UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

O TRATADO DE ÁLGEBRA DE JOHN WALLIS E SUAS RELAÇÕES COM A ÁLGEBRA BRITÂNICA

Marcel Augusto Rosa de Almeida

RIO DE JANEIRO
2010

O TRATADO DE ÁLGEBRA DE JOHN WALLIS E SUAS RELAÇÕES COM A ÁLGEBRA BRITÂNICA

Marcel Augusto Rosa de Almeida

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Gert Schubring

Aprovada por:

____

Gert Schubring, PEMAT/UFRJ

____

Tatiana Marins Roque, PEMAT/UFRJ

____

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, PEMAT/UFRJ

____

Gérard Emile Grimberg, PEMAT/UFRJ

____

Maria Laura Magalhães Gomes, UFMG

RIO DE JANEIRO

2010

Almeida, Marcel Augusto Rosa de.

A447t O tratado de álgebra de John Wallis e suas relações com a álgebra britânica./ Marcel Augusto Rosa de Almeida. -- Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2010.

xi, 123f. : il.; 30 cm.

Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2010.

Orientador: Gert Schubing.

Referências: f.128-30.

1. Álgebra- História - Tese. 2. Álgebra- Estudo e ensino.3.Wallis John, 1616- 1703I. Schubring, Gert. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, amigos e companheiros de mestrado, pela amizade e companheirismo, em especial aqueles que figuram nas intersecções das três categorias: Phillipe e Ana (Os quais eu sou padrinho de casamento), Flavio Pereira Senra (amigo e irmão que além de tudo revisou meu português pobre neste trabalho), Rubem Vianna (pelas horas de café algébrico), Filipe Hasché (pelas intensas discussões pedagógicas, metodológicas e também pelo talento como fotógrafo), Ulisses (pela genialidade e perspicácia), Dani “baiana” (pelo tempero de família, ôxi!), Wellerson Quintaneiro (pela capacidade de bom humor nas horas mais negras) e a todos os outros que me deram suporte nesta segunda adolescência, fase de reinvenção, que foi este curso.

Agradeço a todos os professores do Instituto de Matemática da UFRJ pela dedicação, inspiração e excelência com a qual formam seus alunos em especial: Maria Aguieiras (da qual minha pouca álgebra provém), Tatiana Roque (a qual incentivou meu interesse pela história da matemática), Victor Giraldo (cuja competência invejo e admiro) e aqueles que fizeram parte de minha formação sendo igualmente importantes.

Agradeço duplamente a professora Tatiana Roque tanto por sua orientação neste trabalho quanto pela oportunidade de fazê-lo.

Agradeço a orientação do professor Gert Schubring, um verdadeiro acadêmico e Doutor tanto em nível acadêmico quanto pessoal, que foi capaz de me guiar através da tarefa mais árdua da minha vida.

Dedico este trabalho ao amor da minha vida Yasmin
e a todos que me apoiaram
suportando as minhas infinitas horas de abstração.

RESUMO

A presente dissertação é um estudo do *Treatise of Álgebra: both historical and pratical*, obra publicada em 1685, de autoria do matemático inglês John Wallis, que exerceu um papel central na evolução da ciência matemática britânica. Os desenvolvimentos de concepções algébricas até o século XVII levam às discussões sobre a legitimidade da álgebra como uma ciência independente. Em particular, neste período, vê-se o conflito entre uma concepção dependente da Geometria e outra como uma generalização da Aritmética. Entre os embates epistemológicos gerados pela nova análise de Viète e a Geometria cartesiana, encontra-se a legitimação dos números negativos e complexos. Os debates acerca de novas maneiras de se conduzir métodos e simbologias matemáticas geram ainda uma frequente discussão de prioridades que, por via de regra, não se mostrou amistosa. Em particular, as discrepâncias entre as notações matemáticas desde Viète até Wallis mostram uma mudança de percepção quanto ao papel da Álgebra como instrumento de análise e do próprio método de análise em si, de tal forma que "análise" e Álgebra se tornaram praticamente sinônimas neste período. As numerosas disputas e as acusações de plágio durante a segunda metade do século XVII envenenaram cada vez mais o discurso científico internacional, principalmente no que diz respeito à visão dos partidários de Wallis. Tais similaridades textuais foram usadas como evidência de uma suposta dependência conceitual entre os trabalhos de René Descartes e Thomas Harriot.

Palavras-chave: John Wallis, História da Álgebra, Ensino da Álgebra, Análise Algébrica.

ABSTRACT

The current dissertation is a study on the *Treatise of Álgebra: both historical and pratical*, work published in 1685, written by the British Mathematician John Wallis, who played a main role in the evolution of British Mathematics Science. The development of algebric conceptions until the 17th century stimulated various discussions on the legitimity of algebra as an independent science. This chronological period in specific witnessed the of one dependent conception of geometry *versus* a generalized approach on algebra. Among all epistemological debates raised by Viète´s new analysis and cartesian geometry, lies the legitimation of negative and complex numbers. Debates on new methods and symbologies on mathematics are, still, a discussion of priorities that, predictably, is defined by polemics and animosities. All discrepancies between the mathematic notations from Viète to Wallis indicate a change of perception of algebra as an instrument of analysis and of the analytic method itself, assuming that analysis and algebra became synonims in this historical moment. The numerous contents and all accusations of plagiarism that emerged in the second half of the 17th Century poisoned even more the Academic Researches International Discourses, mainly when it comes to the visions shared by all defenders of Wallis´ vision. Those textual similarities were used as evidence of one hypothetical conceptual dependence between the works of René Descartes and those of Thomas Harriot.

Keywords: John Wallis, History of álgebra, teaching álgebra, álgebraic analysis.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A escolha do tema

Meu interesse por álgebra é antigo. Desde cedo, em minha educação básica, fui menos geômetra do que gostaria. Esta disciplina sempre foi a que mais dominei, embora na época não tivesse dimensão do poder da análise algébrica. Ela é capaz de, com poucos anos de prática, fazer um aluno mediano vencer problemas que demoraram séculos para serem resolvidos. Sempre me indaguei como os grandes gênios da humanidade trabalhavam. Durante a graduação no Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, no curso de História da Matemática da professora Tatiana Roque (IM/UFRJ), tive algumas destas respostas. Mas dúvidas ficaram e minha capacidade (ou curiosidade) de apreciar os grandes desenvolvimentos da matemática aumentou. A partir deste momento, estudar um texto importante em seu original era um desejo recorrente, mas a minha habilidade linguística apenas me permitiu o inglês. Durante o curso de mestrado, tive contato com o professor Gert Schubring (PEMAT/UFRJ) através da professora Tatiana e este me forneceu o texto de John Wallis além de gentilmente me conceder uma valiosa orientação no processo de elaboração desta dissertaçao.

John Wallis e seu trabalho em álgebra

John Wallis nasceu em 23 de Novembro de 1616 em Ashford, Kent. Seu pai, um membro do clero, morreu quando John era criança. Quando tinha nove anos, Ashford foi atingida pela praga e John foi então mandado para um tutor em Tenterden onde permaneceu até os quatorze anos de idade. Então foi à escola Felsted em Essex por um ano, onde aprendeu Latim, Grego e um pouco de Hebreu como era costume na época. Aprendeu aritmética básica nos livros de seu irmão mais novo que se preparava para a escola técnica. Cursou o Emmanuel College em Cambridge de 1632 a 1640. Estudou dentre outros assuntos astronomia e matemática, sendo esta apenas por diversão, pois era pouco destacada dentre os estudos acadêmicos.

Após sua ordenação em 1640, arranjou o emprego de capelão e em 1644 se tornou um dos secretários da assembléia dos divinos em Westminster, que fora reunida para resolver os problemas de administração da igreja surgidos da abolição do episcopado em 1643. O estouro da guerra civil de 1642 mudou significativamente o destino de Wallis, pois este mostrou grande habilidade em decifrar as cartas codificadas dos monarquistas para os parlamentaristas. Depois deste sucesso, foi diversas vezes solicitado a repetir tal feito e manteve-se nessa atividade até o fim de sua vida. Em 1648, a Universidade de Oxford teve seus simpatizantes da monarquia expulsos incluindo seus professores Savilianos de Astronomia (John Greaves) e Geometria (Peter Turner). Por ordem do parlamento, Seth Ward se tornou o professor de Astronomia e Wallis assumiu a cadeira de Geometria, indicado por Oliver Cromwell[1] (1599-1658). Sobre o status de Waliis como matemático nessa época: "Wallis pouco sabia de matemática quando foi nomeado, mas provavelmente não muito menos e talvez um pouco mais do que a maioria de seus contemporâneos" (Stedall, 2002, p. 4) [2]

Após os anos de Guerra, a primeira grande contribuição de Wallis para a matemática inglesa foi a estabilidade e seriedade ao seu posto em Oxford. Ajudou a criar uma atmosfera onde a matemática era valorizada e podia florescer e rapidamente se estabeleceu como um dos matemáticos mais influentes da época. Seus trabalhos mais criativos surgiram nos dez anos seguintes de sua nomeação:

1656- *De sectionibus conicis,* o primeiro tratamento algébrico sistemático das cônicas e *Arithmetica infinitorum,* onde explora métodos de calcular áreas e volumes somando séries infinitas.

---

[1] Nascido em Huntingdon, leste da Inglaterra, pequeno proprietário de terras e calvinista puritano e fortemente anticatólico. Eleito membro do Parlamento (1628). Tornou-se representante de Cambridge (1640) no novo Parlamento e uniu-se à ala radical que atacava duramente a política do rei Carlos I. Quando começou a guerra civil de 1642, organizou o exército (1645) e conduziu sua tropa à vitória. Com a execução de Carlos I (1649), estabeleceu à proclamação da república (Commonwealth). A guerra civil terminou com a derrota dos realistas escoceses em 1651. Dissolveu o Parlamento, em 1653. Durante seu governo (1653-1658) tornou a Grã Bretanha numa grande potência naval. Reorganizou a fazenda pública, fomentou a liberalização do comércio, reformou a igreja nacional e promoveu o desenvolvimento das universidades. Morreu em Londres e foi enterrado na Abadia de Westminster e seus restos mortais foram transferidos para Tiburny (1660).

[2] Wallis knew little enough mathematics when he was appointed, but probably not much less and perhaps rather more than most of his contemporaries" (STEDALL, 2002, p. 4).

1657 – *Mathesis Universalis sive arithmeticum opus integrum*, um texto abrangente sobre aritmética que também incluía seções históricas. Esses livros e outros trabalhos menores (incluindo sua aula inaugural) foram impressos juntos em dois volumes de seleções, intitulados *Operum mathematicorum* (1656-1657)

1658 – *Commercium epistolicum*, um trabalho conjunto com William Brouncker (1620-1684) no que seria mais tarde conhecido como teoria de números.

1659- *Tractatus duo de cycloide et... de cissoide*, sobre as propriedades da ciclóide e cissóide. Durante os anos 1650 Wallis desfrutou de outras parcerias com Brouncker e também com John Pell (1611-1685), que veio a se tornar seu amigo por toda a vida. Durante os anos 1660 sua produção diminuiu. Escreveu *Mechanica sive de motu tractatus* (1669-1671) e muitos pequenos artigos em forma de cartas, em geral respostas a problemas particulares.

No início dos anos 1670 escreveu a maior parte do seu grande *Tratado de Álgebra,* publicado apenas em 1685. Em seus últimos anos editou alguns tratados gregos sobre música e matemática, em forma de manuscritos. Manteve correspondência constante com os maiores matemáticos de sua época[3].

Sua longa carreira matemática não é livre de controvérsias. Em 1657 foi nomeado *custos arquivorum* apesar dos protestos de alguns, que consideravam o cargo indigno de um professor saviliano. No ano anterior se envolveu no que seria uma longa e amarga disputa de ordem política, teológica e matemática com o filósofo e matemático Thomas Hobbes (1588-1679). Em 1658, vieram discussões com Pierre de Fermat (1601-1665) e Bernard Frenicle (1605-1675) no que concerne a alguns problemas relativos à teoria dos números. Depois que Blaise Pascal (1623-1662) tratou seu trabalho sobre a ciclóide de modo negligente, se envolveu em mais uma série de controvérsias. No período de 1667-1668 esforçou-se para contestar o trabalho de dois matemáticos franceses pouco conhecidos: Francis Dulaurens e Vincent Leotaud. Seu comportamento "contestador" não se dirigia apenas a matemáticos de menor expressão, pois Wallis também acusou Descartes de ter plagiado o trabalho de Thomas Harriot. Sobre este comportamento de Wallis, lemos em STEDALL (2002):

> (...) Wallis defendeu seus amigos tão ardentemente quanto atacava seus inimigos. Em particular, ele foi consistente em sua preocupação de que os resultados de valor deveriam ser publicados e reconhecidos, e em nenhum lugar isso é mais

[3] Como Fermat nos anos 1650, Huygens e Leibniz nos 1690.

> evidente do que no seu “Tratado de Álgebra” escrito quase inteiramente em apoio a matemática inglesa e a seus matemáticos. (STEDALL, 2002, p.5) [4].

Mas a despeito do seu conteúdo ser extremamente nacionalista e de expressar opiniões controversas, considerar o *Tratado de Álgebra* meramente como um texto “polêmico” é um erro. John Wallis viveu numa época de grande revolução tanto na política quanto nas teorizações matemáticas, e testemunhou o processo pelo qual estas se libertaram das amarras clássicas e ganharam liberdade. O estudioso contribuiu diretamente com tais evoluções e, em alguns casos, teve contato direto com alguns dos grandes gênios dessa ciência. Seu interesse pelo registro histórico da matemática e pela ciência em si nos permite compreender tais avanços e nos dá pistas importantes a serem desvendadas no desenvolvimento da ciência. Assim, essa obra merece um olhar mais atento com respeito a seu conteúdo histórico e matemático.

Objetivos gerais

Primeiramente, exibir a relação da matemática grega (geometria), que utilizou o método da síndissertaçao, com a álgebra e com a nova forma de análise matemática praticada a partir do século XVII. Especificar o papel da Álgebra aplicada nas construções geométricas e da notação matemática como reveladora de sua natureza, em particular sobre a formulação aritmética da álgebra praticada pelos ingleses e seus conceitos básicos. Mostrar a importância de Wallis como matemático comparando com outros algebristas, trabalhos e inovações. Mostrar a postura nacionalista de Wallis dentro do contexto das disputas de prioridades comuns à sua época, exibindo algumas de suas acusações à Geometria de René Descartes. Prover uma bibliografia inicial para aqueles que se interessam pelo assunto e estimular as pesquisas sobre o mesmo.

---

[4] “(...) Wallis defended his friends as ardently as he attacked his enemies. In particular, he was consistent in his concern that worthwhile results should be published and recognized, and nowhere is this more evident than in *A treatise of Álgebra*, written almost entirely in support of English mathematics and mathematicians” (Stedall, 2002, p.5).

Organização da dissertação

No Capítulo 1, faremos um breve resumo da evolução de concepções algébricas desde Diofanto até os matemáticos italianos da época medieval, indicando o papel transformador da tradição matemática árabe e o papel da Espanha muçulmana nas traduções para o latim feitas a partir do século XIII. No Capítulo 2, analisaremos algumas concepções de Viète e seus desdobramentos em Descartes e Harriot. No Capítulo 3, teremos uma contextualização da matemática britânica e a evolução de seu status em relação à continental. No capítulo 4, discutiremos o tratado de álgebra de Wallis quanto ao conteúdo matemático da teoria de equações e mostraremos alguns indícios textuais empregados por Wallis para acusar Descartes de plagiar Thomas Harriot; apresentaremos ainda um estudo de caso de como o estudioso discorre acerca dos resultados de Harriot mostrando um processo de acréscimo aos mesmos. No Capítulo 5, estabeleceremos uma breve discussão sobre as acusações de Wallis quanto ao suposto plágio por parte de Descartes em relação a Harriot. Finalmente, no capítulo 6, teremos a conclusão dos resultados obtidos no decorrer da presente dissertação.

Metodologia

No período histórico em que focamos este trabalho, a adoção de métodos algébricos de análise provocou uma fusão da aritmética com a álgebra e a geometria. Dessa forma, coexistiram diferentes concepções de seus significados cujas discussões se refletiram em terminologias diversas, simbologias e técnicas. Ainda, veio à tona uma questão central: o que é o rigor matemático? Dentro dessa questão era necessário analisar, em particular, quando é legítimo utilizar números na geometria.

Alguns desses obstáculos conceituais foram resolvidos satisfatoriamente no trabalho de François Viète, mas para entender essa trajetória, devemos fixar o que se entende no presente texto por "aritmética", "álgebra", "geometria" e ainda "análise". Tentarei fazer a correspondência correta das diversas fontes utilizadas com referência a essa definição, pois os sentidos em que surge o termo "análise", por exemplo, diferem entre si, e ainda provocam confusão com respeito à sua definição moderna. Assim, adoto a terminologia utilizada por Henk Bos (2001) no livro "*Redefining Geometrical exactness: Descartes' transformation of the early modern concept of construction*", no qual o autor declara que os termos adotados eram utilizados no início do período moderno (1580-1650) com pouca diferença de sentido em relação ao século XVII, quando os vocábulos “álgebra” e “análise” se tornaram praticamente sinônimos, divergindo novamente mais tarde.

Número deve ser entendido por qualquer Natural ou Racional positivo e alguns Irracionais que apareceram em contexto numérico na época em questão, o começo da idade moderna. O sentido clássico de número é uma coleção de unidades, quantidades discretas, de natureza diferente dos segmentos de reta (ou simplesmente retas) que são ***grandezas geométricas***. Embora as razões entre inteiros não sejam coleções de unidades, eram aceitas como números, assim como os poucos números irracionais que apareceram nos textos da época. Ainda mais raros eram os números complexos, que tinham seu status indefinido.

Grandezas geométricas são, além dos segmentos de retas, figuras planas ou sólidas, quando é considerado seu tamanho. Tal definição corresponde ao período clássico grego, e era conhecida e aceita nos séculos XVI e XVII. Grandezas geométricas de mesmo tipo (ou dimensão) podem ser adicionadas ou subtraídas (a menor da maior) de certa forma, comparadas em tamanho, e em pares possuem uma razão. Esses procedimentos não pressupõem um valor numérico de medida (comprimento, área ou volume) em relação a uma unidade, mas uma relação de ordem (maior, menor ou igual). Igual grandeza é uma propriedade compartilhada por objetos congruentes, não existindo grandeza zero.

Grandezas abstratas são aquelas que possuem as mesmas propriedades operatórias que as geométricas, mas tem sua natureza não especificada. Essa é uma concepção clássica, embora tida como um conceito inovador por volta de 1600. Quando combinada com a ideia de que as grandezas podem ser tratadas independentemente de sua natureza (abstratamente) temos o embrião da “Matemática universal” defendida primeiramente por Viète.

Quando a ocasião não for dúbia, podemos usar simplesmente o termo grandeza. A noção de ***Razão***, em sua concepção clássica, não se referia a números ou grandezas, mas sim a uma relação entre elas. Esta interpretação deve-se a Eudoxo e está explicitada na definição V-3 dos elementos de Euclides, sendo a de uso comum até meados do século XVII. Seu uso no presente texto será o mesmo.

Entre o fim da era medieval e o início da Renascença, houve uma tentativa de compreender as razões em termos de suas ***denominações***, sendo estas as “frações irredutíveis equivalentes” à razão dada (em linguagem moderna). Alguns matemáticos julgavam que essas mesmas denominações poderiam ser estendidas a todas as razões, inclusive às irracionais (que surgiam principalmente quando eram consideradas grandezas geométricas). Assim, surge em

Johannes Campanus[5] (1220-1296) a interpretação de que as teorias de razões para números (livro V dos elementos) e para grandezas geométricas (Livro VII) eram essencialmente as mesmas. Ao longo do século XVI, ao passo que melhores traduções dos elementos de Euclides tornaram-se públicas, ficou claro que a interpretação de Campanus se baseou em textos distorcidos. Entretanto, as tentativas de entender as razões em termos de suas denominações e o uso cada vez mais frequente de raízes irracionais na álgebra semearam a idéia de que considerar as razões (irracionais ou não) como números tornaria as intrincadas teorias contidas nos elementos supérfluas. Ramus foi defensor desta idéia, e as discussões sobre esse assunto adentraram o século XVII, com muitos matemáticos, como Wallis e Isaac Barrow (1630-1667), adotando diferentes lados da disputa (aproximadamente no ano de 1660).

Números, grandezas e razões estão submetidos a ***Operações***. A correspondência entre os diferentes tipos de operações geometricamente e as quantidades relacionadas se modificam com o tempo e ganharam uma clareza cada vez maior no período de Viète e, posteriormente, de Descartes.

Quantidades desconhecidas (ou simplesmente definidas como "desconhecidas") se referem aos objetos matemáticos que num problema aritmético ou geométrico devem ser determinados por cálculo ou construção. O oposto de uma quantidade desconhecida é uma ***quantidade conhecida*** ou ***dada***. Esses termos são utilizados principalmente no contexto da análise. Uma quantidade é dada no sentido em que operações e comparações podem ser feitas sobre ela, usualmente dentro de um problema ou teorema suficientemente geral para que o seu valor exato seja irrelevante no estudo da solução ou demonstração procurada, de certa forma assumindo o papel de uma indeterminada. Em procedimentos analíticos, "conhecida" é sinônimo de "dada".

Quantidades indeterminadas (ou simplesmente definidas como "indeterminadas") se referem a objetos matemáticos envolvidos em um teorema, um problema ou na execução de um algoritmo, de forma que o conhecimento de um ou mais de seus valores particulares é essencial para a prova do teorema, a resolução do problema ou a execução do algoritmo. Por exemplo, no problema clássico de determinar duas médias proporcionais entre duas grandezas geométricas dadas, as grandezas são as indeterminadas e as médias proporcionais as

---

[5] Matemático e astrônomo italiano que contribuiu para a redescoberta da astronomia de Ptolomeu, além de publicar uma tradução dos elementos.

quantidades desconhecidas. Na equação $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$, *a, b, c, d* são as indeterminadas e x é a quantidade desconhecida. Uma ***quantidade determinada*** é o oposto de uma indeterminada.

Uma ***Variável*** é um objeto matemático com um ou mais graus de liberdade. Não estava atrelado ao conceito de função como no sentido moderno, pois não se tinha a ideia de "variável independente". Logo, considerar indeterminadas como variáveis era um conceito inexistente ou ao menos incomum no século XVII. Claramente não poderiam ser consideradas quantidades desconhecidas, pois não era pedido que fossem determinadas. Um exemplo está no estudo de curvas. Uma curva possui ordenadas e abscissas, que variam em grandeza e posição de acordo com o ponto considerado.

O oposto de uma quantidade variável é uma ***não-variável*** ou ***constante***. Constantes são variáveis que, em relação a um dado objeto, são constantes em grandeza (não em posição). Numa parábola, o segmento ao longo do eixo entre a ordenada e sua normal é constante (chamada subnormal) e em outras curvas não.

Os termos "variável", "quantidade desconhecida" ou "indeterminada" são modernos. Não é possível encontrar termos da época retratada no presente texto com significados de acordo com as classificações em questão, embora os conceitos relacionados estejam presentes no início da modernidade. Uma vez determinada essa terminologia, é possível "delimitar" as diferentes áreas da matemática às quais estas se relacionam:

Aritmética é a prática ou teoria matemática que lida com números.

Geometria é a prática ou teoria matemática que lida com grandezas geométricas.

Álgebra é a prática ou teoria matemática que lida com indeterminadas ou quantidades desconhecidas. Emprega operações algébricas, envolve equações, lida tanto com números (aqui sendo considerada como parte da Aritmética) quanto com grandezas geométricas ou grandezas abstratas. Ao lidar com grandezas abstratas, foi exigida uma redefinição das operações algébricas para que pudessem ser aplicadas a tais grandezas.

Análise compreende os métodos matemáticos para encontrar as soluções (ou construções em Geometria) de problemas ou provas de teoremas, introduzindo quantidades desconhecidas. Pode envolver o uso de álgebra e, no caso de não o fazer, é denominada ***análise clássica.*** Neste caso, o resultado procurado é supostamente dado e a partir da configuração final procuram-se propriedades que possam ser reconstruídas pelo processo de ***Síntese*** (construção geométrica). Alguns autores defendem a idéia de que os gregos faziam uso da álgebra para encontrar as propriedades necessárias ao processo de síndissertaçao, mas não divulgavam esse processo. Tal conceito implica em problemas profundos, mas reveladores, sobre a epistemologia e a metodologia da pesquisa na história da matemática, associada a uma visão teleológica sobre a mesma.

As definições supracitadas não determinam as áreas em questão como classes disjuntas, exceto, obviamente, a Aritmética e a Geometria. A Álgebra e a Aritmética se interceptam quando o assunto é a solução de equações numéricas, o que também constitui uma intersecção da Aritmética com a Análise. A Geometria e a Álgebra convergem no uso de equações para encontrar construções. A intersecção da Geometria e a Análise é exatamente a anterior unida com a análise clássica.

Em um processo de reconstrução histórica, um conceito nunca aparece isolado, ou seja, como um elemento de um campo conceitual cujo significado converge unicamente para este único elemento. Sobre essa lógica, afirma SCHUBRING (2005): "Reconstrução histórica, portanto, deve entender como um elemento evoluiu juntamente com seu ambiente e campo de apoio." (SCHUBRING, 2005, p.8) [6].

O processo de crescente algebrização ocorrido ao longo da história, que está associado à necessidade de generalização, é um processo duplo: primeiramente transformando conceitos da Geometria em uma forma Algébrica e, em segundo, um processo de mudança interna, das proposições algébricas, onde devemos citar a classificação de NESSELMANN (1842) como ocorrendo em três estágios:

i) Retórico – Onde todas as proposições são apresentadas de forma verbal e com total ausência de sinais.

ii) Sincopado – Onde apesar de ainda operar verbalmente, são introduzidas algumas abreviações para termos ou operações utilizadas frequentemente.

iii) Simbólico – Que conta com uma linguagem simbólica independente de palavras.

---

[6] Historical reconstruction thus must grasp how an element evolved together with its surrounding and supporting field (SCHUBRING, 2005, p.8).

A importância de tais desenvolvimentos simbólicos nos permite acessar, ao menos em parte, os conceitos propostos por um dado autor.

> Há uma conexão estreita entre o símbolo e o significado, ou seja, o conceito. Ao encontrar representações simbólicas diferentes, nós, como uma regra, não podemos assumir um significado conceitual idêntico. Este lado linguístico dos conceitos matemáticos, sempre teve uma importância especial em períodos de reestruturação e modernização da ciência (SCHUBRING, 2005, p.8).[7]

O desenvolvimento da álgebra tem se baseado na elaboração de sistemas simbólicos, desde que a generalização de Viète e Descartes introduziram álgebra na matemática. Dessa maneira, a análise da simbologia matemática praticada por um dado autor ou em dada época oferece um bom parâmetro histórico para analisar a evolução de conceitos.

---

[7] There is a close connection between the sign and the signified, i.e., the concept. Upon encountering different sign representations, we as a rule cannot assume an identical concept meaning. This linguistic side of mathematical concepts has always had a special importance in periods of restructuring and modernizing the science (SCHUBRING, 2005, p.8).

CAPÍTULO 1

TRADUÇÕES E ADAPTAÇÕES NO CONTEXTO DA MATEMÁTICA ÁRABE: AS TRADIÇÕES MATEMÁTICAS MAGREBINAS E DA ESPANHA ISLÂMICA

Os modernos historiadores da matemática têm um consenso de que os matemáticos da Antiguidade não utilizavam uma álgebra semelhante à desenvolvida e praticada no século XVII, como Wallis costumava afirmar. Os resultados do livro II de Euclides que são comumente referidos como "álgebra geométrica" foram formulados de maneira retórica, e as proposições tinham o objetivo de auxiliar em problemas de quadratura (ou melhor, de equivalência de áreas) e não compor uma teoria "algébrica". O status da "álgebra" grega muda com o livro *Aritmética* de Diofanto. Em Heath (2009), há uma extensa discussão sobre quais símbolos faziam parte da notação de Diofanto em conexão com a gramática grega, mas a diferença de descrição dos estudiosos de Diofanto e alterações feitas pelos copistas do mesmo levam o autor apenas a suposições sobre a mesma. Sendo o assunto extenso, me limito a reproduzir partes essenciais segundo as hipóteses levantadas por Heath.

Como exemplo, a notação incluía para a quantidade desconhecida o símbolo ς, que era definido como uma quantidade contendo um "número indefinido de unidades", com um acento (ς′) ou na forma $ς^{σ}$. Para as potências da quantidade desconhecida x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 eram empregados, respectivamente, os termos $Δ^{Y}$, K^{Y}, $Δ^{Y} Δ$, $ΔK^{Y}$, $K^{Y} K$, não se atribuindo símbolos para potências acima de seis porque estas não possuíam utilidade na solução de seus problemas. Os coeficientes eram números racionais positivos, denotados por letras gregas minúsculas imediatamente após os sinais das potências. Logo, Diofanto não necessitava de símbolos para as operações de multiplicação: ele simplesmente fornecia o resultado das operações sem nenhuma etapa preliminar. Apesar de usar letras como numerais, elas não eram quantidades indeterminadas. Não havia um símbolo particular para a adição, mas existia um para a subtração, o que o obrigava a escrever os termos negativos após todos os positivos. A notação de Diofanto era bastante inconveniente e de forma geral operava mais com o significado do que os seus próprios símbolos, colocando-o, segundo Nesselmann (1842), como o primeiro representante de uma álgebra sincopada e, com ele, todos os europeus predecessores de Viète. Os métodos de Diofanto variavam ao longo do livro e os mais de 50 tipos de classes de problemas não eram agrupados segundo nenhum critério geral de solução, exceto um crescente grau de dificuldade, onde os problemas anteriores facilitam os seguintes. É impossível produzir um resumo de seus métodos sem copiar todo o livro: as características de cada problema deram a Diofanto a oportunidade de utilizar um procedimento específico em cada caso, que não é aplicável a nenhum dos outros problemas. Para Nesselmann (1842), mesmo estando Diofanto limitado a coeficientes numéricos específicos, fica claro como a variação de tais valores afeta a solução do problema.

Tentativas mais sistemáticas de transformar a geometria dos gregos em aritmética e até mesmo em álgebra foram feitas pela civilização islâmica, ao longo de séculos. Ainda que de uma forma predominantemente retórica, algoritmos matemáticos foram desenvolvidos associados às necessidades cotidianas do mundo muçulmano. Não pretendemos aqui esgotar o assunto, mas dar uma ideia inicial da linha de tempo entre os primeiros passos da álgebra nos gregos e os matemáticos italianos que precederam a revolução provocada pelo trabalho de Viète.

1.1 O período de ouro da matemática islâmica

Em consequência ao advento do islã, os povos semitas atacaram e conquistaram todo o norte da África, a maioria do Oriente Médio, e até mesmo partes da Europa Ocidental, especialmente a Espanha. O magrebe, até então bizantino e berbere, foi conquistado de 647 a 700, assim como grande parte da península ibérica em 711-713. Com Maomé, os árabes passam a assimilar grande parte das populações conquistadas, transmitindo-lhes língua, religião e traços culturais. Só na Espanha o processo foi incompleto e levou à Reconquista. A capital deste império, Bagdá, foi erguida nos arredores do Rio Tigre. Essa cidade tornou-se um grande centro cultural, fato muito influenciado por sua localização. Com o surgimento de uma nova dinastia, os abássidas, em meados do século VIII, o império islâmico começou a instalar-se politicamente, e surgiram as condições em que a matemática e a ciência poderiam ser desenvolvidas. Em geral, os primeiros trabalhos matemáticos desenvolvidos por estudiosos árabes eram predominantemente práticos, provavelmente apoiados numa tradição sub-científica indiana e não uma álgebra científica, no sentido proposto por Jens Høyrup[8].

O período compreendido entre os séculos VIII e XI é conhecido como "período de ouro" do mundo Islâmico. Foi durante esses anos que o território do império muçulmano abrangia nações atualmente conhecidas como Irã, Síria, Iraque, Egito, Palestina, África do Norte, Espanha e partes da Turquia. Bagdá era o centro do califado de Abássida. A unidade linguística do califado foi uma das principais razões que permitiram estabelecer uma produção científica consistente. Assim como a Matemática Grega, que foi definida mais pela língua comum em que foi escrita e realizada, e não pela nacionalidade dos praticantes, a sua matemática foi determinada em grande parte pelo uso comum do árabe por estudiosos de diversas nacionalidades, nem todos eles de origem árabe ou muçulmana, espalhados por todo o império islâmico.

Estudiosos podiam se comunicar uns com os outros, e tratados foram traduzidos de outras partes do mundo. No século IX o califa al-Mamun incentivava a tradução do conhecimento grego e bizantino. Com a aprovação do imperador bizantino, o califa enviou especialistas para selecionar e trazer de volta manuscritos científicos gregos incentivando sua tradução para o árabe. A casa da sabedoria (Dar al-'ilm) foi criada pelo califa al-Mamun no século IX em Bagdá, a capital do império abássida. Nos anos seguintes, muitos tratados importantes de matemáticos gregos e indianos foram traduzidos e estudados e um dos primeiros textos gregos a serem traduzidos foram os "elementos" de Euclides. Isto teve um enorme impacto, e desde então os matemáticos árabes adotaram uma abordagem similar em sua matemática, comprovando algumas de suas práticas algébricas por argumentos geométricos.

Um dos primeiros e mais ilustres matemáticos deste período foi o estudioso Abu Jafar Mohamed ibn Musa Al-Khwarizmi, um astrônomo do califa de Bagdá. O nome dele indica que ele era da cidade de Khwarizm (agora Khiva), sobre o rio Amu Dária, ao sul do Mar de Aral no que é hoje o Uzbequistão (Khwarizm era parte da Rota da Seda, um caminho de negociação maior entre a Europa e o Oriente Médio). O nome completo de Al-Khwarizmi pode ser traduzido como "Pai de Jafar, Mohammed, filho de Moisés, nativo da cidade de Al-

[8] Høyrup, 1987.

Khwarizmi". Escreveu por volta de 813-833 D.C. para al-Mamun *O livro resumido de álgebra* enquanto fez parte de sua "casa da sabedoria" em Bagdá. Tinha o objetivo de explicar os fundamentos da álgebra de forma que se tornassem mais claros e úteis para o uso do homem comum: em casos de herança, troca, processos jurídicos e partilha.

O biógrafo Haji Khalfa afirma que Al-Khwarizmi foi o primeiro a escrever sobre os problemas de "al-Jabr e al-Muqabala". Em tratados matemáticos *Jabr* significa somar termos iguais aos dois lados de uma equação para eliminar os termos negativos. Outro significado menos frequente é multiplicar ambos os lados da equação por um número para eliminar frações. O sentido usual de *Muqabala* é redução de termos positivos subtraindo termos iguais de ambos os lados da equação, equacionar. Sua tradução literal é comparar, colocando em frente. A tradução de Rosen da "Álgebra de Mohammed ben Musa" tem ao todo três partes. Na primeira, Al-Khwarizmi explica a solução de seis tipos de equação aos quais qualquer uma delas, seja quadrática ou linear, pode ser reduzida. O segundo capítulo de sua "álgebra" fala de medição. O capítulo consiste principalmente de fórmulas para computar áreas e volumes. A terceira e maior parte de sua álgebra fala de heranças, com problemas resolvidos que envolvem aritmética básica e equações lineares.

1.2 Tradições da Matemática árabe

Para Djebbar (2005), a álgebra islâmica era uma arte, ou seja, uma disciplina e uma técnica, não um corpo teórico. Todavia, uma técnica que fora trabalhada ativamente por mais de meio milênio certamente não manteria as mesmas características. Algumas atividades eram mais importantes do que as pesquisas matemáticas "puras" na vida Islâmica: a astronomia, astrologia e as ciências das sucessões ou heranças. Quando lidamos com conteúdos científicos, e especificamente com os matemáticos que trabalharam no contexto da civilização árabe-islâmica não é possível falar de uma tradição específica no Magrebe, ao contrário da Espanha muçulmana ou do oriente. De fato, devemos falar de uma tradição geral, a matemática árabe, que é aquela que foi escrita e ensinada em língua árabe (também chamada de matemática dos países islâmicos). Esta foi desenvolvida no leste desde o fim do século VIII e parcialmente transmitida para as cidades da ásia central, do oeste islâmico e posteriormente a parte da Europa meridional através de traduções para Hebraico e Latim. Essa tradição foi assimilada e enriquecida pelos cenários providos pelos diferentes países do Islã, às vezes acrescentando alguma característica específica de uma orientação de pesquisa ou ensino, tanto quanto à qualidade do conteúdo dos trabalhos, da terminologia ou classificação das disciplinas estudadas. Tal processo interno de diferenciação não levou ao surgimento, em um nível local ou regional, de uma nova tradição matemática caracterizada por conceitos próprios e novos paradigmas:

> A análise de textos científicos que chegaram até o presente não nos permite falar de especificidades regionais seja em nível do próprio conteúdo ou no que concerne a toda a evolução de seus conceitos. Ao contrário, verificamos, observando as épocas, notáveis diferenças entre as regiões, no que diz respeito ao número de matemáticos ou de seus trabalhos, à vitalidade e/ou eficácia do método adotado para a disciplina, ao dinamismo de cada ambiente científico de cada região. (DJEBBAR, p.5, 1995)[9]

Nos tratados biográficos encontra-se um número de estudiosos, poetas e escritores referidos como magrebinos sem, no entanto, terem nascido no Magrebe. Este é o caso dos matemáticos da Espanha islâmica e daqueles cujos parentes eram nativos do oeste islâmico, mas foram educados no leste. Também existiram pessoas cuja origem não era Magrebina, mas participaram ativamente do cotidiano científico do Magrebe:

> Ainda, no caso dos matemáticos, é necessário especificar que somente uma categoria é representativa na matemática do Magrebe. Isso envolve aqueles que viveram lá durante um determinado período de sua vida e que, através de seu ensino e suas produções, contribuíram para o desenvolvimento ou a perpetuação de uma atividade matemática local ou regional. [LAMRABET 1981: 41-91; DJEBBAR 1986a: 118-19; HADFI 1989, 1992: 138-39 apud DJEBBAR, 1995].[10]

Os outros matemáticos recaem em duas categorias: a primeira compreende todos os que eram nativos do Magrebe e se mudaram para uma outra região da África, e a segunda, aqueles que nasceram no Magrebe mas foram educados no leste ou na Espanha islâmica.

---

[9] The analysis of the scientific texts which have come to us does not allow us to speak of regional specificities either at the level of content itself or at the evolution of its contents. On the contrary, we observe, following the epochs, notable differences between the regions, at the level of the number of mathematicians or of their works, of the vitality of this or that taught discipline, of the dynamism of the different scientific foyers of each of these regions. (Djebbar, p.5, 1995)

[10] Thus, in the case of mathematicians, it is necessary to specify that only one category is representative of the mathematical production of the Maghreb. This concerns those who lived there during a given period of their life and who, through their teaching or through their production, contributed to the development or the perpetuation of a local or regional mathematical activity. [LAMRABET 1981: 41-91; DJEBBAR 1986a: 118-19; HADFI 1989, 1992: 138-39].

