Geometria Dinâmica na formação de professores.

Filipe Hasché

PEMAT-UFRJ
Maio de 2010

Geometria Dinâmica na formação de professores.

por

Filipe Ricardo de Carvalho Hasché

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Elizabeth Belfort da Silva Moren.

Rio de Janeiro
Maio de 2010

Geometria Dinâmica na formação de professores.

por

Filipe Ricardo de Carvalho Hasché

Orientadora: Elizabeth Belfort da Silva Moren

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Profª Elizabeth Belfort da Silva Moren, Ph.D., IM-UFRJ (Orientadora)

____

Prof. Luiz Carlos Guimarães, Ph.D., IM-UFRJ

____

Prof. Francisco Roberto Pinto Mattos, D.Sc., CAp-UERJ

____

Prof. Bruno Alves Dassie, Dr., FEUFF

Rio de Janeiro

Maio de 2010

Hasché, Filipe Ricardo de Carvalho.
H344 Geometria dinâmica na formação de professores. / Filipe
2010 Ricardo Carvalho Hasché. -- Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2010.
xiii, 98f.: il. ; 30 cm.
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2010.
Orientador: Elizabeth Belfort da Silva Moren.
Referências: f.61-67.
1. Geometria analítica-Estudo e ensino. 2. Professores de Matemática-Educação. I. Moren, Elizabeth Belfort da Silva. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Título.

O pessimista se queixa do vento.
O otimista espera que ele mude.
E o realista ajusta as velas do barco.

William Ward (1921-1994).
Escritor, pastor e professor
estadunidense.

Agradecimentos

Ao Programa de Ensino de Matemática do IM-UFRJ, pela existência deste curso.

Ao coordenador do Mestrado em Ensino de Matemática, professor Victor Giraldo, pelo braço forte e ternura que guiam este tão desejado curso.

À professora Elizabeth Belfort, não pelo mero praxe de se agradecer o orientador, mas sim por ela ser uma pessoa adorável e bem-humorada para bater um papo sobre qualquer assunto (até mesmo sobre trabalho).

Ao professor Luiz Carlos Guimarães, pelas diversas formas de parcerias: como professor, como chefe e como colega de profissão.

Aos notáveis mestres que formam mestres: Gérard Grimberg, Nei Rocha e Felipe Acker; pelas conversas informais que eles nem devem saber o quanto podem enriquecer o aluno.

Aos alunos da minha turma de pesquisa (meus 'ratos de laboratório'), pela cordialidade e determinação.

Ao pessoal da Turma de 2007 do mestrado, pela cumplicidade e companheirismo. Em especial, nosso inato representante, Rubem Vianna, por ser um "exemplo exemplar".

Ao sempre camarada Marcel Almeida, pela criatividade e pelas conversas úteis (e inúteis) do cotidiano.

Ao pessoal das turmas de 2006 e de 2008, pelas sempre saudáveis trocas de experiências durante o curso.

A todos da equipe do LIMC (antigos e atuais integrantes), pela satisfação de desfrutar de suas companhias.

À Cristiane, por compreender o cansaço das sextas-feiras e os fins-de-semana caseiros.

À minha mãe, Aimée, por aturar meu sazonal isolamento mental.

Resumo da Dissertação apresentada ao PEMAT/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

GEOMETRIA DINÂMICA NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES

Filipe Ricardo de Carvalho Hasché

Maio/2010

Orientadora: Elizabeth Belfort da Silva Moren

Programa: Ensino de Matemática

Neste trabalho, busca-se contribuir para a discussão das potencialidades de utilização de ferramentas computacionais para o ensino de matemática e de sua didática na formação de professores. Para tal, exploram-se experiências ocorridas durante um curso de tópicos de matemática elementar utilizando Geometria Dinâmica (GD) para uma turma de licenciandos em Matemática.

Foi utilzada uma metodologia de pesquisa-ação e uma base teórica que considera pesquisas sobre formação de professores e pesquisas sobre utilização de tecnologias computacionais para o ensino de matemática. Tendo em mente os objetivos desta pesquisa, foi feita uma seleção dos dados empíricos obtidos a partir das atividades desenvolvidas com estudantes de licenciatura. Durante a análise dos dados, observou-se que a ferramenta contribuiu não apenas para para a aquisição de conceitos matemáticos, mas também para detectar problemas de compreensão que poderiam passar despercebidos sem a interatividade permitida pelo computador.

Dessa forma, os resultados indicam que, mesmo sem uma integração planejada deste curso com demais momentos da formação, a utilização de um programa de GD - pela forma como este é estruturado - pode contribuir positivamente na formação do professor. Por outro lado, a discussão crítica dos resultados indica a necessidade de aprofundamento das pesquisas nas contribuições que programas de GD e outras ferramentas computacionais podem trazer para a formação do professor.

Palavras-chave: geometria dinâmica, formação de professores, licenciatura

Abstract of Dissertation presented to PEMAT/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Teaching of Mathematics.

DYNAMIC GEOMTERY IN TEACHER'S EDUCATION

Filipe Ricardo de Carvalho Hasché

May/2010

Advisor: Elizabeth Belfort da Silva Moren

Department: Teaching of Mathematics

The aim of this work is to contribute to the discussion on the possibilities and limitations of computational tools usage to teach mathematics in teacher's education. For this purpose, the data collected during a mathematics course using Dynamic Geometry (DG) for a group of prospective teachers is explored.

The applied methodology was action-research and the theoretical framework was constructed by integrating research on teacher education and research on the use of computational technologies for the teaching of mathematics. To fulfill the aims of this research, pieces of empirical data obtained from the activities developed with prospective teachers was selected. The analysis showed that DG was an useful tool not only for the acquisition of mathematical concepts, but also to detect misunderstandings that could be unnoticed without the computer-based interactive environment.

Thus, the results of the analysis indicate that, even without planned integration among this course and other actions on teacher's preparation, the usage of DG have the potential to contribute positively on mathematics teachers' preparation. On the other hand, the critical discussion of the results indicates the need to deepen on the research about the contribuitions that DG software and other computational tools can bring to teacher's education.

Keywords: dynamic geometry, teacher's education, prospective teachers

Conteúdo

Introdução

O constante desenvolvimento de ferramentas computacionais que visam poder enriquecer o ensino e o aprendizagem da matemática vem ganhando cada vez mais força nos últimos anos. Porém, a sua efetiva aplicação nas escolas/universidades não vem acompanhando o mesmo ritmo. Muito já se discutiu sobre questões polarizadas a respeito de um suposto caráter positivo ou negativo do computador para o ensino de matemática, como podemos ver em GIRALDO & CARVALHO (2008), por exemplo. A intenção deste trabalho é analisar/investigar a postura do licenciando ao lidar com estes softwares ainda em seu curso de formação inicial; antes de utilizá-los em suas (futuras) salas de aula. Que utilidades ele vê em um software de Geometria Dinâmica (GD) para o ensino de matemática? Quais concepções ele possui sobre o conteúdo da matéria a ser ensinada neste modelo de ensino? Que novos modelos de ensino podem ser inaugurados pelo seu uso? Que postura ele pode e/ou deve adotar neste novo modelo?

Boa parte da motivação para esta pesquisa é oriunda de uma experiência que eu mesmo tive ao cursar a disciplina "Tópicos em Ensino de Matemática", ainda na graduação, com o Prof. José Paulo Carneiro; na qual ele criou a oportunidade de trabalhar com o software *Cabri-Géomètre*. Ao conhecer algumas de suas aplicações para o ensino de matemática, vi um notável salto qualitativo em diversos aspectos do meu conhecimento que estão diretamente ligados com a minha prática docente, tais como: conhecimento da matéria a ser ensinada, confecção de roteiros investigativos para o processo de ensino-aprendizagem em matemática, autonomia para a busca de novos conhecimentos e a possibilidade de o aluno exercer um papel ativo em sala. A partir daí, sempre busquei inserir atividades com GD com alunos de Ensino Médio das escolas onde eu trabalhava. Neste contexto, algumas conversas informais com alunos, diretores e, principalmente, jovens colegas professores, me fizeram notar uma lacuna na formação docente que impedia a implementação mais frequente de atividades deste tipo.

Ultimamente, o foco de muitas pesquisas em ensino de matemática vem sendo voltado para o professor e sua qualidade de formação. Por considerar este item essencial para uma exploração benéfica da GD em sala de aula, fiz dele a questão central a ser discutida neste trabalho, paralelamente a relatos das experiências ocorridas durante o exercício de minha pesquisa-ação. Alguns trabalhos em formação continuada de professores, como por exemplo, BELFORT & GUIMARÃES (1998), alertam para falhas em seus saberes docentes percebidas ao lidarem com GD. Os autores observaram que muitos professores não adotavam uma postura crítica diante dos resultados emitidos pela máquina. Desta forma, demanda-se uma necessidade em sua formação que o habilite a lidar com ferramentas computacionais no sentido de torná-lo capaz de adaptar para suas turmas, ou mesmo criar, tarefas apropriadas nesta nova situação de ensino.

Saber trabalhar com um software de GD exige considerável conhecimento matemático; pois, para realizar construções neste ambiente, o usuário precisa, primeiramente, ter conhecimento de construções geométricas; alicerces da Geometria Euclidiana. Devido a isso, foi escolhido, para o curso de minha pesquisa-ação (ANDRÉ, 1995), um grupo de alunos veteranos da Licenciatura em Matemática da UFRJ. Detalhes do contexto e de nossa metodologia de pesquisa serão tratados no Capítulo 3.

Como veremos na discussão dos dados da pesquisa, novas reflexões juntavam-se a resultados esperados quanto à questão fundamental deste trabalho: *que potencialidades um curso de matemática cuja metodologia tem como foco a utilização de GD pode trazer para a formação de professores?* Acredito poder, com esse estudo, contribuir para a discussão acerca da formação dos professores na intenção de não apenas encorajar a utilização da GD, mas também na intenção de contribuir para estabelecer o que seria uma boa utilzação desta ferramenta; buscando meios de levar ao professor em formação pontos importantes para a realização de um bom ensino da disciplina.

No capítulo 1 a seguir, apresento uma breve revisão da literatura sobre os temas centrais que considerei como base para a pesquisa. A primeira seção aborda a teoria de saberes docentes, discutindo algumas de suas problemáticas para professores de Ensinos Fundamental e Médio. Na segunda seção, falo a respeito da implementação de Novas Tecnologias para o Ensino da Matemática, com ênfase em reflexões acerca de pesquisas com o uso da Geometria Dinâmica.

No capítulo 2, apresento o quadro teórico construído nesta dissertação, assim como a formulação das questões que nortearam minhas ideias iniciais de pesquisa. O capítulo 3 diz respeito ao contexto e à metodologia do estudo empírico.

Em 4 e 5, apresento as análises de resultados com os alunos do curso e uma discussão global dos resultados do trabalho.

Capítulo 1

Fundamentação Teórica

1.1 Apresentação

Exponho aqui contribuições advindas de ideias de pesquisadores de duas grandes linhas de pesquisa. Na seção 1.2 abordarei trabalhos cujo tema é a Formação de Professores; em especial, os saberes docentes. Em 1.3 , trago reflexões sobre trabalhos que investigam a aplicação de tecnologias computacionais para o ensino de matemática, dando ênfase às pesquisas com Geometria Dinâmica.

Contribuições mais específicas e 'diálogos' entre estas duas linhas de pesquisa serão abordados nos capítulos posteriores.

1.2 Os saberes docentes: concepções e reflexões sobre a formação de professores.

A formação de bons professores tem a ver, acima de tudo, com a formação de pessoas capazes de evoluir, de aprender de acordo com a experiência, refletindo sobre o que gostariam de fazer, sobre o que realmente fizeram e sobre os resultados de tudo isso.

(PERRENOUD, 2002, p.17)

A partir da década de 80, a formação e a profissão docente foi se tornando uma expressiva linha de discussão, pela grande quantidade de pesquisas a respeito do tema. Até esta época, o foco da pesquisa educacional, talvez por décadas, foi o aluno e sua aprendizagem. Shulman (1986, 1987) aponta essa prioridade, quando diz que, mesmo com diferentes enfoques, as pesquisas educacionais debruçaram-se, por muito tempo, sobre questões do lado de quem aprende, e não sobre as questões do lado de quem ensina.

Shulman oferece elementos para tentar entender de que maneira a formação recebida por futuros professores objetiva desenvolver o que ele trata por *conhecimento pedagógico disciplinar*. Apesar de Shulman não tratar especificamente da formação matemática dos professores, estes estudos têm sido influentes em diversos trabalhos na área de ensino de matemática.

Segundo o autor, este conhecimento pedagógico disciplinar envolve uma combinação do conhecimento da disciplina com o conhecimento do modo de ensiná-la, de forma que o conteúdo das aulas se torne melhor compreensível para os alunos. Ele destaca que o professor deve compreender a disciplina que vai ensinar a partir de diferentes perspectivas e estabelecer relações entre os tópicos do conteúdo disciplinar. Segundo Gonçalves (2000, p.19), *este conhecimento permite ao professor melhor agir como mediador da construção do conhecimento do aluno.*

Shulman considera o saber pedagógico-disciplinar o elo entre a pesquisa sobre ensino e a pesquisa sobre aprendizagem. Também argumenta que *ensinar é, antes de tudo, aprender* (1987, p.14). Assim, inicialmente, o professor deve compreender a disciplina que irá ensinar. Mais ainda, deve compreendê-la de diversos modos, a partir de diferentes perspectivas, estabelecendo relações entre seus vários tópicos. O professor, entretanto, deve ser capaz de transformar esse seu conhecimento em algo pedagogicamente útil e adaptável aos diversos níveis de habilidade, conhecimento e formação de seus alunos (SZTAJN, 2002, p. 19). Para Shulman (1987, p.16), as ideias compreendidas precisam ser transformadas a fim de serem ensinadas. O autor enfatiza que o professor deve possuir um repertório de representações, além de conhecer diversos materiais didáticos disponíveis para o ensino do conteúdo programático. É esse conjunto de saberes que distingue aquele que 'apenas' sabe uma disciplina daquele que é capaz de ensiná-la.

Vale mencionar que, nesta época (meados da década de 80), um grande grupo de pesquisas sobre a eficácia do professor buscava identificar relações entre comportamento docente e desempenho dos alunos. Boa parte destes trabalhos não discutia o saber disciplinar dos professores. Daí a importância das colocações de Shulman, por trazer à tona a discussão destes saberes.

Ainda nos anos 80, Deborah Ball (1988a), em seus projetos de pesquisa na Universidade de Michigan, busca descobrir que conteúdo de matemática (ou que *tipo* de conteúdo) os futuros professores de matemática devem saber e como eles podem aprendê-lo. A autora concorda que, para a aquisição deste tipo de conteúdo, é necessário conhecer diferentes formas de aprendizagem da matéria, bem como saber a matéria em si. Para Ball, o professor deve possuir um conhecimento de matemática não-compartimentalizado, fazendo as conexões existentes (porém raramente apresentadas aos alunos) entre diferentes pontos da matéria com um foco conceitual.

A pesquisadora também afirma que, durante o processo de aprendizagem, o professor deve ser capaz de proporcionar ao seu aluno oportunidades de fazer conjecturas e justificar suas afirmações, formulando argumentações precisas. Ball destaca que o conteúdo de matemática formal é extremamente necessário para a formação do professor; no entanto, um curso de formação não deve negligenciar a necessidade de abordar assuntos 'simples' de matemática elementar. Segundo a autora, *todos esperam que isso aconteça em algum outro lugar* (pp.24).

Ball (1988b) destaca que os futuros professores já vêm de uma longa caminhada em matemática, como alunos, criando concepções e expectativas que certamente afetam o que entendem dos conteúdos matemáticos. A autora também sinaliza para o fato de que desconhecer ou desconsiderar estas ideias, sem trabalhá-las, pode explicar, em parte, o fato de muitos professores ensinarem matemática como esta lhes foi ensinada, revelando a pouca influência dos cursos de formação em sua prática.

