
e) do quadrado cujo perímetro é igual a 80 cm;
f) do quadrado de diagonal 10 cm.

3. Determine a área do retângulo nos casos a seguir, sendo a unidade das medidas o metro.

a) 17; 15

b) $8\sqrt{3}$; $4\sqrt{3}$; 30°; 12

c) 18; 60°

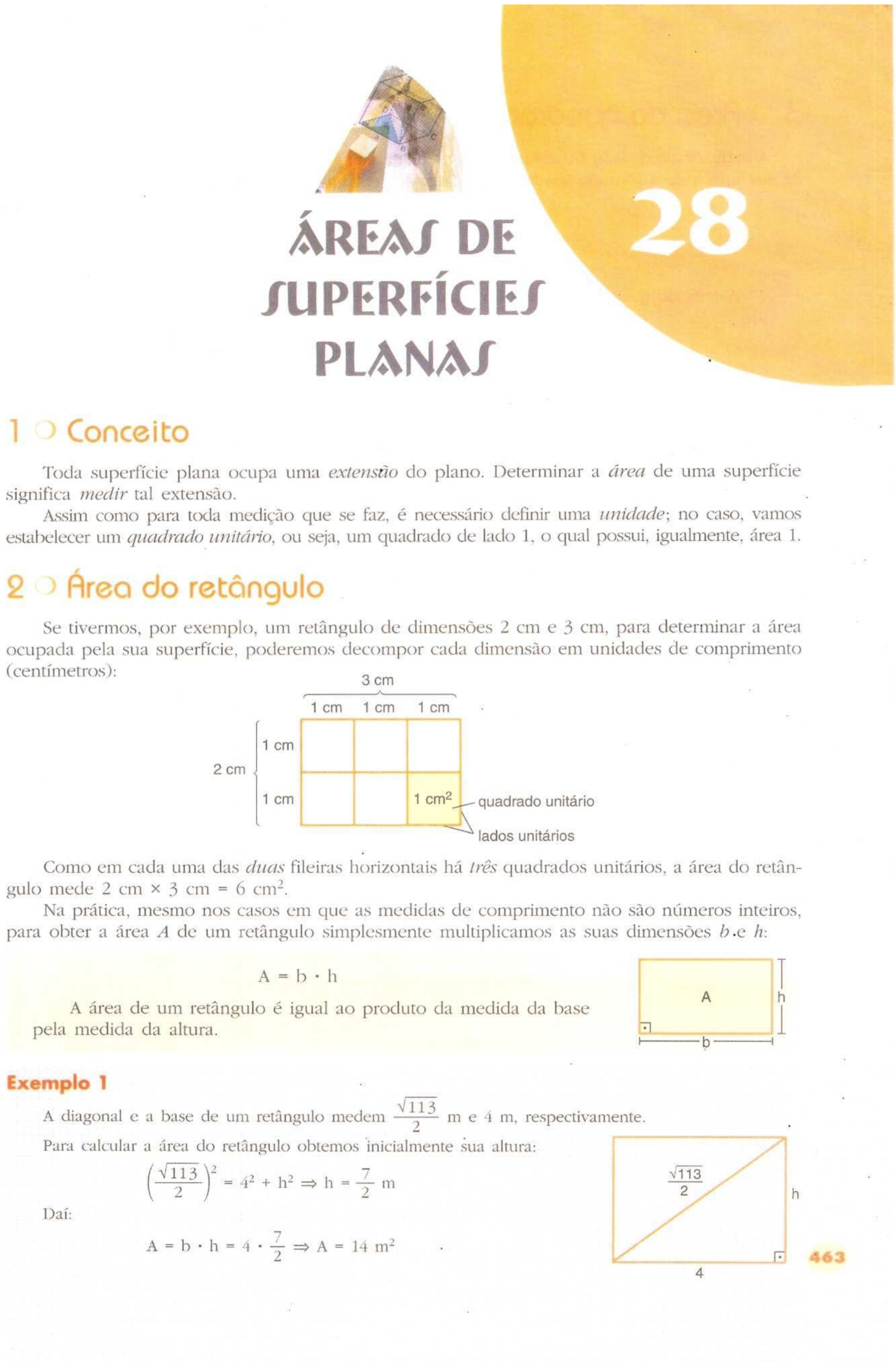
4. Um bloco retangular de dimensões 3 m, 4 m e 5 m, ao ser planificado, deu a figura ao lado. Qual é a área dessa superfície?

5. Os lados de um terreno retangular estão na razão 2 : 3 e a área é 150 m². Calcule o perímetro do terreno.

6. A base de um retângulo é 2 cm maior do que a altura, e a área é 48 cm². Calcule as dimensões do retângulo.

7. Aumentando-se o comprimento e a largura de um retângulo R em 3 cm e 2 cm, respectivamente, sua área aumenta em 54 cm². Diminuindo-se o comprimento e a largura de R em 2 cm e 3 cm, respectivamente, a área diminui em 46 cm². Qual é o perímetro de R?

Figura 2.6: Gelson Iezzi e outros, "Matemática e realidade", Capítulo 17 - Área do retângulo, do quadrado e do paralelogramo, 2001.



ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

28

1 Conceito

Toda superfície plana ocupa uma *extensão* do plano. Determinar a *área* de uma superfície significa *medir* tal extensão.

Assim como para toda medição que se faz, é necessário definir uma *unidade*; no caso, vamos estabelecer um *quadrado unitário*, ou seja, um quadrado de lado 1, o qual possui, igualmente, área 1.

2 Área do retângulo

Se tivermos, por exemplo, um retângulo de dimensões 2 cm e 3 cm, para determinar a área ocupada pela sua superfície, poderemos decompor cada dimensão em unidades de comprimento (centímetros):

Como em cada uma das *duas* fileiras horizontais há *três* quadrados unitários, a área do retângulo mede 2 cm × 3 cm = 6 cm².

Na prática, mesmo nos casos em que as medidas de comprimento não são números inteiros, para obter a área A de um retângulo simplesmente multiplicamos as suas dimensões b e h:

$$A = b \cdot h$$

A área de um retângulo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

Exemplo 1

A diagonal e a base de um retângulo medem $\frac{\sqrt{113}}{2}$ m e 4 m, respectivamente.

Para calcular a área do retângulo obtemos inicialmente sua altura:

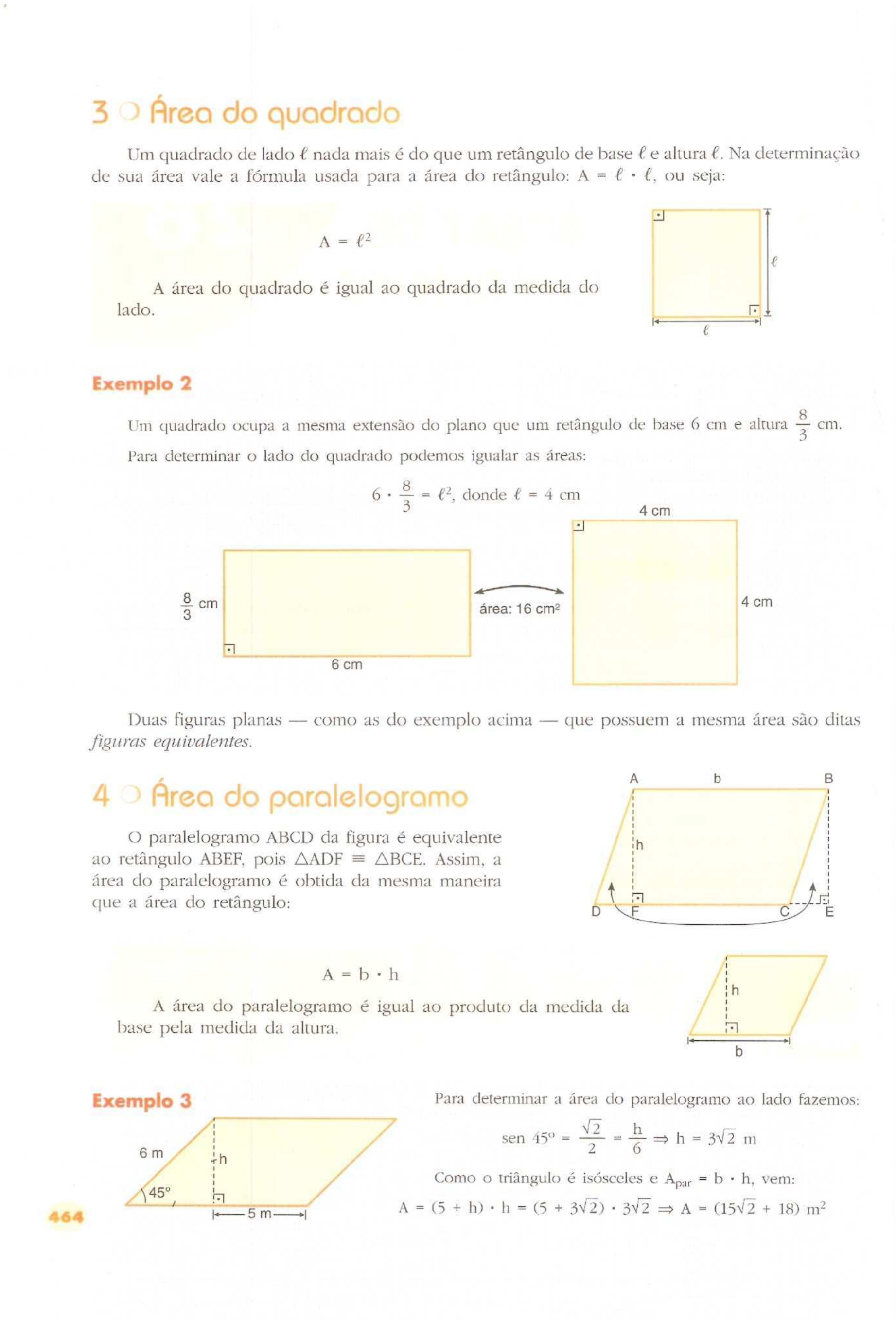
$$\left(\frac{\sqrt{113}}{2}\right)^2 = 4^2 + h^2 \Rightarrow h = \frac{7}{2} \text{ m}$$

Daí:

$$A = b \cdot h = 4 \cdot \frac{7}{2} \Rightarrow A = 14 \text{ m}^2$$

463

Figura 2.7: Gelson Iezzi e outros, “Matemática”, Capítulo 28 - Áreas de superfícies planas, 2002.



3 Área do quadrado

Um quadrado de lado ℓ nada mais é do que um retângulo de base ℓ e altura ℓ. Na determinação de sua área vale a fórmula usada para a área do retângulo: $A = \ell \cdot \ell$, ou seja:

$$A = \ell^2$$

A área do quadrado é igual ao quadrado da medida do lado.

Exemplo 2

Um quadrado ocupa a mesma extensão do plano que um retângulo de base 6 cm e altura $\frac{8}{3}$ cm.

Para determinar o lado do quadrado podemos igualar as áreas:

$$6 \cdot \frac{8}{3} = \ell^2, \text{ donde } \ell = 4 \text{ cm}$$

Duas figuras planas — como as do exemplo acima — que possuem a mesma área são ditas *figuras equivalentes*.

4 Área do paralelogramo

O paralelogramo ABCD da figura é equivalente ao retângulo ABEF, pois $\triangle ADF \equiv \triangle BCE$. Assim, a área do paralelogramo é obtida da mesma maneira que a área do retângulo:

$$A = b \cdot h$$

A área do paralelogramo é igual ao produto da medida da base pela medida da altura.

Exemplo 3

Para determinar a área do paralelogramo ao lado fazemos:

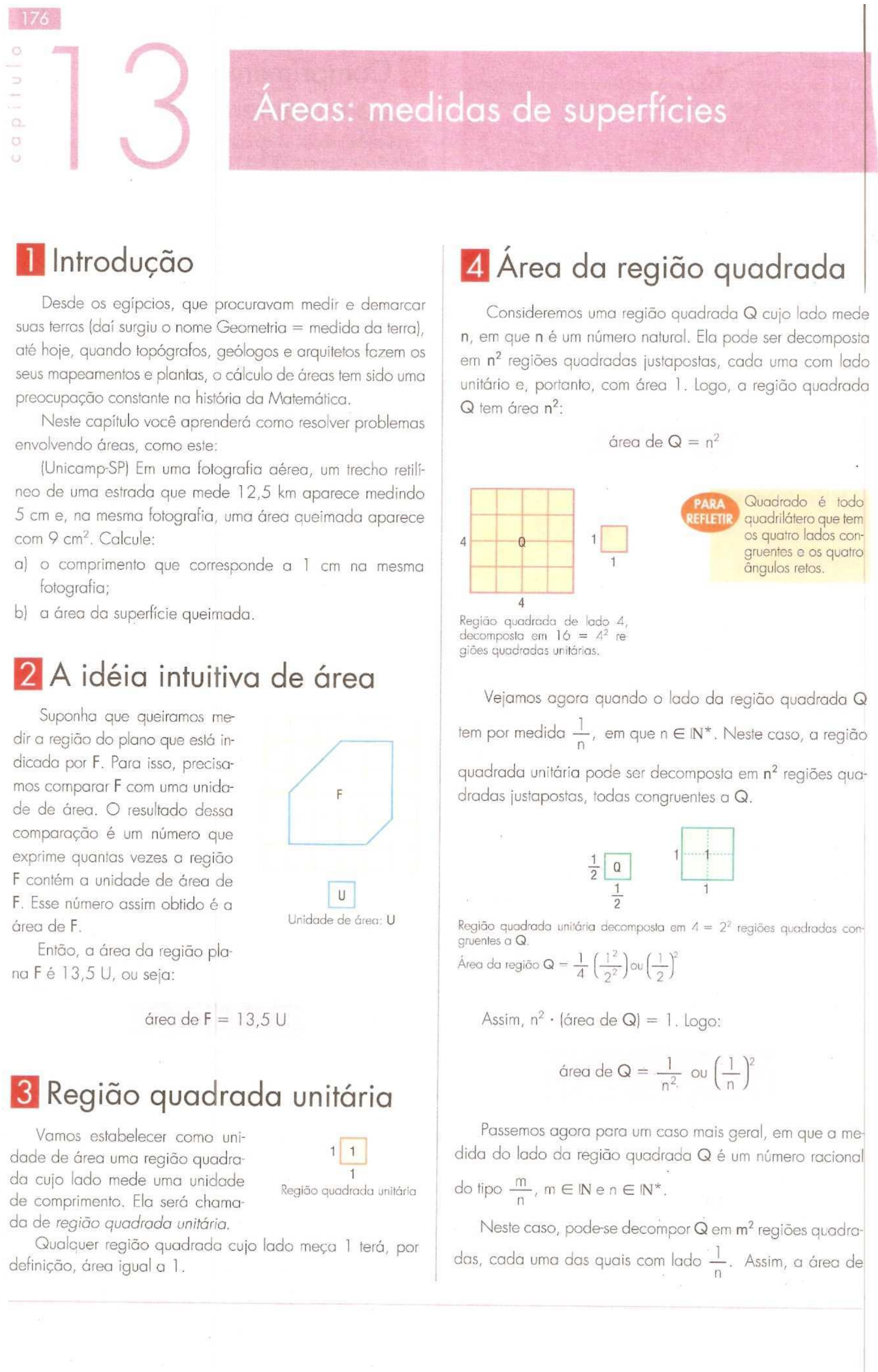
$$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{h}{6} \Rightarrow h = 3\sqrt{2} \text{ m}$$

Como o triângulo é isósceles e $A_{par} = b \cdot h$, vem:

$$A = (5 + h) \cdot h = (5 + 3\sqrt{2}) \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow A = (15\sqrt{2} + 18) \text{ m}^2$$

464

Figura 2.8: Gelson Iezzi e outros, "Matemática", Capítulo 28 - Áreas de superfícies planas, 2002.


176

capítulo 13

Áreas: medidas de superfícies

1 Introdução

Desde os egípcios, que procuravam medir e demarcar suas terras (daí surgiu o nome Geometria = medida da terra), até hoje, quando topógrafos, geólogos e arquitetos fazem os seus mapeamentos e plantas, o cálculo de áreas tem sido uma preocupação constante na história da Matemática.

Neste capítulo você aprenderá como resolver problemas envolvendo áreas, como este:

(Unicamp-SP) Em uma fotografia aérea, um trecho retilíneo de uma estrada que mede 12,5 km aparece medindo 5 cm e, na mesma fotografia, uma área queimada aparece com 9 cm^2. Calcule:

a) o comprimento que corresponde a 1 cm na mesma fotografia;

b) a área da superfície queimada.

2 A idéia intuitiva de área

Suponha que queiramos medir a região do plano que está indicada por F. Para isso, precisamos comparar F com uma unidade de área. O resultado dessa comparação é um número que exprime quantas vezes a região F contém a unidade de área de F. Esse número assim obtido é a área de F.

Unidade de área: U

Então, a área da região plana F é 13,5 U, ou seja:

área de F = 13,5 U

3 Região quadrada unitária

Vamos estabelecer como unidade de área uma região quadrada cujo lado mede uma unidade de comprimento. Ela será chamada de *região quadrada unitária*.

Região quadrada unitária

Qualquer região quadrada cujo lado meça 1 terá, por definição, área igual a 1.

4 Área da região quadrada

Consideremos uma região quadrada Q cujo lado mede n, em que n é um número natural. Ela pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, cada uma com lado unitário e, portanto, com área 1. Logo, a região quadrada Q tem área n^2:

área de Q = n^2

Região quadrada de lado 4, decomposta em $16 = 4^2$ regiões quadradas unitárias.

PARA REFLETIR: Quadrado é todo quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

Vejamos agora quando o lado da região quadrada Q tem por medida $\frac{1}{n}$, em que n ∈ IN*. Neste caso, a região quadrada unitária pode ser decomposta em n^2 regiões quadradas justapostas, todas congruentes a Q.

Região quadrada unitária decomposta em $4 = 2^2$ regiões quadradas congruentes a Q.

Área da região Q = $\frac{1}{4}$ $\left(\frac{1^2}{2^2}\right)$ ou $\left(\frac{1}{2}\right)^2$

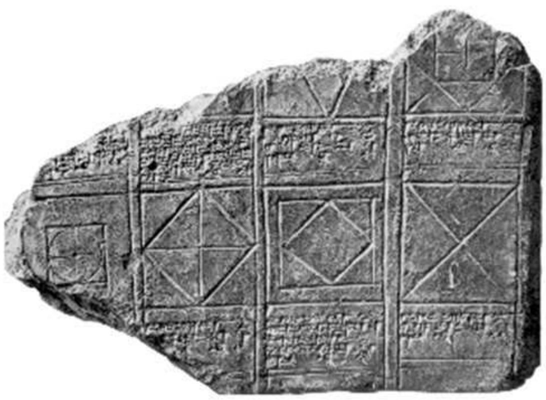
Assim, $n^2 \cdot$ (área de Q) = 1. Logo:

área de Q = $\frac{1}{n^2}$ ou $\left(\frac{1}{n}\right)^2$

Passemos agora para um caso mais geral, em que a medida do lado da região quadrada Q é um número racional do tipo $\frac{m}{n}$, m ∈ IN e n ∈ IN*.

Neste caso, pode-se decompor Q em m^2 regiões quadradas, cada uma das quais com lado $\frac{1}{n}$. Assim, a área de

Figura 2.9: Dante, "Matemática", Capítulo 13 - Áreas: medidas de superfícies, 2008.



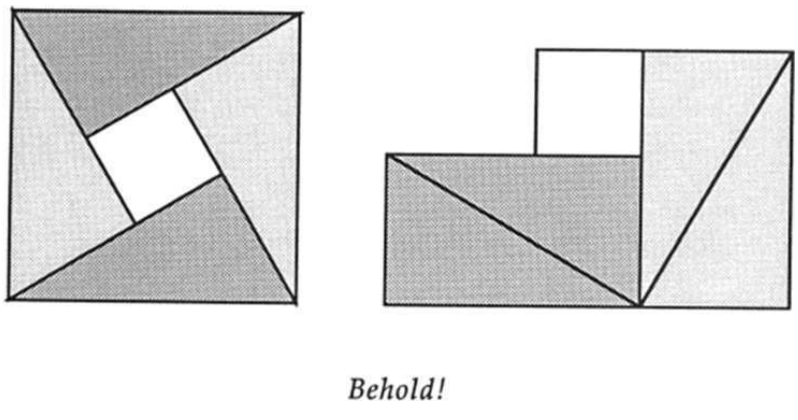


Figura 2.10: Bháskara, século XII

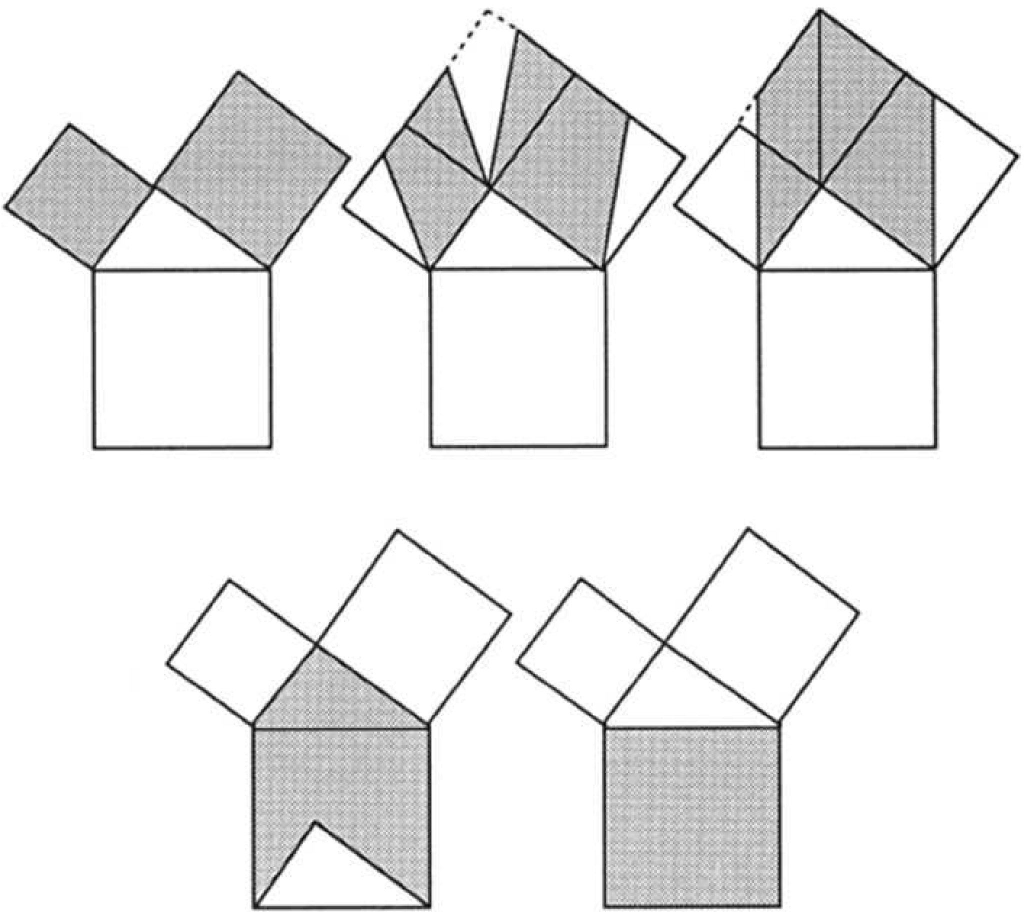


Figura 2.11: Baseado na prova de Euclides.

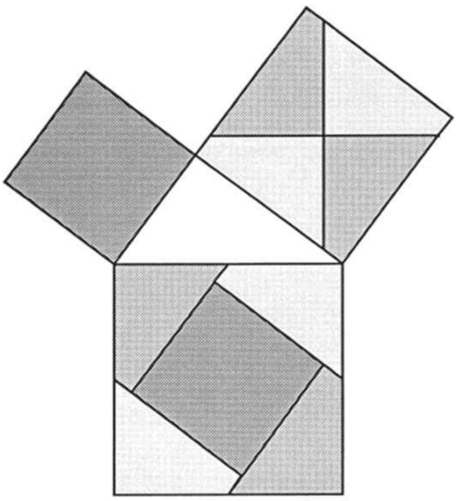


Figura 2.12: H. E. Dudeney, 1917

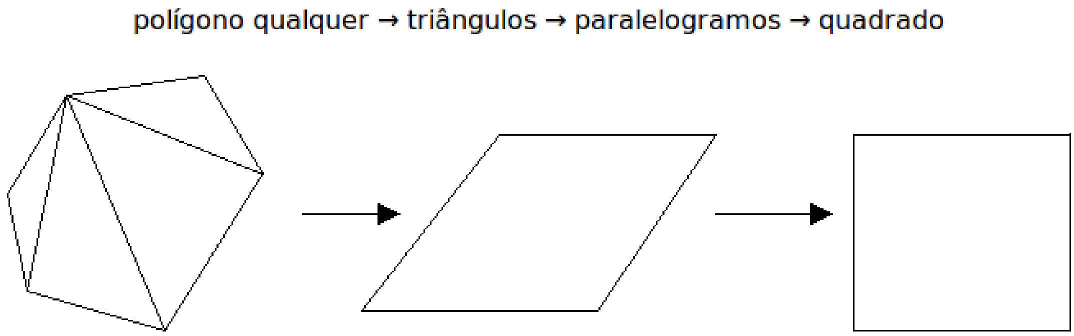


Figura 2.13: Método grego de quadratura de figuras poligonais.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica da Nossa Proposta Didática

Para a elaboração de nossa proposta didática, desenvolvida ao longo das 5 oficinas, apoiamo-nos em dois referenciais teóricos distintos: a Teoria de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele e a Teoria de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval. O elo principal entre os dois modelos, que fundamentou o nosso trabalho, é a **linguagem**. Van Hiele preconiza que a principal causa das dificuldades na aprendizagem da Geometria acontece por conta da inadequação do sistema lingüístico usado pelo professor, que, na maioria das vezes, não corresponde ao nível do pensamento geométrico dos alunos. Duval, por sua vez, apresenta uma abordagem cognitiva da aprendizagem matemática e salienta o papel fundamental da linguagem, discursiva e não-discursiva (ver figura 3.1), na construção dos conceitos matemáticos. Esta convergência entre os dois modelos, no que concerne ao papel da linguagem no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, orientou a formulação de nossa intervenção didática.

Outro fator destacado como preponderante pelos dois modelos é o **papel do professor** no processo educacional. Van Hiele destaca que não há aprendizagem sem uma intervenção planejada, organizada e conduzida pelo professor. Não há aprendizagem automática. Duval, de forma semelhante, atribui ao professor o papel de condução do processo de conhecimento (noésis) através das múltiplas representações semióticas (semiósis)do objeto matemático ensinado, trabalhando suas transformações. Desta forma, a estrutura das oficinas foi elaborada tendo como fundamentos estes dois pilares: a linguagem, enquanto forma de expressão e compreensão dos objetos matemáticos e, o papel do professor, responsável pela condução do processo de ensino. Utilizamos o Modelo de van Hiele para a testagem, inicial e final, do nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes.

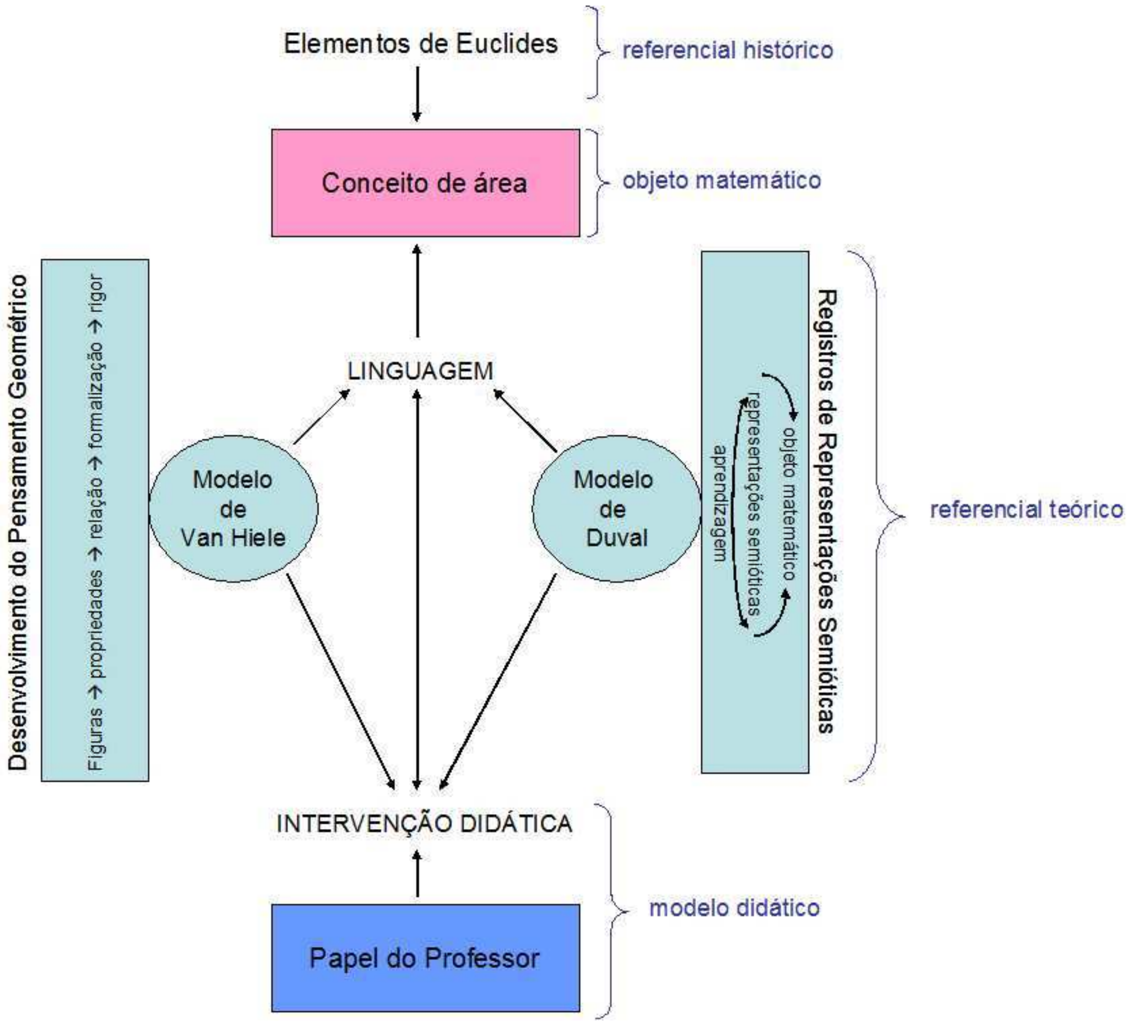


Figura 3.1: A intervenção didática proposta nesta pesquisa tem como pressupostos teóricos os Modelos de Duval e de van Hiele que acentuam o papel da linguagem no ensino e na aprendizagem de Geometria. O objeto matemático estudado é o conceito de área a partir da obra os Elementos de Euclides.

A partir deste enfoque, propusemos a seguinte sequência didática:

- **OFICINA 1: Exploração do Conceito de Equivalência de áreas.** O conceito de equivalência de áreas é trabalhado a partir da manipulação de material concreto. Trabalha-se as representações semióticas (figural e discursiva) do objeto matemático área e as transformações entre as representações

(Modelo de Duval). O sistema lingüístico usado é adequado ao nível 0 do pensamento geométrico segundo van Hiele (reconhecimento das figuras).

- **OFICINA 2: A Transformação de figuras.** A ideia explorada nesta oficina é a de que figuras de formas diferentes podem ter a mesma área. Como preconiza Duval, trabalhamos a dupla representação semiótica do objeto área (figural e discursiva) e suas transformações. Exploramos as propriedades das figuras geométricas a partir de material concreto, atividade adequada ao nível 1 do pensamento geométrico dos alunos, segundo o Modelo de van Hiele.

- **OFICINA 3: Os Elementos e a Construção com Régua e Compasso.** Nesta oficina trabalhamos a partir do texto dos Elementos de Euclides, explorando a representação figural do conceito de área (desenho com régua e compasso) e a representação discursiva, discurso lógico-argumentativo de Euclides. Fundamentamo-nos em Duval, dupla representação semiótica do objeto e suas transformações e em van Hiele, respeitando o sistema lingüístico relativo ao nível 2 do desenvolvimento do pensamento geométrico, reconhecimento das relações entre as propriedades das figuras geométricas.

- **OFICINA 4: As Demonstrações o o Teorema de Pitágoras em Euclides.** Nesta oficina trabalhamos a partir do referencial teórico de van Hielel para o nível 3 do pensamento geométrico, onde há uma formalização e iniciação ao pensamento dedutivo. As atividades desenvolveram-se a partir da dupla representação semiótica (figural e discursiva) para o conceito de área, como preconiza Duval.

- **OFICINA 5: Quadratura de figuras planas.** Com esta quinta oficina pretendemos completar o trabalho didático proposto para a construção do conceito de área de forma integral, contemplando o seu aspecto geométrico em complementação a seu aspecto numérico-algébrico. Apoiamo-nos em Duval para desenvolver as atividades a partir de duas representações semióticas (figural e discursiva), privilegiando a conversão entre os dois registros. Buscamos propiciar aos alunos meios para atingir o nível 4 de van Hiele, onde o rigor de um modelo geométrico axiomático pode ser compreendido.

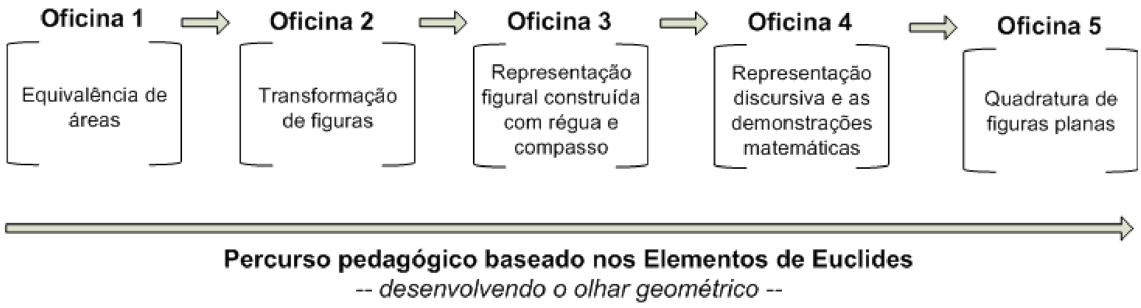


Figura 3.2: A intervenção didática proposta.

3.1 O Modelo de Van Hiele: Desenvolvimento do Pensamento Geométrico

O Modelo de Van Hiele foi desenvolvido pelo casal Dina van Hiele-Geldof e Pierre Van Hiele, professores holandeses, a partir da observação das dificuldades que seus alunos apresentavam no aprendizado de geometria. Este modelo disponibiliza um instrumental de avaliação do nível de aprendizado geométrico do aluno e, também, um caminho pedagógico para sanar as dificuldades do processo de ensino de Geometria. Em 1957, os Van Hiele defenderam suas teses de doutorado, na Universidade de Utrecht, Holanda. O Modelo proposto pelos van Hiele apresenta, ao mesmo tempo, uma abordagem cognitiva e uma abordagem pedagógica, dando destaque ao papel do professor no processo ensino/aprendizagem de Geometria (Nasser, 1992). O modelo foi logo adotado no currículo escolar da antiga União Soviética (1968) mas não obteve o mesmo pronto reconhecimento nos países europeus e americanos. Somente a partir da publicação do livro “Mathematics as an Educational Task” (1973) de Hans Freudenthal, orientador dos van Hiele, é que a teoria tornou-se conhecida nos demais países. Izaak Wirszup, em abril de 1974, apresentou no encontro anual do NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) em Atlantic City, NJ, um artigo “Some Breakthroughs in the Psychology of Learning and Teaching Geometry” sendo o primeiro a apresentar a teoria dos van Hiele no continente americano. Dois anos depois seu artigo é publicado em Space and Geometry: papers from a Research Workshop, promovendo maior visibilidade da Teoria dos van Hiele. A partir daí, vários outros trabalhos foram desenvolvidos por diversos pesquisadores. Entre 1979 e 1982, Zalman Usiskin, professor/pesquisador do Departamento de Educação da Universidade de Chicago, desenvolveu um projeto (CDASSG - Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry) envolvendo 2700 alunos de 13 diferentes escolas americanas (high schools) com o propósito de verificar a aplicação do Modelo de van Hiele. Concluiu, entre outras coisas,

> *"... este estudo confirma o uso da teoria de van Hiele para explicar por que muitos alunos têm dificuldades de aprendizagem e desempenho em salas de aula de geometria."*
>
> (Usiskin, 1982, p. 89)

O modelo de van Hiele sugere que a principal razão para as dificuldades no ensino tradicional da geometria é o fato de que o conteúdo apresentado pelos professores não se encontra, muitas vezes, ajustado ao nível de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. Cabe ao professor selecionar atividades que auxiliem seus alunos a progredirem nos níveis de raciocínio geométrico. Os van Hiele propõem que o ensino de geometria deve compreender cinco fases:

1) **Informação:** o aluno trabalha com o material que o professor preparou previamente para se familiarizar com a sua estrutura, orientado por perguntas formuladas pelo professor;

2) **Orientação dirigida:** o aluno segue as atividades propostas pelo professor;

3) **Explicação:** o aluno é estimulado a expressar o que aprendeu sobre o material usando a linguagem adequada;

4) **Orientação livre:** o aluno é estimulado a buscar soluções próprias para outros problemas apresentados;

5) **Integração:** o professor ajuda o aluno a fazer uma síntese do conteúdo estudado, promovendo uma visão geral do assunto.

O Modelo de Van Hiele tem as seguintes características:

1) **Ordem:** o progresso dos alunos ao longo dos níveis de pensamento segue a ordem do modelo que é invariável (um aluno não pode chegar ao nível n sem passar pelo nível n-1), além disto o aluno 'passa' por todos os níveis;

2) Adjacência: em cada nível de pensamento o que era intrínseco no nível anterior se torna extrínseco no nível atual;

3) Distinção: cada nível tem seus próprios símbolos linguísticos e sua própria rede de relações simbólicas;

4) Separação: duas pessoas em níveis diferentes não podem se entender.

O Modelo Van Hiele identifica cinco níveis (numerados, originalmente, de 0 a 4, e em outros estudos, de 1 a 5) de pensamento no desenvolvimento da compreensão geométrica dos alunos:

Nível 0: Visualização. Neste nível, os objetos do pensamento são as formas e como elas se apresentam. Os alunos têm uma impressão global das características visuais da figura, mas não são capazes de explicitar claramente suas idéias. O importante é a aparência da forma. Os alunos podem, neste nível, acreditar que um quadrado apresentado com os lados oblíquos em relação à folha de papel seja um losango.

Nível 1: Análise. Os estudantes são capazes de reconhecer as propriedades das figuras. Pensam, por exemplo, o que faz um retângulo ser um retângulo? Quais são as características que definem esta figura?

Nível 2: Classificação. Os estudantes são capazes de classificar figuras por suas propriedades mas ainda não trabalham em um sistema matemático formal. Os objetos de pensamento são as propriedades de formas. Os alunos começam a pensar, por exemplo, "Se é um retângulo, então ele tem todos os ângulos retos." Os alunos começam a pensar sobre as informações mínimas necessárias para que, por exemplo, um quadrilátero seja um quadrado.

Nível 3: Dedução. Os objetos de pensamento, neste nível, são as relações entre as propriedades dos objetos geométricos. Os alunos podem explorar as relações, produzir conjecturas, e começar a decidir se as conjecturas são verdadeiras ou falsas. A estrutura dos axiomas, definições, teoremas, etc, começa a se desenvolver. Os alunos são capazes de trabalhar com as declarações abstratas e tirar conclusões baseadas mais na lógica do que na intuição.

Nível 4: Rigor. Os alunos são capazes de compreender sistemas axiomáticos diferentes para a geometria. Geometrias não-euclidianas podem ser entendidas.

O papel do professor é preponderante no processo de ensino e de aprendizagem de Geometria já que, segundo os van Hiele, a passagem de um nível cognitivo para o seguinte não se dá naturalmente. É necessária uma intervenção pedagógica apropriada do professor para esta conquista. Além disso, o Modelo van Hiele explica o motivo pelo qual a maior parte dos alunos não alcança os níveis mais avançados do pensamento geométrico. Segundo van Hiele o aluno, estando em um determinado nível cognitivo, não é capaz de compreender um conteúdo desenvolvido em um nível superior ao seu.

3.1.1 A Nossa Proposta Didática Fundamentada no Modelo de Van Hiele

Utilizamos o Modelo de van Hiele, nesta pesquisa, como fundamentação teórica para algumas finalidades específicas, explicitadas a seguir.

Inicialmente, na concepção da intervenção didática, baseamo-nos nas cinco fases que, segundo Van Hiele, devem ser desenvolvidas no ensino da Geometria: informação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Em todas as oficinas procuramos contemplar estas fases, oferecendo aos alunos condições para uma compreensão integral dos temas estudados.

O Modelo de Van Hiele preconiza que o desenvolvimento do pensamento geométrico se dá segundo uma hierarquia de níveis de compreensão: visualização, análise, classificação, dedução e , por último, rigor. Assim, o nível de compreensão dos alunos deve ser respeitado para haver progresso na aprendizagem geométrica. Formulamos as oficinas a partir deste referencial, sendo que o papel da linguagem foi preponderante para o desenvolvimento dos trabalhos pois, segundo van Hiele (Usiskin, 1982) a cada nível de maturidade do pensamento geométrico corresponde um sistema linguístico próprio, não sendo possível, para o aluno, compreender uma linguagem distinta da do seu nível. A figura foi bastante utilizada como linguagem preponderante na construção do pensamento geométrico.O texto de Euclides, Os Elementos, é extraordinariamente rico neste quesito e foi bastante utilizado nas oficinas.