1.3 Desenvolvimento da matemática magrebina e de Andaluzia (Séculos XIX - XI)

A proximidade política, econômica e cultural entre o Magrebe e a Espanha islâmica durante a Idade Média permitiu uma transmissão da produção científica que, de certa forma, interligou as tradições científicas das duas regiões independentemente das contradições sociais existentes.

> De fato, o período que se estende do término do século VIII até o fim do XI é marcado pelo desenvolvimento no Magrebe e na Espanha Muçulmana de duas tradições científicas mais ou menos interligadas, o que foi estimulado por acadêmicos que, sobrepondo diferenças de *status* social ou religioso, eram relativamente unidos tanto pelo estilo de vida da cidade islâmica quanto pelo ambiente cultural e científico que havia se estabelecido, favorecendo, dessa maneira, diferentes contribuições humanas e contatos múltiplos entre os diversos ambientes acadêmicos do Oriente Islâmico. [VERNET 1978; VERNET & SAMSO 1981; SAMSO 1992 apud DJEBBAR, 1995].[11]

Os primeiros passos das atividades científicas na Espanha islâmica e no Magrebe não são bem conhecidos e se restringem à matemática. Os testemunhos sobre esse assunto são raros e não específicos. De qualquer maneira durante o período da instalação e consolidação do poder islâmico nas primeiras cidades da Espanha e do Magrebe, a Medicina e a Contabilidade[12] foram as primeiras tradições científicas que foram ensinadas e publicadas em resposta às necessidades das camadas mais abastadas da sociedade ou às solicitações de advogados para soluções de problemas de partilha, herança e medição de terras. No que tange à Espanha islâmica, os príncipes, dignatários e abastados se beneficiaram desde o início do século IX do ensino científico provido pelas primeiras cópias de traduções dos trabalhos gregos e hindus feitas pelas casas de sabedoria do centro do império e talvez por cópias dos

---

[11] In fact, the period that extends from the end of the 8th century to the end of the 11th century is characterised by the development, in the Maghreb and in Moslem Spain, of two more-or-less linked scientific traditions encouraged by scholars who, beyond the social contradictions and the differences of statute or of religion, were relatively united both by the way of life of the Islamic city and by the cultural and scientific environment that had been established favouring different human contributions and multiple contacts with the scientific foyers of the Moslem East. [VERNET 1978; VERNET & SAMSO 1981; SAMSO 1992].

[12] Calculation.

primeiros manuais árabes que começaram a aparecer em Bagdá no fim do século VIII. Este deve ter sido o caso de filhos de mercadores e famílias reais. Após o terceiro quarto do século IX e ao longo do século X, o ensino e a pesquisa nos diferentes campos da Matemática ganharam maior importância em função do incentivo dado pelos califas Oméias Abd ar-Rahmān III (912-961) e seu filho al-Hakam II (961-976).

A análise dos textos matemáticos ainda acessíveis nos permite afirmar que estudantes, professores e pesquisadores tinham à sua disposição traduções de textos como *Os Elementos* de Euclides, *O Almagesto* de Ptolomeu, as *Seções Cônicas* de Apolônio, *Sobre a Esfera e o Cilindro* de Arquimedes e outros textos menos fundamentais, mas úteis para o treinamento de um futuro astrônomo, como: *Dados* de Euclides, o *Lemas* de Arquimedes e o *Sphaerica* de Menelaus. Alguns livros de álgebra de estudiosos do leste, como o *Livro de Cálculos Indiano* e o *Livro de Álgebra* de al-Khwarizmi (d.850), o *Tratado sobre a Figura Secante* e o *Tratado sobre números amigos* de Thabit Ibn Qurra (d. 901), o *Livro de Álgebra* do egípcio Abu Kamil (d. 930) e outros trabalhos.

1.4 A recepção dos textos árabes pela Europa cristã.

Uma visão comum da história da álgebra árabe passa por Abu Kamil, al-Karaji, Omar al-Khayyam, Thabit Ibn Qurra e al-Khwarizmi, sendo que este por si só já causou um grande impacto na Europa mediado pela tradução latina de Gerard de Cremona[13], e pelo *Liber abbaci* de Leonardo Pisano (Fibonacci).

O *Livro do Ábaco* de Fibonacci levou a Aritmética prática ao seu nível mais elevado. Sua Álgebra influenciou Jean de Murs (1290/95-1344) e provavelmente Jordanus de Nemore. Parte de seu conteúdo ainda foi adotada pelas escolas de ábaco italianas para jovens comerciantes. Os intelectuais, no entanto, se apropriaram de problemas e ideias específicas enquanto os professores de ábaco assimilaram apenas o elementar, o conteúdo voltado para os problemas de sua profissão. A importância de Leonardo de Pisa foi reconhecida pela corte de Frederico II, e depois dele vários autores escreveram textos de Aritmética, sendo o mais famoso Luca Paccioli. A notação de Paccioli é mais simples que a de Fibonacci, escrevendo *R*

[13] Hoje sabemos que não foi Gerard de Cremona o tradutor, sendo seu verdadeiro autor anônimo.

ou *R*2 para raiz quadrada, *R*3 para a raiz cúbica, *R*4 ou *RR* (Radix Radix) para a raiz quarta. A desconhecida era denotada por *co.* (cosa), seu quadrado por *ce.* (censo), o cubo por *cu.* E a potência quarta por *ce.ce.* (censo censo).

No fim de seu livro *Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità* (1487) Paccioli afirma, exemplificando com algumas cúbicas e quárticas, que para estas equações "não foi possível até então formar regras gerais", do que Scipione Del ferro, Niccolò Tartaglia, Ludovico Ferrari e Gerolamo Cardano se ocupariam logo depois.

A *Ars magna* de Cardano compilou, expandiu e sintetizou os resultados dos *maestri d'abacco,* que não apenas estavam transmitindo os resultados da álgebra árabe, mas também gerando novos resultados, incluindo soluções de algumas equações cúbicas e quárticas particulares. Tais problemas eram tidos como não resolvidos até então, e somente as soluções positivas foram fornecidas para eles. Estes resultados eram uma resposta a questões de ordem comercial, e assim uma emergente classe burguesa italiana abraçou a nova prática com entusiasmo.

Os trabalhos desses matemáticos se tornam amplamente conhecidos, em particular através de Cardano, e sua influência chama a atenção de novos algebristas, como Rafael Bombelli. Este último, influenciado pelas pesquisas de Cardano, escreve um tratado em 1572 intitulado *L'Álgebra*. O texto em questão, dividido em três tomos, tem por objetivo explicar o conteúdo da *Ars magna* para iniciantes sem a necessidade de recorrer a outros livros.

A parte I lida com radicais e mostra algumas aproximações de raízes quadradas por frações contínuas. O capítulo 2 lida com soluções de equações até quarto grau, seguindo inicialmente a abordagem de Cardano. Usaremos a notação moderna para expor uma ideia que contrasta estas duas abordagens. O ponto aqui é que Bombelli discute o "*casus irreducibilis*" resolvendo a equação:

$$x^3 = 15x + 4$$

Pelo método de Cardano:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Mas Bombelli sabia que $x = 4$ era uma solução da equação. Então ele denominou as raízes imaginárias de "sofísticas" e buscou equacionar:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = p + \sqrt{-q}$$

Obtendo

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2+\sqrt{-1} \text{ e } \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2-\sqrt{-1}$$

Conseguindo assim alcançar a desejada raiz $x = 4$. Depois disso, propõe regras para operar com números complexos *più di meno* ($+i$) e *meno di meno* ($-i$) como: *meno di meno uia meno di meno fá meno*[14].

A notação de Viète foi de certa forma o passo seguinte, permitindo que as mesmas soluções fossem aplicadas a qualquer quantidade de indeterminadas envolvidas no problema, fato impossível para seus predecessores. Para encerrar este ponto mostramos a diferença entre a designação de potências segundo Diofanto e os árabes:

Potência	*Scala Diofantea*	*Scala Araba*
0	...	1. Numero...il Noto
x	1. Numero...L' ignoto	2. Cosa, Radice, Lato
x^2	2. Podestà	3. Censo
x^3	3. Cubo	4. Cubo
x^4	4. Podestà-Podestà	5. Censo di censo
x^5	5. Podestà-Cubo	6. Relato 1°
x^6	6.Cubo-Cubo	7. Censo di Cubo, Cubo di Censo
x^7	...	8. Relato 2°
x^8	...	Censo di Censo di Censo
x^9	...	Cubo di Cubo

Tabela 1.4.1- Heath (2009), p. 40

Fica claro, a partir da tabela, que as designações das potências em Diofanto seguem uma maneira aditiva, enquanto que os árabes utilizam uma relação multiplicativa. Essas duas formas de designações foram utilizadas concomitantemente, o que gerou certa confusão entre os algebristas, tendo em vista que sua adoção variava de autor para autor.

---

[14] $(-i) \times (-i) = -1$

1.5 Uma História da álgebra segundo John Wallis

Na Proposta de publicação de sua obra, Wallis delineia uma história da álgebra segundo suas fontes. Muitas delas encontravam-se na biblioteca saviliana e algumas outras ele reconhece citar de memória, mas "tendo a preocupação de atribuir as descobertas matemáticas aos seus autores devidos". A história aqui traçada é de forma expandida ao longo do tratado até o 14° capítulo, e Wallis esclarece algumas de suas concepções matemáticas neste prefácio. Reproduzo aqui a linha de tempo sugerida pelo autor que, apesar de conter imprecisões historiográficas, mostra pela primeira vez uma tentativa de traçar uma historiografia da Matemática:

> Ele [o Tratado de álgebra] contém um apanhado do original, seus progressos e avanços do que (agora) chamamos *álgebra* mostrando sua verdadeira ancestralidade (o mais longe que fui capaz de traçar) e de que maneira chegou ao degrau em que se encontra atualmente. Que estava em uso de entre os antigos gregos, não temos dúvida. Mas era ocultada por eles como um grande segredo. Temos exemplos em Euclides, pelo menos em *Theo* sobre ele; que atribui sua invenção (entre os gregos) a Platão. Temos outros exemplos em Pappus, e seus efeitos em Arquimedes, Apolônio e outros, ainda que cobertos de obscuridade e disfarçados. Não existe entre eles um tratado escrito sobre álgebra mais antigo que o de *Diofanto* publicado pela primeira vez em latim por *Xylander* e (em grego e latim) por *Bachetus* que fez diversas adições próprias; e reimpresso recentemente com contribuições de Monsieur Fermat. Temos razões para acreditar que estava em uso entre os árabes, que a teriam recebido dos persas (e estes dos indianos), talvez antes que entre os gregos. Dos árabes (sarracenos e mouros) foi trazida para a Espanha e então para a Inglaterra (junto com o uso das Figuras numéricas e outras partes de seu aprendizado matemático, particularmente a Astronomia, que antes de Diofanto pareciam ser nossas conhecidas), e aquilo que chamamos de Álgebra. Certamente grande parte do conhecimento Grego chegou a nós da mesma maneira, primeiramente traduções de Euclides, Ptolomeu e outros para latim de cópias árabes e não dos originais. O uso dos "Numerais" (que agora temos, mas não os gregos) foi uma grande vantagem para o desenvolvimento da álgebra. Estas figuras parecem ter entrado em uso nestas terras, não antes do meio do século X D.C. enquanto outros pensam que não antes do séc.XIII tenham sido de uso comum. Arquimedes (no *Arenarius*) havia estabelecido bons fundamentos de tal forma de computação como ele tem na verdade, ali e em outros lugares, a maioria desses novos melhoramentos, que mais tarde tinha idades avançadas. Embora ele não tivesse fornecido uma notação conveniente. As frações sexagemais (introduzidas por *Ptolomeu*) não supriam perfeitamente a necessidade de tal método de figuras numéricas. O uso dos numerais teve dois grandes avanços: as partes decimais, que parecem ter sido introduzidas por (*Regiomontanus*) no seu tratado *cânones trigonométricos* (1450) mas foram muito desenvolvidas no último e presente século por *Simon Stevin*, *Mr. Briggs* e cia. Sendo este preferível ao método sexagesimal de *Ptolomeu*, fazendo um uso comparativo dos dois. Por esse motivo, *Briggs*, *Gellibrand* e outros tentaram introduzi-los, mesmo nos casos onde o sistema sexagesimal ainda estava em uso. O que de certa maneira conseguiram (e mais a cada dia) e teriam conseguido absolutamente em nossa época, se as tábuas já calculadas tornassem de certa forma necessário (em parte) reter o sexagesimal. Outro avanço são os logaritmos que são de grande uso especialmente nos cálculos astronômicos e trigonométricos; introduzidos por lorde *Neper* e aperfeiçoados pelo senhor *Briggs* (no começo deste século) a base e a prática dos quais estão aqui declarados. Essas, embora não sejam

> partes da álgebra são de grande uso na sua prática. O primeiro autor publicado que trata de álgebra é *Lucas pacciolus* ou *Lucas de Burgo*, um frade franciscano do qual possuímos um tratado em italiano, impresso em Veneza (1494) pouco após a invenção da imprensa e reeditado pouco tempo depois. Esse frade *Lucas*, em seu *Summa arithmetica & geometrica* (pois ele tem outras obras existentes), possui um tratado muito completo sobre a aritmética em todas as suas partes: inteiros, frações, irracionais, binomiais; extração de raízes, quadráticas, cúbicas etc. Algumas regras de proporção, sociedade, e falsa posição (tão completo que muito pouco foi adicionado até hoje). Depois de tudo isso, a álgebra, com seus acessórios, raízes surdas, quantidades negativas, binomiais, raízes universais e o uso dos sinais, até onde as equações quadráticas alcançam, e não mais. Isso nos conta ser provindos dos árabes (a quem atribuímos este tipo de conhecimento) sem comentar Diofanto (ou qualquer outro autor grego), que parece não ter sido conhecido por aqui naquela época. Depois dele temos *Stiphelius* (um bom autor) e outros por ele citados que também não vão mais longe do que as equações quadráticas.
> Mais tarde *Scipione Del ferro, Cardano , Tartaglia* e outros resolvem algumas equações cúbicas. Bombelli vai mais longe e mostra como reduzir uma equação biquadrática a duas equações quadráticas (com o auxílio de uma cúbica). *Nonnius* ou *Nunnez*, *Ramus*, *Schonerus, Salignacus, Record, Digs* e outros como nós (ingleses) perseguiram o mesmo objetivo de forma diferentes, em sua maior parte não chegando mais longe que as equações quadráticas. Enquanto isso, *Diofanto* (primeiramente por *Xylander*) torna-se conhecido; cujo método difere do dos árabes particularmente na maneira de denominar as potências. Sem tomar conhecimento de "*Sursolids"*, usando apenas nomes como: quadrado e cubo e composições dos mesmos. Previamente apenas as quantidades desconhecidas eram simbolizadas por meio da álgebra e as conhecidas pelos numerais. O próximo passo no desenvolvimento da álgebra foi a *Aritmética Speciosa* introduzida por *Viète* em 1590, aproximadamente. A aritmética Speciosa dá notas ou símbolos (que ele chama *spectes*) tanto para as quantidades conhecidas quanto desconhecidas fornecendo-nos uma curta e prática notação, com a qual todo o processo de cálculo está ao alcance dos olhos (sem alterar a forma de demonstração). Usando isso, ele faz muitas descobertas nos processos da álgebra, antes desconhecidos. Ele também introduz sua *êxege numérica* das *equações artificiais*, extraindo suas raízes. Isto já tinha sido feito para equações simples, extração de quadrados e cubos separadamente, mas não para equações artificiais. Ao expressar as potências segue a tradição de *Diofanto* e não a provémda dos árabes, que outros usavam previamente. O método de *Viète* é seguido e muito desenvolvido por *Mr.Oughtred* no seu *Clavis* (publicado originalmente em 1631) e outros de seus tratados. Ele faz um breve compendio do método, declarando resumidamente o conteúdo dos volumes maiores: a essência de toda (ou a maior parte da) antiga geometria. Assim, tenho aqui inserido um texto bastante completo sobre seu método junto com uma instituição para a prática da álgebra de acordo com ele. E embora muito disso já tenha sido explanado pelos autores acima mencionados, ainda assim julgo o lugar mais próprio para inserir tal instituição, pois esta foi transmitida por eles na sua forma resumida. (Wallis, 1685, Prefácio ao Leitor)

Essa "linha de tempo" traçada é desenvolvida até o capítulo quatorze do Tratado de álgebra e mostra as qualidades e defeitos de Wallis como historiador. Em particular, Wallis acredita que a álgebra estava em uso entre os gregos e ainda reconhece o papel da Espanha nas traduções e adaptações dos textos clássicos. Outra curiosidade é que ele parece não conhecer o texto de Fibonacci (1202), atribuindo à Lucas de Burgo a prioridade de um texto de álgebra europeu, mas no capítulo XIII ele atribui ao livro de Leonardo o ano de 1400, novamente incorrendo em um erro.

CAPÍTULO 2

A “ARTE ANALÍTICA”: VIÈTE, DESCARTES E HARRIOT

Raramente o trabalho de um matemático representa uma real ruptura com as tradições vigentes em seu tempo. No século XVI, Viète inseriu-se neste “contingente de raridades”. Neste ponto do trabalho, apresentamos resumidamente algumas inovações deste autor que esperamos nos permitam exibir as diferentes diretrizes tomadas por alguns de seus seguidores continentais e britânicos de nosso interesse (principalmente Descartes e Harriot). Em seguida, analisaremos o suposto plágio de Descartes em relação a Harriot (uma recorrente afirmação de Wallis em seu livro). Para um comentário em português mais detalhado sobre a *Introdução à Arte Analítica* de Viète (Juntamente com a tradução da *Isagoge e dos cinco livros das Zetéticas*) o leitor pode ler a dissertaçao de mestrado de Corrêa[15], de 2008.

2.1 Viète

No livro *Introdução à Arte Analítica* (1591) ou *Isagoge*, o estudioso eleva o status da álgebra trabalhando com um alto grau de generalidade, substituindo os símbolos e abreviações que eram de uso comum na linguagem da álgebra. O simbolismo de Viète aparece depois de séculos de experiências com a linguagem algébrica. Influenciado pelo trabalho de Diofanto, Viète aumenta o grau de abstração no pensamento algébrico, concebendo e divulgando a ideia de uma “matemática universal”. Foi o primeiro a defender a álgebra como sendo o método mais adequado para a análise tanto de problemas geométricos quanto aritméticos, entendendo-as como grandezas abstratas. Logo, a *logística speciosa* de Viète seria a ferramenta mais adequada para tais procedimentos. Visando a legitimação dos processos algébricos, Viète

---

[15] Corrêa, Bruna Moustapha, 2008, pelo programa de pós- graduação em educação Matemática da UFRJ. Disponível em:< http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/dissertacoes.htm>. Acesso em: 12set2009.

diferenciou sua álgebra da geometria afirmando que se tratava de uma maneira "completamente nova" de pensar, batizando-a de "arte analítica". A nova arte adotava um método e justificativas próprias, aplicando a análise de Platão (que aprendera de textos de Pappus, recém redescobertos na época, contexto puramente geométrico), à técnica de Diofanto, que procurava soluções de problemas aritméticos operando com quantidades desconhecidas como se fossem conhecidas.

O próprio método da "análise" foi redefinido por Viète como tendo três fases: zetética, porística e exegética. Para os gregos, a análise era um método exclusivo da Geometria, mas Viète estendeu o método da análise para a álgebra e concebeu a análise algébrica. Procurando em sua arte seguir o modelo euclidiano de exatidão, Viète ainda mantém uma terminologia extremamente geométrica, sobretudo ao tratar das potências, ponto chave para se obter algoritmos eficientes na resolução de equações. A exigência de *"homogeneidade"* o fez descartar completamente as soluções negativas (pois encarava as quantidades como "lados") e, embora mantenha estas quantidades como passos intermediários em seus algoritmos, não há na *Isagoge* nenhuma discussão sobre a natureza desses números, mencionando apenas que eles resultam de subtrações impossíveis.

Ainda assim, podemos encarar o trabalho de Viète como a primeira convergência bem sucedida de concepções algébricas e geométricas. Para CORRÊA (2008):

> Os tratados de Al-Khwarizmi e Al-Khayyam propagaram-se pela Europa no início da Renascença, divulgando a sua utilidade. A álgebra era, portanto, utilizada por alguns matemáticos contemporâneos de Viète. Entretanto, esta utilização era fragmentada e não seguia um padrão unificado. Os tratados árabes, apesar de fornecerem poderosas ferramentas para a resolução de problemas matemáticos, não eram considerados como parte dos cânones gregos. Eles não eram apresentados na forma axiomático-dedutiva dos elementos de Euclides que, como vimos anteriormente, representava [sic] o padrão de exatidão vigente na época. É justamente aqui que se encontra a grande inovação de Viète: buscando usar a ferramenta analítica para resolver qualquer tipo de problema, Viète fez da álgebra uma ciência nos moldes gregos, apresentando-a de maneira axiomática (CORRÊA, 2008 p.54)

2.1.1 Formalização da "nova álgebra"

A postura de Viète diante da matemática pode ser esclarecida mediante uma comparação com outro influente matemático da época, Cardano:

> Cardano era basicamente um explorador da álgebra. Era inclinado a deixar os problemas ditarem o desenvolvimento do assunto. Viète era mais como um pensador filosófico. Queria lidar com as regras da arte analítica antes, e apenas então mover-se para suas aplicações (...) para Viète as regras delimitam os resultados, enquanto que para Cardano, os resultados podem levar a uma expansão das regras. (PYCIOR, 1997, p.38)

O papel da álgebra para Viète é mais bem esclarecido por Bos:

> Viète não via a álgebra, que seria a ferramenta essencial da sua análise, como uma técnica concernindo números, mas como um cálculo simbólico concernindo grandezas abstratas. Ao elaborar esta concepção, ele criou procedimentos simbólicos de cálculo que se aplicavam a grandezas independentemente de sua natureza (número, grandeza geométrica ou outra- note que ele considerava o número como um tipo de grandeza). Com este propósito, ele introduziu letras para simbolizar grandezas indeterminadas, bem como grandezas desconhecidas. Apesar de letras para simbolizar grandezas indeterminadas serem comuns na geometria e já terem sido usadas ocasionalmente na aritmética (sobretudo por Jordanus), Viète foi o primeiro a empregá-las para simbolizar grandezas indeterminadas genéricas. Esse não foi um passo evidente, pois levantou a questão do status e da natureza destas grandezas indeterminadas genéricas e das operações realizadas com elas. [...] Na sua 'nova álgebra', entidades matemáticas como números, segmentos de reta, figuras etc., sejam conhecidas, desconhecidas ou indeterminadas, eram consideradas somente no aspecto de serem grandezas, abstraindo a sua verdadeira natureza. Viète falava de grandezas 'em espécie', em forma ou em tipo, chamando sua nova álgebra de 'cálculo a respeito de formas', ou 'a respeito de espécies': também usou o termo 'logística speciosa' [...] Assim, a sua logística speciosa lidava com grandezas abstratas simbolicamente representadas por letras. (BOS, 2001, p.147, tradução de Corrêa).

Dessa forma, pela primeira vez intencionava-se criar um sistema formal e axiomático no qual a álgebra teria uma estrutura análoga aos elementos de Euclides, cumprindo o padrão de exatidão da época. Cardano e Viète definiram duas posturas sob as quais os algebristas posteriores podem de certa forma ser classificados:

> De certa maneira, Cardano e Viète serviram como modelos para dois tipos básicos de algebristas posteriores: exploradores algébricos cuja preocupação principal eram os resultados, e algebristas filosóficos cujas preocupações sobre os fundamentos muitas vezes atrapalharam sua participação plena na álgebra de suas gerações (PYCIOR, 1997 p.39).

Dada a influência de Viète, me parece exagerada a afirmação de Pycior de que este serviu de modelo para uma classe de matemáticos que não "participaram plenamente" da álgebra de sua época por terem "uma preocupação de ordem puramente teórica e epistemológica", não sendo, consequentemente, capazes de desenvolver de forma plena e prática seu potencial na ciência. Todavia, apesar desta crítica à autora em questão, de fato é coerente afirmar que, até um certo ponto, os matemáticos filosóficos são limitados pela sua própria Filosofia (como, por exemplo, Descartes). Algumas regras de Viète realmente limitaram o universo de respostas aceitáveis em sua matemática:

> As regras II e III de Viète[16] definiram os limites de seu uso dos "termos negativos". A regra II assegura que as subtrações impossíveis, geradoras de números negativos não fazem parte da arte analítica. A regra III permite números negativos e estabelece a regra de sinais, mas apenas quando estes são coeficientes de um polinômio. Correspondentemente, limitou os exemplos da Arte Analítica quase completamente às equações com raízes positivas, evitando qualquer discussão sobre raízes negativas (PYCIOR, 1997, p.38).

Poderíamos concordar que, não havendo tais limitações, talvez o grau de avanço de Viète fosse maior, embora certamente sua colaboração possa ser considerada "plena". Sua forma de exibição torna clara sua opinião sobre o papel de sua álgebra, o que permite uma melhor reflexão sobre quais de suas regras podem ser expandidas ou modificadas, embora poucos matemáticos tivessem esta preocupação. Também é interessante citar que avaliaremos as primeiras reações à geometria de Descartes considerando que, num primeiro momento, a maioria de seus seguidores ignorou o conteúdo filosófico de *La geometrie* e concentrou-se nos resultados matemáticos providos nesta obra. Isso nos leva a acreditar que, embora presentes, os "algebristas filosóficos" ainda eram minoria em relação aos "exploradores algébricos" no século XVII.

2.1.2 Axiomas e preceitos sobre as operações.

Reproduzo aqui partes dos Capítulos II e III da *Isagoge*, segundo a tradução de Corrêa, 2008, p.91-97, com as notas de rodapé da autora.[17]

---

[16] Da logística speciosa, cap.IV, Isagoge.

[17] O uso do termo "grandeza" se refere às grandezas abstratas como estabelecido na Introdução.

O Capítulo II trata dos símbolos, das equações e das proporções. Viète admitindo como demonstradas, as proposições mais conhecidas das igualdades e proporções que se encontram nos *Elementos*:

1. Que o todo é igual às suas partes.
2. Que coisas iguais a uma mesma são iguais entre si.
3. Que se coisas iguais são acrescentadas a coisas iguais, então os todos são iguais.
4. Que se coisas iguais são retiradas de coisas iguais, então os restos são iguais.
5. Que se multiplica coisas iguais por coisas iguais, então os produtos são iguais.
6. Que se divide coisas iguais por coisas iguais, então os quocientes são iguais.
7. Que se quaisquer coisas são diretamente proporcionais, então são proporcionais ao contrário e vice-versa.
8. Que se coisas proporcionais semelhantes[18] são acrescentadas a coisas proporcionais semelhantes, então os todos são proporcionais.
9. Que se coisas proporcionais semelhantes são retiradas de coisas proporcionais semelhantes, então os restos são proporcionais.
10. Que se multiplica coisas proporcionais por coisas proporcionais, então os produtos são coisas proporcionais.
11. Que se divide coisas proporcionais por coisas proporcionais, então os quocientes são proporcionais.
12. Que a igualdade ou razão definitivamente não é modificada por uma multiplicação ou divisão comum [de seus termos].
13. Que aquilo que se faz com todos os segmentos é igual ao que se faz através de todos. [19]
14. Que aquilo que se faz sucessivamente através de quaisquer grandezas, ou provém da Divisão sucessiva delas é igual a qualquer ordem que elas têm na multiplicação ou divisão.[20]

O principal símbolo[21] das igualdades e proporções que é de grande importância durante toda a Análise é este aqui:

---

[18] Viète chama de *proporções semelhantes* às proporções cujo resultado é o mesmo. (Revista François VIÈTEQUE CITAÇÃO É ESTA?).

[19] O produto de diferentes partes por um mesmo número é igual ao produto da soma das partes pelo número (Revista François VIÈTE). O retângulo ou produto feito através de uma grandeza e as partes de um todo é igual ao retângulo através desta mesma grandeza e o todo. (WITMER, 1983).

[20] Multiplicações sucessivas de grandezas e divisões sucessivas de grandezas produzem o mesmo resultado independente da ordem na qual a multiplicação ou divisão dos termos é feita. (WITMER, 1983).

[21] Viète frequentemente usa esta propriedade fundamental das proporções: transformar as proporções em igualdade e vice-versa (Revista François VIÈTE).

15. Que se existem três ou quatro grandezas e que se o produto dos extremos é igual ao Produto do meio pelo meio, ou dos meios, então as grandezas são proporcionais. E contrariamente.

16. Que se existem três ou quatro grandezas e que se existe a mesma razão da primeira Para a segunda, e da segunda para a terceira, ou da terceira para a quarta, então aquilo que se obtém através dos extremos será igual aquilo que se obtém através dos meios. Portanto, a proporção pode ser dita "estabelecida da igualdade" e a igualdade a "resolução da proporção".

O terceiro Capítulo trata da lei dos Homogêneos, dos graus e gêneros e das grandezas comparadas:

> Os Homogêneos se comparam aos Homogêneos (...) porque, como dizia Adrastus: não se sabe como os heterogêneos se comportam entre si. Tanto que: se uma grandeza é acrescentada a uma grandeza, ela lhe é Homogênea. Se uma grandeza é retirada de uma grandeza, ela lhe é Homogênea. Se uma grandeza é multiplicada por uma grandeza, aquela que é o produto será Heterogênea a todas as duas. Se uma grandeza é aplicada [22] a outra grandeza, aquela que retorna é Heterogênea a todas as duas. (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p.92)

Viète se mostra seguro da superioridade de seu método em relação à análise tradicional: "Muito da névoa e obscuridade da análise dos anciãos foi causada pela negligência às regras a seguir: as grandezas que aumentam e diminuem proporcionalmente de gênero em gênero chamam-se escalas." (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p.93).

Neste ponto Viète exibe em sequência crescente as denominações das potências (graus) em sua nomeclatura: O *lado* ou a *raiz*, *quadrado, cubo, quadrado, quadrado cubo, cubo cubo, quadrado quadrado cubo, quadrado cubo cubo, cubo cubo cubo* e a partir daí espera do leitor a capacidade de estender essa ideia para escalas superiores. A cada escala corresponde em mesma ordem um gênero: *Comprimento* ou *largura*, *plano*, *sólido, plano plano, plano sólido, sólido sólido, plano plano sólido, plano sólido sólido, sólido sólido sólido.* Novamente é deixada a cargo do leitor a generalização.

Sobre o conceito de potência:

---

[22] Aplicar: o gênero do quociente é heterogêneo ao gênero da grandeza aplicada. A aplicação do plano por um comprimento dá outro comprimento que não é homogêneo com o plano.

> O grau ao qual a grandeza comparada substitui a partir do lado ou comprimento, na seqüência de graus escalares, se chama potência. Todos os outros graus inferiores se chamam graus paradoxos, ou graus que servem de passagem. A potência é pura quando ela é livre de todas as nomeações. A potência nomeada é aquela que se encontra associada a um Homogêneo através do grau paradoxo da potência e de uma grandeza coeficiente emprestada. As grandezas emprestadas através daquelas e através de um grau paradoxo é feita qualquer coisa Homogênea à potência, e aquilo que afeta a mesma potência, se chama subgradual. (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p.93).

No Capítulo IV Viète trata das regras e preceitos da Logística Speciosa: "A Logística Numerosa é aquela que é praticada pelos números. E a Speciosa é aquela que é praticada pelas espécies ou formas, como por exemplo, as letras do alfabeto. Os preceitos ou regras da Logística Speciosa são quatro, assim como na numerosa." (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p.94).

Viète define para as espécies regras em analogia com a Aritmética, carregando o peso de satisfazer a sua exigência de homogeneidade. A primeira regra trata da adição e estabelece o símbolo +. Novamente, como em Pycior, as regras II e III definiram os limites de seu uso dos "termos negativos" A regra II assegura que as subtrações impossíveis, geradoras de números negativos não fazem parte da arte analítica. A regra III permite números negativos e estabelece a regra de sinais, mas apenas quando estes são coeficientes de um polinômio.

Regra II: *"*Subtrair uma grandeza de uma grandeza"

> (...) a [grandeza] menor será comodamente subtraída da maior por meio da fórmula de separação ou subtração e serão indicadas pela diferença A menos B, se são simples comprimentos ou larguras.Mas se elas aumentam de acordo com a escala, ou se elas se comunicam em gênero, elas serão designadas pela denominação conveniente. Por exemplo, A quadrado menos B plano ou A cubo menos B sólido, e da mesma maneira para as outras. A operação não se exerce de outra maneira se a grandeza que se faz subtrair já é nomeada, o todo e suas partes não devem ser estimados com regras diferentes. Como se de A fosse preciso subtrair B mais D. O resto será A menos B menos D, subtraindo as grandezas B e D separadamente. Mas se D está perto de B e se é preciso subtrair B menos D de A, o resto será A menos B mais D, subtraindo a grandeza B subtrai-se mais do que era preciso, portanto, é preciso recompensar pela adição daquela grandeza. (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p.94).

Ainda na segunda regra, estabelece o símbolo – para a subtração (como Diofanto) e ainda estabelece que quando não se tem certeza de qual das duas grandezas é a maior a subtração "incerta" é simbolizada com um duplo sinal de igualdade "= =".

Regra III: "Multiplicar uma grandeza por outra"

> Uma vez que é preciso multiplicar uma grandeza por outra grandeza, elas produzirão pela sua multiplicação uma grandeza que lhes será Heterogênea, é dita de diversos gêneros e, portanto, aquela que será o produto será comodamente indicada pela palavra por ou através de como A por B ou como qualquer outra que se desejar agregar que tal grandeza é feita através de A e B, isso se A e B são simples comprimentos ou larguras. Mas se elas aumentam seguindo a escala ou se elas se comunicam em gênero às quantidades que aumentam de acordo com elas, é preciso colocar as denominações das grandezas escalares ou daquelas que se comunicam em gênero (...). (VIÈTE apud CORRÊA, 2008 p. 95).

Nesse ponto, fica claro, pelos exemplos providos, que a notação de potências de Viète é aditiva: *"O lado pelo quadrado faz o cubo"* ou *"O lado pelo quadrado quadrado faz o quadrado cubo"* e ainda *"O quadrado pelo quadrado quadrado faz o cubo cubo."*

> E quando o nome de uma grandeza que é positiva for multiplicado pelo nome de outra grandeza também positiva, o que for produzido também será positivo, e aquilo que for multiplicado por uma que é negativa será negativo (...) Como conseqüência desta regra, é preciso que o produto pela multiplicação mútua dos nomes afetados de negação seja positivo, como quando A–B for multiplicado por D–G. Tanto que o que provém de A que é positivo por G. que é negativo, permanece negativo, que é muito negado ou diminuído, pois a grandeza A. que deve ser multiplicada não é absolutamente inteira. A mesma coisa acontece com o que provém da multiplicação de B que é afetada de negação por D positivo permanece negativo, que é de novo muito negada, ou diminuída, pois a grandeza D que deve ser multiplicada não é absolutamente inteira; portanto, em recompensa, uma vez que B afetado pelo negativo é multiplicado por G afetado pelo negativo o que eles produzem é positivo. (VIÈTE apud CORRÊA, 2008 p. 95).

A regra de sinais é estabelecida para as "quantidades compostas" A-B e D-G, indicando que os números negativos ainda não tinham representatividade por si só, mas unicamente como resultado de uma operação. A quarta regra trata das aplicações entre grandezas:

Regra IV: "Aplicar uma grandeza a uma outra grandeza". Aplicar seria segundo Viète:

> Sejam duas grandezas, a saber, A e B. É preciso aplicar uma à outra. Uma vez que é preciso aplicar uma outra grandeza, e que os Homogêneos são aplicados aos Heterogêneos, a mais alta a mais baixa, as grandezas propostas são Heterogêneas. Seja, então, A um comprimento, B um plano, portanto, traça-se uma pequena linha entre B plano, a mais alta, e A a mais baixa, que é esta aquela que se fará a aplicação. Mas estas grandezas serão denominadas pelos graus que lhes conservam ou aqueles que são fixados em escala dos proporcionais ou Homogêneos. Por exemplo, [B plano/A] para aquela que marca a largura que se obtém da aplicação de B plano pelo comprimento A. Que se enuncia que B sendo cubo, A plano, por [B cubo/ A plano] irá causar a largura que vem da aplicação de B cubo a A plano. E se enuncia que B sendo cubo, A comprimento por [B cubo/A] representará o plano que resulta da aplicação de B cubo a A e assim sucessivamente. O mesmo se obterá com as grandezas de dois ou mais nomes. (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p.96).[23]

[23] O escrito entre parêndissertaçaos não está diagramado exatamente como no original sendo este a barra de fração usual.

Aplicar, segundo Viète, é de certa maneira, um equivalente da divisão, no sentido da geometria grega. Como exemplos, Viète fornece dentre outros: *"*O quadrado aplicado ao lado produz o lado" ou "O quadrado cubo aplicado ao lado produz o quadrado quadrado*"*.

Essa notação é extremamente penosa e realmente representa um passo atrás na evolução simbólica da álgebra, pois quando Bombelli e depois Simon Stevin seguiram o tratamento de Cardano das equações cúbicas e de quarto grau, adotaram um sistema em que as potências da quantidade desconhecida ficavam dentro de círculos, uma notação não ambígua em equações com uma indeterminada. Aparentemente Viète ignorou este avanço. Completados estes quatro preceitos, o papel da operação de "aplicação" tem sua importância especificada:

> De resto, sendo adição ou subtração de grandezas, multiplicação ou divisão, a aplicação não impede que as regras especificadas anteriormente não tenham lugar, visto que na aplicação uma grandeza, tanto aquela que é mais alta quanto a que é mais baixa, pode ser multiplicada por uma mesma grandeza, por meio desta operação nada é somado ou subtraído ao gênero, ou ao valor da grandeza da aplicação, uma vez que o que a multiplicação adicionou, a aplicação retira ao mesmo tempo. (VIÈTE apud CORRÊA, 2008, p.97).

Quanto à validade destes procedimentos, Bos afirma:

> Uma vez que considerava grandezas abstratas, Viète podia, obviamente, não especificar como a multiplicação (ou qualquer outra operação) era realmente efetuada, mas apenas como era representada simbolicamente. Assim, a parte 'speciosa' de sua nova álgebra era, de fato, um sistema formal completamente abstrato definido implicitamente por suposições básicas sobre grandezas, dimensões e escalas [...] e por axiomas envolvendo as operações. As operações eram adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raiz e a formação de razões. (BOS, 2001, p.148). [24]

---

[24] While considering abstract grandezas Viète could obviously not specify how a multiplication (or any other operation) was actually performed but only how it was symbolically represented. Thereby the "specious" part of his new álgebra was indeed a fully abstract formal system implicitly defined by basic assumptions about grandezas, dimensions and scales (…) and by axioms concerning the operations (BOS, 2001, p.148).