Ball (2000, apud OLIVEIRA, 2007) refere-se, ainda, ao tempo em que o dilema 'conteúdo versus pedagogia' vem persistindo e resistindo a todas as evidências do fracasso dessa cisão. Professores formam-se e vão ensinar matemática sem conhecimento de recursos, estratégias que possam favorecer uma compreensão conceitual consistente, conexões entre conceitos e suas aplicações. *O que poderíamos fazer para trazer o estudo dos conteúdos mais próximo da prática, e preparar os professores para usar o conhecimento do assunto efetivamente no seu trabalho como professor?* (*Ibid*, p.24). Ball também apresenta problemas a serem resolvidos, no intuito de proporcionar, na formação, a integração do conteúdo com a pedagogia. Isto é, formar o professor que não só tenha os saberes disciplinares construídos, mas que saiba fazer uso destes para ajudar os alunos a aprenderem. Um destes problemas consiste em criar oportunidades de aprendizagem do conteúdo de forma a capacitar os futuros professores a saber usá-lo em contextos variados da prática. Segundo a pesquisadora, saber matemática para ensinar requer que esse saber possua dimensões que vão além do saber substantivo.

Para Ball, o professor precisa ser capaz de articular os seus conhecimentos - especialmente no caso da matemática, por ser uma ciência que possui uma organização interna que liga os diversos assuntos. A pesquisadora enfatiza que saber matemática 'para si' não é o mesmo que saber matemática para ensinar.

Em outras pesquisas, Ball e colaboradores (BALL, 1993, 2003; BALL et al. 2005) buscam definir um *conhecimento de matemática voltado para seu ensino*[1]. Em um de seus trabalhos (BALL et al., 2005), os autores o caracterizam como sendo *um tipo de conhecimento profissional de matemática diferente daquele utilizado por outros profissionais de áreas exatas, como engenheiros, físicos ou contadores* (p.17). Os autores destacam que o ato de ensinar também deve envolver explicações concisas a partir de concepções e resoluções de problemas de seus alunos, muitas vezes oriundas de formas não-usuais.

Também ressaltam que outro ponto importante que deve compor este tipo de conhecimento é saber elaborar tarefas. Neste tipo de atividade, os conhecimentos matemáticos e pedagógicos do professor são fundamentais para que a tarefa criada possa contribuir para o processo de aprendizagem do seu aluno. Destacam que o professor deve pensar como se fosse um aluno vendo aquele assunto pela primeira vez, considerando o que deve ser necessário para adquirir um novo conceito matemático.

Em um exemplo sobre o ensino e a aprendizagem de geometria, os pesquisadores também consideram que o professor deve estar muito seguro com respeito aos termos e às definições precisas dos objetos matemáticos envolvidos, por notarem que alunos que aprendem as formas geométricas apenas com ilustrações, frequentemente constróem conhecimentos equivocados (como considerar um cubo como um retângulo, por exemplo).

Eisenhart e seus colaboradores (1993), fundamentados fortemente nas contribuições de Shulman sobre o conhecimento do professor, consideram que "*o mais importante é que os futuros professores estejam, como alunos, em situações de ensino, que proporcionem oportunidade e apoio para ensinarem*" (p. 37).

A pesquisadora recomenda, ainda, que o conhecimento pedagógico dos futuros professores necessita ser desenvolvido durante a formação e suas crenças devem ser desafiadas acerca do aprender, do ensinar e do aprender a ensinar. Destacam também que é necessário que a formação seja conduzida de forma a possibilitar a aprendizagem

[1] *Mathematical Knowledge for Teaching*, em inglês.

dos professores para o ensino, visando a compreensão conceitual em matemática, com reflexões sobre as relações entre o conceito e o procedimento a ele relacionado, ambos necessários à compreensão matemática.

Em pesquisas comparando a performance de professores americanos e chineses, Liping Ma (1999) também corrobora a respeito da necessidade de indissociação entre conhecimento de conteúdo e conhecimento pedagógico. Nas entrevistas com os professores chineses, nota-se que estes consideram importante saber "*como utilizar um algoritmo e porque seu uso faz sentido matematicamente*" (p. 108). A autora ainda destaca que considera um equívoco admitir que o professor traz conhecimentos prévios suficientes para sua formação. Desta forma, Ma desenvolve a noção de *Profund Understanding of Fundamental Mathematics (PUFM)*, por considerar essencial para o professor a compreensão de conceitos fundamentais; desvencilhando, assim, noções fragmentadas e estreiteza dos docentes em relação aos conceitos básicos em matemática.

Apesar de considerar o desenvolvimento do *PUFM* uma conquista realizada ao longo da prática, Ma alerta para que a formação inicial se encarregue de investir na compreensão conceitual dos futuros professores, no estudo e crítica dos currículos e materiais instrucionais, e nas discussões acerca do *porque* e *como* ensinar matemática aos alunos (OLIVEIRA, 2007, p.65).

Em seus trabalhos na Espanha, Llinares (2004) apresenta questões que não podem ser desconsideradas por estudos que se voltem para a formação destes professores. Ele aponta para o fato de que movimentos recentes de reforma em ensino de matemática desafiam práticas escolares correntes. Essas reformas demandam novas prioridades em termos do que ensinar e novas formas de ensinar. Em segundo lugar, essas novas sugestões e orientações são contrárias às experiências que os futuros professores tiveram na escola, quando alunos.

Llinares aponta o conhecimento de matemática e o conhecimento sobre diferentes estratégias usadas pelos alunos ao resolverem determinado problema (conhecimento sobre como aprender conceitos matemáticos) como componentes indispensáveis ao conjunto de saberes necessários ao professor. Ainda sugere que, para desenvolver a construção destes conhecimentos na formação inicial, forme-se uma *comunidade de aprendizes*.

Essa comunidade de aprendizes consiste em um ambiente de aprendizagem marcado por atividades onde seja estimulada a participação ativa e situações de ensino e aprendizagem de matemática com o uso de ferramentas diversas, levando-se em consideração as crenças e o conhecimento prévio dos futuros professores. A reflexão acerca do que é realizado possibilita a construção do conhecimento do futuro professor para a sua função.

Nessas comunidades, a ideia é que a aprendizagem do futuro professor seja um objeto de pesquisa e reflexão. Segundo o pesquisador, devemos considerar a relação dos futuros professores com seus futuros alunos assim como a relação dos formadores com os futuros professores, isto é, a partir dos mesmos constructos teóricos (OLIVEIRA, 2007).

Explorando o campo profissional mais amplo, destaca-se a contribuição de Maurice Tardif em estudos que também voltam o olhar para o caso particular da formação de professores. Tardif (2002) questiona a relação existente entre o conhecimento universitário e os saberes profissionais; incentivando, assim, a postura onde a pesquisa universitária se apoie nos saberes dos professores a fim de compor um repertório de conhecimentos para a formação docente. O pesquisador alerta para o fato de que alunos passam por cursos de formação de professores sem modificar concepções anteriores sobre o ensino e sem terem sido abalados em suas crenças.

O autor explica pontos que considera importantes de seu embasamento teórico e metodológico com relação à pesquisa universitária. O primeiro ponto, segundo o próprio, mostra a proposta de uma “volta à relidade”. O pesquisador destaca que *querer estudar os saberes profissionais sem associá-los a uma situação de ensino seria um absurdo* (2002, p.257).

Tardif caracteriza os saberes profissionais como temporais; ou seja, adquiridos através do tempo. No caso específico do magistério, o pesquisador destaca que boa parte do que os professores sabem sobre o ensino, sobre os papéis do professor e sobre como ensinar provém de sua própria história de vida, como aluno. Sendo assim, essas crenças e conhecimentos prévios calibram as experiências de formação podendo ficar estáveis através do tempo.

Uma segunda forma de tratar o caráter 'temporal' dos saberes profissionais também é trazido por Tardif ao estabelecer uma cronologia da prática profissional; entendendo que esta assume diferentes faces ao longo de uma carreira. Ele afirma que os primeiros anos de prática são decisivos na aquisição do sentimento de competência e no estabelecimento da rotina de trabalho. Com base nisso, considero que certas lacunas na formação de um professor podem ser, no mínimo, sensivelmente atenuadas, se expostas e tratadas em um curso de formação inicial.

O autor aponta como sugestão a tarefa de introduzir dispositivos de formação, de ação e de pesquisa que não sejam exclusivamente ou principalmente regidos pela atual lógica que orienta a constituição dos saberes no meio universitário. Tais dispositivos devem ser pertinentes para os professores e úteis para sua prática profissional.

1.3 Utilização de tecnologia computacional para o ensino de matemática: potencialidades e riscos.

> *O professor de matemática tem uma grande oportunidade em mãos. Se preenche seu tempo apenas ensinando algoritmos, perde esta oportunidade, pois mata o interesse dos alunos e bloqueia seu desenvolvimento intelectual. Se, por outro lado, provoca-lhes a curiosidade através de problemas proporcionais a seu conhecimento e os acompanha com questões estimulantes, estará lhes oferecendo o desejo e os meios para o desenvolvimento de um pensamento independente.*
>
> (POLYA, 1975)

Muito já se discutiu a respeito de questões polarizadas a respeito da utilização de tecnologias computacionais para o ensino de matemática. No entanto, na última década, o enfoque da literatura especializada vem mudando progressivamente da questão de *se a máquina é ou não benéfica* para a questão de *como a máquina pode ser beneficamente utilizada* (GIRALDO, 2004). O contexto pedagógico em que se inserem recursos tecnológicos passa a ser cada vez mais considerado como inerente ao processo. Com isso, além dos aspectos ligados à aprendizagem em matemática, muitos trabalhos que citarei estão fortemente ligados ao seu ensino utilizando tecnologias computacionais.

Devido à óbvia ligação entre o desenvolvimento da informática e da aplicabilidade das pesquisas neste campo ao longo do tempo, opto por apresentar as pesquisas desta seção em ordem cronológica, para que o leitor possa trilhar uma linha de raciocínio ligada ao contexto tecnológico com mais fluidez.

Em um estudo que tratava as dificuldades de interpretação dos objetos matemáticos em ambiente computacional, Yerushalmy (1997, apud GIRALDO, 2004, p.56) relata um experimento desenhado para explorar e documentar a aprendizagem de funções racionais em uma abordagem conduzida pelo professor com o apoio de exploração computacional. Segundo a autora, a investigação de assíntotas é tipicamente facilitada para os estudantes por meio da introdução de certas 'receitas' (como a 'divisão pelo termo de maior grau'). Por outro lado, Yerushalmy comenta que este tópico envolve conceitos complexos como limite e continuidade, talvez dentre os principais problemas cognitivos para aprendizagem de cálculo. A autora afirma que a tecnologia pode oferecer uma opção diferenciada para a aprendizagem em vez da memorizaçao automática.

É interessante notar a preocupação da pesquisadora em desenvolver tarefas em ambiente computacional sem a intenção de 'poupar' os estudantes de dificuldades da disciplina. Neste trabalho, a autora comenta [2]:

> A aprendizagem de assíntotas usando tecnologia gráfica baseada em cálculos e representações numéricas, na verdade *amplifica* complexidades que eram parcialmente escondidas na aprendizagem de representações algébricas.
>
> (*Ibid.*, p.56)

> A abordagem do professor, que valorizava ciclos de construções dos estudantes e dilemas motivados pelo programa de computador, ajudou a tornar os estudantes explicitamente conscientes de dificuldades e complexidades epistemológicas do conceito de infinito.
>
> (*Ibid.*, p.57)

No Brasil, Abrahão (1998) observou as reações de quatro professores de matemática de ensino médio no Brasil, referidos como W, X, Y e Z, lidando com gráficos de funções gerados por computadores e calculadoras gráficas. Os professores participantes tinham perfis bastante diversificados e pelo menos dez anos de experiência. Em particular, o professor X possuía curso de mestrado completo, estava concluindo o doutorado em matemática na época da realização do experimento e também lecionava em ensino superior; o professor Y é autor de livros didáticos de

[2] Sempre que citados por outros autores em língua portuguesa, a tradução originalmente feita foi mantida.

matemática para ensino médio e segundo segmento do ensino fundamental. Os participantes também demonstravam posturas diferentes em relação ao uso de tecnologia no ensino: X e Y já haviam usado computadores em suas aulas, enquanto W e Z não.

Nas atividades propostas, os resultados dados pelos equipamentos pareciam ser contraditórios com a teoria matemática, devido a limitações dos programas ou inadequação das janelas gráficas utilizadas. Por exemplo, em uma das atividades, duas retas perpendiculares pareciam não o ser, devido às escalas dos eixos. Em outra atividade, o gráfico da função de terceiro grau $V(x) = x.(45 - 2x).(30 - 2x)$ foi mostrado aos professores na tela do computador na janela $[0, 15] \times [0, 5000]$, onde este se assemelhava a uma parábola (Figura 1.1).

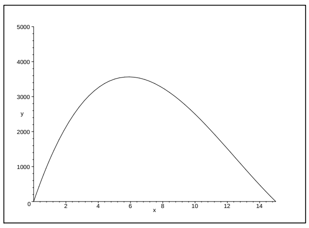


Figura 1.1: O gráfico da função $V(x) = x.(45 - 2x).(30 - 2x)$ na janela gráfica $[0; 15] \times [0; 5.000]$, como dado aos professores no experimento de Abrahão.

A autora descreve a reação dos participantes da seguinte forma:

> [O professor Y] Demonstrou grande surpresa ao ver que, no intervalo $0 < x < 15$, a curva da função cúbica lembrava o desenho de uma parábola. O professor W confundiu o gráfico parcial da função cúbica com o gráfico de função quadrática. Mesmo após alertado para o fato de que a função era de terceiro grau, ele insistiu em querer aplicar as fórmulas algébricas $x_v = (-b)/(2.a)$ e $y_v = (-\Delta)/(4.a)$ para identificar as coordenadas do vértice da "parábola". [...] Ao visualizar uma janela onde o gráfico da função cúbica lembrava uma parábola, o professor [W] entendeu esse gráfico local como sendo o gráfico completo da função cúbica e mais ainda, quis aplicar resultados algébricos relativos à função quadrática.
>
> (ABRAHÃO, 1998, pp.34-35)

Mais adiante, nas conclusões finais, a autora comenta o resultado dessa atividade:

> Um dos professores entrevistados, ao ver a janela onde o gráfico da função do terceiro grau lembrava uma parábola, interpretou esse gráfico parcial como sendo o gráfico global da função cúbica. Nesse momento seus conhecimentos teóricos não foram ativados para fazê-lo perceber que sua interpretação estava incorreta.
>
> (ABRAHÃO, 1998, p.81)

> Todos os professores, mesmo os que sabiam que as máquinas tinham seus limites, demonstram, a princípio, acreditar mais nos resultados dos computadores do que nos seus próprios conhecimentos.
>
> (ABRAHÃO, 1998, p.80)

Finalmente, ela conclui que a tecnologia gráfica pode ser uma ferramenta importante para aprendizagem de matemática. No entanto, para que esse objetivo seja atingido, é necessário que o professor tenha acesso a materiais de apoio, desenhados para estimular a conexão crítica entre diferentes representações, de natureza computacional e não-computacional.

