



Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

ALEXANDRE MACHADO SOUTO

Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos
da Educação Básica

Rio de Janeiro, RJ – Brasil
2010

ALEXANDRE MACAHADO SOUTO

Análise dos Conceitos de Número Irrracional e Número Real em Livros Didáticos
da Educação Básica

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Programa de Pós-Graduação em Ensino
de Matemática, Instituto de Matemática,
Universidade Federal do Rio de Janeiro –
UFRJ, como parte dos requisitos
necessários à obtenção do título de
Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Victor Augusto Giraldo
Co-Orientador: Alejandro Santiago
González - Martín

Rio de Janeiro, RJ – Brasil

2010

Souto, Alexandre Machado, 2010

Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica / Alexandre Machado Souto – Rio de Janeiro, 2010.

xiv, 106 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM, 2010.

Orientador: Victor Augusto Giraldo.

Co-orientador; Alejandro Santiago González - Martín.

1. Problemática do ensino de números reais da educação básica à superior. 2. Revisão bibliográfica. 3. Fundamentação teórica. 4. Metodologia. 5. Análise e interpretação de dados. 6. Considerações finais.

I. Universidade Federal do Rio de Janeiro. II. Instituto de Matemática. III. Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica.

ALEXANDRE MACAHDO SOUTO

Análise dos Conceitos de Número Irrracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Victor Augusto Giraldo
Instituto de Matemática - UFRJ
Orientador/Presidente da Banca Examinadora

Prof. Dr. Alejandro Santiago González – Martín
Université de Montréal
Co-orientador

Prof. Dr. Nei Carlos dos Santos Rocha
Instituto de Matemática - UFRJ

Prof^a. Dr^a. Tatiana Marins Roque
Instituto de Matemática - UFRJ

Prof. Dr. Carlos Eduardo Mathias Mota
Universidade Federal Fluminense

Aprovado em: 03 de março de 2010.

Local de defesa: Sala C-116, bloco C – Instituto de Matemática, campus da Universidade Federal do Rio de Janeiro.

*Não consideres que valha a pena proceder
escondendo evidências, pois as evidências
inevitavelmente virão à luz.
Bertrand Russel.*

Dedicatória

*À minha mãe Maria Aparecida
Machado Souto, por ter abdicado
de sua vida em favor da minha.*

*À minha amada esposa Jéssica Leite e
as minhas filhas Linda Gabrielly e Emanuely,
bênçãos de Deus pra minha vida.*

Agradecimentos

A Deus por amar, por compreender sempre, por dar de si mesmo, e sacrificar-se para que a luz divina do verdadeiro amor resplandeça em nós.

À minha família, em especial, a figura de meu avô Jorge Melo (In memorian) pelo exemplo de luta em todos os dias e a minha mãe, Maria Aparecida, que além de tudo preencheu a falta da figura paterna. Mãe, não desisti por você.

À minha amada esposa, Professora Jéssica Leite Silva Machado, pelo amor, carinho e companheirismo, fundamentais em muitos momentos desta caminhada.

À minha maravilhosa filha, Linda Gabrielly por me receber com o sorriso lindo após cada dia de trabalho.

À minha maravilhosa filha, Emanuely por nascer em um momento tão difícil e iluminar a casa com sua presença.

Ao meu orientador, Victor Giraldo, pela pessoa humana que é, pelo exemplo de mestre, pela sugestão do tema, por fazer além do que a posição de orientador o exigia, por ter sido decisivo e fundamental na finalização desse trabalho.

Ao meu Co-orientador, Alejandro González, pelo profissionalismo, pela competência, por cada comentário (foram muitos) dado ao trabalho, por cada sugestão, por toda atenção e por se fazer muito presente e decisivo apesar da distância física. Aprendi muito.

Ao amigo Wellerson Silva pelos dias inteiros de estudos e de conversa sobre matemática, sem dúvida aprendi muito mais do que em supostas aulas.

Aos membros da Banca de Qualificação e de Defesa, Professor Nei Rocha, Professora Tatiana Roque, Professora Stefanella e Professor Carlos Mathias, pelas valiosas sugestões.

Aos colegas e professores do Mestrado da turma 2007, pelo valioso aprendizado em nossa convivência.

A professora Maria Darci pela doçura e competência, a professora Lucia Tinoco pelo exemplo de vitalidade e competência e a professora Elizabeh Belfort por ter sido fundamental na criação de minha monografia de graduação.