2.1.3 Notação de Viète

Quanto à simbologia, a maior inovação da abordagem de Viète é a utilização de símbolos tanto para as quantidades conhecidas quanto para as desconhecidas, mantendo ambos com o mesmo status, além da introdução das indeterminadas. Sua notação ofereceu um "híbrido" do estilo sincopado e simbólico que foi desenvolvido de forma diferente por outros matemáticos (como Harriot e Descartes). Para as indeterminadas, fez uso das vogais maiúsculas A, E, I, O, U, e para as quantidades determinadas as demais letras do alfabeto. O problema a seguir, extraído do livro *Cinco livros da Zetética* (VIÈTE apud CORRÊA, 2008), ilustra de maneira mais objetiva o novo método de Viète. É válido mencionar que na obra em questão Viète revisita alguns problemas de Diofanto.

Zetética primeira[25]: Dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontrar os lados.

Solução (Viète): A diferença dada de dois lados sendo B, e o agregado dos lados sendo D, encontrar os lados. O menor lado sendo A, portanto, o grande será A+B, e o agregado dos lados 2A+B, como o agregado é dado, a saber, D; é porque 2A+B sendo igual a D; e pela antídissertaçao 2A será igual a D–B. E todas as quantidades se reduzem à metade, A será igual à metade de D menos a metade de B. Ou seja, o lado maior sendo E, o menor será E–B, e o agregado dos lados 2E–B, como o agregado é dado, a saber, D; é porque 2E–B sendo igual a D. E pela antítese 2E sendo igual à D+B, e todas as quantidades estando reduzidas à metade, E será igual à metade de D mais a metade de B. Portanto, dada a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontram-se os lados. Pois *se subtrairmos a metade da diferença da metade do agregado dos lados, o que resta será igual ao menor lado; E se adicionarmos o total, será igual ao maior lado.*

Em linguagem moderna: Sejam B, a diferença entre os lados procurados e D, a soma deles. Se chamarmos de A o menor lado, então A + B será o maior lado e, portanto, a soma será 2A + B. Assim, 2A + B = D e pela antídissertaçao, 2A = D – B. Donde temos que $A = 1/2D - 1/2B$. Por outro lado, se chamarmos de E o maior lado, então o menor lado será $E - B$ e, portanto, $2E - B$ será a soma dos lados. Logo, $2E - B = D$ e pela antídissertaçao, $2E = D +$

---

[25] A partir daqui modernizamos o sinal de igual.

B. Portanto, $E = 1/2D + 1/2B$. Assim, subtraindo da metade da soma dos lados (a diferença entre eles) encontramos o menor lado; e somando a este resultado a diferença, encontramos o maior lado.

O mesmo problema está em Pycior com menos detalhes. O autor comenta:

> Assim, Viète chega a uma resposta sem olhar casos particulares. Encontrou uma fórmula para determinar quaisquer números, dadas a sua soma e diferença (...) sua mensagem era que um matemático munido das indeterminadas pode primeiro provar um resultado geral e depois aplicar a casos relevantes. (Pycior, 1997, p.29-30).

A notação de Viète não era essencial para a solução de alguns problemas (Cardano e outros de seus antecessores já tinham resolvido problemas mais complexos), mas sua abordagem difere do procedimento retórico pois, através deste, uma generalização surge após inúmeras tentativas em casos particulares. A logística speciosa permitiu unificar o estudo de equações obtendo fórmulas gerais.

> A logística de Viète lançou as bases da moderna teoria de equações não apenas por facilitar soluções gerais, mas também moveu o olhar dos matemáticos para a estrutura das equações. O novo simbolismo parece ter focado os olhos e mentes dos matemáticos nas relações existentes entre as raízes com os coeficientes das equações. (PYCIOR, 1997, p. 30).

Confirmando essa afirmação, Pycior acrescenta que o próprio Viète se perguntava retoricamente: "Tentará um analista [a solução] de qualquer equação proposta sem entender como ela é composta, de modo que possa evitar as rochas e penhascos? (VIÈTE apud PYCIOR, 1997, p.30)".[26]

Mais concretamente cita o primeiro teorema do *Two treatises on the understanting and Amendment of equations,* a saber: "Se A *quadratum* + B *in* A = Z *quadratum*, existem três proporcionais cujo meio é Z, a diferença entre os extremos é B e A é o menor extremo", o que em linguagem moderna seria: "Dada a equação $x^2 + bx = c$ vale a relação $x + b : \sqrt{c} :: \sqrt{c} : x$", uma relação explícita entre os coeficientes e raízes de uma equação, em termos de razões. Esta foi a forma padrão adotada por Viète, cuja abordagem difere de Harriot e Descartes que, coincidentemente ou não, baseavam suas conclusões em fatoração.

---

[26] "Will an analyst attempt [the solution of] any proposed equation without understanding how it is composed so that He can avoid the rocks and crags? (PYCIOR, 1997, p.30)".

2.1.4 A análise de Viète

Segundo Pycior, Pappus delimitava duas formas de análise: a Zetética (análise para provar teoremas) e a Porística (análise em resolução de problemas). Viète redefiniu a análise como possuindo três estágios:

> i) Zetética: “Onde se obtém uma equação ou proporção envolvendo as quantidades desconhecidas e aquelas que são dadas”. As grandezas são consideradas quanto ao seu caráter abstrato.
>
> ii) Porística: “Onde a veracidade do teorema é testada por uma equação ou proporção”. De fato, a interpretação de “Porística”, segundo Bos, é difícil, pois as seções relevantes na arte analítica admitem várias traduções e interpretações embora se possa admitir que compreenda a fase intermediária do processo analítico, das técnicas para transformar igualdades e proporções, as quais Viète apresenta independentemente de sua natureza.
>
> iii) Exegética ou rética: “Onde o valor da quantidade desconhecida é determinado”. Nada mais que retirar a solução algébrica ou geométrica das equações fornecidas pela Zetética ou, em suas formas mais simples, pela Porística.

Logo, a teoria de equações se torna, em Viète, o método pelo qual se deve executar a análise. O próprio autor afirma: “Finalmente a arte analítica, dotada, finalmente, de três formas: zetética, porística e exegética, reivindica para si o maior problema de todos, que é resolver todos os problemas” [27]

A logística especiosa lidava com grandezas abstratas. Claramente, era mais do que simples álgebra e seu elevado grau de aplicabilidade foi suficiente para manter o interesse na teoria de equações. Analistas como Descartes e Fermat exploraram as conexões da nova arte com a geometria, e divulgaram tanto soluções algébricas para problemas geométricos quanto soluções geométricas para problemas algébricos. Dessa forma, o legado de Viète não foi uma álgebra independente da geometria, mas o embrião que outros autores utilizariam para desenvolver uma matemática nunca antes imaginada. Descartes usara as técnicas de Viète (quase 40 anos após Viète publicar sua nova álgebra) para desenvolver as bases de sua

[27] “Denique fastuosum problema problematum ars analytice, triplicem zetetices, poristices et exegetices formam tandem induta, jure sibi adrogat, quod est nulum non problema solvere” (VIÈTE, 1591 p.12).

geometria (uma “geometria analítica”), tendo como foco as construções geométricas. Harriot e muitos de seus seguidores britânicos não buscaram mais na geometria a legitimação para a álgebra e a desenvolveram de maneira altamente simbólica. De toda forma, após Viète, nenhuma “análise” seria mais a mesma.

2.2 Thomas Harriot

No livro *A Grande Invenção da Álgebra* [28], Stedall organizou o trabalho de Harriot em sua forma original, compilando cerca de 140 páginas de seus manuscritos seguindo a descrição do trabalho contida em uma carta de protesto de Nathaniel Torpoley (1564-1632), intitulada *Corrector analyticus artis posthumae Thomae Harrioti* [29]. No texto em questão é deixado claro que o *Artis analyticae praxis*, livro póstumo publicado em 1631, perverte completamente o “tratado em equações” original, de tal forma que não é possível entender completamente as concepções contidas na álgebra de Harriot. Dada a importância de tal trabalho para a minha pesquisa, a seguir traduzo partes interessantes da introdução do livro, onde Stedall descreve a vida, o trabalho e a relação de Harriot com outros matemáticos ingleses e continentais (inclusive Viète) e sua influência póstuma. Este relato se baseia nas seções I, II e III do livro e a equivalência de seções fica entre parênteses.

2.2.1 O Tratado sobre Equações. (Seção I)

Thomas Harriot (1560-1621) foi um pensador inovador e praticante de algumas vertentes das ciências matemáticas: Navegação, Astronomia, Ótica, Geometria e Álgebra. Nada se sabe de sua formação científica inicial. Seu registro na universidade de Oxford data de 1577 e sugere que ele nasceu em torno de 1560. Este registro também implica que ele já vivia em Oxford e que morava na St. Mary’s Hall, esta afiliada ao Oriel’s College. Algum

---

[28] *The great invention of Algebra*, sem tradução para português.
[29] Uma correção analítica do trabalho póstumo de Thomas Harriot.

tempo depois de sua graduação, foi contratado por Walter Raleigh[30] como navegador e cientista.

Nunca publicou nenhuma de suas conclusões matemáticas e científicas. Quando faleceu, deixou mais de 400 folhas (manuscritas) com observações, cálculos e diagramas. A variedade do conteúdo e a desordem dos papéis venceram todas as tentativas posteriores de publicação. Sua única publicação é *A brief and true report of the new found land of Virgínia* (1588), resultado de seu trabalho como navegador e cientista em uma expedição à América do Norte (1585-1586). O livro *Artis analyticae praxis* (ou simplesmente *Praxis*) foi publicado pelos executores do testamento de Harriot, como veremos a seguir.

Sua reputação como matemático se estabeleceu nos anos seguintes à sua volta para a Inglaterra. No início dos anos 1590, Harriot foi apadrinhado por Sir Henry Percy, o nono conde de Nothumberland, beneficio que durou por toda sua vida. O conde permaneceu aprisionado na Torre de Londres de 1605 a 1621, sob suspeita de participar da "conspiração da pólvora" [31], da qual seu primo Thomas Percy era um dos líderes. Mesmo durante esse período, o conde manteve Harriot em sua casa em Londres (casa Syon, em Isleworth, middlesex).

A maioria dos colegas cientistas de Harriot eram de alguma forma agregados do conde. Walter Warner (1557-1643) era zelador da biblioteca de Sir Percy e de seus instrumentos científicos enquanto Robert Hues (1553- 1632), amigo de Harriot desde seus tempos em Oxford, se tornou em 1615, tutor dos filhos do nobre. Harriot discutiu álgebra, ótica e astronomia com William Lower (1570-1615), zelador das terras galesas de Percy, e fez observações astronômicas com seu sucessor John Protheroe (1582- 1624). Através de Protheroe conheceu Thomas Aylesbury (1580-1657).

---

[30] Walter Raleigh (1552-1618) foi um explorador membro da corte de Elizabeth I. Ganhou favores da rainha depois de ajudar a suprimir uma revolta na Irlanda e foi nomeado cavaleiro. Logo após se tornou membro do parlamento. Fundou a primeira colônia inglesa na ilha Roanoke (atualmente na Carolina do norte) em 1585, que acabou por ser um fracasso. Escreveu o primeiro volume de sua "História do mundo" em 1614 enquanto estava preso na torre de Londres por "conspirar" contra o sucessor de Elizabeth I, o rei James I. Em 1616 foi libertado para liderar uma segunda expedição ao EL-DORADO (a lendária cidade de ouro que se acreditava ficar no norte da atual Venezuela). A expedição fracassou e Raleigh foi executado em 1618 por contrariar as ordens do rei de não atacar os espanhóis durante esta viagem.

[31] A Conspiração da Pólvora de 1605 foi uma tentativa frustrada de assassinato contra o rei James I da Inglaterra (e VI da Escócia) por um grupo de católicos provincianos ingleses, liderada por Robert Catesby. O plano era explodir a Câmara dos Lordes durante a abertura do Parlamento em 5 de Novembro de 1605, e seria o prelúdio de uma revolta popular na região central durante a qual a princesa de nove anos de idade, Elizabeth, seria declarada a chefe de estado, visando, retornar a Inglaterra ao seu passado católico.

Outro companheiro intelectual de Harriot foi Nathaniel Torpoley (1564-1632), que se graduou em Oxford quatro anos após Harriot. Não se sabe quando eles se conheceram, mas ambos eram interessados em matemática. Torpoley escreveu para Harriot na véspera de seu primeiro encontro com Viète em Paris, a quem ele se referiu como "Apolônio Francês".

> Estou juntando meu arruinado juízo, para melhor encontrar aquele Apolônio Francês: Se a sorte quer que sua cortesia pela minha ousadia afete nossa conferência, amanhã sendo o dia, quando eu for apresentado pela sua editora, como um pequeno Zacheus prestes a subir a árvore, para ganhar uma visão deste renomado analista. O que depois se seguir na [sua presença] espero em breve relatar[32] (TORPOLEY apud STEDALL, 2003, p.4).

Torpoley se tornou um amanuensis[33] de Viète. É quase certo que, através de Torpoley, Harriot adquiriu seu profundo conhecimento da matemática de Viète. Há, por exemplo, entre seus papéis, uma página intitulada "Uma proposição de Viète entregue pelo senhor Torpoley", além de várias outras referências à matemática de Viète nos manuscritos de Harriot. Quanto a Harriot, pode-se dizer que a sua matemática tomou por base a de Viète.

A afirmação de Viète de que a arte analítica não deixaria nenhum problema sem solução implica que toda análise algébrica deveria ser levada até sua conclusão, o que por sua vez significa resolver quaisquer equações algébricas que possam surgir. Viète lidou com as técnicas de soluções de equações em dois tratados, um prático e outro teórico. O texto teórico *De aequationem recognitone et emendatione tractatus duo* trata de técnicas padrão para resolver equações de grau inferior à cinco, não publicado até 1615, embora tenha sido escrito no inicio dos anos 1590. É bem provável que parte desse material tenha chegado a Harriot antes de sua publicação através de Torpoley. O tratado prático *De numerosa potestatum ad exegin resolutione* (1600) lidava com métodos numéricos para soluções de equações, a primeira exposição na Europa dos algoritmos desenvolvidos pelos matemáticos islâmicos do século XII. Tais princípios já eram certamente conhecidos de Viète em 1591. Harriot estudou o conteúdo deste livro em detalhes como fez com o *Isagoge* (1591). Mais importante:

---

[32] "I am gathering up my ruined wittes, the better to encounter that French Apollon: If it fortune that either his courtsie on my boldnes effecte our conference; tomorrow being the daye, when I am appoynted by his printer, as a little Zacheus to climbe the tree, to gayne a view of that renoumned analyst. What after followes in [his] presence I hope shortly to relate… " (STEDALL apud TORPOLEY, 2003 p.4).

[33] A tradução mais próxima que encontrei foi como secretário. Embora o termo no original implique um ajudante de certa natureza cujo o desconhecimento de um determinado assunto é pressuposto e o qual deve aprender durante sua atividade auxiliando o mestre.

explorou por si próprio os conceitos subjacentes ao método de Viète e assim desenvolveu um tratamento próprio da estrutura e solução das equações polinomiais.

O tratado reescrito por Stedall é renomeado como "Tratado sobre equações", redigido pela primeira vez em sua forma original em 2003. O texto original não é datado, mas provavelmente foi escrito próximo ao ano 1600, visto que algumas seções provémm do *De potestatum resolutione,* embora outras seções devam ter sido escritas bem antes. Este deve ter sido o texto ao qual William Lower se referiu quando lamentou a incapacidade de Harriot de publicar a sua "Grande invenção da álgebra":

> Então, você me ensinou o caminho curioso para observar o peso na água, e pouco tempo depois Ghetaldi sai com ele na imprensa. Um pouco antes, Vieta [sic] mostrou o caminho para a grande invenção da álgebra. Todos estes foram seus feitos e muitos outros que eu poderia mencionar, e, entretanto tão grande recato tem roubado você dessas glórias (LOWER apud STEDALL, 2003, p.7).[34]

2.2.2 Notação de Harriot

A notação de Harriot difere bastante da elaborada por Viète e é essencial para sua nova compreensão das equações. Sua maior inovação é, sem dúvida, utilizar *ab* para o produto de *a* por *b* e, consequentemente, *aa* para o que denotamos a^2, *aaa* para a^3, etc. Entretanto, o estudioso não foi o primeiro a usar tal sistema. Em 1544 Michael Stiffel escrevia *27AB* para o produto de *3A* por *9B*, mas introduzia *A, B, C* e as subsequentes letras do alfabeto apenas quando o problema lidava com mais de uma quantidade desconhecida. Quase todos os livros e textos de álgebra do século XVI se restringiam a equações lineares ou quadráticas com apenas uma indeterminada, que podiam ser tratadas com poucos símbolos para raízes e quadrados. Logo, a notação de Stiffel quase nunca era necessária e não foi adotada.

Viète dá o próximo passo importante na *Isagoge*, embora escrevendo as potências verbalmente. Harriot mantém o uso das vogais para simbolizar as quantidades desconhecidas, mas as usa em minúsculas, e representa as potências pela multiplicação iterada. Embora tediosa de se escrever, essa notação muitas vezes exibe a estrutura matemática de forma mais

---

[34] "So you taught me the curious way to observe the weight in Water, and within a while after Ghetaldi comes out with it in print. A little before Vieta prevented you of the Gharland for the greate Invention of Álgebra. Al these were your deues and manie others that I could mention; and yet too great reservednesse hath rob'd you of these glories" (STEDALL apud LOWER, 2003, p.7).

clara que a nossa notação atual. Isso se encaixa perfeitamente com a intenção de Harriot de explorar as equações em termos de seus coeficientes.

Para denotar a igualdade assumiu uma variação do sinal = introduzido por Robert Recorde no *The whetstone of witte* de 1557. Nos seus manuscritos, o símbolo aparece com duas barras verticais entre as barras horizontais, mas essas duas barras desapareceram quando partes de sua álgebra foram publicadas. Introduziu os sinais < e >, estes contendo duas barras verticais na extremidade aberta. Utilizava os três símbolos tanto na horizontal quanto na vertical conforme a situação demandava. Representava os parênteses por um ponto, como na identidade:

b- .c-d = b-c+d (com o sinal de igualdade atual)

Entretanto, ele também utilizava o ponto para denotar a multiplicação entre um número e uma letra, como *2.a*. Multiplicações de quantidades compostas (binômios) eram mostradas dentro de um colchete em forma de um ângulo reto, e com os passos seguindo exatamente a extensa multiplicação da Aritmética. A divisão era representada da forma usual, em frações. Além dos já praticamente universais símbolos + e – para, respectivamente, a adição e subtração, introduziu dois novos símbolos, $\pm$ e $\mp$ para denotar possibilidades alternativas. Isto permitiu que manipulasse duas, ou até quatro equações simultaneamente, economia útil quando cada possibilidade tinha que ser tratada separadamente.

Aquele que desejar uma descrição completa do conteúdo do *Tratado em Equações* pode consultá-la diretamente em STEDALL(2003). No entanto, vale citar brevemente sua estrutura: a introdução (Operações aritméticas em letras) compõe-se de 4 páginas que visam explicar sua notação, cujos exemplos das duas primeiras páginas são próprios e os da terceira página (sobre divisão) foram retirados da *Isagoge.* Na quarta página, Harriot volta-se para regras padrão para simplificar equações: permutar termos entre os lados de uma igualdade, reduzir o coeficiente líder a 1 e dividir as potências excessivas da indeterminada (*anthitesis, hypobibasmus, parabolismus*), seguindo tanto a nomenclatura quanto os exemplos de Viète.

Seguem-se seis seções: as três primeiras seções versam sobre as soluções numéricas de equações e se baseiam no tratado prático de Viète (com contribuições de Harriot), a quarta seção revela a estrutura multiplicativa dos polinômios e as duas últimas um tratamento sistemático das equações de terceiro e quarto graus. De especial interesse é o conteúdo da quarta seção, na qual Harriot mostra a possibilidade de se escrever equações de grau elevado como produtos de fatores de graus inferiores (o que chamamos hoje de fatoração), diferentemente de Viète, que tratava essas equações em termos de razões. Na terceira seção, Harriot mostra as soluções de algumas "equações canônicas" como $bc = ba + ca - aa$ e suas soluções $a = b$ e $a = c$. Já na seção seguinte, evidenciou como estas equações canônicas surgem. Partindo do produto $(a\text{-}b)\ (a\text{-}c)$, sendo a a indeterminada usual, ele constrói uma série de equações quadráticas, cúbicas, etc, e as iguala a zero. Essa discussão sistemática esclarece a relação entre raízes e coeficientes de uma equação, especialmente no formato adotado pelo autor, que agrupava verticalmente os termos de mesmo grau. Harriot percebeu quais condições sobre as raízes fariam uma ou mais potências de uma equação se cancelarem. Dessa forma, torna-se possível analisar pares de condições com as quais seria possível eliminar duas das potências intermediárias de uma quártica. Ao resolver essas condições simultaneamente, o autor aborda as raízes complexas, mas sem tecer maiores comentários.

Harriot definia pares de equações conjugadas como aquelas em que as potências ímpares (a, aaa,...) possuem sinais opostos. Assim, as raízes positivas de uma equação são as negativas da sua conjugada e Harriot percebeu essa relação.

Uma afirmação esclarecedora da autora nos revela a real opinião de Harriot sobre um assunto controverso na época:

> A crítica mais comum ao trabalho de Harriot é que ele se restringiu às raízes reais positivas. Duas coisas precisam ser ditas sobre isso: primeiramente que o trabalho de Harriot em equações provém diretamente de seu estudo dos algoritmos de Viète, que eram especialmente direcionados a encontrar raízes positivas. Então é natural que a procura pelas raízes positivas seja o ponto de partida. Segundo, é claro que seu trabalho progrediu, Harriot começou a reconhecer a importância das raízes negativas e complexas. Há muitos exemplos da primeira e menos da segunda (...) mas Harriot começou a perceber como e onde elas apareceriam na quarta seção de seu tratado (...) há duas folhas adicionais na seção (d) que são acréscimos posteriores[35]que permitem tanto raízes negativas quanto complexas (STEDALL, 2003, p.16).

2.2.3 Álgebra de Harriot após 1621 (Seção II)

Em seu testamento Harriot dá atenção especial a seus papéis matemáticos. Reproduzo aqui a parte de seu testamento contida nas páginas 17 e 18 em STEDALL (2003):

---

[35] Seções d.7.2 e d.13.2

> Eu, Thomas Harriots de Syon do Condado de Midd Gentleman, tenho enfrentado problemas relacionados a enfermidades físicas. Mas ainda com a mente perfeita e com a memória impecável e glórias devem ser cantadas a Deus Todo-Poderoso por ter me propiciado redigir meu testamento… Eu solenemente declaro que Nathaniel Thorpeley deve se tornar responsável por todos os meus escritos matemáticos a serem recebidos de meus executores, devendo ele fazer uso deles ordenando-os e separando os documentos importantes dos meros rascunhos, até o ponto em que ele finalmente compreender todos eles, reescrevê-los e editá-los de maneira organizada, de maneira que o conteúdo neles contido possa ser empregado no estabelecimento de uma doutrina pública a ser lecionada de maneira pública, de um modo considerado conveniente por meus executores e por ele mesmo. E caso ocorra de algumas notações presentes nos documentos em questão se mostrarem ininteligíveis para ele, então desejo que ele deverá, de forma adequada, conferi-los com o Sr.Warner o o Sr. Hughes, pessoas com capacidade suficiente para sanar as dúvidas em questão. E caso ele não encontre solução com nenhum dos dois, ele deve dirigir-se a John Protheroe ou Thomas Alesbury. (Eu espero que alguns dos nomes mencionados possam auxiliá-lo) E quando ele já tiver feito uso dos referidos papéis da forma que ele e meus testamenteiros julgarem mais adequada então em seguida ele deve devolvê-los aos meus executores para que sejam guardados convenientemente em um cofre fechado, sendo guardados pelo responsável pela Biblioteca de Northumberland, tendo as chaves em sua posse.[36]

Fica claro que Harriot pensou que Torpoley era a pessoa mais indicada para compreender, transcrever e editar seu trabalho matemático. Em 1608, Torpoley era o reitor de Salwarpe em Worcertershire, e então poderia não estar familiarizado com os últimos trabalhos de Harriot. Neste caso, Harriot sugeriu que Warner e Hues estariam em posição de auxiliar, com Protheroe e Aylesbury como árbitros finais.

Os preparativos para executar o testamento de Harriot estavam sendo feitos. Em 1622, Torpoley deixou sua posição e provavelmente se mudou para uma das casas do conde de

---

[36] I Thomas Harriots of Syon in the County of Midd Gentleman being troubled in my body with infirmities. But of perfect mind and memory Laude and prayse be given to Almightie God for the same do make and ordayne this my last will and testament… I ordaine and constitute the aforesaid NATHANIEL THORPELEY first to be the Overseer of my Mathematical Writings to be received of my Executors to peruse and order and separate the chief of them from my waste papers, to the end that after he doth understand them he may make use in penning such doctrine that belongs unto them for public uses as it shall be thought Convenient by my Executors and him selfe And if it happen that some manner of Notations or writings of the said papers shall not be understood by him then my desire is that it will please him to Conferre with Mr.Warner or Mr. Hughes Attendants on the aforesaid Earle Concerning the aforesaid doubt. And if he be not resolved by either of them That then he Confer with the aforesaid JOHN PROTHEROE Esquior or the aforesaid THOMAS ALESBURY Esquior.(I hoping that some or other of the aforesaid fur last nominated can resolve him) And when he hath had the use of the said papers so long as my Executors and he have agreed for the use afore said That then he deliver them again unto my Executors to be put into a Convenient Trunk with a lock and key and to be placed in my lord of Northumberlands Library and the key thereof to be delivered into his Lordship hands.

Nothumberland. Protheroe lhe pagou uma pensão e instruiu sua esposa a continuar os pagamentos após sua morte, em 1624. Logo após, Torpoley foi beneficiário de Henry Percy.

Torpoley encontrava-se com uma enorme quantidade de material, e o começo de seu trabalho de editoração de Harriot gerou o *The congestor*, ou compilação, onde pretendia apresentar alguns tópicos da matemática de Harriot. Torpoley não cumpriu completamente seu plano, pois a certa altura, os testamenteiros de Harriot o liberaram do trabalho. Seja qual for a razão, o trabalho foi editado por Warner (possivelmente ajudado por Protheroe) e não por Torpoley, como Harriot pretendia.

A edição de Warner foi publicada em 1631 com o nome de *Artis analyticae praxis,* comumente conhecido como *Praxis*[37]. Warner não era um matemático conhecido e não compreendia o trabalho de Harriot tão bem quanto Torpoley: “Em vez de publicar os manuscritos como estavam, ele preferiu reorganizá-los e publicá-los em uma certa ordem que não apenas destruiu a coerência do tratado de Harriot, mas o fez parecer consideravelmente menos sofisticado do que realmente era.” (Stedall, 2003, p.20)

De fato, o mais interessante é que Torpoley percebeu o quão díspar fora a editoração do *Praxis*, e deixou uma carta descrevendo “exatamente” como deveria ser o *Tratado sobre equações*. Logo após, juntou todo o material relevante, deixando assim as pistas necessárias para que Stedall reconstruísse o trabalho original 400, anos após sua concepção.

2.2.4 A reputação e influência de Harriot (Seção III)

O *Praxis* foi o livro que deu toda a reputação a Harriot, mas por muitos anos após sua morte seus manuscritos continuaram a circular entre seus amigos e admiradores. Para determinar a influência de Harriot no século XVII, é importante considerar o quão amplamente este material foi divulgado e compreendido.

Partindo de uma carta que Aylesbury escreveu ao conde de Nothumberland, torna-se evidente que Warner pretendia publicar mais material de Harriot. Sabemos através do matemático Samuel Hartlib[38] que, em torno de 1639, John Pell estava trabalhando em alguns

---

[37] Prática, uso, costume.

[38] Samuel Hartlib (1600-1662) foi uma figura chave na revolução intelectual do século XVII. Nascido em Elbing, em Prussig, Hartlib se instalou definitivamente na Inglaterra a partir do final de 1620 até sua morte em

problemas de Harriot em conjunto com Warner. Tendo este último morrido em 1643, em 1651 Pell, Aylesbury e Charles Cavendish ainda discutiam o trabalho de Harriot[39].

Cavendish foi uma figura importante no que se refere à divulgação das idéias de Harriot.

> É quase certo que Cavendish tenha introduzido o trabalho de Viète a William Oughtred. E também foi Cavendish que trouxe as idéias sobre os indivisíveis de Cavalieri da França para a Inglaterra[40]. Pode-se supor, com certa razão, que Cavendish também tenha levado algumas idéias de Harriot da Inglaterra para seus companheiros matemáticos no continente. (STEDALL, 2003, p.27)

Esse comentário leva à discussão sobre a acusação de plágio da qual Descartes foi vítima. Dentre os nomes de quem teria surrupiado idéias, figura o de Thomas Harriot. Deixaremos esta discussão para mais tarde. (cap. 5)

2.3 Descartes

René Descartes, filósofo e matemático francês, nasceu em La Haye, na Touraine, cerca de 300 quilômetros a sudoeste de Paris, em 31 de março de 1596. Seu pai, Joachim Descartes, advogado e juiz, possuía terras e o título de escudeiro, primeiro grau de nobreza, e era Conselheiro no Parlamento de Rennes, na vizinha província da Bretanha, que constitui o extremo noroeste da França. De 1604 a 1614, estudou no colégio jesuíta de La Flèche. Sobre sua educação matemática pouco se sabe. Contudo, segundo Antonella Romano, o professor de Descartes em La Flèche, foi um jovem jesuíta sem formação matemática. Em 1614 saiu de La Flèche para estudar Direito em Poitiers. No entanto, nunca exerceu o ofício, e em 1617, alistou-se no exército do Príncipe Maurício de Nassau, com a intenção de seguir carreira militar. Logo após ter se se alistado no exército, descobriu que tinha talento para matemática,

---

1662. Suas aspirações formaram um cordão distinto e influente na vida intelectual inglesa durante as décadas revolucionárias.

[39] Numa carta à Pell, Cavendish revelou ter se “apaixonado” pelo trabalho de Harriot em números triangulares e que o copiou embora não o tivesse compreendido completamente.

[40] No fim dos anos 1630.

de modo que passou a maior parte de seus anos militares e subsequentes (ele pediu demissão quatro anos mais tarde) estudando matemática pura.

Em 1619, coloca-se a serviço do Duque de Baviera. Em seguida, prepara uma obra de física, o *Tratado do Mundo*, a cuja publicação ele renuncia, ao ter, em 1633, tomado conhecimento da condenação de Galileu. Entre 1629 e 1649, vive na Holanda, país protestante. Ali ele morou e trabalhou, devotando seu tempo e esforços ao estudo da Matemática e da Filosofia, na "busca pela verdade". Em 1649, foi convidado para ser professor da Rainha Cristina da Suécia, mudando-se para Estocolmo, onde contraiu uma pneumonia, vindo a falecer a 09 de fevereiro de 1650, aos 54 anos. Seu ataúde, alguns anos mais tarde, foi transportado para a França.

A visão matemática de Descartes era extremamente influenciada por sua filosofia: "A matemática de Descartes era a de um filósofo (...) era uma fonte de inspiração e um exemplo para sua filosofia e reciprocamente suas preocupações filosóficas influenciaram fortemente seu estilo e programa na matemática" (Bos, 2001, p.228)

A filosofia leva Descartes a considerar sobre qual "método" sua ciência deveria se fundamentar e revelou cada vez mais uma preocupação com a exatidão matemática.

> (...) Desde cedo Descartes viu o empreendimento científico com um forte interesse programático. Seu programa abrangeu a totalidade da ciência, que ele via principalmente como um esforço para resolver problemas, com problemas aritméticos e geométricos como paradigmas (BOS, 2001, p.285).[41]

Veremos que suas ideias evoluíram de uma concepção clássica de exatidão matemática a uma coleção de conceitos originais e inovadores. Segundo Bos (2001), as principais noções algébricas de Descartes, evoluíram entre 1619-1637 e podem ser analisadas segundo os períodos:

c.1619 - As cartas a Isaac Beeckman[42] (1538-1637) e passagens das *Investigações particulares*[43] permitem concluir que Descartes já possuía uma concepção bem definida de

---

[41] (...) From early on Descartes viewed the scientific enterprise with a strong programmatic interest. His program encompassed the whole of science, which he saw primarily as a problem solving endeavor, with arithmetical and geometrical problems as paradigms (BOS, 2001, p.285).

[42] Além de Descartes, Issac Beeckman manteve amizade e correspondência com Snell, Gassendi e Mersenne, entre outros.

[43] Cogitatione Privatae

como proceder com suas pesquisas matemáticas. Inicialmente, formulou seu programa em termos dos tipos de solução do problema dado: se por cálculo ou por construção.

Problema	Grandeza discreta	Grandeza contínua
Primeira classe	Equações numéricas cujas soluções eram números racionais	Problemas planos solúveis por retas e círculos
Segunda classe	Equações numéricas cujas soluções eram números irracionais (surdos)	Problemas não planos solúveis por curvas traçadas por um movimento simples.
Terceira Classe	Equações numéricas cujas soluções podiam ser imaginadas, mas não possuíam nenhum número real como solução	Problemas solúveis por curvas especiais que não podiam ser traçadas por um movimento simples.

Tabela 16.1 (BOS, 2001, p.233) - Classificação de Descartes c.1619

Aqui podemos observar que a maneira como se traça uma curva era o principal critério para determinar seu status na Geometria. Os movimentos simples ou regulares como os providos pelos seus "novos compassos" eram aceitáveis e curvas geradas por movimentos complexos (como a *quadratrix*) relegavam a essas curvas um status menor. Seguindo a concepção de encontrar a solução de problemas através da intersecção de curvas, Descartes construiu estes novos compassos (como o trissetor e o mesolabo) e parecia ignorar a nova análise de Viète:

> Os documentos de 1619 ainda não mostram um interesse particular em análise, em métodos para encontrar as construções. Também a álgebra não era tão proeminente quanto se tornaria mais tarde no pensamento de Descartes. Ele inventou instrumentos para a solução geométrica de equações, mas não há sinais de que ele considerasse equações como o protótipo para todos os problemas geométricos. (BOS, 2001, p.252).[44]

Sobre a originalidade das ideias neste período, Bos destaca:

---

[44] The 1619 documents do not yet show a particular interest in analysis, in methods for finding the constructions. Nor was álgebra as prominent as it would become later in Descartes' thinking. He devised instruments for the geometrical solution of equations, but there are no signs that he considered equations as the prototype for all geometrical problems (BOS,2001, p.252).

> Embora seja difícil determinar com precisão que influências Descartes sofreu no início de sua formação matemática, podemos avaliar a novidade de suas idéias naquela época. A noção de resolver a equação através de instrumentos não era particularmente nova e a técnica algébrica de Descartes era decididamente abaixo do padrão do tempo (...) as idéias metodológicas de Descartes formuladas na sua carta a Beckman foram decididamente novas. Seus critérios e sua classificação de problemas geométricos e os procedimentos foram além das idéias clássicas e as tornaram mais precisas. (BOS, 2001, p.252-253).[45]

c.1625- Embora em seu período inicial a álgebra ainda não tivesse um status central em sua matemática, investigou novas maneiras de construir as raízes das equações cúbicas e quárticas, comunicando em 1625 a alguns matemáticos a obtenção de duas médias proporcionais através de parábolas e círculos, sem demonstração. Claude Mydorge[46] (1585-1647) devolveu a Descartes uma prova dessa construção e pouco tempo depois Descartes mostrou a Beeckman a sua construção geral das raízes de equações de terceiro e quarto graus, mas apenas publicou-a em 1637, na geometria. Em 1632, Mersenne enviou-lhe uma segunda demonstração, feita por Roberval. Mersenne publicou a construção de Descartes juntamente com a prova de Roberval no seu *Harmonia Universal* de 1636, sem creditá-lo.

Construção das raízes de equações de terceiro e quarto graus- Descartes: *Dada uma equação do terceiro ou quarto grau:* $x^4=\pm px^2\pm qx\pm r$ *pede-se construir suas raízes.*

1. Trace a parábola com eixo vertical, vértice A como ponto mais alto e *latus rectum* 1.

2. Se o sinal de p é +, então tome AB= $(1+p)/2$ partindo de A para baixo no eixo; Se o sinal é – e $p<1$, então tome AB= $(1-p)/2$ partindo de A para baixo no eixo; Se o sinal é – e $p>1$, então tome AB= $(p-1)/2$ partindo de A para cima no eixo; Finalmente se o sinal é – e $p=1$, tome B=A.[47]

---

[45] Although it is difficult to determine precisely the influences Descartes underwent in his early mathematical formation, we may assess the novelty of his ideas at that time. The notion of solving equation by instruments was not particularly new and Descartes' álgebraic technique was decidedly below the standard of the time (…) the methodological ideas Descartes formulated in his letter to Beckman were decidedly new. His criteria and his classification of geometrical problems and procedures went beyond the classical ideas and made these more precise (BOS, 2001, p.252-253).

[46] Matemático e físico francês. Simplificou muitas das demonstrações dos resultados de Apolônio. Outra de suas importantes contribuições foi provar resultados sobre as deformações das seções cônicas, idéia retomada mais tarde por Newton, Philippe de La hire (1640-1718), J.V. Poncelet (1788-1867) e Michel Chasles (1793-1880).

[47] Esta parte contém uma correção de BOS, que pode ser de Descartes ou um erro de cópia de Beeckman.

3. Tome BC= $q/2$ perpendicular ao eixo para direita ou esquerda (a escolha é deixada ao geômetra executando a construção).

4. Se o sinal de r é +, então tome o segmento CD= $\sqrt{CA^2 + r}$; se é – tome CD=$\sqrt{CA^2 - r}$.

5. Trace o círculo com centro C e raio CD; este intersecta a parábola nos pontos E; Trace perpendiculares EF ao eixo.

6. Se o sinal de q é -, então os segmentos EF nos quais EC intersecta o eixo representam as raízes positivas e os outros, as negativas; Se o sinal de q é +, então os segmentos EF em que E está do mesmo lado de C representam as raízes negativas e os outros as positivas.

Observando esta construção, Bos comenta:

> Pode ser que Descartes tenha chegado à construção em geral pelo método dos coeficientes indeterminados (...) Além disso, em suas notas para a edição da Geometria em latim, de 1659, Van Schooten acrescentou uma variação da construção pelo método dos coeficientes indeterminados. No entanto, pode ser também que Descartes tenha encontrado a solução geral por generalizações sucessivas da sua construção das médias proporcionais. (BOS, 2001 p.258).[48]

De toda forma, comparando os resultados de 1619 com os resultados de 1625, vemos que a Álgebra começa a tomar força na Geometria de Descartes, que depende cada vez menos de instrumentos.