Outros estudos enfocam o papel de limitações computacionais como motivador de raciocínio dedutivo. Também no Brasil, Belfort & Guimarães (1998) observaram um grupo de professores em um curso de formação continuada lidando com um atividades de geometria dinâmica. Em uma das atividades foi proposta aos professores a tarefa de encontrar empiricamente o retângulo com 40m de perímetro e maior área possível. Devido a limitações de precisão do programa, respostas aproximadas poderiam ser fornecidas. Assim, ao fornecer respostas aproximadas para a resolução da questão, diferentes duplas de participantes encontraram resultados diferentes. Os autores relatam que, ao comparar tais resultados inconsistentes, os professores viram-se em grande confusão. De forma semelhante ao descrito em (ABRAHÃO, 1998), eles tendiam a aceitar os resultados fornecidos pela máquina sem questionamento, priorizando-os em relação às demais informações disponíveis sobre o problema, inclusive seus próprios conhecimentos prévios. No entanto, os autores comentam que, apesar disso, a situação de impasse inicial foi usada como motivação para uma exploração mais profunda da teoria:

> Muitos professores aceitavam a resposta dada pelo programa como conclusiva. [...] Esses professores ficaram em um impasse, e não conseguiram decidir qual dos valores encontrados seria o correto. A exploração da limitação do programa levou à necessidade de encontrar uma solução teórica para o problema.
>
> (BELFORT & GUIMARÃES, 1998, p.106)

Colette Laborde (2000) analisa atividades de outros pesquisadores com alunos do ensino básico, onde a utilização de geometria dinâmica desempenha um papel fundamental para as demonstrações em matemática, no que diz respeito a:

- observações das relações de dependência entre propriedades dos objetos construídos;
- debates questionando a validade de uma construção (dentre outras diversas construções possíveis);
- necessidade da demonstração a fim de superar possíveis incertezas, contradições ou curiosidades.

As atividades relatadas por Laborde envolvem explorações sobre propriedades diversas dos quadriláteros, construções de *macros* colocadas em paralelo com o estudo da axiomática da geometria euclidiana, propriedades de (in)variância de valores relacionados a ângulos internos e externos de um polígono e exploração dos casos de congruência (e de 'não-conguência') de triângulos. A pesquisadora enfatiza a necessidade de que, para este tipo de trabalho, se tenha um professor capaz de elaborar tarefas adequadas para este modelo de ensino e que este também possa assumir um papel de guia perante as descobertas do alunos, garantindo um debate onde a argumentação não esteja baseada na autoridade do professor.

Doerr & Zangor (2000, apud GIRALDO, 2004, p.59) relatam os resultados de um estudo qualitativo nos Estados Unidos, baseado em observação de salas de aula, sobre o uso de calculadoras gráficas em aulas de pré-cálculo. O estudo enfoca o papel do professor, seus conhecimentos e crenças, a relação entre o papel do professor e os conhecimentos e crenças dos estudantes, na forma como eles usavam a ferramenta como apoio à aprendizagem, além de algumas limitações surgidas da prática de sala de aula. As autoras comentam que a atitude de uma professora em relação à máquina e a abordagem pedagógica por ela adotada foram fundamentais para a formação de uma postura crítica por parte dos alunos:

> O conhecimento da professora das limitações da calculadora levou-a a encorajar os estudantes a questionar seus resultados baseados na calculadora. Desta forma, a calculadora tornou-se uma ferramenta que precisava ela própria ser verificada com base em raciocínio matemático.
>
> (*Ibid.*, p.62)

Laudares & Lachini (2000) observaram o processo de implantação de um laboratório de informática para o ensino de cálculo em uma grande universidade, que vinha adotando até então uma abordagem tradicional. Os autores realizaram um estudo amplo e detalhado, incluindo entrevistas com professores e alunos, questionários e observação de aulas. As entrevistas com os professores de cálculo revelaram que, para a maioria deles, as atividades no laboratório seriam uma perda de tempo, que deveria ser gasto em sala de aula; e que o uso do computador deveria se restringir a checar resultados de exercícios. Sobre a observação das atividades de laboratório, os autores comentam:

> Um aluno que trabalha sozinho digita os dados do problema, aciona o comando para resolução e lê na tela a resposta. Por não ter domínio do conteúdo da matemática, não sabe se a resposta está certa. Ele, então, confere o resultado com um colega de sala e, sem nada questionar, prossegue na resolução do próximo exercício. Ele mostra ter dificuldade, não só na manipulação da máquina, como também parece não entender o significado do resultado que o computador apresenta, após a execução dos comandos. [...] Quando chamado para atender dúvidas, o monitor se limita a informar que 'a teoria deve ser

> aprendida em sala de aula; a atividade no laboratório é somente para calcular, usando corretamente os comandos'.
>
> (LAUDARES & LACHINI, 2000, pp.5-6)

Mesmo entendendo que o uso de tecnologia pode se constituir em uma importante alternativa para o modelo tradicional da aula de matemática, os autores afirmam que isso não depende apenas do fato de se usar computadores por si só: tal perspectiva só pode ser concretizada por meio do planejamento cuidadoso de atividades de laboratório que estimulem a formação de uma postura investigativa por parte dos alunos e da preparação e motivação dos professores para conduzi-las.

Em estudos sobre o uso de geometria dinâmica para explorar procedimentos de visualização e as possíveis interferências na aquisição de conceitos geométricos, Jones (2002) comenta que uma utilização desta tecnologia, integrada inteligentemente com o currículo e a pedagogia, explorando os conceitos da disciplina, pode levar a ganhos notáveis na aprendizagem.

Com intenções ainda mais abrangentes, Lagrange (2003) comenta a estrutura utilizada para análise das tecnologias computacionais no ensino de matemática, ressaltando que o quadro teórico de muitas pesquisas está limitado na interação entre o estudante, o computador e o conhecimento. Segundo o próprio, esta abordagem limitada pode explicar a discrepância entre as potencialidades e a realidade na inserção das tecnologias na educação.

No caso específico do ensino de geometria, Laborde et al. (2006) analisam o papel das tecnologias computacionais para o ensino desta disciplina. Os autores destacam o fato de que, neste ambiente, a aprendizagem está muito mais voltada para a (re)construção individual de seus conceitos do que um processo de incorporação de conhecimentos prescritos. Destacam ainda que, com este suporte tecnológico, os alunos podem adquirir progressivamente uma sensibilidade em discriminar as relações matemáticas entre objetos e valores de um problema; possibilitando, assim, um amadurecimento de ideias matemáticas.

Um indicador do caráter de (re)construção de conceitos citado pelos autores reside no fato da dificuldade apresentada por iniciantes em realizar construções que envolvem relações de dependência ou relações funcionais entre objetos da prancha dinâmica.

Colocando o uso de tecnologias digitais como uma 'janela' para a observação da situação do ensino de matemática, Michele Artigue (2007) analisa diversos trabalhos na Europa. Em um breve histórico sobre suas impressões de pesquisa, a autora relata:

> Desde o início [dos anos 90], tecnologias digitais vêm sendo consideradas como um instrumento de uma mudança educacional, uma ferramenta para forçar a implementação de estratégias didáticas em consonância com os alicerces teóricos da disciplina e princípios subsidiários das pesquisas em didática, voltado para a melhoria do ensino e da aprendizagem; como evidenciado, por exemplo, no primeiro estudo do ICMI[3] sobre este tema (Cornu & Raston, 1992). Infelizmente, os resultados estão longe daqueles esperados, fazendo desta área uma daquelas onde a tensão entre teoria e prática é mais visível.
>
> (ARTIGUE, 2007, p.69, tradução nossa)

A autora destaca que pesquisas nesta área nos levam a uma situação permanente de excitação e frustração que nos remete ao questionamento entre a teoria e a prática dos estudos com muito mais refinamento. Com isso, Artigue enfatiza a necessidade de um discurso menos centrado nos estudantes, para que haja lugar para uma visão sistêmica mais ampla.

Em sua tese de doutorado, Mattos (2007) visita diversas frentes de pesquisa no campo do Ensino de Matemática para elaborar estratégias didáticas baseadas em roteiros para aprendizagem colaborativa em ambiente computacional, utilizando o software de geometria dinâmica *Tabulae Colaborativo*[4]. Na confecção destes roteiros, o autor busca utilizar o software vinculado a processos investigativos que orientem os alunos nas abordagens dos conceitos a serem explorados.

O pesquisador, utilizando as características de comunicação remota do software, volta sua atenção para a necessidade do desenvolvimento conjunto de habilidades

[3]ICMI: *International Comitee of Mathematical Instruction*

[4]O *Tabulae Colaborativo*, além de todas as funcionalidades de um software de GD, também permite conexão remota com outros usuários, onde estes podem apresentar suas construções geométricas em uma área pública e se comunicar por meio de *chat*.

imprescindíveis para o aprendizado em matemática, em especial na geometria: a necessidade de se desenvolver uma habilidade de representar conceitos verbalmente em conjunto com representações gráficas utilizando construções geométricas. Ressalta que estas habilidades estão presentes, em caráter dual, no ensino de geometria e em outros campos da matemática. Assim, neste modelo de ensino, o autor vê a possibilidade de promoção de discussões sobre regras e conceitos; orientadas de forma que os estudantes sejam capazes de elaborar generalizações.

Mattos ainda comenta o fato de que a inserção de tecnologias computacionais na educação tem criado novos paradgmas no ensino:

> Com o objetivo de inserir a tecnologia como parte da prática acadêmica e profissional dos professores, os nossos estudos indicam a necessidade do desenvolvimento de materiais instrucionais baseados nas novas ferramentas.
>
> (MATTOS, 2007, p.119)

Em uma pesquisa com alunos da Rede Pública de Ensino do Rio de Janeiro, Hasche (2008) relata aplicações de geometria dinâmica no ensino de funções com uma turma do 1º ano do Ensino Médio. Neste trabalho, o autor desenvolve atividades de construção e análise de gráficos de funções reais diversas baseado nas possibilidades de geração de movimento e interatividade permitidos pelos softwares de GD. Assim, o pesquisador buscou colocar o foco da aprendizagem nos conceitos mais elementares do estudo de funções, explorando algumas de suas características sem a presença imediata de formas usuais de representação, como fórmulas e tabelas. No entanto, durante as atividades em laboratório, notava-se a forte demanda por:

- Revisitar conteúdos (ou apresentá-los pela primeira vez aos alunos), tais como:
  - representação dos números inteiros na reta numérica
  - comparação de números racionais expressos na forma decimal
- (Re)Construção de conceitos, tais como:
  - classificação de função crescente/decrescente

- reconhecer e distinguir: incógnita / variável independente / variável dependente / relação funcional

Com isso, o autor conclui que a utilização de GD pode ser relevante para a pesquisa em ensino de matemática no sentido de fornecer informações sobre a compreensão dos estudantes e sobre questões adjacentes ao assunto tratado - como a demanda por uma revisão conceitual de pré-requisitos da matéria. Ressalta também que este modelo de ensino propicia ao professor a oportunidade de colocar os alunos frente às suas dificuldades mais elementares e frente a obstáculos didáticos da disciplina, fornecendo condições para superá-los.

Capítulo 2

Elaboração do Quadro Teórico da Dissertação

2.1 Buscando interseções entre as linhas de pesquisa

Na Seção 1.3, pudemos ver que diversas pesquisas utilizando tecnologias computacionais para o Ensino de Matemática vêm, gradativamente, mudando o foco da aprendizagem (foco no aluno) para o ensino (foco no professor). Autores como ABRAHÃO (1998), BELFORT & GUIMARÃES (1998) DOERR & ZANGOR (2000) e MATTOS (2007) buscam, claramente, ligações da aplicação destas tecnologias com a formação do professor de matemática.

Isto é mais do que colocar o professor no papel de 'mero' aprendiz. Ligar a utilização de uma tecnologia computacional como a geometria dinâmica, com a inserção de tópicos de matemática pode gerar um ambiente onde seja possível detectar eventuais lacunas na sua formação, dirimir estreitezas com relação à disciplina a ser ensinada, observar a postura que ele deve assumir em um modelo de ensino mais investigativo, refletir sobre o papel que ele deve desempenhar em sala de aula, sobre o conhecimento curricular da disciplina, sobre seu conhecimento pedagógico etc.

Neste quadro, as duas linhas de pesquisas começam a se tornar difusas, favorecendo o direcionamento de estudos sobre o 'tipo' de (ensino de) matemática que é necessário aos futuros professores. Na junção destas correntes, podemos conseguir meios de formar um professor de matemática com competências relacionadas a um profissional reflexivo, com formação matemática que lhe dê autonomia, tornando-o seguro e capaz para adaptar-se à diversidade.

Podemos colocar em paralelo pesquisas como as de BALL (1988a, 1988b), MA (1999), JONES (2002) e LABORDE et al. (2006), a fim de perceber um modo de oferecer aos futuros professores a compreensão, com consistência, dos alicerces teóricos da matemática que ensinarão. Comparando as pesquisas de EISENHART et al. (1993), LLINARES (2004), ABRAHÃO (1998) e BELFORT & GUIMARÃES (1998), podemos ver a importância de colocar o professor em um ambiente que permita revisitar o conteúdo curricular, revendo a disciplina por uma ótica diferente.

Baldin (2002) relata algumas experiências com uma turma de Informtica aplicada à Educação, no curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), reconhecendo a importância dos currículos se adequarem ao uso das tecnologias computacionais no ensino de matemática:

> A realização das aulas simuladas, planejadas por eles mesmos, lhes deu a oportunidade de descobrir o seu próprio potencial e criar disposição para pesquisar e aprender novidades.
>
> (BALDIN, 2002, p.6)

Estudos como o de Baldin indicam que alunos dos cursos de formação de professores precisam manter contato e estar habituados ao uso de tecnologias computacionais para o ensino de matemática, que devem estar disponíveis durante boa parte do processo de formação. A partir do uso em atividades de aulas durante os cursos de graduação, os futuros professores poderão incorporá-las aos procedimentos de ensino-aprendizagem em sua prática profissional.

Reforçando a busca pela direta compatibilidade entre estas linhas de pesquisa, encontramos documentos elaborados por grupos de conceituados autores e divulgados por entidades ligadas ao ensino e a pesquisa (CBMS, 2001; KAHANE, 2003 e UNESCO, 2004) indicando:

- a integração da tecnologia como fator importante para a formação profissional do professor;
- recomendações sobre a necessidade da capacitação nos conteúdos de matemática, apontando para a urgência de habilitá-los ao uso das diversas tecnologias;
- implementação de políticas destinadas a promover a incorporação de novas tecnologias educacionais às atividades escolares

Assim, entendemos que a integração do ensino de uma tecnologia computacional, como a GD, em uma disciplina no curso de formação de professores, ligando as situações de ensino e aprendizagem, pode capacitar estes professores a criar modelos de ensino mais flexíveis, e que venham ao encontro das necessidades de aprendizado de seus alunos, fazendo conexões entre diferentes conceitos, orientando os alunos a formularem questões e conjecturas, testando-as e construindo argumentos que as sustentem. Para um bom desenvolvimento pedagógico destas atividades, o professor precisa de uma capacitação que o permita planejar as atividades a serem implementadas e preparar aulas que possiblitem a exploração dos conceitos envolvidos. Concordamos com pesquisadores como BELFORT & GUIMARÃES (1998), CORNU & RALSTON (1992), LABORDE (2000), LABORDE et al (2006), LAGRANGE (2003) e tantos outros, de que esta prática será possível a partir de uma boa formação em relação aos conhecimentos matemáticos, permitindo ao professor recorrer a diferentes estratégias de ensino e metodologias, atento à possibilidade de interação com novas tecnologias aplicadas ao ensino.

2.2 Impressões iniciais antes de ir a campo

> *A maioria dos futuros professores não é preparada para o estudo das propriedades das figuras geométricas. Para exercer um bom ensino e aprendizagem, deve-se incluir a construção de conjecturas e as possibilidades de prová-las, ampliando o raciocínio geométrico e compreendendo o papel da prova em geometria.*
>
> (MATTOS, 2007, p.53)

Para muitos dos estudantes de cursos de licenciatura, aprender matemática na escola significou aprender um conjunto de regras e procedimentos. Uma boa desenvoltura neste sentido provavelmente proporcionou boas notas em matemática por todo o ensino básico e provavelmente ainda nas disciplinas iniciais da licenciatura; pois se constitui em uma óbvia vantagem sobre aqueles que não possuem tais habilidades. No entanto, entendemos que isto não é o bastante para ensinar a disciplina. É preciso acrescentar o entendimento dos conceitos matemáticos no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, em trabalhos como os de Kuhs & Ball (1986) e Ball et al.(2005) encontramos a preocupação dos pesquisadores em buscar definir habilidades necessárias à prática docente; como um raciocínio flexível e um conhecimento de matemática diferente daquele utilizado por profissionais de outras áreas que lidam com esta matéria.