Ressaltamos, ainda, que o papel do professor como responsável pela condução do processo de ensino, destacado no Modelo de van Hiele, é pressuposto teórico para a proposta da nossa intervenção didática. Neste sentido, o conceito de área é trabalhado, em níveis sequenciais de complexidade do pensamento geométrico, partindo da exploração das figuras e suas propriedades (Oficinas 1 e 2, Seção 4.3) e, posteriormente, a linguagem matemática axiomática, associada à representação figural, é estudada a partir do texto de Euclides (Oficinas 3, 4 e 5, Seção 4.3). O Modelo de Van Hiele foi utilizado, também, como teste de avaliação do desenvolvimento do pensamento geométrico dos licenciandos, no início e no final das atividades desenvolvidas.

3.2 O Modelo de Raymond Duval: Registros de Representações Semióticas

Semiótica é uma palavra de origem grega (semeion = signos) que significa a ciência dos signos. A Semiótica, enquanto ciência da linguagem, surgiu no final do século XIX, início do século XX, a partir de estudos desenvolvidos na antiga União Soviética, na Europa Ocidental e nos E.U.A.. O filósofo, cientista e matemático americano, Charles Sanders Peirce (1839-1914), filho de Benjamin Peirce, um dos mais importantes matemáticos de Harvard da época, formulou a doutrina geral dos signos - a teoria peirceana. Peirce formulou, a partir da Lógica, uma teoria lógica, filosófica e científica da linguagem, denominada Semiótica. A Semiótica Peirceana pode ser considerada uma filosofia científica da linguagem. No início do século XX, os filólogos A. N. Viesselovski e A. A. Potiebniá, da antiga União Soviética, fundamentaram o estruturalismo linguístico juntamente com o linguista N.J. Marr que, por causa de desentendimentos com Stalin, não prosseguiu suas pesquisas. Estes estudos sobre a linguagem e os signos foram retomados por Lev Semenovitch Vygotsky (1896-1934), psicólogo russo, e S. M. Eisenstein, cineasta. Paralelamente, em 1910, na Europa Ocidental, F. de Saussurre, ministrou o curso de Linguística Geral, na Universidade de Genebra. Saussurre definiu, então, a língua como sendo uma estrutura direcionada por leis e regras específicas e autônomas. A língua e a fala são inseparáveis, segundo Saussure, que define Semiologia como o estudo de todos os sistemas de signos da vida social. Segundo Santaella (1999), semiótica é uma ciência que investiga as linguagens existentes, examinando os fenômenos em seu significado e sentido; aplica-se aos estudos e pesquisas das diversas ciências com o objetivo de desvendar sua existência enquanto linguagem.

Para a Educação Matemática, o nome que se destaca é o de Raymond Duval, filósofo e psicólogo francês da atualidade. Pesquisador da área de Psicologia Cognitiva do Instituto de Pesquisa em Educação Matemática (IREM) de Estrasburgo, França, tem publicado muitos trabalhos importantes para o ensino/aprendizagem de Matemática. O livro de sua autoria "Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais" trata da importância da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no âmbito da Didática da Matemática. Duval publicou inúmeras pesquisas sobre as dificuldades inerentes ao processo de ensino e de aprendizagem de Matemática propondo uma abordagem teórica sobre registros de representação semiótica, destacando a importância da linguagem no desenvolvimento das aprendizagens intelectuais.

> *"Como compreender as dificuldades muitas vezes insuperáveis que muitos alunos têm na compreensão da matemática? Qual é a natureza dessas dificuldades? Onde elas se encontram? [...] para responder a essas questões, não podemos nos restringir ao campo matemático ou à sua história. É necessária uma abordagem cognitiva, pois o objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, não é nem formar futuros matemáticos, nem dar aos alunos instrumentos que só lhe serão eventualmente úteis muito mais tarde, e sim contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análise e de visualização."*
>
> (Duval, 2003, p. 11)

Duval (2003) considera a Matemática como um domínio fértil para o estudo da importância dos diferentes sistemas semióticos e sua influência na aprendizagem intelectual. A função semiótica surge por meio da linguagem, desenho e outras representações. É a capacidade do sujeito de gerar imagens mentais de objetos ou ações e, através delas, representar o objeto ou a ação. É a função semiótica que permite o pensamento. A substituição do objeto por uma representação acontece, segundo Duval, por conta da função simbólica. Duval afirma que Pierce foi o primeiro a reconhecer a importância da diversidade inicial de tipos de signos disponíveis distinguindo três tipos de signos: os ícones, os símbolos e os índices. As questões sobre as relações entre sistemas semióticos diferentes e as possibilidades de conversão entre as representações, através da modelagem da linguagem, é um tema de importância ímpar para o ensino de Matemática, segundo Duval. Descartes e Kant estabelecem a relevância da noção de representação para toda reflexão sobre as questões de possibilidade e constituição de um certo conhecimento: não há conhecimento que possa ser mobilizado por um indivíduo sem uma atividade de representação.

> *"Lembremos que uma das características importantes da atividade matemática é a diversidade dos registros de representação semiótica que ela mobiliza obrigatoriamente. No entanto, essa diversidade raramente é levada em conta no ensino."*
>
> (Duval, 2003, p. 30)

O progresso do conhecimento, segundo Duval (2003), é vinculado diretamente à criação e ao desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem com a língua natural. O pensamento cientifico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações. Para Duval, a compreensão da Matemática (e da linguagem matemática) apresenta uma especificidade em relação às das outras ciências pois exige a mobilização de uma diversidade de registros de representação semiótica. A teoria de Representação Semiótica de Duval trata do funcionamento cognitivo onde as representações fazem uma ligação comunicativa entre o sujeito e a atividade cognitiva do pensamento, gerando diferentes formas de registros de representação do objeto. Duval destaca que para estudar os fenômenos associados ao conhecimento é preciso recorrer à noção de representação, uma vez que o conhecimento só poderá ser mobilizado através de representações. Os registros de representação semiótica são classificados em **registros multifuncionais** (a língua natural, associações verbais - representações discursivas - e as figuras geométricas - representações não-discursivas), e **registros monofuncionais** (as escritas numéricas, algébricas e simbólicas - representações discursivas - e gráficos cartesianos - representações não discursivas).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, de crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Figura 3.3: "Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)". Figura e legenda extraídas de (Duval, 2003, p. 14).

Duval (1993) considera como fundamentais para o funcionamento cognitivo e apreensão do objeto matemático, a utilização de no mínimo dois registros de representação semiótica, preferencialmente em diferentes sistemas semióticos (semiósis) e ressalta que a conceituação (noésis) somente será assimilada quando o sujeito utilizar a conversão das diferentes representações semióticas de um mesmo objeto matemático. O professor, segundo Duval, para promover o aprendizado de seus alunos, deve trabalhar com, ao menos, dois tipos de representações semióticas e as transformações entre elas (tratamento e conversão). Raymond Duval defende a idéia de que os processos cognitivos mobilizados no ensino e na aprendizagem de Matemática são próprios e singulares da Matemática, não sendo comuns a outras áreas das ciências. O principal diferencial da Matemática em relação a outras ciências refere-se ao próprio objeto de estudo. Na Matemática, os objetos de estudo só são 'alcançados' por suas representações semióticas, já que não há formas experimentais de identificá-los, como na Biologia ou na Física. Assim, a compreensão dos conceitos matemáticos passa pela capacidade de representá-los de diferentes maneiras (pelo menos duas) e transitar entre estas diversas representações (que apresentam aspectos - conteúdos - diversos para o mesmo objeto e não são 'transparentes' - um registro em relação a outro). Torna-se necessário, porém, garantir ao aluno a compreensão da distinção entre objeto matemático e suas representações. Duval distingue entre dois processos cognitivos (transformações de representações semióticas em outra representação semiótica) presentes na atividade matemática do ponto de vista do ensino/aprendizagem (que é distinto dos processos cognitivos da pesquisa matemática feita por matemáticos).

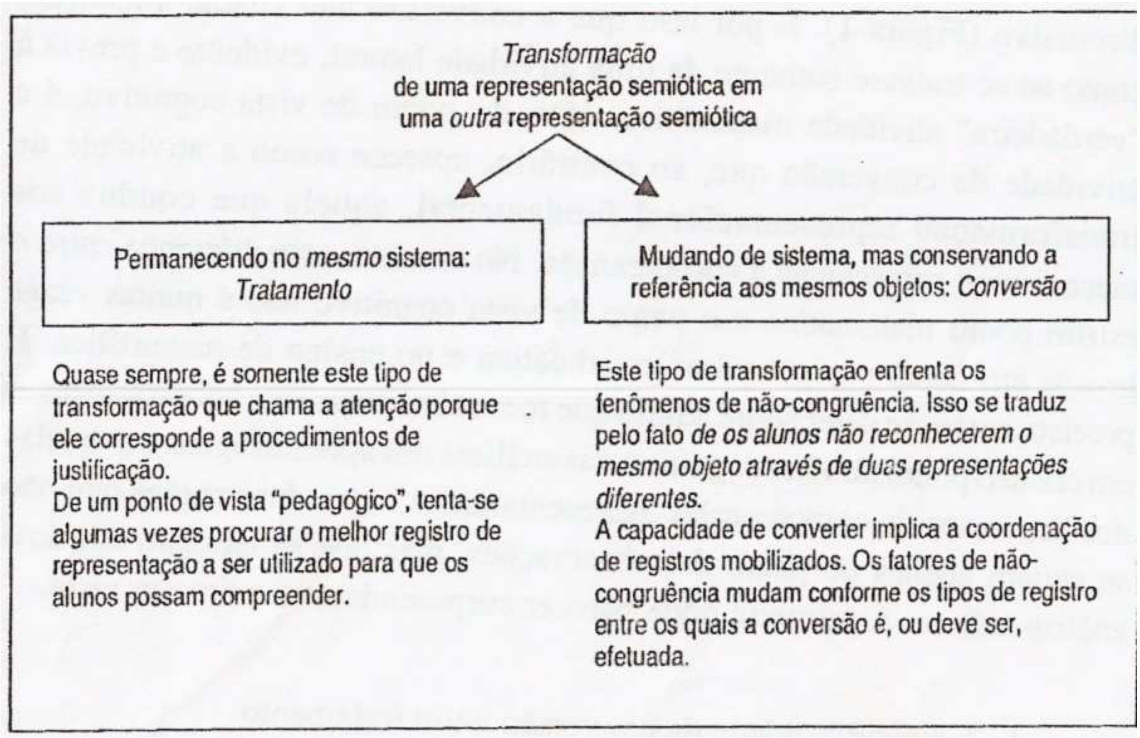


Figura 3.4: "A distinção decisiva para toda análise do funcionamento cognitivo da compreensão - dois tipos radicalmente diferentes de transformação de representações semióticas". Figura e legenda extraídas de (Duval, 2003, p. 15).

- tratamento - são transformações de registros de representações semióticas que permanecem no mesmo sistema;

- conversão - são transformações de registros de representações semióticas que mudam de sistema mas conservam referência ao mesmo objeto.

Duval (2003), ao tratar do processo ensino e da aprendizagem em Matemática, suas dificuldades, características e singularidades, critica a forma habitual de trabalho desenvolvido pelos professores que privilegiam os processos cognitivos relacionados às transformações 'tratamento' em prejuízo da exploração das transformações 'conversão'.

> *"Ora, se se quer analisar as dificuldades de aprendizagem em matemática, é preciso estudar prioritariamente a conversão das representações e não os tratamentos."*
>
> (Duval, 2003, p. 30)

Critica, também, a concepção de que a compreensão conceitual é a-semiótica (puramente mental)

> *"Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em Matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. É enganosa a idéia de que todos os registros de representação de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros. Nessa perspectiva, a oposição muitas vezes feita entre a compreensão que seria conceitual ou puramente mental e as representações semióticas que seriam externas aparece como enganadora.*
>
> *Muitas vezes, as representações mentais não passam de representações semióticas interiorizadas. As representações mentais úteis ou pertinentes em matemática são sempre representações semióticas interiorizadas em interação com um tratamento de produção externa de representações semióticas."*
>
> (Duval, 2003, p. 31)

Segundo Duval (2003), para compreender as dificuldades no processo ensino/aprendizagem (e intervir pedagogicamente no sentido de contribuir para o desenvolvimento cognitivo dos alunos) é necessário analisar prioritariamente a 'conversão' das representações ao invés dos 'tratamentos'. Para Duval, a compreensão de um conceito matemático só é alcançada a partir do desenvolvimento da capacidade de fazer **transformações** dos registros (no mínimo dois) das representações semióticas, permanecendo no mesmo sistema e, prioritariamente, entre sistemas distintos.

3.2.1 A Nossa Proposta Didática Fundamentada no Modelo de Raymond Duval

A intervenção didática proposta nesta pesquisa tem como um dos referenciais teóricos o Modelo de Representações Semióticas de Raymond Duval. É muito vasta a potencialidade de utilização deste modelo teórico sendo que no presente trabalho limitaremos o seu uso a alguns aspectos que destacaremos a seguir.

Inicialmente, fundamentamo-nos em Duval para formular os objetivos da intervenção didática que, considerando um quadro mais geral, deveria contribuir para o desenvolvimento das "capacidades de raciocínio, de análise e de visualização" (Duval, 2003, p.11) dos participantes e, de uma forma mais específica, para a construção significativa do conceito de área.

Segundo Duval, a construção de um conceito matemático está intimamente ligada às suas diferentes representações semióticas, incluindo a língua natural. O conceber matemático é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos de representação dos objetos e suas relações. Além disso, os objetos matemáticos se caracterizam pela pluraridade de representações semióticas que possuem. O fazer matemático deve mobilizar obrigatoriamente diversos registros de representações semióticas em diferentes sistemas, sem, no entanto, confundir o objeto com suas representações. O objeto matemático de nosso estudo é o conceito de área. Assim, desenvolvemos nossa intervenção didática em cinco oficinas onde pudemos trabalhar a diversidade de representações semióticas do conceito e suas relações.

- 1ª Oficina: Exploração do Conceito de Equivalência de Áreas com o Tangram;
- 2ª Oficina: A Transformação de Figura;
- 3ª Oficina: Os Elementos e as Construções com Régua e Compasso;
- 4ª Oficina: As Demonstrações e o Teorema de Pitágoras em Euclides;
- 5ª Oficina: Quadratura de Figuras Planas.

Duval preconiza que devemos trabalhar com no mínimo dois registros de representação semiótica do objeto e a conversão entre eles. Em nosso caso, trabalhamos com duas representações semióticas do conceito de área: a representação discursiva (a língua natural e a linguagem matemática axiomática) e a representação figural.

Duval também destaca o papel do professor no ensino e defende a ideia, nosso pressuposto teórico, que somente a partir de uma intervenção didática apropriada realizada pelo professor a aprendizagem do aluno é promovida. Neste sentido, exploramos as representações figural e discursiva do objeto matemático área enfatizando suas transformações (tratamento e conversão de registros). O tratamento figural está presente no trabalho de todas as oficinas, bem como a conversão de representações figural $\leftrightarrow$ discursiva.

Foi dada especial relevância às representações figurais para garantir aos alunos uma abordagem diferenciada da experiência matemática que habitualmente lhes é oferecida nas escolas. O tratamento conferido por Euclides em Os Elementos atende a estes objetivos já que o texto euclidiano trabalha concomitantemente com a linguagem escrita e a figural, associando, a todo tempo, texto e figura.A utilização das figuras auxilia no desenvolvimento do pensamento geométrico e na visualização das diversas relações entre os elementos matemáticos em questão. Particularmente, no que se refere ao Teorema de Pitágoras, explorado por nós na 4ª oficina, esta articulação entre a linguagem e a figura tem destaque já que nossos alunos nunca foram apresentados, na ampla maioria dos casos, ao tratamento geométrico dado por Euclides, conhecendo apenas o tratamento algébrico. Intencionamos, desta maneira, complementar a concepção do conceito de área pelos alunos, que possuem uma construção incompleta deste objeto.

Capítulo 4

Uma Intervenção Didática: as Oficinas

4.1 O Modelo Didático

A Figura 3.1 ilustra a estruturação da intervenção didática proposta. Por meio das 5 oficinas a seguir descritas, a intervenção didática proposta apóia-se no conceito de área desenvolvido por Euclides nos Elementos. A área é tratada enquanto atributo geométrico da figura, como grandeza geométrica. Trabalhamos o conceito de área a partir de sua dupla representação presente nos Elementos: representação figural e representação discursiva. Apoiando-nos no Modelo de Duval (2009), acreditamos que formular abordagens didáticas que permitam ao aluno transitar por duas representações (figural e discursiva) bem como o contato com um texto matemático formal, favoreça o desenvolvimento do pensamento geométrico e o raciocínio lógico-dedutivo do aluno. Pretendemos promover, desta forma, uma compreensão mais abrangente do conceito de área, não limitado à sua medida numérica e ao cálculo por meio de fórmulas memorizadas, muitas vezes sem compreensão. É importante notar, também, que, especialmente para os licenciandos de Matemática, os Elementos de Euclides são uma obra histórico-matemática da maior relevância. Os futuros professores poderão utilizá-la como fonte de inúmeras propostas didáticas, tendo a história como valor de significação no ensino dos conceitos matemáticos.

Segundo Grimberg (2008), *"o estudo dos textos históricos permite também estudar várias demonstrações de uma propriedade e a diversidade das soluções de* *um problema é importante para entender as relações que existem entre diferentes conceitos."* Grimberg também destaca a importância de uma visão integrada da Matemática para o ensino dada por uma abordagem histórica: *"... o professor do ensino médio deve conseguir esta perspectiva de unidade das teorias matemáticas e esta só se assimila olhando para a história."*

A riqueza dos Elementos deve ser apresentada aos alunos/licenciandos tanto por conta de seu conteúdo matemático quanto por sua forma de exposição e organização. Ainda segundo Grimberg (2008), a exposição lógico-dedutiva dos Elementos tem a qualidade de apresentar as propriedades utilizadas em cada demonstração.

> *"Ler e estudar estas demonstrações possibilita aprender as formas retóricas que ritmam e governam a redação de um texto matemático."*
>
> (Grimberg, 2008)

Em vista do sucesso desta abordagem, o professor, quando da apresentação do texto dos Elementos, deve se pautar por uma estratégia didática de construção de saberes, privilegiando um **processo investigativo** e de **atividade matemática**. Isto não significa que tenhamos de abdicar de um tratamento lógico-dedutivo da Matemática, o que, certamente, a descaracterizaria enquanto ciência, mas deveremos optar, didaticamente, por uma abordagem de "organização local" (Freudenthal,1971). Devemos privilegiar o processo cognitivo da 'significação' em lugar da 'memorização'.

> *"Um texto matemático deve começar com axiomas pois é uma matemática pronta. Matemática como uma atividade nunca é assim. Em geral, o que fazemos quando criamos e quando aplicamos a matemática, é uma atividade de organização local. Iniciantes em matemática não podem fazer mais do que isso. Todo professor sabe que a maioria dos estudantes podem produzir e compreender apenas curtas deduções. Eles não podem compreender provas longas como um todo, e menos ainda podem ver parte substancial da matemática como um sistema dedutivo. Nós temos sorte se eles conseguem aprender a organizar localmente um campo da realidade possível de matematização ou uma parte da matemática em si, porque isto é apenas o que eles precisarão na vida cotidiana e na sua*

profissão. Organizar localmente não é uma atividade deficiente ou ilícita ou desonesta em matemática."

(Freudenthal, 1971, p. 431)

(tradução própria)[1]

Dentre diversos fatores, o que tem favorecido o insucesso no ensino da Geometria tem sido o seu caráter de apresentação de resultados prontos ('Matemática pré-fabricada' segundo Freudenthal, 1971) em detrimento de uma abordagem investigativa e criativa (Matemática enquanto atividade). Freudenthal (1971, p. 413) afirma que a Matemática, assim como a Linguagem, pode ser concebida como um conjunto de conceitos, palavras, regras, articulações, mas também, como uma **atividade**. Uma atividade de resolução de problemas, percepção de problemas, e, ainda mais, uma atividade de organização de idéias e conceitos. Neste sentido, o ensino de Matemática não deve privilegiar uma abordagem onde os temas são apresentados "prontos e acabados". Esta é, segundo Freudenthal (1971, p. 430), a Matemática pré-fabricada. O professor deve conceber intervenções didáticas de forma a possibilitar ao aluno percorrer os caminhos dos problemas desde sua formulação, transitar pelas veredas da invenção, da criação, das conjecturas. A Matemática, enquanto sistema axiomático organizado ('pronto') deve ser o ponto de chegada deste longo caminho de aprendizado, nunca o ponto de partida. Este longo percurso educativo deve ser o da construção progressiva dos conceitos, do aprimoramento da linguagem, da distinção das propriedades, da percepção das múltiplas relações entre os entes matemáticos. Neste ponto, fica clara a contribuição do Modelo de Van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, enquanto fundamentação teórica para a presente pesquisa. Van Hiele (Nasser, 1992) defende a tese de que o desenvolvimento do pensamento geométrico se dá de forma gradual e progressiva, por níveis

[1] "A mathematical text may start with axioms because it is ready made mathematics. Mathematics as an activity never does so. In general, what we do if we create and if we apply mathematics, is an activity of local organization. Beginners in mathematics cannot do even more than that. Every teacher knows that most students can produce and understand only short deduction chains. They cannot grasp long proofs as a whole, and still less can they view substantial part of mathematics as a deductive system. We are lucky if they can learn organizing locally a mathematizable field of reality or a piece of mathematics itself, because this is just what they will need in every day life and in their profession. Organizing locally is not a deficient or illicit or dishonest activity in mathematics." (Freudenthal, 1971, p. 431)

hierárquicos (nível 0 ao nível 4) e a cada nível de compreensão associa-se um sistema lingüístico próprio. O sucesso no ensino e na aprendizagem de Geometria, segundo Van Hiele, só é alcançado se o professor e o aluno comunicarem-se em um mesmo nível de pensamento. O nível 4 de Van Hiele corresponde ao do rigor axiomático, sendo o mais complexo da hierarquia. Desta forma, alcançar o nível 4 deve ser o coroamento de um trabalho educativo ao longo de toda a vida escolar/profissional do educando/professor.

Considerando a Matemática, especificamente a Geometria, como um discurso, como uma das formas de leitura e interpretação do mundo, como fonte de modelos e comunicação de idéias[2], apoiamo-nos, igualmente, como fundamentação teórica, no Modelo de Registros de Representações Semióticas de Raymond Duval (2009), segundo o qual os objetos matemáticos só são acessíveis por suas representações semióticas. A aprendizagem matemática, segundo Duval, só se dá quando o aluno dispõe de pelo menos 2 representações semióticas distintas do mesmo objeto e é capaz de fazer transformações (tratamentos e conversões) entre elas.

> *"A coordenação entre representações ressaltando sistemas semióticos diferentes não tem nada de espontâneo. Sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino. Um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas "traduções" mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la. Porém, quando um tal tipo de trabalho é proposto, constata-se uma modificação completa nas iniciativas e nas atitudes dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para os controlar, para a rapidez de execução e também para o interesse colocado na tarefa. Não tem simplesmente sucesso, mas modificação da*

[2] "A particularidade da aprendizagem das matemáticas considera que essas atividades cognitivas requerem a utilização de sistemas de expressão e de representação além da linguagem natural ou das imagens: sistemas variados de escrituras para os números, notações simbólicas para os objetos, escrituras algébrica e lógica que contenham o estatuto de línguas paralelas à linguagem natural para exprimir as relações e as operações, figuras geométricas, representações em perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc." (Duval,2009,p.13)

qualidade de produções. Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos nos alunos.”

(Duval, 2009, p. 19)

A pergunta que norteou nossa pesquisa foi: **qual a contribuição que uma intervenção didática para o ensino de áreas baseada nos Elementos pode dar para a formação inicial dos professores de Matemática?**

4.2 Disposições Preliminares

Chamamos de **oficinas** aos encontros com os licenciandos para ressaltar o caráter de **atividade matemática** desta proposta de intervenção didática. Os alunos foram instigados a uma participação ativa, colaborativa e reflexiva. Foram convidados a participar das oficinas os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, ano letivo de 2010, que estão cursando os seus 2 últimos anos de graduação. A adesão era voluntária e independente das disciplinas cursadas no período letivo, não sendo atribuída nenhuma nota para qualquer disciplina. Oito alunos aderiram à proposta. Nossos encontros aconteceram nos meses de abril e maio/2010, das 17:00 às 19:00, na sala B 106B, do Centro de Tecnologia da UFRJ, Ilha do Fundão, conforme calendário abaixo:

Tabela 4.1: Calendário dos Encontros.

1º encontro	13 de abril	Apresentação da proposta do trabalho e dos participantes.
2º encontro	15 de abril	Conhecendo a situação: questionário e teste de van Hiele (1).
3º encontro	27 de abril	**Oficina 1**: Exploração do conceito de equivalência de áreas com o Tangram.
4º encontro	29 de abril	**Oficina 2**: Transformação de figuras.
5º encontro	04 de maio	**Oficina 3**: Os Elementos e as construções com régua e compasso.
6º encontro	06 de maio	**Oficina 4**: As demonstrações e o Teorema de Pitágoras em em Euclides.
7º encontro	11 de maio	**Oficina 5**: Quadratura de figuras planas.
8º encontro	13 de maio	Avaliação: teste de van Hiele (2).
9º encontro[0]	14 de maio	Confraternização e sorteio de um exemplar dos Elementos (Editora UNESP,2009) entre os participantes.

As atividades desenvolvidas nas oficinas seguiram um percurso pedagógico inspirado nos Elementos de Euclides: inicialmente, exploração do conceito de equivalência de áreas e posteriormente, a transformação de figuras, mantendo a área invariante. Apropriação pelos alunos da representação figural pela construção geométrica com os instrumentos euclidianos, régua não-graduada e compasso. Exploração da representação discursiva pela apropriação do texto presente nos Elementos. Concluindo os trabalhos, a apropriação do método grego de quadratura das figuras planas, como forma de qualificar o conceito de área enquanto atributo geométrico das figuras. Foram quatro os princípios norteadores das atividades desenvolvidas:

- utilização de ao menos 2 registros distintos de representações semióticas (figural e discursivo) para o conceito de área;
- ênfase na utilização da linguagem discursiva (língua natural e linguagem matemática axiomática), ressaltando a importância deste registro de representação semiótica no domínio da Matemática;
- adequação do discurso pedagógico ao nível do aluno (nível cognitivo de van Hiele);
- a aprendizagem ativa pautada em uma autêntica experiência da atividade matemática por parte dos alunos.

4.2.1 Apresentação da Proposta do Trabalho e dos Participantes (1º Encontro)

O objetivo deste primeiro encontro foi o de apresentar a proposta das 5 oficinas aos 8 alunos participantes. Todos os trabalhos, deste e dos demais encontros, foram conduzidos pela pesquisadora. Os alunos foram informados que as oficinas faziam parte de uma pesquisa de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ e que seus resultados não seriam considerados para fins de desempenho acadêmico dos participantes. Neste primeiro encontro foi ressaltado o caráter voluntário da participação

[0] Neste último encontro não foram realizadas atividades acadêmicas. Houve uma confraternização com sorteio de 1 livro dos Elementos de Euclides. A pesquisadora informou sobre os resultados alcançados por cada participante. A avaliação geral foi muito positiva. Os participantes mostraram-se interessados em um prosseguimento do trabalho desenvolvido.

dos licenciandos assim como a preservação do anonimato de cada um. A liberdade de expressão e a atitude participativa e reflexiva foram colocadas como requisitos desejáveis. Discutimos sobre a formação dos professores e a necessidade de uma atitude de permanente aprendizagem por parte dos mesmos. Abordamos, também, a necessidade de passar de uma postura passiva diante do próprio aprendizado para uma postura ativa e autônoma. Os participantes serão identificados, neste trabalho, pelos números romanos de I a VIII.

4.2.2 Conhecendo a Situação (2º Encontro)

O objetivo deste segundo encontro foi o de estabelecer um perfil dos participantes bem como avaliar o nível de pensamento geométrico dos alunos, segundo o Modelo de van Hiele. Para este propósito, os licenciandos responderam ao questionário inicial (Anexo 5) e ao teste de van Hiele (Anexo 4). Os resultados estão apresentados a seguir.

Questionário

O questionário (Anexo 5) é composto de 2 partes.

1ª Parte: Perfil dos Licenciandos

Tabela 4.2: Sexo.

Sexo	**Participantes**
feminino	6
masculino	2

Tabela 4.3: Faixa Etária.

Faixa etária	**Participantes**
de 20 a 25 anos	6
de 25 a 30 anos	1
não informado	1

A partir dos dados coletados, constatamos que o perfil predominante de nossos participantes é formado por licenciandas do sexo feminino, com idade entre 20 e 25

Tabela 4.4: Ano de Conclusão da Licenciatura.

Ano	**Participantes**
2010	3
2011	5

Tabela 4.5: Escola onde Cursou o Ensino Médio.

Escola	**Participantes**
Particular	6
Pública	2

Tabela 4.6: Experiência como Professor.

Trabalha ou já trabalhou como professor de Matemática?	**Participantes**
Sim	5
Não	3

anos que deverão concluir o curso de Licenciatura em 2011, estudaram, no ensino médio, em escola particular e trabalham ou já trabalharam como professoras de Matemática.

2ª parte: Perfil acadêmico

Nesta parte II do questionário há 9 perguntas e 1 espaço para comentários. As perguntas têm como objetivo traçar um quadro geral da concepção dos licenciandos do papel da Geometria e da História da Matemática no ensino.

Pergunta 1: Por que você optou por cursar Licenciatura em Matemática?

Esta pergunta visava entender as motivações dos alunos ao optarem pelo curso de Licenciatura em Matemática.

Tabela 4.7: Respostas à Pergunta 1.

Motivação	**Participantes**
Gostar/ter aptidão de/para Matemática	7
Gostar de ensinar	5
Identificar-se com o professor de Matemática	1
Preparar-se para concursos públicos	1

Concluímos, a partir das respostas, que a maioria dos licenciandos escolheu a carreira de professor de Matemática por gostar da disciplina (7 participantes) e de ensiná-la (5 participantes). É interessante notar que nenhum deles referiu-se a alguma motivação financeira, sendo que um deles parece ter esta motivação ao optar por se preparar para concursos públicos na área fiscal.

Pergunta 2: Qual é, na sua opinião, o papel do ensino da Geometria na Educação Básica?

O objetivo desta pergunta é entender a concepção dos licenciandos quanto ao lugar ocupado pela Geometria na Educação Básica.

Tabela 4.8: Respostas à Pergunta 2.

Papel da Geometria na Educação Básica	**Participantes**
Dar noção de posição e espaço/problemas práticos	8
Desenvolver o raciocínio	2
Tornar a Matemática mais interessante	1

É interessante notar que a totalidade dos licenciandos percebe a importância da Geometria quanto ao seu papel utilitário, na vida prática. Apenas 2 dos 8 futuros professores notam a contribuição que o conhecimento de Geometria pode dar no desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. O papel motivacional foi citado por apenas 1 licenciando. A contribuição da Geometria no desenvolvimento da intuição bem como da percepção estética nem sequer foram citados. Este resultado revela um entendimento bastante estreito do papel da Geometria na Educação Básica pelos futuros professores. Tal fato parece decorrer da experiência deles enquanto alunos. Este quadro parece apontar para um ensino insuficiente da Geometria em nossas escolas.

Pergunta 3: Qual(is) livro(s) de Geometria que marcou(aram) sua formação?

O interesse por esta questão deve-se a um caráter de natureza acadêmica e cultural. Como a Geometria Euclidiana é estudada por todos, inclusive na faculdade, tínhamos a expectativa que citassem os Elementos de Euclides. Eis os resultados:

Estas respostas apontam para uma fragilidade na formação acadêmica e cultural dos licenciandos. É preocupante notar que muitos alunos não citam nenhuma obra clássica ou de nível superior, apontando como referência bibliográfica apenas o livro didático adotado na escola básica.

Tabela 4.9: Respostas à Pergunta 3.

Livro citado	**Participantes**
Nenhum	3
Livro usado no Ensino Fundamental e/ou Médio	4
Legendre	1
Euclides	0
Livro usado em Geometria I	1

"Tive contato com poucos livros de Geometria. Fora os que usei na época da escola que continham o conteúdo de Geometria (Manoel Paiva e Matemática e Realidade). Tive contato com o adotado pela UFRJ

em Geometria I e o da coleção dos autores (normalmente usado no São Bento).”

(participante VII)

Pergunta 4: Como você avalia sua formação em Geometria?

O objetivo desta questão é o de formular um quadro da percepção dos licenciandos quanto à sua própria formação em Geometria.

Tabela 4.10: Respostas à Pergunta 4.

Formação em Geometria (auto-avaliação)	**Participantes**
Fraca	2
Mediana/regular	3
Boa	1
Outras respostas	2

É grave a percepção de que mais do que 3/5 dos licenciandos têm uma auto-avaliação de ‘regular’ a ‘fraca’ quanto aos seus conhecimentos geométricos. Provavelmente, ao saírem da universidade para o mercado de trabalho, esses professores alimentarão o círculo vicioso de ‘não-aprendizado $\leftrightarrow$ não-ensino da Geometria’. Deverão, talvez, adotar uma postura de colocar a Geometria à parte do ensino de Matemática, um apêndice quase dispensável. Algumas palavras dos licenciandos:

“Na minha escola não tive muita geometria e, os professores sempre deram mais álgebra, por isso preferia álgebra.”

(participante IV)

“Não possuo conhecimentos de desenho geométrico.”

(participante III)

“Ainda precisa de bastante desenvolvimento.”

(participante VII)

Pergunta 5: Se você fosse responsável pela elaboração do currículo de Geometria de um colégio de Ensino Fundamental e Médio, quais os conteúdos você destacaria?

Esta pergunta tem como objetivo diagnosticar a familiaridade que os licenciandos têm com o conteúdo geométrico da escola básica. Além disto, verificar a preparação que os futuros professores receberam quanto ao 'saber pedagógico', parte da competência necessária para o bom desempenho profissional. Transcrevo, a seguir, os temas citados:

- Para o Ensino Fundamental: ponto, reta, segmento, etc; polígonos, círculo; áreas e volumes; triângulos, quadriláteros, circunferências; áreas e perímetros (retângulos e triângulos); teorema de Pitágoras; ângulos.
- Para o Ensino Médio: relações no triângulo retângulo, teorema do ângulo externo; propriedades gerais da Geometria Euclidiana; geometria espacial; congruências de triângulos, geometria analítica (temas citados por apenas 1 aluno).

Cabe fazer o registro de que um aluno nada escreveu quanto ao conteúdo de Ensino Fundamental e outro não destacou nenhum conteúdo para ambos os níveis. Nenhum participante nomeou todo o conteúdo normalmente estudado em cada um dos níveis da escola básica. Tais resultados demonstram uma formação insuficiente destes licenciandos quanto ao aspecto do saber curricular. O tema "área" foi citado diretamente por apenas 3 dos 8 participantes.

> *"Ainda acho que não tenho competência suficiente para falar com tanta autoridade. Mas até o momento creio ser muito importante congruência e semelhança que são a base de grande parte do conteúdo."*
>
> (participante VII)

Pergunta 6: Quais as disciplinas da faculdade, cursadas por você, que abordaram temas de Geometria? Exemplifique.

Nesta questão pretendemos investigar a formação superior em Geometria a que os licenciandos tiveram acesso, e a efetiva apropriação do conhecimento pelos alunos. Os licenciandos limitaram-se a citar o nome das disciplinas, sem detalhar o conteúdo estudado. Isto dá uma indicação de uma apropriação insuficiente dos conceitos tratados nas diversas disciplinas. As disciplinas nomeadas pelos licenciandos, em geral, foram: geometria 1 e 2; fundamentos da geometria; matemática na escola; geometria euclidiana; geometria não euclidiana; geometria analítica; fundamentos da matemática elementar I; geometria diferencial; geometria descritiva; cálculos e métodos numéricos; modelagem matemática.

Todos os alunos citaram apenas algumas das disciplinas. A Geometria I (Geometria Euclidiana) foi a única citada por todos.

Pergunta 7: O que você considera como pontos fortes e pontos fracos no ensino de Geometria, em geral?

Esta pergunta visava traçar um painel da compreensão do licenciando, futuro professor, das dificuldades e das potencialidades no processo de ensino e de aprendizagem de Geometria. As respostas poderiam esclarecer as concepções dos alunos a respeito da Geometria enquanto objeto de ciência e enquanto objeto de ensino.

Pontos fortes: (um aluno nada respondeu neste item)

- *"Conteúdos importantes e as relações entre as diferentes formas geométricas"*;
- *"Alguns tópicos são bem abordados e bastante trabalhados como teorema de Pitágoras"*;
- *"O uso de programas de computação, instrumentos concretos"*;
- *"Tecnologia que pode ajudar bastante os alunos com animações em computadores por exemplo"*;
- *"Parte histórica, ou seja, como tudo começou. Aplicação dessa Geometria apreendida"*;
- *"Ter noção de espaço, raciocínio abstrato"*;
- *"As possibilidades de extensão do raciocínio e as de certa facilidade de passar a matéria para situações do cotidiano"*.

Pontos fracos:

- *"Poucos livros em português (traduzidos)"*;

- *“Polígonos acima de um determinado número de lados, abstrai-se muito. Demonstrações numa linguagem difícil”*;
- *“A maioria dos teoremas não são demonstrados, são dados apenas como fórmulas a serem ‘decoradas”’*;
- *“Falta de preparação dos professores e de materiais das instituições”*;
- *“Quando o professor fica só no ‘cuspe e giz’ não fazem as crianças pensar, ou seja, brincar com a Geometria. Isso acontece até aqui na faculdade. (Esse deve ser o problema)”*;
- *“Falta de paciência do professor em entender o raciocínio do aluno e considerar uma única forma de resposta em um exercício de Geometria”*;
- *“Não acredito que tenha”*;
- *“A falta de preparo de muitos profissionais e a falta de recursos lúdicos na escola com o fim de estimular a entender os conteúdos”*.

A partir da análise das respostas, percebemos uma visão bastante fragmentada do processo de ensino e aprendizagem da Geometria, pelos licenciandos. Destaca-se entre os pontos fracos citados, a rejeição pelo modelo tradicional de apresentação de uma ‘matemática pronta’ (Matemática pré-fabricada, segundo Freudenthal, 1971), onde o aluno não tem espaço para a experiência, a atividade matemática. Percebe-se uma necessidade de mudança nas estratégias pedagógicas mais utilizadas e um interesse por abordagens que incluam as novas tecnologias, a história da Matemática e uma maior participação do educando no processo de aprendizagem. Há, também, uma crítica oportuna à falta de compatibilidade entre a linguagem do professor e o nível de compreensão do aluno (fator de insucesso no ensino, atribuído por van Hiele).

Pergunta 8: Você estudou História da Matemática no seu curso de graduação? Se sua resposta for positiva, cite alguns tópicos estudados por você.

O objetivo desta pergunta é conhecer o quanto a História da Matemática participa da formação destes licenciandos.

Tabela 4.11: Respostas à Pergunta 8.

Estudou História da Matemática?	**Participantes**
Sim	5
Não	3

É muito positiva a constatação que a maioria destes alunos conta com a História da Matemática na sua formação profissional, embora ainda se perceba uma participação tímida da História enquanto elemento de significação dos conceitos estudados.

Os tópicos citados foram:

- *"Pitágoras, número de ouro"*;
- *"A origem dos números, sistemas de numeração de civilizações antigas, origem da geometria não euclidiana"*;
- *"Os três problemas clássicos: trissecção do ângulo, quadratura do círculo, duplicação do volume de um cubo. Cônicas de Apolônio, os algebristas históricos"*;
- *"Espiral de Arquimedes, trissecção do ângulo, teorema de Pitágoras"*.

Pergunta 9: Qual, em sua opinião, a relação entre História da Matemática e Ensino da Matemática?

O objetivo desta pergunta é verificar qual o papel da história da matemática no ensino, segundo os licenciandos.

Tabela 4.12: Respostas à Pergunta 9.

Relação História-Ensino	**Participantes**
Relação positiva e forte	6
Não opinou	2

Respostas dos participantes que cursaram a disciplina:

- *"Total. Acredito que para entendermos matemática é necessário saber o porquê do surgimento de alguns tópicos"*;

- *“A história da matemática pode servir de introdução para algum tema da matemática, talvez poderia ser explorado mais a história da matemática em prova já que a matemática não precisa ser reduzida apenas em teoremas e fórmulas”*;
- *“Deve estar sempre juntas, pois a partir da história conseguimos mostrar para os alunos como que os primeiros pensaram”*;
- *“Sabendo um pouco mais de história podemos entender melhor as dificuldades dos alunos”*;
- *“A partir de problemas históricos que surge a geometria para solucioná-los”*;
- *“Acho que há uma forte ligação. Até porque se pudermos passar um pouco do que há de interessante na História da Matemática no Ensino da Matemática poderíamos incentivar mais os alunos”*.

A maior parte (3/4) dos licenciandos consideram positiva e desejável a relação entre a História da Matemática e seu Ensino. As opiniões dos licenciandos apontam para o uso da História da Matemática no Ensino como:

- elemento de significação dos objetos matemáticos;
- elemento motivacional para o ensino;
- percepção da historicidade dos conceitos matemáticos;
- caracterização dos obstáculos epistemológicos na elaboração dos conceitos matemáticos;
- modelos de respostas aos problemas práticos.

Comentários dos alunos:

> *“... Só afirmo mais uma vez que temos que mudar a forma do ensino da matemática utilizando o lúdico mas sem precisar se utilizar do construtivismo que na minha opinião emburrece o aluno pois não é bem utilizado pelas escolas que adotam o método.”*
>
> (participante VII)

"Acho que as aulas de Geometria devem ter mais importância tanto no mundo acadêmico, quanto no Ensino Básico. E que os professores procurem melhorar as deficiências no assunto."