> Não há dúvida de que as construções também convenceram Descartes da importância de reduzir problemas a equações (...) Apesar de a nova construção por parábola e circunferência não se estender para além dos problemas sólidos, ela fornecia a solução de todos os problemas sólidos, e sua simplicidade e eficácia pode muito bem ter sugerido a Descartes que os meios para a generalização residiam na álgebra ao invés dos instrumentos. (BOS, 2001, p.259).[49]

---

[48] It may be that Descartes arrived at the general construction by the method of indeterminate coefficients (…) Moreover, in his notes to the 1659 Latin edition of the Geometry Van Schooten added a provémtion of the construction by indeterminate coefficients. However it may be also that Descartes found the general solution by successive generalizations of his construction of mean proportionals. (BOS, 2001. P.258).

[49] No doubt that constructions also convinced Descartes of the importance of reducing problems to equations (…) Although the new construction by parabola and circle did not extend beyond the solid problems, it did provide the solution of all solid problems, and its simplicity and effectiveness may well have suggested to Descartes that the means for further generalization lay in álgebra rather than instruments. (BOS, 2001 p.259).

c.1628- Ano em que escreveu *Regras para a direção do espírito*[50], sua tentativa inacabada de formular as regras da razão humana, publicado postumamente. Para Descartes, a noção de verdade está ligada ao método. Neste livro, expõe com clareza os principais pontos de seu pensamento e seu programa para a ciência, caracterizando-se como uma obra metodológica. As 21 regras contidas aqui nos permitem inferir sobre o pensamento matemático cartesiano nesta época. As primeiras 12 regras determinam que ações são permitidas ao "espírito" para alcançar julgamentos sólidos e verdadeiros. Estas primeiras regras lidavam com "proposições simples", aquelas com as quais a mente preparada era capaz de lidar facilmente. Na regra 12 fica claro que sua intenção era compor mais dois conjuntos de 12 regras: o primeiro sobre problemas que "podem ser compreendidos perfeitamente mesmo que não conheçamos suas soluções" e o segundo sobre problemas que "não podem ser entendidos perfeitamente", sendo o primeiro tipo aquele contendo a aritmética e geometria. O segundo conjunto não fica completo e as regras 19 a 21 não possuem texto explanatório. As regras 16-21 explicam como equacionar um problema em termos gerais:

Regra 16: Utilizar símbolos curtos para denotar os elementos do problema que devem ser mantidos em mente.

Regra 17: Desconsiderar se os termos são conhecidos ou desconhecidos e encontrar suas inter-relações.

Regra 18: Usar as quatro operações: soma, subtração, multiplicação e divisão para transformar estas inter-relações numa equação.

Regra 19: Procurar por equações tantas quantas forem os termos desconhecidos.

Regra 20: Aplicar um procedimento futuro. Aqui Descartes afirma que explicaria este procedimento depois, mas isto não acontece no resto do livro.

Regra 21: Reduzir as equações a apenas uma do menor grau possível.

Aqui as regras acabam. O esperado seriam procedimentos pelos quais o espírito pode deduzir as soluções a partir da equação obtida na regra 21, mas isto não acontece.

> O restante do texto sugere que na época em que Descartes parou de escrever as regras, tinha tomado conhecimento de duas questões fundamentais relativas à álgebra que

[50] *Regulae ad directionem ingenni.*

> explorava, sabidamente, a interpretação das operações aritméticas e algébricas para grandezas em geral, e a obtenção da solução para um problema a partir de sua equação. Nas “Regras”, ele respondeu à primeira pergunta parcialmente, mas deixou a segunda sem resposta (BOS, 2001, p.264).[51]

A questão da legitimidade de se introduzir números na Geometria foi amplamente discutida nos anos 1600. Stevin afirmara, anos antes, que os números eram grandezas contínuas e portanto não havia diferenças entre Aritmética e Geometria. Descartes não podia assumir uma posição tão radical, pois escolhera a geometria como paradigma, e assim teve que enfrentar a mesma tarefa que Viète executou anos antes: reinterpretar as operações aritméticas e algébricas como construções geométricas. A principal diferença entre Descartes e Viète aqui é que o primeiro introduz em sua interpretação um segmento unitário e um quadrado unitário.

Ele representava as grandezas como linhas ou como retângulos com largura unitária (e) e com o comprimento da grandeza considerada, afirmando que estes eram representações equivalentes, portanto, intercambiáveis. Assim, um mesmo segmento de tamanho l podia ser representado por um retângulo de largura e e comprimento l, ambos se referindo à mesma grandeza. A adição e subtração podiam ser executadas considerando operações sobre linhas ou retângulos.

Para efetuar a multiplicação das grandezas a e b era preciso construir um retângulo cujo comprimento era $c= a\ x\ b$ e com largura e. Para a divisão, o dividendo deveria ser interpretado como um retângulo e o divisor como uma linha. Logo, para se dividir d por f, primeiro toma-se d como o retângulo de comprimento d e largura e, e depois transforma-se esse retângulo em outro de mesma área e comprimento f. O comprimento deste novo retângulo fornece a resposta procurada.[52]

> Desta forma, todo o problema fica reduzido ao seguinte: Dado um retângulo construir sobre um dado lado, outro retângulo equivalente a ele. O mero iniciante em geometria é obviamente perfeitamente familiarizado com isso; Todavia gostaria de esclarecer em caso de parecer que eu tenha omitido alguma coisa” (DESCARTES apud BOS, 2001, p.266)[53]

---

[51] The Extant of the text suggests that by time Descartes broke off writing the Rules he had become aware of two fundamental questions concerning the álgebra he was exploring, namely, the interpretation of arithmetical and álgebraic operations for general grandezas, and the provémtion of the solution of a problem from its equation. In the Rules he answered the former question partially, but left the latter unanswered (BOS, 2001, p.264).

[52] Estas duas últimas construções são dadas nos *Elementos* de Euclides prop.VI.16.

[53] Ita enim totum hoc negotium ad talem propositionem reducitur: dato rectangulo, aliud aequale construere supra datum latus. Quod etiamsi vel Geometrarum pueris sit tritum, placet tamen exponere, ne quid videar omisisse (BOS apud DESCARTES, 2001, p.265-266).

A explicação prometida não surge, mas fica claro que Descartes se apoia na construção da quarta proporcional.[54] O próximo passo seria definir a extração de raízes, e mostrar como resolver equações em termos gerais. A extração de raízes era para Descartes uma espécie de divisão:

> Para aquelas divisões cujo divisor não é dado, mas apenas indicado por alguma relação, como quando somos solicitados a extrair a raiz quadrada, cúbica ou etc., nestes casos devemos notar que o termo a ser dividido, e todos os outros termos, sempre são concebidos como linhas formando uma série de médias proporcionais cujo primeiro termo é a unidade e o último é a grandeza a ser dividida. Explicaremos oportunamente como determinar qualquer número de médias proporcionais entre duas grandezas. Agora devemos nos contentar em assinalar que assumimos não termos feito muito com essas operações, pois para serem executadas, elas requerem um movimento inverso da imaginação e no momento lidamos apenas com problemas cujo tratamento é direto. (DESCARTES 1985-1991, vol.1, p.76) (BOS, 2001, p.266).

Dessa forma, a extração de raízes e a solução de equações estão interligadas por uma espécie de divisão que requer "um movimento inverso da imaginação". Assim como para Stevin, resolver uma equação seria determinar um processo generalizado de tomar médias proporcionais.

> Pode ser que Descartes tinha em mente tratar a extração de raízes e a solução de equações no terceiro conjunto de 12 regras e considerou-as como problemas que "não são perfeitamente compreendidos"; isto estaria em consonância com a passagem na regra 20, onde Descartes se refere a determinadas operações cujo tratamento ele adiou. Estas operações, provavelmente, serviam para reduzir o grau da equação através de fatoração, elas eram, portanto, divisões por divisores desconhecidos. Deve-se notar que a distinção entre a segunda e a terceira dúzia de regras foi antes aritmética do que geométrica. Extração de raízes e a determinação de médias proporcionais exigiam "um movimento inverso e indireto da imaginação" e, portanto, foram adiadas para o terceiro (conjunto de regras). (BOS, 2001, p.267).[55]

Embora não se saiba o quanto Descartes elaborou seu programa antes de abandonar o texto das *Regras*, os obstáculos ao seu programa nesse ponto ficam claros: não havia

---

[54] Elementos (VI-12).

[55] It may be that Descartes had in mind to treat root extraction and the solution of equations in the third set of 12 rules and considered them as problems that "are not perfectly understood", this would be in keeping with the passage in Rule 20 where Descartes referred to certain operations whose treatment he postponed. These operations probably served to reduce the equation to a lower degree by splitting off factors; they were therefore divisions by unknown divisors. It should be noted that the distinction between the second and the third dozen of rules was an arithmetical rather than geometrical. Root extraction and the determination of mean proportionals required "an indirect and reverse movement of imagination" and were therefore postponed to the third" (BOS, 2001, p.267).

argumentos, além da autoridade dos autores clássicos, em favor de que seu procedimento de construção com círculos e parábolas satisfizesse o critério de exatidão que Descartes exigia em sua própria obra. Também não estava claro como se deveria proceder para resolver equações de ordem elevada e, assim, se o principal resultado e o método para reduzir problemas a equações estava em xeque. O que era necessário lhe faltava: uma melhor demarcação entre as curvas aceitáveis e inaceitáveis na Geometria.

> As observações de Descartes sobre "um movimento indireto da mente" envolvidas na extração de raízes sugerem que ele iria tentar vincular a aceitabilidade das construções aos movimentos envolvidos na sua execução, isto é, ao traçado das curvas construtoras (...) em 1628 Descartes deixou as questões sobre a legitimidade das construções de ordem superior abertas. (BOS, 2001. p.269).[56]

c.1632- Em algum ponto do ano 1631 o matemático Jacob Van Gool (Golius) propôs a Descartes aplicar seu novo método ao problema de Pappus. Segundo Henk Bos, textos de duas cartas trocadas entre Golius e Descartes existiram. Na primeira, datada de janeiro de 1632, Golius envia um manuscrito contendo sua solução do problema. Este texto em questão foi perdido, contudo, a resposta escrita por Descartes, contendo seus acréscimos, sobreviveu. Nesta, datada de 2 de fevereiro de 1632, Descartes agradece a aprovação de suas soluções por parte de Golius. Vencer esse problema teve grande importância para o programa de Descartes:

> Assim, a solução do problema de Pappus, com a sua sugestiva correspondência entre as propriedades algébricas e geométricas das curvas aceitáveis, era a grande promessa para a conclusão da parte sintética do programa. Até 1630 o lado programático das ideias de Descartes ainda estava em consonância com as idéias clássicas de construção e com as mais recentes da análise por meio da álgebra. O episódio do problema Pappus proveu os ingredientes necessários para uma descoberta (...) O resultado foi uma doutrina cartesiana madura na geometria, que encontramos na Geometria. (BOS, 2001, p.283).[57]

Escrever as *Regras* levou Descartes, de uma forma natural, a perguntas sobre as curvas, a sua aceitação para uso em construções, e sua classificação. Os métodos de construção que Descartes encontrou para algumas curvas de Pappus conectaram suas ideias

---

[56] Descartes’ remarks about “an indirect movement of the mind” involved in root extraction suggest that he would try to link the acceptability of constructions to the motions involved in their execution, that is, to the tracing of the constructing curves (…) in 1628 Descartes left the questions about the legitimacy of higher order constructions open. (BOS, 2001, p.269).

[57] Thus the solution of Pappus problem, with its suggestive correspondence between the álgebraic and the geometrical properties of the acceptable curves, held great promise for the completion of the synthetic part of the program. Until 1630 the programmatic side of Descartes' ideas was still in keeping with the classical ideas on construction and the more recent ones on analysis by means of álgebra. The Episode on Pappus problem provided the necessary ingredients for a breakthrough (…) The result was a Descartes’ mature doctrine of geometry, which we find in the Geometry (BOS, 2001, p.283).

anteriores sobre a classificação das curvas aceitáveis em Geometria. Além disso, as equações e procedimentos de construção originadas de seu estudo do problema de Pappus sugeriram uma hierarquia de curvas em que o grau da equação era uma medida da complexidade do movimento envolvido em sua construção, ou seja, da complexidade (ou simplicidade) da curva.[58]

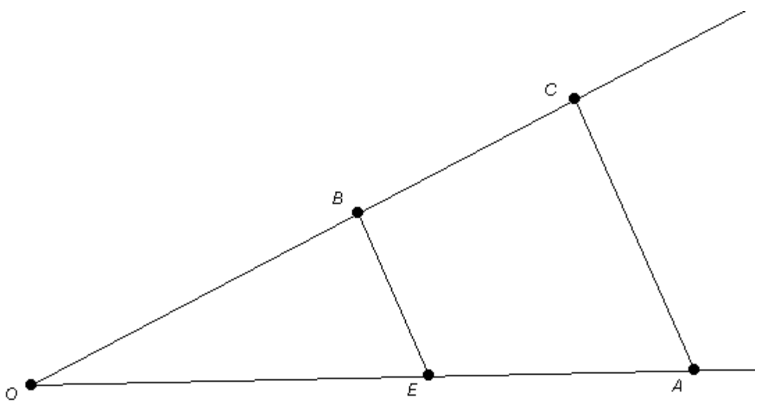
c.1637- *La geomètrie* aparece como um apêndice do *Discurso sobre o método* com o objetivo de exemplificar o método em si, embora Descartes não tenha discutido explicitamente as conexões entre a parte metodológica do *Discurso...* e a prática da *"*geometria*"*. A obra contém três livros: O Livro I trata dos problemas planos, relação entre a álgebra e geometria, construção e alguns problemas, e do caso em que o problema de Pappus é plano. O Livro II trata da classificação de curvas, problemas de Pappus de três a cinco retas, aceitabilidade de construções ponto a ponto, uso de equações de curvas para encontrar normais, ovais para ótica e curvas em superfícies não planas. O Livro III trata de aceitabilidade de curvas em construções e simplicidade, equações e suas raízes, redução de equações e construção de raízes de equações de terceiro e quarto graus tanto quanto de quinto e sexto. Seu foco era a construção geométrica e seu método aqui compreendia duas partes:

i) **Análise -** Usando a Álgebra para reduzir o problema a uma equação apropriada. Isso significava que as curvas construtoras deveriam ter uma equação em uma indeterminada, com o menor grau possível e ainda redutíveis a uma forma canônica, como as construções padrão de Descartes pressupunham. Tornou-se necessário prover uma série de técnicas algébricas que Descartes não incluíra nas "Regras", mas o fez na "Geometria". Tais técnicas ficam no fim do terceiro livro e versavam sobre a irredutibilidade de uma equação, suas raízes e as transformações destas por substituições lineares. Descartes não forneceu nenhuma demonstração de suas afirmações sobre polinômios e aparentemente suas conclusões se baseiam na hipódissertaçao de que todo polinômio de grau $\underline{n}$ pode ser decomposto em fatores lineares, portanto, possuía no máximo $\underline{n}$ raízes "falsas" ou "verdadeiras". Uma vez conhecida uma das raízes, o grau de uma equação podia ser reduzido pela divisão polinomial. Posteriormente, ele afirma que nem sempre a decomposição é possível, pois às vezes as raízes são apenas "imaginárias".

[58] O tratamento completo da solução de Descartes para o problema de Pappus encontra-se no cap. 23 de BOS, 2001.

Sobre a interpretação das operações algébricas, o método era novo e foi apresentado nas primeiras duas páginas do livro. Para aplicar operações quadráticas aos segmentos, ele combinou elementos já existentes (como o segmento unidade), mas executou as construções de forma que o resultado ainda era um segmento. Para isso, o estudioso se baseou novamente nos Elementos (prop. VI-12 e VI-13). A adição e subtração eram feitas da forma usual, mas a multiplicação, divisão e extração de raízes eram executadas de novas maneiras. Transformar um problema de Geometria em uma equação exigia reconhecer as propriedades geométricas como relações algébricas e vice-versa. Descartes poderia ter partido da interpretação destas relações contida nas "Regras", mas preferiu propor uma completamente nova e sem a dimensionalidade inerente às operações com retângulos. Esta nova interpretação também tinha a vantagem de incluir as operações algébricas.

Construção (Multiplicação de dois segmentos): Dada uma unidade e e dois segmentos a e b, o segmento c é construído igual (por definição) ao produto entre a e b.



Construção:

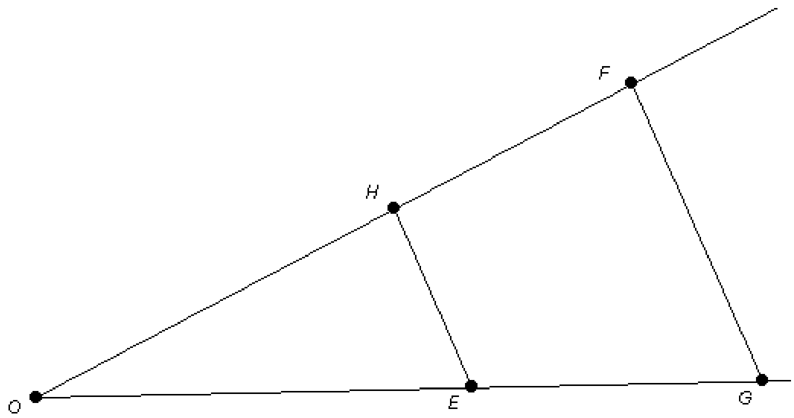
1. Trace duas linhas se interceptando em O com qualquer ângulo; Marque OE = *e* em uma das duas linhas.

2. Marque AO = *a* ao longo da linha onde OE foi marcada. Marque OB = *b* na outra linha.

3. Trace EB e trace a linha paralela à EB passando por A, esta intersecta a outra linha em C.

4. O produto *ab* é definido como OC = *c*.

Construção (Divisão de dois segmentos): Dada uma unidade $\underline{e}$ e dois segmentos $\underline{f}$ e $\underline{g}$, o segmento $\underline{h}$ é construído igual (por definição) ao produto entre $\underline{f}$ e $\underline{g}$.



Construção:

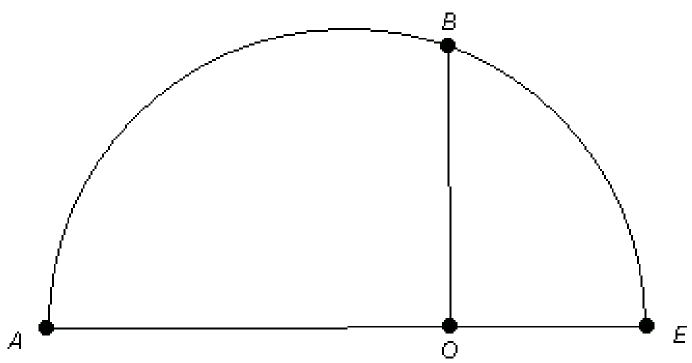
1. Trace duas linhas se interceptando em O com qualquer ângulo; Marque OE = e em uma das duas linhas.

2. Marque OG = g ao longo da linha onde OE foi marcada. Marque OF = f na outra linha.

3. Trace FG e trace a linha paralela à FG passando por E, esta intersecta a outra linha em H.

4. O quociente f/g é definido como h = OH.

Construção (Extração de raízes quadradas): Dada uma unidade $\underline{e}$ e um segmento $\underline{a}$, o segmento $\underline{b}$ é construído igual (por definição) à raiz quadrada de $\underline{a}$.



Construção:

1. Marque os pontos A, O e E ao longo de uma linha (com O entre A e E) tais que OE = *e* e AO = *a*.

2. Trace o semicírculo com diâmetro AE e a reta perpendicular a AE passando por O. Esta intercepta o semicírculo em B.

3. A raiz quadrada de *a* é definida como *b* = OB.

Após esse tratamento, Descartes apenas afirma que as raízes de ordem superior seriam abordadas mais tarde. Com essas poucas construções não é possível dizer que Descartes completou a correspondência entre a Álgebra e a Geometria, mas certamente Descartes tinha conhecimento disso, pois as raízes cúbicas não podem em geral ser construídas através de retas e círculos. Fica claro que, embora tenha introduzido um segmento unitário, Descartes evitou a identificação do contínuo geométrico e suas medidas numéricas, por causa da dificuldade conceitual envolvendo os números irracionais.

Viète generalizou a interpretação clássica através da sua logística especiosa e seus símbolos. Estes representavam grandezas de diversas dimensões, consequentemente, as expressões na álgebra de Viète deviam ser homogêneas e com dimensão inteira. Como na interpretação clássica, o sentido de uma expressão não dependia da escolha de uma unidade, e esta não figurava em sua álgebra. Neste ponto reside a principal diferença entre Viète e Descartes, tendo em vista que a introdução do segmento unitário eliminava a necessidade da homogeneidade, pois nesta nova interpretação o produto entre dois segmentos continuava sendo um segmento, assim como sua divisão e raiz quadrada. O ponto fraco desta interpretação reside no fato de que as operações não mais são representadas univocamente, logo, certa arbitrariedade foi introduzida. Apesar deste avanço, o próprio Descartes frequentemente chegava a fórmulas que eram homogêneas dimensionalmente.

ii) **Síntese** - Encontrar uma construção apropriada baseada na equação obtida. Equações algébricas eram apenas a metade do processo e não bastavam como soluções. Outra dificuldade era a de que fórmulas explícitas para se encontrar raízes de equações até quarto grau estavam disponíveis para a interpretação geométrica, mas estas, em geral, não eram adequadas para se deduzir construções.[59] Portanto, a interpretação geométrica das equações ainda exigia uma demarcação das curvas que eram aceitáveis na construção dos problemas e ainda uma medida de sua simplicidade. Curvas aceitáveis eram traçadas por movimentos simples, logo aquelas com equações algébricas e sua simplicidade eram medidas pelo seu grau. Ainda eram necessários argumentos que defendessem esta posição.

Por último, os procedimentos de construção das raízes foram agrupados em classes de acordo com seu grau. Em tese, Descartes forneceu para cada classe uma forma canônica da equação associada e seu procedimento de construção pelo qual qualquer problema da classe poderia ser construído. Os problemas planos, que levam a equações lineares e quadráticas, tinham construções providas por retas e círculos e não eram considerados uma inovação.

Seu resultado, de 1625, foi uma construção geral das raízes de equações de terceiro e quarto graus por parábolas e círculos. Estes cobriam todos os problemas sólidos. O grande desafio era determinar como proceder além dos problemas sólidos. Para isso, Descartes mostrou uma construção convincente de equações de terceiro e quarto graus e no final da geometria apresentou uma construção geral de equações de quinto e sexto graus, através de círculo e da parábola cartesiana,[60] a qual acreditava se estender para equações de graus maiores.

Logo, as concepções cartesianas expostas na geometria sugerem uma nova relação do par álgebra/geometria ou equação/construção, conduzindo a novos significados. Está claro na literatura que a intenção de Descartes não era mostrar a equivalência entre curva e equação, mas fornecer um método “exato” para resolver todos os problemas em geometria.

Tal busca por um método geral ou “universal” é uma ideia já contida em Viète e Descartes desenvolve nesse sentido seu “programa”, descrevendo como a razão deve proceder na busca pela verdade científica. Para Bos, é fácil superestimar a influência que a Geometria de Descartes teve sobre a matemática de sua época. Sua principal influência foi apontar a relação entre curvas e suas equações. Sem essas contribuições, a investigação de curvas e o cálculo infinitesimal praticados em meados do século 17 seriam impensáveis. Poucas foram as reações positivas imediatas em reação à geometria de Descartes, sendo este, ora centro de debates com outros matemáticos franceses (principalmente Fermat), ora acusado de plagiar os

---

[59] Por exemplo: O problema de se construir duas médias proporcionais (Viète) podia ser reduzido à equação $x^3=a^2b$ que possuía uma solução algébrica explicita embora o sinal de raiz cúbica não desse nenhuma pista sobre sua construção.

[60] O lugar geométrico mais simples no caso de 5 retas do problema de Pappus, notadamente a curva mais simples além das cônicas.

trabalhos de Viète e Harriot (Roberval, Wallis). Ainda, a maioria dos leitores de sua obra se concentrou na parte algébrica e técnica, deixando de lado a discussão metodológica e filosófica. Apesar de todos estes revezes contra Descartes, a influência de suas contribuições provocou um movimento para a "construção de equações" como um ramo da matemática, mostrando que tanto sua concepção de exatidão quanto sua classificação de problemas pertencentes à "verdadeira geometria" tinham alcançado seus leitores.

CAPÍTULO 3

A REVITALIZAÇÃO DA ÁLGEBRA INGLESA NO SÉCULO XVII E O TRATADO DE ÁLGEBRA DE JOHN WALLIS.

As pesquisas de Harriot em Ótica, Astronomia e Matemática foram realizadas sob o patrocínio de Henry Percy, conde de Northumberland, enquanto Oughtred era um clérigo empregado pela pequena nobreza local como tutor de seus filhos, particularmente Thomas Howard, conde de Arundel. Numa época em que esse tipo de trabalho para um matemático era quase inexistente, tais patrocínios foram essenciais para o florescimento da pesquisa matemática inglesa. Outro importante aristocrata foi Charles Cavendish, que frequentemente trazia o melhor da matemática continental para a Inglaterra. Através dele, Oughtred teve conhecimento das ideias de Bonaventura Cavalieri. Ao mesmo tempo, aconteceram movimentos em direção à profissionalização da figura do matemático. O Gresham College foi fundado em 1597 para prover palestras públicas em sete disciplinas incluindo geometria e astronomia. Em 1619, Henry Savile (1579-1632) fundou as cadeiras de geometria e astronomia de Oxford e doou sua biblioteca pessoal, que continha centenas de textos manuscritos, cópias de textos antigos e outras raridades. Henry Briggs (1561-1631), mais conhecido hoje em dia pelo seu trabalho com logaritmos, foi nomeado o primeiro professor saviliano de geometria e John Bainbridge (1582-1643) o professor de astronomia.

Ainda que cadeiras de geometria e astronomia estivessem disponíveis aos alunos de Oxford, apenas em 1631, a publicação da *Chave matemática*, de Oughtred e do *Praxis*, de Harriot, trouxeram definitivamente para a Inglaterra a análise simbólica de Viète. A matemática pura não era tida como disciplina digna de estudos acadêmicos, embora existissem muitos "praticantes" desta ciência. Assim, William Oughtred (1575-1660), como John Wallis depois dele, fora apresentado à aritmética por um membro da família. Seu pai o instruiu em aritmética básica e apenas quando estudou no King's College em Cambridge aprendeu um pouco a respeito de matemática grega, mas não por intermédio de seus professores ou tutores, e sim por esforço próprio. Pycior cita uma passagem de Oughtred, *To the english gentrie*, p.8-9: "The time which over and above those usuall studies [at Cambridge] I employed upon mathematicall sciences, I redeemed night by night from my natural sleep, defrauding my body, and inuring it to watching, cold, and labour, while most others tooke their rest."

Se Viète escreveu filosoficamente sobre a arte analítica, Oughtred tentou torná-la acessível a estudantes novatos. Mesmo vivendo uma vida eclesiástica como reitor de Albury nos últimos 50 anos de sua vida, seu ensino nunca cessou, dando aulas particulares em sua sala, em correspondência com estudantes de matemática provindos da comunidade universitária ou praticantes da época. Entre seus estudantes residentes e correspondentes no período dos anos 1640 e 1650 estavam grandes personalidades da ciência inglesa como Seth Ward[61] (1617-1689), Christopher Wren[62] (1632-1723) e o próprio John Wallis.

Além disso, a matemática continental foi "importada continuamente" e, consequentemente, essas ideias externas, antes transmitidas apenas de um indivíduo a outro, se tornaram mais facilmente acessíveis. A teoria dos indivisíveis de Cavalieri se tornou mais conhecida com o *Opera Geometrica* (1644) de Torricelli. Em 1646, Francis van Schooten editou a primeira coletânea do trabalho de Viète, seguida de uma tradição para o latim da geometria de Descartes, em 1649. A ascensão de Wallis ao *Savile-professorato* garantiu a posição central na explosão de criatividade que começou na Inglaterra a partir dos anos 1650, com a formação de uma crescente "escola" de analistas ingleses associada aos movimentos em direção à aceitação da álgebra como disciplina acadêmica.

O projeto de Wallis como professor de Geometria em Oxford era ambicioso: elevar a qualidade da produção matemática inglesa equiparando-a a continental. O cenário não poderia ser pior: A Inglaterra estava fora do eixo da produção matemática por quase três séculos e sofrera nos seis anos anteriores uma guerra civil que praticamente paralisou a produção acadêmica. Mesmo assim, em um curto espaço de tempo, o status da matemática inglesa mudaria radicalmente: em aproximadamente trinta anos, ela figurava entre as mais avançadas da Europa.

---

[61] Escreveu alguns tratados matemáticos, sendo o mais conhecido, "*Idea trigonometriae demonstratae* (1654)".

[62] Alcançou o cargo de professor saviliano de astronomia em Oxford em 1661. Dentre suas contribuições para a matemática estão: a retificação de um arco de ciclóide (1658), resultados envolvendo a espiral logarítmica e o hiperbolóide de revolução. Na astronomia, foi o primeiro a resolver o problema de Kepler sobre a dissecção do semicírculo por uma linha que passa por um ponto dado em seu diâmetro, em uma razão também dada. Além disso, obteve independentemente, uma demonstração da terceira lei de Kepler, formulou a lei de atração gravitacional e outros resultados em ótica.

> Para alguém que estivesse presente na aula inaugural de Wallis a possibilidade da Inglaterra alcançar o mesmo nível da produção da França ou da Holanda deve ter soado como algo remoto. Todavia, em trinta anos uma revolução ocorreu na Inglaterra e a Matemática passou a figurar entre as mais avançadas da Europa. (Stedall, 2002, p.7) [63]

3.1. A década de 1650 – Arithmetica Infinitorum: A defesa da álgebra simbólica e controvérsias nas correspondências de Wallis.

A defesa do estilo simbólico era oportuna na Inglaterra do século XVII, pois Francis Bacon tinha delineado sua abordagem indutiva para a ciência e o movimento para o estilo conciso alinhava-se com seu ataque aos ídolos da vida pública[64] era um atributo do raciocínio algébrico. A escolha das palavras era essencial e quanto mais sucinta a linguagem, melhor.

> A Álgebra era excepcionalmente econômica e lúcida, pois era simbólica. Como Bacon e seus seguidores científicos justapuseram prosa científica à prosa ornada, Wallis justapôs Álgebra simbólica à Geometria Tradicional. (Pycior, 1997, p.121)[65]

Este argumento foi utilizado por Wallis para defender seu *Arithmetica Infinitorum* de uma das críticas de Fermat: a ausência de provas geométricas. No capítulo 78 do tratado de Álgebra reitera sua defesa do método de demonstração algébrico e por indução:

> As proporções de minha Aritmética de Infinitos são (algumas delas) demonstradas através do método da indução: o que é claro, óbvio e simples (…) O que, a meu ver, e muito mais gratificante e digno de concordância do que demonstrações apagógicas e trabalhosas, (reduzindo a absurdos e impossibilidades). (Wallis, 1685, p. 298)[66]

---

[63] To an observer at Wallis's inaugural lecture the prospect of England catching up with France or the Netherlands must have seem remote. Yet within thirty years a revolution had taken place and English mathematics was among the most advanced in Europe. (Stedall, 2002, p.7)

[64] Idols of the market-place; Idola fori - tradução nossa.

[65] Algebra was exceptionally economical and lucid because it was symbolical. As Bacon and his scientific followers juxtaposed scientific prose to ornate prose, Wallis juxtaposed symbolical algebra to tradicional geometry. (Pycior, 1997, p.121)

[66] Those propositions in my Arithmetick of Infinites are (some of them) demonstrated by the way of induction: which is plain, obvious and easy (…) Which to me, is much more grateful and agreeable, than operose Apagogical Demonstrations, (by reducting to Absurdities and Impossibilities). (Wallis, 1685, p. 298)

Criticando a "pompa" das demonstrações com "linhas e figuras", acrescenta:

> Apesar de tais linhas e figuras serem necessárias, em momentos a verdade de uma proposição depende da posição local, e ainda que possam vir a ser úteis, por vezes como um estímulo à fantasia ou à própria imaginação (…) Mesmo onde a verdade de uma proposição dependa meramente da natureza do número ou da proporção; (e seja igualmente aplicável a outras quantidades assim como a linhas e figuras:) É bem mais natural provar isso de forma abstrata da natureza do número e da proporção, sem afetar a demonstração em si. (Wallis, 1685, p.298)[67]

No capítulo 79, "Of monsieur Fermat's objections to it", defende-se das objeções de Fermat, que ansiava nas demonstrações de Wallis por 'mais geometria':

> Mas eu escolho o caminho mais curto, porque dessa maneira eu sou capaz de, em um discurso contínuo resumido, expôr-las de maneira concisa, o que da outra forma (com mais pompa e solenidade) será parcelada em uma série de lemas e proposições preparatórias. O que, ainda que possa parecer mais augustino, seria menos edificante do que se eu reduzisse tudo a uma breve sinopse. (Wallis, 1685, p.305)[68]

É oportuno salientar que a correspondência com Fermat (e outros) cria uma "antipatia" com os franceses e, de certa forma, determina o tom "nacionalista" com o qual Wallis escreve seu *Tratado de Álgebra*. As correspondências de Wallis estão editadas no livro de BEELEY & SCRIBA (2003) e são de difícil análise, pois a organização do livro não agrupa as cartas por assunto. A autora Jacqueline Stedall, em uma recente conferência em Oxford (2010), analisa exatamente a postura de Wallis como controversialista e mostra, neste trabalho, como

---

[67] For though such Lines and Figures be necessary where the Truth of a proposition depends on Local Position: And though they be otherwise of use, sometimes assisting the Fansy or Imagination (…) Yet where the truth of the Proposition depends merely on the nature of the Number or Proportion; (and is equally applicable to other Quantities as well as to Lines and Figures:) It is much more natural to prove it abstractly from the nature of the Number and Proportion; without such embarrassing the Demonstration" (Wallis, 1685, p.298)

[68] But I chose the shorter way, because by this means I might in a compendious continued discourse deliver that in brief, which in the other way must (with more pomp and solemnity,) be parceled out into several Lemma's, and preparatory propositions. Which, though it might look more August, would be less edifying than if I reduce the same to a brief Synopsis. (Wallis, 1685, p.305)

a correspondência com matemáticos de maior prestígio faz com que Wallis desenvolva uma postura defensiva com grande habilidade para distorcer os fatos em benefício próprio.

3.2 Os anos de 1660 e 1670 – A campanha de Collins por um livro-texto de álgebra inglesa: álgebras de Rahn e de Kersey.

> Que muitos dos sucessores matemáticos ingleses de Oughtred preocuparam-se mais com quais símbolos algébricos adotar do que com a legitimidade do estilo simbólico, foi um tributo a *A chave* (...). A partir desse ponto, graças principalmente a Oughtred, mas também (…) até certo ponto a Harriot, apareceriam poucas objeções inglesas sérias contra o estilo simbólico. (Pycior,1997, p.48-49)[69]

Os trabalhos de Oughtred e Harriot não foram exclusivamente responsáveis pelo entusiasmo "analítico" que gerou a demanda por um livro atualizado de álgebra voltado para o público inglês. Pensadores ingleses sentiram a influência das concepções da geometria analítica e da teoria de equações cartesiana. Wallis leu ao menos em parte La Geomètrie por volta do ano de 1648[70].

Na Holanda, a publicação da Geometria de Descartes, editada por Frans Van Schooten, levou a uma onda de descobertas de novos resultados, muitos deles inclusos na sua segunda edição de 1650/51. Em 1664, Newton estudou esta segunda versão em latim, o que guiou toda sua pesquisa subsequente. Os anos de 1660 serviram de cenário para a publicação de diversos trabalhos em álgebra cartesiana, de autores franceses e holandeses, mas na Inglaterra do mesmo período pouco foi produzido. O movimento comum era de reimprimir ou traduzir textos existentes e adicionar material novo, pois isso permitia introduzir novas ideias em menos tempo e também acrescentar tratados menores ao fim.

De todos os "convertidos" à nova arte, John Collins (1625-1683), membro da Royal Society, perseguiu mais insistentemente o projeto de editoração de um livro inglês de Álgebra que cobrisse os princípios da arte de uma maneira apropriada para os praticantes e universitários e ainda os desenvolvimentos mais recentes da mesma. Tentou repetidamente

---

[69] That many of Oughtred's English mathematical successors worried about which álgebraic symbols to adopt, rather than about the legitimacy of the symbolical style, was a tribute to *The Key* (…) From this point on, thanks largely to Oughtred but also (…) somewhat to Harriot, there would be few serious English challenges to the symbolical style. (Pycior,1997, p.48-49)

[70] Ibid, p.75.

influenciar Isaac Newton e, por vezes, John Wallis, a produzir o desejado livro, mas morreu sem ver os resultados de seus esforços. O *Tratado de Álgebra* de Wallis foi editado em 1685 e a *Aritmética Universal* de Newton, em 1707. Por diversas vezes Collins trouxe desenvolvimentos matemáticos do continente à atenção de Wallis, Newton e outros matemáticos ingleses, assim como Cavendish fizera antes dele. Por exemplo, manteve Wallis a par do interesse de práticos e letrados de Cambridge pelo problema de extrair a raiz cúbica de um binômio, mesmo quando este envolve números complexos.

Em 1668, ajudou Pell a editorar a tradução da álgebra de J.H. Rahn e em 1673 viu a álgebra de Kersey ser impressa, além de usar seus contatos na imprensa para editar muitos dos trabalhos de Isaac Barrow. Mesmo não sendo um matemático de grande renome, sua contribuição como divulgador é preciosa pois os grandes matemáticos ingleses trocavam correspondências com Collins e frequentemente recebiam através deste notícias sobre os avanços matemáticos da Europa[71].

Mesmo sendo a *Chave* um livro voltado para iniciantes, a dificuldade de compreender seu conteúdo era grande para alunos menos talentosos que Wallis e Newton. Assim, após a morte de Oughtred, em 1660, Collins e Wallis discutiram a possibilidade de expandir as explicações da *Chave*, visto que o próprio Oughtred se recusava a fazê-lo. Apesar de inicialmente incentivar Collins a perseguir esse feito, a opinião de Wallis era a mesma de seu mentor. Ele considerava o livro um clássico e achava que o mesmo deveria ser editado como foi escrito, sem comentários ou alterações. Os argumentos de Wallis acabaram por convencer Collins a não promover uma revisão do livro em 1667. O livro foi impresso novamente sem os acréscimos esperados por Collins, que contou a John Pell da necessidade pelos tutores de Cambridge de um livro que utilizasse mais palavras que o *Praxis* e/ou a *Chave*.

Um dos amigos pessoais de John Wallis e profundo conhecedor da matemática de Harriot, John Pell (1610/11-1685), nasceu em Southwick, Sussex, em uma família tradicional inglesa. Matriculou-se no Trinity College, em Cambridge, aos treze anos e aos vinte já era professor na escola Collyer em Horsham e na academia Chichester. Procurando oportunidades de estudar matemática, em 1643 alcançou o cargo de professor em Amsterdam onde ficou por três anos antes de aceitar uma posição de professor de matemática na faculdade de Orange, em Breda. Retornou à Inglaterra em 1652 a pedido de Oliver Cromwell, primeiro a indicá-lo como palestrante em matemática, que o enviou posteriormente à sua casa, em Zurique.