> É importante que os professores sejam capazes de estimular a compreensão ampla de uma ideia matemática, oferecendo diferentes modelos que representem esta ideia.
>
> (KUHS & BALL, 1986, p.9, tradução nossa.)

Ao ingressarem nos cursos de formação de professores, os alunos são apresentados a currículos que não associam a matemática do Ensino Superior com a matemática do Ensino Básico; consequentemente, não resgatando conhecimentos que deveriam ter sido adquiridos na escola. A maioria dos currículos não é orientada de modo que os conteúdos sejam revistos e aprofundados durante a graduação. Como fruto deste processo, os professores recém-formados são colocados em sala de aulas para ensinar o que não aprenderam na Escola Básica e não foi revisitado na graduação.

Além de ser tratado em trabalhos acadêmicos, estas constatações das deficiências no domínio de conceitos básicos de matemática também encontram eco em reflexões acerca dos meus próprios conhecimentos da disciplina e na observação de meus pares, ainda na condição de estudante de Licenciatura. Desta forma, tais constatações nortearam muitas de minhas hipóteses de pesquisa.

Desta forma, estabelece-se o ciclo de professores mal formados que ensinam uma nova geração de alunos, e estes virão a ter problemas conceituais que não serão tratados em um curso de formação, gerando mais profissionais com dificuldades etc. Vendo que tal processo de formação vem sendo alimentado num *feedback* negativo ao longo de décadas, acreditamos que o caminho para a quebra deste ciclo passa por uma atenção maior à formação de matemática básica do professor, juntamente com a renovação de conteúdos de cursos de formação inicial, favorecendo o desenvolvimento de uma melhor compreensão do que se aprende na graduação, associado ao que se ensina na Escola Básica.

Na seção 1.2, a respeito dos Saberes Docentes, um ponto que unifica os discursos citados é a identificação de falhas na formação dos professores no que diz respeito à matemática escolar. Muitos destes trabalhos apontam para a reconstrução dos currículos dos cursos de formação, na busca que os professores adquiram os conceitos necessários ao sólido entendimento da matemática da Escola Básica.

Assim, acreditamos que um curso em que os licenciandos lidassem com Geometria Dinâmica nos permitiria detectar lacunas em seus conhecimentos de matemática, ao mesmo tempo em que poderiam se abrir possibilidades de alcançar um nível de compreensão mais profundo dos fundamentos matemáticos básicos em paralelo a um trabalho de análise de como diversos tópicos da matemática escolar podem ser ensinados e a discussão de como uma nova ferramenta pode ser utilizada pedagogicamente.

Outro ponto importante a ser colocado é o fato de que o conhecimento matemático demandado por alunos da licenciatura difere do demandado por estudantes de outras áreas (BALL et al., 2005 ; MA, 1999). A formação de professores necesita de um processo diferenciado, privilegiando a compreensão dos conceitos matemáticos praticados em salas de aula na escola básica.

2.3 Questões de pesquisa

Em nosso trabalho, buscamos no ensino de tópicos de matemática em ambiente de GD uma oportunidade de mostrar aos licenciandos a matemática como uma ciência não-fragmentada, onde as fronteiras das sub-disciplinas se tornam difusas; colocando este futuro professor em formação em um papel de aprendiz e revisitando profundamente diversos conteúdos da disciplina; de forma que este professor possa promover ao seu aluno um aprendizado arraigado em alicerces teóricos da matemática.

Vale salientar que não pretendemos tratar um curso como o desta pesquisa como *melhor* ou *pior* do que qualquer outra tentativa de oferecer ao professor em formação algumas das habilidades necessárias à docência. Assim como um curso, por exemplo, de História da Matemática, ou um curso de extensão baseado em resolução de problemas, nossa intenção é buscar mais uma alternativa para alcançar objetivos cognatos.

Partimos do ponto de vista que a oportunidade de contato com a matemática em um ambiente de GD em uma disciplina no curso de licenciatura pode trazer benefícios para a formação do futuro professor: ao repensar conteúdos já estudados como Geometria Euclidiana e Funções Reais, o licenciando tem a oportunidade de resolver antigas dificuldades e refletir sobre questões referentes ao ensino destes conteúdos, aliando o conhecimento da disciplina ao conhecimento didático. Acredita-se que estas atitudes contribuem para a formação de um professor capaz de uma prática reflexiva, que consideramos inerentes aos aspectos mais fluidos e imprescritíveis da docência; buscando, assim, criar um ambiente onde haja uma fusão de práticas pedagógicas e conhecimentos específicos da matemática.

A escolha de uma turma de licenciandos em vez de uma turma de especialização (de professores já em exercício) para aplicar o trabalho foi uma decisão no momento de definição do recorte que esta pesquisa tomaria. Algumas questões básicas foram consideradas que tornavam vantajosa a escolha de licenciandos: a familiaridade dos cursistas com o uso da informática e o fato de não criar um choque entre novas propostas de prática docente com as práticas já estabelecidas destes professores. Também consideramos que a 'desvantagem' da falta de experiência didática dos licenciandos poderia ser compensada pelo fato de que estes alunos passariam a ter um modelo didático que pudesse contribuir para suas futuras práticas.

Assim, trazemos como questões centrais de pesquisa: *quais contribuições que uma disciplina de matemática apoiada na utilização das potencialidades de GD pode trazer para a formação dos licenciandos? E é possível perceber limitações decorrentes do fato de este ser o primeiro contato dos licenciandos com uma disciplina com este perfil?*

Capítulo 3

O Estudo Empírico

3.1 Contexto e Metodologia

A investigação empírica deste trabalho consistiu de uma pesquisa-ação com um grupo de alunos veteranos da Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro que já havia passado pela disciplina *Geometria I*[1]. Neste capítulo, relataremos o contexto pedagógico em que o curso transcorreu, além da metodologia de planejamento e desenvolvimento das atividades em sala.

3.2 Concepção geral da pesquisa

O curso oferecido a este grupo ocorreu durante todo o primeiro semestre de 2008 com uma turma de 38 alunos, dos quais cerca de 30 assistiam as aulas regularmente. A carga horária do curso foi de 60 horas, distribuídas em 15 semanas de quatro horas de aula (regime vespertino). Todas as aulas foram ministradas na sala de informática (equipada com, aproximadamente, 25 computadores), onde os alunos tinham sempre a oportunidade de manipular (ora individualmente, ora em duplas) os softwares de GD: *Tabulae Colaborativo*, *GeoGebra* e *Calques 3D*[2], seguindo roteiros de atividades deliberadamente elaborados para este curso. Nestes roteiros, o foco principal estava nas atividades investigativas (realizadas individualmente ou em duplas) intercaladas

[1] Esta disciplina é oferecida a alunos do primeiro período deste curso de Licenciatura.

[2] Ver seção: **Software de referência**

com momentos de aula expositiva e de discussão de resultados encontrados pela turma como um todo.

Os roteiros do curso, baseados em resoluções de problemas, alimentam questionamentos sobre os procedimentos realizados. Dessa forma, buscamos incentivar a exploração de situações para obter conjecturas, para, em seguida, obter suas justificativas matemáticas. Na elaboração dos roteiros, visamos explorar as características do software que possibilitassem apontar para justificativas e provas das formulações elaboradas e discutidas; realimentando, assim, o processo de construção do aprendizado. Mais detalhes acerca das perspectivas e expectativas destes roteiros serão tratados na seção seguinte.

É importante ressaltar que a abordagem adotada não teve o objetivo de escolher um caminho facilitado dentro dos tópicos abordados ou de reforçar a aquisição de conhecimentos e procedimentos sem justificativa. Ao contrário, buscou-se criar momentos nos roteiros que ensejavam justificativas precisas sobre os assuntos abordados.

Tendo sempre em mente investigar como aqueles futuros professores poderiam aplicar em suas (futuras) salas de aula estes conhecimentos de aplicação de GD para o ensino de matemática adquiridos durante o semestre, foram pedidos, como avaliações do curso, roteiros de atividades (confeccionado em duplas) para o ensino de algum tópico de matemática (de qualquer nível) de forma que o uso de GD exercesse um papel fundamental para a compreensão do assunto em questão.

3.3 Estrutura do curso

O curso foi elaborado buscando abranger diversos tópicos da matemática do ensino básico, ao mesmo tempo em que havia a necessidade de instrumentalizar os alunos com a ferramenta da GD. Desta forma, dividimos o curso em quatro partes e aplicamos duas avaliações para os alunos. A seguir, apresentamos as ideias centrais de cada parte do curso:

Parte I: Conhecendo as ferramentas elementares do software

Ao longo das duas primeiras semanas, os alunos foram apresentados ao funcionamento das ferramentas básicas do software *Tabulae Colaborativo* e entraram em contato com o caráter dinâmico de construções geométricas neste ambiente. No entanto, por trás de atividades aparentemente procedurais, estavam presentes questões de investigação de possíveis conhecimentos equivocados dos alunos, exemplificadas abaixo nas ilustrações de telas dinâmicas utilizadas no curso:

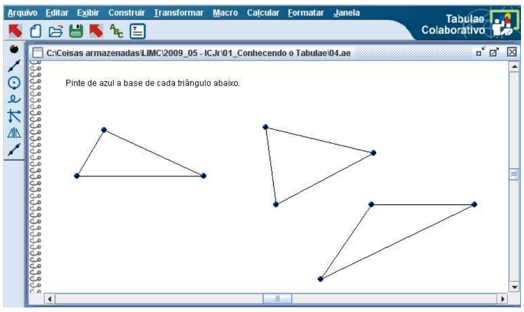


Figura 3.1: Exemplo 01: *Pinte de azul a base de cada triângulo abaixo.*

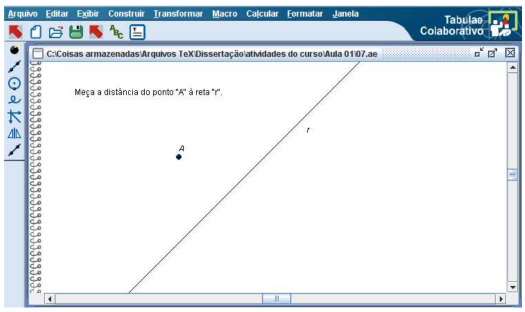


Figura 3.2: Exemplo 02: *Meça a distância do ponto "A" reta "r".*

Ao término de cada atividade, as construções de cada aluno (ou dupla) eram discutidas em sala, na intenção de que os próprios alunos pudessem detectar seus possíveis equívocos ou equívocos de seus colegas.

Parte II: Geometria Euclidiana Plana

Esta parte do curso nos permitiu analisar outros diversos tópicos de geometria do ensino básico, bem como a análise e discussão de seus teoremas elementares[3]. A seguir, listamos os tópicos abordados nesta parte do curso, mas deixamos para exemplificar atividades no capítulo referente à análise de dados da pesquisa.

- Construções elementares com régua e compasso;
- Congruência de triângulos;
- Exploração das propriedades de triângulos e quadriláteros notáveis;
- Construção, análise dinâmica e demonstração de teoremas elementares, tais como:
  - Teorema do Ângulo Externo;
  - Teorema das Paralelas e sua recíproca;
  - Lei Angular de Tales.
- Semelhança de triângulos e Homotetia.
- Divisão de um segmento em partes iguais;
- Miscelânea de Questões, Construções e Teoremas.

Parte III: Avaliação 1

Visando estreitar laços da relação entre teoria e prática na formação docente, foi pedido para que os licenciandos elaborassem roteiros didáticos sobre algum assunto de Geometria Euclidiana Plana, de forma que o aprendizado com Geometria Dinâmica pudesse exercer um papel fundamental na construção do conhecimento de seus alunos.

[3]Foram utilizados os livros-texto LEGENDRE (2003) e TINOCO (2004) como referência para esta parte do curso.

Destacamos a importância desta parte do curso por crermos que, na construção dos saberes docentes, muitas ideias acerca de ensinar e aprender são oriundas de suas experiências prévias como alunos (e, invariavelmente, estas orientarão suas práticas futuras). Desta forma, diante de um novo modelo de aprendizagem, vemos a necessidade de ofertar aos futuros professores um momento onde ele possa refletir sobre sua futura prática, gerando a oportunidade de repensar ideias pré-estabelecidas.

Assim, esta avaliação pretendia observar a seleção de conteúdos matemáticos a serem tratados nos roteiros elaborados pelos licenciandos. No entanto, como tratado em nossa revisão teórica, só o conteúdo matemático não garante uma boa experiência para os aprendizes. Neste sentido, foram também consideradas as perguntas: é o roteiro meramente informativo? O roteiro permite a construção de conhecimentos?

Parte IV: Tópicos diversos da matemática do Ensino Médio

Nesta parte do curso, pudemos abordar, via atividades com GD, diferentes temas da matemática de forma não-convencional. A seguir, listamos os tópicos tratados em sala:

- Funções Reais
- Cônicas
- Trigonometria e Funções Trigonométricas
- Cálculo Diferencial
- Funções definidas por equações paramétricas
- Coordenadas Polares

Este segmento do curso tem como principal intenção oferecer ao professor em formação abordagens diferenciadas destes tópicos no sentido de promover um processo de (re)aprendizagem dos cursistas; alinhando o conhecimento matemático com a aprendizagem e pedagogia. Desta forma, a compreensão dos conteúdos em modelos alternativos pode promover ações pedagógicas diferenciadas e multi-facetadas.

Parte V: Geometria Euclidiana Espacial

Este segmento do curso foi baseado em explorações (com apoio dos softwares) de Geometria de Posição e Geometria Descritiva.

Parte VI: Avaliação 2

Analogamente à *Avaliação 1*, esta tinha o mesmo princípio de relacionar o conhecimento curricular com o conhecimento pedagógico do licenciando. Eles teriam de elaborar roteiros didáticos sobre qualquer assunto do Ensino Básico ou Superior (exceto Geometria Plana Euclidiana), de modo que a utilização da GD pudesse exercer um papel fundamental na construção do conhecimento de seus alunos.

Para efeitos de aprovação no curso, aqueles alunos que não obtivesseem um resultado satisfatório nas Avaliações I e II seriam submetidos a um exame complementar de construções geométricas realizado em ambiente de GD.

Capítulo 4

Coleta e Análise de Dados

É fundamental a coerência entre o que os professores aprendem, como aprendem e como se espera que ensinem a seus alunos.

(REALI & LIMA, 2002, p.230)

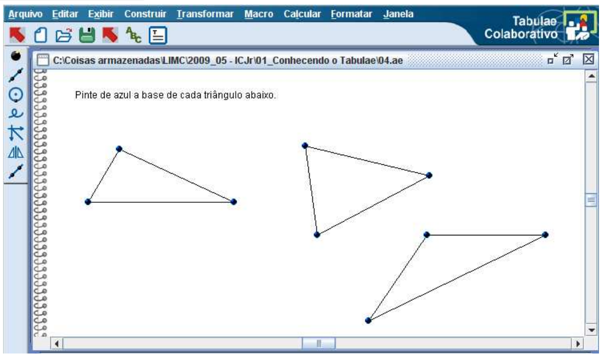
4.1 Seleção de dados para análise

A seleção de dados que exibiremos neste capítulo contém atividades realizadas em aula e atividades complementares, feitas em casa pelos alunos. Na análise das atividades desenvolvidas em aula, exibiremos relatos de alunos e discussões em sala. As atividades complementares, claro, apenas exibirão a produção dos alunos.