(participante II)

"Antes de qualquer melhoria no ensino da matemática, deveria ser avaliado se os professores estão aptos e de acordo com essa melhoria, já que no curso de licenciatura encontrei muitos que não demonstravam interesse em ensinar e tão pouco em despertar o interesse do aluno, como se a reprovação de quase toda a turma significasse que este seria um bom professor."

(participante V)

"Usar softwares no ensino da Geometria, diminuindo sua abstração."

(participante VIII)

Os comentários dos alunos apontam alguns itens importantes para a melhoria do processo de ensino e de aprendizagem:

- utilização de métodos de ensino mais atrativos do que os tradicionais ('cuspe e giz'), onde o aluno despoje-se de uma atitude passiva para uma participação ativa;
- melhoria da capacitação dos professores em Geometria;
- postura de diálogo construtivo entre professor-aluno;
- uso de tecnologia computacional como forma de significação para os conceitos.

Teste de van Hiele (1ª Avaliação - Anexo 4)

O teste aplicado aos licenciandos foi o formulado pela equipe de professores/pesquisadores da Universidade de Chicago, liderados pelo Professor Zalman Usiskin (*National Institute of Education's Teaching and Learning program to the Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry* - CDASSG - *Project*, 1979-1982). A autorização (Anexo 3) para o uso deste teste foi-nos concedida pelo Professor Usiskin. O teste foi desenvolvido segundo o Modelo de van

Hiele. Ele é composto de 25 questões tendo como objetivo aferir o nível de van Hiele[3] de desenvolvimento do pensamento geométrico dos alunos. As questões são distribuídas conforme a tabela abaixo. As questões são divididas em 5 grupos de 5 itens, cada grupo referenciando-se às habilidades desenvolvidas em um nível de pensamento geométrico (níveis de 0 a 4).

Tabela 4.13: Questões do Teste de van Hiele (1ª avaliação).

Questões	**Nível de van Hiele**	**Aptidão Geométrica**
1 a 5	0	reconhecimento das figuras
6 a 10	1	análise/reconhecimento dsa propriedades das figuras
11 a 15	2	ordem/classificação das figuras
16 a 20	3	dedução
21 a 25	4	rigor

O critério utilizado para determinar o nível de van Hiele de cada participante foi o de 3 acertos em cada bloco de 5 questões. O aluno só é classificado em um nível quando acerta 3 ou mais questões de todos os níveis anteriores a ele, incluindo o nível alcançado e não alcança mais que 2 acertos no nível seguinte. Cada aluno recebeu uma nota no teste, ponderando as questões da seguinte forma:

- 1 ponto para cada questão correta dos itens 1 a 5;
- 2 pontos para cada questão correta dos itens 6 a 10;
- 4 pontos para cada questão correta dos itens 11 a 15;
- 8 pontos para cada questão correta dos itens 16 a 20;
- 16 pontos para cada questão correta dos itens 21 a 25.

(a nota máxima, segundo esta ponderação, é de 155 pontos)
(a ponderação usada segue o padrão usado CDASSG)

O teste de van Hiele (Anexo 4) foi aplicado aos licenciandos da forma como é sugerida pela equipe da Universidade de Chicago. A tarefa foi realizada individualmente, sem consulta a qualquer material e com duração máxima de 35 minutos. Os

[3] Alguns autores indicam os níveis de van Hiele de 1 a 5.

licenciandos foram avaliados em dois momentos: o primeiro, antes da realização das oficinas e o segundo, logo após a conclusão das mesmas. Os resultados alcançados, na 1ª avaliação, estão discriminados na tabela a seguir.

Tabela 4.14: Notas da 1ª avaliação.

Participante	**Nível de van Hiele**	**Nota**
I	2	95
II	1	51
III	2	95
IV	1	85
V	2	77
VI	2	93
VII	1	45
VIII	2	96

Tabela 4.15: Nível de van Hiele na 1ª avaliação.

Nível de van Hiele	**Participantes**
0	0
1	3
2	5
3	0
4	0

É importante observar que um aluno pode apresentar uma nota superior à de outro aluno, porém estar classificado em um nível de van Hiele abaixo deste, caso dos participantes IV e V. Isso eventualmente ocorre pois o aluno pode acertar questões de maior valor, de um nível mais alto, provavelmente um acerto aleatório, sem atender ao critério de no mínimo 3 acertos no grupo de 5 questões relacionadas ao nível de van Hiele em questão.

Os resultados desta pesquisa estão de acordo com as médias alcançadas nos estudos internacionais (Usiskin, 1982). Poucos são os alunos que alcançam os níveis de pensamento geométrico 3 e 4, referentes à aptidão geométrica de dedução e rigor axiomático. Todos os participantes são capazes de fazer o reconhecimento das figuras geométricas e identificar suas propriedades. A maior parte, 5 alunos, consegue estabelecer interrelações de propriedades próprias de uma figura, bem como entre figuras diferentes. São capazes de deduzir propriedades de uma figura e reconhecer classes de figura. Conseguem acompanhar e formular argumentos informais. O significado das deduções lógicas e a compreensão de um sistema axiomático ainda não é compreendido por nenhum dos participantes. O resultado deste teste (Duval, 2009 e Usiskin, 1982) nos aponta para a necessidade de desenvolver atividades com os alunos para promover seu desenvolvimento de pensamento lógico-dedutivo. Segundo os referenciais teóricos (Duval, 2009 e Nasser, 1992) considerados, este trabalho deve levar em conta a linguagem do aluno e possibilitar a compreensão de diferentes representações semióticas e suas coordenações.

4.3 As Oficinas

As oficinas, apresentadas a seguir, desenvolveram-se do 3º ao 7º encontro. O objetivo primeiro das oficinas foi desenvolver o olhar geométrico dos alunos em complementação ao enfoque algébrico. O trabalho transcorreu de forma colaborativa e reflexiva, em duplas ou trios. A atitude da pesquisadora era a de fomentar as discussões e auxiliar nas reflexões, sem dar respostas prontas, incentivando a atividade matemática (conjecturas, suposições, verificações, validações de resultados) de todos os participantes. O percurso pedagógico das oficinas, ilustrado na Figura 3.2, foi o processo de quadratura de figuras planas presente nos Elementos de Euclides.

4.3.1 1ª Oficina: Exploração do Conceito de Equivalência de Áreas com o Tangram (3º Encontro)

1ª Oficina: Objetivos

Inicialmente, investigamos, através de quatro perguntas, a compreensão que os licenciandos traziam do conceito de área e de seu ensino. Nosso interesse era confirmar a hipótese de que a construção conceitual dos alunos baseava-se numa concepção numérico-algébrica. Para desenvolver a compreensão do conceito de área enquanto atributo geométrico, independente de uma medição ou cálculo numérico, iniciamos os trabalhos das oficinas com a manipulação de um quebra-cabeça geométrico chamado Tangram. Nosso objetivo nesta oficina é explorar o conceito de equivalência de áreas através da manipulação de figuras (tratamento figural de Duval). Utilizamos, para isso, o Tangram, um quebra-cabeça chinês formado por 7 peças (5 triângulos, 1 quadrado e 1 paralelogramo). Com as peças podemos formar várias figuras de formas diferentes. O Tangram é bastante utilizado pelos professores de matemática como instrumento facilitador da compreensão das formas geométricas (Nasser e Tinoco, 2006). O Tangram facilita o estudo da geometria, desenvolve a criatividade e o raciocínio lógico. Não se sabe ao certo como surgiu este quebra cabeças mas o fato é que ele possibilita, a partir da composição e decomposição de figuras, a verificação prática da possibilidade de figuras de formas diferentes terem a mesma área. O atributo geométrico área é explorado sem fórmulas e associações com números.

1ª Oficina: Resultados

Esta oficina (Atividade 1, Anexo 6) é composta de 3 partes.

1ª Parte

Formulamos 4 perguntas para conhecer a compreensão dos alunos quanto ao conceito área e de seu ensino.

Pergunta 1: Dos conteúdos de Geometria estudados por você ao longo de sua formação básica e superior, o que você lembra do conceito de área?

Tabela 4.16: Respostas à Pergunta 1.

Conceito de Área	**Participantes**
Medida de uma superfície	5
Atributo geométrico da figura	0
Outros	3

> *"Na formação básica a área está somente ligada a medidas de superfícies, a fórmula comprimento* x *largura..."*
>
> (participante VII)

Nenhum aluno referiu-se ao conceito de área enquanto atributo geométrico da figura. A maior parte dos participantes não distingue a grandeza área de sua medida numérica.

Pergunta 2: Se você fosse ensinar, hoje, o conceito de área, a um aluno do Ensino Fundamental, como faria? Quais aspectos destacaria?

Tabela 4.17: Respostas à Pergunta 2.

Aspectos destacados	**Participantes**
Aplicações práticas	2
Cálculo de base x altura	4
Preenchimento de espaços	2

- *"Falava que para calcular área, seria necessário duas medidas: comprimento e largura. Explicaria que são necessárias duas dimensões"*;
- *"Destacaria o comprimento de uma linha repetidas várias vezes (no caso de um quadrado, exaltando a importância da área ser calculada como base* x *altura)"*.

Destaca-se nestes resultados a forte vinculação construída entre área e sua medida calculada por fórmulas. Ainda mais inquietante a constatação de que parece só existir o retângulo entre todas as figuras geométricas:

Pergunta 3: Se o aluno fosse do Ensino médio você faria alguma alteração na sua abordagem pedagógica? Se a resposta for positiva, cite qual.

Esta pergunta tinha como objetivo constatar se os alunos contavam com, além do conhecimento matemático, o conhecimento curricular e pedagógico que permitem ao professor adequar sua linguagem e métodos às diferentes séries escolares.

Tabela 4.18: Respostas à Pergunta 3.

Alteraria a abordagem pedagógica?	**Participantes**	**Alterações propostas**
Sim	3	exploração de figuras mais complexas; uso do Tangram
Não/não sei	5	—

As respostas denotam um conhecimento insuficiente dos aspectos curriculares e pedagógicos por parte dos licenciandos.

Pergunta 4: Como você faria para medir a área de um terreno plano, de forma poligonal, sem utilizar números reais?

O objetivo desta pergunta era verificar se os alunos conheciam alguma estratégia de comparação de áreas de figuras planas, especificamente o método grego de quadratura de figuras.

Tabela 4.19: Respostas à Pergunta 4.

Estratégia de medição	**Participantes**
Decompor o terreno em figuras conhecidas	6
Comparação com 1 quadrado	1
Não respondeu	1

É interessante notar que grande parte dos alunos (7/8) não respondeu à pergunta, pois, mesmo aqueles que recorreram à decomposição do terreno em figuras conhecidas, utilizaram-se de números para contar quantas vezes a unidade de medida escolhida caberia no terreno. Concluímos que estes licenciandos não concebem o conceito de área desvinculado de um valor numérico.

2ª Parte

Foram propostos 3 exercícios com o uso do Tangram (quebra-cabeça geométrico com 7 peças: 2 triângulos grandes, 1 triângulo médio, 2 triângulos pequenos, 1 paralelogramo e 1 quadrado).

O objetivo destes exercícios era levar os alunos a contruírem o conceito de equivalência de áreas de figuras de formas diferentes. A manipulação do material auxilia à construção do conceito (Nasser e Tinoco, 2006). Nesta atividade demos ênfase à representação figural do conceito (Modelo de Duval) e, trabalhamos no nível 2 do Modelo de van Hiele (classificação de figuras segundo a propriedade *área*.

Exercício 1: Forme, com o quadrado e os 2 triângulos pequenos do Tangram:

a) um triângulo;

b) um trapézio;

c) um retângulo;

d) um paralelogramo.

O que você pode afirmar em relação a estas figuras considerando suas áreas?

A expectativa de resposta a esta pergunta era de que todos os participantes percebessem a igualdade de área entre as diferentes figuras, já que todas são formadas com as mesmas peças, o que não ocorreu.

Tabela 4.20: Respostas ao Exercício 1.

Área das figuras	**Participantes**
São iguais	6
Outras respostas	2

"A área do paralelogramo é igual à área do trapézio. O retângulo têm a mesma área do paralelogramo e trapézio."

Percebe-se que para alguns alunos o conceito de equivalência de áreas entre figuras de formas diferentes ainda está em construção.

Exercício 2: Forme um triângulo com as peças do Tangram usando apenas:

a) os 2 triângulos grandes;

b) o triângulo médio e os 2 pequenos;

c) 1 triângulo grande, o médio e os dois pequenos.

O que você pode afirmar em relação a estas figuras considerando suas áreas?

A resposta esperada para esta pergunta era de que, embora todas as figuras tivessem a mesma forma (triângulos), apenas as figuras construídas em (a) e (c) tinham a mesma área. A área da figura (b) era a metade das outras.

Tabela 4.21: Respostas ao Exercício 2.

Área das figuras	**Participantes**
área de (a) = área de (c) área de (b) = metade de (a)	5
Todas têm a mesma área	2
Outra resposta	1

É preocupante a constatação de que 3 dos 8 participantes não responderam corretamente à questão. Este fato corrobora a idéia de que a abordagem didática adotada preferencialmente nos livros didáticos para o ensino de área, baseada em cálculos e fórmulas, não ajuda na construção do conceito de forma completa (abordagem numérica e geométrica).

Exercício 3: Forme, usando todas as peças do Tangram:

a) um triângulo;

b) um retângulo;

c) um paralelogramo;

d) um trapézio;

e) um hexágono.

O que você pode afirmar em relação a estas figuras considerando suas áreas?

Este exercício permite ao aluno a manipulação das peças-figuras para compor diversas formas geométricas (tratamento figural de Duval). Há a possibilidade de trabalhar a composição e decomposição de figuras, atividade muito útil para a construção do conceito de área. Esperava-se que todos os alunos percebessem que as 5 figuras construídas, embora de formas diferentes, possuíam a mesma área.

Tabela 4.22: Respostas ao Exercício 3.

Área das figuras	**Participantes**
Todas têm a mesma área	7
Outra resposta	1

Percebe-se, neste exercício, que houve uma melhora na percepção das figuras equivalentes quanto ao quesito área. Este progresso pode ser atribuído à rica discussão travada entre os participantes. A possibilidade de dialogar (língua natural - representação discursiva) sobre o conceito auxilia na sua construção (Duval, 2009; Nasser, 1992).

3ª Parte

Nesta etapa, as questões são abertas. Há a intenção de avaliar a atividade como um todo, fazendo uma síntese de todos os resultados (fase 5 do modelo de ensino de van Hiele, Seção 3.1).

Pergunta: Qual a medida da área de cada figura construída com o Tangram?

A resposta esperada a esta pergunta era a de que todas as figuras construídas com as mesmas peças, independentemente da forma, tivessem a mesma área (equivalência de área).

Algumas respostas:

- *"Não é possível determinar a medida da área, pois não foi dada nenhuma medida das peças"*;
- *"Área mínima da peça do Tangram:* 1/16 *(triângulo pequeno). Se eu formar com todas as peças do Tangram, cada figura da questão anterior, terei* 16/16 = 1*"*;
- *"16 triângulos pequenos"*;
- *"Cada figura mede a soma das áreas das 7 peças do Tangram"*;
- *"A área de cada figura é a soma das áreas das figuras utilizadas para cada construção"*.

A resposta de alguns alunos denotam a continuidade da forte vinculação entre a grandeza área e sua medida numérica.

Alguns comentários dos participantes:

- *"A utilização do Tangram é uma ótima atividade pois trabalha com a matemática indiretamente, ou seja, sem números e fórmulas. O Tangram é visto pelos alunos como um jogo, uma brincadeira assim despertando a curiosidade e a atenção deles. O Tangram também utiliza a lógica do aluno e o faz relacionar diferentes figuras que possuem a mesma área, se tornando uma atividade construtiva, que o próprio aluno descobre os conceitos matemáticos"*;
- *"A utilização do Tangram facilita a aprendizagem do conceito de área, além de trabalhar o raciocínio lógico na montagem das diferentes figuras com as mesmas peças. Também é possível mostrar que duas figuras de mesma área podem ter perímetros diferentes"*;

- *“Como eu já esperava, em momento algum da minha graduação tive contato com esse tipo de material que nos faça refletir em cima das figuras e com isso melhorar os conceitos”*;

- *“Acho essas atividades super interessantes pelo fato de concretizar a noção de área”*;

- *“Foi interessante, nunca havia percebido a relação entre as figuras que compõem o tangram, isso foi bastante divertido, ótimo para ensinar aos alunos a relacionar equivalência de áreas e saber mais sobre as figuras geométricas”.*

1ª Oficina: Considerações sobre os Resultados

Na primeira parte desta oficina, formulamos quatro perguntas para conhecer a concepção dos alunos quanto ao conceito de área. Percebemos que há uma concepção do conceito fortemente atrelada à medida de uma superfície e, o que é mais grave, à fórmula para o cálculo da área de um retângulo (base x altura). Constatamos, também, que os licenciandos não dispõem de estratégias pedagógicas apropriadas para o ensino de áreas de figuras planas. Além disso, nenhum deles foi capaz de descrever um método para a medição de área sem recorrer aos números. Não conheciam o método de quadratura de figuras planas. No decorrer das atividades propostas da segunda parte da oficina, com a utilização do material manipulável (Tangram), os licenciandos foram se apropriando do conceito de equivalência de área e desenvolvendo um olhar geométrico sobre o conceito. A representação figural e a língua natural foram as representações semióticas privilegiadas nesta oficina.

De acordo com as idéias manifestadas e os comentários dos participantes, as atividades desenvolvidas nesta primeira oficina alcançaram o objetivo de desenvolver o conceito de equivalência de áreas usando o Tangram. Muitos alunos expressaram sua satisfação em ter esta oportunidade de manipular concretamente as figuras para a formação de outras formas geométricas. Fica evidente a necessidade, como apontam Nasser e Tinoco (2006), da utilização de atividades concretas para a construção significativa dos conceitos matemáticos (abstratos). Assim também aponta Duval (2009) no sentido de o professor disponibilizar para o aluno situações de aprendizagem onde a linguagem natural e a matemática sejam demandadas para o acesso aos objetos matemáticos.

É interessante notar a concepção do que é Matemática para um dos participantes: *"A utilização do Tangram é uma ótima atividade pois* **trabalha com a matemática indiretamente**, *ou seja, sem números e fórmulas"*. Na parte destacada, o licenciando refere-se a um uso indireto da Matemática. Parece que, para ele, só é Matemática aquilo que lida com números e fórmulas. Grave distorção, ainda mais tratando-se da opinião de um futuro professor.

4.3.2 2ª Oficina: A Transformação de Figuras (4º Encontro)

2ª Oficina: Objetivos

Nesta 2ª oficina, o objetivo é explorar a transformação de figuras, mantendo a área invariante. Para isto fizemos uso de um material desenvolvido pela pesquisadora. Este material é composto de 9 cartões (Anexo 7) representando figuras geométricas (3 triângulos, 1 quadrado, 1 retângulo, 4 paralelogramos). Há uma correspondência[4] entre as áreas de cada cartão (de (A) a (I)), que deve ser descoberta pelos alunos através da manipulação das figuras:

- grupo 1: área de (B) = área de (E) = área de (G);
- grupo 2: área de (I) = área de (H) = área de (F) = área de (D) = área de (C) = área de (A) = metade da área das figuras do grupo 1.

Faremos uso das representações figural (9 cartões) e discursiva (língua natural) para a compreensão do objeto matemático: figuras de mesma área e formas diferentes. Continuaremos trabalhando no nível 2 do Modelo de van Hiele onde há uma apropriação da classificação das figuras. Propomos, também, 6 problemas onde o tratamento figural das representações semióticas é trabalhado, bem como a representação discursiva através das justificativas escritas das estratégias de resolução dos problemas.

2ª Oficina: Resultados

Esta oficina (Atividade 2, Anexo 6) é composta de 4 partes.

[4]Esta classificação em grupos não é apresentada aos alunos.

1ª Parte

Formulamos 3 perguntas para investigar o conhecimento destes alunos a respeito da equivalência de figuras quanto à área e a possibilidade de fazermos adições e subtrações de figuras, considerando o atributo geométrico área.

Pergunta 1: Duas figuras planas de formas diferentes podem ter a mesma área? Se for possível, exemplifique.

Todos os participantes responderam "Sim" a esta pergunta. É importante registrar que metade dos alunos respondeu à pergunta referindo-se a medidas numericamente definidas.

> *"Sim. Dado um quadrado de lado* $8m$*, terá uma área de* $64m^2$*, e um retângulo de lado* $16mx4m$ *sua área será de* $64m^2$*. Ou seja igual à área do quadrado."*

(participante II)

Pergunta 2: É possível construir um quadrado que tenha a área igual à soma das áreas de outros dois quadrados? Se for possível, exemplifique.

Tabela 4.23: Respostas à Pergunta 2.

Resposta	**Participantes**
Sim	7
Não	1

> *"Não. Um quadrado tem lados iguais e se juntarmos dois quadrados não obteríamos um outro quadrado pois haveria aumento de somente uma das medidas."*

(participante VII)

> *"Sim, um quadrado de lado 5 e tem área 25 e dois quadrados de lados 3 e 4, com áreas 9 e 16."*

(participante IV)

"Sim. Quadrados com lados de medidas iguais de um triângulo retângulo."

(participante I)

É importante notar que 3 participantes recorreram a um exemplo numérico, citando o teorema de Pitágoras: $5^2 = 3^2 + 4^2$. Os alunos ainda utilizam, preferencialmente, um tratamento númerico a um tratamento geométrico ao lidar com áreas.

Pergunta 3: É possível construir um quadrado que tenha a área igual à diferença das áreas de outros dois quadrados? Se for possível, exemplifique.

Tabela 4.24: Respostas à Pergunta 3.

Resposta	**Participantes**
Sim	5
Não	1
Depende/não respondeu	2

"Depende dos instrumentos utilizados. Pois teríamos que construir um quadrado com lado irracional."

(participante I)

Um dos alunos que respondeu "Sim" à pergunta anterior e não foi capaz de responder a esta pergunta. Isto denota uma compreensão incompleta do processo de adição e subtração de áreas, já que o aluno foi capaz de utilizar a expressão $a^2 = b^2 + c^2$, mas não foi capaz de utilizar sua expressão equivalente $a^2 - b^2 = c^2$.

2ª Parte

Nesta etapa são propostos 3 exercícios com o uso dos 9 cartões geométricos, identificados alfabeticamente de (A) a (I), com o objetivo de promover a construção do conceito de equivalência de área associada à transformação de figuras. Trabalharemos este conceito através das representações figural e discursiva (língua natural). O diálogo entre os participantes é uma forma valorizada de construção conceitual.

Exercício 1: Há neste conjunto figuras de mesma área? Se a resposta for positiva, indique quais.

Tabela 4.25: Respostas ao Exercício 1.

Resposta	**Participantes**
Sim	7
Não sei dizer	1

"Olhando as figuras, não sei dizer se têm algumas com a mesma área, precisaria saber suas medidas."

(participante VIII)

Apesar de a maioria (7/8) dos participantes ter percebido a equivalência de área de algumas figuras, nenhum deles respondeu a questão de forma completa, identificando todas as equivalências. A resposta do participante VIII denota a vinculação do conceito de área estritamente a sua expressão numérica.

Exercício 2: Qual(is) a(s) figura(s) de maior área?

Todos os alunos responderam corretamente a esta questão ((B) = (E) = (G)), com exceção do participante II que respondeu-a de forma incompleta: "B e E".

Exercício 3: Qual(is) a(s) figura(s) de menor área?

Nenhum participante respondeu de forma completa à questão. Identificaram somente algumas figuras de menor área. Um deles referiu-se à dificuldade de não saber as medidas das figuras.

"Menor área é F. (Olhando sem saber suas medidas.)"

(participante VIII)

Os resultados desta segunda parte de atividades apontam para uma construção ainda incompleta do conceito de equivalência de áreas e de transformação de figuras. Além disso, há a forte dependência, por parte dos alunos, da necessidade de conhecer as medidas numéricas dos entes geométricos.

3ª Parte

O objetivo desta questão é sintetizar os conceitos construídos nas etapas anteriores e prepará-los para a compreensão das proposições dos Elementos de Euclides: *(I.35) Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são* *iguais entre si*; *(I.36) Os paralelogramos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si*; *(I.37) Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si*; e *(I.38) Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.* A resposta esperada era a de expressar a existência de dois grupos de figuras equivalentes, sendo que a razão das áreas é de 1:2.

Questão: Considerando a área como parâmetro, ordene as figuras em ordem crescente.

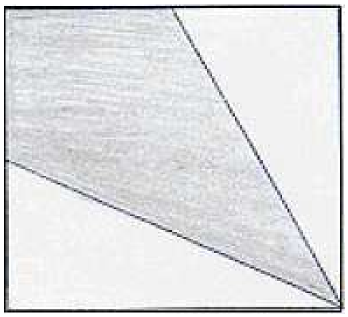
Nenhum aluno respondeu de forma completa à questão, identificando apenas algumas equivalências. A ordenação crescente foi percebida. Um aluno deixou a questão sem resposta. Estes resultados evidenciam que os licenciandos ainda não possuem o domínio do conceito de equivalência de área e da relação de ordem que se estabelece entre as figuras, a partir de suas áreas.

4ª Parte

Nesta etapa são propostos 6 problemas envolvendo o conceito de área, figuras equivalentes em área e transformações de figuras. O objetivo é desenvolver nos alunos a competência de olhar a figura de forma total e ser capaz de compor e decompor as suas sub-figuras, sem o uso de fórmulas e números. As atividades explorarão o tratamento figural dos registros de representação semiótica, bem como a representação discursiva através das justificativas dos procedimentos adotados para a resolução dos problemas (coordenação de registros, segundo Duval).

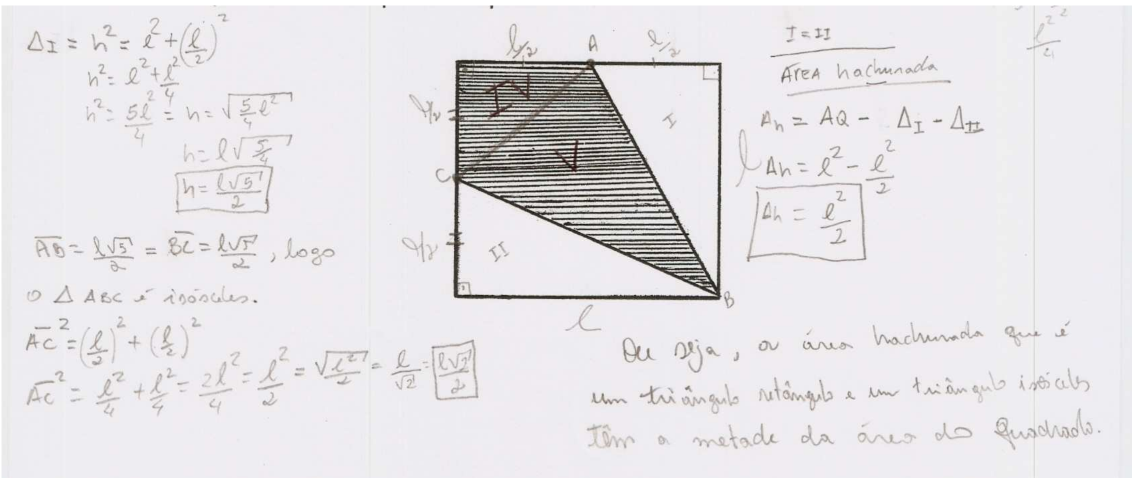
Problema 1:

Considere a figura abaixo como sendo um quadrado e os segmentos traçados no interior da figura tendo como uma das extremidades os pontos médios dos lados. A parte hachurada da figura corresponde a que parte da figura toda? Justifique sua resposta.



A estratégia de resolução esperada não envolvia fórmulas nem números. Bastava observar que os dois triângulos formam metade da figura toda. Logo, a parte hachurada corresponde à outra metade da figura toda (resolução geométrica).

Resolução algébrica (participante II):



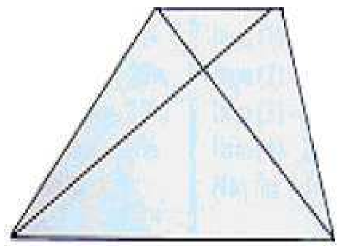
Resolução geométrica (participante I):

> *"Metade. Cortando a parte hachurada ao meio, pela diagonal do quadrado, temos que cada metade hachurada tem base e altura igual ao triângulo não pintado. E os triângulos não pintados tem metade da área do quadrado."*

Todos os alunos responderam corretamente à questão (metade da figura total), porém a maior parte deles (5/8) recorreu às fórmulas (resolução algébrica). Mais uma vez, fica clara a preponderância da abordagem aritmético-algébrica em detrimento da geométrica, por parte dos alunos.

Problema 2:

Considere a figura abaixo um trapézio e suas diagonais. O que você pode afirmar a respeito das áreas dos 2 triângulos formados por cada uma das diagonais e por dois lados consecutivos do trapézio? Justifique sua resposta.



Este problema admite, pelo menos, duas interpretações distintas. Consideramos as respostas com base nas justificativas apresentadas.

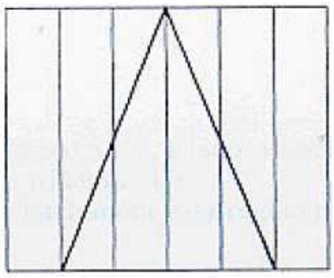
O participante VIII, diferentemente dos outros, escreveu:

> *"Posso afirmar nada sobre suas áreas sem saber as medidas do trapézio, mas se levarmos a figura do trapézio ao "pé da letra", diria que as áreas desses triângulos são diferentes entre si."*

Mais uma vez, expressa-se a dependência de um registro numérico para o conceito de área. A maior parte dos alunos (7/8) considerou os triângulos formados pela mesma base e tendo a mesma altura e concluíram, corretamente, pela igualdade das áreas.

Problema 3:

Considere a figura abaixo um quadrado dividido em partes iguais por linhas verticais. O que você pode afirmar a respeito das áreas do triângulo e dos trapézios formados à direita e à esquerda do triângulo? Justifique sua resposta.



Todos os alunos responderam corretamente à questão, concluindo pela igualdade entre as áreas das três figuras. Apenas 3 dos 8 participantes não recorreram a fórmulas e números para a resolução. Esta é uma conclusão recorrente em todas as nossas atividades, apontando para a necessidade de um trabalho contundente de abordagem geométrica do conceito de área.

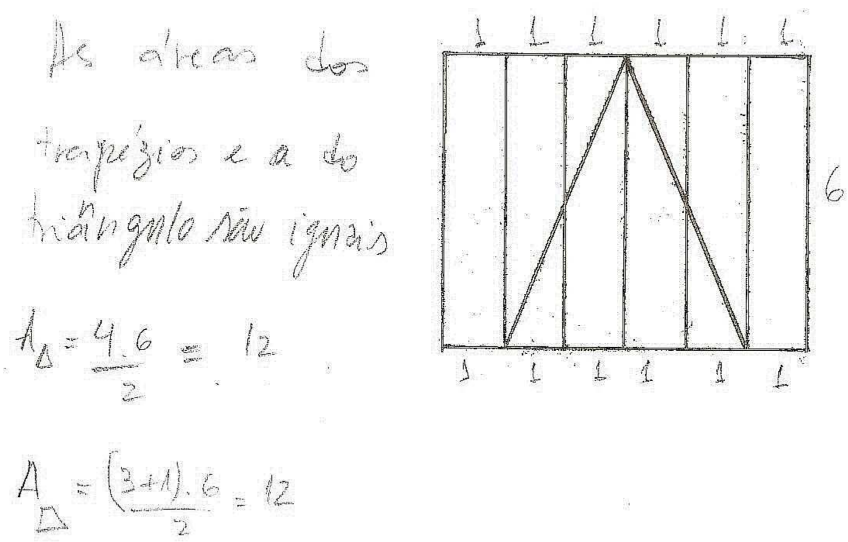


Figura 4.1: Resolução do Problema 3 feita pelo Participante I.

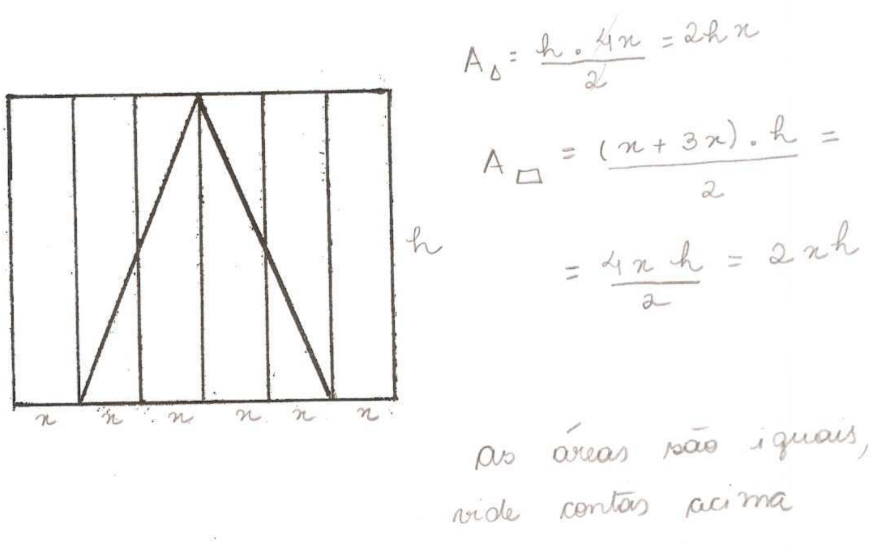
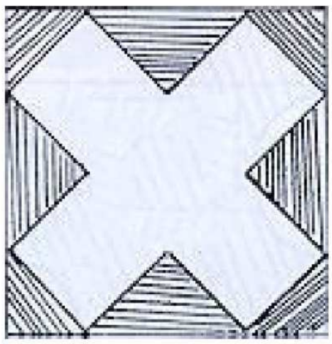


Figura 4.2: Resolução do Problema 3 feita pelo Participante IV.

Problema 4:

Considere a figura abaixo um quadrado. Compare a área da parte hachurada com a não hachurada. O que você pode afirmar? Justifique.



Este problema tinha como objetivo promover a experiência de decomposição das figuras em subfiguras para a comparação de áreas (tratamento figural).

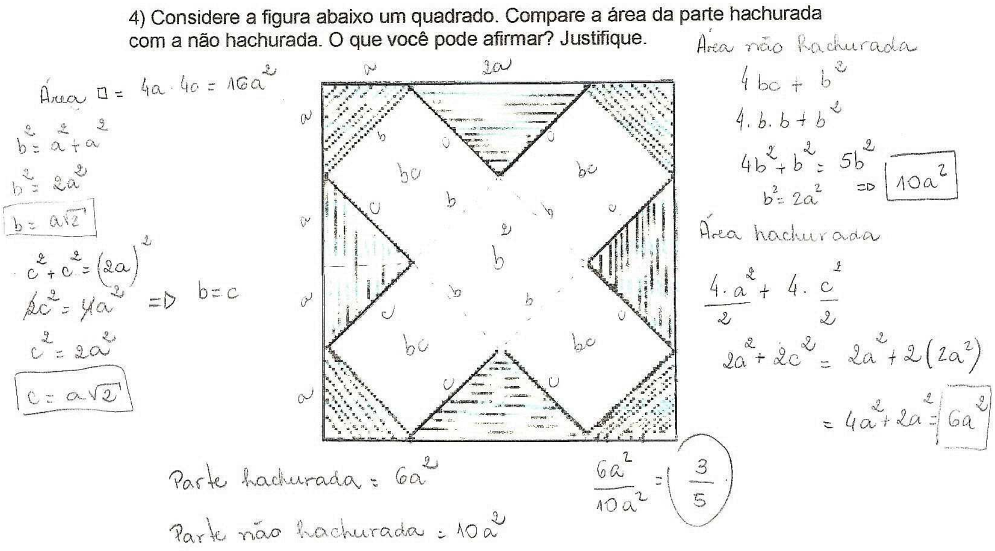
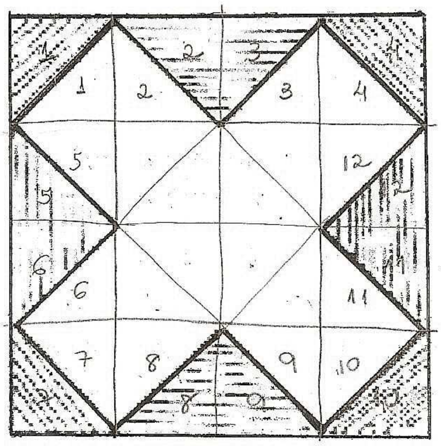


Figura 4.3: Resolução do Problema 4 feita pelo Participante VI.

T = total
H = hachurada
B = sem hachurada

4) Considere a figura abaixo um quadrado. Compare a área da parte hachurada com a não hachurada. O que você pode afirmar? Justifique.



$A_T = 32\,\Delta$

$A_H = 12\,\Delta$

$A_B = 20\,\Delta$

$\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$

a área obedece uma razão de $\frac{3}{5}$

Figura 4.4: Resolução do Problema 4 feita pelo Participante IV.

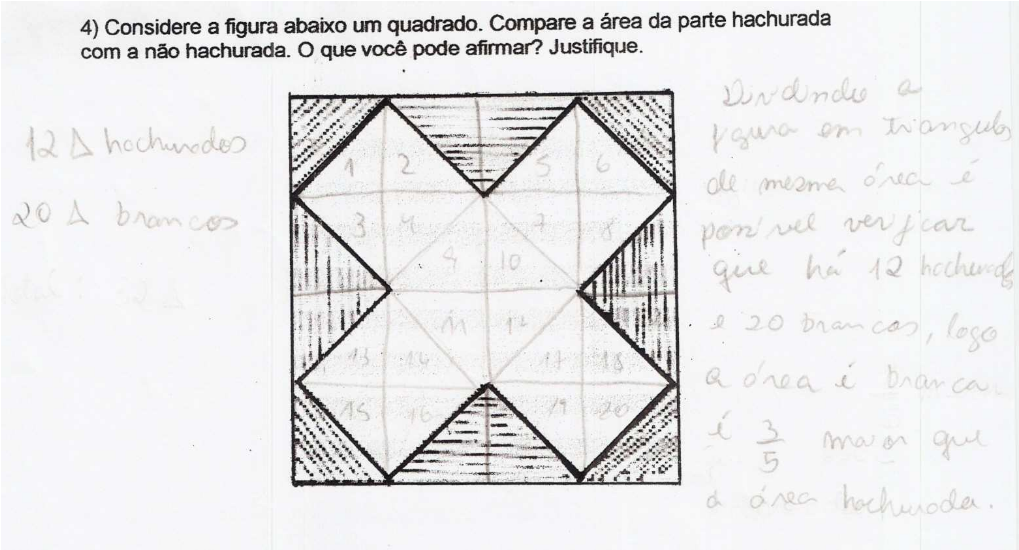
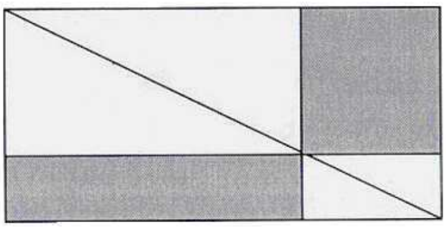


Figura 4.5: Resolução do Problema 4 feita pelo Participante III.

A maior parte dos alunos (7/8) respondeu corretamente à questão. Utilizaram-se da decomposição em subfiguras, triângulos ou quadrados, porém nenhum deles desenvolveu a questão sem recorrer a números e/ou fórmulas. Não foram capazes de utilizar um tratamento puramente geométrico da questão.

Problema 5:

Considere a figura abaixo um retângulo e uma de suas diagonais. Compare a área das 2 partes mais escuras. O que você pode afirmar? Justifique.



Este problema tinha como objetivo, além da composição e decomposição de figuras (tratamento figural), preparar o caminho para a compreensão da proposição *(I.43) Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si* dos Elementos de Euclides, que integra a Atividade 3 (próxima oficina).

"Nada posso afirmar sem saber as medidas do retângulo."

(participante VIII)

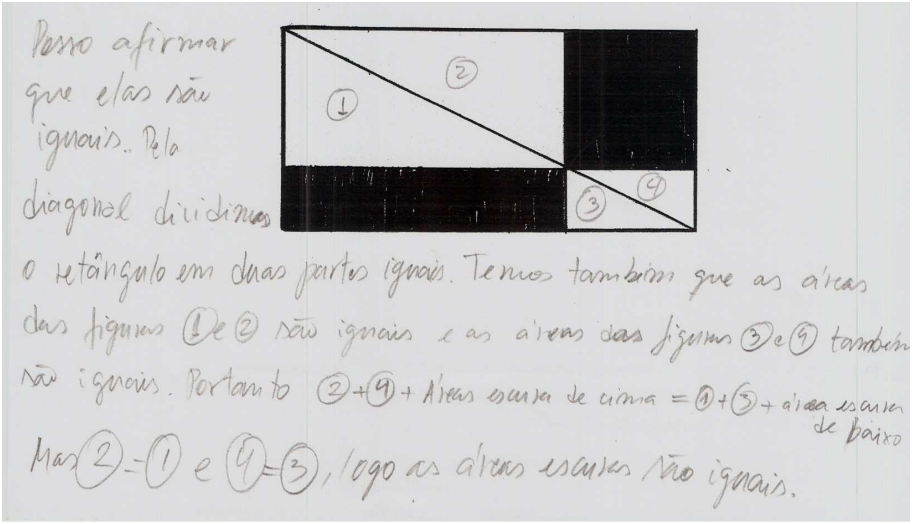


Figura 4.6: Resolução do Problema 5 feita pelo Participante I.