[71] Ele se correspondia, dentre outros, com Huygens, Sluse e Leibniz.(ibid, p.72)

Retornou novamente à Inglaterra em 1658, após a morte de Cromwell, fez as pazes com os monarquistas e assim obteve duas nomeações que o sustentaram pelo resto de sua vida.

> "Embora Pell não tenha publicado nada importante em álgebra, que ele supostamente dominava, suas iniciais estavam gravadas na edição inglesa da álgebra de Rahn, a qual adicionou comentários extensivos." (Pycior, 1997, p.90)

O livro de Rahn versava sobre Diofanto, Viète, Descartes, Schooten e outros com o objetivo de prover a primeira introdução sobre o assunto em alemão e foi publicado por Johann Heinrich Rahn (1622-1676) em Zurique, 1659. Existem evidências de que Rahn foi aluno de Pell e que estudou com ele no período em que esteve em Zurique. Sendo assim, a *Teutsche Álgebra* seria de certa forma também de Pell.

> Embora não fosse o compêndio de álgebra moderna elementar que Collins esperasse, a edição inglesa da Álgebra de Rhan trouxe importantes lampejos de álgebra cartesiana para o estudante inglês ... A segunda parte da álgebra invocava especificamente o nome de Descartes ao retomar as partes mais importantes de sua teria de equações. Foi aqui que, no que diz respeito às raízes negativas e imaginárias, o trabalhou diferiu substancialmente de textos ingleses prévios. (Pycior, 1997, p.92)[72]

Um dos pontos principais era o teorema fundamental da álgebra, no qual se destacavam os três tipos de raízes. Nesse ponto os estudantes observavam uma defesa das raízes "negativas" em oposição às raízes "falsas" de Descartes. A *Álgebra* utilizava a representação geométrica de quantidades em sentidos opostos para justificar a existência de tais raízes. Mesmo assim, o trabalho trouxe para o vocabulário inglês a descrição cartesiana de que estes seriam números "menores que nada". Apesar da ideia desta mudança de designação já ter antecedentes (em Oughtred), a edição inglesa da *Álgebra* de Rahn traz, segundo Pycior: "A primeira defesa clara das raízes negativas, em língua inglesa"[73].

Quanto aos números "imaginários" de Descartes, eram aqui referidos como "impossíveis", por representarem uma impossibilidade de resolução de um problema. Uma quantidade sem precedentes de raízes complexas era dada como exemplo neste livro, mas todas deviam ser marcadas com um símbolo de impossibilidade. A influência cartesiana então

---

[72] Not the compendium of early modern álgebra Collins hoped for the English edition of Rahn's *Álgebra* yet brought important glimpses of Cartesian álgebra to the English student…The second part of the *Álgebra* specifically invoked Descartes' name as it restated major parts of his equation theory. It was here that in tackling negative and imaginary roots, the work departed substantially from existing English texts. (ibid, p.92)

[73] the first clear-cut defense of negative roots to appear in english language, ibid, p.93

excluiria estes números do começo da Álgebra inglesa: “Em resumo, a algebra que foi importada para a Inglaterra foi a de Viète, e não a de Cardano. Na Inglaterra, uma apreciação profunda do estilo simbólico chegou primeiro; a abertura para o universe em expansão da álgebra seguiu-se lentamente”[74].

Inicialmente foi Thomas Brancker (1633–1676) e não Pell que tomou a tarefa de traduzir a *Algebra* de Rahn para o inglês. Mas Pell tomou parte do projeto fazendo acréscimos e praticamente dobrou o conteúdo do livro, provavelmente por causa de seu envolvimento anterior com Rahn. Com Pell escrevendo à medida que o livro era impresso, este se estendeu até 1668 e ainda foi atrasado pelo grande incêndio de 1666. Em 1667, as primeiras páginas chegaram a Collins, que sugeriu uma expansão da introdução, o que Pell ignorou. Brancker foi diplomaticamente sugerido a convencê-lo. A versão inglesa de Álgebra de Rahn foi impressa como Pell escreveu não teve nenhuma reedição.

Collins depositou suas esperanças no texto de John Kersey (1616-1701), um respeitado professor de matemática e agrimensor de Londres. Quando finalmente completada, a obra *Elementos da arte comumente chamada álgebra, exposto em quatro livros* de Kersey alcançou muitos dos critérios que Collins e seus colaboradores tinham para a Álgebra inglesa. Ofereceu um material introdutório adequado sobre notação, métodos matemáticos e capítulos com descrição em prosa. No prefácio, Kersey tenta promover a álgebra como uma ciência independente, baseada no método analítico e capaz de resolver problemas difíceis de matemática. Kersey inicia seu livro explicando os preceitos da álgebra e relegando questões aritméticas apenas ao capítulo 14 do primeiro livro, da mesma forma que Oughtred deixou a geometria para o final. Sobre notação, mostrava as notações de potências de Descartes e Harriot, mas sugeria a segunda para os iniciantes. Nesse ponto, a notação de potências não fazia nenhuma referência à geometria baseando sua natureza na aritmética, explicação compartilhada por Wallis no *Tratado*.

Como Pell, vemos em Kersey uma defesa relutante dos números negativos. Ele fornecia raízes negativas como solução de equações, e em seus exemplos, verificava que tais raízes satisfaziam a equação dada. Explicava que as quantidades negativas eram como dívidas, as operações que as envolviam eram normais, mas ainda assim carregava a descrição cartesiana de estas eram “menos que nada” e, como Cardano, as rotulava de “fictícias”. Sua definição de raiz negativa era idêntica à contida na *Álgebra* de Rahn.

[74] In short, the álgebra that was imported into England was Viète’s, not Cardano’s. In England, a deep appreciation of the symbolical style came first; openness to the expanding universe of álgebra followed slowly, ibid, p.40.

A maior contribuição de Kersey foi sua explicação da impossibilidade dos números complexos: "raízes impossíveis são aquelas cujos valores não podem ser concebidos nem aritmeticamente nem geometricamente"[75]. Kersey, diferentemente de Pell, nem fornecia as raízes complexas, pois sua impossibilidade não nos permite "sequer escrevê-las". O tamanho do livro o tornou tedioso e o foco em equações de grau três ou menos o tornou execessivamente elementar.

As edições inglesas da *Álgebra* de Rahn e da *Álgebra* de John Kersey foram os frutos imediatos da necessidade de um livro inglês de Álgebra. Novamente, ambos falharam em prover as necessidades dos leitores ingleses menos talentosos e as expectativas de Collins, mas sua influência foi substancial. Ambos os livros colaboraram para a aceitação dos números negativos, embora também importando a definição cartesiana de que eles seriam "menos que nada". Mais ainda, categorizaram os números complexos como sinal de impossibilidade, e à medida que a influência cartesiana se fez presente, os entusiastas da arte analítica tinham que lidar com a dificuldade conceitual dos números negativos e imaginários, problema atacado mais tarde por Wallis.

3.3 1685 - O Tratado de álgebra de Wallis

> Wallis primeiramente deixou clara sua intenção de escrever um livro sobre álgebra em 1657, ao término de sua *Mathesis Universalis*, onde ele explicou que pretendia incluir a "doutrina da análise, a perfeição da aritmética", mas ele já tinha escrito bem mais do que inicialmente pretendia (Stedall, 2002 p.8)[76]

No prefácio ao leitor, Wallis afirma ter terminado o texto e enviado para impressão em 1676. Por algum motivo, o processo de impressão atrasou até agosto de 1683. Nesse meio tempo, continuou fazendo acréscimos ao texto e também inseriu nele outros trabalhos escritos anteriormente, tendo a impressão final sido concluída em 1685. Essas 'pausas' eram constantes na editoração de livros matemáticos, que ofereciam pouco retorno financeiro. Os vendedores ingleses de livros, já haviam perdido uma considerável quantia de dinheiro

---

[75] ibid, p.99.

[76] Wallis first stated his intention of writing a textbook on álgebra in 1657 at the end of his Mathesis Universalis, where He explained that he hoped to include the 'doctrine of analysis, the perfection of arithmetic' but he had already written more than he intended. (Stedall, 2002 p.8)

mesmo com autores importantes como Wallis e Barrow, e assim evitavam assumir riscos. Wallis passou a depositar seus artigos na Royal Society, e, em 1677, Collins já possuía diversos deles. É difícil precisar quando Wallis começou a escrever o *Tratado de Álgebra*, mas ele certamente teve tempo para acrescentar o máximo possível ao livro. A Royal Society garantiu a compra de 60 exemplares e uma proposta de publicação circulou em 1683 para buscar os 40 assinantes restantes necessários a garantir a publicação, que efetivamente ocorreu em 1685.

O tratado em si merece duas análises. As afirmações de cunho histórico de Wallis se concentram até o 14º capítulo e, a partir deste, temos um compêndio da Álgebra conhecida em sua época. Apesar disso, deixaremos a análise de suas afirmações puramente históricas de lado, juntamente com outros resultados que não concernem às equações algébricas.

Acreditamos que pelo fato de Wallis, ter tido acesso a diversas fontes primárias, e ter conhecido pessoalmente alguns dos grandes gênios de sua época, podemos encontrar afirmações válidas, que podem ser averiguadas em pesquisas posteriores. Pretendemos separar as concepções matemáticas do autor de suas afirmações nacionalistas, ou seja, de sua clara defesa da álgebra britânica e dos ataques pessoais a outros matemáticos.

Quanto à parte matemática de seu tratado, podemos apreciar os desenvolvimentos fornecidos por alguns matemáticos britânicos e analisar a contribuição dos ingleses à matemática continental. Os principais obstáculos epistemológicos na concepção de Álgebra como generalização da Aritmética são a dimensionalidade inerente ao processo de potenciação e o estatuto dos números impossíveis. Pretendemos nos concentrar em três seções principais: a *Álgebra* de Oughtred (caps.15-29), a *Álgebra* de Harriot (caps.30-54) e os capítulos 66 e 67, onde Wallis apresenta uma interpretação geométrica dos números negativos e complexos. Mostraremos que, de Harriot à Wallis, houve um crescente processo de teorização e acréscimo aos manuscritos e textos originais, ou seja, que Wallis construiu sua defesa da álgebra britânica a partir dos trabalhos de Harriot.

Dessa maneira, analisaremos uma passagem em particular da resolução da equação de grau três, onde aparecem raízes imaginárias, comparando o trabalho de Wallis de 1685 com o texto de Harriot como editado por Stedall (2003), Harriot como editado por Warner (1631). Em seguida, mostraremos um resultado original de Wallis: uma construção dos números negativos e imaginários expandida para todo o plano complexo mais tarde por Argand e Gauss.

CAPÍTULO 4

O CONTEÚDO MATEMÁTICO DO TRATADO: A TEORIA DAS EQUAÇÕES

4.1 A Álgebra de Oughtred

A partir do 15° capítulo de sua obra, Wallis começa a descrever o conteúdo da *Chave da matemática*, ou simplesmente *Clavis*, de William Oughtred.

> A admiração de Wallis pela *Clavis* já foi abordada, mas certamente tal ponto merece um estudo mais aprofundado, pois a *Clavis* assumiu papel central no desenvolvimento matemático de Wallis e ele, por sua vez, tornou-se o mais ardente e permanente defensor do livro. (Stedall, 2002, p.77)[77]

Apesar de contemporâneo, ou até mesmo antecedente, o trabalho de Harriot é considerado como posterior e o argumento para tal é o fato da *Praxis* ter sido publicada depois da *Clavis*, embora no mesmo ano. Acreditamos que essa organização textual serve, para Wallis, a um propósito didático. Sendo o texto de Oughtred mais básico, voltado para iniciantes, viria primeiro, enquanto que o de Harriot, dotado de maior complexidade, naturalmente depois.

Os temas contidos em *Clavis*, segundo a apresentação de Wallis, giram em torno da apresentação da álgebra como uma generalização da Aritmética. O nosso interesse principal nesta parte é mostrar a transição de Viète para Oughtred, e então deste para Harriot, em termos de: notação, concepção de álgebra como generalização da aritmética, o status dos números negativos e complexos.

---

[77] Wallis's admiration of the *Clavis* has already been touched on, but at this point deserves further study, for the *Clavis* played a crucial role in Wallis's mathematical development and he in turn became the book's most ardent and lasting supporter. (Stedall, 2002, p.77)

4.1.1 Notação de Oughtred

Oughtred é bastante próximo de Viète. Usa vogais para as quantidades desconhecidas e consoantes para as conhecidas, todas maiúsculas. Para efeito de brevidade descritiva, comparemos uma mesma sentença matemática escrita por Viète e outra por Oughtred:

Viète:

$$\frac{\textit{A Quadrate, into B Cube,}}{\textit{C D E Solid,}} \quad \textit{Equal to F G}$$

Oughtred:

$$\frac{AqBc}{CDE} = FG.$$

Inicialmente, vemos que a notação de Oughtred é uma abreviação da de Viète, mas também utilizava outros símbolos:

i) Æ para o retângulo de duas quantidades _A_ e _E_ onde _A_ é a maior dentre as duas.

ii) Z para a soma das quantidades.

iii) X para a diferença das quantidades.

iv) Z para a soma de seus quadrados.

v) X para a diferença de seus quadrados.

vi) AqEq ou Æq para o quadrado de seu retângulo.

vii) Z para a soma de seus cubos.

viii) X para a diferença de seus cubos.

ix) AcEc ou Æc para o cubo do retângulo das duas quantidades.

Wallis acrescenta dois símbolos com o objetivo de evitar frações:

x) $S = \frac{1}{2}Z$ para metade da soma.

xi) $V = \frac{1}{2}X$ para a metade da diferença.

Com esses símbolos, é possível construir uma teoria de equações de até terceiro grau, mas tal escolha de significados não ajuda uma manipulação puramente algébrica e particularmente os símbolos iv, v, vii e viii não diferenciam bem o significado intencionado. De fato, a grande multiplicidade de símbolos apresentados em sua Álgebra talvez seja a maior dificuldade para os leitores comuns. Embora Oughtred não avance no Clavis muito além das equações quadráticas, Wallis comenta que, pelo ano de 1657, descobriu através desta simbologia como resolver equações de grau três, e descreverá seu método em outro capítulo. O uso constante dos mesmos símbolos com exatamente o mesmo significado auxilia, segundo Wallis, a "descobrir a verdadeira natureza de diversas operações intrincadas" (Wallis, 1685, p.67) e ainda a comprimir bastante informação, ocupando muito pouco espaço:

> E dessa forma (com outra como as designações abreviadoras semelhantes) ele [Oughtred], em sua *Clavis*, uma grande quantidade de boa geometria tratada de maneira bem apresentada e resumida; e você dificilmente encontrará algo similar em qualquer autor precedente a ele (…). (Wallis, 1685, pág. 67)[78]

4.1.2 Operações em espécie

No capítulo 16, Wallis mostra como proceder com as operações "em espécie":

Adição:

To	3 A	A	5 A	3 A	A	A + B	A + B
Add	A	— A	— 3 A	— 5 A	E	A — B	A — C
Sum	3 A + A	A — A	5 A — 3 A	3 A — 5 A	A + E	2 A	2 A + B — C
That is	4 A	0	2 A	— 2 A			

Subtração:

From	4 A	3 A	5 A	A	A	A
Take	A	5 A	— 3 A	E	B + C	B — C
Refts	4 A — A	3 A — 5 A	5 A + 3 A	A — E	A — B — C	A — B + C.
That is	3 A	— 2 A	8 A			

Multiplicação:

Drawing	A	A + E	A — E	A + E + I	B + 1	3 A	A E	A E
Into	E	B	B	Z	A	2 A	A	A E
Makes	A × E	B A + B E	B A — B E	Z A + Z E + Z I	B A + A	6 A A	A A E	A A E E
Or	A E					6 A q	A q E	A q E q

[78] And by this means (with other the like compendious designations) he hath [Oughtred], in his Clavis, a great deal of very good Geometry brought into a very narrow room; and you shall hardly find it in any who have written before him (…). (Wallis, 1685, pág. 67)

Entre binômios:

As	A+E	A+E	AB+CD
Into	A+E	A−E	AB+CD
	Aq+E +E+Eq	Aq+AE −AE−Eq	ABq+AB×CD +AB×CD+CDq
Makes	Aq+2AE+Eq	Aq−Eq	ABq+2AB×CD+CDq

Divisão:

Applying	AE	BAc	BA+A	BA−CA	6Aq that is 2×3AA
To	A	Aq	A	B−C	3A 3A
Gives	E	BA	B+1	A	2A 2A

Wallis procura esclarecer a propriedade comutativa e uma simplificação com um exemplo aritmético:

$$3\times 4 = 4\times 3. \qquad \frac{6\times 5}{3} = \frac{6}{3}\times 5.$$

$$AB = BA. \qquad \frac{AB}{C} = \frac{A}{C}B = \frac{B}{C}A.$$

A divisão de polinômios segue exatamente como fazemos, embora com um layout diferente:

$$\begin{array}{lll}
\textit{Divisor.} & \textit{Dividend.} & \textit{Quotient.} \\
A-E) & AAA-EEE & (AA,+AE,+EE. \\
 & AAA-AAE & \\
\hline
 & +AAE-EEE & \\
 & AAE-AEE & \\
\hline
 & +AEE-EEE & \\
 & AEE-EEE & \\
\hline
 & 00 \quad 00 &
\end{array}$$

A explicação é a mesma que utilizamos comumente em sala de aula: pergunta-se por qual quantidade temos que multiplicar A (primeiro membro do divisor) para obter AAA, primeiro membro do dividendo. Descobrindo que este é AA, o multiplicamos por A-E e subtraímos o resultado de AAA-EEE, seguindo o algoritmo que conhecemos. Uma boa apresentação da divisão polinomial aqui serve didaticamente para explicar o "método de redução" de equações de grau superior, onde Wallis mostra (seção de Harriot) que conhecendo uma raiz podemos reduzir uma equação proposta a uma mais simples, que contém as raízes restantes.

De particular interesse é o método de extração de raízes.Wallis mostra diferentes notações.

Extração de raízes quadradas:

Square	Aq	Aqq	4AqBq	A	AAB	2AqBq	a^4	a^4b^3
Root	A	Aq	2AB	$\surd$A	$\surd$AAB	$\surd$2AqBq	a^2	$\surd a^4b^3$
Or					A$\surd$B	AB$\surd$2		$a^2b\surd b$

Extração de raízes cúbicas:

Cube	Ac	Acc	8AcBc	A	AcB	4AcBc	a^6	a^3b^2
Root	A	Aq	2AB	$\surd$c.A	$\surd$c.AcB	$\surd$c.4AcBc	a^2	$\surd$c.a^3b^2
					A$\surd$c.B	AB$\surd$c.4		$a\surd$c.b^2

Vemos aqui um misto da notação de Oughtred com a notação sobrescrita (Descartes). A extração da raiz de um binômio quadrado perfeito é útil para o método de completar quadrados (Harriot).

such note of Radicality.)

As for extracting the Square Root of Aq + 2AE + Eq, I first inquire the Root of Aq, which is A, (and having subducted the Square thereof) double A, and thereby (as by a Divisor,) inquire what quantity multiplied into it will make the first member of the Remainder 2AE, which I find to be E; and this being multiplied into itself and into 2A, and the Product subducted, nothing remains. So that the Root is A + E.

$$\begin{array}{l} Aq + 2AE + Eq\ (A, + E. \\ \underline{Aq} \\ \quad + 2AE + Eq \\ \quad \underline{+ 2AE + Eq} \\ \quad\quad 00 \quad 00 \end{array}$$

Fig.4.1.2.1- divisão polinomial

O capítulo seguinte lida com as operações com frações e, pelos exemplos, fica bem clara a intenção de “aritmética generalizada”. O símbolo x para a multiplicação é, segundo Wallis, inovação devida a Oughtred.

Multiplicação:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{4}{\cancel{16}}} \times \frac{\overset{5}{\cancel{20}}}{\underset{3}{\cancel{27}}} = \frac{5}{12}. \quad \frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{9} \times \frac{5}{\underset{3}{\cancel{6}}} = \frac{20}{27}. \quad \frac{5}{1} \times 3\frac{\overset{13}{\cancel{1}}}{4} = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}.$$

$$\frac{A}{B} \times B = \frac{A}{B} \times \frac{B}{1} = A. \quad \frac{A}{B} \times Z = \frac{ZA}{B}. \quad \frac{A}{B} \times \frac{ZA}{C} = \frac{ZAq}{BC}. \quad \frac{AB}{CD} \times \frac{CG}{BF} = \frac{AG}{DF}.$$

Extração de raízes:

$$\sqrt{}\ \frac{4}{25} = \frac{\sqrt{}\ 4}{\sqrt{}\ 25} = \frac{2}{5}. \qquad \sqrt{}c\ \frac{27}{125} = \frac{\sqrt{}c\ 27}{\sqrt{}c\ 125} = \frac{3}{5}.$$

$$\sqrt{}q\ \frac{Aq}{Bq} = \frac{A}{B}. \quad \sqrt{}c\ \frac{Ac}{Bc} = \frac{A}{B}. \quad \sqrt{}\ \frac{AqB}{CqE} = \frac{\sqrt{}AqD}{\sqrt{}CqE} = \frac{A\sqrt{}D}{C\sqrt{}E}.$$

Vale tecer comentários sobre os símbolos para indicar raízes diferentes. Quando se trata somente das raízes quadradas, o símbolo simples de raiz é suficiente. Contudo, quando se trata de graus superiores ou raízes de graus de diferentes na mesma expressão, Oughtred utiliza um método ainda antiquado, de difícil generalização, por letras:

$\sqrt{\ }$, $\sqrt{q}$, $\sqrt{c}$

O autor ainda não faz uso da notação com números para indicar o tipo de raiz:

$\sqrt[2]{\ }$, $\sqrt[3]{\ }$

4.1.3 A teoria de proporções

Tendo encerrado as operações com frações, Wallis expõe noções básicas da teoria das proporções no capítulo 19, referindo-se ao quinto livro de Euclides. Porém, ele o faz deixando rapidamente seus conceitos e transpondo-os para noções aritmético-algébricas, com frações e números. A definição é que quatro quantidades estão em proporção se e unicamente se "o produto dos meios é igual ao produto dos extremos". A partir desta noção, Wallis afirma que Oughtred foi capaz de resumir todo o conteúdo das proposições de Euclides:

> Ele infere também diversas argumentações a respeito da proporção na quinta de Euclides. Se quatro quantidades são proporcionais ($A: \alpha :: B : \beta$), elas são também de forma alternada, inversa, composta, dividida, convertida e mista: o que contém a maior parte do livro quinto dos elementos de Euclides.[79] (Wallis,1685, p.81)

[79] He thence infers also the several argumentations concerning proportion in the fifth of Euclid. If four quantities be proportional, ($A: \alpha :: B : \beta$) they are also proportional in alternation, inversion, composition, division, conversion and mixtly: which contains the great part of the fifth book of Euclides elements (Wallis,1685, p.81)

Aqui há uma observação importante sobre proporções contínuas que será utilizada para encontrar as soluções da equação de terceiro grau:

Se três quantidades (a, b e c) estão em proporção contínua (a : b :: b : c) então o quadrado do meio dividido por um dos extremos é igual ao outro extremo.

Como corolário, vê-se que formam uma proporção contínua $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{bbb}{aa}$,etc.

Se quatro quantidades formam uma proporção, então a proporção se mantém através de alternância, inversão, composição , etc. Vide tabela:

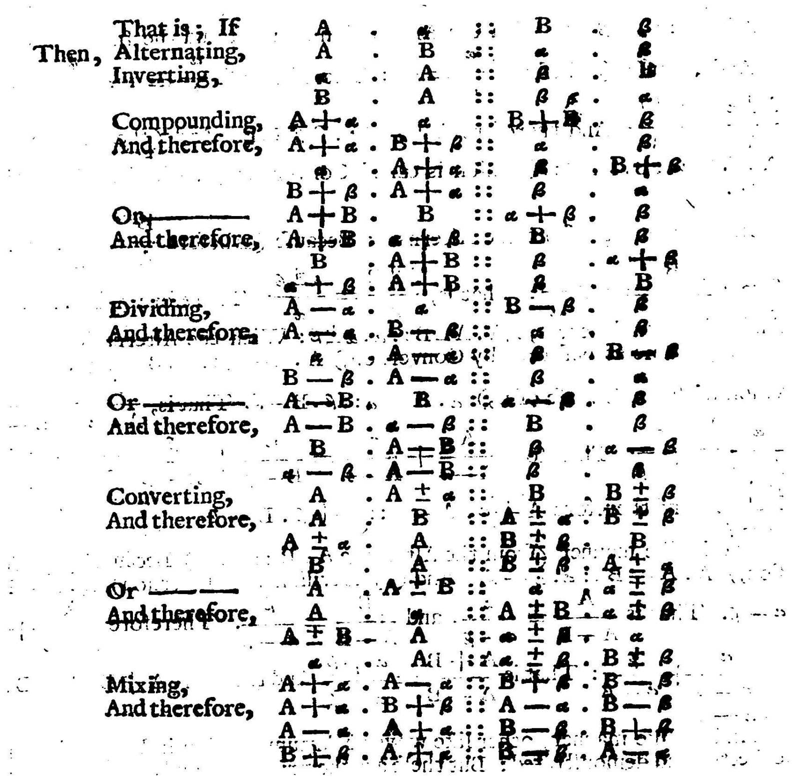

That is ; If $A . \alpha :: B . \beta$
Then, Alternating, $A . B :: \alpha . \beta$
Inverting, $\alpha . A :: \beta . B$
$B . A :: \beta . \alpha$
Compounding, $A+\alpha . \alpha :: B+\beta . \beta$
And therefore, $A+\alpha . B+\beta :: \alpha . \beta$
$\alpha . A+\alpha :: \beta . B+\beta$
$B+\beta . A+\alpha :: \beta . \alpha$
Or ——— $A+B . B :: \alpha+\beta . \beta$
And therefore, $A+B . \alpha+\beta :: B . \beta$
$B . A+B :: \beta . \alpha+\beta$
$\alpha+\beta . A+B :: \beta . B$
Dividing, $A-\alpha . \alpha :: B-\beta . \beta$
And therefore, $A-\alpha . B-\beta :: \alpha . \beta$
$\alpha . A-\alpha :: \beta . B-\beta$
$B-\beta . A-\alpha :: \beta . \alpha$
Or ——— $A-B . B :: \alpha-\beta . \beta$
And therefore, $A-B . \alpha-\beta :: B . \beta$
$B . A-B :: \beta . \alpha-\beta$
$\alpha-\beta . A-B :: \beta . B$
Converting, $A . A\pm\alpha :: B . B\pm\beta$
And therefore, $A . B :: A\pm\alpha . B\pm\beta$
$A\pm\alpha . A :: B\pm\beta . B$
$B . A :: B\pm\beta . A\pm\alpha$
Or ——— $A . A\pm B :: \alpha . \alpha\pm\beta$
And therefore, $A . \alpha :: A\pm B . \alpha\pm\beta$
$A\pm B . A :: \alpha\pm\beta . \alpha$
$\alpha . A :: \alpha\pm\beta . A\pm B$
Mixing, $A+\alpha . A-\alpha :: B+\beta . B-\beta$
And therefore, $A+\alpha . B+\beta :: A-\alpha . B-\beta$
$A-\alpha . A+\alpha :: B-\beta . B+\beta$
$B+\beta . A+\alpha :: B-\beta . A-\alpha$

Fig.4.1.3.1- Propriedades das proporções.

Para Oughtred, a única exigência para que seja possível definir uma proporção entre quantidades é que estas sejam números ou outras quantidades homogêneas. Ou seja, sendo a proporção apenas uma medida de quantas vezes o antecedente contém o conseqüente. Isso reforça em Wallis a opinião que os antigos gregos possuíam algum tipo de Álgebra.

4.1.4 Potenciação, Extração de Raízes e Homogeneidade

O problema de extração de raízes, sempre ligado à condição de homogeneidade, é o ponto chave a ser atacado para destacar a Álgebra da Geometria. Dessa forma, no capítulo 22, sobre a natureza da composição das potências, Wallis faz a defesa da sua visão de álgebra como uma generalização da Aritmética:

> Logo, agora que não precisamos nos apavorar com nomes estranhos como "quadrado-quadrado" ou "supersólido" (…) considerando mais dimensões locais do que a natureza pode admitir: tais nomes difíceis são uma polêmica inútil, um medo vazio, e não trazem nada além de uma repetição contínua da mesma proporção já tantas vezes composta (...) (Wallis, 1685, p.91)[80]

Na mesma página, completando seu argumento, Wallis acrescenta: "Nossos escritores recentes, desde Harriot, contentam-se em sua maior parte em expressar o número de dimensões"[81], insinuando que a aceitação desta concepção é bem aceita na Inglaterra. De fato, esse é o argumento já utilizado por Kersey em sua *Álgebra* com a intenção de liberar as potências da necessidade de representação geométrica. No entanto, para extrair tais raízes ainda existe um "método de tentativas", que segue o grau da raiz a ser retirada. Uma raiz é composta de duas partes *A+E*, sendo chamada então de binomial. A primeira parte é tida como dada e deve ser encontrada numa primeira tabela (*The former table of Powers*, figura à esquerda, abaixo) e a parte desconhecida numa segunda (*The Latter Table of Powers*, figura à direita, abaixo).

Tabela de potências de Oughtred:

[80] So that now we need not to be frighted at the uncouth names of squared-square, Sursolid (…) as importing more local dimensions than nature can admit: for these hard names are but bugbears, and do not but import a continual repetition of the same proportion so many times compounded (…) (Wallis, 1685, p.91)

[81] Our latest writers, since Harriot, do for the most part content themselves with expressing the number of dimensions, ibid, pág.91.

The Former Table of Powers.

A	A²	A³	A⁴	A⁵	A⁶	A⁷	A⁸
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc
1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256
3	9	27	81	243	729	2187	6561
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721

The Latter Table of Powers.

Side, or Root.	[2]	[3]	[4]	[5]	[6]	[7]	[8]	[9]	[10]
A	Aq	Ac	Aqq	Aqc	Acc	Aqqc	Aqcc	Accc	Aqqcc
E	2AE	3AqE	4AcE	5AqqE	6AqcE	7AccE	8AqqcE	9AqqcE	10AcccE
	Eq	3AEq	6AqEq	10AcEq	15AqqEq	21AqcEq	28AccEq	36AqqcEq	45AqccEq
		Ec	4AEc	10AqEc	20AcEc	35AqqEc	56AqcEc	84AccEc	120AqqcEc
			Eqq	5AEqq	15AqEcc	35AcEqq	70AqqEqq	126AqcEqq	210AccEqq
				Eqc	6AEqc	21AqEqc	56AcEqc	126AqqEqc	252AqcEqc
					Ecc	7AEcc	28AqEcc	84AcEcc	210AqqEcc
						Eqqc	8AEqqc	36AqEqqc	120AcEqqc
							Eqcc	9AEqcc	45AqEqcc
								Eccc	10AEccc
									Eqqcc

Era de conhecimento geral que, ao tratar de raízes até grau três, poderíamos fazer demonstrações geométricas para as igualdades como em Euclides. No entanto, para proceder além das três dimensões "da realidade", Wallis destaca como única possibilidade a "multiplicação em espécie", representada na segunda tabela. As partes intermediárias necessárias para completar o quadrado (ou o cubo) são chamadas de *Gnomon*:

5 7	Root.	
25	Aq	
70	2 AE	Gnomon.
49	E q	
3249	Square.	

5 7	Root.	
125	A c	
525	3 A q E	Gnomon.
735	3 A E q	
343	E c	
185193	Cube.	

Logo, para extrair raízes de números grandes, o método descrito por Wallis ainda não envolve a fatoração de um número em primos. Após duas seções extensas sobre o método de extração de raízes exatas (incluindo aproximações decimais de raízes surdas) Wallis mostra que, mesmo que não se queira trabalhar com as aproximações, ainda é possível construir uma Aritmética para as raízes surdas. Durante o capítulo 25, são expostas as quatro operações, potenciação e extração de raízes surdas homogêneas (com mesmo tipo de "radicalidade") ou heterogêneas, e neste caso o autor mostra como reduzir as duas ao mesmo radical:

> A regra do Sr.Oughtred para a redução de tais raízes heterogêneas, ao mesmo tipo é esta, dividir os expoentes de ambas por sua maior medida em comum, e em seguida multiplica o índice ou o expoente de cada uma pelo quociente da outra; e avança as próprias potências até o grau denominado por seus quocientes. (Wallis, 1685, p.107)[82]

[82] Mr.Oughtred's rule for the reduction of such heterogeneous roots, to the same kind is this, divide the exponents of both powers by their greatest common measure, then multiply the index or the exponent of either

Wallis considera a adição e subtração das raízes surdas operações mais complexas do que a multiplicação e divisão, pondo-as em segundo plano. Para Wallis, antes de executar tais operações, faz-se necessário determinar se estas são “comensuráveis” ou não, ou seja, se sua razão se dá em números. Wallis prefere “reduzir os surdos à sua menor irracionalidade livrando-os de todo componente racional” (Wallis, 1685, p.108) e assim basta verificar se suas partes irracionais são idênticas para determinar sua comensurabilidade. No caso da incomensurabilidade, “devemos nos contentar em adicionar ou subtraí-las com os símbolos + e - ”(Wallis, 1685, p.109). As quantidades assim determinadas: binômios, trinômios e assim por diante, dependendo de quantas partes incomensuráveis estão sendo adicionadas ou subtraídas, formam seis “resíduos” (contidos em Euclides):

I. $27 \pm \sqrt{}\,704$. Whose Root is $4 \pm \sqrt{}\,11 = \sqrt{}: 27 \pm \sqrt{}\,704$.
II. $\sqrt{}\,\frac{147}{2} \pm 6$. Whose Root is $\sqrt{}qq\,12 \pm \sqrt{}qq\,\frac{27}{4} = \sqrt{}: \frac{147}{2} \pm 6$.
III. $\sqrt{}\,\frac{245}{3} \pm \sqrt{}\,80$. Whose Root is $\sqrt{}qq\,\frac{80}{3} \pm \sqrt{}qq\,15 = \sqrt{}: \sqrt{}\,\frac{245}{3} \pm \sqrt{}\,80$.
IV. $\sqrt{}\,7 \pm \sqrt{}\,20$. Whose Root, $\sqrt{}b.\,\frac{7}{2} + \sqrt{}\,\frac{29}{4}$. pl. or min. $\sqrt{}r.\,\frac{7}{2} - \sqrt{}\,\frac{29}{4}. = \sqrt{}: \sqrt{}\,7 + \sqrt{}\,20$.
V. $\sqrt{}\,20 \pm 4$. Whose Root, $\sqrt{}b.\,\sqrt{}\,5 + 1$. pl. or min. $\sqrt{}r.\,\sqrt{}\,5 - 1. = \sqrt{}: \sqrt{}\,20 \pm 4$.
VI. $\sqrt{}\,20 \pm \sqrt{}\,8$. Whose Root, $\sqrt{}b.\,\sqrt{}\,5 + \sqrt{}\,3$. pl. or min. $\sqrt{}r.\,\sqrt{}\,5 - \sqrt{}\,3. = \sqrt{}: \sqrt{}\,20 \pm \sqrt{}\,8$.

No fim do capítulo 26, Wallis mostra as regras gerais para obter as raízes de cada um destes resíduos. Isto completa uma demanda de Collins sobre como obter as raízes de tais binômios.

4.2 A Álgebra de Harriot

A álgebra de Harriot compõe o centro da teoria de equações contida no Tratado de Wallis e é apresentada logo após a seção sobre a obra *Clavis*. Esta escolha é justificada:

> Qual das obras foi escrita primeiro, se a do Sr.Oughtred ou a do Sr. Harriot, eu não posso dizer, pois ambas foram escritas muitos anos antes de suas publicações. Mas devo dizer que a do Sr.Oughtred em primeiro lugar, pois foi publicada antes; e porque ele se mantém bastante próximo ao método de Vieta, que o antecedeu. Deste

---

by the others quotient; and advance the powers themselves by such degree as those quotients denominate. (Wallis, 1685, p.107)

> último, o Sr. Harriot faz aperfeiçoamentos subsequentes: os quais suponho que o Sr.Oughtred não tinha visto. (Wallis, 1685, p. 125)[83]

O tratado de Harriot, publicado postumamente por Walter Warner, logo após a publicação de *Clavis* difere, segundo Wallis, em diversos aspectos do método de Viète e Oughtred:

> E tendo feito uma série de aperfeiçoamentos vantajosos nesta arte, e tendo estabelecido a base sobre a qual Descartes formulou suas idéias (embora sem creditá-lo) tendo erguido a maior parte (se não toda) de sua Álgebra ou Geometria. Sem isso, toda a superestrutura de Descartes (eu duvido) jamais teria existido. (Wallis,1685, p.126)[84].

Fica evidente, logo de início, que a intenção dos próximos capítulos é não apenas denegrir Descartes, mas defender um lugar para Harriot na história dos grandes algebristas. Segundo a explicação do próprio Wallis, a primeira seção da *Álgebra* de Harriot visa expor os princípios da logística speciosa, e como "preparar" uma equação. Uma equação está preparada quando: "A maior potência da quantidade desconhecida é afirmativa e não está multiplicada por nenhum termo além de 1; todos os membros da parte desconhecida estão de um lado e a parte absolutamente conhecida do outro" (Wallis, 1685, p.126).

Wallis reconhece que até então nada de diferente tinha sido feito, então explica a notação de Harriot e comenta que esta elimina a ambiguidade que a notação para potências de Viète provoca em alguns autores. Aponta também que a notação iterada de Harriot revela a "composição natural inerente a tais termos" (Wallis, 1685, p.126) destacando, assim, sua origem aritmética, desobrigando estes termos de considerações geométricas. Mais importante é o argumento de Wallis:

> Uma linha desenhada sobre outra implicará um plano ou superficíe; este traçado sobre outra linha fará um sólido: mas se este sólido for traçado sobre uma linha, ou a superfície plana sobre outra, o que obteremos? Um plano-plano? Isso é um monstro na natureza e é menos possível do que uma quimera ou um centauro. Pois largura.