Pela própria dinâmica de pesquisa-ação, nos dados observados em sala de aula, não estamos considerando os aspectos quantitativos, mas apenas as diferentes visões apresentadas e as discussões por elas provocadas. Também é importante destacar que este trabalho não se propôs a analisar progressos individuais dos licenciandos ou preparar um roteiro completo para o curso. Nas seções a seguir, apresentaremos apenas questões que sejam alvo de análise, sempre à luz da teoria apresentada nesta dissertação.

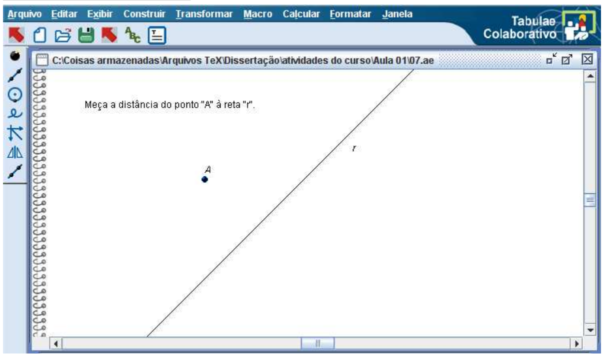
4.1.1 Conhecendo as ferramentas elementares do software

Exemplo 1_01: *Pinte de azul a base de cada triângulo abaixo.*



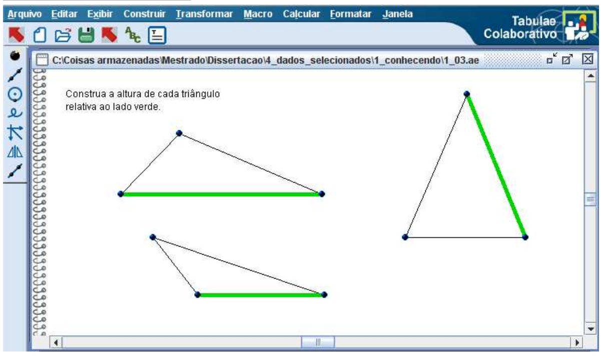
Nesta atividade, eram dados três triângulos com os vértices totalmente livres na tela. Com isso, pudemos investigar interpretações equivocadas de alunos que tratam um objeto geométrico como um 'estereótipo'. Ao indagar a respeito da escolha de um lado para ser tomado como *base* do triângulo, pudemos ouvir justificativas como: *"é o lado que está na horizontal"*; ou *"é o maior lado do triângulo"*.

Exemplo 1_02: *Meça a distância do ponto "A" à reta "r".*



Vale ressaltar que na atividade anterior à esta, era pedido a construção da reta perpendicular a uma reta dada, passando por um ponto dado. Ainda assim, na resolução da atividade ilustrada, pudemos ver alunos construindo um segmento qualquer unindo o ponto à reta e explorando a dinâmica para modificar seu comprimento, procurando experimentalmente pelo menor. Mesmo assim, não houve casos de alunos que, partindo da ideia empírica, formalizassem sua construção em um segundo momento. Ainda houve casos de alunos que construíram apenas um segmento na horizontal, ou na vertical. Dos alunos presentes, apenas dois fizeram a construção baseados no fato de que a distância seria determinada pelo segmento perpendicular. Tal retrospecto demonstra o desconhecimento de construções elementares em geometria sintética. Também podemos atribuir esse fato à uma inadequada ênfase na aplicação de fórmulas (como a fórmula para determinar distância de ponto a reta) em detrimento às construções geométricas que respaldam tais fórmulas.

Exemplo 1_03: *Construa a altura de cada triângulo relativa ao lado verde.*



Mais uma vez, o caráter estereotipado dos objetos geométricos (muitas vezes, também presente em livros didáticos) prevaleceu para a resolução desta atividade. Embora muitos alunos tenham acertado a construção pedida, pudemos ver outros descartando construções em que a altura pedida não ligava o vértice oposto ao lado pintado e outros construindo um segmento oblíquo ao lado pedido, como ilustra a figura seguinte:

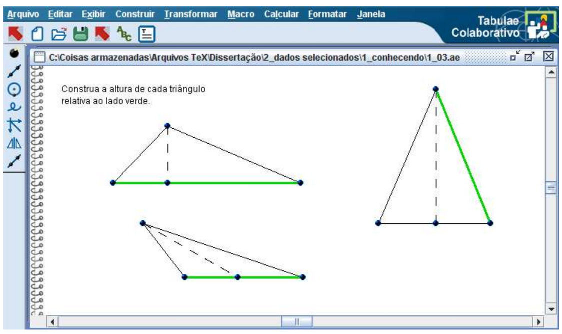
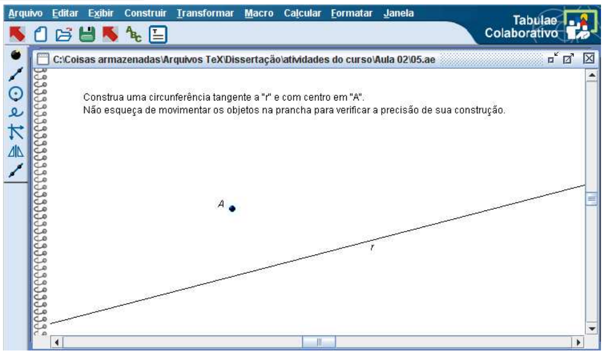


Figura 4.1: Exemplo de resolução de um aluno.

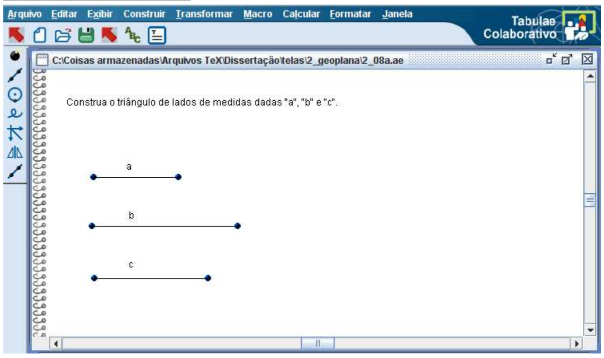
4.1.2 Geometria Euclidiana Plana

Exemplo 2_01: *Construa uma circunferência tangente a "r" e com centro em "A".*



Nesta atividade, alguns alunos, diante de tentativas fracassadas de uma construção robusta, elaboraram uma construção diferente da pedida; construindo uma reta tangente a uma circunferência 'dada'. Novamente apresenta-se a inobservância das propriedades geométricas dos objetos. Em um segundo momento, quando questionados sobre a posição relativa entre *"r"* e o raio da circunferência que toca *"r"*, apenas uma dupla de estudantes relacionou esta propriedade com a atividade da distância entre ponto e reta.

Exemplo 2_02: *Construa o triângulo de lados de medidas dadas "a", "b" e "c".*



Após fazerem a construção enunciada, foi pedido para que os alunos variassem os objetos dados no problema. Com isso, alguns alunos se viam surpresos quando o triângulo construído "sumia" da tela. Na discussão em sala sobre esta atividade, pudemos revisitar pontos importantes ligados ao estudo de triângulos, como sua *condição de existência* e explorar o *caso LLL de congruência* de modo diferenciado.

Exemplo 2_03: *Construa um triângulo ABC e a mediatriz relativa ao lado BC.*

Na atividade anterior a esta, foi pedido para que os alunos constríssem um triângulo ABC e a mediana relativa ao lado BC. Quase todos os alunos lembravam o que era uma mediana e a construíram com o auxílio da ferramenta primitiva de construir *ponto médio* presente no software. Ao passarmos para a atividade da construção da mediatriz, muitos alunos ou não a conheciam ou achavam que era apenas um sinônimo de mediana. No entanto, outros alunos se valeram da ferramenta primitiva de construção de *mediatriz* do software e realizaram a construção pedida. Ainda assim, muitos destes alunos se viram surpresos com o fato de a mediatriz não passar pelo vértice oposto ao lado BC. Diante desta surpresa, alguns alunos ainda tentaram "ajeitar" a construção, posicionado o vértice A sobre a mediatriz construída. Ao serem questionados sobre uma definição para *mediatriz*, quando não havia a insistência de relacioná-la à mediana, os alunos apenas se referiam a ela como sendo uma reta perpendicuar a um segmento passando por seu ponto médio. Nenhuma outra definição foi fornecida, mesmo com novas arguições a respeito. Diante disso, foi pedido aos alunos para que, em uma nova tela, investigassem o lugar geométrico dos pontos equidistantes às extremidades de um dado segmento. Uma das alunas confeccionou a seguinte construção:

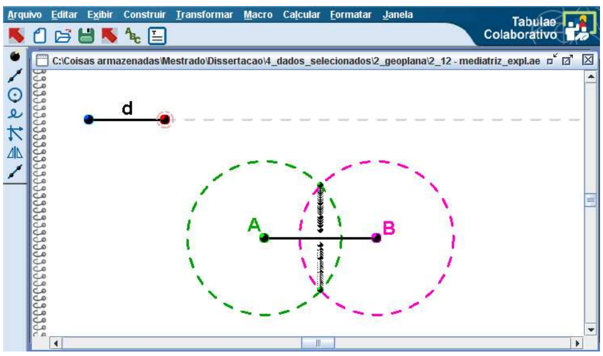
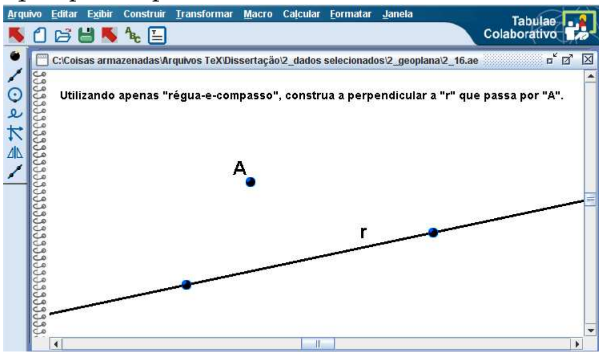


Figura 4.2: Nesta tela, as circunferências possuem raio *"d"* e este é um objeto variável.

Desta forma, pudemos explorar as caractersticas dinâmicas do software para buscar estabelecer a equivalência entre duas definições possíveis para mediatriz de um segmento. Em particular, a demonstração desta equivalência nos demanda visitar, além do conceito de *lugar geométrico*, diversos teoremas elementares, muitos deles desconhecidos dos alunos.

Exemplo 2_04: *Utilizando apenas "régua e compasso", construa a perpendicular a "r" que passa por "A".*



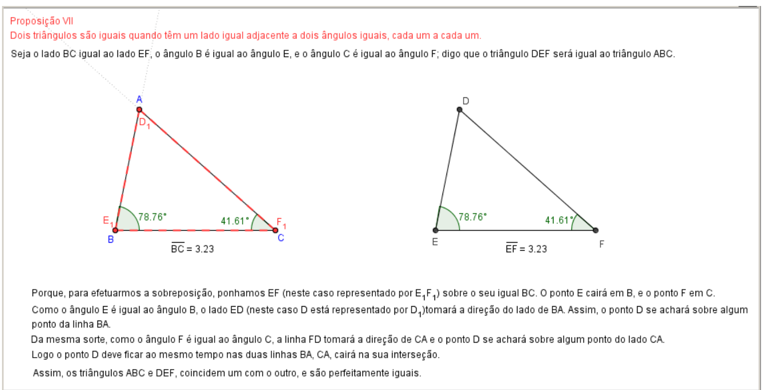
Posteriormente à familiarização com as ferramentas do software e ao estudo da axiomática e de teoremas elementares ligados às construções geométricas, exploramos problemas de construções apenas utilizando *régua e compasso* (no caso da GD, só era permitida a utilização das primitivas *'ponto'*, *'reta'*, *'semirreta'*, *'segmento de reta'*, *'circunferência por centro e ponto'* e *'circunferência por ponto e raio'*).

Na atividade do exemplo acima, dois alunos, valendo-se dos objetos exibidos na tela, elaboraram a seguinte construção: utilizando os pontos (digamos P e Q) que determinam a reta dada, construam-se as circunferências $c_1 = (P, A)$ e $c_2 = (Q, A)$. Além do ponto A, teremos um outro ponto (B) de interseção entre c_1 e c_2. A reta desejada é a definida por A e B.

No entanto, os alunos não sabiam justificar esta construção. O rigor de uma dedução ainda é algo distante para estes alunos. Dificilmente conseguem estruturar uma demonstração, mesmo diante de uma ferramenta que possibilita o acesso à sua compreensão (GRAVINA, 1996).

É bem verdade que este já era um problema esperado. Assim, paralelamente às atividades realizadas em sala, foram pedidas atividades complementares (atividades para casa[1]) que detalhassem uma explicação de demonstrações de teoremas encontrados no livro *Elementos de Geometria*, de Adrian-Marie Legendre (LEGENDRE, 2003). A ideia central destas atividades era a utilização da ferramenta *Revisar Construção* do software *GeoGebra* como ferramenta didática para uma demonstração matemática (além da natural utilização do dinamismo das construções neste ambiente). Assim, os passos da construção geométrica deveriam vir acompanhados dos passos da explicação/demonstração do teorema escolhido. A seguir, alguns exemplos da confecção destas atividades complementares (referentes aos *Livro I* e *Livro II*, de Legendre).

Exemplo 2_05: Livro I, Prop. VII: *Dois triângulos são iguais quando têm um lado igual adjacente a dois ângulos iguais, cada um a cada um.*



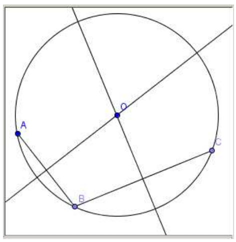
Esta figura ilustra a tela dinâmica de um exemplo de uma eficiente utilização do software, no que diz respeito à clareza dos passos da demonstração (o texto acompanha a construção com sincronia) e à robustez das relações funcionais da construção dinâmica.

No entanto, exemplos como este foram raros na primeira metade do curso. Muitos alunos cometiam diversos equívocos tocante às construções geométricas, como vemos

[1]As atividades foram postadas pelos alunos na plataforma do curso no *Moodle*. Assim, todos os alunos poderiam ver o que seus colegas estavam fazendo (e como estavam fazendo), evitando o risco de repetição de um mesmo teorema escolhido por pessoas diferentes.

no exemplo a seguir:

Exemplo 2_06: Livro II, Prop. VIII: *Por três pontos A, B , C, não em linha reta, se pode sempre fazer passar uma circunferência.*



A julgar apenas pela imagem, não é possível notar nenhuma falha em sua construção. No entanto, em ambiente dinâmico, podemos testar a relação entre os objetos na tela; observando que, os pontos B e C, que deveriam ser objetos independentes, na verdade são objetos sobre uma circunferência anteriormente construída!

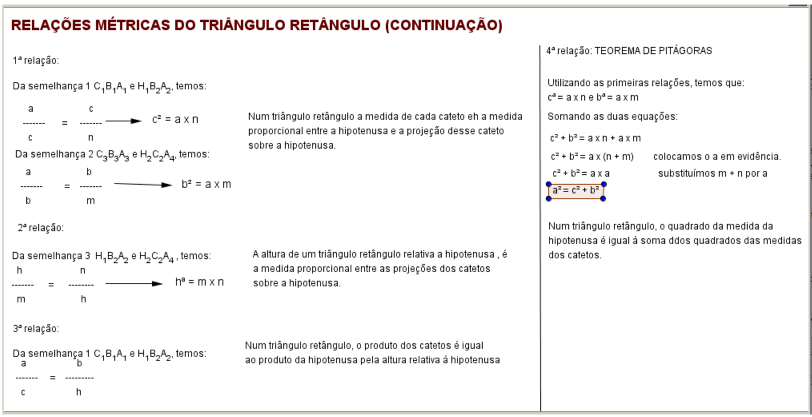
Dessa forma, vemos que os exemplos aqui mostrados também nos permitem identificar características do conhecimento destes futuros professores que dificilmente seriam notados em um ambiente diferente deste.