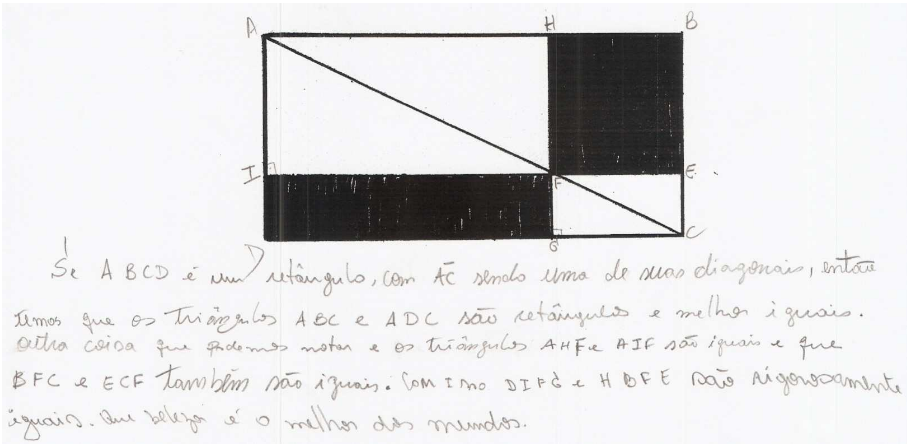
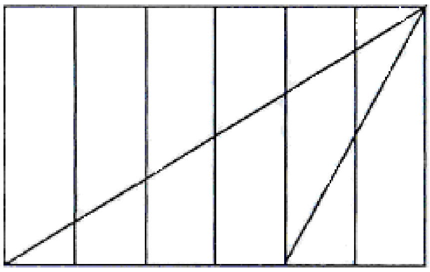


Figura 4.7: Resolução do Problema 5 feita pelo Participante II.

A maior parte dos alunos (7/8) respondeu corretamente à questão. A habilidade de composição e decomposição das figuras e sua reconfiguração está se aprimorando. Apenas um aluno afirmou que não podia responder. Novamente, a vinculação área ↔ medidas numéricas aparece como obstáculo para a compreensão total do conceito.

Problema 6:

Considere a figura abaixo um retângulo dividido em partes iguais pelas linhas verticais. Compare a área do triângulo (no centro da figura) com a do retângulo todo. O que você pode afirmar? Justifique.



Este problema apresenta uma dificuldade maior no processo de composição-decomposição de figuras, requisitando um grande custo de tratamento figural (geométrico).

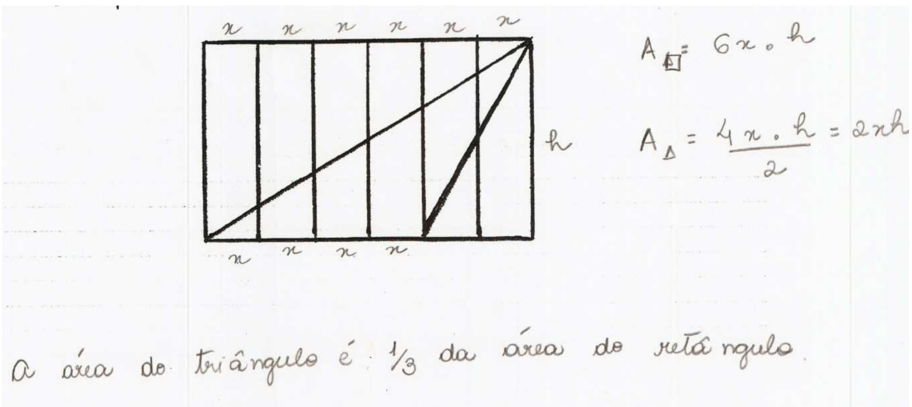


Figura 4.8: Resolução do Problema 6 feita pelo Participante IV.

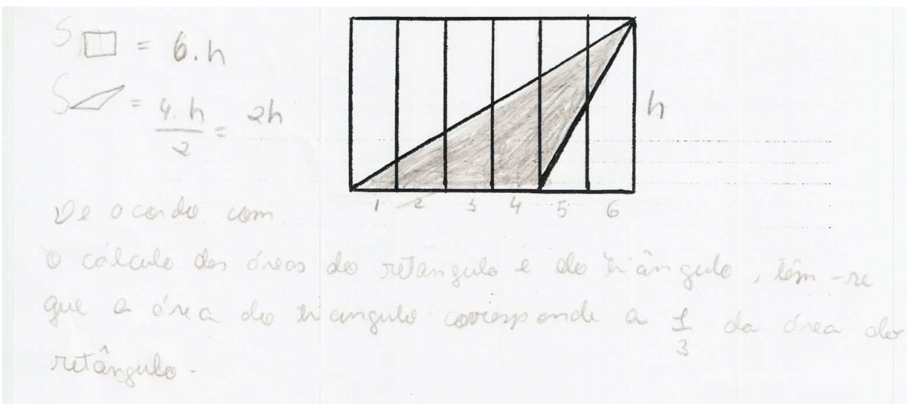


Figura 4.9: Resolução do Problema 6 feita pelo Participante V.

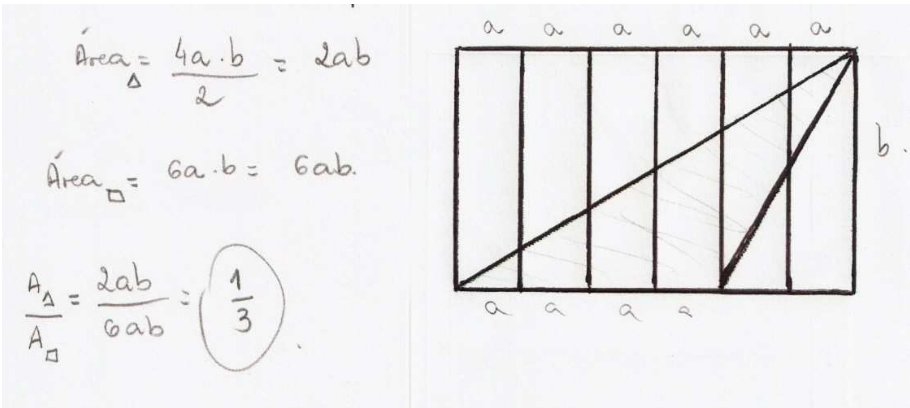


Figura 4.10: Resolução do Problema 6 feita pelo Participante VI.

Todos os alunos responderam corretamente a esta questão, prevalecendo um tratamento algébrico do problema.

Alguns comentários dos participantes:

- *"As atividades mostram a importância de saber visualizar figuras geométricas e resolver questões sem necessariamente fazer uso de álgebra"*;
- *"As atividades foram estimulantes e desafiadoras, algumas questões consegui resolver usando o conceito de área, mas tiveram outras que realmente não consegui fazer ou responder olhando somente a figura sem ter a certeza de suas medidas. Hoje, foi a atividade mais inovadora até o presente momento. Pode ter certeza que amadureci bastante o meu "olhar geométrico"."*;
- *"Muito boas, nos remete a importância das equivalências de áreas. Foi show."*;
- *"Todas as atividades estimulam a concentração e o raciocínio lógico, o que é muito importante para a formação dos estudantes."*;
- *"Eu gostei, pois estimula o raciocínio e introduz o conceito de área de uma forma diferente, estimulando a dúvida e sua solução."*;

2ª Oficina: Considerações sobre os Resultados

Na primeira parte desta oficina, formulamos 3 perguntas para verificar o domínio dos licenciandos quanto ao conceito de equivalência de áreas e a possibilidade de operar (adição e subtração) com áreas. Verificamos que este domínio é ainda incompleto e insuficiente para futuros professores. Na segunda parte, propusemos 3 exercícios com o uso de cartões geométricos para promover este saber (tratamento figural). As discussões foram bastante proveitosas e os alunos apresentaram progressos em suas argumentações verbais e em seus resultados por escrito (tratamento discursivo). Na terceira parte, os resultados apontaram para um saber ainda em construção com relação à equivalência de áreas. Na quarta parte, os licenciandos tiveram a oportunidade de trabalhar conjuntamente com as representações figural e discursiva do objeto matemático, o que propiciou um desenvolvimento do olhar geométrico dos alunos, assim como de seu discursivo argumento. Segundo Duval, a possibilidade de trabalhar com dois registros distintos de representação semiótica do objeto matemático e coordenar estes registros sem, no entanto, confundi-los com o objeto em questão, constitui-se uma estratégica pedagógica eficaz para a promoção da aprendizagem dos alunos. Nos resultados registrados ficaram evidentes a forte vinculação do conceito de área às medidas expressas numericamente e às expressões algébricas de fórmulas para cálculo de áreas. Todos os licenciandos expressaram suas dificuldades em tratar geometricamente as figuras, bem como sua satisfação em participar das atividades para desenvolverem as competências e habilidades que ainda não haviam adquirido.

4.3.3 3ª Oficina: Os Elementos e as Construções com Régua e Compasso (5º Encontro)

3ª Oficina: Objetivos

Neste encontro fazemos uma apresentação dos Elementos de Euclides. É nosso objetivo promover a construção do conceito de área utilizando dois registros semióticos distintos: a linguagem discursiva e a linguagem figural. A aprendizagem só se verifica quando o aluno é capaz de coordenar ao menos dois registros distintos sobre o mesmo objeto (Duval, 2009). Além disso, o aluno não pode confundir o objeto com sua representação (Duval, 2009). As atividades requisitaram o uso de régua (não graduada) e compasso. É nossa intenção desenvolver a representação figural do objeto matemático com o uso dos instrumentos euclidianos. A representação discursiva é trabalhada tanto pelo texto de Euclides (discurso lógico-argumentativo) quanto pela língua natural utilizada pelos alunos. Há também uma investigação sobre a concepção que os licenciandos têm da Matemática.

3ª Oficina: Resultados

Esta oficina (Atividade 3, Anexo 6) é composta de 3 partes.

1ª Parte

Formulamos 2 perguntas sobre os Elementos de Euclides. Apresentamos, também, 2 questões para investigar a concepção dos licenciandos quanto à Matemática e seu ensino.

Pergunta 1: Você conhece os Elementos de Euclides? Qual sua opinião sobre esta obra?

- *"Conheço parte da obra e estou começando a conhecê-la melhor agora. Acho que é uma grande obra para todas as áreas da matemática que serviu de base para muita evolução e pesquisas."*;
- *"Sim. A obra possui alguns equívocos nas provas das proposições e teoremas mas é uma das primeiras obras que estuda a geometria."*;
- *"Eu acho que os elementos de Euclides são proposições "básicas" para a construção da Matemática. Eu não li."*;
- *"Conheço, mas ainda não li tudo. É uma obra prima da matemática."*;
- *"Sim. É uma excelente obra,com demonstrações interessantes e importantes, não é a toa que esse livro é o que teve mais tiragens depois da bíblia, eu acredito que a geometria é dividida em duas fases: antes da Obra de Euclides e depois da Obra de Euclides."*.

Todos os participantes afirmaram conhecer os Elementos, porém esta afirmação não corresponde a um domínio dos conceitos desenvolvidos na obra.

Pergunta 2: Você acredita que os Elementos de Euclides possa ser usado no ensino de Matemática nos dias de hoje? Se sua resposta for positiva, como?

- *"Sim. Para ensinar o que são axiomas, postulados e teoremas. Também podemos usar algumas demonstrações para explicar melhor alguns tópicos da matemática."*;

- *"Sim. Deduzindo-os em sala de aula com uma linguagem menos rebuscada e mais atual, de maneira que os alunos entendam os pensamentos de Euclides."*;

- *"Sim. Pois em muitos casos mostrar aos alunos certas construções é importante. E também mostrar aos alunos de onde surgiu certas construções."*;

- *"Algumas proposições e teoremas sim, mas não todos, pois nem todos são de fácil entendimento."*.

Todos responderam "Sim". Um aluno fez restrições parciais ao uso dos Elementos de Euclides no ensino, pois alegou dificuldade de compreensão do texto.

As questões a seguir têm como objetivo verificar a concepção dos alunos em relação à Matemática e seu ensino.

Dê sua opinião (justificando-a) sobre as seguintes afirmações:

Questão 1: A Matemática se diferencia das outras ciências (Biologia, Física, etc) pela natureza de seu objeto de estudo. Os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de suas representações.

- *"Concordo. A acessibilidade é muito maior através da visualização dos objetos estudados"*;

- *"Por meio de representações temos contato com os objetos que a matemática estuda. Tais objetos são normalmente abstratos requerendo um raciocínio abstrato. Assim diferenciando a matemática das outras ciências que em sua maioria têm objetos concretos"*;

- *"Dizer que os objetos matemáticos só são acessíveis se existir uma representação é muito forte. Existem elementos matemáticos que não existe uma representação para ele"*;

- *"A matemática é uma ciência onde é possível estudar regiões infinitas"*;

- *"O "problema" da matemática é o fato de a grande maioria do seu conteúdo ser abstrato. Diferenciando-a de outras ciências que podem ser tocadas e vistas"*;
- *"Muitas coisas na matemática são realmente abstratas, mas não tudo"*;
- *"Concordo, toda a sistemática da matemática depende muito de dada representação para sabermos do que trata determinada proposição"*.

As respostas dos participantes explicitam uma concepção da Matemática enquanto ciência abstrata e a importância das representações para compreender seus objetos. A teoria de Raymond Duval defende a idéia de que não há conhecimento sem representação.

> *"Não há noésis*[5] *sem semiósis*[6]*, quer dizer, não há noésis sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito."*
>
> (Duval, 2009, p. 18)

Questão 2: A Matemática é uma ciência de caráter lógico-dedutivo e assim deve ser ensinada.

- *"A matemática é indispensável a qualquer um. Ela ajuda no aumento do raciocínio, podendo ajudar até em outras matérias"*;
- *"Concordo que seja de caráter lógico-dedutivo, porém não acho que deva ser ensinada somente assim. Acredito que para uma melhor compreensão pode-se usar materiais concretos"*;
- *"Acredito que lógica é o sinônimo da matemática, e para solucionarmos certos problemas necessitamos da dedução para achar suas respostas, portanto, é sempre assim que ela deve ser ensinada"*.

Os participantes explicitaram a natureza lógico-dedutiva da matemática e sua importância na educação básica.

[5] Atos cognitivos como apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência.

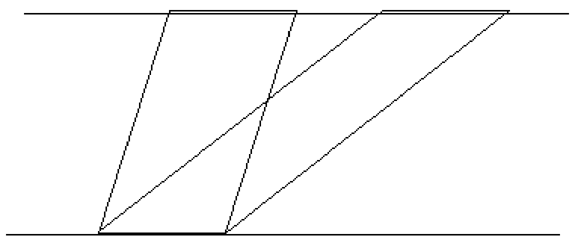
[6] Apreensão ou produção de uma representação semiótica.

2ª Parte

Nesta etapa são propostos 4 exercícios, sendo 3 de construção com régua e compasso. O objetivo destes exercícios é o de promover condições para inferir os resultados das proposições dos Elementos de Euclides *(I.35) Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si*; *(I.36) Os paralelogramos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si*; *(I.37) Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si*; e *(I.38) Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si*, bem como preparar os alunos para a quadratura de polígonos. A construção com régua e compasso auxilia na formulação das idéias, através da percepção figura e suas partes. A representação figural e o tratamento realizado nas figuras auxiliam na significação do conceito (Duval, 2009).

Exercício 1:

1.a. Construa, usando como instrumentos de desenho apenas régua (não graduada) e compasso, os paralelogramos entre as retas paralelas, conforme figura abaixo.



1.b. O que você pode afirmar sobre as áreas dos dois paralelogramos construídos? Justifique sua resposta.

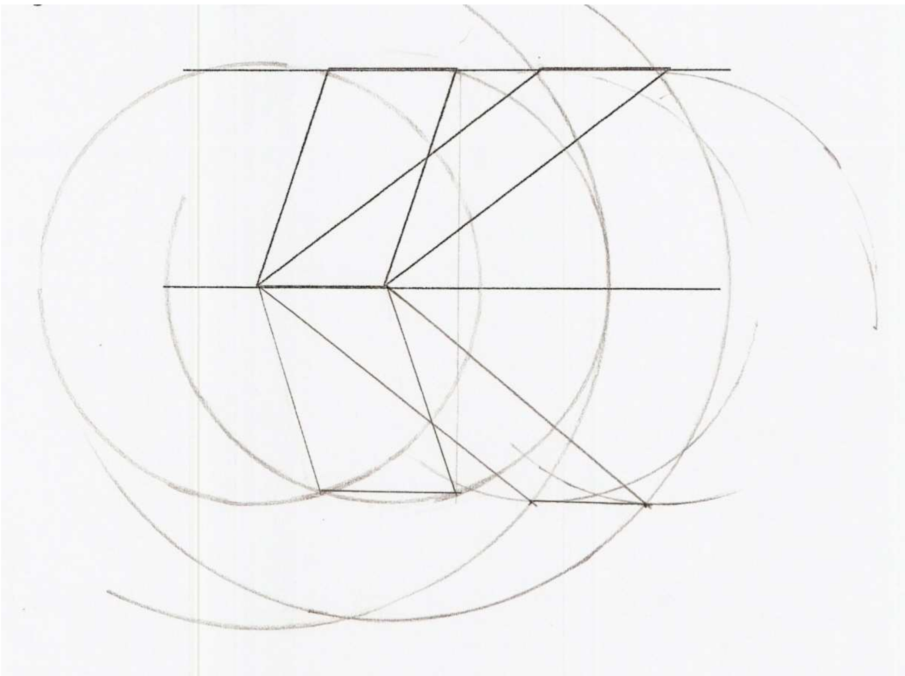


Figura 4.11: Resolução do Exercício 1 feita pelo Participante V.

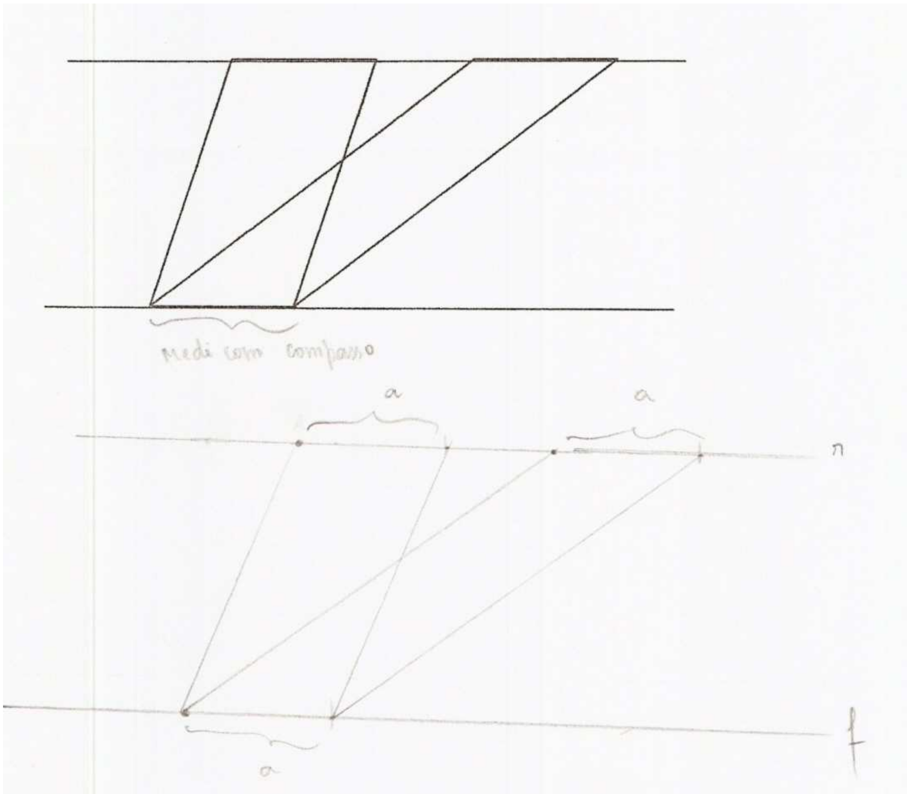
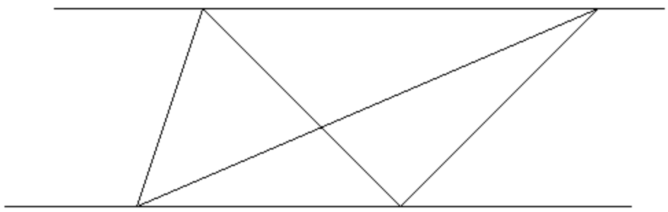


Figura 4.12: Resolução do Exercício 1 feita pelo Participante VIII.

Todos os alunos construíram as figuras geométricas pedidas, mas tiveram grande dificuldade no uso da régua e do compasso.

Exercício 2:

2.a. Construa, usando como instrumentos de desenho apenas régua (não graduada) e compasso, os triângulos entre as paralelas, conforme figura abaixo.



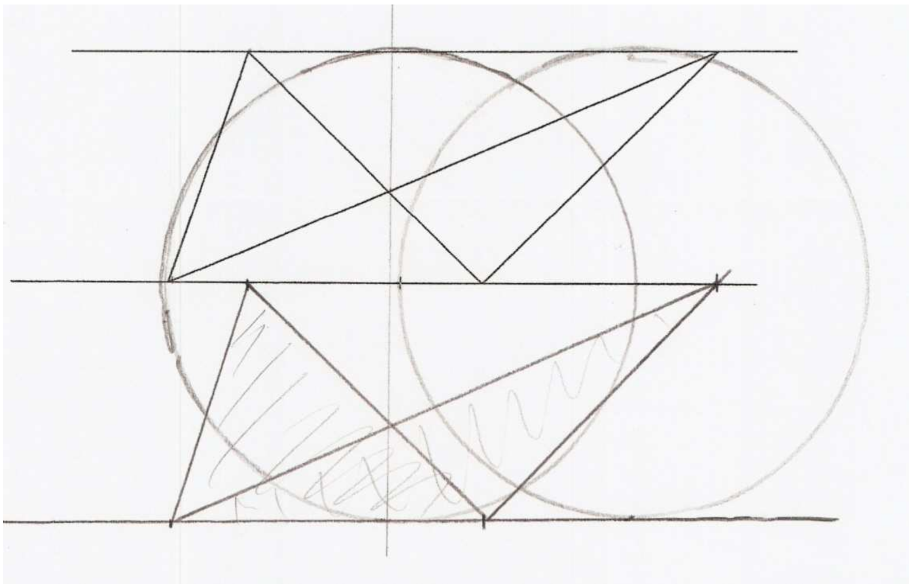


Figura 4.13: Resolução do Exercício 2.a feita pelo Participante IV.

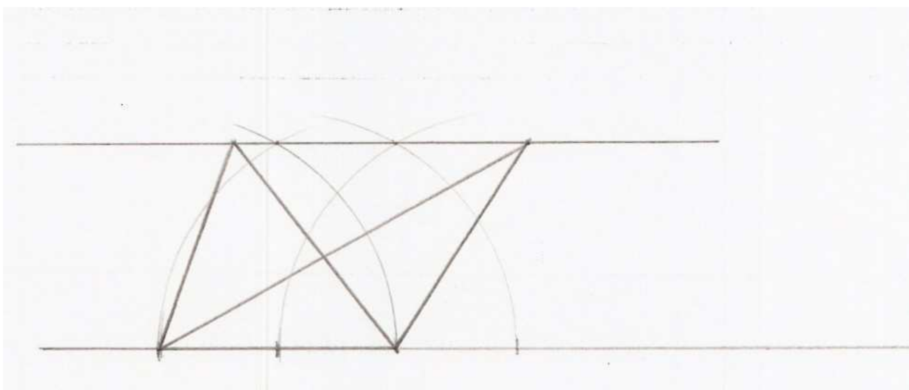


Figura 4.14: Resolução do Exercício 2.a feita pelo Participante I.

Os alunos foram capazes de fazer as construções geométricas pedidas.

2.b. O que você pode afirmar sobre as áreas dos dois triângulos construídos? Justifique sua resposta.

Todos os alunos responderam que as áreas são iguais (resposta correta), mas a dificuldade com os instrumentos de desenho foram inúmeras.

Exercício 3:

Construa o que se pede (usando apenas régua e compasso):

a) um triângulo qualquer;

b) um paralelogramo de área igual ao do triângulo construído em (a);

c) um retângulo de área igual ao do paralelogramo construído em (b).

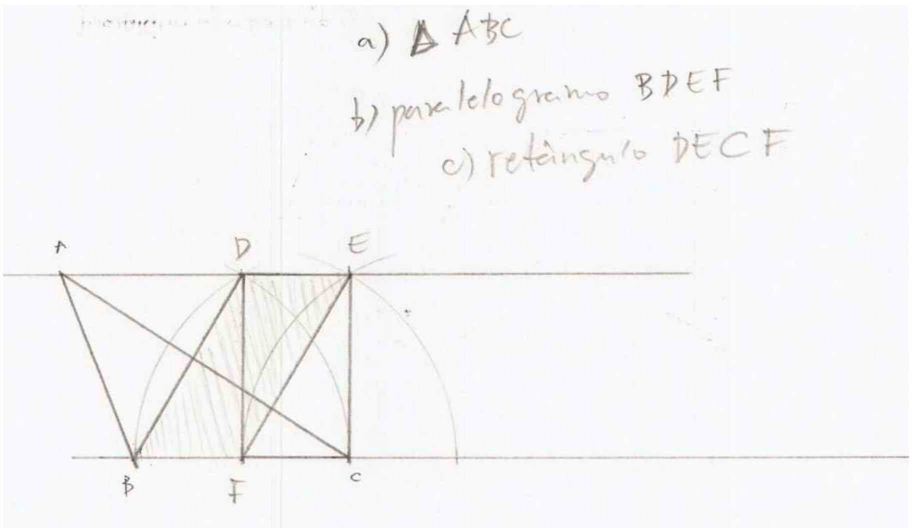


Figura 4.15: Resolução do Exercício 3 feita pelo Participante I.

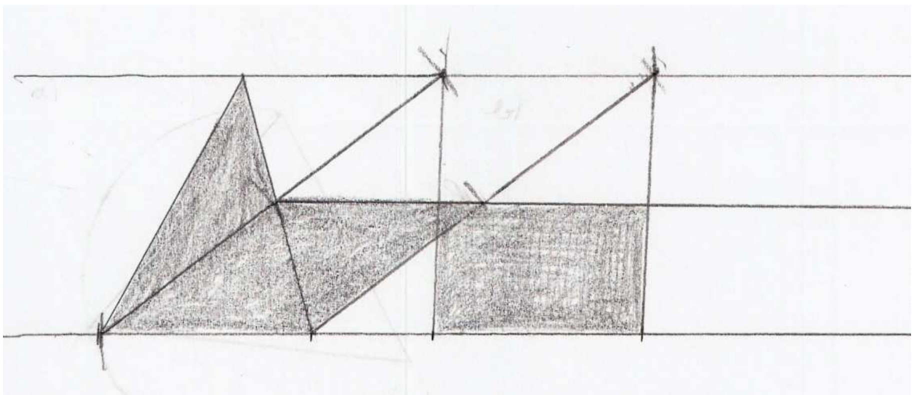
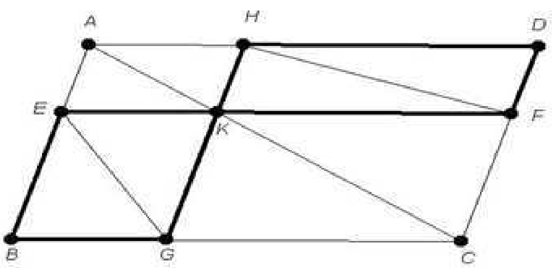


Figura 4.16: Resolução do Exercício 3 feita pelo Participante IV.

No cumprimento desta tarefa os alunos manifestaram, por diversas vezes, a satisfação pelos resultados que alcançavam e pela compreensão do processo de construção de figuras de áreas iguais, demonstrando o aprendizado das proposições I.35 a I.38 dos Elementos de Euclides.

Exercício 4:

A figura abaixo é um paralelogramo. O que você pode afirmar sobre as áreas dos paralelogramos EBGK e KFDH, formados em torno da diagonal? Justifique sua resposta.



O objetivo deste exercício é a compreensão da proposição I.43 de Euclides. Na atividade da oficina anterior já tinha sido proposta uma questão que apresentava o mesmo conceito.

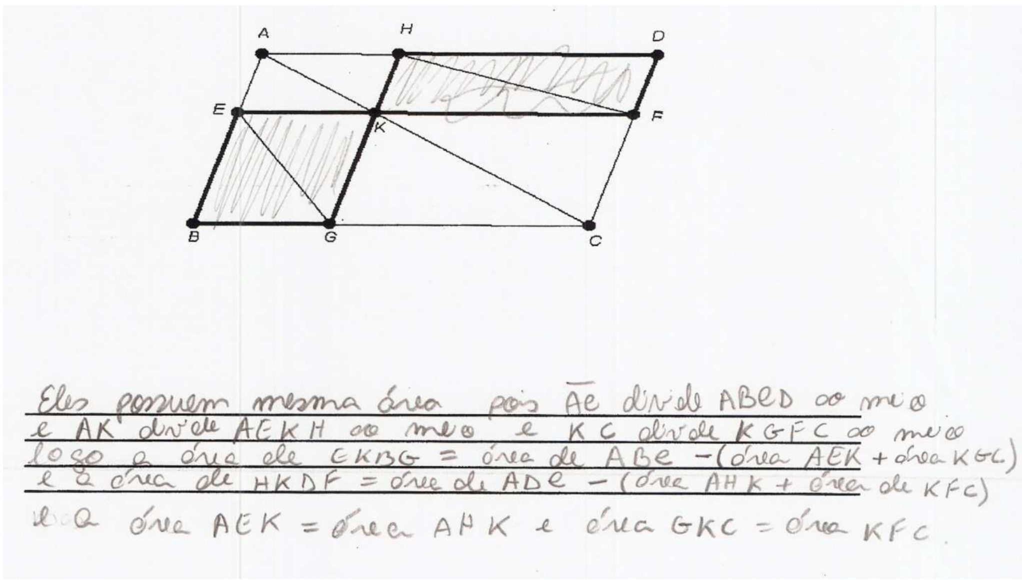


Figura 4.17: Resolução do Exercício 4 feita pelo Participante III.

Esta questão trabalhava especificamente a conversão entre a representação figural e a representação discursiva do conceito de área. Todos os alunos responderam corretamente à questão, demonstrando um desenvolvimento de sua concepção do objeto matemático *área*.

3ª Parte

Nesta parte há uma transcrição do texto do livro I dos Elementos, compreendendo as definições, os postulados e as noções comuns. É uma atividade de leitura e compreensão, ressaltando o papel fundamental da linguagem discursiva para o aprendizado. O objetivo é apresentar aos alunos um texto matemático escrito. Além disso, trabalhamos o registro de representação semiótica em língua natural. Os alunos leram e discutiram o significado de definição, postulado e noção comum.

Alguns comentários dos participantes:

- *"Interessantes, principalmente a parte de fazer os desenhos, que nos obriga a pensar um pouco mais e ser mais cuidadoso"*;
- *"Adorei, consegui fazer coisas que nunca foi proposta na faculdade. Esse tipo de ensino não é abordado na faculdade quando tem dificuldade para ensinar para o aluno"*;
- *"Relembrei assuntos de geometria importantíssimos de como construir uma perpendicular a reta dada. Aprendi a redesenhar as figuras com a mesma área, nunca havia feito isso antes, por isso obtive certo grau de dificuldade. Obrigada pelas dicas. Adorei a atividade de hoje"*;
- *"Boa, pois eu já tinha esquecido da construção de paralelas, ponto médio"*.

3ª Oficina: Considerações sobre os Resultados

Na primeira parte desta oficina, formulamos duas perguntas para verificar o conhecimento sobre os Elementos de Euclides e a concepção dos alunos sobre o uso deste texto no ensino. A maior parte dos alunos afirmou conhecer a obra e acreditar que seu uso no ensino possa favorecer o aprendizado da geometria. A seguir, investigamos a concepção dos licenciandos quanto à natureza da matemática e seu ensino. A maior parte dos alunos afirmou o caráter abstrato dos objetos matemáticos e a importância das representações para compreender seus conceitos. Além disso, todos os licenciandos apontaram o caráter lógico-dedutivo da matemática. Na segunda parte desta oficina, apresentamos quatro exercícios explorando a construção figural com régua e compasso. Todos os alunos apresentaram muitas dificuldades na utilização dos instrumentos euclidianos (régua e compasso) e muitos deles afirmaram nunca ter utilizado estes instrumentos. Segundo os participantes, a atividade de desenho foi bastante proveitosa e relembrou conceitos básicos da geometria escolar (construção de paralelas, perpendiculares, ponto médio, etc). Esta parte da oficina trabalhou intensivamente o tratamento figural do conceito de área. Na parte final, exploramos a representação discursiva presente no livro I dos Elementos, com a transcrição de seu texto. Os licenciandos demonstraram, a princípio, um estranhamento quanto à linguagem matemática do texto. A finalidade desta atividade era apresentar aos alunos um texto matemático sem números, o que para eles é bastante incomum.

4.3.4 4ª Oficina: As Demonstrações e o Teorema de Pitágoras em Euclides (6º Encontro)

4ª Oficina: Objetivos

O objetivo desta oficina foi trabalhar a representação discursiva lingüística juntamente com a representação figural. A coordenação entre os registros foi estimulada. Apresentamos um desafio ao final da oficina para os alunos fazerem a quadratura de um retângulo. Foi apresentada a demonstração contida nos Elementos para as Proposições I.43 (complementos dos paralelogramos) e I.47 (Teorema de Pitágoras). Antes da apresentação da demonstração de Euclides para o Teorema de Pitágoras, os alunos tiveram que fazer uma demonstração própria. Em seguida, eles tiveram que comparar as duas demonstrações, ressaltando semelhanças e diferenças. O objetivo desta atividade foi o de desenvolver o discursivo lógico-argumentativo dos alunos (representação discursiva).

4ª Oficina: Resultados

Esta oficina (Atividade 4, Anexo 6) é composta de 3 partes.

1ª Parte

Formulamos 2 perguntas sobre demonstrações, axiomas e teoremas. Apresentamos, também um exercício de raciocínio dedutivo. É nossa intenção trabalhar a linguagem formal.

Pergunta 1: Qual, na sua opinião, o papel das demonstrações na Matemática? As demonstrações devem ser ensinadas?

- *"O papel da demonstração é para provar que determinada tese é verdadeira ou não. As demonstrações devem ser ensinadas, mas isso varia de acordo com o nível da turma"*;
- *"O papel das demonstrações na Matemática, na minha opinião, é de facilitar a compreensão dos alunos, tornando mto mais fácil um assunto do que simplesmente dizer sem explicação (demonstração). Eu acredito que nem todas devam ser demonstradas, mas as de fácil compreensão sim"*;
- *"As demonstrações estimulam o raciocínio lógico. Sim, é importante exercitar o raciocínio e entender como surgem as "fórmulas" usadas"*.

O papel das demonstrações na matemática, segundo os alunos, é o de provar proposições e de facilitar a compreensão dos conceitos. Todos os alunos defenderam a idéia de que as demonstrações devem ser ensinadas e alguns impuseram restrições.

Pergunta 2: O que é um axioma? O que é um teorema?

- *"Axioma é algo admitido como verdadeiro, como regra. Já o teorema é algo que chegamos através de axiomas e proposições, devendo sempre ser demonstrado antes, ao contrário dos axiomas"*;
- *"Axioma é aquilo que assumimos como verdade, sem a necessidade de demonstração. E teorema deve ser demonstrado"*.

Todos os alunos fizeram corretamente a distinção entre axioma (proposição assumida como verdadeira) e teorema (proposição demonstrada a partir dos axiomas).

Exercício[7]**:** Damos abaixo três afirmações corretas: (a), (b) e (c).

[7] Reprodução do exercício 9, p. 97, do livro 'Aprendendo e Ensinando Geometria', org. Mary Montgomery Lindquist e Albert P. Shulte, Atual Editora, 1996.

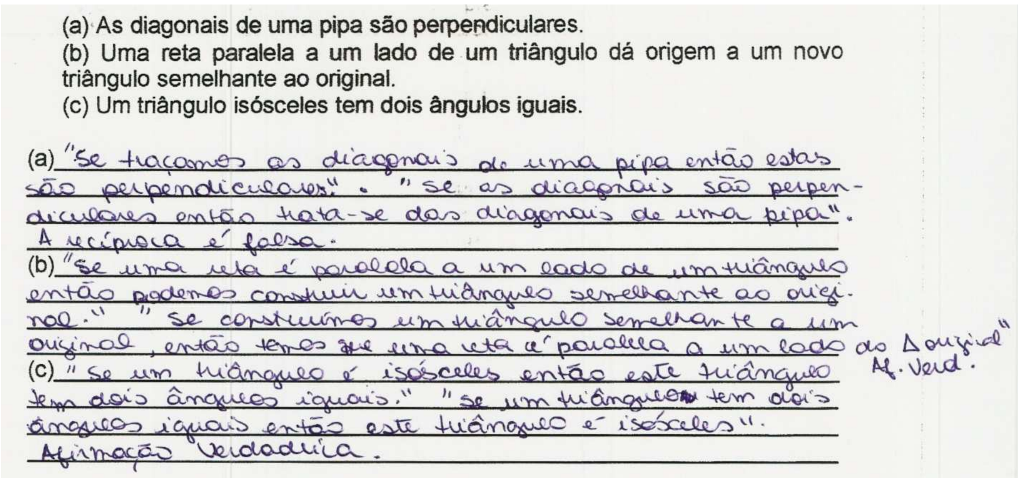
- A boa notícia é que você não precisa prová-las!
- A outra notícia é que você deverá:
  - colocá-las na forma “se-então”;
  - encontrar as afirmações recíprocas;
  - determinar se essas recíprocas são verdadeiras ou falsas.

(a) As diagonais de uma pipa são perpendiculares;

(b) Uma reta paralela a um lado de um triângulo dá origem a um novo triângulo semelhante ao original;

(c) Um triângulo isósceles tem dois ângulos iguais.

Este exercício visava o trabalho com as construções lógicas e o com a linguagem formal enquanto representação semiótica discursiva.


(a) As diagonais de uma pipa são perpendiculares.
(b) Uma reta paralela a um lado de um triângulo dá origem a um novo triângulo semelhante ao original.
(c) Um triângulo isósceles tem dois ângulos iguais.

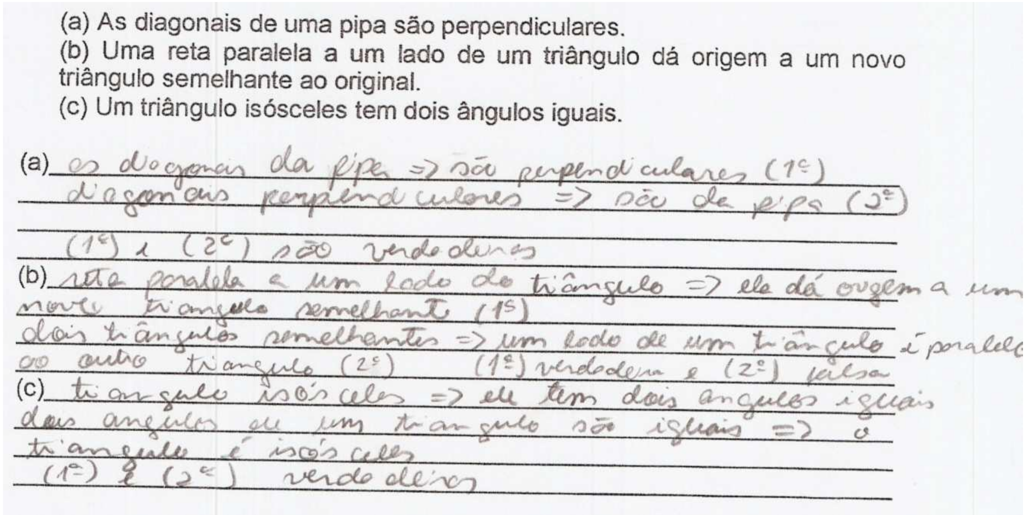
(a) "Se traçamos as diagonais de uma pipa então estas são perpendiculares". "Se as diagonais são perpendiculares então trata-se das diagonais de uma pipa". A recíproca é falsa.
(b) "Se uma reta é paralela a um lado de um triângulo então podemos construir um triângulo semelhante ao original." "Se construímos um triângulo semelhante a um original, então temos que uma reta é paralela a um lado do Δ original" Af. Verd.
(c) "Se um triângulo é isósceles então este triângulo tem dois ângulos iguais." "Se um triângulo tem dois ângulos iguais então este triângulo é isósceles". Afirmação verdadeira.

Figura 4.18: Resolução do Exercício feita pelo Participante VII.

Muitas foram as dificuldades encontradas pelos nesta atividade. Alguns alunos não escreveram as recíprocas.

2ª Parte

O objetivo das questões formuladas nesta etapa é desenvolver a competência de demonstrar teoremas, trabalhar a linguagem discursiva enquanto representação


(a) As diagonais de uma pipa são perpendiculares.
(b) Uma reta paralela a um lado de um triângulo dá origem a um novo triângulo semelhante ao original.
(c) Um triângulo isósceles tem dois ângulos iguais.

(a) os diagonais da pipa => são perpendiculares (1º)
diagonais perpendiculares => são da pipa (2º)
(1º) e (2º) são verdadeiras
(b) reta paralela a um lado do triângulo => ele dá origem a um novo triângulo semelhante (1º)
dois triângulos semelhantes => um lado de um triângulo é paralelo ao outro triângulo (2º) (1º) verdadeira e (2º) falsa
(c) triângulo isósceles => ele tem dois ângulos iguais
dois ângulos de um triângulo são iguais => o triângulo é isósceles
(1º) e (2º) verdadeiros

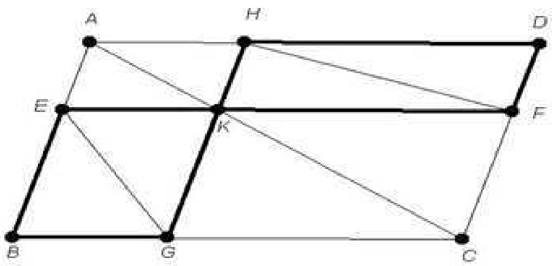
Figura 4.19: Resolução do Exercício feita pelo Participante III.

semiótica dos conceitos. Apresentamos o enunciado da proposição I.43 dos Elementos, bem como a proposição I.47, o teorema de Pitágoras.