---

[83] Whether that of Mr. Oughtred or this of Mr. Harriot were first written I cannot say: (For they were both written many years before either was published) But I have put Mr. Oughtred's first, because first published; and because he keeps nearest to the method of Vieta, who was before him. Of which Mr. Harriot makes further improvement: Which I suppose Mr.Oughtred had not then seen." (Wallis, 1685, p. 125)

[84] And hath made very many advantageous improvements in this Art; and hath laid the foundation on which Descartes though without naming him, hath build the greatest part (if not the whole) of his álgebra or geometry. Without which, that whole superstructure of Descartes (I doubt) had never been. (Wallis,1685, p.126)

> comprimento e espessura ocupam todo o espaço (...). Mas se considerarmos um número multiplicado por ele mesmo, e esse resultado novamente multiplicado pelo mesmo número, e novamente a mesma operação, e novamente e novamente quantas vezes for desejado, não há, em nada disso impossibilidade, ou dificuldade de apreensão. (Wallis, 1685, p. 126)[85]

Provavelmente, a concepção mais próxima da aritmética motiva Wallis a formular essa alternativa à matemática vigente, concebendo o número como conceito central. Wallis critica a opção de Descartes de chamar as raízes negativas de "falsas" e dá o seguinte argumento:

> For ſince that Negatire or Privative Quantities (as — 3,) are admitted into conſideration, (as importing, ſo much the contrary way to what is ſuppoſed; as if + 3 ſignify, 3 foot *forwards*; the — 3 will ſignify 3 foot *backwards*:) the Root *a*, (now to be ſought, as yet Unknown,) may as well happen to be — 3, as + 3. And therefore we may as well ſuppoſe $a = -3$, as $a = +3$. And (for inſtance) ſuppoſing $aa = 9$; if it be asked, What is the value of *a*? We may ſay indifferently $a = +3$, or $a = -3$: (Since either of them, Multiplied into itſelf, doth produce 9.) Both therefore are *True* Roots: though the one Poſitive, the other Privative.

Aparentemente, ele trabalhava indistintamente com as raízes positivas ou "afirmativas", sejam elas negativas ou "privativas". Mas Wallis dá um passo atrás nessa posição. A existência das raízes privativas depende, de fato, de uma existência física (a concepção de "passo à frente" e "passo atrás") e veremos também que, ao tentar legitimar os complexos, Wallis nega a existência de tais números, mas esboça o conhecimento dos quatro quadrantes e seus sinais.

4.2.1 O método de fatoração e solução das equações quadráticas.

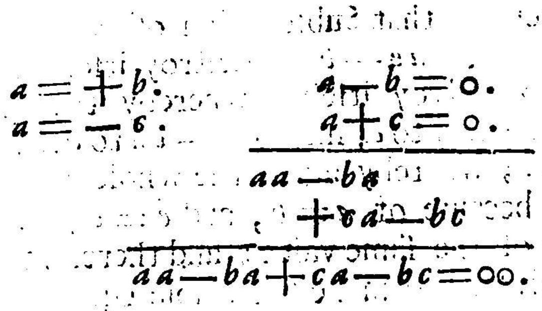
A partir do capítulo 31, Wallis pretende mostrar o método de "fatoração" de Harriot:

---

[85] A line drawn into a line, shall make a plane or surface; this drawn into line shall make a solid: but if this solid be drawn into a line, or this plane into a plane, what shall it make? A plano-plane? This is a monster in nature and less possible than a chimera or centaure. For length, breadth and thickness, take up the whole of space (…) But if we consider a number multiplied by itself; and this again into the same number, and so again and again as often as you please; in this, there is nothing of impossibility or of difficulty to apprehend. (Wallis, 1685, p. 126)

> O Sr.Harriot, em termos da natureza das equações, no qual reside o grande mistério da álgebra; fez muito mais avanços descobrindo a verdadeira origem de equações compostas e reduzindo-as aos originais de onde elas advêm. (Wallis,1685, p.128).[86]

A essência do método de Harriot é posicionar os termos de uma *equação simples* (chamados também de "laterais") em um mesmo lado e então multiplicar dois ou mais deles, visando encontrar a forma "*original*" da equação considerada. Supondo como raízes $a = +b$ ou $a = -c$, temos:



$$\begin{array}{ll} a = +b. & a - b = 0. \\ a = -c. & a + c = 0. \\ \hline & aa - ba \\ & \quad + ca - bc \\ \hline & aa - ba + ca - bc = 00. \end{array}$$

Fig.4.2.1.1- Layout de Harriot (Retirado do Tratado de Wallis)

Obtém-se assim a equação original: $aa - ba + ca - bc = 00$. Somando $+bc$ a ambos os lados da equação obtemos $aa - ba + ca = bc$, que é chamada *equação canônica*, em parte seguindo a exigência de regularidade de Viète e de outros autores antes dele, mas também para avaliar as propriedades das "equações comuns". Coincidentemente ou não, Descartes tinha uma forma canônica similar. Também verificamos no exemplo o uso de um duplo zero (seguindo, de certa forma, a exigência de homogeneidade) embora esta notação não apareça no *Práxis*. Isso é um indício de que Wallis deve ter tido acesso em algum momento aos manuscritos de Harriot, ou parte deles. Quanto a este método, Wallis acrescenta que:

> Este artifício é que ele emprega, como uma chave para abrir e descobrir os mistérios das equações compostas: quantas raízes cada equação possui, e quais são elas, afirmativas ou negativas; e de quais ingredientes (ou quantidades conhecidas) em cada membro os coeficientes são feitos. Em tudo isso Descartes o segue; ou até toma emprestado dele. (Wallis, 1685, p. 129)[87]

---

[86] Mr. Harriot, as to the nature of equations, wherein lyes the main mystery of álgebra; hath made much more improvement. Discovering the true rise of compound equations; and reducing them to the originals from whence they arise. (Wallis,1685, p.128).

[87] This artifice he makes use of, as a key to unlock and discover the mysteries of compound equations: how many roots each equation hath, and what they are, affirmative or negative; and of what ingredients the coefficients (or known quantities) in each member, are made up. In all which Descartes follows him; or rather borrows from him. (Wallis, 1685, p. 129)

Wallis expressa também uma dúvida quanto à multiplicidade de valores da raiz numa equação quadrática. Ao assumir que $a = +b$ e $a =+ c$, forma-se naturalmente a equação original:

$$aa - ba - ca + bc = 00.$$

Entretanto, a quantidade desconhecida $\underline{a}$ da primeira igualdade não pode ser a mesma $\underline{a}$ da segunda. Consequentemente, $\underline{aa}$ não é o quadrado de $\underline{a}$ mas um retângulo entre $\underline{b}$ e $\underline{c}$, e os termos $-\ \underline{ba}$ e $-\ \underline{ca}$ não podem ser agrupados, pois $\underline{a}$ não é igual em ambos os termos e, ainda assim, na equação quadrática as desconhecidas são tidas como iguais, tendo a o mesmo valor pois $aa - ba - ca + bc = 00$. Não pudemos determinar se essa ideia é própria de Wallis ou se se deve a Harriot, embora seja uma explicação plausível para a maneira como ele exibe suas equações e o tratamento destas em vários casos. Wallis afirma que "qualquer um que faça a mesma objeção, pode, com um pouco mais de consideração, encontrar as resposta por si mesmo". Porém, o estudioso não deixa a questão em branco e argumenta a favor da ambiguidade, substituindo $a = e$ na segunda equação e mostrando que a nova equação $ae - be - ca + bc = 00$ ainda é verdadeira.

No capítulo 32, seguindo este método, provém equações canônicas para a equação quadrática, multiplicando duas equações simples, considerando as possíveis variações de sinal das raízes. Assim temos três casos de equações originais a considerar:

I. $a = +b.$ $a = +c.$ See § 4. pr. 2.

$$\begin{array}{l} a - b = 0. \\ a - c = 0. \\ \hline aa - ba \\ \quad - ca + bc = 0. \end{array}$$

II. $a = +b.$ $a = -c.$ See § 4. pr. 1.

$$\begin{array}{l} a - b = 0. \\ a + c = 0. \\ \hline aa - ba \\ \quad + ca - bc = 0. \end{array}$$

III. $a = -b.$ $a = -c.$

$$\begin{array}{l} a + b = 0. \\ a + c = 0. \\ \hline aa + ba \\ \quad + ca + bc = 0. \end{array}$$

E ainda mais dois casos (canônicos secundários):

IV. $aa = +bc.$ $\quad aa - bc = 0.$

V. $aa = -bc.$ $\quad aa + bc = 0.$

Sendo o IV um subcaso do II e o V do I ou do III.

Detalha ainda que por este método é possível encontrar todas as soluções da equação quadrática, desde que as raízes sejam reais (positivas ou negativas), sendo estas sempre duas, podendo ser ambas iguais. Wallis também aponta as relações entre as raízes e os coeficientes das equações (uma vez que estas estão na forma original) para cada caso:

i) A quantidade absolutamente conhecida *bc* é o produto (ou retângulo) das raízes e o coeficiente do termo médio é a soma (ou agregado) das raízes, com o sinal trocado.

ii) Se *bc* é afirmativa, então as raízes possuem o mesmo sinal. Logo, se o termo médio é negativo então as duas raízes são positivas (caso I). Caso contrário, ambas são positivas (caso III).

iii) Se *bc* é negativa, então as raízes possuem sinais contrários (caso II). Assim desconsiderando o sinal o termo médio é a diferença das raízes, se o seu sinal é negativo então a maior das raízes é positiva, caso contrário, a maior das raízes é negativa. Quando as raízes são iguais o termo do meio é zero.

Depois de todas estas considerações, resta fornecer fórmulas de solução em termos dos coeficientes. Colocando *z* para a soma das raízes e *x* para a diferença e desconsiderando seu sinal, os casos acima se tornam:

Firſt caſe. $aa - za + bc = 0.$ Roots, $+b$, $+c$.

Second caſe. $aa \mp xa - bc = 0.$ Roots, $+b$, $-c$.

That is, $\left\{\begin{array}{l} -\,xa, \text{ when } b \text{ is Greater.} \\ +\,xa, \text{ when } c \text{ is Greater.} \\ \ldots\, 0, \text{ when they be equal.} \end{array}\right\}$

Third caſe. $aa + za + bc =.$ Roots, $-b$, $-c$.

Fig- Aqui notamos um erro tipográfico (ausência do zero). Este erro foi corrigido na edição de 1693.

Wallis afirma, em seguida, que o problema de encontrar as raízes de equação quadrática se resume a duas questões: encontrar as raízes conhecendo *bc* e *z* (soma das raízes) ou *bc* e *x* (diferença das raízes). Este problema é uma zetética de Viète e Wallis a resolve da mesma maneira fornecendo as fórmulas:

Case	Roots.
I. $aa - za + bc = 0.$	$+\frac{1}{2}z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:} = +\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}x.$
II. $aa \mp xa - bc = 0.$	$\pm\frac{1}{2}x + \sqrt{:\frac{1}{4}xx + bc:} = \pm\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z.$
III. $aa + za + bc = 0.$	$-\frac{1}{2}z \pm \sqrt{:\frac{1}{4}zz - bc:} = -\frac{1}{2}z \pm \frac{1}{2}x.$

Para cada caso, Wallis completa: no primeiro e terceiro casos se *¼ zz* é menor que – *bc*, ambas as raízes são imaginárias, como por exemplo na equação – *aa* + 8*a* = 25. Mais importante é o fato de Wallis destacar que essas equações impossíveis não são inúteis: “Estas equações impossíveis e suas raízes imaginárias não são inúteis: podem ser usadas para muitos bons propósitos”[88] (Wallis, 1685, p.133). Em seguida, mostra uma “maneira particular de Harriot” de resolver as equações quadráticas: o método de completar quadrados. Para a equação *aa* ± *2ba* = ± *cc*, adiciona a ambos os lados + *bb* (quadrado da metade do segundo coeficiente), obtendo assim:

$$aa \pm 2ba + bb = \pm cc + bb$$

$$(a \pm b)^2 = \pm cc + bb$$

$$a \pm b = \sqrt{\pm \mathrm{cc} + \mathrm{bb}}$$

e dessa maneira obtém os casos possíveis conforme o sinal duplo seja + ou – . Veja a figura:

1. $aa - 2ba = + cc.$ $aa - 2ba + bb = + cc + bb.$ $a - b = \pm\sqrt{:} + cc + bb.$ And therefore, $a = + b \pm \sqrt{:} + cc + bb.$

2. $aa + 2ba = + cc.$ $aa + 2ba + bb = + cc + bb.$ $a + b = \pm\sqrt{:} + cc + bb.$ And therefore, $a = - b \pm \sqrt{:} + cc + bb.$

3. $aa - 2ba = - cc.$ $aa - 2ba + bb = - cc + bb.$ $a - b = \pm\sqrt{:} - cc + bb.$ And therefore, $a = + b \pm \sqrt{:} - cc + bb.$

4. $aa + 2ba = - cc.$ $aa + 2ba + bb = - cc + bb.$ $a + b = \pm\sqrt{:} - cc + bb.$ And therefore, $a = - b \pm \sqrt{:} - cc + bb.$

---

[88] “Yet are not these impossible equations, and imaginary roots, altogether useless: But may be made use of to very good purposes” (Wallis, 1685, p.133).

4.2.2 Solução das equações cúbicas

As equações cúbicas seguem o mesmo método das equações quadráticas, obviamente desdobrando-se em mais casos. O interessante é que neste momento Wallis reitera uma afirmação já esboçada na análise das equações quadráticas:

> De onde segue que todas as equações cúbicas possuem três raízes, reais ou imaginárias, todas afirmativas ou todas negativas, ou parcialmente uma ou outra, tantas quantas forem as dimensões de sua maior potência (neste caso, o cubo). E o mesmo ele demonstra para todas as equações superiores; ou seja, que toda equação, independentemente de seu grau, possui tantas raízes (reais ou imaginárias) quantas forem as dimensões de sua potência mais elevada (...). Este é o mistério que ninguém descobriu (que eu saiba) antes de Harriot. (Wallis, 1685, p.135)[89]

Eis os casos de equações cúbicas:

$$\begin{array}{lll}
\text{I.} & a=+b. & a-b=0. \\
 & a=+c. & a-c=0. \\
 & a=+d. & a-d=0. \\
\hline
 & & aaa-baa+bca \\
 & & -caa+bda \qquad \text{See his Sect. 4. pr. 5.} \\
 & & -daa+cda-bcd=0. \\
 & & \\
\text{II.} & a=+b. & a-b=0. \\
 & a=+c. & a-c=0. \\
 & a=-d. & a+d=0. \\
\hline
 & & aaa-baa+bca \\
 & & -caa-bda \qquad \text{Sect. 4. pr. 4.} \\
 & & +daa-cda+bcd=0. \\
 & & \\
\text{III.} & a=-b. & a+b=0. \\
 & a=-c. & a+c=0. \\
 & a=+d. & a-d=0. \\
\hline
 & & aaa+baa+bca \\
 & & +caa-bda \qquad \text{Sect. 4. pr. 3.} \\
 & & -daa-cda-bcd=0. \\
 & & \\
\text{IV.} & a=-b. & a+b=0. \\
 & a=-c. & a+c=0. \\
 & a=-d. & a+d=0. \\
\hline
 & & aaa+baa+bca \\
 & & +caa+bda \\
 & & +daa+cda+bcd=0.
\end{array}$$

Fig.4.2.2.1- Casos canônicos de Harriot

89 Whence it follows, that all cubic equations have (Real or Imaginary) three roots, all affirmative, or all negative, or partly the one, partly the other, that is, so many as are dimensions of its (highest power) a cube. And the like he shows of all superior equations; that is, that every equation, of what degree soever, hath so many roots (Real or Imaginary) as are the dimensions of its highest power (...) Which is the mystery that before Harriot (that I know of) discovered by any. (Wallis, 1685, p.135)

E esta é outra das descobertas de Harriot que Wallis acusa Descartes de plagiar. Esse ponto em si já é um exagero, pois Harriot trabalhou com equações de até grau quatro apenas. A indução para todas as equações superiores é um claro acréscimo de Wallis em benefício do legado de Harriot. Além destes casos, acrescenta as equações recíprocas, que são aquelas cuja *"quantidade absolutamente conhecida é formada pela multiplicação contínua dos coeficientes conhecidos e a maior potência da desconhecida pela multiplicação das outras"*:

$$\begin{array}{lll}
\text{V.}\ aa = +bc. & aa - bc = 0. & \\
\quad a = +d. & a - d = 0. & \\
 & \overline{aaa - daa + bca - bcd = 0.} & \\[1em]
\text{VI.}\ aa = -bc. & aa + bc = 0. & \\
\quad a = +d. & a - d = 0. & \\
 & \overline{aaa - daa + bca - bcd = 0.} & \text{Sect.4.pr.18.} \\[1em]
\text{VII.}\ aa = +bc. & aa - bc = 0. & \\
\quad a = -d. & aa + d = 0. & \\
 & \overline{aaa + daa - bca - bcd = 0.} & \\[1em]
\text{Or,}\ a = -b. & a + b = 0. & \text{Roots.} -b, +c, -c. \\
\quad aa = +cc. & aa - cc = 0. & \\
 & \overline{aaa + baa - cca - bcc = 0.} & \text{Sect.4.pr.19.} \\[1em]
\text{VIII.}\ aa = -bc. & aa + bc = 0. & \\
\quad a = -d. & a + d = 0. & \\
 & \overline{aaa + daa + bca + bcd = 0.} & \\[1em]
\text{Or,}\ a = +b. & a - b = 0. & \text{Roots.} +b, +c, -c. \\
\quad aa = +cc. & aa - cc = 0. & \\
 & \overline{aaa - baa - cca + bcc = 0.} & \text{Sect.4.pr.20.}
\end{array}$$

Fig.4.2.2.2- Casos canônicos de Harriot

Tomando a quantidade conhecida na forma de um binômio:

$$\begin{array}{ll}
\text{IX.}\ r - a = +q. & rrr - 3rra + 3raa - aaa = +qqq. \\
\text{That is,}\ a - r + q = 0. & aaa - 3raa - rrr = 0. \\
 & +qqq \\[1em]
\text{X.}\ r + a = +q. & rrr + 3rra + 3raa + aaa = +qqq. \\
\text{That is,}\ a + r - q = 0. & aaa + 3raa + 3raa + rrr = 0. \\
 & -qqq \\[1em]
\text{XI.}\ a - r = +q. & aaa - 3raa + 3rra - rrr = +qqq. \\
\text{That is,}\ a - r - q = 0. & aaa - 3raa + 3rra - rrr = 0. \\
 & -qqq
\end{array}$$

Fig.4.2.2.3- Casos canônicos de Harriot

Que depois são reescritas:

$$\text{IX. } b - a = +c. \quad a = b - c. \quad aaa - 3baa + 3bba = +bbb - ccc.$$
Sect. 4. pr. 12.

$$\text{X. } a + b = +c. \quad a = +c - b. \quad aaa + 3baa + 3bba = -bbb + ccc.$$
Sect. 4. pr. 10.

$$\text{XI. } a - b = +c. \quad a = +b + c. \quad aaa - 3baa + 3bba = +bbb + ccc.$$
Sect. 4. pr. 11.

$$a = 2b. \quad aaa - 3baa + 3bba = 2bbb.$$
Sect. 4. pr. 13.

Fig.4.2.2.4- Casos canônicos de Harriot

Nas equações de quarto grau, o autor mostra que polinômios de grau elevado podem ser compostos de outros de grau mais baixo: “Deste modo, ele obtém suas equações biquadráticas; tanto de quatro laterais, ou duas quadráticas; ou uma lateral e uma cúbica; ou uma quadrática e duas laterais”[90] (Wallis, 1685, p. 137). Para as equações de grau superior a quatro, Wallis considera a generalização deste método estar suficientemente clara.

No capítulo 36, sobre dissolução de equações compostas, Wallis explica que conhecendo uma raiz basta dividir a equação dada pela equação simples correspondente para reduzir o grau da equação proposta, o que conhecemos como teorema da decomposição. Se soubermos que $a = 2$ é uma raiz da equação $aaa - 10aa + 31a - 30 = 0$, podemos dividir esta equação por $a - 2$ para reduzi-la a uma quadrática:

$$\begin{array}{lllll}
a - 2 = 0) & aaa - 10aa & + 31a & - 30 = 0 & (aa - 8a + 15 = 0. \\
 & aaa - 2aa & & & \\
\hline
 & -8aa & + 31a & & \\
 & -8aa & + 16a & & \\
\hline
 & & +15a & - 30 & \\
 & & +15a & - 30 & \\
\hline
 & & 0 & 0 &
\end{array}$$

Fig.4.2.2.5- Teorema da decomposição

E, novamente, se soubermos que $a = 3$ é uma outra raiz, podemos dividir a quadrática por $a - 3$ e reduzi-la a uma lateral.

---

[90] In the like manner, he derives his biquadratick equations; either from four laterals, or two quadraticks; or a lateral and a cubick; or a quadratic and two laterals(Wallis, 1685, p. 137)

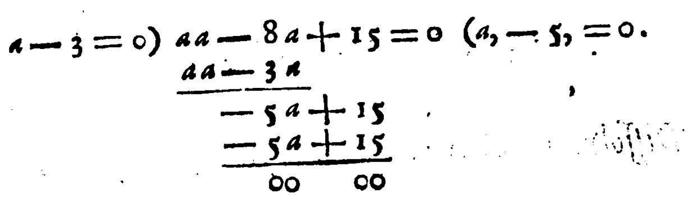


Fig.4.2.2.6- Teorema da decomposição

Até este ponto não está claro como obter essa raiz, embora a intenção seja apenas explicar essa aplicação da divisão polinomial. Segue-se um comentário onde Wallis alivia sua crítica constante a Descartes:

> Esta noção também encontro utilizada (desde Harriot) por Descartes e outros. E particularmente por Hudden (com bons propósitos) em suas regras para dissolver equações compostas em seus componentes: Que estão publicadas dentre os trabalhos de Schooten, mas sem nenhuma demonstração.[91] (Wallis, 1685, p.142)

Talvez o único ponto onde Wallis alivia sua crítica constante a Descartes. Sua promessa de incluir o trabalho de *Merry* não foi cumprida na edição que análisei. O capítulo 37 contém o que costumamos chamar de relações de Girard, exprimindo as relações entre os coeficientes e raízes de uma equação. Segue a essas observações o conteúdo do capítulo 38, no qual Wallis explica que mudando-se os sinais de todas as raízes como são modificados os sinais dos coeficientes. O objetivo é que de posse de um método que determine quantas raízes positivas uma equação dada possui, mudando-se os sinais de todas as raízes podemos descobrir também quantas são as raízes negativas, e daí concluir quantas são Reais. Tal método aparece na quarta seção de Harriot (cap. 40) e provém de uma observação de cada caso. Assim, a equação da forma $aa - ba + ca = bc$ possui apenas uma raiz positiva igual a $\underline{b}$, pois da sua construção sabemos que a segunda raiz é negativa. Supondo qualquer outra raiz $\underline{d}$ positiva, basta substituí-la na equação para concluir que $b = d$. Dessa forma, segue em Harriot, segundo Wallis, uma extensa seção utilizando este raciocínio para mostrar em diversos casos que não há mais raízes positivas do que as supostas inicialmente. A "regra de sinais" de Descartes aparece sem a menção do mesmo: numa equação há tantas raízes

[91] This notion also I find Pursued (Since Harriot) by Descartes and Others. And Particularly by Hudden (to very good purpose) in his Rules for Dissolving Compound Equations into their components: Which are published amongst Schooten's Works; but without any demonstration. (Wallis, 1685, p.142)

positivas quantas forem as vezes que os sinais + e – se encontram alterados, e tantas negativas quantas forem as vezes que dois sinais de + ou dois sinais de – se sucedem[92].

Por exemplo : $x^3 + x^2 - 4x - 6 = 0$ tem uma raiz positiva, pois possui uma mudança de sinal (de x^2 para $-4x$) e duas raízes negativas (permanência de sinal entre x^3 e x^2; e entre $-4x$ e -6). Wallis nota que esta regra só é verdadeira quando todas as raízes são reais: "Esta regra deve ser tomada ao menos com precaução; sejam as raízes reais ou imaginárias. Para raízes imaginárias, há ainda uma incerteza"[93]. E alega que para descobrir quantas destas raízes são reais e quantas são imaginárias depende da "regra de Harriot"[94]. Finalmente, Wallis menciona Descartes, mas de uma forma maliciosa:

> Assim como a que a antecede [a Regra de Sinais], temos a concorrência de *Des Cartes*, (mas sem a precaução interposta, o que é um defeito:) Da segunda ['A regra de Harriot's'] para o número de raízes reais, (se não me falha a memória) ele se mantém em absoluto silêncio.(ibid, p.158)[95]

Logo, é insinuado que Descartes não descobriu a regra de sinais, mas apenas concordou com ela, e ainda que não foi capaz de perceber que a regra não é válida quando a equação possui raízes complexas. Gagneux (2008) discute de uma maneira nova e reveladora que Descartes não publicou tudo sobre esta regra famosa. E aponta que o verdadeiro motivo pelo qual Wallis cita Descartes é para contestar a validade de sua regra:

> Creditamos frequentemente a Wallis a atribuição da regra a Harriot. Seu texto ligeiramente polêmico transformou, assim, a discussão em uma disputa franco-inglesa; no capítulo 41 de seu Tratado de Álgebra, Wallis cita os resultados que estão na obra de Harriot, e acrescenta o enunciado da regra dos sinais, que ele conclui por indução dos exemplos de Harriot, levando o leitor a pensar que este último teria feito o mesmo, e que Descartes teria somente copiado Harriot. Contudo, De Gua observa [em 1741] que Wallis atribui a regra a Descartes quando lhe interessa contestar sua validade. (Gagneux, 2008, p. 137)

---

92 il y en peut auoir autant de vrayes, que les signes + & – s'y trouuent de fois estre changés; & autant de fausses qu'il s'y trouue de fois deux signes + ou deux signes – qui s'entresuiuent.

93 But this rule must at least take with this caution; that the roots be Real not Imaginary. For as to Imaginary roots, there may be yet an uncertainty (Wallis, 1685, p.158).

94 …we are to consider further that, the number of all roots (Real or Imaginary) being determined by the dimension of its Highest Term; (as was above shewed:) How many of these are Negative, and how many Affirmative, (*supposing them all Real*) appears by comparing it with a Canonick like Graduated and like affected.(Wallis, 1685, p. 158)

95 "As to the former of these [the Rule of Signs], we have *Des Cartes* concurrence, (but without the caution interposed, which is a defect:) Of the latter ['Harriot's rule'] for the number of real roots, (if I do not mis-remember) he is wholly silent."(ibid, p.158)

Esta estratégia aparentemente funcionou e Harriot ganhou um partidário da opinião de que ele foi o autor da regra de sinais. Na *Acta eruditorum* de 1686, uma resenha anônima afirma:

> [Harriot] foi o primeiro a observar, por indução, aparentemente, que existem tantas raízes negativas quanto mudanças de sinais uma imediatamente seguida da outra, e tantas raízes positivas quanto concordâncias das mesmas (ao menos em uma equação que possua raízes puramente reais ou possíveis, um aviso que Descartes no restante de seus escritos erroneamente omite). [96]

O autor anônimo desta resenha era, segundo Stedall (2010), quase certamente Leibniz. Dessa maneira, a prioridade da invenção da regra de sinais foi atribuída a Harriot e esta foi a versão vigente até recentemente:

> Leibniz, caso tenha sido realmente o autor, foi descuidado. Não apenas ele citou equivocadamente a Regra de Sinais, mas ao mesmo tempo atribuiu a Harriot algo que não se faz presente em nenhum de seus escritos, manuscritos ou publicados. Não é difícil de se ver, contudo, como tal desentendimento surgiu do texto de Wallis, especialmente se o leitor não for totalmente fluente em Língua Inglesa. Tal atribuição da Regra de Sinais a Harriot tornou-se a história popularmente mais aceita e persiste até os dias de hoje. Apenas há dez anos atrás um eminente historiador da matemática me perguntou em que ponto exatamente nos escritos de Harriot tal informação poderia ser encontrada. (Stedall, 2010, p.15, pré-impresso)[97]

O capítulo 42, início da sexta seção, compreende um método de substituição para evitar coeficientes fracionários ou coeficientes irracionais.

Exemplo: Triplicando as raízes da equação $aaa + baa + cca = ddd$

Temos:

---

[96] [Harriot] was the first to observe, by induction, as it seems, that there are as many negative roots as there are changes of sign immediately following each other; and as many positive roots as agreements of the same (at least in an equation having its roots purely real or possible, a warning that Descartes in the rest of his writings incorrectly omits).

[97] Leibniz, if he was indeed the writer, had been careless. Not only did he state the Rule of Signs the wrong way round, but at the same time attributed to Harriot something that is not to be found in any of his writings, manuscript or published. It is not difficult to see, however, how such misunderstanding arose from Wallis's text, especially if the reader was not entirely fluent in English. This attribution of the rule of signs to Harriot became the accepted story and has persisted to the present day. Only ten years ago I was asked by an eminent historian of mathematics where exactly in Harriot's writings it was to be found. (Stedall, 2010, p.15, pre-print)

$$\begin{array}{r|c|c|l} 1 & +b & +cc & =ddd. \\ aaa & aa & a & \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|l} 1 & 3 & 9 & \quad 27 \\ 1 & +b & +cc & \angle ddd. \\ aaa & aa & a & \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c|c|l} 1 & 3 & 9 & \quad 27 \\ 1 & +b & +cc & =ddd. \\ aaa & aa & a & \quad 1 \\ 27 & 9 & 3 & \quad 1 \end{array}$$

Substituindo *e = 3a*; *ee = 9aa*; *eee = 27aaa*:

$$\begin{array}{r|c|c|l} 1 & 3 & 9 & \quad 27 \\ 1 & +b & +cc & =ddd. \\ eee & ee & e & \quad 1 \end{array}$$

Assim a equação se torna:

$$eee + 3bee + 9cce = 27ddd$$

Em essência é um método de substituição de variáveis. O método segue no capítulo seguinte mostrando como deslocar raízes através de adição e subtração (um método de Viète) e Wallis comenta que as raízes complexas (obviamente) não podem ser tornadas reais por esse processo. Para abater a raiz $\underline{a}$ na equação *aaa – 3baa = + ccc* da quantidade $\underline{b}$ basta fazer a nova raiz $\underline{e}$ tal que *e = a – b*. Assim:

$$e + b = a$$

$$ee + 2be + bb = aa$$

$$eee + 3bee + 3bbe + bbb = aaa$$

A esta última equação adiciona – 3bee – 6bbe – 3bbb = – 3baa (basta multiplicar a segunda equação por – 3b) e como *aaa – 3baa = + ccc,* obtém *eee – 3bbe = +ccc + 2bb.* cuja raiz é *e = a – b*. O mesmo pode ser feito fazendo a substituição *e = + b – a* ou *e = + b + a*. Após um exemplo numérico, Wallis chega ao objetivo da seção, que é mostrar que em qualquer cúbica podem-se usar tais substituições para reduzir a cúbica a uma forma padrão. A intenção é reconstruir, nas seções seguintes, fórmulas já obtidas por Cardano: “Em todas as equações cúbicas, adicionando a ou retirando da raiz (ou retirando a raiz da) terça parte dos coeficientes de seu Segundo termo, (como a ocasião requer) o segundo termo é (na nova equação) destruído e seu lugar fica vazio"[98] (Wallis, 1685, p.167).

Em particular, a substituição para eliminar o termo de grau dois da cúbica. Se a equação é do tipo $aaa - 3baa = + ccc$ tome $a = + b \pm e$ ou se a equação é $aaa + 3baa = + ccc$ tome $a = - b \pm e$. Da mesma forma, a quarta parte do coeficiente da equação biquadrática, a quinta parte na equação de quinto grau, sempre sendo possível eliminar o segundo termo de uma equação dessa maneira. Vemos aqui novamente uma indução de Wallis. Segundo este, o sinal duplo é utilizado por Harriot para "preservar a raiz positiva", embora nem sempre, pois por vezes "as posições dão apenas negativas". O capítulo 44 demonstra o uso dessa técnica para resolver as equações quadráticas, que chega aos mesmos resultados do método de completar quadrados, os casos onde $aa \pm 2ab = +cc$ dão raízes reais. Análisemos o caso em que as raízes são complexas e para isso considere a equação $aa - 2ab = - cc$. Tomando $a = e + b$, obtemos $ee = + bb - cc$ cujas raízes são $e = \pm\sqrt{bb - cc}$ e portanto $a = + b \pm\sqrt{bb - cc}$, que terá raízes complexas se $c > b$. O estudo das cúbicas e equações de graus maiores é mais complicado desta forma, pois mesmo que o segundo termo seja eliminado pelo processo já explicado, ainda existem outros termos a serem eliminados até que a extração direta de uma raiz cúbica seja possível. A eliminação sistemática do segundo termo das equações é uma similaridade entre Harriot e Descartes, que normalmente é apontada em favor da opinião do plágio.

4.2.3 O processo crescente de teorização/adição de Wallis.

No capítulo 45, Wallis acrescenta os casos XII e XIII das cúbicas com diversos erros de impressão corrigidos na versão latina de 1693. É pertinente observar como o autor constrói uma explicação própria para a obtenção das fórmulas de Cardano e sua discussão sobre as raízes complexas.

---

[98] In all (and other) cubick equations, by adding to or subducting from the root (or the root from it) a third part of the coefficient of its second term, (as occasion shall require;) the second term is (in the new equation) destroyed and its place be vacant" (Wallis, 1685, p.167)

XII. $aaa + 3bba = + 2ccc$, fazer $a = \dfrac{ee - bb}{e}$

Tomando a substituição dada, a equação proposta se reduz a:

$$eeeeee - 2\ ccceee = bbbbbb$$

Que é uma quadrática com raiz sólida *eee*. Completando o quadrado, vêm as soluções:

$$eee - ccc = \pm\sqrt{bbbbbb - cccccc}$$

Que são positivas ou negativas dependendo se $ccc < eee$ ou não. E portanto aqui são positivas pois segue da primeira parte do processo que $e > c$. Consequentemente:

$$eee = +\ ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}$$

E então:

$$e = \sqrt[3]{+ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}}\ .$$

Neste momento Wallis evoca a observação sobre proporções contínuas explicada na parte sobre Oughtred, pois como <u>*a*</u> é por construção igual à $e - \dfrac{bb}{e}$ para encontrar o valor de $\dfrac{bb}{e}$ Wallis observa que *eee, bbb,* $\dfrac{bbbbbb}{eee}$ estão em proporção contínua, e portanto, também estarão as suas raízes cúbicas, pois:

$$bbbbbb = \left(\sqrt[3]{+ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}}\right)\left(\sqrt[3]{-ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}}\right)$$
$$= (eee)\left(\sqrt[3]{-ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}}\right)$$

Logo:

$$\frac{bb}{e} = \sqrt[3]{-ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}}$$

E então:

$$a = \sqrt[3]{+ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}} - \sqrt[3]{-ccc + \sqrt{bbbbbb - cccccc}}\ .$$

Que é uma das regras de Cardano. Esta explicação difere da contida na reconstrução de Harriot por Stedall, e analisaremos agora o caso XIII, nas abordagens de Harriot segundo: Stedall, Warner e Wallis. A equação proposta é:

$$2ccc = -\,3bba + aaa$$

No Harriot original, o *canon* para encontrar as raízes é:

$$qqq + rrr = -3qra + aaa\ \ ;\quad a = q + r$$

A forma canônica é obtida elevando ambos os lados da relação $a = q + r$ ao cubo e notando que os termos: $-\,3raa + 3raa = 3ra[-\,a + r] = -\,3qra$. Esta canônica também pode ser obtida do mesmo processo aplicado ao caso XI mostrado por Wallis. A apresentação original mostra-se confusa, com diversas maneiras equivalentes de chegar ao mesmo resultado, todas girando em torno da mesma ideia: a comparação com a forma canônica escolhida. Harriot apresenta quatro maneiras com substituições de variáveis diferentes para obter a fórmula desejada. Transcreverei agora a primeira solução e farei acréscimos nas notas para facilitar a compreensão:

$e = r$ e portanto[99], $\frac{bb}{e} = q$

Então[100]: $\frac{bbbbbb}{eee} + eee = 2ccc$

[99] pois $bb = qr$

[100] elevando ambas as relações ao cubo e somando, temos: $eee + \frac{bbbbbb}{eee} = rrr + qqq = 2ccc$

E: $bbbbbb + eeeeee = 2ccceee$

Então: $bbbbbb - 2ccceee = eeeeee$

[adicione] $cccccc$ [à ambos os lados]

Então: $eeeeee - 2ccceee + cccccc = cccccc - bbbbbb$

1) $eee - ccc = \sqrt{cccccc - bbbbbb}$

$eee = ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb}$

$e = \sqrt[3]{ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb}}$

2) $ccc - eee = \sqrt{cccccc - bbbbbb}$

$ccc - \sqrt{cccccc - bbbbbb} = eee$

$e = \sqrt[3]{ccc - \sqrt{cccccc - bbbbbb}}$. [101]

Wallis não mostra no livro como obter a forma $qqq + rrr = -3qra + aaa$ e utiliza, na solução da cúbica XIII, a substituição de variáveis: $a = \frac{ee + bb}{e}$, chegando ao mesmo resultado de Harriot usando a noção de proporções contínuas. No entanto, Wallis não discute como obter essa mudança de variável. Observando a versão de Stedall, Harriot mostra diversas maneiras de obter a cúbica, e a essência de todos os seus métodos é perceber que $bb = qr$ e $qqq + 2rrr = 2ccc$, comparando a canônica com a equação pedida, embora apenas na terceira versão da variação da fórmula (pág. 191) Harriot use explicitamente tal relação. No fim da pág. 189, Harriot sugere as mudanças de variável: $e = r$ e portanto $\frac{bb}{e} = q$. Aparentemente o método de Wallis vem desta versão: Pois fazendo $e = r$ e $\frac{bb}{e} = q$ e notando que $a = q + r$ temos exatamente a substituição de Wallis.

No original (pág.194), Harriot conclui que existem três casos para esta cúbica conforme $c > b$ (caso hiperbólico), $c < b$ (caso elíptico) ou $c = b$ (caso parabólico). A diferença é que para cada caso, ele aponta uma canônica diferente:

Hiperbólico: $2ccc = -3bba + aaa$; $a = q + r$

---

[101] Aqui fizemos uma correção no sinal dentro da raiz cúbica, que no livro era +.

Elíptico: $qqr + qrr = - qqa - qra - rra + aaa$; $a = q + r$

Parabólico: $2qqq = -3qqa + aaa$; $a = 2q$

Wallis claramente elaborou uma demonstração diferente de todas as de Harriot. Ele não discute os casos canônicos (hiperbólico, elíptico e parabólico) de forma distinta. Para analisar a natureza das raízes, obtém a fórmula da substituição indicada por Harriot e analisa os sinais da diferença $cccccc - bbbbbb$ na fórmula final.

Mostra, através do exemplo, $aaa - 7a = 6$ que, mesmo quando as fórmulas de Harriot (ou mesmo Cardano) oferecem como resultado quantidades envolvendo imaginários, elas podem ter raízes reais, neste caso, uma afirmativa e duas negativas. Logo, o problema é essencialmente como lidar com essas quantidades. A comparação com a versão de Warner mostra que, apesar das fortes críticas de Stedall (e de Torporley) e apesar das partes excluídas, a apresentação do texto é muito mais discursiva, com a intenção de explicar o processo de obtenção das fórmulas. Warner tenta criar uma cadeia maior de proposições e lemas e a apresentação se dá aproximadamente dentro dos moldes dos elementos. Neste ponto, Warner destaca apenas as raízes positivas enfraquecendo, como Stedall tem aponta, o tratado original. A noção de ser “explicável” mostra a relutância de Warner em incluir as raízes imaginárias e negativas.