4.1.3 Avaliação 1

Esta primeira avaliação nos permitiu ver como estes futuros professores, recentemente munidos de uma nova ferramenta, aplicariam-na em suas aulas. No geral, o resultado coletado nos mostra uma preocupante sub-utilização da ferramenta, onde os softwares não desempenhavam nenhum papel importante para o aprendizado do assunto em questão.

Exemplo 3_01: Utilizando o *GeoGebra* para a demonstração de relações métricas em um triângulo retângulo:

A figura a seguir ilustra uma tela dinâmica confeccionada no programa *GeoGebra*, onde este exerceu o papel de mero "exibidor de slides". Neste trabalho (e em muitos outros coletados) vimos uma vaga cópia de livros didáticos para a tela do computador, de forma que o software não desempenha, assim, nenhum papel importante para a aquisição do conhecimento proposto.



RELAÇÕES MÉTRICAS DO TRIÂNGULO RETÂNGULO (CONTINUAÇÃO)

1ª relação:

Da semelhança 1 $C_1B_1A_1$ e $H_1B_2A_2$, temos:

a / c = c / n → c² = a x n

Num triângulo retângulo a medida de cada cateto eh a medida proporcional entre a hipotenusa e a projeção desse cateto sobre a hipotenusa.

Da semelhança 2 $C_3B_3A_3$ e $H_2C_2A_4$, temos:

a / b = b / m → b² = a x m

2ª relação:

Da semelhança 3 $H_1B_2A_2$ e $H_2C_2A_4$, temos:

h / m = n / h → hª = m x n

A altura de um triângulo retângulo relativa a hipotenusa , é a medida proporcional entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

3ª relação:

Da semelhança 1 $C_1B_1A_1$ e $H_1B_2A_2$, temos:

a / c = b / h

Num triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa á hipotenusa

4ª relação: TEOREMA DE PITÁGORAS

Utilizando as primeiras relações, temos que:
cª = a x n e bª = a x m

Somando as duas equações:

c² + b² = a x n + a x m

c² + b² = a x (n + m) colocamos o a em evidência.

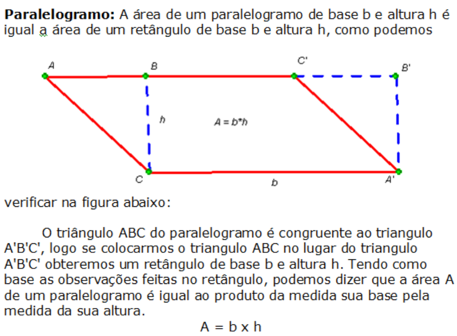
c² + b² = a x a substituímos m + n por a

a² = c² + b²

Num triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma ddos quadrados das medidas dos catetos.

Exemplo 3_02: Utilizando o *Tabulae* para o estudo de áreas de polígonos notáveis:

Neste trabalho, o aluno utilizou o software apenas para 'confecção de ilustrações para um arquivo-texto'; não fazendo do programa, assim, um ambiente de experimentação das propriedades a serem estudadas, como podemos ver no fragmento a seguir, retirado do arquivo-texto produzido pelo aluno:



Paralelogramo: A área de um paralelogramo de base b e altura h é igual a área de um retângulo de base b e altura h, como podemos

verificar na figura abaixo:

O triângulo ABC do paralelogramo é congruente ao triangulo A'B'C', logo se colocarmos o triangulo ABC no lugar do triangulo A'B'C' obteremos um retângulo de base b e altura h. Tendo como base as observações feitas no retângulo, podemos dizer que a área A de um paralelogramo é igual ao produto da medida sua base pela medida da sua altura.

A = b x h

Outros trabalhos nos mostram tentativas de apresentar um modelo experimental de aprendizagem, mas ainda vacilantes em pontos importantes do conteúdo, como na omissão de definições e/ou demonstrações ou concepções equivocadas sobre a matéria. Para exemplificar, vejamos os fragmentos a seguir:

Exemplo 3_03: Utilizando o *Tabulae* para o estudo dos quadriláteros notáveis:

Neste trabalho, os autores apresentavam cada tipo de quadrilátero a ser estudado por meio de uma definição seguida de algumas de suas características. Tomemos como exemplo, a apresentação do paralelogramo:

> Paralelogramo: É o quadrilátero que tem os lados opostos paralelos.
> Características:
> (1) Os lados opostos de um paralelogramo são congruentes.
> (2) Cada diagonal do paralelogramo o divide em dois triângulos iguais.
> (3) Os ângulos opostos de um paralelogramo são iguais.
> (4) As diagonais se interceptam mutuamente no meio.

Após esta apresentação, os autores até encorajam os alunos a construirem os quadriláteros em ambiente dinâmico; mas em nenhum momento as características apresentadas são exploradas ou demonstradas no decorrer do roteiro.

Exemplo 3_04: Utilizando o *Tabulae* para o estudo das medidas do círculo:

Neste trabalho, os autores tinham como objetivo um aprofundamento do estudo das medidas do círculo, onde o aluno já deveria ter o conhecimento prévio do cálculo de seu perímetro e de sua área. O roteiro encorajava a experimentação dinâmica da invariância da razão Cc/d utilizando uma tela no *Tabulae* onde era possível variar a medida do raio de uma circunferência. A seguir, um fragmento do texto presente no roteiro:

> Como já vimos, o valor do número pi é de aproximadamente 3,140 unidades de medida. Sendo assim, podemos efetuar o cálculo do comprimento da circunferência:
>
> $$\text{Cc} = 2 \ . \ \text{pi} \ . \ \text{raio}$$
>
> (...) Temos agora como fazer através da calculadora do programa a razão entre o comprimento da circunferêcia e o diâmetro da mesma:
>
> $$\frac{Cc}{d} = \frac{Cc}{2.r} = \frac{2.pi.r}{2.r} = pi$$
>
> Quer dizer que sempre que dividirmos o comprimento de uma circunferência pelo seu diâmetro obtemos o tão famoso valor de pi?
> A resposta é sim! Observe: (continua...)

Por fim, embora em minoria, também tivemos trabalhos em que o caráter experimental era bem aproveitado nos roteiros. Nestes, estavam presentes atividades de construção e experimentação do assunto estudado estimulando a descoberta de propriedades e suas possíveis demonstrações; como mostrado nos exemplos a seguir:

Exemplo 3_05: Utilizando o *Tabulae* para o estudo sobre ângulos:

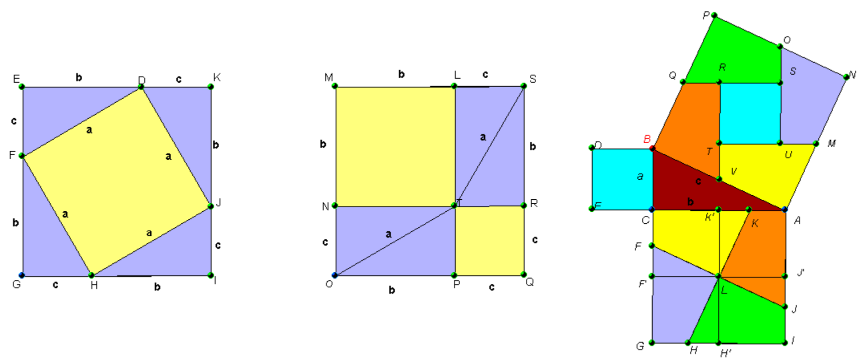
A seguir, a transcrição de algumas atividades presentes em um dos trabalhos:

Construa dois ângulos opostos pelo vértice e calcule os seus valores. Movimente-os. O que podemos concluir a respeito desses ângulos? Prove que os ângulos opostos pelo vértice são congruentes.

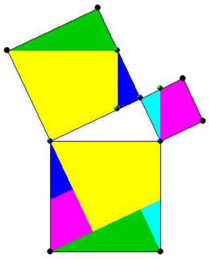
1) Construa um triângulo qualquer. Em seguida calcule a medida de UM ângulo externo deste triângulo e a medida dos seus ângulos internos. O que você pode concluir? 2) Construa todos os angulos externos do triângulo e calcule a soma. Movimente o triângulo. O que você pode concluir?

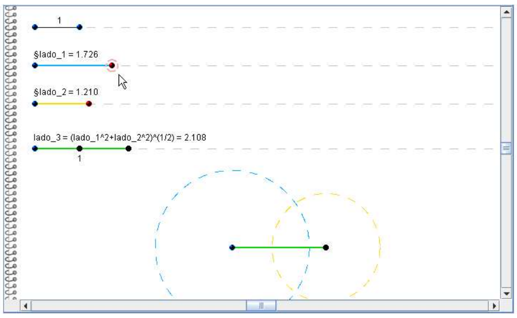
Exemplo 3_06: Utilizando o *Tabulae* para o estudo do Teorema de Pitágoras:

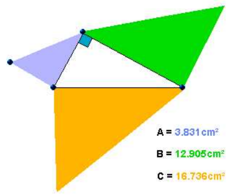
Neste trabalho são exploradas diversas formas de demonstração do teorema utilizando áreas e dissecções. Ao longo do roteiro, o autor concilia atividades de construção, de experimentação e, claro, de demonstração.



Este roteiro ainda possui atividades de experimentação dinâmica da recíproca do Teorema e a extensão da relação entre as áreas dos quadrados para figuras semelhantes construídas sobre cada lado de um triângulo retângulo.







4.1.4 Tópicos diversos da matemática do Ensino Médio

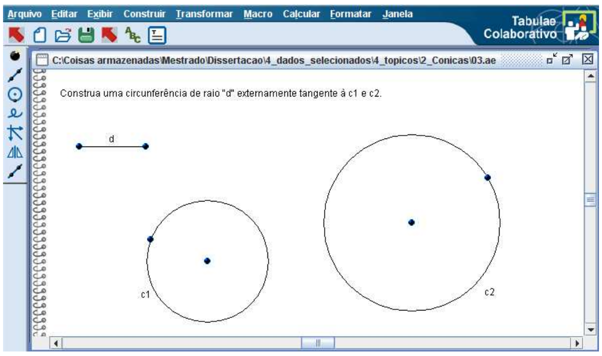
Nesta parte do curso, tivemos a oportunidade rever conceitos de diferentes pontos da matemática elementar e superior. Pela característica da abordagem não-usual utilizada, muitas dúvidas e pensamentos equivocados (também não-usuais) dos estudantes vieram à tona, como veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 4_01: Funções Reais:

Um fato que podemos considerar emblemático do curso ocorreu durante a realização da atividade em que era pedida a construção do gráfico da função $y = a.x^2 + b.x + c$ com os coeficientes dinâmicos "a", "b" e "c". Ao fim da atividade, uma aluna comentou com sua colega que, ali, finalmente havia compreendido a diferença entre variável, incógnita e parâmetro.

Exemplo 4_02: Cônicas:

Um forte potencial da GD é o estudo de cônicas de uma forma diferente da apresentada nos livros didáticos. Em ambiente dinâmico, seu estudo por meio de fórmulas e aplicações estéreis de tais fórmulas dão lugar a um estudo continuado ao da geometria sintética; observando diversas propriedades por meio de construções geométricas. Em uma das atividades iniciais deste tópico, era dada aos alunos a tela ilustrada abaixo, pedindo a construção de uma circunferência de raio *"d"* externamente tangente à *c1* e *c2*.



Ao fim da construção, era pedido aos alunos o lugar geométrico do centro da circunferência construída à medida que variamos o comprimento de *"d"*.

Neste momento, o caráter experimental do ambiente não era suficiente para que o aluno fornecesse uma resposta precisa. Os cursistas dividiam conjecturas diferentes, fornecendo como respostas: *reta*, *parábola* e *hipérbole*. Assim, atividades como esta demandavam a aquisição de conhecimentos cada vez mais apurados. Neste caso, alguns alunos sugeriram a estratégia de demonstração via geometria analítica. No entanto, pudemos ver que esta seria uma estratégia inadequada, pois o estudo de cônicas visto na geometria analítica trata apenas de casos particulares quanto ao posicionamento delas no plano (eixos das cônicas paralelos aos Eixos Coordenados). Assim, a análise via geometria sintética teve de ser utilizada (sendo esta abordagem uma novidade para alguns daqueles alunos).

Exemplo 4_03: Trigonometria e Funções Trigonométricas:

Em uma atividade que eu considerava simples, tivemos a necessidade de revisitar diversos pontos importantes aliados ao estudo da trigonometria. A atividade pedida era a construção de um Círculo Trigonométrico.

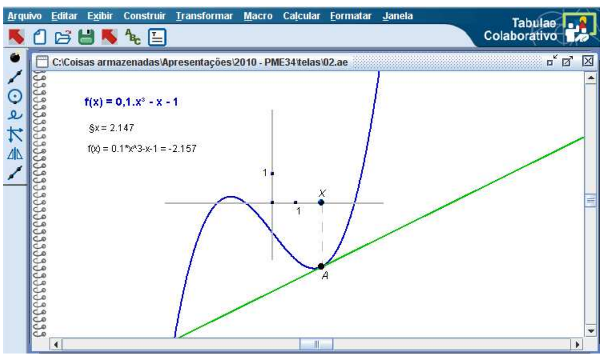
Após as complicações de uma construção robusta - que envolvia a distinção entre objetos fixos e livres e relações funcionais entre os objetos - aproveitamos a oportunidade para discutir pontos relacionados às funções trigonométricas; em especial, às características da função tangente.

Sobre ela, foram pedidas interpretações e justificativas sobre seu caráter assintótico (divisão por zero, paralelismo entre retas no círculo trigonométrico, limites laterais, limites que *tendem a infinito* etc.), sobre seu domínio, sua continuidade e seu crescimento.

Durante esta discussão com a turma, os pontos mais delicados (e divergentes) foram acerca de sua continuidade e seu crescimento; demandando, assim, um posicionamento perante às definições destes conceitos.

Exemplo 4_04: Cálculo Diferencial:

Em uma atividade de construção da reta tangente a um gráfico por um certo ponto, uma tela dinâmica foi elaborada no *Tabulae* para que os alunos tentassem reproduzi-la. A figura a seguir ilustra a tela apresentada aos alunos, com a reta tangente construída. Nela, o ponto X é móvel sobre o eixo horizontal e sua variação é acompanhada pelo o ponto A e pela reta tangente ao gráfico em A.



Após observarem a relação funcional do ponto X com a reta tangente ao gráfico no ponto $A = (x, f(x))$, foi pedido para que os alunos apagassem a reta tangente e tentassem reconstruí-la novamente. Suas tentativas de resolver esta nova etapa sem ajuda não foram bem-sucedidas.

Para dar continuidade à resolução do problema, foi necessário averiguar o que eles conheciam por "reta tangente". Assim, demandou-se uma revisão de pontos importantes do cálculo diferencial; revisitando as definições de *derivada*, *limite* e de *reta tangente a uma curva por um dado ponto*. Todos esses conhecimentos se fazem necessários para a construção pedida.

Exemplo 4_05: Equações Paramétricas e Coordenadas Polares:

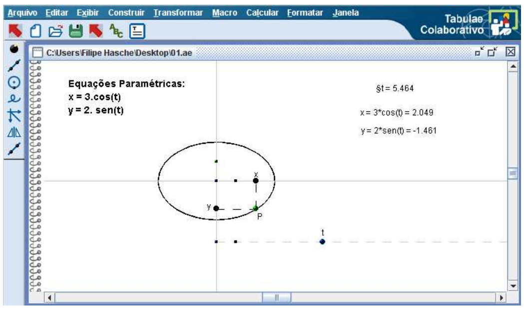
Em uma atividade em que era pedida a construção no *Tabulae* do gráfico da relação definida pelas equações: $x = 3.cos(t)$ e $y = 2.sen(t)$, alguns pontos interessantes sobre o conceito de função vieram à tona.