Exercício 1:

1.a. Na Atividade 3 você justificou um importante teorema da Geometria Euclidiana. Veja como Euclides o enuncia e o demonstra nos Elementos:

(I.43) Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si.



Sejam o paralelogramo ABCD, e a diagonal AC dele, e, por um lado, sejam EH, FG à volta da AC, e, por outro lado, os ditos complementos BK, KD; digo que o complemento BK é igual ao complemento KD. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, e a AC é uma diagonal dele, o triângulo ABC é igual ao triângulo ACD. De novo, como o EH é um paralelogramo, e a AK é uma diagonal dele, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK. Pelas mesmas coisas, então, também o triângulo KFC é igual ao KGC. Como, de fato, por um lado, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK, e, por outro lado, o KFC, ao KGC, o triângulo AEK, com o KGC, é igual ao triângulo AHK, com o KFC; mas também o triângulo ABC todo é igual ao ADC todo; portanto, o complemento BK restante é igual ao complemento KD restante. Portanto, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda a área paralelogrâmica, são iguais entre si; o que era preciso provar.

(Bicudo, 2009, p. 129)

1.b. Reescreva esta demonstração deixando explícitas as hipóteses (suposições) e as conclusões de cada parte do referido teorema.

1.b. Reescreva esta demonstração deixando explícitas as hipóteses (suposições) e as conclusões de cada parte do referido teorema.

Hipóteses: Se traçamos paralelas em relação a AD e AB : EF e HG respectivamente. Traçando a diagonal AC. Formam-se dois paralelogramos.

Conclusão: Os paralelogramos EKBG e HKDF são iguais por comparação de áreas.

Figura 4.20: Resolução do Exercício 1.b feita pelo Participante VII.

1.b. Reescreva esta demonstração deixando explícitas as hipóteses (suposições) e as conclusões de cada parte do referido teorema.

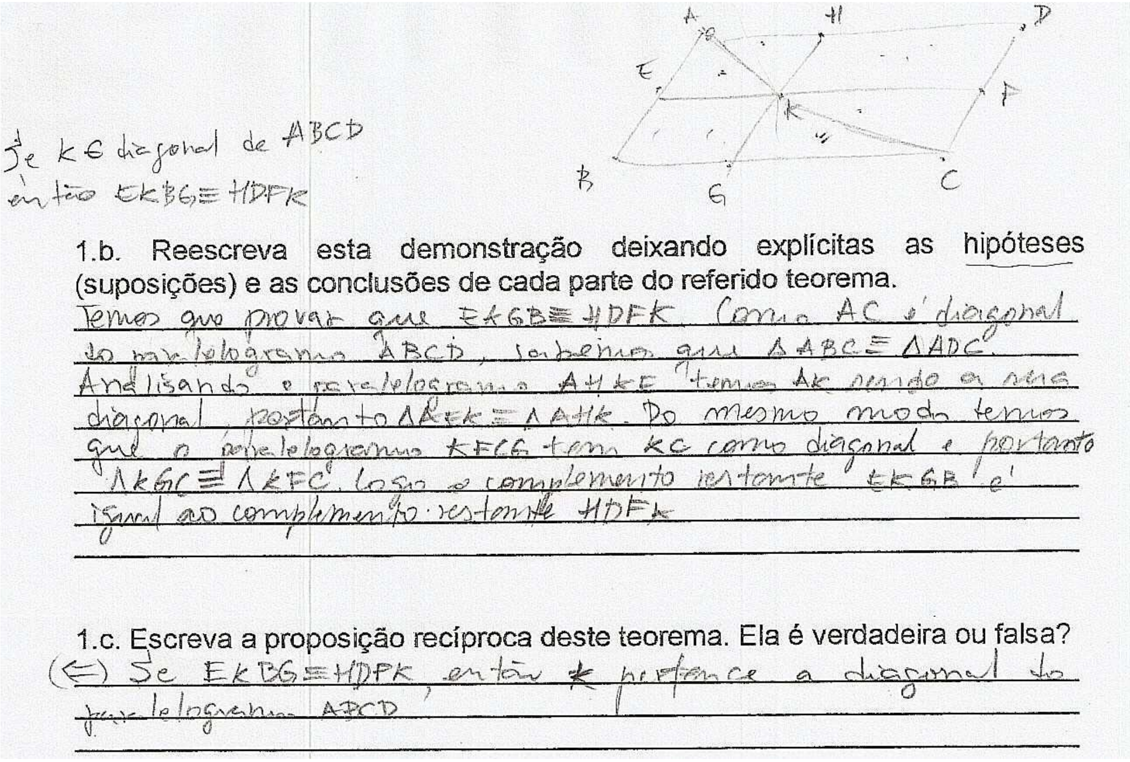
- hipótese: ABCD paralelogramo, AC diagonal de ABCD
- tese: os paralelogramos BK e KD são iguais.
- hipótese: os Δs ABC e ADC são iguais
- tese: os Δs AEK e AHK são iguais e KFC e KGC tbm.
- hipótese: os Δs ΔAEK = ΔAHK e ΔKFC = ΔKGC
- Tese: o ΔAEK com o ΔKGC é igual ao ΔAHK com o ΔKFC e o ΔABC é igual ao ΔADC.
- hipótese: ΔABC = ΔADC
- tese: complemento BK restante é igual ao complemento KD restante; logo, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda a área paralelogrâmica são iguais entre si.

1.c. Escreva a proposição recíproca deste teorema. Ela é verdadeira ou falsa?

Se os complementos do paralelogramo ABCD a volta de AC são iguais, então AC é diagonal.

Figura 4.21: Resolução do Exercício 1.b feita pelo Participante IV.

1.c. Escreva a proposição recíproca deste teorema. Ela é verdadeira ou falsa?



Se $K \in$ diagonal de $ABCD$
então $EKBG \equiv HDFK$

1.b. Reescreva esta demonstração deixando explícitas as hipóteses (suposições) e as conclusões de cada parte do referido teorema.

Temos que provar que $EKGB \equiv HDFK$. Como AC é diagonal do paralelogramo $ABCD$, sabemos que $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$. Analisando o paralelogramo $AHKE$ temos AK sendo a sua diagonal, portanto $\Delta AEK \equiv \Delta AHK$. Do mesmo modo temos que o paralelogramo $KFCG$ tem KC como diagonal e portanto $\Delta KGC \equiv \Delta KFC$. Logo o complemento restante $EKGB$ é igual ao complemento restante $HDFK$

1.c. Escreva a proposição recíproca deste teorema. Ela é verdadeira ou falsa?

($\Leftarrow$) Se $EKBG \equiv HDFK$, então K pertence a diagonal do paralelogramo $ABCD$

Figura 4.22: Resoluções do Exercícios 1.b e 1.c feitas pelo Participante I.

As dificuldades apresentadas no exercício foram muitas. O tratamento na linguagem formal apresenta muitas dificuldades para estes alunos.

Exercício 2:

O objetivo deste exercício é trabalhar o Teorema de Pitágoras de forma comparativa: demonstração do aluno x demonstração de Euclides. Pretendemos desenvolver a habilidade de demonstração matemática dos alunos com o uso de uma linguagem formal (tratamento discursivo).

2.a. O Teorema de Pitágoras é o mais 'famoso' da Matemática. Enuncie-o e demonstre-o.

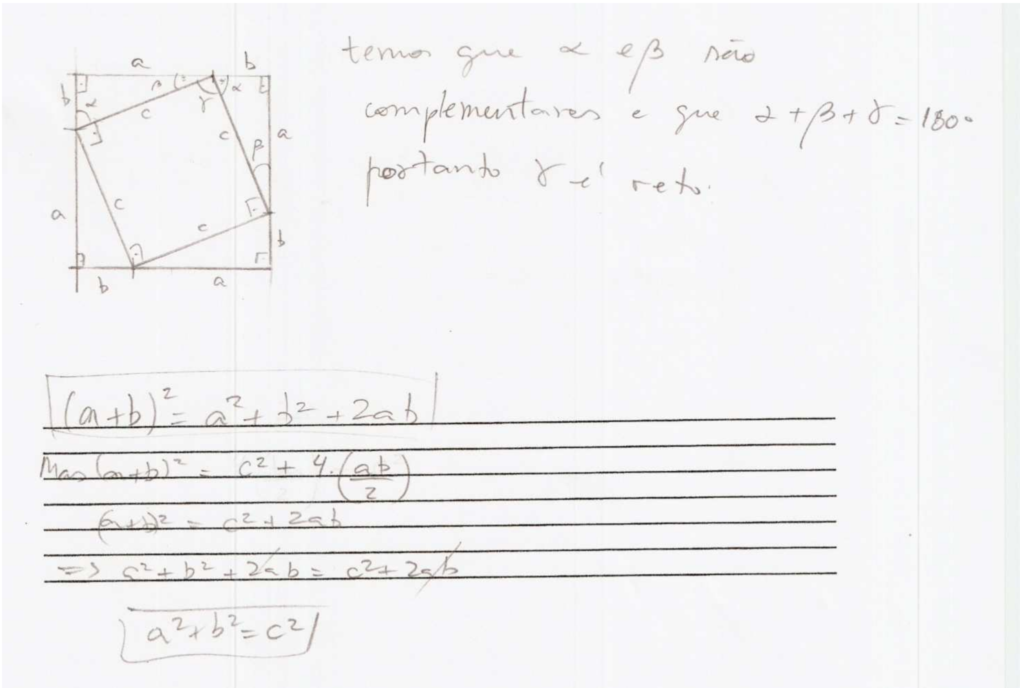


Figura 4.23: Resolução do Exercício 2a feita pelo Participante I.

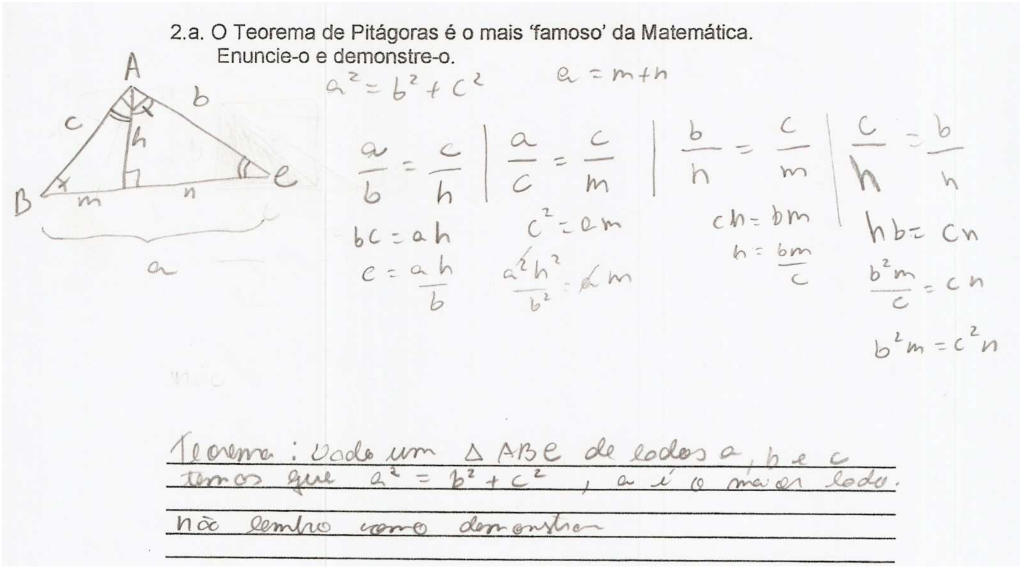


Figura 4.24: Resolução do Exercício 2a feita pelo Participante III.

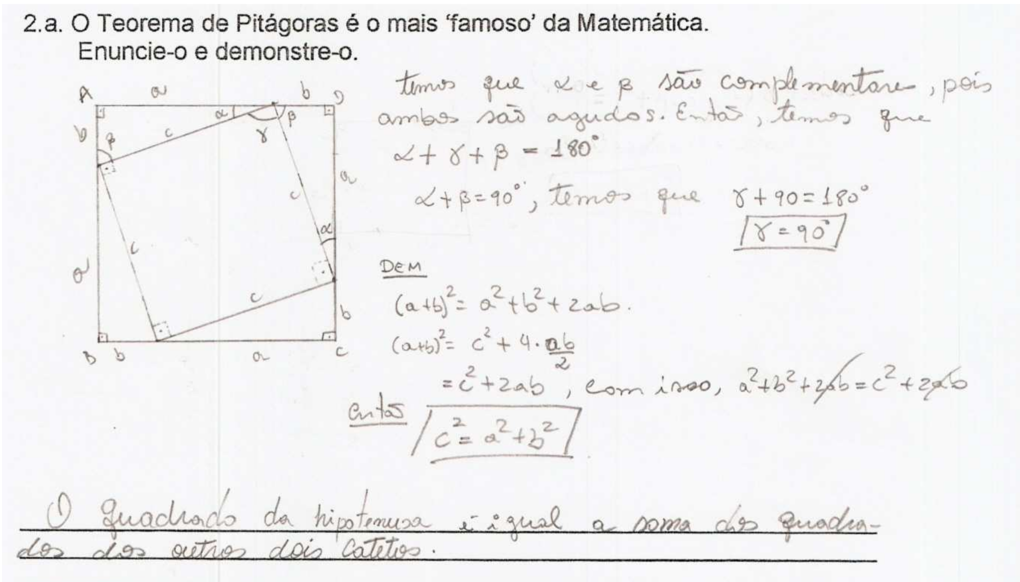
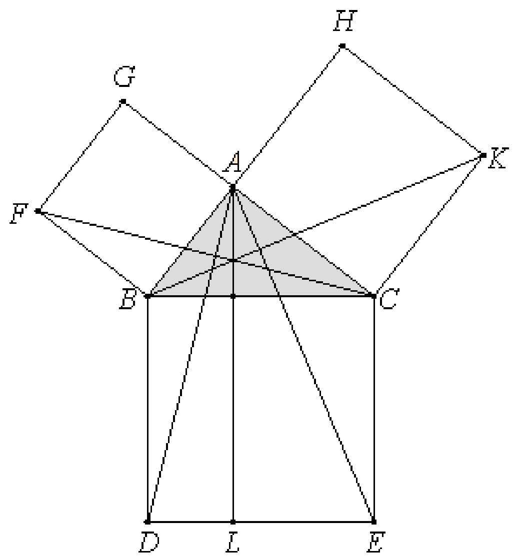


Figura 4.25: Resolução do Exercício 2a feita pelo Participante II.

Muitos alunos não souberam demonstrar o Teorema de Pitágoras (muito grave em se tratando de futuros professores). Apesar de ser um resultado que os alunos aplicam em diversos problemas, o tratamento geométrico do teorema não é do conhecimento dos alunos. O tratamento algébrico é o usado com mais domínio.

2.b. Agora veja a demonstração do teorema de Pitágoras apresentada por Euclides nos Elementos.

(I.47) Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

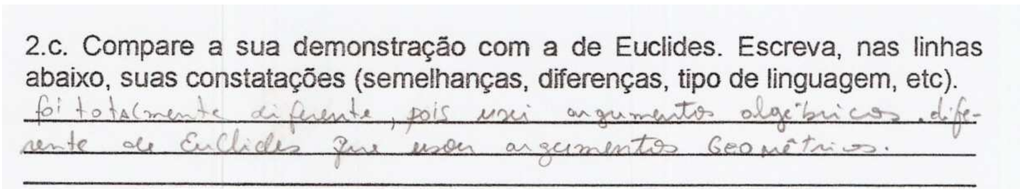


Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois, descritos, por um lado o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;]

portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

(Bicudo, 2009, p. 132)

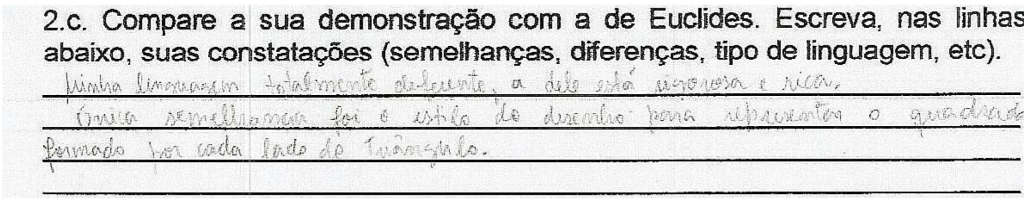
2.c. Compare a sua demonstração com a de Euclides. Escreva, nas linhas abaixo, suas constatações (semelhanças, diferenças, tipo de linguagem, etc).



2.c. Compare a sua demonstração com a de Euclides. Escreva, nas linhas abaixo, suas constatações (semelhanças, diferenças, tipo de linguagem, etc).

foi totalmente diferente, pois usei argumentos algébricos, diferente de Euclides que usou argumentos Geométricos.

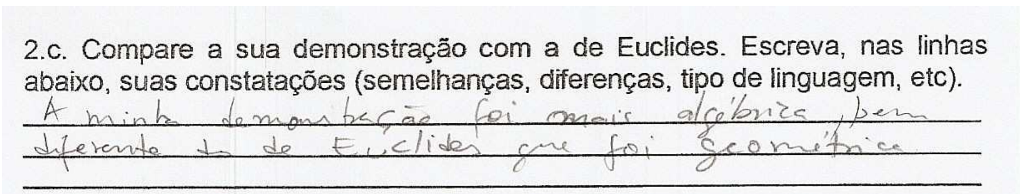
Figura 4.26: Resolução do Exercício 2c feita pelo Participante II.



2.c. Compare a sua demonstração com a de Euclides. Escreva, nas linhas abaixo, suas constatações (semelhanças, diferenças, tipo de linguagem, etc).

Minha linguagem totalmente diferente, a dele está rigorosa e rica.
Única semelhança foi o estilo do desenho para representar o quadrado formado por cada lado do Triângulo.

Figura 4.27: Resolução do Exercício 2c feita pelo Participante VIII.



2.c. Compare a sua demonstração com a de Euclides. Escreva, nas linhas abaixo, suas constatações (semelhanças, diferenças, tipo de linguagem, etc).

A minha demonstração foi mais algébrica, bem diferente da de Euclides que foi geométrica

Figura 4.28: Resolução do Exercício 2c feita pelo Participante I.

Os resultados dos alunos mostram que eles perceberam a diferença de linguagem entre a de Euclides (geométrica) e a usada por eles (algébrica). Houve progressos na compreensão do que é uma demonstração matemática.

3ª Parte

Propomos um desafio.

Desafio: Utilizando apenas régua (não graduada) e compasso, construa um retângulo e, posteriormente, um quadrado de área igual ao do retângulo inicial.

Nosso objetivo é verificar a compreensão da demonstração geométrica do Teorema de Pitágoras feita por Euclides, assim como sua recíproca.

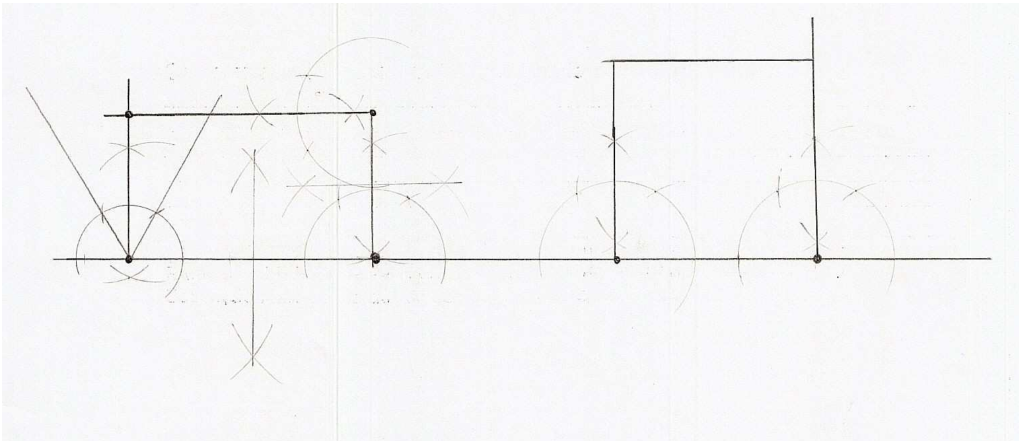


Figura 4.29: Resolução do Desafio feita pelo Participante VII.

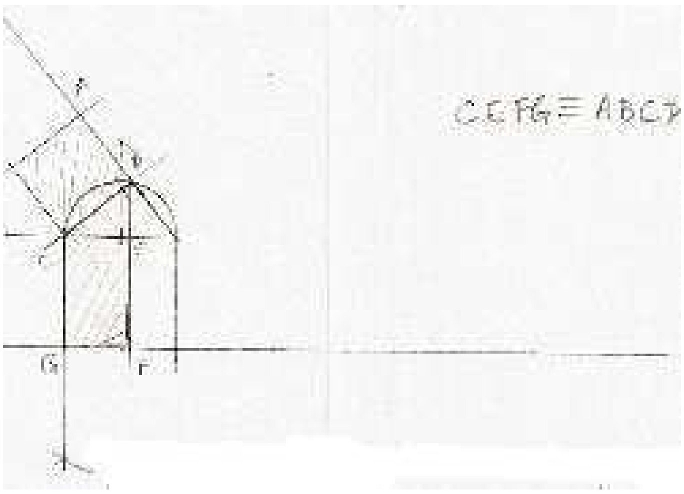


Figura 4.30: Resolução do Desafio feita pelo Participante I.

Alguns alunos fizeram a construção correta, apresentando melhorias nas construções com régua e compasso. Entretanto, o processo de apropriação da abordagem geométrica presente na demonstração do Teorema de Pitágoras por Euclides ainda não se consolidou completamente.

Alguns comentários dos participantes:

- *"Eu gostei das atividades de hoje porque estimulam as demonstrações de algumas coisas que são apenas ditas em sala de aula"*;
- *"Achei as mais difíceis do trabalho, mas muito interessantes e importantes"*;
- *"Mais desafiadoras e cada vez mais legais, principalmente a construção de um quadrado com a mesma área de um retângulo dado que faz o caminho inverso da demonstração de Euclides"*;
- *"Já tenho uma noção mais rica e rigorosa sobre como demonstrar o Teorema de Pitágoras e também a proposição sobre o paralelogramo apresentada aqui. Mais uma vez obtive dificuldade em usar compasso e régua não graduada para fazer um retângulo e um quadrado de mesma área"*.

4ª Oficina: Considerações sobre os Resultados

O objetivo principal desta oficina era desenvolver a habilidade dos alunos com relação à representação discursiva dos objetos matemáticos. Inicialmente, formulamos duas perguntas para verificar o conhecimento dos alunos sobre demonstrações, axiomas e teoremas, e propusemos um exercício de raciocínio dedutivo. A maior parte dos alunos afirmou que o papel das demonstrações em matemática é o de provar determinada proposição. Sabiam distinguir um axioma de um teorema. No exercício de raciocínio lógico houve muita dificuldade, principalmente em encontrar as afirmações recíprocas às proposições iniciais. Muitos alunos não alcançaram sucesso na resolução deste exercício. Na segunda parte, visando desenvolver a competência em demonstrações de teoremas e trabalhar a linguagem discursiva enquanto representação semiótica dos conceitos, propusemos uma reescrita das demonstrações da proposição I.43 de Euclides, bem como a escrita da proposição recíproca deste teorema. Todos os alunos apresentaram grandes dificuldades em cumprir a atividade proposta. Posteriormente, foi apresentada uma atividade análoga com o teorema de Pitágoras, onde as dificuldades encontradas não foram menores. Finalizando a oficina, havia um desafio para a quadratura de um retângulo. Os alunos apresentaram enormes progressos na construção da representação figural com régua e compasso. Possivelmente, este progresso deveu-se às atividades desenvolvidas na oficina anterior. Os resultados apresentados, em geral, apontam para uma necessidade preemente de se trabalhar a representação discursiva da linguagem matemática com os alunos.

4.3.5 5ª Oficina: Quadratura de Figuras Planas (7º Encontro)

5ª Oficina: Objetivos

O objetivo desta oficina é apresentar o método grego para o cálculo de áreas: a quadratura. O texto de Euclides é tomado como referência. Novamente são mostrados dois registros diferentes de representações semióticas: o discursivo e o figural. Pretendemos estimular a coordenação entre eles.

5ª Oficina: Resultados

Esta oficina (Atividade 5, Anexo 6) é composta de 3 partes.

1ª Parte

Nesta etapa é apresentado um texto explicativo sobre a quadratura de figuras planas como o objetivo de familiarizá-los com o método grego.

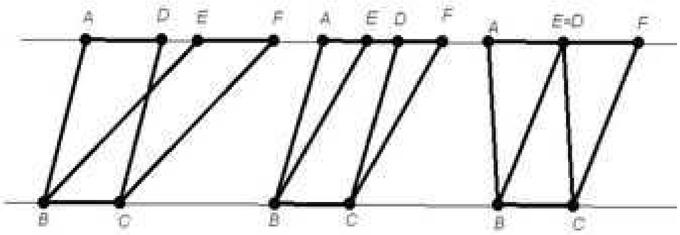
Quadratura de figuras planas

Os matemáticos gregos comparavam a área de uma figura plana com a área de um quadrado. Fazer a quadratura de uma figura significa construir um quadrado cuja área seja igual à área da figura inicial.

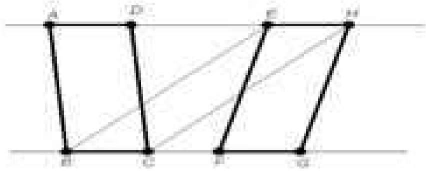
Os matemáticos gregos clássicos restringiam os instrumentos admissíveis em construções geométricas à régua e ao compasso. Provavelmente, tal fato deve-se à descoberta de grandezas incomensuráveis (descoberta de números irracionais).

Os gregos não usavam fórmulas de medida de áreas. Eles trabalhavam com a idéia de equivalência de áreas, ou seja, pela consideração de figuras com a mesma área.

Euclides, nos Elementos, desenvolve suas demonstrações a partir da equivalência de área dos paralelogramos entre duas paralelas. Analise as figuras abaixo.

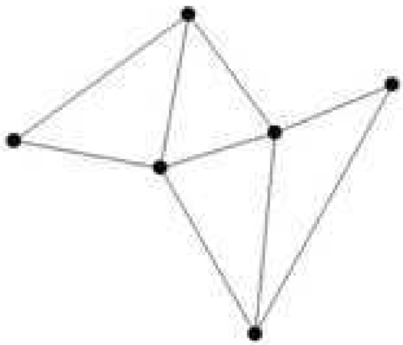


E repare na generalização onde as bases dos paralelogramos não encontram-se mais superpostas.

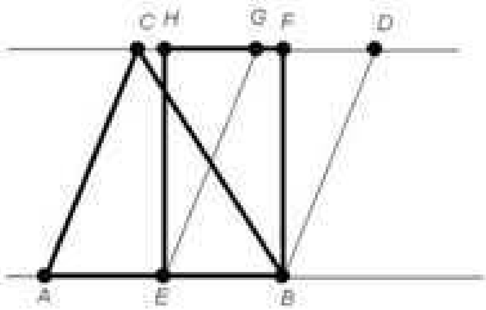


Para Euclides, a noção de **igualdade** entre figuras pode significar tanto **igualdade de áreas** como **congruência de figuras**. Vamos acompanhar, agora, o processo grego para a **quadratura** de um polígono qualquer.

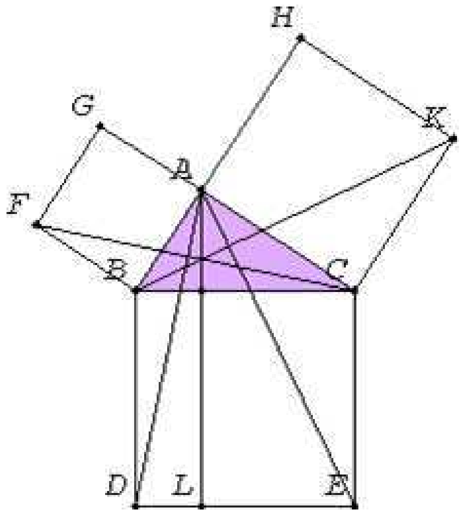
1. Decompor o polígono dado em triângulos (esta decomposição não é única, mas é sempre possível);



2. Transformar cada triângulo em um paralelogramo (e depois num retângulo) de mesma área;



3. Transformar cada retângulo em um quadrado (usaremos para isso o teorema de Pitágoras);



4. Transformar estes quadrados em um único quadrado, cuja área seja igual à área do polígono P (também usaremos o teorema de Pitágoras).

2ª Parte

Nesta etapa propomos um exercício de quadratura de um triângulo, utilizando apenas régua (não graduada) e compasso. Nosso objetivo é desenvolver a habilidade de construir um quadrado de área equivalente a de um triângulo qualquer. Desta forma, o aluno será capaz de fazer a quadratura de qualquer outra figura poligonal plana (método grego de quadratura de figuras planas).

Exercício:

1. Desenhe um triângulo qualquer. Construa, posteriormente, um retângulo de área igual ao triângulo desenhado;

2. Construa um quadrado de área igual à do retângulo do item anterior.

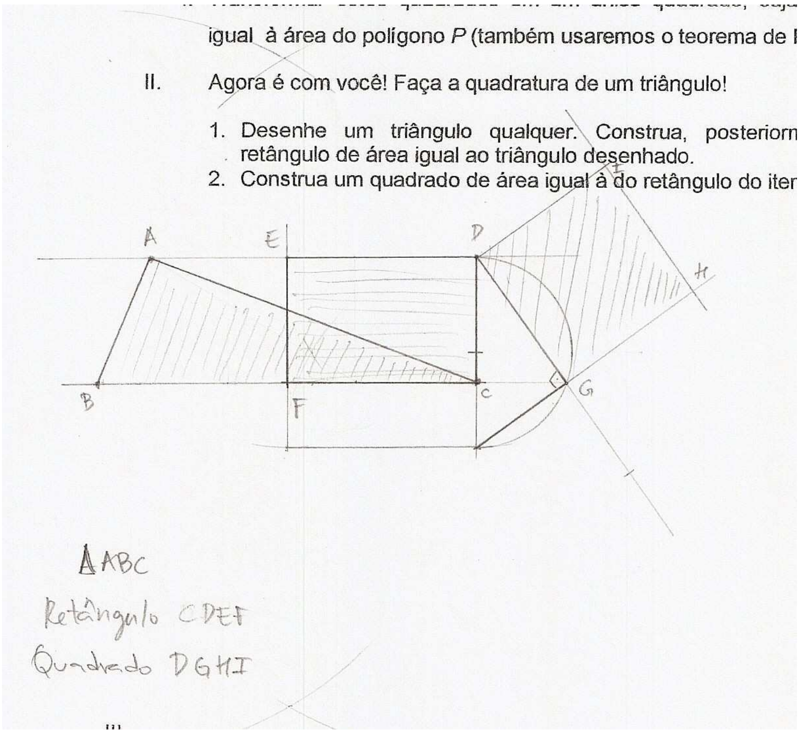


Figura 4.31: Resolução do Exercício feita pelo Participante I.

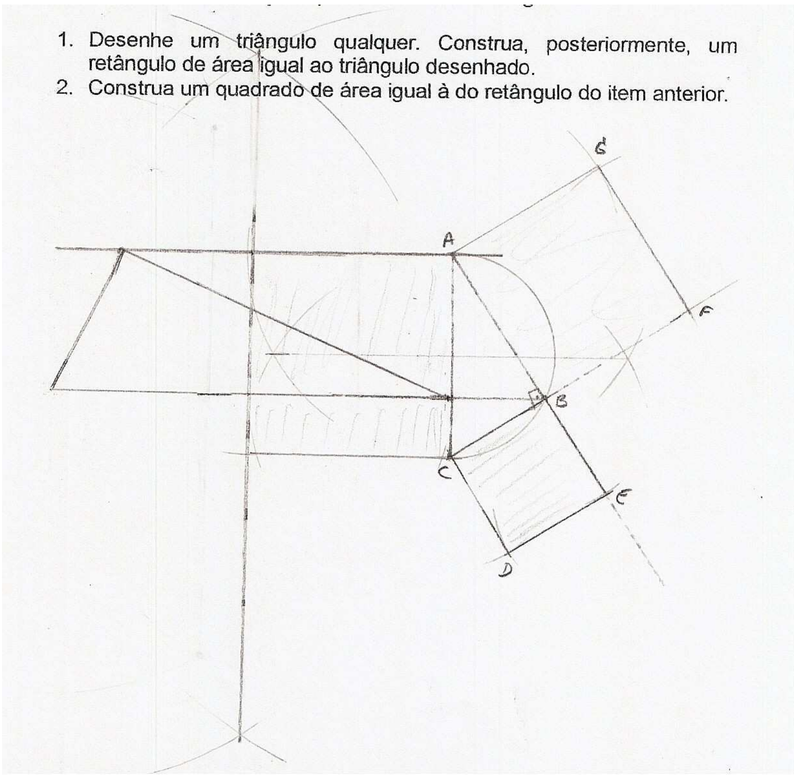


Figura 4.32: Resolução do Exercício feita pelo Participante II.

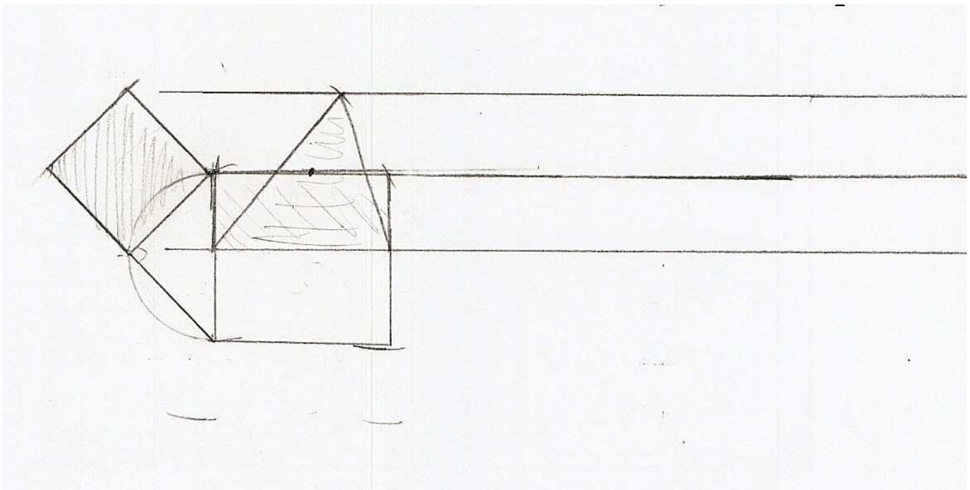


Figura 4.33: Resolução do Exercício feita pelo Participante IV.

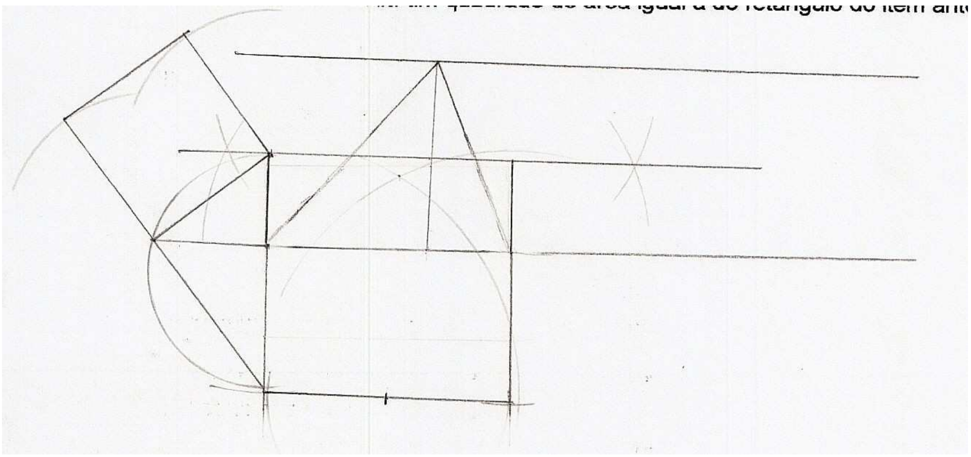


Figura 4.34: Resolução do Exercício feita pelo Participante V.

Apesar das dificuldades, os alunos apresentaram progressos significativos. As construções geométricas ganharam em correção e significado. Os alunos demonstraram ter compreendido o método grego de quadratura de figuras poligonais planas.

3ª Parte

O objetivo das 3 perguntas propostas a seguir é o de verificar qual a influência que as oficinas tiveram na (re-)construção do conceito de área pelos alunos. Há, também, um espaço para avaliação pelos licenciandos da participação nas oficinas.

Pergunta 1: Como você define o conceito de área?

- *"Um bom conceito poderia ser na decomposição de qualquer área em outras menores e mais simples no cálculo"*;

- *"O que pude perceber que o conceito de área pode variar. Podemos utilizar a decomposição de áreas,ou seja, decompor uma área desconhecida em figuras conhecidas como retângulo, triângulos e quadrado"*;

- *"Área é uma medida de um espaço plano, formada por duas dimensões"*.

Pergunta 2: Como você ensinaria, hoje, o conceito de área, a um aluno do Ensino Básico? Quais aspectos destacaria?

- *"Ensinaria que poderia transformar figuras mais complexas em figuras com mais facilidades de calcular a área"*;

- *"Ensinaria falando das diferentes formas dentro da sala de aula, qual a área do quadro negro, do chão da sala, para ir familiarizando até introduzir o conceito formal de área da matemática"*;

- *"A igualdade de figuras. Junto com a congruência das figuras"*.

Pergunta 3: Como você faria para medir a área de um terreno plano, de forma poligonal, sem utilizar números reais?

- *"Decomporia em figuras conhecidas"*;

- *"Como o terreno é plano, posso decompor em triângulos e posteriormente construir quadrados, pois são figuras conhecidas e fáceis de calcular"*;

- *"Poderia transformar a área em triângulos e depois os triângulos em retângulos e enfim em quadrados. Esses quadrados eu posso somá-los e ter a idéia do tamanho do terreno comparado com um enorme "quadradão""*;

- *"Dividi-lo em polígonos conhecidos (triângulo, quadrado, retângulo, etc) para determinar sua área"*.

É muito significativo que nenhum dos participantes tenha mencionado fórmulas para o cálculo de áreas. Isto é um progresso em relação aos primeiros resultados da nossa experiência didática.

Avaliação da experiência das oficinas por alguns licenciandos:

- *"Influenciaram bastante sobre conceito de área, principalmente na construção de figuras diferentes com a mesma área foi muito positivo essa abordagem, pois estou estudando geometria na faculdade e utilizamos justamente o livro Elementos de Euclides. A principal contribuição para minha formação será a maneira de como vou ensinar Geometria para os alunos do Ensino Básico, Fundamental e Médio, e também aprendi bastante como manusear régua não graduada e compasso para construção de figuras de mesma área, eu nunca havia feito isso"*;

- *"A experiência foi muito produtiva, abrindo os olhos para alguns conceitos. A abordagem dos Elementos de Euclides também foi positiva, principalmente na prova de Pitágoras, onde facilitou a construção de um quadrado de mesma área que um retângulo dado. Na contribuição da formação profissional posso citar por exemplo o maior cuidado na resolução de um exercício e de como passá-lo a um aluno"*;

- *"Esta oficina veio em ótima hora, pois no curso de licenciatura não aprendi a utilizar régua, compasso e esquadro para construção de figuras, objetos geométricos. A contribuição do trabalho irá melhorar muito minha noção geométrica, tanto dos conceitos, quanto da construção. Serei um profissional totalmente diferente de antes. As atividades me mostraram outras formas de desenvolver o conceito de área"*;

- *"Podemos desenvolver um trabalho mais criativo e interessante com o uso de régua e compasso, os quais não são abordados em sala de aula. As atividades expandiram meu campo de visão, como podemos criar com régua e compasso figuras distintas de mesma área, saindo do conceito algébrico e aguçando a percepção. Os elementos de Euclides são muito interessantes, mas deve-se ter cuidado ao ensinar para não tornar a matéria entediante. Sem dúvidas de grande importância para aumentar meu leque de opções de como ensinar um conteúdo"*;

- *"As atividades enriqueceram o meu conhecimento sobre igualdade de áreas. Considero todo tipo de aprendizagem positiva pois através da diversidade do conhecimento que é possível comparar e reconhecer a melhor resolução de um* *problema. O trabalho contribuiu para aumentar a minha crítica em relação ao ensino de alguns conceitos de geometria"*;

- *"Influenciou na minha observação e concentração. Foi positivo ver a abordagem de Euclides pois aguçou a visão geométrica e amadureceu meus conceitos geométricos, o que será de grande valia na formação profissional"*.

5ª Oficina: Considerações sobre os Resultados

Nesta oficina, em sua primeira parte, apresentamos um texto explicativo sobre o método grego de quadratura de figuras planas. Os alunos foram convidados a ler e compreender conjuntamente o texto. Na segunda parte, foi proposto um exercício de quadratura de um triângulo com o uso de régua e compasso. Os alunos demonstraram uma apropriação do método grego de quadratura de figuras. Esta atividade pretendia finalizar o trabalho das oficinas de forma a auxiliar os alunos a compreender o conceito de área enquanto atributo geométrico da figura. Pela quadratura das figuras planas os alunos perceberam que qualquer polígono pode ser transformado em um quadrado de mesma área sem a utilização de números e fórmulas, o que para eles, até então, era impossível. Foi uma conquista importante no sentido do desenvolvimento do olhar geométrico destes alunos, o que era nosso objetivo inicial. Na última parte, os alunos foram argüidos a respeito do conceito de área, de sua medição e de seu ensino. As respostas apontaram para um crescimento conceitual no sentido da consideração geométrica do conceito. Cabe ressaltar que em nosso primeiro encontro as mesmas perguntas foram respondidas de forma restrita, apresentando uma concepção puramente algébrica.