Add MS 6783 f. 103

e.6) *On solving equations by reduction*

The equation to be solved: $ggh = -\,dfa + aaa$

or $2ccc = -\,3bba + aaa$

The canon for finding the roots is: $qqq + rrr = -\,3qra + aaa \qquad a = q + r$

Let $e = q$ so $\frac{bb}{e} = r$

then $eee + \frac{bbbbbb}{eee} = 2ccc$

and $eeeeee + bbbbbb = 2ccceee$

so $eeeeee - 2ccceee = -bbbbbb$

[add] $cccccc$ [to both sides]

then $eeeeee - 2ccceee + cccccc = +cccccc - bbbbbb$

1st $eee - ccc = \surd(cccccc - bbbbbb)$

$eee = ccc + \surd(cccccc - bbbbbb)$

$e = \sqrt[3]{ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb}} = q$

2nd $ccc - eee = \surd(cccccc - bbbbbb)$

$ccc - \surd(cccccc - bbbbbb) = eee$

$e = \sqrt[3]{ccc + \sqrt{cccccc - bbbbbb}}$

The sum of these two quadratic roots is $2ccc$. One is qqq, the other rrr. Whence the solution may be found, from these two roots; and it may be done thus as above.

Let $e = r$ so $\frac{bb}{e} = q$

then $\frac{bbbbbb}{eee} + eee = 2ccc$

and $bbbbbb + eeeeee = 2ccceee$

so $eeeeee - 2ccceee = -\,bbbbbb$

and from here, all will be as above.

Therefore if the first root is q, the second will be r.

Or one root is q, and the other is r.

Fig- Harriot Original

Consequently the proposed equation and the canonical are equipollent, that is, are provided with an equal number of roots.

But (by Proposition 17 of Section 4) the canonical equation is explicable in terms of a single root $2q$.

Consequently the proposed ordinary equation is to be explicated in terms of a single root, as was stated in the proposition.

Proposition 4

83 The ordinary equation $aaa - 3bba = -2ccc$, in which $b > c$, is explicable in terms of two roots.

For, the proposed ordinary equation is of the same degree and similarly affected as the canonical equation

$$\begin{array}{ll} aaa & -qqa \\ & -qra \\ & -rra = -qqr \\ & \qquad\quad -qrr \end{array}$$

And (by Lemma 5 to Proposition 2) in the canonical equation, it is true that

$$\frac{\left.\begin{array}{l} qq+qr+rr \\ qq+qr+rr \\ qq+qr+rr \end{array}\right|}{27} > \frac{\left.\begin{array}{l} +qqr \\ +qrr \end{array}\right|}{4}$$

And in the proposed equation, in which it is supposed that $b > c$, it is true that $bbbbbb > cccccc$.

Therefore the coefficient and given homogene of the proposed equation conform to the coefficient and given homogene of the canonical equation, in the relationship of excess and defect.

Accordingly (by the Definition) the canonical equation and the proposed equation are equipollent (that is, endowed with an equal number of roots).

But (by Proposition 6 of Section 4) the canonical equation is explicable in terms of the two roots q and r.

And so the proposed equation is explicable in terms of two roots, as was stated in the proposition.

Proposition 5[9]

The ordinary equation $aaa - 3baa + cca = +ddd$, in which $b > c$ and $b > d$, is explicable in terms of three roots.

For, the proposed ordinary equation is of the same degree and similarly affected as the canonical equation

$$\begin{array}{lll} aaa & +paa & +pqa \\ & -qaa & +pra \\ & -raa & +qra = +pqr \end{array}$$

And in the canonical equation (by the following Lemma 6) it is true that

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p+q+r}{3} \\ \frac{p+q+r}{3} \end{array}\right| > \frac{pq+pr+qr}{3}$$

And (by the following Lemma 7) 84

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p+q+r}{3} \\ \frac{p+q+r}{3} \\ \frac{p+q+r}{3} \end{array}\right| > pqr$$

Moreover, in the proposed equation (in which it is supposed that $b > c$, and $b > d$), it is true that $bb > cc$ and $bbb > ddd$.

Therefore the coefficient and the given homogene of the proposed equation conform to the coefficient and given homogene of the canonical equation, in the relationship of excess and defect.

Accordingly (by the Definition) the proposed equation and the canonical are equipollent (that is, endowed with an equal number of roots).

But (by Proposition 5 of Section 4) the canonical equation is explicable in terms of the three roots p, q and r.

And so the proposed ordinary equation is explicable in terms of three roots, as was stated in the proposition.

Lemma 6[10]

If a quantity be divided into three unequal parts, the square on one-third of the whole is greater than one-third of the [sum of all] the products of the unequal parts taken in pairs.

If the three unequal parts of the quantity are p, q and r, then it is true that

$$\left.\begin{array}{l} \frac{p+q+r}{3} \\ \frac{p+q+r}{3} \end{array}\right| > \frac{pq+pr+qr}{3}$$

For (by Lemma 2), $pp + qq > 2pq$;
and $qq + rr > 2qr$;
and $pp + rr > 2pr$.

Therefore $2pp + 2qq + 2rr > 2pq + 2qr + 2pr$.

Therefore $pp + qq + rr > pq + qr + pr$.

And, adding $2pq + 2qr + 2pr$ to both sides, it will be true that

$$\begin{array}{l} pp+qq+rr \quad > 3pq+3qr+3pr \\ \quad +2pq+2qr \\ \qquad\quad +2pr \end{array}$$

But $\begin{array}{l} pp+qq+rr \\ +2pq+2qr \\ \qquad +2pr \end{array} = \left.\begin{array}{l} p+q+r \\ p+q+r \end{array}\right|$

Therefore $\left.\begin{array}{l} p+q+r \\ p+q+r \end{array}\right| > 3pq + 3qr + 3pr$.

Fig. Versão de Warner - *Praxis*.

172 *Of Cubick Equations.* CHAP. XLV.

Then, becauſe a is (by conſtruction) equal to $\frac{ee-bb}{e}$, or $e-\frac{bb}{e}$: To find the value of $\frac{bb}{e}$, he takes notice, that $eee.\,bbb.\,\frac{bbbbbb}{eee}$, are in continual proportion. As alſo their Cubick Roots, $e.\,b.\,\frac{bb}{e}$.

And thence proves, $\frac{bb}{e}=\sqrt{C.-ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}$.

(For $+ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}$,
Multiplied into, $-ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}$,
Makes $bbbbbb$.

And therefore the former of them being equal to eee; the latter muſt be equal to $\frac{bbbbbb}{eee}$; (between which bbb, is a mean Proportional;) and therefore, the Cube Root thereof equal to $\frac{bb}{e}$.)

And therefore the value of $a\ (=e-\frac{bb}{e})=$

$$\sqrt{C.+ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}.-\sqrt{C.-ccc+\sqrt{:bbbbbb+cccccc}}.$$

And this is one of thoſe which are commonly called *Cardan's Rules*.
Of this Solution, he gives us theſe Inſtances in Numbers.

$20=6a+aaa.\quad a=\sqrt{C.\sqrt{108}+10}.-\sqrt{C.\sqrt{108}-10}.=2.$
$26=9a+aaa.\quad a=\sqrt{C.\sqrt{196}+13}.-\sqrt{C.\sqrt{196}-13}.=2.$
$7=6a+aaa.\quad a=\sqrt{C.\sqrt{\frac{81}{4}}+\frac{7}{2}}.-\sqrt{C.\sqrt{\frac{81}{4}}-\frac{7}{2}}.=1.$
That is, $a=\sqrt{C.\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}.-\sqrt{C.\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}=\sqrt{c.8},-\sqrt{C.1.}=2-1=1.$

XIII. The Equation, $aaa-3bba=+2ccc$:

He diſtinguiſheth into Three Caſes: According as c is Greater or Equal, or Leſs than b.

1. If c be greater than b;
Then putting $a=\frac{ee+bb}{e}$; And conſequently,

$$\left.\begin{array}{l}\frac{+eeeeee+3bbeeee+3bbbbee+bbbbbb}{eee}=+aaa,\\ \frac{-3bbeeee-3bbbbee}{eee}=-3bba\end{array}\right\}=+2ccc.$$

It becomes $eeeeee+bbbbbb=+2ccceee$.

That is, $eeeeee-2ccceee=-bbbbbb$.

And

CHAP. XLV. *Of Cubick Equations.* 173

And therefore (adding $cccccc$ on both ſides, to compleat the Square,)

$$eeeeee-2ccceee+cccccc=+cccccc-bbbbbb.$$

Or (b being leſs than c) putting $+dddddd=+cccccc-bbbbbb$,

$$eeeeee-2ccceee+cccccc=+dddddd.$$

And therefore its Root, $eee-ccc=ddd$.

That is, $eee=ccc+ddd$.

And $e=\sqrt{C.ccc+ddd}$, or $\sqrt{C.ccc+\sqrt{:cccccc-bbbbbb}}$.

Then becauſe $eee.\,bbb.\,\frac{bbbbbb}{eee}$ are in continual proportion; as alſo $e.\,b.\,\frac{bb}{e}$.
Having found the value of eee (and bbb being known;) He proves, $\frac{bbbbbb}{eee}=ccc-\sqrt{:cccccc-bbbbbb:}=ccc-ddd$.

And conſequently $a\ (=\frac{ee+bb}{e}=e+\frac{bb}{e})=$

$$\sqrt{C.ccc+\sqrt{:cccccc-bbbbbb}}:+\sqrt{C.ccc-\sqrt{:cccccc-bbbbbb}}.$$

Or, $a=\sqrt{C.ccc+ddd}.+\sqrt{C.ccc-ddd}.$

And this is the other of *Cardan*'s Rules.
Of this Solution, he gives us theſe inſtances in Numbers.

$40=-6a+aaa.\quad a=\sqrt{C.20+\sqrt{392}}.+\sqrt{C.20-\sqrt{392}}.=4.$
$72=-24a+aaa.\quad a=\sqrt{C.36+\sqrt{784}}.+\sqrt{C.36-\sqrt{784}}.=6.$
$9=-6a+aaa.\quad a=\sqrt{C.\frac{9}{2}+\sqrt{\frac{49}{4}}}.+\sqrt{C.\frac{9}{2}-\sqrt{\frac{49}{4}}}.=3.$
That is, $a=\sqrt{C.\frac{9}{2}+\frac{7}{2}}.+\sqrt{C.\frac{9}{2}-\frac{7}{2}}.=\sqrt{C.8}.+\sqrt{C.1}=2+1=3.$

2. If (in the ſame form) c be Equal to b.
Then, becauſe of $\sqrt{:cccccc-bbbbbb:}=0$; (this part of the Equation vaniſhing:)

$$a=\sqrt{C.ccc}.+\sqrt{C.ccc}.=c+c=2c.$$

In theſe Solutions (as in other things) *Des Cartes* follows him; (but without giving any account by what Methods theſe Rules might be found out,) under the name of *Cardan*'s *Rules*. The invention of which *Cardan* aſcribes to one *Scipio Ferreus*.

Whether or no *Harriot* were aware of theſe Rules of *Cardan*; I do not find. But (whether he were or no,) they are well enough derived from his own Methods, (very different from thoſe of *Cardan*,) and from thence demonſtrated.

Nor is it ſtrange, that the reſult of both Methods ſhould be coincident. For whether the way of Reſolving thoſe Equations be found out by the Methods of *Cardane*; or by that of *Harriot*; (or by that of mine, which I ſhall mention by and by;) or by any other Method heretofore, or any hereafter to be found out: The Reſult (if true) muſt be ſtill the ſame; at leaſt for ſubſtance, however it may vary in words, or in the manner of deſignation.

Z 2 3. But

Fig. – Versão de Wallis

3. But there is a Third Case of Equations (in the ſame form,)

$$aaa - 3bba = + 2ccc;$$

which is, when c is leſs than b.

In which caſe, $cccccc - bbbbbb$, will be a Negative Quantity; and therefore $\sqrt{:cccccc - bbbbbb}$, the Square Root of a Negative Quantity, Suppoſe $\sqrt{-dddddd}$.

Which is what they conclude to be an Imaginary not a Real Quantity; and that therefore the Root of the Equation is not explicable in Species (according to any received way of Notation) otherwiſe than by admitting ſuch an Imaginary Quantity.

$$a = \sqrt{C.\,ccc + \sqrt{-dddddd}}. + \sqrt{C.\,ccc - \sqrt{-dddddd}}.$$

Which is alſo a great diſcovery of *Harriot*'s (and wherein *Des Cartes* follows him.) Nor do I know, that any before him had ſhewed, that ſuch a Root could not (in the received ways of Notation) be explicated in Species; otherwiſe than by thoſe Imaginary Quantities. Which Imaginary Quantities, when they occur, have been thought to imply an impoſſible Caſe; and Algebriſts have been wont ſo to teach.

Yet is not this ſo to be underſtood, as if *Harriot* had taken theſe to be impoſſible Equations. For he had before ſhewed, (as in the Second Example of his Fifth Section,) that they have a *Real Affirmative Root*; (beſide two Negatives, which he was not there inquiring after.)

And this alſo is a great diſcovery of his. For it was before thought, (and ſo delivered by divers Algebriſts,) that whenever (in purſuance of the Reſolution) we are reduced to an impoſſible conſtruction, (ſuch as is the Square Root of a Negative Quantity;) the caſe propoſed is to be judged impoſſible. Which is yet here diſcovered to be otherwiſe.

As for inſtance; the Equation $aaa - 7a = 6$; ſhould have for its Root,

$$a = \sqrt{C.\,3 + \sqrt{-\tfrac{100}{27}}}. + \sqrt{C.\,3 - \sqrt{-\tfrac{100}{27}}}.$$

which ſhould therefore be judged an impoſſible caſe.

Yet hath it a Real Root, $a = +3$; Beſide which it hath alſo two Negatives, $a = -1$, $a = -2$.

And if we change but the Sign of the Abſolute Number, (which is the only Even place not vacant;) the Equation

$$aaa - 7a = -6,$$

will have two Affirmative Roots, $a = 1$, $a = 2$, (and one Negative, $a = -3$.) And ſo will others of the ſame form ſo qualified, ($aaa - 3bba = -2ccc$,) Which is the Caſe of his Fourth Example in the Fifth Section.

Which Caſe is not ſo deſperate as it hath been thought to be. And how theſe Roots are to be found out, we ſhall ſhew farther by and by.

Mean while, of thoſe other Cubick Equations, he gives us theſe further Examples in Numbers; in which the Cubick Roots extracted, are Binomials.

$$52 = -3a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:26 + \sqrt{675}:} = 2 + \sqrt{3}. \\ +\sqrt{C:26 - \sqrt{675}:} = 2 - \sqrt{3}. \end{array} \right\} = 4.$$

$$270 = +9a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:\sqrt{18252} + 135:} = \sqrt{12} + 3. \\ -\sqrt{C:\sqrt{18252} - 135:} = \sqrt{12} - 3. \end{array} \right\} = 6.$$

$$40 = -6a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:20 + \sqrt{392}:} = 2 + \sqrt{2}. \\ +\sqrt{C:20 - \sqrt{392}:} = 2 - \sqrt{2}. \end{array} \right\} = 4.$$

20

$$20 = +6a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:\sqrt{108} + 10:} = \sqrt{3} + 1. \\ -\sqrt{C:\sqrt{108} - 10:} = \sqrt{3} - 1. \end{array} \right\} = 2.$$

$$\sqrt{21632} = -6a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:\sqrt{5408} + \sqrt{5400}:} = \sqrt{8} + \sqrt{6}. \\ +\sqrt{C:\sqrt{5408} - \sqrt{5400}:} = \sqrt{8} - \sqrt{6}. \end{array} \right\} = \sqrt{3}.$$

$$\sqrt{248832} = 24a + aaa. \quad a = \left\{ \begin{array}{l} +\sqrt{C:\sqrt{62720} + \sqrt{62208}:} = \sqrt{20} + \sqrt{12} \\ -\sqrt{C:\sqrt{62720} - \sqrt{62208}:} = \sqrt{20} - \sqrt{12} \end{array} \right\} = \sqrt{48}.$$

Now becauſe he doth not tell us, by what Method he finds the Binomial Root of his Binomial Cube; I ſhall by and by ſet down a Method of my own (becauſe I have not met with a better,) invented many years agoe. But ſhall firſt (by way of digreſſion from what I was ſaying of *Harriot*,) ſet down my Method of Reſolving Cubick Equations; and by what ſteps I attained it.

CHAP. XLVI.

Another Method for Reſolving CUBICK EQUATIONS.

I had before promiſed to give an account (in due place) of another Method for the Solution of Cubick Equations; which I ſhall here perform.

About the year 1647 (or the beginning of 1648) when I was but a very young Algebriſt (having ſeen very little of Algebra before that time, and having no body to ſhew me,) I lighted caſually on Mr. *Oughtred*'s Clavis of the firſt Edition, publiſhed in 1631,) which I read with great delight, and was in a few weeks pretty well acquainted with the Contents of it.

And finding that though he frequently mentioned Cubick Equations, yet he had given no Rules for the Solution of them (as he had done for Quadraticks:) I adventured (for my Exerciſe in the practiſe of Algebra) to make an Eſſay what I could diſcover toward the Solution of them.

The Notes uſual with him being theſe, Z the Sum, X the Difference, Æ the Rectangle of two Quantities, whereof A was the Greater, E the Leſſer; and Z, X, the Sum and Difference of their Squares; $\mathcal{Z}$, $\mathcal{X}$, the Sum and Difference of their Cubes: I ſingled out (amongſt many others in his 18*th* Chapter) theſe two Equations (as moſt proper for this attempt) $Zc = \mathcal{Z} + 3Æ$, and $Xc = \mathcal{X} - Æ$.

For the Cube of $A + F$, that is $Ac + 3AqE + 3AEq + Ec$, being (in his compendious way of Notation,) thus expreſſed, $Zc = \mathcal{Z} + 3ÆZ$; that is, $Zc - 3ÆZ = \mathcal{Z}$; I found that in a Cubick Equation of this form, the Coefficient ($3Æ$) was the Triple Rectangle of the two Quantities (A, E,) whoſe Sum is (Z) the Root ſought; and that the Abſolute Quantity ($\mathcal{Z}$) is the Sum of their Cubes.

And in like manner the Cube of $A - E$, that is, $Ac - 3AqE + 3AEq - Ec$, being (in the ſame way of Notation) $Xc = \mathcal{X} - 3ÆX$; that is, $Xc + 3ÆX = \mathcal{X}$: I found that in a Cubick Equation of this form, $3Æ$ was the Triple Rectangle, and $\mathcal{X}$ the Difference of Cubes of two Quantities, A, E, whoſe Difference is X, the Root ſought.

(The Forms $Zc - 3ÆZ = -\mathcal{Z}$, and $Xc + 3ÆX = -\mathcal{X}$, wherein $-\mathcal{Z}$, and $-\mathcal{X}$, are Negative Quantities; differ not at all from thoſe former, wherein they are Affirmative; ſave that in theſe, Z, X, will be Negative Quantities, but in thoſe Affirmatives.).

S

Fig. Versão de Wallis

4.3 Operações aritméticas com os números surdos e imaginários.

No capítulo 46, Wallis expõe o primeiro resultado matemático de sua carreira, um método para resolver equações de grau três, obtido através dos seus estudos sobre a *Clavis*. Não difere em essência do método de Cardano, mas este, juntamente a um pequeno tratado de seções angulares (também provindo de Oughtred) era a única credencial que Wallis tinha como matemático ao se tornar professor em Oxford[102]. No capítulo seguinte, expõe regras para se "extrair a raiz cúbica de um binômio", o que cumpriria, pelo aspecto da teoria, a última parte necessária para se operar com os métodos apresentados. Aqui aparecem as regras de operação com números irracionais. Nesta seção Wallis comenta:

> Esta solução da equação cúbica realmente me instigou a novos questionamentos a respeito da raiz de um cubo binomial. E o método posteriormente inventado no que concerne a essa questão (…) continua sendo usado por mim hoje em dia. (Wallis, 1685, p.177)[103]

O método em questão compreende reduzir a raiz quadrada dentro da raiz cúbica à sua forma mais simples, mostrando sua "comensurabilidade", como explicado no capítulo em que Wallis explica a adição e subtração dos surdos. Com este método, Wallis toma como estabelecida uma aritmética para os números complexos, que é o conteúdo de seu capítulo 48.

Exemplo: Na equação *rrr – 63 r = 162*, $b = \sqrt{\frac{63}{3}} = \sqrt{21}$ e $c = \sqrt[3]{\frac{162}{2}} = \sqrt[3]{81}$, sendo assim uma equação do 13° tipo com $b > c$. Pelas regras de Harriot a raiz positiva é:

$$\sqrt[3]{81+\sqrt{-2700}} + \sqrt[3]{81-\sqrt{-2700}} = \sqrt[3]{81+30\sqrt{-3}} + \sqrt[3]{81-30\sqrt{-3}}$$

Para obter as raízes cúbicas dos binômios $\sqrt[3]{81 \pm 30\sqrt{-3}}$ com as regras de Wallis, supomos que as raízes têm a forma $a \pm f\sqrt{-e}$. A primeira estimativa de Wallis é fazer $f = 1$; $e = -3$, naturalmente obtendo do cubo da igualdade $a \pm f\sqrt{-e} = \sqrt[3]{81 \pm 30\sqrt{-3}}$ um valor irracional

---

[102] Stedall, 2002, p.79

[103] This solution of the cubick equation, did put me upon another inquiry requisite thereunto; about extracting the root of a binomial cube. And the method then invented concerning it (…) I continue to make use of. (Wallis, 1685, p.177)

para *a*. Porém, este é sempre suposto racional. Em seguida o procedimento seria tomar $f = ½$ pois f foi tomado muito grande. Da nova igualdade obtêm-se as raízes corretas:

$$a \pm f\sqrt{-e} = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3} \text{ e daí } r = 9.$$

> Está então manifesto que as raízes binomiais desses cubos binomiais (onde tais raízes são possíveis) podem ser descobertas da mesma forma, sem interferência de nenhuma raiz quadrada negativa. (Wallis, 1685, p. 181)[104]

Ao término da mesma página, lê-se: "E por isso também, como mostramos (parte por Harriot e em parte pelo que pensamos adequado adicionar) em todos estes casos, as equações cúbicas afetadas podem ser reduzidas a uma cúbica simples, e como estas raízes podem ser então designadas".[105]

Não é o objetivo desta dissertação, determinar exatamente que partes são originais de Harriot ou acréscimos de Wallis (embora em alguns momentos isso fique claro dentro do contexto), mas dar uma ideia suficientemente concreta dos resultados que podem ser obtidos das mesmas e do impacto causado tanto pela matemática de Harriot quanto pela de Oughtred.

As duas seções seguintes (cap.49-50) completam o tratamento das cúbicas e de extrações de raízes de outros binômios. Naturalmente conhecendo a raiz real da cúbica, Wallis determina, por divisão polinomial, sua decomposição em uma quadrática e uma lateral, bastando resolver a quadrática para encontrar as outras raízes complexas, mostrando assim que as equações de grau três sempre possuem uma raiz real, podendo as outras duas ser ambas reais ou ambas imaginárias. Os capítulos 51 e 52 completam a sexta e seção final de Harriot, com algumas aproximações numéricas de raízes (cap.52) e um tratamento das biquadráticas que, segundo Wallis:

> Do que, logo, ele não nos dê uma solução perfeita em espécies (assim como nenhum outro algebrista fez ainda), excetuando apenas esses casos onde podem ser

---

[104] It is manifest therefore, that these binomial roots, of these binomial cubes (where they be capable of such roots) may be in the same manner discovered, as where no such negative square doth intervene (Wallis, 1685, p. 181)

[105] And for as much also, as we have shewed (partly from Harriot partly from what we have tought fit to add;) how in every of these cases, the affected cubick equations may be reduced to a simple cubick, and how these roots thereof may be designed". (Wallis, 1685, p.181)

> decompostas – por divisão – até tornarem-se equações mais simples (...) (Wallis, 1685, p.187)[106]

Como consequência desta reflexão sobre a natureza das raízes envolvidas na solução desses problemas, vemos a construção geométrica proposta por Wallis nesse livro dos números negativos e complexos que, em essência, seria a mesma proposta e expandida por Argand e Gauss anos depois.

4.4 Construção geométrica dos números impossíveis segundo Wallis.

Durante a exposição dos capítulos anteriores, vimos que Wallis sentia-se bastante confortável, aparentemente, com o tratamento aritmético dos números irracionais e admitia operações com os números negativos e complexos. Nos capítulos 66 e 67 o estudioso defende sua posição com argumentos menos aritméticos e também fornece uma interpretação geométrica para ambos embora mostre relutância em admitir a existência de tais números.

Para Wallis, as raízes quadradas de números negativos surgem das "quadráticas impossíveis" descritas anteriormente. Não há problemas em se conceber raízes cúbicas de negativos e mesmo a dificuldade de se obter as raízes de certas cúbicas, segundo Wallis, provém destas quadráticas. O fato de que uma equação de grau três deve possuir ao menos uma raiz real (positiva, negativa ou surda) motiva Wallis a afirmar que mesmo esses complexos são capazes de formar uma aritmética. Uma das utilidades destes casos impossíveis é mostrar algum tipo de impossibilidade e isso em si justifica seu uso.

No capítulo 76, sobre quadrados negativos, temos a justificativa de Wallis para a existência dos números negativos, aplicando um sentido vetorial ou "físico" à sua existência:

> Mas é do mesmo modo impossível que qualquer quantidade (logo que não seja um quadrado suposto) possa ser negativa. Pois não é possível que uma grandeza possa ser menos que nada ou que um número possa ser inferior a zero. Ainda que tal

[106] Of which though He do not give us a perfect solution in species (as neither have any other algebrists yet done) save only these cases as they may be dissolved (by division) into more simple equations (…) (Wallis, 1685, p.187)

> suposição (de quantidades negativas,) não seja inútil ou absurda quando compreendida de forma correta. (Wallis, 1685, p.265)[107]

O mais interessante é perceber que sem essa existência física, eles são "menos que nada" e para Wallis, uma mera notação algébrica. Logo, não existem. Mas isso não impede a formulação das regras para sua operação, pois: "a suposição de quantidades negativas não é inútil ou absurda quando corretamente entendida". E o que é "admitido para linhas, deve ser pelo mesmo motivo, para o plano". Desse modo seguem as observações de Wallis sobre quadrados negativos, mostrando uma noção associada aos quadrantes e seus respectivos sinais. A partir disso, Wallis interpreta a construção dos números imaginários enxergando-os como médias proporcionais. Após explicar o conhecido fato de que $\sqrt{bc}$ é a média proporcional entre b e c, postula que $\sqrt{-bc}$ pode ser interpretada com a média proporcional entre $-b$ e c.

A noção de quadrantes fica mais aparente quando se observa o primeiro exemplo geométrico, Wallis fornece uma interpretação de números complexos como linhas trigonométricas. Escolhendo AB = + b e BC = + c, o número $\sqrt{-bc}$ é interpretado como a tangente PB, na figura abaixo.

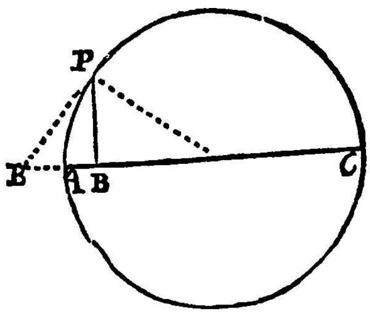


Fig 4.4.1- Interpretação de Wallis para $\sqrt{-bc}$.

Segundo Schubring (2001), não foi possível encontrar traços de uma discussão ou recepção de tais ideias por contemporâneos de Wallis ou autores da primeira metade do século XVIII, mesmo tendo Wallis comunicado a Collins essa construção em uma carta datada de 6 de maio de 1673, num contexto onde este discutia regras de Cardano para resolver

[107] But it is also Impossible, that any Quantity (though not a Supposed Square) can be *Negative*. Since that is not possible that any Grandeza can be *Less than Nothing*, or any *Number Fewer than None.* Yet is not that Supposition (of Negative Quantities,) either Unuseful or Absurd when rightly understood. (Wallis, 1685, p.265)

equações de grau elevado, a interpretação de Wallis não teve repercussão e os debates e interpretações posteriores seriam independentes desta. Embora exista uma alusão de François Daviet de Foncenex (1733/34- 1799) no seu *mémoire*, fazendo referência a um autor cujo texto de álgebra publicado permite a construção de imaginários em uma direção perpendicular, leve o autor a suspeitar de uma inter-relação com Wallis, investigando livros e manuais de álgebra da época, Schubring não conseguiu encontrar nenhuma outra construção similar à de Wallis.

CAPÍTULO 5

AS INOVAÇÕES DE HARRIOT SEGUNDO JOHN WALLIS E AS CONTROVÉRSIAS GERADAS PELA DISPUTA DE PRIORIDADES: INGLATERRA X FRANÇA.

Segundo as correspondências da época, a fundação da Royal Society (1660) e da Academie Royale des Sciences (1666) foi uma tentativa de se estabelecer as bases para um espírito de cooperação que determinasse o intercâmbio científico entre não somente a Inglaterra e a França, mas também entre todas as nações na Europa. Heinrich Oldenburg (1619-1677), nascido em Bremen e secretário da Royal Society, exprimiu esse espírito de concepção e atuou no sentido de estabelecer uma rede internacional de tais correspondentes, com o objetivo de promover o bem público. Porém, nas condições políticas e científicas do século XVII, o cotidiano dos acadêmicos e pesquisadores foi mais determinado por disputas do que por cooperação, em particular, no que diz respeito à Inglaterra e à França.

John Wallis (1616-1703), ocupando o cargo de professor saviliano de geometria na Universidade de Oxford, um teólogo por formação, dedicou-se intensamente a disseminar os seus conhecimentos de álgebra, estes adquiridos de estudos autodidatas, a um público internacional. Lutando para obter a publicação rápida de resultados de pesquisa, ele entrou em conflito com o matemático francês Gilles Personne de Roberval (1602-1675), este, ocupando o *Ramus-professorato* no Collège de France, era obrigado a apresentar resultados quando era época do concurso para prorrogar ou renovar aquela posição. Comumente guardava novos resultados a fim de apresentá-los anualmente no concurso. Em seguida, Wallis publicou a correspondência completa quanto à resolução desses problemas e conseguiu manter, até certo ponto, o seu renome. Mas quando suas resoluções de questões sobre a ciclóide não foram aceitas em Paris devido à parcialidade de seu texto, Wallis começou a publicar cartas (em 1659) não somente acirrando tal concorrência, mas também atacando os cientistas franceses, acusando-os de terem desrespeitado as prioridades de matemáticos italianos quanto à ciclóide, afirmando, inclusive, que as descobertas de Torricelli eram muito superiores às de Roberval.

> Este conflito [com Roberval] foi a causa dos desafios aos matemáticos ingleses com problemas na teoria dos números colocados por Pierre de Fermat. Wallis e o seu amigo William Brouncker mostraram-se definitivamente inferiores aos concorrentes franceses. [BEELLEY & SCRIBA, 2005, p. 117]

Disputas sobre prioridades e acusações de plágio foram frequentes na segunda metade do século XVII, mas o novo elemento é que o prestígio nacional era medido por resultados científicos. Ao mesmo tempo em que o aumento das atividades matemáticas levou matemáticos de diferentes nacionalidades a trabalhar sobre os mesmos problemas, paradoxalmente esse mesmo desenvolvimento não foi reforçado pelas revistas então recentemente estabelecidas como as *Philosophical Transactions* e o *Journal des Savants*, dedicadas oficialmente ao intercâmbio internacional. Elas foram frequentemente acusadas de parcialidade nacional. Wallis, participando nos debates internacionais, envolveu-se em várias dessas disputas. Porém, ele não esteve sozinho. Quanto à parcialidade nacionalista, Wallis com certeza não obteve lucros ou perdas no meio acadêmico internacional com tal posicionamento crítico contra o universo matemático francês (em especial, Descartes).

5.1 Harriot: Wallis X Descartes

Esta disputa, segundo Beelley & Scriba (2005), é: “(...) muito adequada para revelar como pensamento em termos de prestígio nacional e rivalidades pessoais foram confundidos durante a revolução científica do século XVII”. Vê-se isso no legado do algebrista inglês Thomas Harriot e, em particular, na questão: se e de qual maneira René Descartes apresentou, na sua *Geométrie,* inovações em álgebra que eram encontradas em Harriot?

Como acontece frequentemente em disputas sobre prioridades, neste caso não foi procurada, desde o começo, uma prova de uma dependência conceitual.

> Cada um que trabalha sobre um problema começa aí onde outros terminam e acumula o que ele achou – conscientemente ou inconscientemente – em outros lugares. Fontes supostas foram frequentemente o resultado de uma comparação superficial. No caso presente, somente a suspeita de um plágio foi suficiente para efetuar, exceto na área da matemática, um dano duradouro quanto à imagem do Descartes. (BEELLEY & SCRIBA, 2005, p. 119)

Roberval se tornou uma importante testemunha a respeito da argumentação de Wallis sobre a dimensão histórica dos resultados de Harriot como algebrista. Wallis relata, no seu *Treatise of Algebra,* um episódio no qual Roberval aparentemente se fez convencer, em alguns pontos importantes, da dependência que Descartes possui de Harriot. Numa conversa com o matemático e cientista inglês Charles Cavendish, exilado em Paris, Roberval tomou consciência de uma concordância entre Descartes e Harriot. Wallis relatou que Roberval, mais tarde, olhando o livro *Artis analyticae praxis* (1631) na casa de Charles Cavendish, exprimiu o seu espanto:

> Eu admiro (disse o Sr.Roberval) a noção em Des Cartes de alocar toda a equação em um lado apenas, igualando-a a nada, e como ele a explicou. A razão pela qual você a admira (disse Sir Charles) é que você é um francês; se você fosse um inglês, não a admiraria. Por que isso? (disse o Sr.Roberval) Porque (disse Sir Charles) nós na Inglaterra sabemos de onde ele tirou essa noção: da álgebra de Harriot. Que livro é esse? (disse Sr.Roberval) Eu nunca o vi. Venha então para meu escritório (disse Sir Charles e eu o mostrarei. O que ele fez pouco tempo depois: e sentindo-se convencido, Roberval exclamou com admiração (Ele o viu! Ele o viu!) encontrando tudo aquilo em Harriot que ele outrora tanto admirara em Des Cartes; e não duvidando que Des Cartes tirou suas idéias de lá. (WALLIS, 1685, p. 198).[108]

Observando que tais relatos eram baseados em boatos, esse episódio pode ter acontecido no ano de 1648. Parece estar em conexão imediata com outra história também divulgada mais tarde e que aconteceu com grande probabilidade no verão de 1648, durante a última estadia de Descartes em Paris. Oldenburg, residindo, na época, em Paris, comunicou em 1676 a Ehrenfried Walther von Tschirnhaus que o autor e dramaturgo inglês William Joyner (1622-1706) lhe contou, depois de sua volta da França, como Roberval acusou Descartes num reunião pública de ter tirado uma grande parte da sua álgebra de Harriot.

Provavelmente, essa não foi a primeira vez em que Roberval humilhou Descartes publicamente. No século XVII suspeitou-se que foi devido a esse novo episódio que o autor do *Discours de la méthode* deixou pouco depois definitivamente a capital francesa.

---

[108] I admire (saith M.Roberval) that notion in Des Cartes of putting over the whole equation to one side, making it equal to nothing, and how he lighted upon it.The reason you admire it (saith Sir Charles) is because you are a French-man; for if you were a English-man, you would not admire it. Why so? (saith M.Roberval) Because (saith Sir Charles) we in England know whence he had it; namely from Harriot's Álgebra. What book is that? (saith M.Roberval,) I never saw it. Next you come to my chamber (saith Sir Charles) I Will shew it to you. Which in a while after he did: And upon perusal of it, M.Roberval exclaimed with admiration (Il l'a veu! Il l'a veu!) He had seen it! He had seen it! Finding all that in Harriot which He had before admired in Des Cartes; and not doubting but that Des Cartes had it from thence. (WALLIS, 1685, p. 198).

De modo semelhante à maioria das disputas de prioridade, as linhas de conexão são muito complexas e ainda mais no caso de Descartes e Harriot, pois ambos tiveram influências do trabalho de Viète. Além disso, Harriot nunca publicou um trabalho matemático durante sua vida. Como verificamos anteriormente, seu livro foi publicado somente dez anos após sua morte, e para Stedall, Warner destruiu a coerência do texto e reduziu fortemente a qualidade do trabalho (STEDALL, 2003). Na nossa análise, defendemos que, apesar de excluir o tratamento das raízes negativas e imaginárias da álgebra de Harriot, a apresentação é mais discursiva, organizada com um "certo espírito euclideano".

O livro *Artis analyticae praxis* ao menos contribuiu para convencer a posteridade da importância de Harriot. Assim, já nos primeiros anos da *Royal Society* houve várias tentativas de encontrar as partes dos manuscritos de Harriot que foram dispersas e neste ínterim comprá-las ou fazer cópias para a sociedade. Dessa maneira deveria ser estabelecida uma coleção dos papéis de Harriot na biblioteca da Royal Society que corresponderia à importância de Harriot.

> Embora não se possa excluir que Cavendish – que se interessou fortemente pelas pesquisas de Harriot, igualmente como John Pell – tenha mediado algumas das idéias de Harriot para a França, a distância entre os anos de publicação dos dois livros já foi suficiente para fundar em alguns contemporâneos a suspeita de uma dependência. (BEELLEY & SCRIBA, 2005, p. 121)

É possível indicar textualmente várias correspondências entre Descartes e Harriot, o que geralmente se assume hoje em dia como indicação de desenvolvimentos paralelos. Por exemplo, encontra-se em Descartes o que Harriot chama de primeira forma canônica: o procedimento pelo qual numa equação se transpõe o termo absoluto sozinho no lado direito. Também se encontra em ambos os autores a eliminação sistemática do segundo termo no tratamento de equações cúbicas. Na solução de equações quadráticas e cúbicas, tanto Harriot quanto Descartes fazem observações sobre as raízes negativas e imaginárias – embora tais raízes não aparecessem na edição de Warner.

Além dessas várias similaridades, o mais impressionante é o uso recorrente de vogais minúsculas para indicar quantidades desconhecidas, enquanto Viète ainda utilizou maiúsculas. Esse pode ser considerado como um desenvolvimento que se deduz de maneira natural dos trabalhos do grande algebrista francês. Em particular, Harriot utilizou a multiplicação iterada para designar potências o que levava naturalmente a observar propriedades através de "fatoração". Neste ponto particular, Descartes avança para uma notação sobrescrita.

Como Roberval, Wallis conheceu o livro *Artis analyticae praxis* somente depois de estudar a *Geométrie* de Descartes mais de perto. Isto é, com certeza, importante para o curso da discussão sobre o pretenso plágio: ambos tomaram consciência das similaridades superficiais entre os dois livros e não tentaram deduzir sistematicamente a parte algébrica da *geomètrie* do livro de Harriot. O terceiro livro da *geomètrie* de Descartes constitui uma parte importante da própria carreira matemática de Wallis. Lembremos a referência de Wallis a Descartes presente no *Arithmetica infinitorum*, descrevendo-o como um "grande homem".