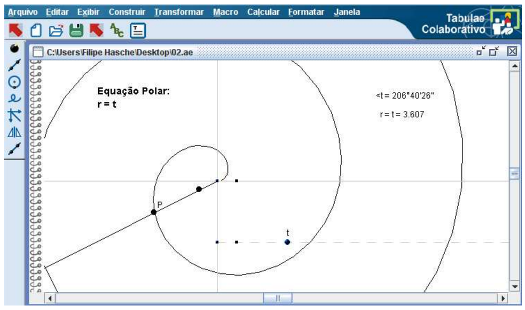
Inicialmente, a identificação da variável independente t não foi imediata. E mesmo depois de reconhecerem que tanto x quanto y eram variáveis dependentes de t, os alunos não souberam utilizar este fato para responderem à pergunta: *a relação definida por estas equações é uma função?* Como o gráfico obtido era uma elipse, os alunos tomaram sua figura para analisar a relação ali representada; citando, inclusive, a "regra das retas verticais".

No entanto, só após perceberem que a única variável livre era t, os alunos perceberam que aquela relação tratava-se, sim, de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$.

Na semana seguinte, em uma atividade que pedia a construção no *Tabulae* do gráfico definido pela equação polar: $r = t$ $(t \geq 0)$, novamente foi perguntado aos alunos se aquela relação também é uma função. Parecendo receosos, ninguém respondeu de imediato. Depois de discutido novamente o conceito de função com a turma, aplicando-o em outro ambiente diferente do usual $y = f(x)$, um aluno observou que, neste caso, poderíamos ter respostas diferentes para esta pergunta; já que qualquer uma das variáveis poderia ser adotada como independente (restando para a outra, claro, o fato de ser dependente da primeira).

Analisando a definição e classificação de funções com a turma, este mesmo aluno sugeriu uma regra prática para determinar quando que uma função $r = r(t)$ ilustrada por um gráfico referente a uma equação polar seria uma função injetiva: construindo uma circunferência centrada na origem e de raio r e observando a possível unicidade de interseção desta circunferência com o gráfico dado (considerando t a variável independente).





Podemos ver aí uma interessante aplicação do elementar conceito de função aplicado e explorado em um ambiente diferente do comumente visto no Ensino Básico. Exemplos como este podem sugerir um possível potencial da utilização da GD para estabelecer associações entre tópicos da matemática superior com a matemática do Ensino Básico.

4.1.5 Geometria Espacial

Exemplo 5_01: Geometria de Posição:

A falta de um consistente contato prévio com Geometria Espacial ficou muito evidente desde os momentos iniciais desta parte do curso. Para exemplificar, podemos citar o caso de uma aluna que, durante as atividades de familiarização com o software de geometria 3D, reclamou a respeito do software, alegando uma suposta limitação das ferramentas de construções, por não conseguir construir uma reta perpendicular a uma reta r passando por um ponto de r.

Além de problemas sutis como este durante a transição da geometria plana para a espacial, outros problemas mais "abstratos" emergiam, como o amadurecimento da noção de *plano* ou relativos à descrição de uma construção "conflitante" com sua imagem, conforme vemos na *Figura 4.3* e *Figura 4.4*.

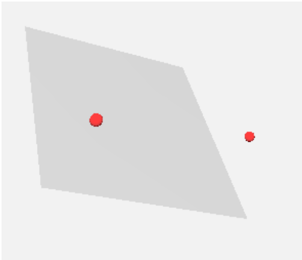


Figura 4.3: O ponto à esquerda não pertence ao plano e o da direita pertence.

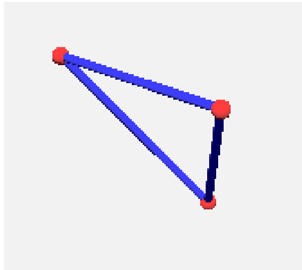


Figura 4.4: Este triângulo é equilátero.

Exemplo 5_02: Geometria Descritiva:

Diante dos empecilhos vistos a respeito da representação de construções tridimensionais em um ambiente bidimensional (como a folha do caderno, a lousa ou a tela do computador), utilizamos o *Calques 3D* aliado à ferramenta de projetividade do *Tabulae* para o estudo de elementos básicos da Geometria Descritiva.

Desta forma, pudemos explorar o caráter exeprimental destas ferramentas no intuito de fazer com que os alunos tivessem a oportunidade de construir seu próprio conhecimento. Após mostrar à turma como era feita a representação de um objeto em ambiente tridimensional para um ambiente bidimensional (épura), propusemos a eles que obtivessem a representação em épura dos objetos (posicionados no primeiro diedro): *ponto*, *reta* e *retas concorrentes*.

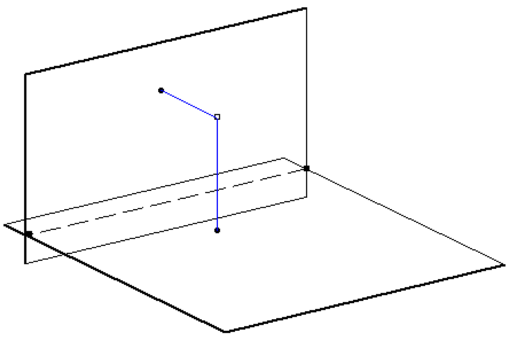


Figura 4.5: Visualização de um ponto no primeiro diedro utilizando o *Calques 3D*.

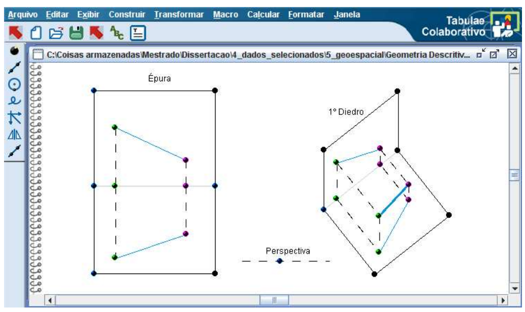


Figura 4.6: Construção de uma reta em épura e sua visualização dinâmica no primeiro diedro utilizando o *Tabulae*.

4.1.6 Avaliação 2

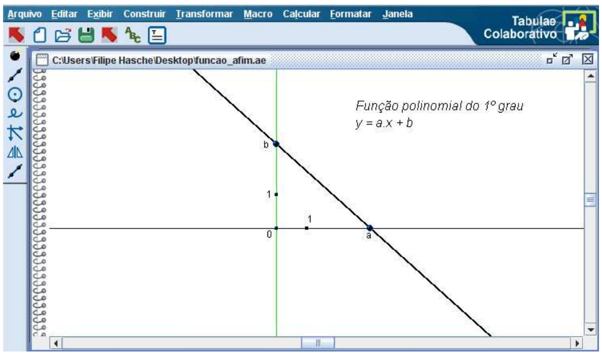
Exemplo 6_01: Funções Reais:

O estudo das funções reais foi bastante requisitado pelas duplas como tema de seus trabalhos para esta segunda avaliação. Embora a quantidade de erros no que dizem respeito à manipulação do software tenha sido bastante minimizada (em comparação com a *Avaliação 1*), ainda observam-se lacunas preocupantes no que diz respeito ao conhecimento da disciplina dos assuntos a serem ensinados.

Em um dos trabalhos sobre construção e análise de gráficos de funções polinomiais, uma dupla tratava o gráfico da função definida pela equação $f(x) = x^4$ como uma parábola.

Exemplo 6_02: Função Afim:

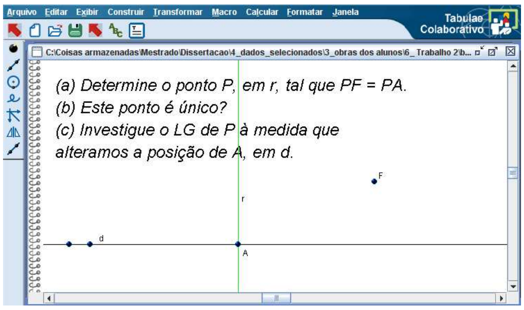
Em um trabalho sobre a análise dinâmica dos coeficientes da função afim ($y(x) = a.x + b$), uma dupla considerou o coeficiente linear como sendo o valor que fonece o valor da ordenada do ponto de interseção do gráfico com o eixo Oy e o coeficiente angular como sendo o valor que fonece o valor da abscissa do ponto de interseção do gráfico com o eixo Ox (!!).

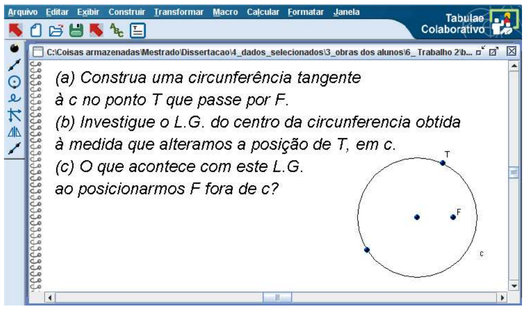


Exemplo 6_03: Cônicas:

Assim como o tema *funções reais*, um outro tema bem requisitado pelos alunos foi o estudo das cônicas por uma abordagem sintética que levasse o estudante a chegar nas fórmulas analíticas tão presentes nos livros didáticos do ensino médio e ensino superior.

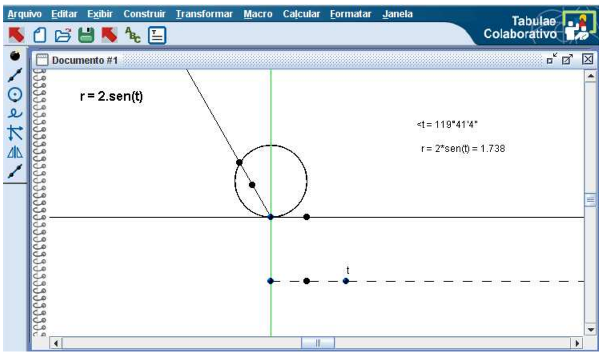
Em um dos roteiros sobre este assunto, pudemos observar diferentes construções geométricas permitidas pelo caráter dinâmico do ambiente visando o entendimento das definições planas de cada cônica, como ilustrado a seguir:





Exemplo 6_04: Coordenadas Polares:

Em um outro bom trabalho apresentado, uma dupla propôs o estudo integrado de transformações no plano (translação, rotação e homotetia) e funções reais para o estudo de relações definidas por coordenadas polares.



O roteiro apresentava incentivo à construção dinâmica dos gráficos definidos por tais relações para, em seguida, uma análise de propriedades de seu gráfico relacionando-o com os elementos definidores da relação (domínio, imagem, variável independente, variável dependente e conversão para equação cartesiana).

4.2 Impressões *a posteriori*

Apenas apresentar aos licenciandos uma ferramenta computacional para o ensino não é suficiente para sua boa utilização; pois, além de um conhecimento 'técnico', eles precisam de suporte no desenvolvimento de um conhecimento didático sobre o uso desta tecnologia. Dessa forma, sustentamos a necessidade de integrar a aprendizagem de conteúdo da disciplina dos futuros professores paralelamente à constante reflexão de seus conhecimentos pedagógicos para a utilização de uma ferramenta computacional como a geometria dinâmica. Esta tarefa, entendemos, cabe aos processos formativos dos professores, seja em licenciaturas ou em cursos de formação continuada.

A aprendizagem em ambiente de GD permitiu motivar a reflexão sobre práticas de ensino, tanto no âmbito pedagógico - pela necessidade de desenvolvimento de atividades para seus alunos - quanto no âmbito do conhecimento da matéria - pela necessidade de saber conceitos fundamentais da matemática para realizar construções em GD - permitindo, assim, conexões entre importantes habilidades necessárias ao professor de matemática.

No que diz respeito ao conhecimento da matéria, tal ambiente me fez perceber que, pelo simples fato de o estudante ser capaz de verdadeiramente construir os objetos em estudo, algumas justificativas sobre propriedades matemáticas e conjecturas emergiam com mais naturalidade. Vale comentar que não vimos um "acréscimo de dificuldade" na compreensão dos assuntos abordados nesta disciplina por utilizar uma nova ferramenta no curso. O que vimos foi que a inserção desta variável, devido ao caráter de exploração dos fenômenos matemáticos neste ambiente, ofereceu o potencial de oferecer lugar a perguntas e discussões que dificilmente aconteceriam em um ambiente diferente; já que, muitas vezes, os cursistas se sentiriam inibidos de perguntar algo que eles imaginam que devessem saber e efetivamente não sabem; como comentado no *Exemplo 2_02*, sobre a condição de existência de um triângulo e o caso de congruência *LLL*, e no *Exemplo 2_03*, sobre o conhecimento de mediatriz de um triângulo. Dessa forma, revisitando alicerces de diversos pontos da disciplina, este ambiente pode expor lacunas na formação docente no que diz respeito ao conhecimento da disciplina necessário ao seu ensino; permitindo, assim, um espaço para discussão de pontos elementares que suscitam dúvidas aos licenciandos.

Já no que diz respeito ao conhecimento pedagógico, um ponto que merece destaque é a preocupação dos licenciandos em como escrever um roteiro didático que utilize GD: se deveriam se preocupar em ensinar uma sequência de procedimentos para as construções no software ou em como balancear o caráter experimental da GD com o caráter formal da matemática. Sabemos que este é um ponto de difícil estruturação em um primeiro contato com uma nova ferramenta. Assim, vimos a crucial importância de se tratar isso continuamente com os licenciandos de forma a estabelecer discussões sobre como conduzir um modelo de ensino neste novo ambiente.

Desta forma, podemos conceber a possibilidade de o professor em formação buscar por diferentes abordagens de ensino, estando ele em um ambiente que possa promover reflexões sobre os conteúdos e sobre os algoritmos eventualmente utilizados. Com a mudança da referência única centralizada no professor - considerando que os estudantes, com algum apoio, podem produzir conhecimento - devemos pensar em criar condições que possibilitem a implementação de estratégias didáticas diferenciadas, dando importância ao reconhecimento dos erros, explicitando-os, e aprendendo com eles. Nesta perspectiva, o ensino é visto como um diálogo não-linear, com foco no processo e nas conexões entre os conhecimentos; promovendo reflexões acerca dele em vez de ensinar apenas "o que" e "como" lhe foi ensinado.

Assim, o aprendizado em ambiente de GD exige mudanças de paradigmas - tanto da aprendizagem da matemática, quanto do seu ensino. Para isso, pudemos constatar que um único curso diferenciado não é o suficiente para que ocorram tais mudanças. Devemos, pois, fazer com que ambientes como esse - onde se possa refletir sobre práticas pedagógicas ao mesmo tempo em que lacunas do conhecimento disciplinar possam ser expostas e dirimidas - estejam presentes em uma boa parte da formação deste professor.

Capítulo 5

Conclusões

O fato de uma experiência produzir o mesmo resultado mil vezes não é prova de que os resultados seguintes serão consistentes. Até Scheherezade pode contar uma história desfavorável na milésima segunda noite.

(KASNER & NEWMAN, 1968)

5.1 Os pressupostos teóricos na análise da pesquisa

Neste trabalho, buscamos interseções entre duas linhas de pesquisa que ganham renovado interesse dentro da pesquisa educacional. Por meio dos dados obtidos em nossa pesquisa-ação, pudemos observar que é possível colocar em relação direta importantes interesses destas linhas de pesquisa.

A importância de um conhecimento da disciplina por diferentes perspectivas, estabelecendo relações entre os tópicos do conteúdo disciplinar - como tratado por Shulman (1986, 1987) e Ball (1988a) - pode ser tratada em um ambiente como o de nossa pesquisa, onde o professor em formação tem a oportunidade de revisitar assuntos da matemática; como, por exemplo, Funções Reais, Cônicas e Trigonometria sob uma ótica diferenciada e de forma não-fragmentada.