Capítulo 5

Resultados da Experiência Didática

5.1 Avaliação (8º Encontro)

Esta avaliação é feita utilizando o mesmo teste de van Hiele aplicado no início das oficinas. O objetivo é verificar se houve progresso dos alunos quanto ao nível de seu pensamento geométrico.

5.1.1 Teste de van Hiele (2ª Avaliação)

Apresentamos abaixo os resultados auferidos pelos alunos na segunda avaliação[1].

Tabela 5.1: Notas da 2ª avaliação.

Participante	**Nível de van Hiele**	**Nota**
I	2	127
II	4	95
III	3	72
IV	2	89
V	3	72
VI	—	—
VII	2	59
VIII	1	72

[1] O participante VI não foi avaliado na segunda avaliação.

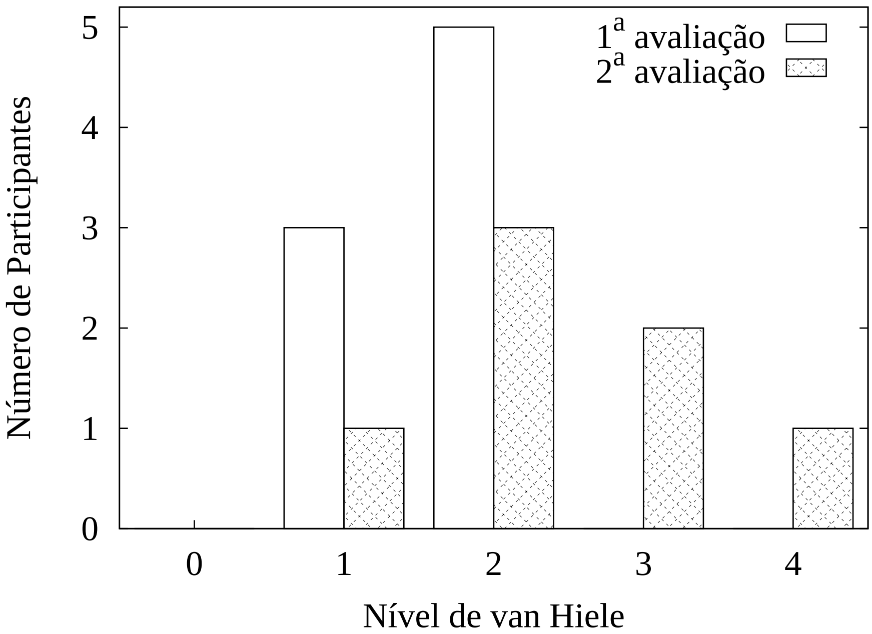


Figura 5.1: Distribuição dos participantes pelos níveis de van Hiele nas duas avaliações.

5.1.2 Análise Comparativa

Os resultados expressam uma melhora no desempenho da maior parte dos alunos, segundo o Modelo de van Hiele. Respondendo à questão norteadora da pesquisa, *"Qual a contribuição que uma intervenção didática para o ensino de áreas baseada nos Elementos pode dar para a formação inicial dos professores de Matemática?"*, a intervenção didática proposta propiciou um progresso na compreensão geométrica dos alunos participantes, conforme os resultados apresentados na Figura 5.1 e nas Tabelas 5.2 e 5.3. Segundo van Hiele, o desenvolvimento do pensamento geométrico se dá progressivamente segundo o esquema:

$$\text{figuras} \rightarrow \text{propriedades} \rightarrow \text{relação} \rightarrow \text{formalização} \rightarrow \text{rigor.}$$

Os resultados apontam para uma elevação geral do nível de pensamento geométrico do grupo de participantes. Apenas um aluno, ainda se encontra no nível de reconhecimento das propriedades das figuras (nível 1). A maior parte dos alunos é capaz de classificar as figuras por suas propriedades (nível 2) embora ainda não sejam capazes de trabalhar num sistema formal. Dois alunos progrediram de nível, sendo capazes de explorar as relações entre as propriedades dos objetos geométricos, produzindo conjecturas e decidindo sobre a validade delas. Começam a compreender uma estrutura axiomática (nível 3). Destacamos, ainda, um dos alunos cujo progresso no desenvolvimento do pensamento geométrico foi bastante significativo, atingindo o nível máximo do modelo de van Hiele (nível 4), sendo capaz de trabalhar com sistemas axiomáticos diferentes para a geometria.

Tabela 5.2: Comparação dos níveis de van Hiele entre a primeira e a segunda avaliação.

Participante	**Nível de van Hiele (1ª)**	**Nível de van Hiele (2ª)**	**Alteração**
I	2	2	manteve
II	1	4	melhorou
III	2	3	melhorou
IV	1	2	melhorou
V	2	3	melhorou
VI	2	—	—
VII	1	2	melhorou
VIII	2	1	piorou

Tabela 5.3: Comparação das notas entre a primeira e a segunda avaliação.

Participante	**Nota (1ª)**	**Nota (2ª)**	**Alteração**
I	95	127	+34%
II	51	95	+86%
III	95	75	-21%
IV	85	89	+5%
V	77	72	-6%
VI	93	—	—
VII	45	59	+31%
VIII	96	72	-25%

5.1.3 Re-significações Realizadas por Alguns Participantes Quanto ao Conceito de Área

A seguir destacamos a formulação feita pelos alunos na primeira atividade de nossos encontros e também na última. As considerações dos alunos apontam para uma ampliação da concepção do conceito de área.

Participante I:

- Primeiro momento (atividade 1):
  - *"É a medida de uma superfície".*
- Segundo momento (atividade 5):
  - *"Um bom conceito poderia ser na decomposição de qualquer área em outras menores e mais simples no cálculo".*

Participante II:

- Primeiro momento (atividade 1):
  - *"Na formação básica os professores falavam que área é um preenchimento do plano formado por uma limitação. Seja o retângulo que é delimitado por quatro semi-retas ou triângulo por 3. Na faculdade os professores dizem que isso é conteúdo adquirido, ou seja, era pra ser visto no Ensino Médio".*
- Segundo momento (atividade 5):
  - *"O que pude perceber que o conceito de área pode variar. Podemos utilizar a decomposição de áreas, ou seja, decompor uma área desconhecida em figuras conhecidas como retângulo, triângulos e quadrados".*

Participante VII:

- Primeiro momento (atividade 1):
  - *"Na formação básica a área está somente ligada a medidas de superfícies, a fórmula comprimento $\times$ largura...".*
- Segundo momento (atividade 5):
  - *"Que a área pode ser comparada com outras áreas. [...] Através da comparação para depois chegar às fórmulas".*

Participante VIII:

- Primeiro momento (atividade 1):
  - *“Lembro que seria o espaço ocupado e limitado”.*
- Segundo momento (atividade 5):
  - *“Área é um espaço limitado pelos lados de um polígono”.*

Participante IV:

- *"Eu gostei das atividades da oficina de geometria pois pude observar e desenvolver uma área que dentro do curso de licenciatura não havia praticado tanto. Considerei positiva esta abordagem pois pudemos desenvolver um pouco mais esse conceito que aprendemos desde o ciclo básico de nossas vidas na escola. E, como futuros professores, teremos um leque maior de exemplos para dar em sala de aula, já que participamos desta oficina. E isso influenciará diretamente (positivamente, claro) na minha formação profissional".*

Podemos notar, pelos registros dos alunos, que houve uma reconstrução significativa do conceito de área. Inicialmente, os alunos não demonstravam perceber a distinção entre área e medida e também entre área e superfície. Além disso, apresentavam uma concepção fortemente marcada pelas fórmulas de cálculo de áreas (*"a área está somente ligada a medidas de superfícies, à fórmula comprimento × largura"*). No decorrer das atividades propostas, o conceito de área foi sendo trabalhado como atributo geométrico das figuras, de forma desvinculada dos números e das fórmulas. Desta maneira, os alunos tiveram a oportunidade de perceber que área é um atributo geométrico da figura em questão (grandeza geométrica) e que as figuras podem ser classificadas segundo este atributo. Assim, pela transformação de figuras podemos construir figuras equivalentes quanto à área, além de compará-las, estabelecendo uma relação de ordem.

> *"O que pude perceber que o conceito de área pode variar. Podemos utilizar a decomposição de áreas, ou seja, decompor uma área desconhecida em figuras conhecidas..."*

> *"Foi positivo ver a abordagem de Euclides, pois aguçou a visão geométrica e amadureceu meus conceitos geométricos..."*

A educação é um processo permanente. Sabemos que o tempo dedicado aos estudos influencia no resultado alcançado. Tivemos, a pesquisadora e os licenciandos, aproximadamente 1 mês de trabalho. É pouco tempo para pretendermos resultados muito expressivos. Os erros e as dúvidas fazem parte do processo educativo. Porém, novos horizontes foram descortinados. Novos paradigmas foram experimentados e as dúvidas surgiram. Pensar desestabiliza. É assim que aprendemos.

"Da maneira mais global, podemos constatar que o progresso do conhecimento vem acompanhado sempre da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que coexistem mais ou menos com o primeiro dentre eles, aquele da língua natural. Assim, a formação do pensamento científico é inseparável do desenvolvimento de simbolismos específicos para representar os objetos e suas relações."

(Granger, 1979, p. 21-47, apud Duval, 2009, p. 16)

5.2 Reflexões sobre os Resultados da Experiência Didática

O ensino e a aprendizagem de área de figuras poligonais planas envolve três campos distintos do saber matemático: campo geométrico, campo numérico e campo das grandezas. Estes campos de saberes, para um aprendizado significativo do conceito de área, devem ser distinguidos e, ao mesmo tempo, articulados (Figura 5.2).

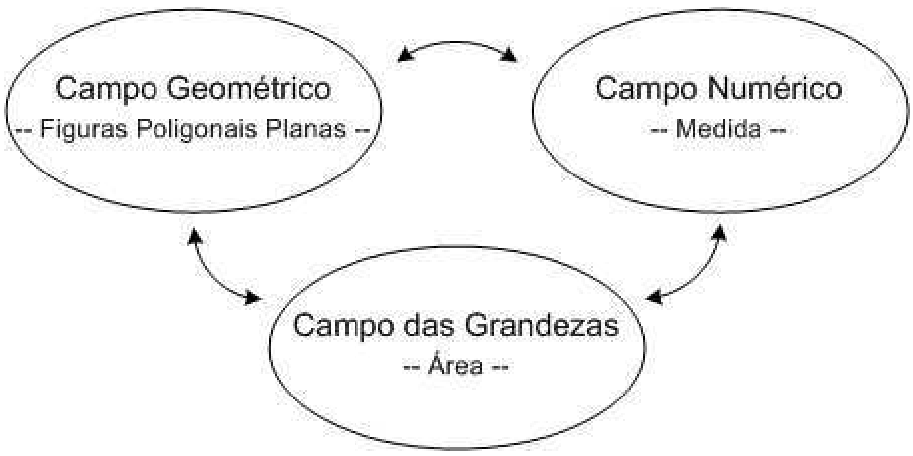


Figura 5.2: Articulação dos saberes para o ensino da grandeza geométrica *área*.

Há, atualmente, como pudemos constatar em nossa prática e nas pesquisas realizadas, uma predominância do aspecto numérico no ensino de áreas. A ênfase é dada às fórmulas para cálculo de áreas e isto aparece claramente na formulação dos livros didáticos da escola básica (ver Capítulo 2). O resultado dessa prática é uma aprendizagem distorcida e incompleta do conceito de área pelos alunos.

Tomando por base teórica o Modelo de van Hiele e o Modelo de Duval, que destacam o papel do professor no processo de construção conceitual dos alunos, entendemos que é necessária uma proposta metodológica específica para conduzir o processo de ensino e aprendizagem do conceito de área. Considerando que atualmente o ensino de geometria apresenta-se insuficiente, havendo muitas vezes uma restrição do ensino de geometria ao ensino das medidas (campo numérico), propusemos uma intervenção didática para o ensino de geometria, especificamente para o conceito de área, que considera o objeto geométrico (área), trabalhado enquanto grandeza, distintamente de sua medida numérica. Cientes da complexidade do processo de ensino e de aprendizagem do campo de grandezas e medidas, apresentamos uma série de atividades para a re-construção significativa do conceito de área. Partimos das hipóteses didáticas de que:

1. é necessário distinguir e articular os três campos de saberes matemáticos envolvidos no tema: campo geométrico (figuras poligonais planas), campo das grandezas (área das figuras) e campo numérico (medida da área);

2. utilizar a história da matemática no ensino traz benefícios para a significação dos objetos em estudo.

Em nossa pesquisa, trabalhamos os objetos matemáticos (figuras poligonais planas/área) a partir de suas representações semióticas (figural e discursiva). Desenvolvemos as atividades de forma a distinguir e, ao mesmo tempo, associar os objetos matemáticos em questão:

- as oficinas 1 (Exploração do conceito de áreas com o Tangram) e 2 (A transformação de figuras) exploraram a área da figura como um objeto matemático distinto da superfície plana, já que superfícies diferentes podem ter a mesma área. Ao mesmo tempo, as oficinas 1 e 2 desenvolveram a noção da relação de ordem que se estabelece entre as figuras a partir da consideração de suas áreas. A seguir estão relatadas algumas considerações dos alunos que denotam seu aprendizado:

  "Que todas as figuras têm a mesma área já que todas foram formadas por todas as figuras do Tangram";

  "A área de cada figura é a soma das áreas das figuras utilizadas para cada construção";

"A utilização do Tangram facilita a aprendizagem do conceito de área, além de trabalhar o raciocínio lógico na montagem das diferentes figuras com as mesmas peças. Também é possível mostrar que duas figuras de mesma área podem ter perímetros diferentes";

"Cada figura do Tangram forma outras figuras, dando noção de área equivalente. Ex: área do quadrado equivale a dois triângulos pequenos e por aí vai";

"Foi interessante, nunca havia percebido a relação entre as figuras que compõem o Tangram, isso foi bastante divertido, ótimo para ensinar aos alunos a relacionar equivalência de áreas e saber mais sobre as figuras geométricas";

"As atividades mostram a importância de saber visualizar figuras geométricas e resolver questões sem necessariamente fazer uso de álgebra";

"As atividades foram estimulantes e desafiadoras, algumas questões consegui resolver usando o conceito de área, mas tiveram outras que realmente não consegui fazer ou responder olhando somente a figura sem a ter a certeza de suas medidas. Hoje, foi a atividade mais inovadora até o presente momento. Pode ter certeza que amadureci bastante o meu 'olhar geométrico"';

- na terceira oficina (Os Elementos e as construções com régua e compasso) trabalhamos a construção de figuras geométricas com propriedades específicas, a partir do texto de Euclides. As atividades envolveram transformações sobre as figuras e seus efeitos sobre as grandezas geométricas associadas (área, altura, base, ...). Trabalhamos, também, a comparação de grandezas sem medição (maior, menor ou igual). Comparamos as áreas das superfícies sem medi-las e sem utilizar números. Pelas palavras dos alunos, podemos perceber o avanço do aprendizado. Os alunos parecem ter se desvencilhado da necessidade das fórmulas e dos números para avaliar a área das figuras planas.

  "Os paralelogramos possuem áreas iguais pois têm mesma altura e mesma base";

  "As áreas são iguais pois os dois triângulas possuem mesma altura e mesma área";

"É importante conhecer a história da geometria para ensinar a geometria atual";

"As áreas são iguais pois usamos como construção a mesma base";

"As duas áreas dos paralelogramos são iguais. A diagonal AC corta os paralelogramos formando figuras congruentes";

"... aprendi a redesenhar as figuras com a mesma área, nunca havia feito isso antes, por isso obtive certo grau de dificuldade, obrigada pelas dicas. Adorei a atividade de hoje";

"Têm a mesma base e a mesma altura, logo têm a mesma área";

"Interessante, principalmente a parte de fazer os desenhos, que nos obriga a pensar um pouco mais e ser mais cuidadoso";

- na quarta oficina (As demonstrações e o Teorema de Pitágoras em Euclides) trabalhamos a coordenação entre os registros figural e discursivo, dando relevância ao discursivo argumentativo-dedutivo. A partir da demonstração do Teorema de Pitágoras por Euclides, trabalhamos com adição de áreas e transformações de figuras, conservando a área. Foi uma atividade importantíssima para o progresso conceitual dos alunos.

  "Mais desafiadoras e cada vez mais legais, principalmente a construção de um quadrado com a mesma área de um retângulo dado, que faz o caminho inverso da demonstração de Euclides";

  "Eu gostei das atividades de hoje porque estimulam as demonstrações de algumas coisas que são apenas ditas em sala de aula";

  "Já tenho uma noção mais rica e rigorosa sobre como demonstrar o Teorema de Pitágoras e também a proposição sobre o paralelogramo apresentada aqui. Mais uma vez obtive dificuldade em usar compasso e régua não graduada para fazer um retângulo e quadrado de mesma área";

- na quinta e última oficina (Quadratura de figuras planas) chegamos ao ápice de nosso trabalho com os licenciandos. Nesta ocasião, os alunos tiveram a oportunidade de, utilizando todos os conceitos desenvolvidos anteriormente, fazer a quadratura de um triângulo. Perceberam que, sem nenhum número e nenhuma fórmula, podiam avaliar a área de uma figura comparando-a com um quadrado. O conceito de área enquanto grandeza geométrica foi consolidado. Na expressão dos alunos percebe-se a nova concepção:

"Que a área pode ser comparada com outras áreas";

"Através da comparação para depois chegar às fórmulas";

"... pude observar e desenvolver uma área que dentro do curso de licenciatura não havia praticado tanto";

"Podemos utilizar a decomposição de área, ou seja, decompor uma área desconhecida em figuras conhecidas como retângulos, triângulos e quadrados";

"As atividades me mostraram outras formas de desenvolver o conceito de área";

"Influenciaram bastante sobre conceito de área, principalmente na construção de figuras diferentes com a mesma área";

"As atividades enriqueceram o meu conhecimento sobre igualdade de áreas";

"Decomporia em figuras conhecidas";

"As atividades expandiram o meu campo de visão, como podemos criar com régua e compasso, figuras distintas de mesma área, saindo do conceito algébrico e aguçando a percepção";

"A abordagem dos Elementos de Euclides também foi positiva, principalmente na prova de Pitágoras, onde facilitou a construção de um quadrado de mesma área que um retângulo dado".

Em concordância com nossos resultados, Facco (2003, p. 143) defende que *"uma proposta de ensino-aprendizagem do conceito de área enquanto grandeza subsidiaria a escolha didática do professor como estratégia de ensino para conteúdos que se relacionam à área"*. Trabalhamos com exercícios de avaliação, comparação e cálculo de área, sem fórmulas e medidas numéricas.

Foi alcançado o nosso objetivo de resgatar a historicidade do conceito de área utilizando para isto uma obra clássica da matemática: Os Elementos de Euclides (livro I). Este foi o texto histórico que nos serviu de base para a formulação de nossa proposta pedagógica.

Os registros de representações semióticas (figural e discursivo) do conceito de área foram amplamente trabalhados tanto enquanto tratamento quanto na conversão de registros. Muitas foram as atividades de reconfiguração de figuras geométricas e construções com régua não graduada e compasso. Estas atividades apresentaram inicialmente inúmeras dificuldades para o alunos que, progressivamente, foram alcançando maior habilidade na utilização dos instrumentos euclidianos para construção geométrica de figuras. Esses obstáculos são, provavelmente, conseqüência da exclusão do desenho geométrico como disciplina obrigatória da educação básica e mesmo de muitas licenciaturas em matemática. A separação do ensino da geometria do de desenho geométrico causa enormes transtornos na construção dos conceitos pelos alunos. Isto ficou evidente no nosso trabalho. Buratto (2006, p. 122) confirma nossos resultados: *"ao invés de o licenciando resolver seus exercícios de cálculo de área usando somente o procedimento de fórmulas, ele terá outra alternativa de solução, ou seja, a busca heurística na própria figura. Isso significa possibilitar ao licenciando uma desenvoltura tanto na sua maneira de pensar como na sua maneira de olhar e, além de tudo, de raciocinar"*.

Acreditamos que a aprendizagem matemática se dá quando o aluno toma parte ativamente do processo. A participação dos licenciandos nesta experiência didática foi sempre ativa, colaborativa e reflexiva, auxiliando no processo de construção do conceito de área enquanto atributo geométrico da figura. O diálogo dos participantes entre si e deles com a pesquisadora foi sempre estimulado como uma estratégia pedagógica de construção de saberes. Pelos comentários dos participantes, ao final de cada encontro, e pelos registros de seus resultados, podemos avaliar como bem sucedida nossa intervenção didática. Buscamos enriquecer o conceito de área trazido pelos alunos, fortemente fundamentado nos processos aritméticos e algébricos. Nosso objetivo foi o de desenvolver o olhar geométrico dos licenciandos, tornando-os mais capacitados para o ensino de área. A atividade final desenvolvida pelos licenciandos, a quadratura de figuras poligonais planas, permitiu uma síntese do nosso trabalho com a compreensão de que, sem números e fórmulas, conseguimos comparar a área de qualquer figura poligonal plana com um quadrado que lhe é equivalente em área.

O desenvolvimento do pensamento geométrico dos participantes desta pesquisa ficou registrado a partir dos resultados apresentados no teste de van Hiele em seus dois momentos, no início e no final da nossa experiência didática.

Capítulo 6

Considerações Finais

A Matemática, desde os primórdios da humanidade, apresenta-se como uma disciplina do olhar, do interpretar e do atuar sobre a realidade.

Figura 6.1: Osso de Ishango.

O osso de Ishango, ferramenta de osso (18000-20000 a.C.), é o objeto histórico mais antigo de que dispomos atualmente e registra um provável sistema de contagem de civililizações que habitaram a região do Rio Nilo, África. Documenta a linguagem simbólica matemática construída pelo homem há milênios. A Matemática é parte da História do homem. Os nossos antepassados babilônios, egípcios e gregos nos legaram um inestimável patrimônio nesta área. Particularmente, a geometria grega escreve uma das páginas mais brilhantes da História da Matemática. A obra de Euclides, os Elementos (300 a.C.), desponta neste cenário como uma preciosidade, tanto pela consideração de seu conteúdo quanto pela forma. É uma obra clássica que orientou o ensino de Geometria por séculos. Considerada uma referência cultural que não pode ser esquecida pelas gerações atuais, primordialmente pelos professores de Matemática. Os textos matemáticos escritos no decorrer da história da humanidade são de grande relevância para o ensino, na medida em que contextualizam os objetos matemáticos no momento histórico-cultural em que foram produzidos. Há, por outro lado, um ganho significativo quanto à compreensão da Matemática como ciência em construção e enquanto atividade cognitiva de percepção e atuação na realidade.

A Educação Matemática, no Brasil e no mundo, tem buscado propor caminhos para a resolução dos problemas do ensino e para as indagações dos professores. A qualidade do ensino e da aprendizagem na área há muito vem inquietando professores e educadores. Particularmente o ensino da Geometria tem sido um tema bastante discutido nas últimas décadas (Buratto, 2006; Flores Bolda, 1997; Lorenzato, 1995; Pavanello, 1993). Isto porque o desempenho dos alunos na área encontra-se muito aquém do desejável. A formação dos professores parece ser a questão crucial quanto à qualidade do ensino. Somente professores bem formados podem ensinar bem. Entenda-se ensinar bem como um ensino fundamentado na compreensão e na construção dos conceitos com significação. A história e seus documentos podem auxiliar, de forma expressiva, nesta tarefa. É claro que a memorização é um processo cognitivo indispensável na aprendizagem mas não deve ser a base primeira da experiência do aprendizado. A construção do conhecimento matemático deve basear-se na formulação de diversas representações do objeto estudado e nas relações entre elas (Duval, 2009).

A geometria pode ser considerada segundo diferentes visões (Usiskin, 1996):

- A geometria como estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras;
- A geometria como estudo do mundo real, físico;
- A geometria como veículo para representar conceitos matemáticos, ou outros, cuja origem não é visual ou física;
- A geometria como exemplo de um sistema matemático.

Diante deste vasto domínio de saberes, a geometria tem um papel fundamental e indispensável a cumprir na formação escolar de nossos estudantes. Mas, *"a geometria enfrenta problemas de desempenho e de currículo.(...) As soluções para esses problemas bem conhecidos e há muito identificados são perturbadas por dilemas fundamentais. A melhora do desempenho requer mais estudo de geometria, o* *que requer um número maior de professores bem preparados...” “É importante caminharmos no sentido de resolver os dilemas permanentes da geometria escolar. A geometria é importante demais no mundo real e na matemática para ser apenas um adorno na escola elementar ou um território de apenas metade dos alunos da escola secundária.”*

(Usiskin, 1996, p. 36-37,)

Em face desta questão, esta pesquisa propôs uma intervenção didática em Geometria, junto a futuros professores de Matemática, licenciandos da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Nosso objeto de estudo foi o conceito de área. Escolhemos este tema por se tratar de um conceito estudado desde as séries iniciais como também por seu caráter prático. Há também uma razão de natureza pedagógica: o conceito de área tem sido apresentado por meio de fórmulas e cálculos numéricos, destituindo-o, quase que por completo, de sua natureza geométrica. Além disto, o ensino de área permitiria uma abordagem a partir de um referencial histórico, os Elementos de Euclides, enriquecendo a formação dos alunos. Apoiamo-nos na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval e na Teoria do Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de van Hiele. Ambos pesquisadores apontam para a importância da linguagem no processo de ensino e de aprendizagem. Para Duval (2009), não há conhecimento sem representações semióticas e a língua natural é a primeira representação semiótica que aprendemos. Além disso, a compreensão de um conceito matemático só se dá quando somos capazes de coordenar diferentes registros semióticos. Em nossa proposta de ensino utilizamos a coordenação de dois registros semióticos: a linguagem discursiva e as representações figurais. A linguagem também é um elemento essencial na Teoria de van Hiele (Nasser, 1992), já que para haver compreensão dos conceitos geométricos, alunos e professor devem comunicar-se segundo o mesmo sistema lingüístico. Van Hiele aponta o descasamento entre as linguagens de professor/aluno como um dos principais problemas no ensino da geometria. O papel do professor neste processo é bastante destacado nos dois modelos. A aprendizagem matemática não se dá espontaneamente. Faz-se necessária uma intervenção didática eficaz por parte do professor para a apreensão, por parte do aluno, dos saberes em estudo. O processo educacional envolve três elementos principais: o professor, o aluno e o objeto de ensino. Cabe ao professor a atribuição de formular, propor, orientar e avaliar intervenções didáticas para garantir a aprendizagem significativa por parte dos alunos. Por outro lado, a atividade do aluno no processo é um fator preponderante para a consecução dos objetivos educativos. As relações pedagógicas desenvolvidas entre o professor, o aluno e o saber devem ser fundamentadas em diferentes representações semióticas e garantir a apropriação pelo aluno de diferentes linguagens. A construção de uma aprendizagem significativa demanda, desta forma, uma atuação firme e eficaz por parte dos dois personagens principais do processo: professor e aluno. A intermediação da linguagem tem um papel de destaque neste processo: é a ponte de ligação entre os três elementos envolvidos: professor, aluno e conhecimento.

A intervenção didática proposta baseou-se na abordagem grega do conceito de área, enquanto atributo geométrico. A pergunta que norteou nossa pesquisa foi: qual a contribuição que uma intervenção didática para o ensino de áreas baseada nos Elementos pode dar para a formação inicial dos professores de Matemática? Constatamos que os livros didáticos atuais privilegiam a abordagem numérica do conceito de área, enfatizando o uso de fórmulas. Desta maneira, os alunos, e futuros professores, constroem um conceito de área deformado e incompleto. Muitas vezes não conseguem visualizar um caminho de solução para um problema de área, quando não dispõem das medidas numericamente determinadas da figura em questão. Trabalhamos, com os participantes desta pesquisa - licenciandos de Matemática da UFRJ-, o conceito de área ao longo de 8 encontros (oficinas). Os alunos foram testados em relação a seu nível de desenvolvimento do pensamento geométrico segundo o Teste de van Hiele, no início e no final das oficinas. Durante as oficinas, os alunos puderam "seguir os passos de Euclides" na construção do conceito de área. Trabalhando com duas noções básicas, a equivalência de áreas e a transformação de figuras, as atividades propostas possibilitaram aos alunos o desenvolvimento de um olhar geométrico quanto ao conceito de área. O resultado apresentado aponta na direção de um crescimento do nível de pensamento geométrico dos alunos. A intervenção didática alcançou seus objetivos iniciais: a re-significação do conceito de área; a construção, pelos alunos, deste conceito enquanto atributo geométrico. Assim, podemos dizer que é significativa a contribuição desta experiência didática na compreensão do conceito de área. Acreditamos que o uso deste texto histórico, os Elementos de Euclides, contribuiu para o enriquecimento do conceito de área por parte dos alunos, bem como para possibilitar um novo olhar para a concepção da Matemática e seu ensino.

Este trabalho não tem a pretensão de esgotar o assunto e nem de generalizar os resultados obtidos. A maior contribuição desta dissertação talvez seja a de dar visibilidade para a questão do ensino de geometria, em particular, do conceito de área. Pretendemos, também, contribuir com a discussão da necessidade de melhor formar nossos professores de Matemática. A continuidade da presente pesquisa pode ser empreendida por trabalhos futuros nas seguintes temáticas:

- O Modelo de Representações Semióticas de Duval na formação inicial dos professores, em Geometria;
- A abordagem dos conceitos geométricos nos livros didáticos;
- O uso de tecnologia computacional no ensino de área;
- O uso da história da Matemática no ensino do conceito de área;
- A exploração do texto de Euclides como recurso didático.

Esperamos ter contribuído, com o presente trabalho, no sentido de aproximar a pesquisa acadêmica da realidade da sala de aula.

Apêndice A

Anexos

Anexo 1: Axiomática de Euclides

Anexo 2: Axiomática de Hilbert

Anexo 3: Autorização para o Teste de van Hiele

Anexo 4: Teste de Van Hiele

Anexo 5: Questionário Inicial

Anexo 6: Oficinas

Anexo 7: Materiais Utilizados nas Oficinas

Anexo 1: Axiomática de Euclides

Definições

1. Ponto é aquilo de que nada é parte;
2. E linha é comprimento sem largura;
3. E extremidades de uma linha são pontos;
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma;
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura;
6. E extremidades de uma superfície são retas;
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma;
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta;
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo;
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou;
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto;
12. E agudo, o menor do que um reto;
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa;
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras;
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si;
16. E o ponto é chamado centro do círculo;

17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois;

18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo;

19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas;

20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais;

21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos;

22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado,, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e rombóide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios;

23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto;

2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta;

3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo;

4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos;

5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções Comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si;

2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais;

3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguai;

4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais;

5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si;

6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si;

7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si;

8. E o todo é maior que a parte;

9. E duas retas não contém uma área.

(p.97, BICUDO, 2009)

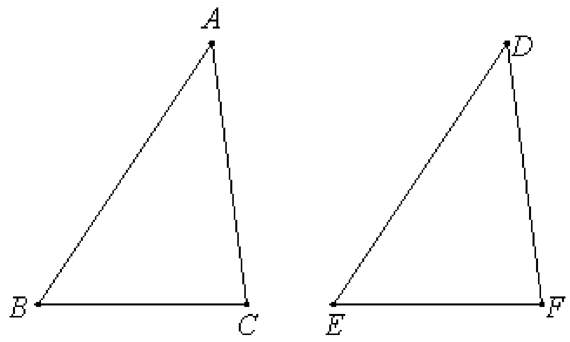
Triângulos Congruentes

1º caso: (caso LAL de congruência de triângulos)

(I.4) Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais.

Demonstração:

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB ao DE, e por outro lado, o

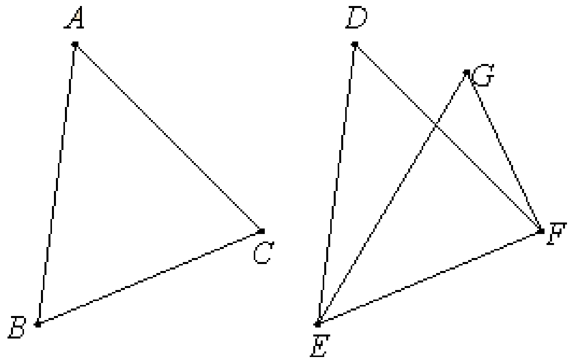


AC ao DF, e o ângulo sob BAC igual ao ângulo sob EDF. Digo que também a base BC é igual à base EF, e o triângulo ABC será igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais, por um lado, o sob ABC ao sob o DEF e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE. Pois, o triângulo ABC, sendo ajustado sobre o triângulo DEF, e sendo posto, por um lado, o ponto A sobre o ponto D, e, por outro lado, a reta AB sobre a DE, também o ponto B se ajustará sobre o E, por ser a AB igual à DE; então, tendo se ajustado a AB sobre a DE, também a reta AC se ajustará sobre a DF, por ser o ângulo sob BAC igual ao sob EDF; desse modo, também o ponto C se ajustará sobre o ponto F, por ser, de novo, a AC igual à DF. Mas, por certo, também o B ajustou-se sobre o E; desse modo, a base BC se ajustará sobre a base EF. Pois se a base BC, tendo, por um lado, o B se ajustado sobre o E, e, por outro lado, o C sobre o F, não se ajustar sobre a EF, duas retas conterão um área; o que é impossível. Portanto, a base BC ajustar-se-á sobre a EF e será igual a ela; desse modo, também o triângulo ABC todo se ajustará sobre o triângulo DEF todo e será igual a ele, e os ângulos restantes ajustar-se-ão sobre os ângulos restantes e serão iguais a eles, por um lado, o sob ABC ao sob DEF, e, por outro lado, o sob ACB ao sob DFE. Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham o ângulo contido pelas retas iguais igual ao ângulo, também terão a base igual à base, e o triângulo será igual ao triângulo, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, cada um a cada um, sob os quais se estendem os lados iguais; o que era preciso provar.

(p.101, BICUDO, 2009)

2º caso: (caso LLL de congruência de triângulos)

(I.8) Caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham também a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais.



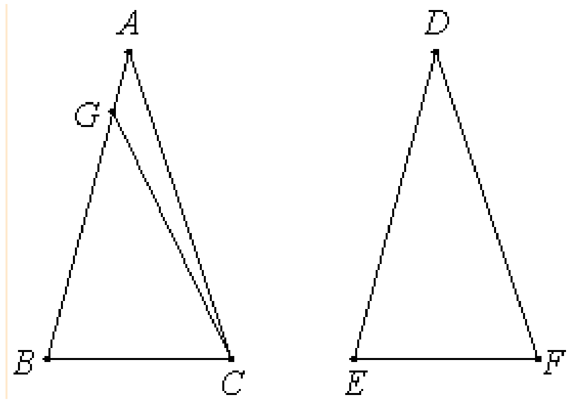
Demonstração:

Sejam os dois triângulos ABC, DEF, tendo os dois lados AB, AC iguais aos dois lados DE, DF, cada um a cada um, por um lado, o AB, ao DE, e, por outro lado, o AC, ao DF; tenham também a base BC igual à base EF; digo que o ângulo sob BAC é igual ao ângulo sob EDF. Sendo, pois, ajustado o triângulo ABC sobre o triângulo DEF e, sendo postos, por um lado, o ponto B sobre o ponto E, e, por outro lado, a reta BC sobre a EF, também o ponto C se ajustará sobre o F, por ser a BC igual à EF; então, tendo se ajustado a BC sobre a EF, também se ajustarão as BA, CA sobre as ED, DF. Se, pois, por um lado, a base BC se ajustar sobre a base EF e, por outro lado, os lados BA, AC não se ajustarem sobre os ED, DF, mas passarem além, como as EG, GF, serão construídas sobre a mesma reta duas retas iguais às duas mesmas retas, cada uma a cada uma, em um e outro ponto, sobre o mesmo lado, tendo as mesmas extremidades. Mas não são construídas; portanto, não sendo ajustada a base BC sobre a base EF, não se ajustarão também os lados BA, AC sobre os ED, DF. Portanto, ajustar-se-ão; desse modo, também o ângulo sob BAC ajustar-se-á sobre o ângulo sob EDF e será igual a ele. Portanto, caso dois triângulos tenham os dois lados iguais [aos] dois lados, cada um a cada um, e tenham a base igual à base, terão também o ângulo igual ao ângulo, o contido pelas retas iguais; o que era preciso provar.

(p.104, BICUDO, 2009)

3º caso: (caso ALA de congruência de triângulos)

(I.26) Caso dois triângulos tenham os dois ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, [cada um a cada um,] e o ângulo restante ao ângulo restante.



Demonstração:

Sejam os dois triângulos ABC, DEF , tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob DEF, EFD, cada um a cada um, por um lado, o sob ABC, ao sob DEF, e, por outro lado, o sob BCA, ao sob EFD; e tenham também um lado igual a um lado, primeiramente o junto aos ângulos iguais, a BC, à EF; digo que também terão os lados restantes iguais aos lados restantes, cada um a cada um, por um lado, a AB, à DE, e, por outro lado, a AC, à DF, e o ângulo restante, ao ângulo restante, o sob BAC, ao sob EDF. Pois, se a AB é desigual à DE, uma delas é maior. Seja maior a AB, e fique posta a BG igual à DE, e fique ligada a GC. Como, de fato, por um lado, a BG é igual à DE, e, por outro lado, a BC, à EF, então, as duas BG, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob GBC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base GC é igual à base DF; e o triângulo GBC é igual ao triângulo DEF , e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob GCB é igual ao sob DFE. Mas o sob DFE foi suposto igual ao sob BCA; portanto, também o sob BCG é igual ao sob BCA, o menor, ao maior; o que é impossível. Portanto, a AB não é desigual à DE. Portanto, é igual. Mas também a BC é igual à EF; então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob DEF; portanto, a base AC é igual a base DF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Mas, então, de novo, sejam iguais os lados que se estendem sob os ângulos iguais, como a AB, à DE; digo, de novo, que também os lados restantes serão iguais aos lados restantes, a AC, à DF; enquanto a BC, à EF, e ainda o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Pois, se a BC é desigual à EF, uma delas é maior. Seja maior, se possível, a BC, e fique posta a BH igual à EF, e fique ligada AH. E, como, por um lado, a BH é igual à EF, e, por outro lado, a AB à DE, então, as duas AB, BH são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AH é igual à base DF, e o triângulo ABH é igual ao triângulo DEF, e os ângulos restantes serão iguais aos ângulos restantes, sob os quais se estendem os lados iguais; portanto, o ângulo sob BHA é igual ao sob EFD. Mas o sob EFD é igual ao sob BCA; então, o ângulo exterior, o sob BHA, do triângulo AHC é igual ao sob BCA, interior e oposto; o que é impossível. Portanto, a BC não é desigual à EF; portanto, é igual. Mas também a AB é igual à DE. Então, as duas AB, BC são iguais às duas DE, EF, cada uma a cada uma; e contêm ângulos iguais; portanto, a base AC é igual à base DF, e o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF, e o ângulo sob BAC restante é igual ao ângulo sob EDF restante. Portanto, caso dois triângulos tenham os doía ângulos iguais aos dois ângulos, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, ou o junto aos ângulos iguais ou o que se estende sob um dos ângulos iguais, terão também os lados restantes iguais aos lados restantes e o ângulo restante ao ângulo restante; o que era preciso provar.

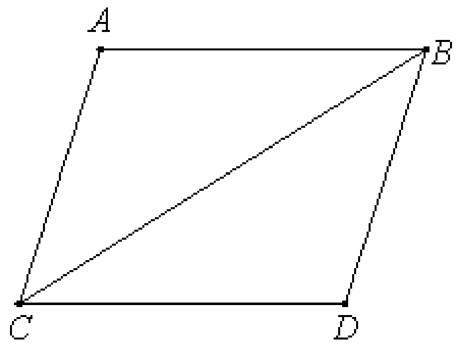
(p.117 BICUDO, 2009)

As demonstrações dos teoremas de congruência de triângulos feitas por Euclides recorrem à superposição de figuras. Hilbert proporá, posteriormente, um tratamento axiomático mais rigoroso. Outro resultado muito importante para o estudo de áreas é a proposição I.34, enunciada a seguir.

Propriedade dos Paralelogramos

(I.34) Das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si, e a diagonal corta-as em duas.

Demonstração:

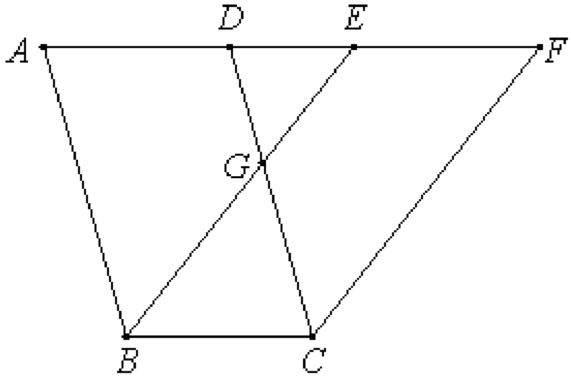


Sejam a área paralelogrâmica ACDB, e a diagonal dela BC; digo que tanto os lados quanto os ângulos opostos do paralelogramo ACDB são iguais entre si, e a diagonal BC corta-o em dois. Pois, como a AB é paralela à CD, e a reta BC caiu sobre elas, os ângulos sob ABC, BCD, alternos, são iguais entre si. De novo, como a AC é paralela à BD e a BC caiu sobre elas, os ângulos sob ACB, CBD, alternos, são iguais entre si. Então, os ABC, BCD são dois triângulos, tendo os dois ângulos sob ABC, BCA iguais aos dois sob BCD, CDB, cada um a cada um, e um lado igual a um lado, o BC comum deles, junto aos ângulos iguais; portanto, também terão os lados restantes iguais aos restantes, cada um a cada um, e o ângulo restante igual ao ângulo restante; portanto, por um lado, o lado AB é igual ao CD, e, por outro lado, o AC ao BD, e ainda o ângulo sob BAC é igual ao sob CDB. E, como, por um lado, o ângulo sob ABC é igual ao sob BCD, e, por outro lado, o sob CBD ao sob ACB, portanto, o sob ABD todo é igual ao sob ACD todo. Mas foi provado também o sob BAC igual ao sob CDB. Portanto, das áreas paralelogrâmicas, tanto os lados quanto os ângulos opostos são iguais entre si. Digo, então, que também a diagonal corta-a em duas. Pois, como a AB é igual à CD, e a BC é comum, então, as duas AB, BC são iguais às duas CD, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob ABC é igual ao ângulo sob BCD. Portanto, também a base AC é igual à DB. [Portanto,] também o triângulo ABC é igual ao triângulo BCD. Portanto, a diagonal BC corta o paralelogramo ABCD em dois; o que era preciso provar.