Contudo, a situação muda anos mais tarde, quando o Tratado de Álgebra foi publicado. Embora o texto desta história da álgebra, que aponta de forma excessivamente parcial as contribuições dos ingleses, estar completo em sua essência há muito tempo antes de seu lançamento, o prefácio foi provavelmente redigido pouco antes da publicação. A acusação de plágio é formulada bem mais claramente nesse ponto:

> Em resumo, Ele [sc.Harriot] tinha (de certa forma) ensinado tudo que tinha passado por método cartesiano de álgebra; havendo pouca (se é que havia alguma) coisa de álgebra pura em Des Cartes que não estivesse antes em Harriot; de quem Des Cartes parece ter retirado o que ele tinha (ou seja, álgebra pura), mas sem creditá-lo. (Wallis, 1685, p.18)[109]

Quando Wallis foi solicitado, alguns anos mais tarde, por Samuel Morland (1625-1695), um compatriota, diplomata e inventor, que morava em Utrecht, para indicar passagens nos livros de Descartes e de Harriot que atestassem o suposto plágio, Wallis retrucou, afirmando que nunca utilizou esse termo. Em vez disso, a sua intenção teria sido somente dizer que muito – se não tudo – da álgebra de Descartes já fora elaborada por outros autores em tempos anteriores, em particular por "nosso Harriot".

Essa afirmação é correta, mas em nada muda a sua intenção com estas diversas indicações. No entanto, ele aceitou o pedido de Morland. Wallis citou diversos pontos na Geometria, segundo a edição organizada por Frans van Schooten. Wallis destacou que muitos desses pontos importantes se encontravam em Harriot, dentre os quais exemplos para raízes negativas e imaginárias. Como já explicado, Harriot de fato discutiu tais raízes, mas os pontos

[109] In sum, He [sc.Harriot] hath taught (in a manner) all that which hath since passed for the Cartesian method of Álgebra; there being scarce any thing of (pure) Álgebra in Des Cartes, which was not before in Harriot; from whom Des Cartes seems to have taken what he hath (that is purely Álgebra) but without naming him (Wallis, 1685, p.18)

em que isso é feito, se encontravam na época somente no seu manuscrito, e a edição da obra por Warner as teve inteiramente excluídas.

Já mostramos alguns indícios textuais de que Wallis teve conhecimento do conteúdo dos manuscritos de Harriot, mas segundo Beeley & Scriba:

> (...) parece que Wallis nem sempre foi completamente sincero perante terceiros. Embora ele tenha anotado numa folha, que ele inseriu em 27 março 1677 (antigo calendário) no exemplar do *Artis analyticae praxis* da biblioteca Saviliana em Oxford, que ele havia visto alguns papeis de Harriot, ele manteve, em uma carta a John Aubrey no verão de 1684, nunca ter visto outro texto a não ser aquele redigido por Warner. (Beeley & Scriba, 2005, p.125)

É provável que a nitidez com a qual Wallis formulou, em anos posteriores, a acusação de plágio se explica pela influência de John Pell. A animosidade entre o antigo professor de matemática no *Athenäum Illustre* em Amsterdã e o matemático e filosofo francês já era conhecida na época. Deve-se lembrar, como Wallis relata, que foi em uma conversa com Pell que ele ouviu a história sobre Cavendish e Roberval citada no Tratado de Álgebra. No prefácio da versão latina do tratado, Wallis admite ter dado oportunidade a Pell, antes da publicação da versão inglesa, de ler o texto e propor alterações. Evidentemente, a opinião de Pell foi importante para ele, visto que vários capítulos são dedicados aos seus trabalhos algébricos.

Todavia, Adrien Baillet (1649-1706; biógrafo de Descartes), certamente queria saber mais sobre as fontes de Wallis, e duvidou que Pell concordasse com a interpretação de Wallis. Mas outro fator pode ter sido importante: as numerosas disputas de prioridade. Jean de Beaugrand (1595-1640), um antigo aluno de Viète, afirmou que a álgebra de Descartes poderia ser deduzida de Viète. Descartes, respondeu, com uma carta:

> Assim, comecei do ponto onde ele parou; o que fiz contudo sem pensar, depois que recebi sua última noticia é folhear mais Viète do que antes, tendo-o encontrado aqui por acaso nas mãos de um de meus amigos ; e entre nós, não acho que contenha tanto daquilo que pensava, mesmo achando que ele fosse tão hábil.[110] (Descartes para Mersenne, 1637, apud Beeley & Scriba, 2005, p.125)

---

[110] Et ainsi j'ay commencé où Il avoit achevé; ce que j'ay fait toutesfois sans y penser, car j'ay plus feüilleté Viète depuis que j'ay recue vostre derniere, que je n'avois jamais fait auparavant, l'ayant trouvé icy par hazard entre les mains d'un mes amis; & entre nous jê NE trouve pás qu'il em ait tant sceu que je pensois nonobstant qu'il fust fort habile. (Descartes para Mersenne, 1637, em Beeley & Scriba, 2005, p.125)

Quando foi acusado, no fim de 1638, de plagiar o conteúdo do *Artis analyticae práxis*, Descartes reagiu a essa acusação numa carta a Constantijn Huygens, apontando que teria lido Harriot somente quando tomou conhecimento daquela acusação:

> Descartes, então, não tenta negar a similaridade entre sua álgebra e aquela de Harriot. Ele sublinha o caráter superficial de tal similaridade. Devidamente, ele aponta que uma análise mais aprofundada levaria a outro resultado que a pretensa dependência do algebrista inglês de que alguns dos seus inimigos o têm acusado."(Beeley & Scriba, 2005 , p.126)

5.2 As 25 inovações de Harriot segundo Wallis.

No capítulo 53 do *Tratado de Álgebra,* Wallis disserta sobre o status ao qual Harriot elevou a álgebra. Segundo o autor, Harriot não lida com aplicações à geometria, mas com álgebra pura pelos seus próprios princípios, nem lida com outras aplicações particulares. A sua "álgebra pura" é simplesmente a manipulação simbólica das proporções. Ainda, enumera uma lista de "25 inovações em álgebra"[111] que deveriam ser atribuídas a Harriot compreendendo: notação (1-3), fatoração de polinômios (3-5; 8), relações entre as raízes e os coeficientes (6-7;10-11), classificação de raízes (9), transformações lineares e redução de equações para formas canônicas (12-21; 24), tratamento das raízes complexas (22-23), soluções de equações numéricas (25).

Desta lista de "descobertas de Harriot", traçamos o ponto de mudança de foco dos algebristas de uma busca por fórmulas explícitas a uma abordagem mais moderna, observando também as relações entre os coeficientes e raízes. Segundo Stedall (2002), três foram as grandes conquistas de Harriot que o elevam ao status de grande algebrista junto a Cardano, Viète e Descartes: a sua notação, cuja única diferença significativa para a nossa é a notação sobrescrita para as potências (que Torpoley, ao copiar os manuscritos de Harriot, frequentemente escrevia a^{I}, a^{II}, a^{III}, etc...) e *que era apenas uma questão de tempo para tais convenções se tornarem gerais*.

A notação de Harriot permitiu sua segunda grande conquista, que foi a manipulação totalmente simbólica de equações. Seguia a tradição de Cardano, Viète e Bombelli, mas Harriot foi o primeiro cuja notação realmente colaborava com suas investigações. A terceira de suas grandes conquistas foi exibir a forma como polinômios são compostos de fatores

---

[111] Em anexo.

lineares, mostrando o número de raízes e sua natureza (se afirmativa, privativa, surda ou imaginária), obtendo relações entre as raízes e os coeficientes, que se tornou o centro de sua teoria de equações e, consequentemente, a base de toda a álgebra abstrata moderna.

Restaria fazer uma análise pontual (item a item) dessa lista, mas isso nos levaria a uma discussão mais ampla sobre prioridades. É de opinião geral de diversos historiadores que grande parte desses resultados deve-se a Albert Girard (1595-1632). De uma forma geral, sabemos que o objetivo dessa lista é convencer o leitor da prioridade de Harriot sobre a teoria de equações de Descartes.

Por exemplo, no item 2, Wallis mostra corretamente a notação de potências de Harriot, mas inclui a notação de Descartes sem deixar claro se Harriot já a usava ou não. Lutar contra a ambiguidade de Wallis é uma tarefa complicada até mesmo para os mais fluentes na língua inglesa, então podemos imaginar a forma como os contemporâneos de Wallis foram convencidos de suas idéias. Numa análise informal podemos dizer que Descartes contemplou em sua teoria os seguintes itens da lista de Wallis: 1- 8, 12- 18 e 24-25. Isso apenas mostra que a lista de Wallis é bem sucedida em incluir a álgebra de Descartes na de Harriot, mas não prova uma dependência conceitual.

CAPÍTULO 6
CONCLUSÃO

O primeiro capítulo toca num assunto extenso que é o papel da civilização islâmica na preservação e transformação dos textos clássicos gregos. Muito tem sido descoberto nessa área para que possamos assumir que o mostrado nesse trabalho é uma verdade absoluta e fechada. Mas, de toda forma, a nossa pesquisa sugere que, a partir de autores como Djebbar e Hoyrup, dentre outros, podemos melhorar a nossa percepção da contribuição islâmica no avanço da ciência. Ainda sobre este mesmo tema, falta em nossa língua, uma análise mais completa sobre a evolução da simbologia e do tratamento dos problemas que os cientistas do Islã trabalharam antes de sua recepção na Europa através das traduções mencionadas.

Destacamos que a Espanha muçulmana teve uma importância fundamental nesse processo, contrariando a opinião recorrente de que os italianos exerceram um tipo de "monopólio" sobre tais traduções ou que sua matemática era desprovida de ligação com a vida cotidiana. Em particular, tínhamos entre os italianos uma matemática essencialmente voltada para o comércio ensinada pelas escolas de ábaco, que não apenas transmitiram algoritmos para resolução de problemas lineares e quadráticos, mas desenvolveram soluções para casos particulares de equações de terceiro e quarto graus. Sua matemática foi "compilada" e desenvolvida numa simbologia sincopada por matemáticos como Cardano e Bombelli, que desenvolveram opiniões divergentes sobre os números complexos.

A grande inovação de Viète foi perceber como a álgebra pode servir como instrumento de análise para outras ciências, em particular a geometria. Neste ínterim, a generalidade das soluções, possibilitada pela sua notação e a organização axiomática atraíram adeptos de sua nova análise atrás da promessa da "matemática universal".

Representando dois desdobramentos distintos da matemática de Viète, temos Thomas Harriot e René Descartes. Descartes foi capaz de explicitar a relação entre uma curva e sua equação, passando de um geômetra clássico procurando por novos instrumentos de construção a um analista algébrico estreitando ainda mais as conexões entre a álgebra e a geometria propostas por Viète.

A matemática cartesiana era voltada para problemas de construção e isso limitou o universo aceitável de sua álgebra. A construtibilidade das raízes das equações era crucial para Descartes, e assim o estudioso desenvolveu novos métodos e padrões de rigor matemático. A recepção das ideias matemáticas cartesianas não foi uniforme e, ao mesmo tempo em que novos adeptos se rendiam aos seus métodos, surgiam críticas e acusações de plágio. Em particular, a campanha de Wallis para denegrir postumamente Descartes insere-se nesse contexto de disputa de prioridades que permeou o discurso científico do século XVII.

Harriot, de formação científica desconhecida, nunca publicou em vida um livro de matemática. A obra que lhe rendeu alguma notoriedade foi publicada postumamente por Walter Warner em 1631, depois de um longo processo de disputa pelos seus bens. A premissa de que a álgebra resolveria todos os problemas matemáticos implicava que toda equação deveria ser levada à sua solução, então Harriot começou a desenvolver a teoria de equações de Viète com uma notação própria, chegando a inúmeros resultados particulares.

A notação de potências de Harriot é mostrada por Wallis como uma mudança epistemológica, libertando a álgebra das descrições verbais provindas da geometria, ou seja, uma nova formulação da álgebra, sem limites de dimensão.

As formas canônicas de Harriot respeitam rigorosamente a “lei dos homogêneos” de Viète e a necessidade de demonstrar seus teoremas utilizando a noção de proporções contínuas reforça nossa opinião de que ainda existiam resquícios de conceitos geométricos na “álgebra pura” de Harriot.

Aqui fica a questão de averiguar com mais detalhes se tal rompimento aconteceu de fato. Esta notação já tinha um antecedente em Michael Stifel (1544). Segundo Pycior (1997, p.58): “Ele [Harriot] estava familiarizado com os símbolos usados por algebristas anteriores, incluindo não só Stifel e Clavius, mas também Diofanto, Viète e Simon Stevin”. Harriot ajudou a popularizar o sinal de “=” de Robert recorde e criou os sinais de desigualdade.

Outras inovações são apontadas como provas do suposto plágio cometido por Descartes: igualar uma equação a zero, uso da fatoração, formulação do teorema fundamental da álgebra, transformações lineares para redução a formas canônicas e até mesmo a sua notação. As similaridades quanto aos métodos matemáticos, como a eliminação sistemática do segundo termo de uma equação, comum aos dois matemáticos no tratamento das equações.

Por outro lado, Wallis generalizava livremente os resultados de Harriot, menos em benefício de seu legado do que em detrimento do de Descartes. Em particular, vimos o caso da “Regra de Sinais” que Wallis habilmente atribuiu a Harriot e usou como crítica ao matemático francês. Curiosamente Wallis também atribuía esta regra de volta ao seu verdadeiro autor, quando pretendia atestar sua validade, citando a superioridade da "regra de Harriot".

Hoje sabemos que a formulação do teorema fundamental da álgebra que Wallis chama de "regra de Harriot" é uma indução livre do mesmo e que Descartes não publicou tudo o que sabia a respeito da "regra de sinais". Somando estes e outros indícios superficiais à diferença de seis anos entre a publicação do *Praxis* e da *Geometria* de Descartes, Wallis foi capaz de criar uma "dúvida razoável" em favor da causa inglesa (ou talvez sua própria), o que foi suficiente, para alguns matemáticos da época, tornarem-se partidários desta opinião, como Roberval e, provavelmente, Leibniz.

A habilidade em distorcer a verdade em seu favor, digna de um grande político, protegeu a fragilidade das capacidades matemáticas de Wallis e Brouncker frente aos desafios de Fermat. Este episódio, junto a divergências com Blaise Pascal e outros matemáticos franceses, somado também à rixa pessoal de John Pell com Descartes, explica satisfatoriamente o chauvinismo de Wallis e a maneira covarde com que sua pena atacou Descartes trinta e cinco anos após a sua morte. A tentativa de Wallis de resgatar o lugar devido a Harriot foi certamente obscurecida pela sua ferrenha crítica ao filósofo francês e a falta de evidências (manuscritos de Harriot) cujo conhecimento Wallis parecia negar. De toda forma, a descrição de Wallis difere da contida no *Praxis* e contém similaridades com o tratado de equações reconstruído por Stedall.

Além disso, mostramos um processo crescente de "teorização" dos resultados de Harriot. Warner, apesar das críticas de Torpoley e de Stedall, fez uso de uma abordagem muito mais discursiva com o objetivo de explicar o processo de obtenção das fórmulas, mesmo tendo retirado tudo a respeito das raízes negativas e complexas. Logo, a teoria de equações de Harriot era composta (na versão conhecida na época) por diversos lemas e proposições (à maneira mostrada em *elementos*), o que a tornava uma arma poderosa contra Descartes, cuja teoria de equações não continha demonstrações, deixando as provas para o leitor.

Para Bos (2001, p.384): "parece que a maioria dos *insights* de Descartes na teoria de equações era baseada no fato de que um polinômio pode ser decomposto em fatores lineares". Essa similaridade com Harriot, junto à ausência de provas de suas asserções, puseram um forte indício contra Descartes. O matemático francês enunciava o teorema fundamental da álgebra como: uma equação de grau n possui "no máximo" n raízes verdadeiras ou falsas, enquanto que, segundo Wallis, Harriot afirmava que esta relação era exata. O que deve ser ressaltado neste ponto é que, Harriot pesquisou apenas equações até grau quatro, enquanto Descartes foi um pouco além.

Os temas principais da teoria de equações cartesiana eram três: o número e os sinais das raízes de equações, as transformações lineares para reduzir uma equação dada a uma forma canônica construtível e critérios de irredutibilidade de equações. Esses três pontos em conjunto, associados a uma série de técnicas algébricas, permitiria ao geômetra construir as soluções positivas de um problema. De forma geral, sua teoria de equações estava a serviço de sua geometria e ele não a desenvolveu além do necessário para completar o objetivo do livro. Apesar destes indícios e do fato de Charles Cavendish poder ter levado resultados de Harriot para a França antes da publicação da Geometria cartesiana, não estamos inclinados a acreditar em plágio, mas em desenvolvimentos paralelos.

Ainda sobre as diferentes versões do trabalho de Harriot, vimos que Wallis utiliza uma abordagem ainda mais completa, descrevendo ao longo de 19 capítulos todo o conteúdo da *Praxis*, "preenchendo os espaços" que ele considerava consequências óbvias do que estava exposto e também construindo explicações próprias. Em particular, vimos que, no caso da cúbica XIII, Wallis sintetizou a abordagem de Harriot que era confusa e extensa, com muitos casos equivalentes, adotando a idéia central em todas elas para construir sua versão. Através deste processo, notamos que o conceito de proporções contínuas continua exercendo um papel central nessas demonstrações, sendo este um resquício de Geometria na "Álgebra pura" defendida por Wallis. Outro ponto a se notar, ainda no mesmo assunto, é que as formas canônicas utilizadas por Harriot seguiam rigorosamente a lei dos homogêneos de Viète. De toda forma, o conteúdo de Harriot em Wallis é válido:

> Sua descrição da álgebra de Harriot objetivava não apenas uma transmissão de conteúdos, mas também uma alocação de seu devido lugar na história da disciplina e seu desenvolvimento em potencial (…) e seus vinte e cinco 'Aprimoramentos da álgebra a serem encontrados em Harriot' foi um sumário honesto do que poderia ser visto no trabalho de Harriot ou facilmente deduzido a partir deste. (STEDALL, 2002, p.123)[112]

---

[112] His description of Harriot's álgebra was intended not just as straight rendering of content but as an assessment of its place in the history of the subject, and of its potential for development () and his list of twenty-five 'Improvements of Álgebra to be found in Harriot' was a fair summary of what could be found in Harriot's work or could be easily deduced from it. (STEDALL, 2002, p.123)[112]

Em certos momentos, desconfiamos que Wallis tinha acesso aos manuscritos de Harriot ou a parte deles. Este conhecimento também pode ter vindo de sua amizade com John Pell que ao menos uma vez copiou um manuscrito de Harriot (o tratado sobre números amigos) e era "profundo conhecedor" da matemática do mesmo.

Wallis conseguiu produzir resultados expressivos, como sua fração infinita para π e uma, mesmo que relutante primeira representação geométrica para os números negativos e complexos. Ainda que negasse a existência dos números negativos sem uma noção vetorial associada, classificando-os como "mera notação algébrica", Wallis formulou corretamente sua aritmética e usou a proporção 1 : x :: x : -1, fonte das interpretações anteriores dos números negativos, para conceber as raízes quadradas de números negativos como linhas trigonométricas, e forneceu aplicações geométricas para quem aceitasse sua construção.

Mesmo não sendo, segundo nossa visão, um matemático à altura dos experientes continentais, nem possuir uma extensa produção científica, John Wallis tem uma importância fundamental no desenvolvimento, divulgação e status da álgebra inglesa, sendo uma peça fundamental em sua revitalização.

Muitas questões ainda permanecem em aberto e esperamos com esta dissertação familiarizar o leitor com tais questões de forma a inspirar estudos mais aprofundados sobre o assunto. Esperamos ter estabelecido aqui a relevância das contribuições de Wallis como matemático, historiador e defensor da álgebra como ciência independente. O presente estudo é um "corte" muito limitado do conteúdo do livro, e defendemos que estudos posteriores do mesmo e ainda das correspondências de Wallis podem render muitas pesquisas interessantes sobre a matemática do período.

REFERÊNCIAS

BEELEY, P. ; SCRIBA, C. *J. Wallis, Leibniz und der Fall von Harriot und Descartes. Zur Geschichte eines vermeintlichen Plagiats im 17. Jahrhundert"*, Acta Historica Leopoldina 45, p.115-129, 2005.

_______. *The Correspondence of John Wallis, vol. 1 (1660-September1668)*. Oxford: Oxford University Press, 2003.

_______. *The Correspondence of John Wallis, vol. 2 (1660-September1668)*. Oxford: Oxford University Press, 2005.

BOS, H.J.M. *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer-Verlag, 2001.

COOKE, R. *Classical Álgebra: Its Nature, Origins and Uses*. U.S.A.: Wiley-Interscience, 2008.

CORRÊA, B. *A introdução à arte analítica de François Viète: comentários e tradução*. Rio de Janeiro, UFRJ/ IM, 2009.

DJEBBAR, A. *l'algebre arabe: genese d'un art*. ed. Vuibert, 2005.

DJEBBAR, A. 1986a = 1988 = 1994: *Quelques aspects de l'algèbre dans la tradition mathématique arabe de l'Occident musulman.* 1st Maghrebian Colloquium on the History of Arabic Mathematics, 1-3 December, 1986.

DJEBBAR, A. 1995a: *Mathématiques et activités religieuses ou profanes dans la cité médiévale du Maghreb : l'exemple du livre d'al-J o(t;.) l (m. 1305).* Study days of Kairouan on Mathematics in the Arab Arts. 27 March - 1 April. To appear.

DJEBBAR, A. 1995b: *Mathématiques et environnement culturel : exemple de jeux et de problèmes plaisants de la tradition mathématique arabe (IXe-XVe s.)*. Summerschool on Mathematical Games, Le Mans. 16 July 1995b. To appear.

GAGNEUX, B. *La règle des signes de Descartes: le long cheminement d'une imprécision*, Mathématiciens français du XVII e siècle - Descartes, Fermat, Pascal. Clermont-Ferrand: Presses Universitaires Blaise-Pascal, 2008.129-163.

HADFI, H. *ar-Riy o(d;.)iyy t bi Ifr qy khil l al-qur n al-wuso(t;.) : Jarba [Mathematics in Ifriqiya during the Middle Ages: Jerba]*. 'Diplôme d'Etudes Approfondies' thesis. University of Tunis 1, Faculty of Arts and Human Sciences. 1989.

HEATH, T.L. *Diophantus of Alexandria: A Study in the History of Greek Álgebra.* 2 ed. Mansfield Centre,CT: Martino Publishing, 2009.

HOYRUP, J.*“The Formation of Islamic Mathematics: Sources and Conditions”.*Filosofi og Videnskabsteori på Roskilde Universitetscenter.3. Række: Preprints og Reprints 1987 Nr. 1. *Science in Context* **1** (1987), 281–329.

KLEINER, I. *A History of Abstract Álgebra*. Boston: Birkhauser, 2007.

LAMRABET, D. *La mathématique maghrébine au moyen-âge. Post-graduate thesis*. Free University of Bruxelles. 1981.

NESSELMANN, G.H.F. *Versuch einer kritischen Geschichte der Álgebra*, G. Reimer, Berlin, 1842.

PYCIOR, Helena M. *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British Álgebra throught the commentaries on Newton’s Universal Arithmetick*. New York: Cambridge University Press, 1997.

ROMANO, A. *La Contre-Réforme Mathématique. Constitution et Diffusion d'une Culture Mathématique Jésuite à la Renaissance (1540-1640).* Rome : École française de Rome, 1999.

ROQUE, T. *A Matemática através da história*. Notas de aula do curso de História da Matemática. UFRJ, 2006.

SAMSO, M.J. *El legado cientifico Andalusi. [The Andalusian scientifique heritage]*. Museo Arquelogico Nacianal. Madrid, 1992.

SCHUBRING, G. *Conflicts between Generalization, Rigor and Intuition: Number Concepts Underlying the development of Analysis in 17-19th Century France and Germany*. New York: Springer-Verlag, 2005.

_______. *Argand and the early work on graphical representation: New sources and interpretations, Around Caspar Wessel and the Geometric Representation of Complex Numbers.* Proceedings of the Wessel Symposium at The Royal Danish Academy of Sciences and Letters, Copenhagen, August 11-15 1998: Invited Papers. Matematisk-fysiske Meddelelser 46:2, Jesper Lützen (ed.), (C. A. Reitzel: Copenhagen, 2001), 125-146.

STEDALL, J.A. *A Discourse Concerning Álgebra: English Álgebra to 1685*. New York: Oxford University Press, 2002.

_______. *The Greate Invention of Álgebra: Thomas Harriot’s Treatise on Equations*. New York: Oxford University Press, 2003.

_______. *John Wallis as controversialist: his quarrels with Fermat, Pascal, Dulaurens, and Descartes.* Pré-print. Em: Proceedings of the Conference: John Wallis as Correspondent and Controversialist, Oxford, 12-14 de Abril, 2010.

VERNET, J. G. *La cultura hispanoarabe en Oriente y Occidente [The Spanish-Arab culture in the East and in the West]*. Madrid. 1978.

VERNET, J. G. & SAMSO, M.J. *Panorama de la ciencia andalusi en el siglo XI. [Overview of Andalusian science in the 11th century]*. Actas de la Jornadas de cultura arabe e islamica. Insituto Hispano-Arabe de cultura. Madrid. 1981.

WAERDEN, B.L.Van Der *A History of Álgebra: From Al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Germany: Springer-Verlag, 1985.

WALLIS, John. *A Treatise of Álgebra Both Historical and Practical: shewing The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time, and by what Steps it hath attained to the heighth at which now it is*. London, Oxford, 1685.

_______. *A Treatise of Algebra Both Historical and Practical: shewing The Original, Progress, and Advancement thereof, from time to time, and by what Steps it hath attained to the heighth at which now it is*. London, Oxford, 1693.

Sites:

DJEBBAR, A., *On mathematical activities in North Africa since the 9th century*. Amuchma newsletter v.15. Universidade Pedagógica, Moçambique, 1995. Online em: http://www.math.buffalo.edu/mad/AMU/amu_chma_15.html. Último acesso em: 13/07/2010.

http://www.bbc.co.uk/history/historic_figures/raleigh_walter.shtml.Último acesso em 25/08/2010.

http://www.cambridge.org/. Último acesso em 28/08/2010.

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/. Último acesso em 29/08/2010.

ANEXO I – LISTA DAS 25 INOVAÇÕES DE HARRIOT SEGUNDO JOHN WALLIS

CHAP. LIII. *Of* Harriot's *Algebra.* 199

1. His introducing *Small Letters* (in the Room of Capitals) to deſign his Species; as taking up leſs Room: Eſpecially when they come to be frequently repeated.

2. His waving the Terms of *Squares*, *Cubes*, *Surſolides*, &c, in the deſignation of them. Which he performs more naturally by the bare Number of their Dimenſions: As *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, &c. (inſtead of A, Aq, Ac, Aqq, &c.) For which when they come to be numerous, it is conveniently expreſſed by a Numeral Figure adjoyned; as a^3, a^4, a^5, &c. inſtead of *aaa*, *aaaa*, *aaaaa*, &c. Which Mr. *Oughtred* alſo did ſometimes uſe.

3. His putting over the whole Equation to one ſide, making it equal to Nothing. And (which was the end why he did it)

4. Shewing thence, the true Original of Higher Equations, from a Compoſition of Lateral or more Simple Equations. (Which is the great Key that opens the moſt Abſtruſe Myſteries in *Algebra*; and which, I think we owe purely to him.) And (conſequently thereupon,)

5. Determining the Number of Roots (Affirmative, Negative, or Imaginary,) in every Equation. *viz*, So many as are the Dimenſions of its Higheſt Term.

6. Diſcovering the genuine Conſtruction of the Abſolutely Known Quantity; (or *Homogeneum Comparationis*, as *Vieta* calls it;) *viz.* by a continual Multiplication of all the Roots.

7. As alſo the Conſtitution of all the *Coefficients*; *viz.* of what, and how many Members each Coefficient doth conſiſt; and by what Multiplications (of Roots into one another) each Member is made.

8. Diſſolving (by Diviſion) an Equation ſo compounded into thoſe Simple Equations, of which (by Multiplication) it is made up.

9. Determining (by comparing Common Equations, with his Canonicals,) How many Roots of each Equation are Real, (and not meerly Imaginary;) and how many of thoſe are Affirmative, how many Negative.

10. Reducing conditioned Equations, to more Simple forms, upon Suppoſition of certain Equalities, or reſpective Proportions in their ſeveral Roots amongſt themſelves; whereby ſome of their places become vacant, or ſo and ſo qualified. And (conſequently,)

11. A Diſcovery of thoſe Equalities and Proportions in the Roots, from ſuch want of, or Qualification of the Coefficients; as ariſing from thence.

12. Turning at once (by changing the Signs of Even places) all the Affirmative Roots into Negatives, and the Negatives into Affirmatives.

13. Multiplying and Dividing the Roots of an Equation, yet Unknown, in any Proportion at pleaſure. And

14. Thereby freeing the Coefficients of an Equation from Fractions and Surds.

15. Increaſing or Diminiſhing the value of ſuch Unknown Roots, by Addition or Subduction of any Quantity aſſigned. And

16. By this means, if there be occaſion, making ſome or all of the Negative Roots to become Affirmative; or the Affirmatives Negative. And

17. Taking away (by the ſame means) one or more of the Intermediate Terms in an Equation; and thereby reducing the Equation to fewer Terms.

18. Taking away (in particular) the Second Term in any Equation; by increaſing or diminiſhing the value of the Root by an Aliquote part of the Coefficient, denominated by ſuch number as is that of the Dimenſions of its higheſt Term.

19. Reducing (hereby) all Affected Quadratick Equations, to Simple Quadraticks.

20. Reducing (in like manner) all Affected Cubick Equations to Two forms, very convenient for a further Reduction.

21. Reducing further, the ſame Affected Cubick Equations, to Simple Cubicks, ſo far as they are capable of being Reduced in Species.

22. Diſcovering thoſe Cubick Equations, which are not capable of Explication in Species, (according to ſuch ways of Notation as are yet received,) with-

out

Fig- Lista Harriot 1-22

200 *Of* Harriot's *Algebra*. CHAP. LIV.

out imagining the Square Root of a Negative Quantity. With the Demonstration of that Incapacity.

23. Shewing (notwithstanding) that those same Equations have Real Roots, and not meerly Imaginary.

24. A peculiar way (and very expedient) of reducing Affected Quadratick Equations, to Simple Quadraticks; by compleating the Square.

25. An Improvement of the *Exegesis Numerosa*; that is, the Numeral Solution (or Extracting the Roots) of Affected Equations, first introduced by *Vieta*

All these are either explicitely delivered by him, in express words; or be obvious Remarks, upon the bare inspection of what he delivers. And most of them are properly his own discoveries (for ought I can yet find,) though in some few of them *Vieta* had gone before him.

To this estate had Mr. *Harriot* advanced *Algebra* in that his Posthumous Treatise, written long before, (for he died in 1621,) but Published in the Year 1631.

Fig- Lista Harriot 22-25

1. Sua introdução de letras minúsculas (no lugar das maiúsculas) para designar as espécies; economizando espaço: especialmente quando estas são frequentemente repetidas.

2. O abandono dos termos *quadrados*, *cubos*, *sursolidos*, etc na sua designação [das espécies]. Que ele executa mais naturalmente pela mera repetição de suas dimensões: como *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, etc. (ao invés de *A*, *Aq*, *Ac*, *Aqq*, etc) e quando estes se tornam muito numerosos são convenientemente expressados com um numeral adjunto a, a^2, a^3, a^4, etc. Ao invés de *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, etc. Como o senhor Oughtred também usava ocasionalmente.

3. Alocar todos os termos de uma equação de um mesmo lado fazendo-a igual a zero. E (a finalidade para a qual fez isto)

4. Mostrando então, a verdadeira origem das equações de ordem elevada, pela composição lateral de equações mais simples. (Que é a grande chave com a qual ele abre os mais obscuros segredos da *Álgebra*; a qual penso devermos puramente a ele). E (consequentemente logo a seguir)

5. Determinando o número de raízes (Afirmativas, Negativas e Imaginárias) em todas as equações, tantas quantas são as dimensões de seu termo mais alto.

6. A descoberta da genuína construção da quantidade absolutamente conhecida; (ou *Homogenius Comparationis*, como Viète chama) pela multiplicação de todas as raízes.

7. Assim como a constituição de todos os coeficientes; de que maneira e de quais membros cada coeficiente consiste; e por quais multiplicações (das raízes entre si) cada membro é feito.

8. Dissolvendo (por divisão) uma equação então composta de outras mais simples que a compõe (por multiplicação).

9. Determinando (comparando equações comuns, com seus canônicos) quantas raízes de cada são Reais, (e não meramente Imaginárias;) e destas quantas são afirmativas ou negativas.

10. Reduzindo equações condicionadas à forma mais simples, sobre a suposição de certas igualdades ou proporções relativas às diversas raízes entre si, pelas quais alguns lugares ficam vagos e assim são qualificadas. E (consequentemente)

11. A descoberta dessas proporções e igualdades nas raízes de tal modo que, ou, da mesma maneira, uma qualificação dos coeficientes deste mesmo ponto.

12. Transformar simultaneamente (através da mudança de todos os sinais pares) todas as raízes afirmativas em negativas e vice-versa.

13.Multiplicar e dividir as raízes de uma equação, ainda desconhecidas, em qualquer proporção em questão. E

14.Em seguida, desassociar os coeficientes de uma fração de equações e de surdos

15.Aumentar ou diminuir o valor dessas raízes desconhecidas, através da adição ou subtração de qualquer quantidade definida. E

16.Dessa forma, havendo possibilidade, fazer com que algumas ou todas as raízes negativas se tornem afirmativas ou que as afirmativas se tornem negativas. E

17.Através do mesmo método, obter uma ou mais raízes intermediárias de uma equação. Em seguida, reduzir a equação de forma que ela possua menos termos.

18.Extrair(particularmente) o segundo termo de qualquer equação, aumentando ou diminuindo o valor da raiz através de uma alíquota do coeficiente, denominado pelo mesmo valor da dimensão do termo mais elevado.

19.Reduzir, por meio desta, todas as equações quadráticas artificiais, de modo que se tornem quadráticas simples.

20. Reduzir, da mesma maneira, todas as equações cúbicas afetadas em duas formas apenas, processo conveniente para uma redução subsequente.

21. Reduzir, em sequência, as mesmas equações cúbicas afetadas em cúbicas simples, da mesma forma que poderão ser reduzidas em espécies.

22.Descobrir tais equações cúbicas, que não podem ser explicadas em espécies dependendo da forma que notação que receberam), sem imaginar a raiz quadrada de uma quantidade negativa. Com a demonstração de sua incapacidade

23.Mostrar, apesar disso tudo, que as mesmas equações possuem raízes reais, e não meramente imaginárias.

24.Um modo peculiar (e eficaz) de reduzir equações quadráticas afetadas de maneira que elas se tornem quadráticas simples, completando quadrados.

25.Um aperfeiçoamento do *Exegesis Numerosis*, que é a extração numérica (ou a extração das raizes) de equações artificiais, primeiramente introduzidas por Viète.

ANEXO II – UM MANUSCRITO DE HARRIOT

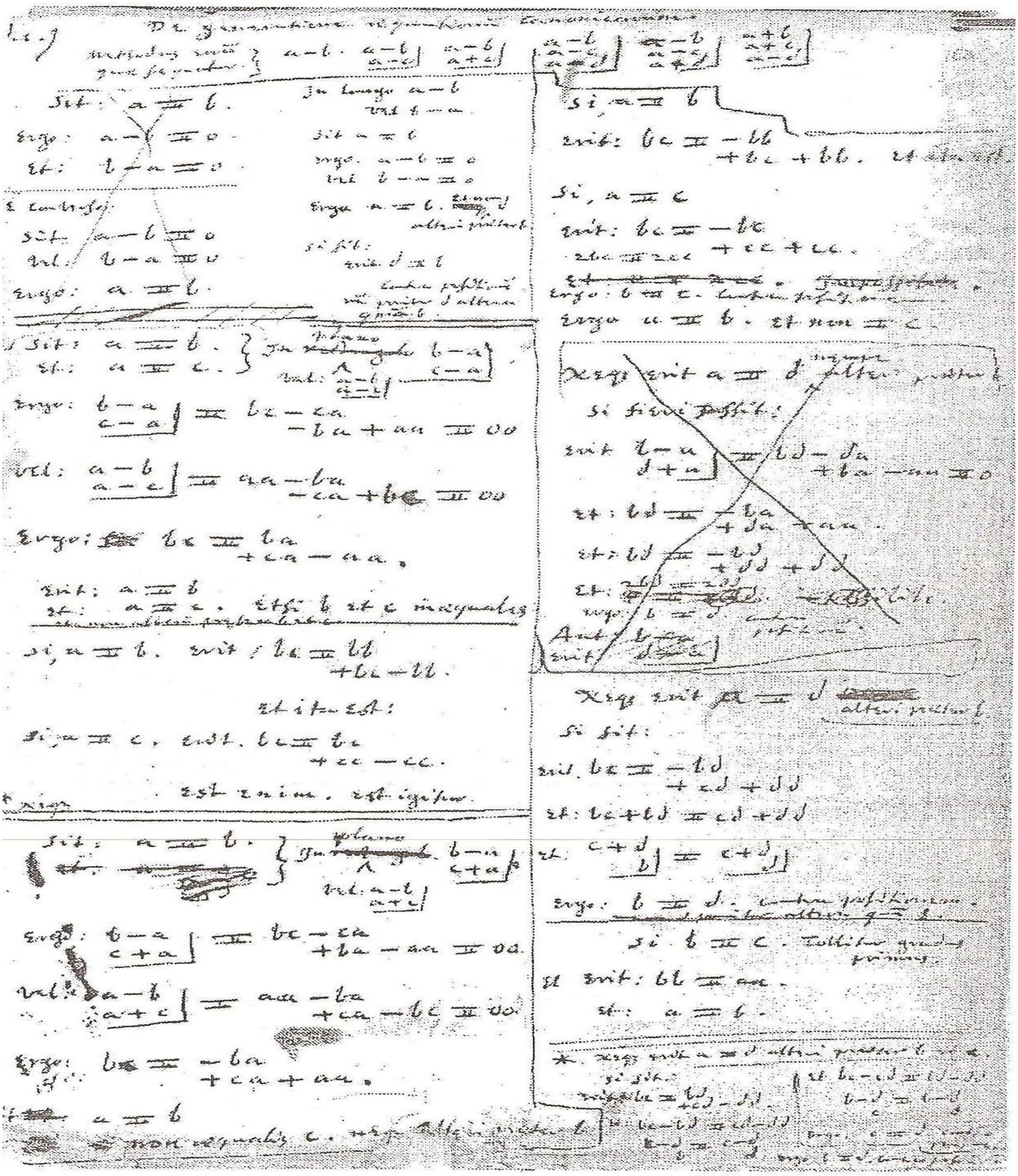


Fig. 5 Sheet *d*.1) of the *Treatise on equations*. Add MS 6783, f. 183.