Por diversas vezes, pudemos constatar que o licenciando não traz conhecimentos prévios suficientes para sua formação, no sentido considerado por Ma (1999). Em nossa pesquisa, tivemos a oportunidade de expor este fato e fornecer um ambiente de reflexão visando que estas lacunas fossem atenuadas, como mostrado no *Exemplo 1_03* sobre o conhecimento de altura de um triângulo e no *Exemplo 4_01* sobre a distinção entre variável, incógnita e parâmetro de uma função real.

Buscamos compor um ambiente de aprendizagem desenhado por atividades que estimulassem uma participação ativa de situações de ensino e aprendizagem de matemática por meio da utilização de uma nova ferramenta. A reflexão acerca do que era realizado possibilitou construção de conhecimento do futuro professor, como ilustrado no *Exemplo 1_02* , sobre a experimentação do segmento que determina a menor distância entre um ponto e uma reta; e no *Exemplo 4_02* sobre o estudo de cônicas pela geometria sintética. Nesse ambiente, a aprendizagem do licenciando vira objeto de reflexão, como tratado por Llinares (2004); considerando a relação *formador → licenciandos* e a relação *(futuro) professor → (futuros) alunos* a partir dos mesmos constructos teóricos.

Tratar tópicos de matemática utilizando GD ofereceu a oportunidade de se trabalhar matemática com os futuros professores - como recomendado por Ball (1988b) - em uma perspectiva onde a aprendizagem estava mais voltada para a (re)construção individual de conceitos do que para um processo de incorporação de conhecimentos prescritos; como podemos ver retratado no *Exemplo 2_03* sobre a discussão e experimentação no que diz respeito à equivalência entre diferentes definições de um objeto geométrico e no *Exemplo 4_03* a respeito da reflexão sobre conceitos pertinentes ao estudo de trigonometria e funções trigonométricas.

Este ambiente também pode se mostrar relevante para a pesquisa em ensino de matemática no sentido de fornecer informações sobre a compreensão dos cursistas. Analogamente ao defendido por Hasche (2008), este modelo de ensino propiciou ao formador a oportunidade de colocar os licenciandos frente a problemas adjacentes aos assuntos tratados, como no caso sobre a dificuldade de estruturar um demonstração visto no *Exemplo 2_04* e sobre confusões sobre o conhecimento da disciplina, como ilustrado no *Exemplo 6_02* , sobre o gráfico de uma função afim com coeficientes variáveis. Também pudemos colocar os cursistas frente a obstáculos didáticos da disciplina, buscando fornecer condições para superá-los; como a compreensão de limite ilustrado no *Exemplo 4_04* (sobre construção de uma reta tangente ao gráfico de uma função real) e sobre representação de objetos do espaço tridimensional mostrado no *Exemplo 5_02*.

Em contrapartida, também devemos estar alertas para os cuidados a serem tomados em um curso como o de nossa pesquisa. Estudos como Hunter et al. (1993) apontam que o uso indiscriminado de ferramentas computacionais pode gerar problemas de aprendizagem. Assim, é importante que seja avaliado como os cursistas utilizariam tal tecnologia com seus alunos e como trabalhar o conhecimento didático da matéria com o futuro professor. Neste sentido, Mattos (2007) comenta:

> O professor, ao introduzir uma ferramenta tecnológica, deve orientar-se por objetivos e competências a serem adquiridas pelos estudantes, caso contrário, a introdução de tecnologia transforma-se apenas em 'perfumaria' no ensino.
>
> (MATTOS, 2007, p.59)

Assim, o formador deve se preocupar em salientar que o uso de GD deve se dar quando atingir algum objetivo didático que os outros meios não atingem; quando o seu uso realmente fizer diferença. Também é importante que fique muito claro para o licenciando, durante seu aprendizado de matemática com GD, que esta ferramenta não seja vista como um 'validador de conhecimentos matemáticos'; fazendo com que tal ponto de vista também não esteja presente em futuras utilizações com seus alunos. O formador deve se preocupar em trabalhar a utilização desta tecnologia voltada para o caráter conceitual da disciplina; fazendo com que seu uso motive novos conhecimentos da matéria.

5.2 Discussão global e perspectivas

Os resultados deste estudo foram obtidos a partir de uma abordagem pedagógica com um objetivo específico: investigar como o aprendizado de matemática utilizando geometria dinâmica pode auxiliar na formação inicial de professores. Tanto o planejamento das tarefas quanto o papel de formador foram orientados sob esta ótica. Neste sentido, os resultados, embora não possam ser generalizados, certamente servem como indicadores de ações possíveis na direção pretendida.

Em nossa avaliação, este estudo pode fornecer subsídios para o planejamento de uma pedagogia com a perspectiva de buscar ambientes que motivem a produção de uma forma diferenciada de formar professores de matemática. Uma abordagem com esta orientação pode atuar de forma efetiva em pontos importantes da formação docente, podendo levar a desdobramentos - talvez de forma significativa - nos pressupostos de como aprender e ensinar esta disciplina.

Acreditamos que a utilização da GD em disciplinas de um curso de formação de professores tem um potencial de trazer benefícios a esta formação e à futura prática dos licenciandos, uma vez que isto pode oferecer como perspectivas de formação:

- apresentar uma visão mais integrada sobre a natureza da matemática;
- promover hábitos de reflexão sobre a disciplina a ser ensinada e sobre como ensiná-la;
- desenvolver habilidades para a aplicação de técnicas diversificadas, buscando alternativas pedagógicas aplicáveis ao contexto de ensino proposto;
- permitir que o futuro professor ofereça a seu aluno um ambiente onde é possível elaborar conjecturas, refletir em cima de um erro cometido, interpretar relações entre objetos e oferecer tentativas de explicações matemáticas;
- oferecer acesso direto a alicerces teóricos da matemática;
- viabilizar conexões entre os temas matemáticos dos cursos de graduação e os tópicos da matemática elementar.

Pretendemos contribuir para a oferta de uma concepção de formação docente que observe a utilização da tecnologia computacional para o tratamento de itens relevantes para um bom ensino de matemática, visando medidas que possibilitem ao professor buscar seu aprimoramento. No entanto, para que a inserção de tecnologias computacionais na educação faça parte da prática acadêmica e profissional dos professores, algumas mudanças de diferentes ordens ainda se fazem necessárias.

No que diz respeito ao licenciando, este trabalho de pesquisa mostrou que um único curso diferenciado (mesmo sendo um curso de um semestre inteiro utilizando este tipo de ferramenta) não é suficiente para que ocorram mudanças significativas em sua postura acerca de como lidar com uma nova ferramenta para o aprendizado e ensino de matemática.

Portanto, um ponto importante a ser considerado para a implementação deste tipo de prática diz respeito à própria constituição dos saberes docentes no meio universitário: este deve observar a introdução de dispositivos de formação pertinentes e úteis para a prática profissional dos professores.

No tocante à pesquisa acadêmica, ainda precisamos de aplicações mais amplas dos estudos com licenciandos ligados à implementação de novas tecnologias no ensino. O histórico de pesquisas sobre a utilização de GD não nos mostra uma preocupação em considerá-la em cursos de licenciatura. Deve-se habilitar os futuros professores a lidar com esta situação de ensino, bem como desenvolver materiais instrucionais específicos baseados nas novas ferramentas.

Trabalhos neste sentido devem dar lugar a uma visão sistêmica mais ampla; colocando o foco sobre o professor, devido ao seu óbvio papel central neste processo. Em linhas gerais, é necessário aumentar o quadro teórico deste tipo de pesquisa: em vez de avaliar apenas um experimento didático, deve-se procurar compreender o longo processo de construção de saberes e práticas do professor que permitam mudanças no contexto das salas de aula.

Referências

ABRAHÃO, A.M.C., 1998. *O comportamento de professores frente a alguns gráficos de funções* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *obtidos com novas tecnologias.* Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

ANDRÉ, M. E. D., 1995. *Etnografia da prática escolar.* Campinas: Papirus

ARTIGUE, M., 2007. Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. In, D. Pitta-Oantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of CERME 5*, pp. 68-82. Cyprus University Editions.

BALDIN, Y.Y., 2002. *Uma nova disciplina no Currículo de Licenciatura em Matemática: Informática aplicada ao ensino.* I Bienal da SBM, Depto. de Matemtica - Icex/UFMG.

BALL, D.L., 1988a. *The subject matter preparation of prospective mathematics teachers: Challenging the myths.* National Center for Research on Teacher Education, College of Education, Michigan State University, Disponível em: <http://ncrtl.msu.edu/research.htm>. Acessado em: 02/05/2009

BALL, D.L., 1988b. *Unlearnring to teach mathematics.* Disponível em: <http://ncrtl.msu.edu/ipapers/html/pdf/ip881.pdf>. Acessado em: 06/08/2008

BALL, D. L., 1993. *With an Eye on the Mathematical Horizon: Dilemmas of Teaching Elementary School Mathematics.* The Elementary School Journal, The University of Chicago, v.93, n.4.

BALL, D.L., 2000. Bridgind practices: intertwinig content and pedagogy in teaching and learning to teach. In: *Journal of teacher education*, v.51, n.3, mai/jun, p. 241-247

BALL, D. L., 2003. *What mathematical knowledge is needed for teaching mathematics?* Apresentação. Secretary's Summit on Mathematics, U.S., Washington D. C. Departamento de Educação.

BALL, D.L.; HILL, H.C. & BASS, H., 2005. Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? In: *American Educator*. Fall 2005.

BELFORT, E. & GUIMARÃES, L.C., 1998. O papel do software educativo na formação continuada de professores de matemática. In: *Anais do VI Encontro Nacional de Educação Matemática*, volume 2, pp. 104-107. Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

CBMS - CONFERENCE BOARD OF MATHEMATICAL SCIENCES, 2001. *The Mathematical Education of Teachers.* Issues in Mathematics Education, volume 11, American Mathematical Society, USA.

CORNU, B. & RALSTON, A., (Eds.), 1992. *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching.* Science and Technology Education. Document Series 44. Paris: UNESCO.

DOERR, H.M. & ZANGOR, R., 2000. *Creating meaning for and with the graphing calculators.* Educational Studies in Mathematics, 41 (2), pp. 143-163.

EISENHART, M. et al., 1993. *Conceptual Knowledge falls through the cracks: complexities of learning to teach mathematics for understandings.* Journal for Research in Mathematics Education, 1993, v. 24, n. 1, p. 8-40.

GIRALDO, V., 2004. *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada.* 221 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.

GIRALDO, V. & CARVALHO, L. M., 2008. Uma Breve Revisão Bibliográfica sobre o Uso de Tecnologia Computacional no Ensino de Matemática Avançada. In: Luiz Mariano Carvalho; Helena N. Cury; Carlos A. de Moura; John Fossa; Victor Giraldo. (Org.). *História e Tecnologia no Ensino da Matemática.* 1ª ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008, v. 2, p. 153-206.

GONÇALVES, T., 2000. *Formação e desenvolvimento profissional de formadores de professores: o caso dos professores da UFPa.* Tese (Doutorado) - Doutorado em Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. Orientador: Dario Fioretini

GRAVINA, M.A., 1996. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria. In: *Anais do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação.* Belo Horizonte, MG.

HARTSHORNE, R., 2000 *Geometry: Euclid and beyond.* New York, Springer.

HASCHE, F., 2008. Aprendizagem de funções reais utilizando geometria dinâmica. In: *IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática - HTEM.* Rio de Janeiro. Anais do IV HTEM. Rio de Janeiro: UFRJ.

HAZZAN, O. & GOLDENBERG, E.P., 1997. *Students' understanding of the notion of function in dynamic geometry environments.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 1, pp. 263-291.

HUNTER, M.; MONAGHAN, J.D. & ROPER, T., 1993. The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking. In R. Sutherland (ed.) *Working Papers 215 for ESCR Algebra Seminar.* London University, Institute of Education, London, England.

JONES, K., 2002. *Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom.* MicroMath,18 (3), 18-20. Disponível em http://eprints.soton.ac.uk/14689/

KAHANE, J.P., et al., 2003. *Commission de Réflexion sur L'enseignement des mathématiques. La formation des maîtres en mathématiques.* 90p., em: <http://smf.emath.fr/Enseignement/CommissionKahane/RapportFormation Maitres/Formation-des-maitres.pdf>

KASNER, E. & NEWMAN, J., 1968. *Matemática e Imaginação.* Rio da Janeiro: Zahar.

KUHS, T. M. & BALL, D. L., 1986. *Approaches to teaching mathematics: Mapping the domains of knowledge, skills, and dispositions* (Research Memo). East Lansing, MI: Michigan State University, Center on Teacher Education.

LABORDE C., 2000. *Dynamic Geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving.* Educational Studies in Mathematics 44 (1-3), 151-161.

LABORDE C.; KYNIGOS C.; HOLLEBRANDS K. & STRÄSSER R., 2006. Teaching and Learning Geometry with Technology, in A. Gutiérrez, P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future*, p. 275-304. Rotterdam: Sense Publishers.

LAGRANGE, J.B., 2003. *Analysing the Impact of ICT on Mathmatics Teaching Practices.* Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, Italia.

LAUDARES, J.B. & LACHINI, J., 2000. *O uso do computador no ensino de matemática na graduação.* 23ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação. Caxambu, Brasil. Disponível em: www.anped.org.br

LEGENDRE, A.M., (2003) *Elementos de Geometria* Tradutor: GUIMARÃES, M.F.A., Editor: GUIMARÃES, L.C., UFRJ, 2003.

LLINARES, S. et al., 2004 Prspective teachers, future teachers: a proposal of pre-service primary teacher education in mathematics education. In: *Proceedings of International Conference of Mathematics Edication (ICME)*, Dinamarca.

MA, L., 1999. *Knowing and teaching elementary mathematics.* London, Lawrence Erlbaum Associates.

MATTOS, F.R.P., 2007. *Roteiros de colaboração para o software Tabulae: estratégias didáticas para um modelo de aprendizagem colaborativa apoiada por computador à distância em geometria.* 289 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro.

OLIVEIRA, A.T.C.C., 2007. *Saberes e práticas de formadores de professores para o ensino de matemt́ica nas séries iniciais* Tese (Doutorado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

PERRENOUD, P., 2002. *A prática reflexiva no ofício de professor: profissionalização e razão pedagógica.* Porto Alegre: Artmed Editora.

POLYA, G., 1975. *Arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático.* Editora Interciência, Rio de Janeiro.

REALI, A. M. & LIMA, S. M., 2002. O papel da formaçõ básica na aprendizagem profissional da docência. In: REALI, A. MIZUKAMI, M. (orgs) *Formação de professores: Práticas Pedagógicas e Escolas*, São Carlos: EdUFSCar, p.217-235.

SHULMAN, L., 1986. Those who understand: knowledge growth in teaching. In: *Educational Ressearcher*, v.15, n.2, p.4-14.

SHULMAN, L., 1987. Knowledge and teaching: foudations of the new reform. In: *Harvard Educational Review*, v.57, n.1, p.1-22.

SZTAJN, P., 2002. O que precisa saber um professor de Matemática? Uma revisõda literatura americana dos anos 90. In: *Educação Matemática em Revista*, SBEM, n.11, abril.

TARDIF, M., 2002. *Saberes docentes e formação profissional.* Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

TINOCO, L.A.A., 2004. *Geometria Euclidiana por meio da resoluo de problemas*, 2ª ed. - Rio de Janeiro: UFRJ/IM, Projeto Fundão

YERUSHALMY, M., 1997. *Reaching the unreachable: Technology and the semantics of asymptotes.* International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2, pp. 1-25.

Software de Referência

Calques 3D v.2.4.1: Van Labeke N., 1997. LORIA - Université Henri Poincaré/Nancy I. www.calques3d.org

GeoGebra v.3.0: Dynamic Mathematics for Schools: Markus Hohenwarter, 2001-2007. http://www.geogebra.org

Tabulae Colaborativo v.1.2.1.25: Barbastefano, R.; Guimarães, L. C. et al. (designers). Educational Software Copyright by the authors. Rio de Janeiro: UFRJ, 2007. http://www.tabulae.net