(p.123 BICUDO, 2009)

Paralelogramos Iguais

(I.35) Os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

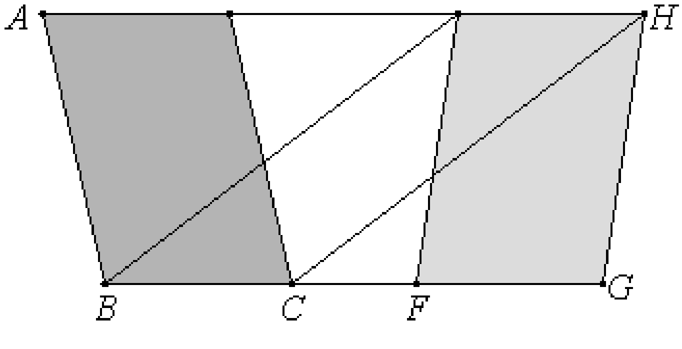


Demonstração:

Sejam os paralelogramos ABCD, EBCF, sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AF, BC; digo que o ABCD é igual ao paralelogramo EBCF. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, a AD é igual à BC. Pelas mesmas coisas, então, também a EF é igual à BC; desse modo, também a AD é igual à EF; e a DE é comum; portanto, a AE toda é igual à DF toda. Mas também a AB é igual à DC; então, as duas EA, AB são iguais às duas FD, DC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob FDC é igual ao sob EAB, o exterior, ao interior; portanto, a base EB é igual à base FC, e o triângulo EAB será igual ao triângulo DFC; fique subtraído o DGE comum; portanto, o trapézio ABGD restante é igual ao trapézio EGCF restante; fique adicionado o triângulo GBC comum; portanto, o paralelogramo ABCD todo é igual ao paralelogramo EBCF todo. Portanto, os paralelogramos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar.

(p.124 BICUDO, 2009)

(I.36) Os paralelogramos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.



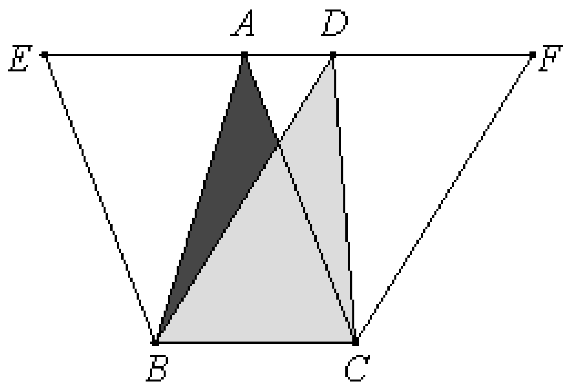
Demonstração:

Sejam os paralelogramos ABCD, EFGH, que estão sobre as bases iguais BC, FG e nas mesmas paralelas AH, BG; digo que o paralelogramo ABCD é igual ao paralelogramo EFGH. Fiquem, pois, ligadas as BE, CH. E, como a BC é igual à FG, mas a FG é igual à EH, portanto, também a BC é igual à EH. Mas também são paralelas. E as EB, HC ligam-nas; mas as que ligam as tanto iguais quanto paralelas, no mesmo lado, são tanto iguais quanto paralelas; [portanto, também as EB, HC são tanto iguais quanto paralelas]. Portanto, o EBCH é um paralelogramo. E é igual ao ABCD; pois, tanto tem a mesma base BC que ele quanto está nas mesmas paralelas BC, AH com ele. Pelas mesmas coisas, então, também o EFGH é igual ao mesmo EBCH; desse modo, também o paralelogramo ABCD é igual ao EFGH. Portanto, os paralelogramos, que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas, são iguais entre si; o que era preciso provar.

(p.125 BICUDO, 2009)

Triângulos Iguais

(I.37) Os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si.

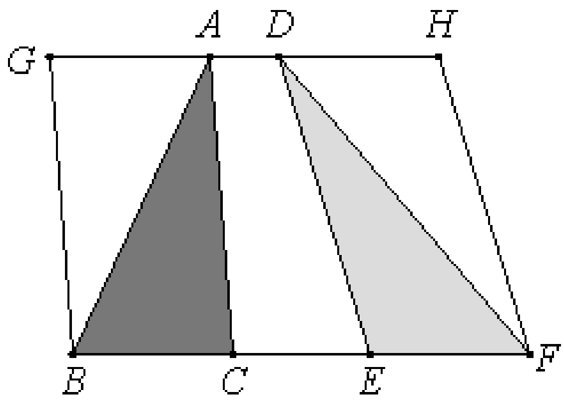


Demonstração:

Sejam os triângulos ABC, DBC sobre a mesma base BC e nas mesmas paralelas AD, BC; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC. Fique prolongada a AD em cada um dos lados até os E, F, e, por um lado, pelo B, fique traçada a BE paralela à CA, e, por outro lado, pelo C, fique traçada a CF paralela à BD. Portanto, cada um dos EBCA, DBCF é um paralelogramo; e são iguais; pois, estão tanto sobre a mesma base BC quanto nas mesmas paralelas BC, EF; e, por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo EBCA; pois, a diagonal AB corta-o em dois; e, por outro lado, o triângulo DBC é metade do paralelogramo DBCF; pois, a diagonal DC corta-o em dois [e as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DBC. Portanto, os triângulos que estão sobre a mesma base e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar.

(p.125 BICUDO, 2009)

(I.38) Os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si.



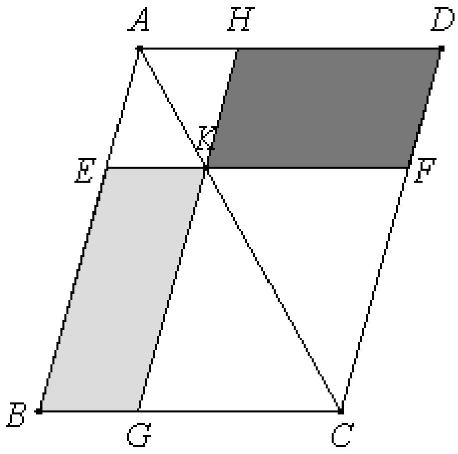
Demonstração:

Sejam os triângulos ABC, DEF sobre as bases iguais BC, EF e nas mesmas paralelas BF, AD; digo que o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF. Fique, pois, prolongada a AD, em cada um dos lados, até os G, H, e, por um lado, pelo B, fique traçada a BG paralela à CA, e, por outro lado, pelo F, fique traçada a FH paralela à DE. Portanto, cada um dos GBCA, DEFH é um paralelogramo; e o GBCA é igual ao DEFG; pois, estão tanto sobre as bases iguais BC, EF quanto nas mesmas paralelas BF,GH; e, por um lado, o triângulo ABC é metade do paralelogramo GBCA. Pois, a diagonal AB corta-o em dois; e, por outro lado, o triângulo FED é metade do paralelogramo DEFH; pois, a diagonal DF corta-o em dois; [mas as metades das coisas iguais são iguais entre si]. Portanto, o triângulo ABC é igual ao triângulo DEF. Portanto, os triângulos que estão sobre bases iguais e nas mesmas paralelas são iguais entre si; o que era preciso provar.

(p.126 BICUDO, 2009)

Complementos dos Paralelogramos

(I.43) Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si.



Demonstração:

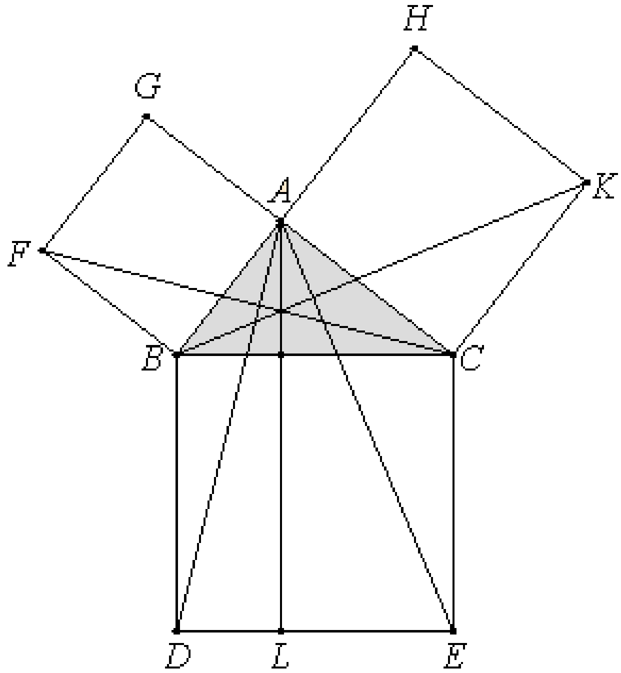
Sejam o paralelogramo ABCD, e a diagonal AC dele,e, por um lado, sejam EH, FG à volta da AC, e, por outro lado, os ditos complementos BK, KD; digo que o complemento BK é igual ao complemento KD. Pois, como o ABCD é um paralelogramo, e a AC é uma diagonal dele, o triângulo ABC é igual ao triângulo ACD. De novo, como o EH é um paralelogramo, e a AK é uma diagonal dele, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK. Pelas mesmas coisas, então, também o triângulo KFC é igual ao KGC. Como, de fato, por um lado, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK, e, por outro lado, o KFC, ao KGC, o triângulo AEK, com o KGC, é igual ao triângulo AHK, com o KFC; mas também o triângulo ABC todo é igual ao ADC todo; portanto, o complemento BK restante é igual ao complemento KD restante. Portanto, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda a área paralelogrâmica, são iguais entre si; o que era preciso provar.

(p.129 BICUDO, 2009)

Teorema de Pitágoras

(I.47) Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.

Demonstração:



Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC. Fiquem, pois, descritos, por um lado o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então, as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC, cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC. Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

(p.132 BICUDO, 2009)

Anexo 2: Axiomática de Hilbert

(Hartshorne, 2000)

I. Noções não definidas

1. Objetos não definidos: 'ponto', 'reta';
2. Relações não definidas: 'estar em', 'estar entre', 'ser congruente'.

II. Axiomas de Incidência (I)

I.1. Para qualquer dois pontos distintos A, B, existe uma única reta l contendo A, B;

I.2. Toda reta contém pelo menos dois pontos;

I.3. Existem pelo menos três pontos que não pertencem a uma mesma reta.

III. Axiomas de Ordem (B)

B.1. Se B está entre A e C, (escrito $A * B * C$), então A, B, C são pontos distintos em uma reta, e também $C * B * A$;

B.2. Para quaisquer dois pontos distintos A , B, existe um ponto C tal que $A * B * C$;

B.3. Dados três pontos distintos em uma reta, um e somente um deles está entre os outros dois;

B.4. (Pasch) Sejam A, B e C três pontos não colineares e seja l uma reta que não contém nenhum dos três pontos. Se l contém um ponto D que está sobre a reta AB e entre os pontos A e B ,então l também intercepta o segmento AC ou o segmento BC.

IV. Axiomas de Congruência (C)

Congruência de Segmentos

C.1. Se A e B são dois pontos distintos numa reta l e C é um outro ponto de uma reta l', não necessariamente distinta da anterior, então é sempre possível encontrar um ponto D em (um dado lado da reta) l', tais que os segmentos AB $\approx$ CD; ($\approx$ é o sinal de congruência.)

C.2. Se AB $\approx$ CD e AB $\approx$ EF, então CD $\approx$ EF. Todo segmento de reta é congruente a si próprio;

C.3. (Adição) Dado três pontos A, B, C colineares tal que $A * B * C$, e três outros pontos D, E, F colineares tal que $D*E*F$, se AB $\approx$ DE e BC $\approx$ EF, então AC $\approx$ DF.

Congruência de Ângulos

C.4. Dado um ângulo $\angle$ BAC e dado uma semi-reta (raio) DF, existe uma única semi-reta DE, em um dos lados da reta DF, tal que $\angle$ BAC $\approx$ $\angle$ EDF;

C.5. Para qualquer três ângulos α, β, γ, se $\alpha \approx \beta$ e $\alpha \approx \gamma$, então $\beta \approx \gamma$. Todo ângulo é congruente a si próprio;

C.6. (SAS ou LAL) Dados triângulos ABC e DEF, suponha que AB $\approx$ DE e AC $\approx$ DF, e $\angle$ BAC $\approx$ $\angle$ EDF. Então os dois triângulos são congruentes, a saber, BC $\approx$ EF, $\angle$ ABC $\approx$ $\angle$ DEF e $\angle$ ACB $\approx$ $\angle$ DFE.

V. Axiomas de Continuidade

- Axioma de Arquimedes (A)

  Dados os segmentos AB e CD, existe um número natural n tal que n cópias de AB somadas serão maiores que CD.

- Axioma de Dedekind (completude da reta) (D)

  Suponha que os pontos de uma reta l sejam divididos em dois subconjuntos não-vazios S, T de tal forma que nenhum ponto de S está entre dois pontos de T, e nenhum ponto de T está entre dois pontos de S. Então existe um único ponto P tal que para qualquer $A \in S$ e qualquer $B \in T$, ou $A = P$ ou $B = P$ ou o ponto P está entre A e B.

VI. Axioma de Playfair (Axioma das paralelas) (P)

(P) : Para cada ponto A e cada reta l, existe no máximo uma reta contendo A que é paralela a l.

Definição: Duas retas distintas são paralelas se elas não possuem nenhum ponto em comum. Toda reta é paralela a si mesma.

Plano de Hilbert + (P) + (E) $\rightarrow$ Plano de Euclides

Onde (P) e (E) estão enunciados a seguir:

(P): Axioma das Paralelas/Axioma de Playfair Para cada ponto A e cada reta l, existe no máximo uma reta contendo A que é paralela a l.

(E): Axioma da propriedade da interseção de círculo-círculo

Dados dois círculos Γ, Δ, se Δ contém ao menos um ponto no interior de Γ e Δ contém ao menos um ponto no exterior de Γ, então Γ e Δ se interceptam.

A teoria de área de Hilbert é desenvolvida em um plano de Hilbert com (P) onde há uma relação de equivalência chamada "igual conteúdo" para figuras retilíneas que possuem as seguintes propriedades:

1. figuras congruentes possuem igual conteúdo;

2. soma de figuras com igual conteúdo tem igual conteúdo;

3. subtração de figuras com igual conteúdo tem igual conteúdo;

4. metades de figuras com igual conteúdo tem igual conteúdo;

5. o todo é maior que as partes;

6. se dois quadrados possuem igual conteúdo, seus lados são congruentes.

Teoria de Área

Considere triângulo ABC o subconjunto do plano determinado por 3 segmentos de reta AB, AC, BC (lados do triângulo) e todos os seus pontos interiores.

Definição:

Uma figura retilínea (figura) é um subconjunto do plano que pode ser representado por uma união de triângulos não-sobrepostos. Um ponto D está no interior de uma figura P se existe um triângulo ABC totalmente contido em P tal que D está no interior do triângulo ABC. Duas figuras *são não-sobrepostas se não têm pontos interiores em comum, conforme a Figura A.1. A figura inclui sua borda e todos seus pontos interiores.*

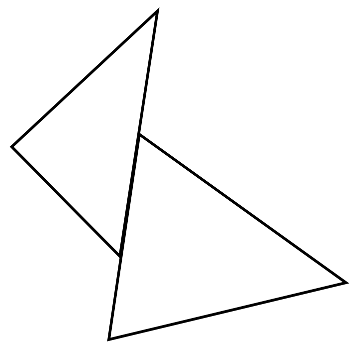


Figura A.1: Triângulos não-sobrepostos: não há pontos interiores em comum.

Proposição 1:

A interseção de duas figuras quaisquer é uma figura. A união de duas figuras quaisquer é uma figura. O complemento de uma figura no interior de outra figura (e também os segmentos de reta que formam seus lados) é uma figura. Em particular, qualquer união finita de triângulos é uma figura.

Demonstração:

A idéia básica é lidar com um triângulo de cada vez. Por exemplo, se um triângulo ABC é cortado por uma reta l, conforme a Figura A.2, então aquela parte do triângulo que se estende do lado da reta é uma figura. O lado BDE, neste exemplo, é um triângulo. O outro lado é uma união de dois triângulos, após desenharmos a reta DC.

Definição:

Duas figuras P, P' são equidecomponíveis se for possível escrevê-las como uma união de triângulos não-sobrepostos

$P = T_1 \cup \ldots \cup T_n,$

$P' = T_1' \cup \ldots \cup T_n',$

onde para cada i, o triângulo T_i é congruente ao triângulo T_i'. Duas figuras P, P' têm igual conteúdo se existirem outras figuras Q, Q' tal que:

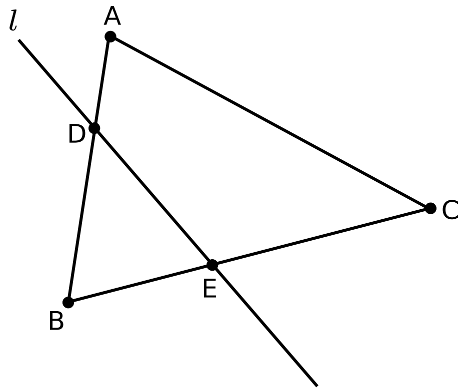


Figura A.2: A figura seccionada pela reta l forma duas figuras.

(1) P *e* Q *são não-sobrepostas;*

(2) P' *e* Q' *são não-sobrepostas;*

(3) Q *e* Q' *são equidecomponíveis;*

(4) $P \cup Q$ *e* $P' \cup Q'$ *são equidecomponíveis.*

Proposição 2:

Num plano de Hilbert, a relação entre duas figuras equidecomponíveis é uma relação de equivalência. A união não-sobreposta de figuras equidecomponíveis é equidecomponível.

Proposição 3:

Num plano de Hilbert, a relação entre duas figuras que tenham igual conteúdo tem as seguintes propriedades:

(1) "igual conteúdo" é uma relação de equivalência;

(2) figuras equidecomponíveis têm "igual conteúdo";

(3) a união não-sobreposta de figuras de "igual conteúdo" tem "igual conteúdo";

(4) Se $Q \subset P$ *e* $Q' \subset P'$, *e se* Q *e* Q' *têm igual conteúdo, e* P *e* P' *têm igual conteúdo, então* $P - Q$ *e* $P' - Q'$ *têm igual conteúdo.*

Fica, assim, definida a relação de "igual conteúdo" para figuras retilíneas no plano.

Axioma de Zolt's (Z):

Se Q é uma figura contida em outra figura P, e se $P-Q$ tem um interior não-vazio, então P e Q não têm igual conteúdo.

Este axioma estabelece uma relação de ordem entre as figuras. Ele é uma formulação precisa da noção comum de Euclides "o todo é maior que a parte".

Proposição 4 (equivale a (I.37) de Euclides):

Num plano de Euclides, triângulos com a mesma base, cujos vértices do topo estão na mesma reta paralela à base, têm igual conteúdo.

Podemos definir, neste momento, uma função área em um plano de Hilbert com (P) e o axioma Z.

Definição:

Um conjunto de medidas da função área em um plano de Hilbert é uma função α, definida no conjunto F de todas as figuras, com valores em um grupo abeliano ordenado G, tal que:

(1) para qualquer triângulo T, temos $\alpha(T) > 0$ em G;

(2) se T e T' são triângulos congruentes, então $\alpha(T) = \alpha(T')$;

(3) se duas figuras P e Q não se sobrepõem, então $\alpha(P \cup Q) = \alpha(P) + \alpha(Q)$. Chamamos $\alpha(P)$ a **área** *da figura P, explicitando uma medida para a função área.*

Proposição 5:

Suponha α um conjunto de medidas da função área em um plano de Hilbert,

(1) seja P qualquer figura com interior não-vazio, então $\alpha(P) > 0$;

(2) sejam P e P' figuras equidecomponíveis, então $\alpha(P) = \alpha(P')$;

(3) sejam P e P' figuras com igual conteúdo, então $\alpha(P) = \alpha(P')$;

(4) se uma figura Q está contida numa figura P, e $P - Q$ tem interior não-vazio, então $\alpha(Q) < \alpha(P)$. Em particular, P e Q não podem ter igual conteúdo (verifica-se (Z)).

Associa-se, desta forma, a toda figura retilínea plana um valor numérico (α), que corresponde à medida de sua área.

Anexo 3: Autorização para o Teste de van Hiele

---------- Forwarded message ----------
From: Zalman Usiskin <z-usiskin@uchicago.edu>
Date: 2010/3/30
Subject: Re: Permission to use van Hiele Geometry Test
To: Marli Moreira <marliddmoreira@gmail.com>

Dear Marli Moreira:

Thank you for clarifying the nature and purpose of your study. We are happy to give permission for you to copy and use the Van Hiele Geometry Test for the purposes as you have described in your e-mails.

Good luck in your research.

Zalman Usiskin

Marli Moreira wrote:

Dear Professor,

First I would like to thank you for your attention. I believe I have expressed badly. The Van Hiele test will be used for a first assessment of the level of maturity of the geometric notion of partcipantes research. Subsequently it has a didactic sequence on the concept of area, based on Euclid's Elements. Finally, participants will be retested to verify the influence of the sequence of studies in cognitive development. The following is a brief summary of the research.

'The issue of teaching of mathematics is at stake: how to ensure that students learn mathematical concepts? what strategies to use? which the relevant content? The mathematics educators in Brazil and the world have been addressing in recent decades on these questions and many pedagogical proposals have been presented. The guiding question of this research is: what contribution a pedagogical approach of the concept of area based on Euclid's Elements can make to the development of geometrical thinking and maturing of the logical-formal students? Model development of geometrical thinking of Van Hiele and the theory of semiotic representations records of Raymond Duval are the theoretical framework of this work. As a model we used the methodological Engineering teaching.'

I hope I have clarified your doubts. Looking forward to receiving an answer, say good-bye.
Best regards,

Marli Duffles Donato Moreira

2010/3/28 Zalman Usiskin <z-usiskin@uchicago.edu <mailto:z-usiskin@uchicago.edu>>

Dear Marli Moreira:

Your interest in using the van Hiele Geometry Test is appreciated. From your e-mail, I assume that you have seen the report "Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry" that is on line and can be downloaded.
If you plan to use the van Hiele test, you should read this report because your use of the van Hiele Geometry Test as an indicator of geometry knowledge raises concerns. The van Hiele Test is not a test of geometry knowledge. This test was designed to test whether the van Hiele theory worked. Depending on how the test is scored, different percents of students could be assigned a level. Under the easiest criterion, lots of students could not be assigned a level, but by changing the criteria, we could assign the vast majority of students a level. But these levels often changed for a given student depending on the criterion used.
If you are interested in a test of geometry knowledge, you might want to use the Entering Geometry Test found in the same report.

Could you provide a little more information about your study? What is the purpose of evaluating the geometry knowledge of the students? That is, what is the purpose of the study?

I look forward to your response.

Zalman Usiskin
Professor Emeritus of Education
Director, University of Chicago School Mathematics Project
The University of Chicago
6030 S. Ellis Avenue
Chicago, IL 60637
773 702-1560

Marli Moreira wrote:

Dear Mr. Zalman Usiskin,

I am a M.Sc. student, supervised by Professors Gerard Grimberg and João Bosco Pitombeira, of Teaching of Mathematics course from Federal University of Rio de Janeiro.
My research is about Euclidean Geometry and I am evaluating the knowledge of about 20 undergratuate students of Mathematics.
I would like to use the van Hiele Geometry Test.
I assure that I will write on each copy of the test:
“Copyright ©1980 by the University of Chicago. Reprinted with

permission of the University of Chicago."; and also send you a copy of my results.

I will be glad if you give me the permission to use these tests.

Best regards,
Marli Duffles Donato Moreira
+55 21 33933710
marliddmoreira@gmail.com <mailto:marliddmoreira@gmail.com>
<mailto:marliddmoreira@gmail.com

<mailto:marliddmoreira@gmail.com>>

M.Sc Student - Teaching of Mathematics
Institute of Mathematics - http://www.im.ufrj.br
Federal University of Rio de Janeiro
Rio de Janeiro, RJ, Brazil

Anexo 4: Teste de Van Hiele

TESTE DE GEOMETRIA DE VAN HIELE*

Instruções

Não abra este teste até receber todas as instruções.

O teste contém 25 questões.
Não é esperado que você saiba responder a todas as questões do teste.

Quando você for autorizado para começar:
1. Leia cada questão cuidadosamente.
2. Pense em qual é a alternativa correta.
   Só há uma alternativa correta para cada questão.
   Assinale com um círculo a letra correspondente à sua resposta na folha de respostas.
3. Use o espaço na folha de respostas para desenhos ou rascunhos.
   Não marque nada neste teste.
4. Se quiser mudar uma resposta apague completamente a primeira resposta.
5. A duração do teste é 35 minutos.

Espere até você receber a autorização para começar o teste.

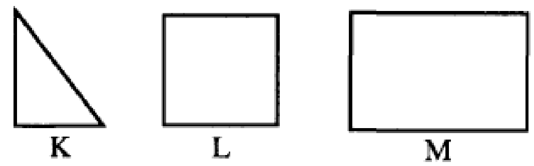
---

* Este teste é baseado no trabalho de Pierre .M. van Hiele.

TESTE DE GEOMETRIA DE VAN HIELE

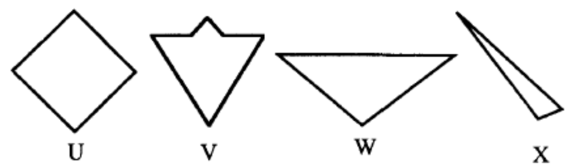
1. Quais são quadrados?

(A) Só K.
(B) Só L.
(C) Só M.
(D) Só L e M.
(E) Todos são quadrados.



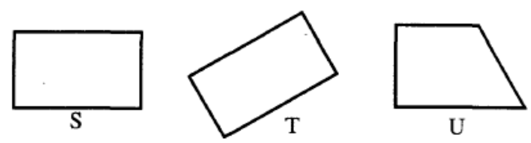
2. Quais são triângulos?

(A) Nenhum é triângulo.
(B) Só V.
(C) Só W.
(D) Só W e X.
(E) Só V e W.



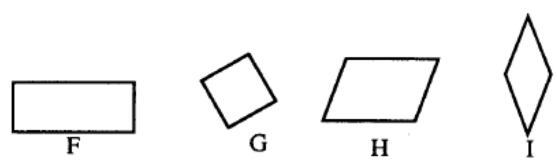
3. Quais são retângulos?

(A) Só S.
(B) Só T.
(C) Só S e T.
(D) Só S e U.
(E) Todos são retângulos.



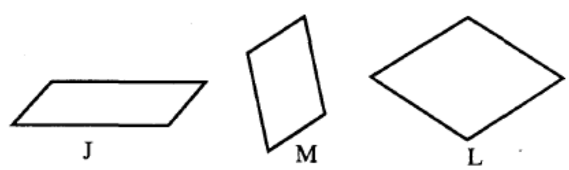
4. Quais são quadrados?

(A) Nenhum é quadrado.
(B) Só G.
(C) Só F e G.
(D) Só G e I.
(E) Todos são quadrados.

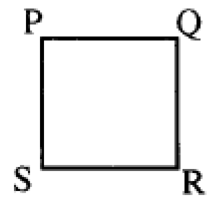


5. Quais são paralelogramos?

(A) Só J.
(B) Só L.
(C) Só J e M.
(D) Nenhum é paralelogramo.
(E) Todos são paralelogramos.



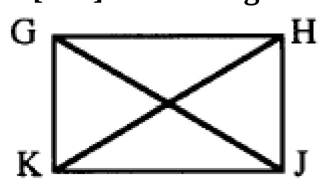
6. [PQRS] é um quadrado.



Que relação é verdadeira para todos os quadrados?

(A) [PR] e [RS] têm o mesmo comprimento.
(B) [QS] e [PR] são perpendiculares.
(C) [PS] e [QR] são perpendiculares.
(D) [PS] e [QS] têm o mesmo comprimento.
(E) A medida do ângulo Q é maior do que a do ângulo R.

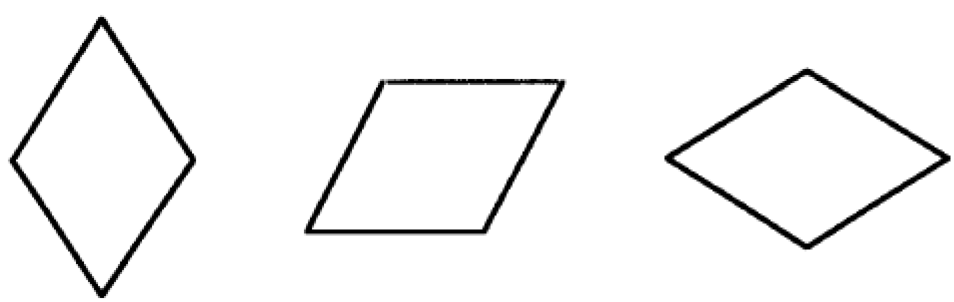
7. Num retângulo [GHJK], [GJ] e [HK] são as diagonais.



Qual das alternativas de (A) a (D) não é verdadeira para todos os retângulos?

(A) Há quatro ângulos retos.
(B) Há quatro lados.
(C) As diagonais têm o mesmo comprimento.
(D) Os lados opostos têm o mesmo comprimento.
(E) Todas as alternativas (A) a (D) são verdadeiras para todos os retângulos.

8. Um losango é uma figura de 4 lados em que todos os lados têm o mesmo comprimento. Eis três exemplos:

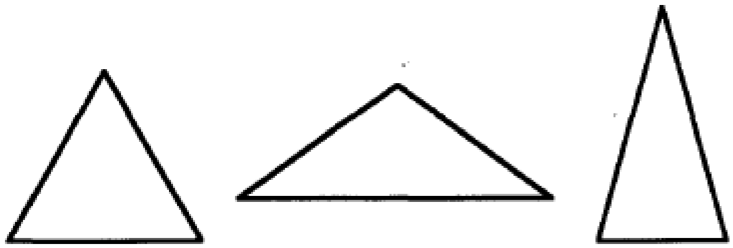


Qual das alternativas de (A) a (D) não é verdadeira para todos os losangos?

(A) As duas diagonais têm o mesmo comprimento.
(B) Cada diagonal bissecta dois ângulos do losango.
(C) As duas diagonais são perpendiculares.
(D) Os ângulos opostos têm a mesma medida.

(E) Todas as alternativas de (A) a (D) são verdadeiras para todos os losangos.

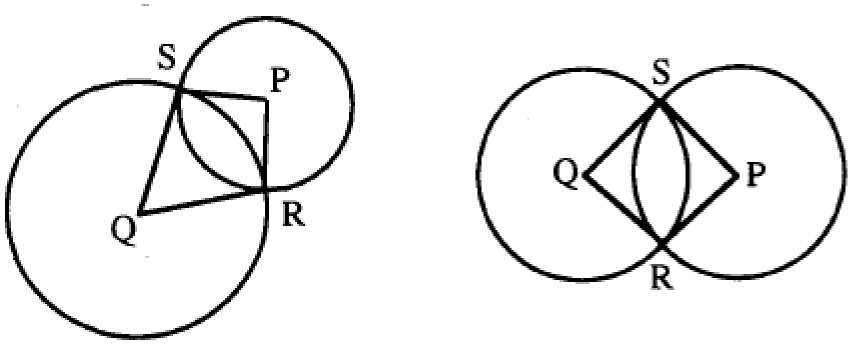
9. Um triângulo isósceles é um triângulo que tem dois lados de igual comprimento. Eis três exemplos:



Qual das alternativas de (A) a (D) é verdadeira para todos os triângulos isósceles?

(A) Os três lados têm que ter o mesmo comprimento.
(B) Um lado tem que ter o dobro do comprimento do outro.
(C) Tem de haver pelo menos dois ângulos com a mesma medida.
(D) Os três ângulos têm que ter a mesma medida.
(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D) é verdadeira para nenhum triângulo isósceles.

10. Duas circunferências com centros P e Q intersectam-se em R e S para formar uma figura de 4 lados [PRQS]. Eis dois exemplos:



Qual das alternativas de (A) a (D) não é sempre verdadeira?

(A) [PRQS] terá dois pares de lados de igual comprimento.
(B) [PRQS] terá pelo menos dois ângulos de mesma medida.
(C) Os segmentos [PQ] e [RS] serão perpendiculares.
(D) Os ângulos P e Q terão a mesma medida.
(E) Todas as alternativas de (A) a (D) são verdadeiras.

11. Eis duas afirmações:
Afirmação 1: A figura F é um retângulo.
Afirmação 2: A figura F é um triângulo.
Qual é a alternativa correta?

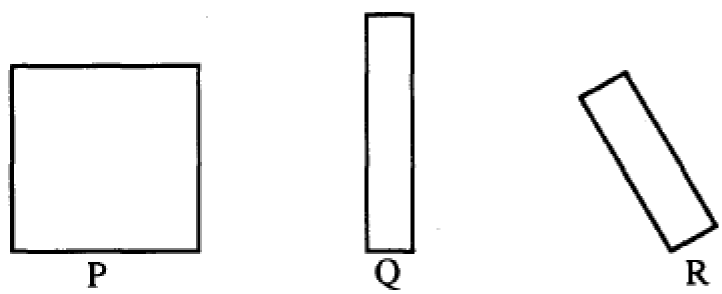
(A) Se 1 é verdadeira, então 2 é verdadeira.
(B) Se 1 é falsa, então 2 é verdadeira.
(C) 1 e 2 não podem ser ambas verdadeiras.

(D) 1 e 2 não podem ser ambas falsas.
(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D) é correta.

12. Eis duas afirmações:
Afirmação S: O ∆[ABC] tem três lados com o mesmo comprimento.
Afirmação T: No ∆[ABC], o <B e o <C têm a mesma medida.
Qual é a alternativa correta?

(A) As afirmações S e T não podem ser ambas verdadeiras.
(B) Se S é verdadeira, então T é verdadeira.
(C) Se T é verdadeira, então S é verdadeira.
(D) Se S é falsa, então T é falsa.
(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D) é correta.

13. Quais figuras podem ser chamadas de retângulos?



(A) Todas podem.
(B) Só Q.
(C) Só R.
(D) Só P e Q.
(E) Só Q e R.

14. Qual é verdadeira?

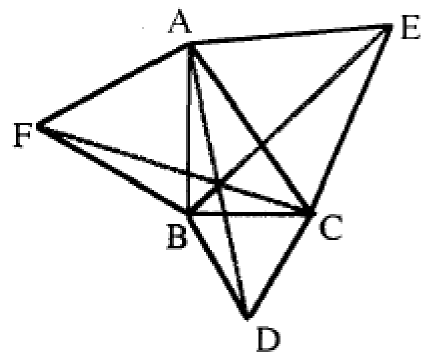
(A) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os quadrados.
(B) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os retângulos.
(C) Todas as propriedades dos retângulos são propriedades de todos os paralelogramos.
(D) Todas as propriedades dos quadrados são propriedades de todos os paralelogramos.
(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D) é verdadeira.

15. O que é que todos os retângulos têm e que alguns paralelogramos não têm?

(A) Lados opostos iguais.
(B) Diagonais iguais.
(C) Lados opostos paralelos.
(D) Ângulos opostos iguais.

(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D).

16. Eis um triângulo retângulo [ABC].



Sobre os lados de [ABC] foram construídos triângulos equiláteros: [ACE], [ABF] e [BCD]. A partir desta informação, pode-se provar que [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum. O que é que esta demonstração lhe diria?

(A) Só neste triângulo desenhado podemos ter a certeza de que [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.
(B) Em alguns, mas não em todos os triângulos retângulos, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.
(C) Em qualquer triângulo retângulo, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.
(D) Em qualquer triângulo, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.
(E) Em qualquer triângulo equilátero, [AD], [BE] e [CF] têm um ponto comum.

17. Eis três propriedades de uma figura.
Propriedade D: Tem diagonais de igual comprimento.
Propriedade S: É um quadrado.
Propriedade R: É um retângulo.
Qual é a alternativa verdadeira?

(A) D implica S, que, por sua vez, implica R.
(B) D implica R, que, por sua vez, implica S.
(C) S implica R, que, por sua vez, implica D.
(D) R implica D, que, por sua vez, implica S.
(E) R implica S, que, por sua vez, implica D.

18. Eis duas proposições:
I. Se uma figura é um retângulo, então as suas diagonais bissectam-se.
II. Se as diagonais de um figura se bissectam, então a figura é um retângulo.
Qual é a alternativa verdadeira?

(A) Para provar que I é verdadeira, basta provar que II é verdadeira.

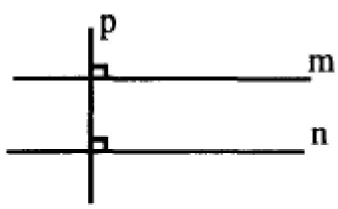
(B) Para provar que II é verdadeira, basta provar que I é verdadeira.
(C) Para provar que II é verdadeira, basta encontrar um retângulo cujas diagonais se bissectem.
(D) Para provar que II é falsa, basta encontrar uma figura que não seja um retângulo cujas diagonais se bissectem.
(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D) é correta.

19. Em Geometria:

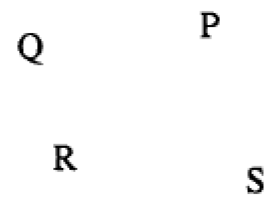
(A) Cada termo pode ser definido e cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.
(B) Cada termo pode ser definido mas é necessário saber que certas proposições são verdadeiras.
(C) Alguns termos têm de ficar indefinidos mas cada proposição verdadeira pode ser demonstrada.
(D) Alguns termos têm de ficar indefinidos. É necessário ter algumas proposições que são consideradas verdadeiras.
(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D) é correta.

20. Examine estas três proposições:
(1) Duas retas perpendiculares à mesma reta são paralelas.
(2) Uma reta que é perpendicular a uma de duas retas paralelas, é perpendicular à outra.
(3) Se duas retas são equidistantes então são paralelas.
Na figura em baixo, as retas m e p são perpendiculares e as retas n e p são perpendiculares.
Qual das proposições abaixo poderia ser a razão pela qual a reta m é paralela à reta n?

(A) Só (1).
(B) Só (2).
(C) Só (3).
(D) (1) ou (2).
(E) (2) ou (3).



21. Na Geometria F, que é diferente da que você está habituado(a), há exatamente quatro pontos e seis retas. Cada reta contém exatamente dois pontos. Se os pontos são P, Q, R e S, as retas são {P, Q}, {P, R}, {P, S}, {Q, R}, {Q, S} e {R, S}.



Eis como as palavras intersectam e paralelo são usadas na Geometria F.
As retas {P, Q} e{P, R} intersectam-se porque têm P em comum.
As retas {P, Q} e {R, S} são paralelas porque não têm pontos comuns.
Partindo desta informação qual é correta?

(A) {P, R} e {Q, S} intersectam-se.
(B) {P, R} e {Q, S} são paralelas.
(C) {Q, R} e {R, S} são paralelas.
(D) {P, S} e {Q, R} intersectam-se.
(E) Nenhuma das alternativas de (A) a (D) é correta.

22. Trissectar um ângulo significa dividi-lo em três partes de igual medida.
Em 1847, P.L. Wantzel provou que, em geral, é impossível trissectar ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.
Desta sua demonstração, o que você pode concluir?

(A) Em geral é impossível **bissectar** ângulos usando somente um compasso e uma régua não graduada.
(B) Em geral, é impossível **trissectar** ângulos usando somente um compasso e uma régua **graduada**.
(C) Em geral, é impossível **trissectar** ângulos usando quaisquer instrumentos de desenho.
(D) É ainda possível que no futuro alguém encontre uma forma de **trissectar** ângulos usando somente um compasso e uma régua não graduada.
(E) Ninguém será capaz de encontrar um método geral para **trissectar** ângulos usando apenas um compasso e uma régua não graduada.

23. Há uma Geometria inventada por um matemático J na qual a afirmação seguinte é verdadeira:

A soma das medidas dos ângulos de um triângulo é menor do que 180^{o}.

Qual é a alternativa correta?

(A) J cometeu um erro ao medir os ângulos do triângulo.
(B) J cometeu um erro de raciocínio lógico.
(C) J tem uma ideia errada sobre o significado de verdade.
(D) J começou com pressupostos diferentes dos da Geometria usual.
(E) Nenhuma das afirmações de (A) a (D) é correta.

24. Dois livros de Geometria definem a palavra retângulo de forma diferente. Qual a alternativa verdadeira?

(A) Um dos livros tem um erro.
(B) Uma das definições está errada. Não pode haver duas definições diferentes de retângulo.
(C) Os retângulos de um dos livros devem ter propriedades diferentes dos do outro livro.
(D) Os retângulos de um dos livros devem ter as mesmas propriedades dos do outro livro.
(E) As propriedades dos retângulos nos dois livros podem ser diferentes.

25. Suponha que você provou as proposições I e II.
I. Se p, então q.
II. Se s, então não q.
Que proposição se conclui das proposições I e II?

(A) Se p, então s.
(B) Se não p, então não q.
(C) Se p ou q, então s.
(D) Se s, então não p.
(E) Se não s, então p.

FOLHA DE RESPOSTAS

Data do Teste ..../......../.......
Sexo: (   ) F / (   ) M
Data de Nascimento ..../........./.........
Classificação ....
==

Circule as respostas corretas   Rascunho

1.	A	B	C	D	E
2.	A	B	C	D	E
3.	A	B	C	D	E
4.	A	B	C	D	E
5.	A	B	C	D	E
6.	A	B	C	D	E
7.	A	B	C	D	E
8.	A	B	C	D	E
9.	A	B	C	D	E
10.	A	B	C	D	E
11.	A	B	C	D	E
12.	A	B	C	D	E
13.	A	B	C	D	E
14.	A	B	C	D	E
15.	A	B	C	D	E
16.	A	B	C	D	E
17.	A	B	C	D	E
18.	A	B	C	D	E
19.	A	B	C	D	E
20.	A	B	C	D	E
21.	A	B	C	D	E
22.	A	B	C	D	E
23.	A	B	C	D	E
24.	A	B	C	D	E
25.	A	B	C	D	E

Anexo 5: Questionário Inicial

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática
Mestranda: Marli Duffles Donato Moreira

QUESTIONÁRIO

Prezado(a) participante,
Este questionário é parte de uma pesquisa que está sendo desenvolvida no âmbito do Mestrado de Ensino de Matemática. Todas as respostas serão utilizadas para subsidiar a investigação acadêmica em curso e o anonimato dos participantes será preservado. Dê suas respostas com liberdade e sinceridade. Elas não serão usadas para uma avaliação pessoal no curso em que você está matriculado. Desde já agradeço sua colaboração.

I.
Data: ____/_____/_____
Sexo: ( ) F / ( ) M
Idade: _______________
Quando você deverá concluir a Licenciatura em Matemática?
____
Onde você cursou o Ensino Médio?
____
Trabalha atualmente ou já trabalhou como professor de Matemática?
( ) Não.
( ) Sim . Onde? ____________________________________
Para que nível? ________________________________

II.
Por que você optou por cursar Licenciatura em Matemática?
____
____

Qual é, na sua opinião, o papel do ensino da Geometria na Educação Básica?
____
____

Qual(is) livro(s) de Geometria que marcou(aram) sua formação?
____
____

Como você avalia sua formação em Geometria?

Se você fosse responsável pela elaboração do currículo de Geometria de um colégio de Ensino Fundamental e Médio, quais os conteúdos você destacaria?
Ensino Fundamental:

Ensino Médio:

Quais as disciplinas da faculdade, cursadas por você, que abordaram temas de Geometria? Exemplifique.

O que você considera como pontos fortes e pontos fracos no ensino de Geometria, em geral?
Pontos fortes:

Pontos fracos:

Utilize as linhas abaixo para fazer qualquer comentário que julgar pertinente.

Anexo 6: Oficinas

IM/UFRJ - Mestrado em Ensino de Matemática

ATIVIDADE 1

I.

Dos conteúdos de Geometria estudados por você ao longo de sua formação básica e superior, o que você lembra do conceito de área?

____

____

____

Se você fosse ensinar, hoje o conceito de área, a um aluno do Ensino Fundamental, como faria? Quais aspectos destacaria?

____

____

____

Se o aluno fosse do Ensino Médio você faria alguma alteração na sua abordagem pedagógica? Se a resposta for positiva, cite qual.

____

____

____

Como você faria para medir a área de um terreno plano, de forma poligonal, sem utilizar números reais?

____

____

____

II.

O quebra-cabeças de 7 peças que você recebeu é chamado de Tangram. Você deve formar as figuras com o Tangram sem sobrepor as peças e ajustando-as umas às outras de forma a não deixar espaços ‘vazios’ entre as peças (um lado deve encostar no outro).

1) Forme, com o quadrado e os 2 triângulos pequenos do Tangram:

a) um triângulo;
b) um trapézio;
c) um retângulo;
d) um paralelogramo.

O que você pode afirmar em relação a estas figuras considerando suas áreas?

____

____

____

Forme um triângulo com as peças do Tangram usando apenas:

a) os 2 triângulos grandes;
b) o triângulo médio e os 2 pequenos;
c) 1 triângulo grande, o médio e os dois pequenos.

O que você pode afirmar em relação a estas figuras considerando suas áreas?

2) Forme, usando todas as peças do Tangram:
a) um triângulo;
b) um retângulo;
c) um paralelogramo;
d) um trapézio;
e) um hexágono.

O que você pode afirmar em relação a estas figuras considerando suas áreas?

III

Qual a medida da área de cada figura construída com o Tangram?

Comente as atividades de hoje, utilizando as linhas abaixo.

Use a folha em anexo para registrar as figuras montadas com o Tangram.

ATIVIDADE 2

I.

Duas figuras planas de formas diferentes podem ter a mesma área? Se for possível, exemplifique.

É possível construir um quadrado que tenha a área igual à soma das áreas de outros dois quadrados? Se for possível, exemplifique.

É possível construir um quadrado que tenha a área igual à diferença das áreas de outros dois quadrados. Se for possível, exemplifique.

II.

Você recebeu alguns cartões representando figuras geométricas. Responda as perguntas a seguir tendo como base a observação deste material.

1) Há neste conjunto figuras de mesma área? Se a resposta for positiva, indique quais.

2) Qual(is) a(s) figura(s) de maior área?

____
____
____
____

3) Qual(is) a(s) figura(s) de menor área?

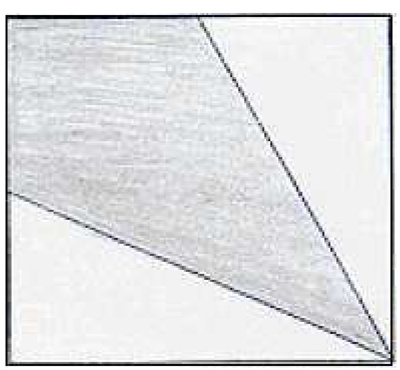
____
____
____
____

III.
Considerando a área como parâmetro, ordene as figuras em ordem crescente.

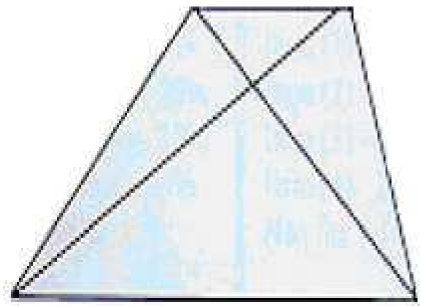
____
____
____
____
____
____

IV.

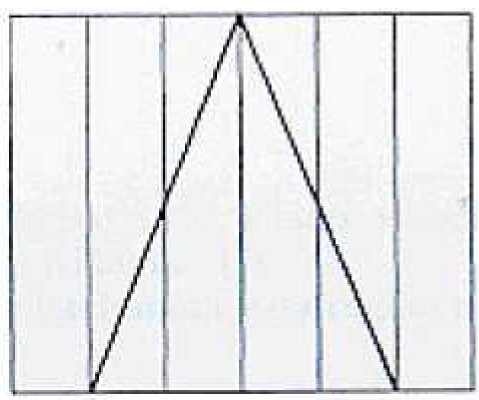
1) Considere a figura abaixo como sendo um quadrado e os segmentos traçados no interior da figura tendo como uma das extremidades os pontos médios dos lados. A parte hachurada da figura corresponde a que parte da figura toda? Justifique sua resposta.



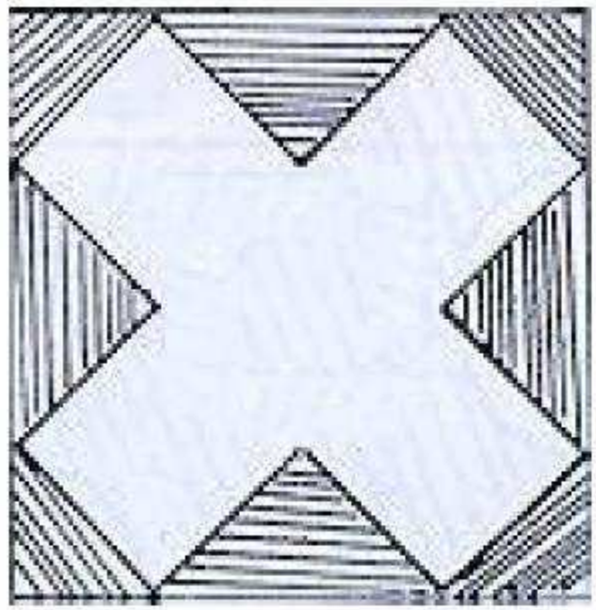
2) Considere a figura abaixo um trapézio e suas diagonais. O que você pode afirmar a respeito das áreas dos 2 triângulos formados por cada uma das diagonais e por dois lados consecutivos do trapézio? Justifique sua resposta.



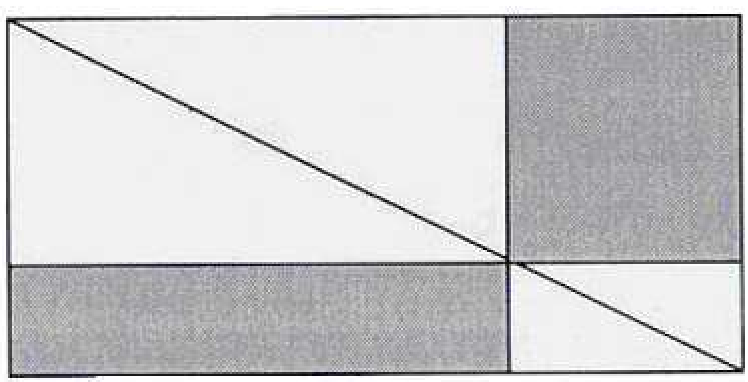
3) Considere a figura abaixo um quadrado dividido em partes iguais por linhas verticais. O que você pode afirmar a respeito das áreas do triângulo e dos trapézios formados à direita e à esquerda do triângulo? Justifique sua resposta.



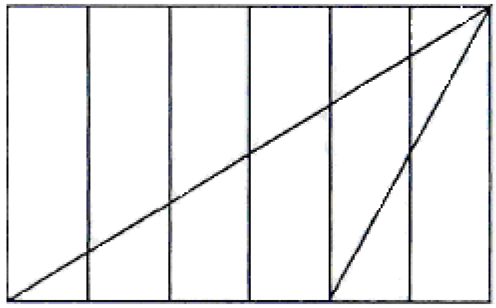
4) Considere a figura abaixo um quadrado. Compare a área da parte hachurada com a não hachurada. O que você pode afirmar? Justifique.



5) Considere a figura abaixo um retângulo e uma de suas diagonais. Compare a área das 2 partes mais escuras. O que você pode afirmar? Justifique.



6) Considere a figura abaixo um retângulo dividido em partes iguais pelas linhas verticais. Compare a área do triângulo (no centro da figura) com a do retângulo todo. O que você pode afirmar? Justifique.



V.

Comente as atividades de hoje, utilizando as linhas abaixo.

ATIVIDADE 3

I.

Você conhece *os Elementos* de Euclides? Qual sua opinião sobre esta obra?

____
____
____
____
____

Você acredita que *os Elementos* de Euclides possa ser usado no ensino de Matemática nos dias de hoje? Se sua resposta for positiva, como?

____
____
____
____
____

Dê sua opinião (justificando-a) sobre as seguintes afirmações:

(i) “A Matemática se diferencia das outras ciências (Biologia, Física, etc) pela natureza de seu objeto de estudo. Os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de suas representações.”

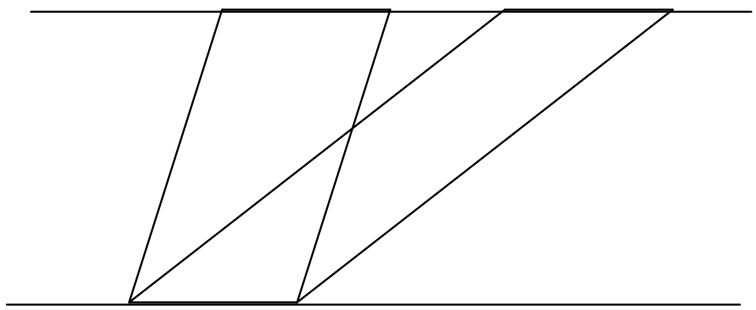
____
____
____
____
____

(ii) “A Matemática é uma ciência de caráter lógico-dedutivo e assim deve ser ensinada.”

____
____
____
____
____

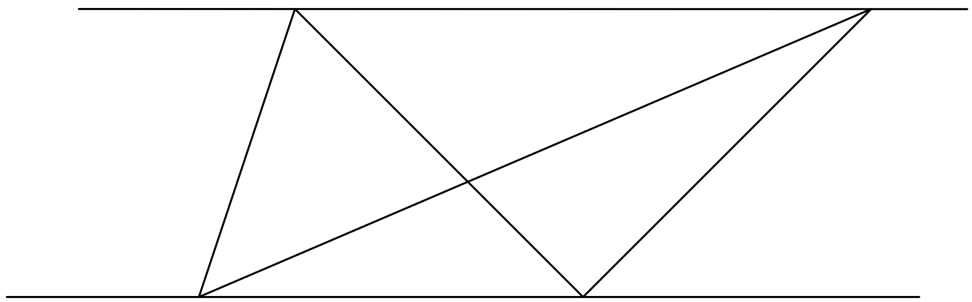
II.

1.a. Construa, usando como instrumentos de desenho apenas régua (não graduada) e compasso, os paralelogramos entre as retas paralelas, conforme figura abaixo.



1.b. O que você pode afirmar sobre as áreas dos dois paralelogramos construídos? Justifique sua resposta.

2.a. Construa, usando como instrumentos de desenho apenas régua (não graduada) e compasso, os triângulos entre as paralelas, conforme figura abaixo.

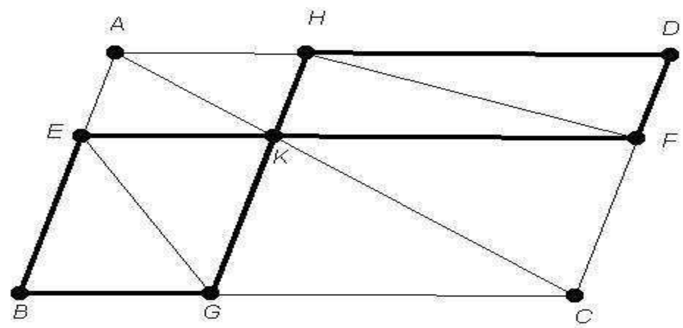


2.b. O que você pode afirmar sobre as áreas dos dois triângulos construídos? Justifique sua resposta.

3. Construa o que se pede (usando apenas régua e compasso):

a) um triângulo qualquer;
b) um paralelogramo de área igual ao do triângulo construído em (a);
c) um retângulo de área igual ao do paralelogramo construído em (b).

4. A figura abaixo é um paralelogramo. O que você pode afirmar sobre as áreas dos paralelogramos EBGK e KFDH, formados em torno da diagonal? Justifique sua resposta.



III Para ler e conhecer.

Os *Elementos* de Euclides, escrito aproximadamente em 300 a.C, são uma grande obra, composta por 13 livros. Nem todos tratam de Geometria. Os livros sobre Geometria são os livros I-IV, VI, e XI-XIII. A Geometria plana é tratada nos livros I-IV e VI. Euclides constrói seu modelo axiomático a partir de algumas definições, postulados e noções comuns, princípios aceitos sem demonstração. Todas as demais proposições (teoremas) são derivadas destas, por deduções lógicas. Nossas oficinas baseiam-se no Livro I dos *Elementos.* Nele aparecem 23 definições, 5 postulados e 9 noções comuns. A partir delas são demonstradas 48 proposições (teoremas).

→ Livro I dos *Elementos* de Euclides, tradução de Irineu Bicudo (2009).

<u>Definições</u>

1. Ponto é aquilo de que nada é parte.
2. E linha é comprimento sem largura.
3. E extremidades de uma linha são pontos.
4. E linha reta é a que está posta por igual com os pontos sobre si mesma.
5. E superfície é aquilo que tem somente comprimento e largura.
6. E extremidades de uma superfície são retas.
7. Superfície plana é a que está posta por igual com as retas sobre si mesma.
8. E ângulo plano é a inclinação, entre elas, de duas linhas no plano, que se tocam e não estão postas sobre uma reta.
9. E quando as linhas que contêm o ângulo sejam retas, o ângulo é chamado retilíneo.
10. E quando uma reta, tendo sido alteada sobre uma reta, faça os ângulos adjacentes iguais, cada um dos ângulos é reto, e a reta que se alteou é chamada uma perpendicular àquela sobre a qual se alteou.
11. Ângulo obtuso é o maior do que um reto.
12. E agudo, o menor do que um reto.
13. E fronteira é aquilo que é extremidade de alguma coisa.
14. Figura é o que é contido por alguma ou algumas fronteiras.
15. Círculo é uma figura plana contida por uma linha [que é chamada circunferência], em relação à qual todas as retas que a encontram [até a circunferência do círculo], a partir de um ponto dos postos no interior da figura, são iguais entre si.
16. E o ponto é chamado centro do círculo.
17. E diâmetro do círculo é alguma reta traçada através do centro, e terminando, em cada um dos lados, pela circunferência do círculo, e que corta o círculo em dois.
18. E semicírculo é a figura contida tanto pelo diâmetro quanto pela circunferência cortada por ele. E centro do semicírculo é o mesmo do círculo.

19. Figuras retilíneas são as contidas por retas, por um lado, triláteras, as por três, e, por outro lado, quadriláteras, as por quatro, enquanto multiláteras, as contidas por mais do que quatro retas.
20. E, das figuras triláteras, por um lado, triângulo equilátero é o que tem os três lados iguais, e, por outro lado, isósceles, o que tem só dois lados iguais, enquanto escaleno, o que tem os três lados desiguais.
21. E, ainda das figuras triláteras, por um lado, triângulo retângulo é o que tem um ângulo reto, e, por outro lado, obtusângulo, o que tem um ângulo obtuso, enquanto acutângulo, o que tem os três ângulos agudos.
22. E das figuras quadriláteras, por um lado, quadrado é aquela que é tanto equilátera quanto retangular, e, por outro lado,, oblongo, a que, por um lado, é retangular, e, por outro lado, não é equilátera, enquanto losango, a que, por um lado, é equilátera, e, por outro lado, não é retangular, e rombóide, a que tem tanto os lados opostos quanto os ângulos opostos iguais entre si, a qual não é equilátera nem retangular; e as quadriláteras, além dessas, sejam chamadas trapézios.
23. Paralelas são retas que, estando no mesmo plano, e sendo prolongadas ilimitadamente em cada um dos lados, em nenhum se encontram.

Postulados

1. Fique postulado traçar uma reta a partir de todo ponto até todo ponto.
2. Também prolongar uma reta limitada, continuamente, sobre uma reta.
3. E, com todo centro e distância, descrever um círculo.
4. E serem iguais entre si todos os ângulos retos.
5. E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongadas as duas retas, ilimitadamente, encontram-se no lado no qual estão os menores do que dois retos.

Noções comuns

1. As coisas iguais à mesma coisa são também iguais entre si.
2. E, caso sejam adicionadas coisas iguais a coisas iguais, os todos são iguais.
3. E, caso de iguais sejam subtraídas iguais, as restantes são iguais.
4. E, caso iguais sejam adicionadas a desiguais, os todos são desiguais.
5. E os dobros da mesma coisa são iguais entre si.
6. E as metades da mesma coisa são iguais entre si.
7. E as coisas que se ajustam uma à outra são iguais entre si.
8. E o todo é maior que a parte.
9. E duas retas não contém uma área.

(p.97, BICUDO, 2009)

Comente as atividades[(*)] de hoje, utilizando o espaço abaixo.

____

____

____

____

____

____

____

____

____

____

(*) As atividades de hoje foram adaptadas de uma sequência didática elaborada pelo Professor J.B.Pitombeira para um minicurso do V EEMAT – Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro – fev-2010, Colégio PedroII.

ATIVIDADE 4

I.

Qual, na sua opinião, o papel das demonstrações na Matemática? As demonstrações devem ser ensinadas?

O que é um axioma? O que é um teorema?

(*)Damos abaixo três afirmações corretas – (***a***), (***b***) e (***c***).

- A boa notícia é que você não precisa prová-las!
- A outra notícia é que você deverá:
  - colocá-las na forma "se-então";
  - encontrar as afirmações recíprocas;
  - determinar se essas recíprocas são verdadeiras ou falsas.

(a) As diagonais de uma pipa são perpendiculares.
(b) Uma reta paralela a um lado de um triângulo dá origem a um novo triângulo semelhante ao original.
(c) Um triângulo isósceles tem dois ângulos iguais.

(a)

(b)

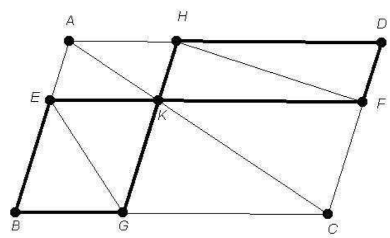
(c)

(*) reprodução do exercício 9, p.97, do livro 'Aprendendo e Ensinando Geometria', org. Mary Montgomery Lindquist e Albert P. Shulte, Atual Editora, 1996.

II.

1.a. Na ATIVIDADE 3 você justificou um importante teorema da Geometria Euclidiana. Veja como Euclides o enuncia e o demonstra *nos Elementos*:

I.43. Os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de todo paralelogramo, são iguais entre si.



Sejam o paralelogramo ABCD, e a diagonal AC dele, e, por um lado, sejam os paralelogramos EH, FG à volta da AC, e, por outro lado, os ditos complementos BK, KD; digo que o complemento BK é igual ao complemento KD.

Pois, como o ABCD é um paralelogramo, e a AC é uma diagonal dele, o triângulo ABC é igual ao triângulo ACD. De novo, como o EH é um paralelogramo, e a AK é uma diagonal dele, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK. Pelas mesmas coisas, então, também o triângulo KFC é igual ao KGC. Como, de fato, por um lado, o triângulo AEK é igual ao triângulo AHK, e, por outro lado, o KFC, ao KGC, o triângulo AEK, com o KGC, é igual ao triângulo AHK, com o KFC; mas também o triângulo ABC todo é igual ao ADC todo; portanto, o complemento BK restante é igual ao complemento KD restante.

Portanto, os complementos dos paralelogramos, à volta da diagonal de toda área paralelogrâmica, são iguais entre si; o que era preciso provar.

(p.129, BICUDO, 2009)

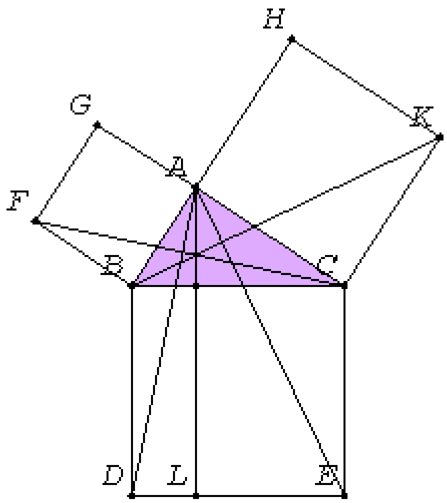
1.b. Reescreva esta demonstração deixando explícitas as hipóteses (suposições) e as conclusões de cada parte do referido teorema.

1.c. Escreva a proposição recíproca deste teorema. Ela é verdadeira ou falsa?

2.a. O Teorema de Pitágoras é o mais 'famoso' da Matemática.
Enuncie-o e demonstre-o.

2.b. Agora veja a demonstração do teorema de Pitágoras apresentada por Euclides *nos Elementos.*

I.47. Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto.



Seja o triângulo retângulo ABC, tendo o ângulo sob BAC reto; digo que o quadrado sobre a BC é igual aos quadrados sobre as BA, AC.
Fiquem, pois, descritos, por um lado, o quadrado BDEC sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC sobre as BA, AC, e, pelo A, fique traçada a AL paralela a qualquer uma das BD, CE; e fiquem ligadas as AD, FC. E, como cada um dos ângulos sob BAC, BAG é reto, então, as duas retas AC, AG, não postas no mesmo lado, fazem relativamente a alguma reta, a BA, e no ponto A sobre ela, os ângulos adjacentes iguais a dois retos; portanto, a CA está sobre uma reta com a AG. Pelas mesmas coisas, então, também a BA está sobre uma reta com a AH. E, como o ângulo sob DBC é igual ao sob FBA; pois, cada um é reto; fique adicionado o sob ABC comum; portanto, o sob DBA todo é igual ao sob FBC todo. E como, por um lado, a DB é igual à BC, e, por outro lado, a FB, à BA, então as duas DB, BA são iguais às duas FB, BC,cada uma a cada uma; e o ângulo sob DBA é igual ao ângulo sob FBC; portanto, a base AD [é] igual à base FC, e o triângulo ABD é igual ao triângulo FBC; e, por um lado, o paralelogramo BL [é] o dobro do triângulo ABD; pois, tanto têm a mesma base BD quanto estão nas mesmas paralelas BD, AL; e, por outro lado, o quadrado GB é o dobro do triângulo FBC; pois, de novo, tanto têm a mesma base FB quanto estão nas mesmas paralelas FB, GC. [Mas os dobros das coisas iguais são iguais entre si;] portanto, também o paralelogramo BL é igual ao quadrado GB. Do mesmo modo, então, sendo ligadas as AE, BK, será provado também o paralelogramo CL igual ao quadrado HC; portanto, o quadrado BDEC todo é igual aos quadrados GB, HC. E, por um lado, o quadrado BDEC foi descrito sobre a BC, e, por outro lado, os GB, HC, sobre as BA, AC. Portanto, o quadrado sobre o lado BC é igual aos quadrados sobre os lados BA, AC.
Portanto, nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o [ângulo] reto; o que era preciso provar.

(p.132, BICUDO, 2009)

2.c. Compare a sua demonstração com a de Euclides. Escreva, nas linhas abaixo, suas constatações (semelhanças, diferenças, tipo de linguagem, etc).

III Desafio:

Utilizando apenas régua (não graduada) e compasso, construa um retângulo e, posteriormente, um quadrado de área igual ao do retângulo inicial.

Comente as atividades(*) de hoje, utilizando o espaço abaixo.

(*) As atividades de hoje foram adaptadas de uma sequência didática elaborada pelo Professor J.B.Pitombeira para um minicurso do V EEMAT – Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro – fev-2010, Colégio PedroII.

ATIVIDADE 5

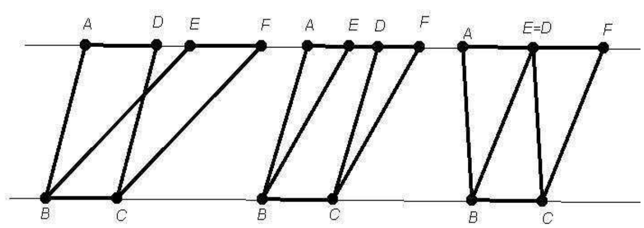
I. **Quadratura de figuras planas.**

Os matemáticos gregos comparavam a área de uma figura plana com a área de um quadrado. Fazer a **quadratura** de uma figura significa construir um quadrado cuja área seja igual à área da figura inicial.

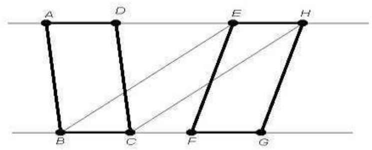
Os matemáticos gregos clássicos restringiam os instrumentos admissíveis em construções geométricas à régua e ao compasso. Provavelmente, tal fato deve-se à descoberta de grandezas incomensuráveis (descoberta de números irracionais).

Os gregos não usavam fórmulas de medida de áreas. Eles trabalhavam com a idéia de equivalência de áreas, ou seja, pela consideração de figuras com a mesma área.

Euclides, n*os Elementos*, desenvolve suas demonstrações a partir da equivalência de área dos paralelogramos entre duas paralelas. Analise as figuras abaixo.



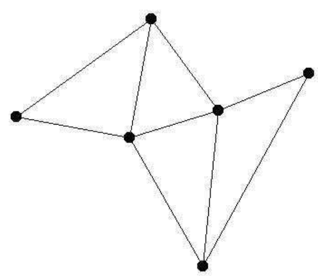
E repare na generalização onde as bases dos paralelogramos não encontram-se mais superpostas.



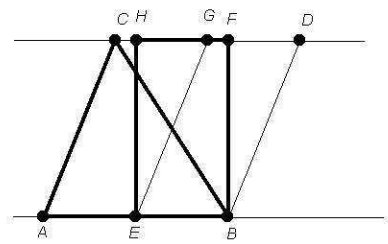
Para Euclides, a noção de igualdade entre figuras pode significar tanto igualdade de áreas como congruência de figuras.

Vamos acompanhar, agora, o processo grego para a **quadratura** de um polígono qualquer.

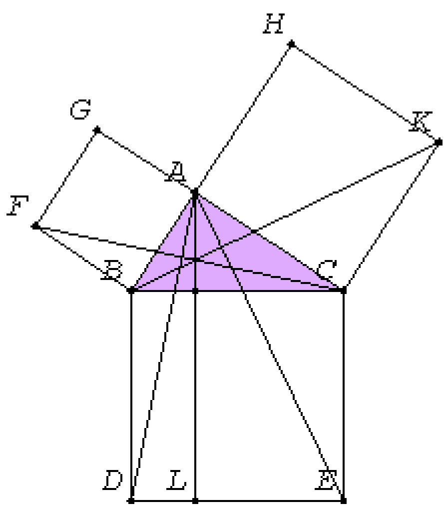
1. Decompor o polígono dado em triângulos (esta decomposição não é única, mas é sempre possível);



2. Transformar cada triângulo em um paralelogramo (e depois num retângulo) de mesma área;



3. Transformar cada retângulo em um quadrado (usaremos para isso o teorema de Pitágoras);



4. Transformar estes quadrados em um único quadrado, cuja área seja igual à área do polígono *P* (também usaremos o teorema de Pitágoras).

II. Agora é com você!

1. Desenhe um triângulo qualquer. Construa, posteriormente, um retângulo de área igual ao triângulo desenhado.
2. Construa um quadrado de área igual à do retângulo do item anterior.

III

Como você define o conceito de área?

Como você ensinaria, hoje, o conceito de área, a um aluno do Ensino Básico? Quais aspectos destacaria?

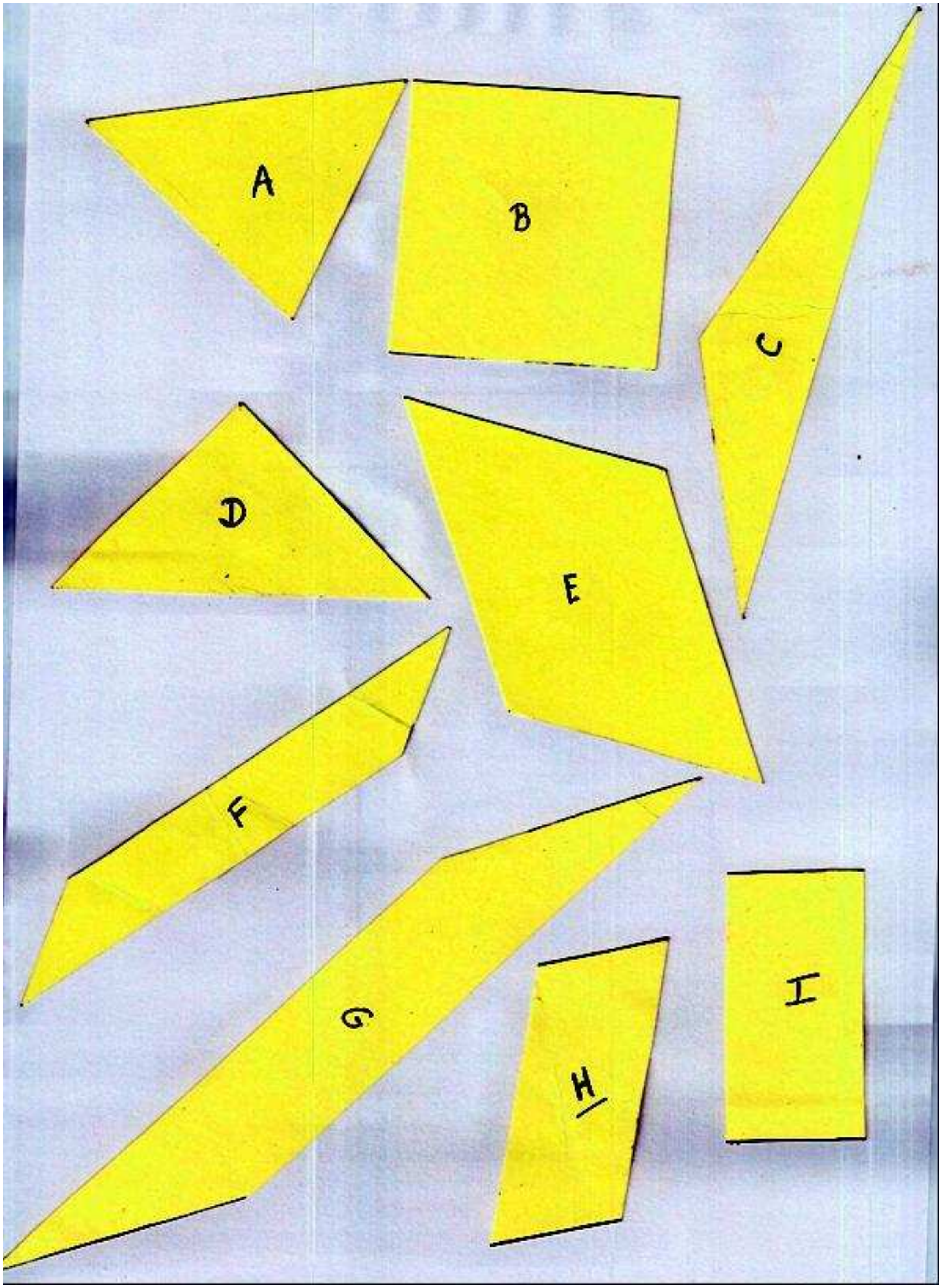
Como você faria para medir a área de um terreno plano, de forma poligonal, sem utilizar números reais?

Comente as atividades(*) de hoje, utilizando o espaço abaixo.

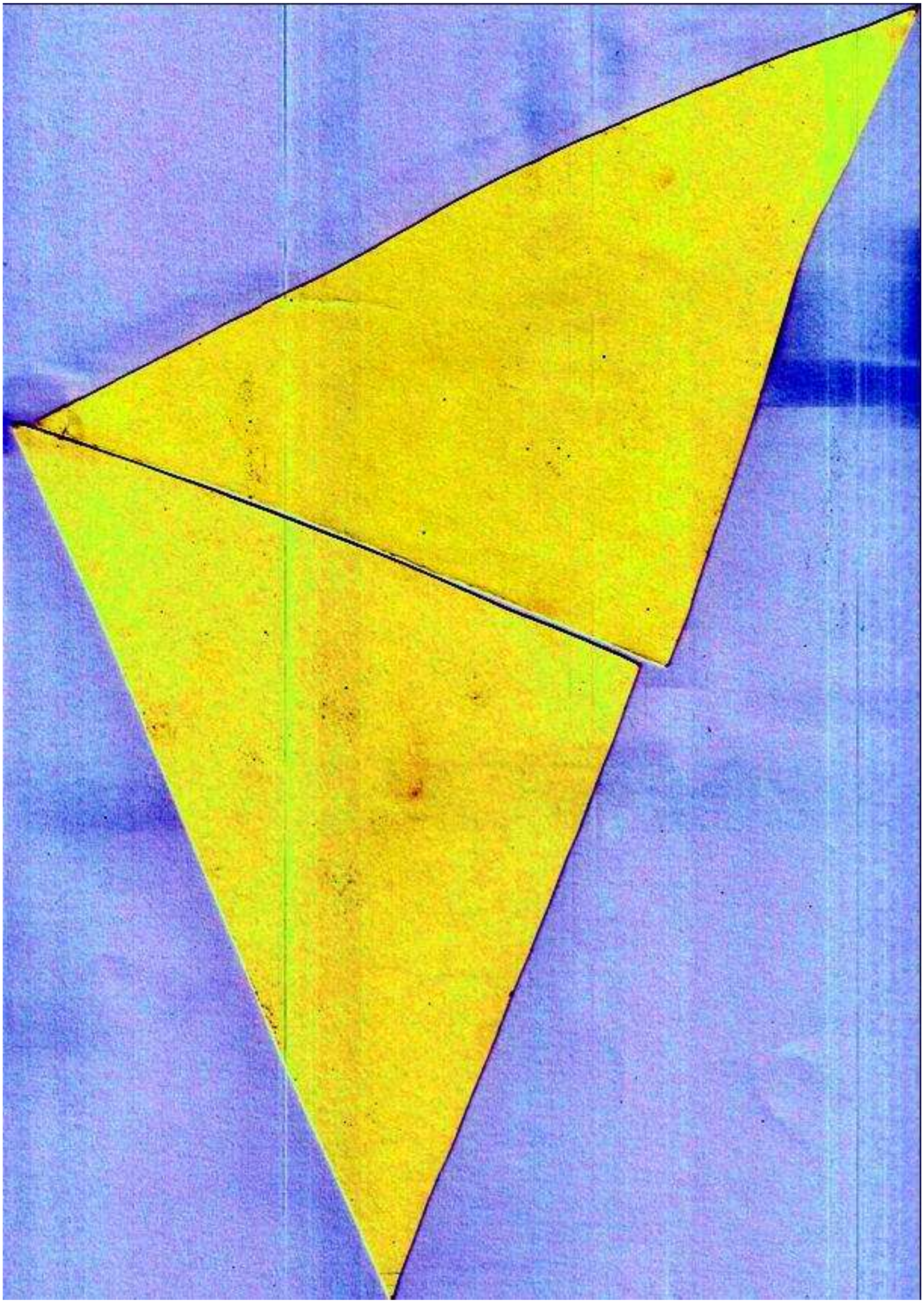
Faça uma breve avaliação, nas linhas abaixo, da sua experiência nas oficinas de geometria realizadas.

(*) As atividades de hoje foram adaptadas de uma sequência didática elaborada pelo Professor J.B.Pitombeira para um minicurso do V EEMAT – Encontro Estadual de Educação Matemática do Rio de Janeiro – fev-2010, Colégio PedroII.

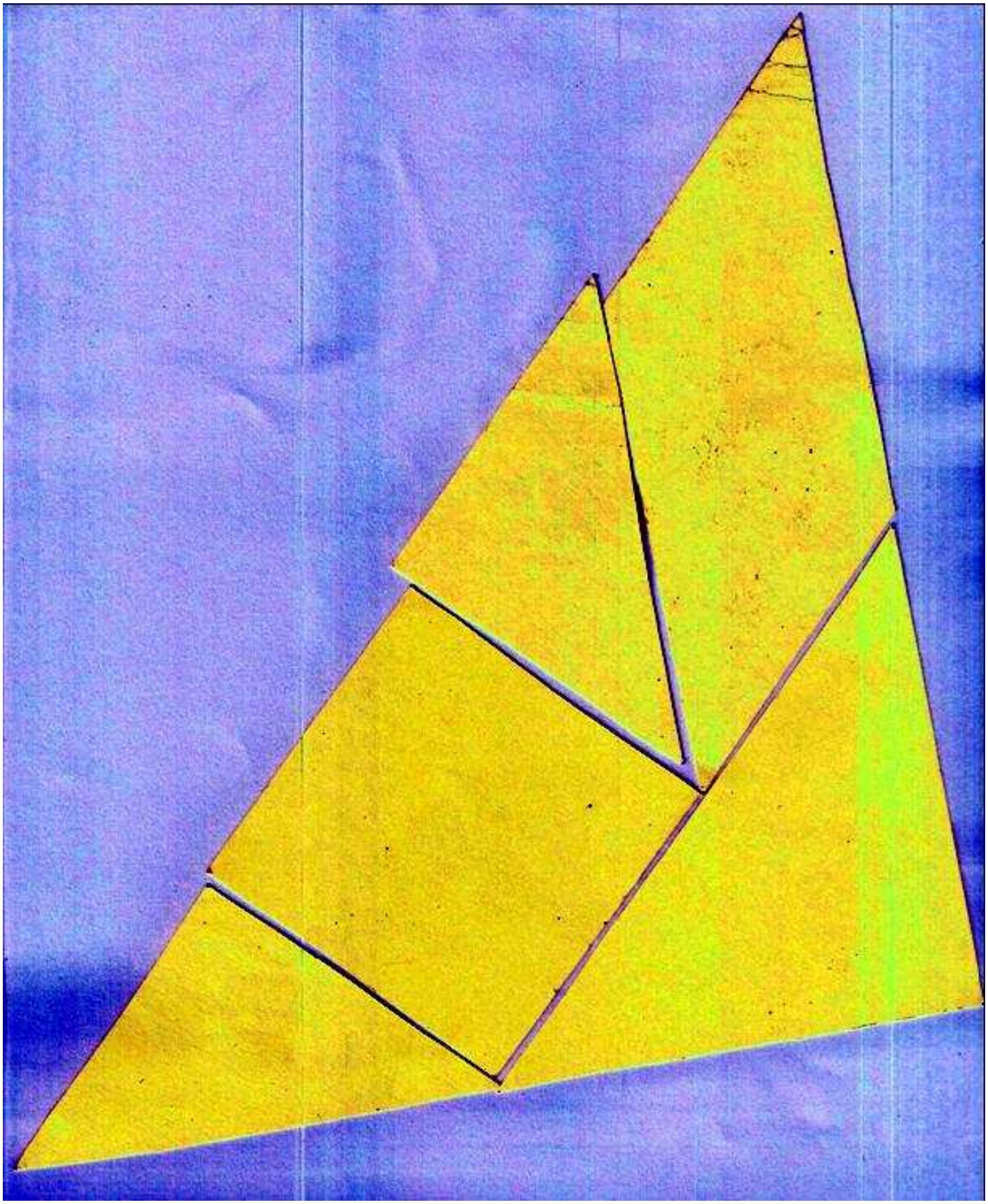
Anexo 7: Materiais Utilizados nas Oficinas



Material didático desenvolvido pela autora para a apropriação dos conceitos de equivalência de áreas e de transformação de figuras.



Tangram (parte 1)


Tangram (parte 2)