Ao amigo de graduação, Ricardo Duarte, pelo companheirismo e pelas valiosas caronas. Foram necessárias e fundamentais.

A todas as pessoas que trabalham para que o programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática seja um pólo gerador de mudanças.

A todos os amigos de trabalho, em especial, a galera do Pedro II, por estarem sempre acreditando que podemos fazer diferente.

A todos os meus alunos que diariamente me lembram da minha responsabilidade, da onde vim e de onde nunca devo sair: escola pública.

Às diretoras da escola municipal CIEP 015 – HENFIL por proporcionar a licença para estudos.

À secretaria de educação do município de Duque de Caxias por ter me concedido licença para estudos.

A todos que de alguma forma influenciaram a mudança de trajetória em minha caminhada.

RESUMO

Esta pesquisa tem por objetivo principal descrever como o conceito número real é apresentado nos livros didáticos brasileiros. A escolha do conceito de número real como foco deste trabalho deve-se à importância do conjunto dos números reais como alicerce da matemática superior e à grande gama de dificuldades de alunos e professores apontadas na literatura. Nosso trabalho está fundamentado na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval (2003) e na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1999). Os procedimentos metodológicos estão centrados em quatro temas de análise: definições, representações, tarefas e abordagem histórica. De forma geral, nossa análise sugere que a abordagem dos livros didáticos privilegia: definições baseadas na representação decimal; tarefas envolvendo procedimentos como classificação como racional e irracional e determinação de frações geratrizes; registros de representação simbólico-algébricos; notas históricas enfocando nomes e datas. Entretanto, tais atividades são tratadas de forma mecânica e com pouco ou nenhum aprofundamento conceitual.

Palavras-chave: Número irracional, número real, livro didático, representação semiótica, teoria antropológica do didático.

ABSTRACT

The aim of this research is to describe how the concept of real number is presented in the middle and high school Brazilian books. The importance of real numbers as a basis for undergraduate mathematics, as well as a great number of difficulties experienced both by students and teachers, pointed out by the literature, have motivated this work. Duval's theory of the registers of semiotic representation (2003) and Chevallard's anthropological theory of the didactic (1999) were used as the theoretical basis for this research. The methodological procedures are concentrated in four topics: definitions, representations, tasks, and use of historical references. In general, our analysis shows that Brazilian text-books privilege: definitions based on decimal representations; tasks involving procedures like classifying a number as rational or irrational, and the determination of generator fractions for decimal writings; symbolic-algebraic representations; and historical references reduced to names and dates. Moreover, these activities are mechanically treated by the authors with little, or without any, deep conceptualization of the concept of real number.

Key-words: irrational numbers, real numbers, semiotic representations, anthropological theory of didactic.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA DO ENSINO DE NÚMEROS REAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA À SUPERIOR.....	15
CAPÍTULO 2: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	20
2.1 Dificuldades em torno da definição e representação de número irracional.....	21
2.2 Dificuldades em torno da propriedade de densidade.....	23
2.3 Dificuldades em torno da propriedade de cardinalidade.....	24
2.4 Dificuldades em torno da propriedade de completude.....	23
CAPÍTULO 3: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	27
3.1 Teoria de Registros de Representação Semiótica.....	27
3.2 Teoria Antropológica do Didático.....	32
CAPÍTULO 4: METODOLOGIA.....	36
4.1 Questões de pesquisa	36
4.2 Os livros selecionados.....	43
4.3 Procedimentos metodológicos para a análise de livros didáticos.....	46
CAPÍTULO 5: ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS.....	64
5.1 Análise e algumas reflexões.....	64
5.1.1 Matriz tipos de definições.....	64
5.1.2 Matriz tipos de representações.....	66
5.1.3 Matriz tipos de abordagem histórica.....	68

5.1.4 Matriz tipos de tarefas.....	69
CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	97
6.1 Respondendo as questões de pesquisa.....	97
6.2 Contribuições de pesquisa.....	100
6.3 Desdobramentos.....	101
BIBLIOGRAFIA.....	103

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.1: O número 2.....	15
Figura 3.1: Hipótese para aprendizagem dada por Duval.....	31
Figura 4.1: Ilustração de exercício resolvido.....	48
Figura 4.2: Ilustração de exercício complementar.....	49
Figura 4.3: Ilustração de exemplo.....	49
Figura 4.4: Ilustração de propriedade.....	50
Figura 4.5: Ilustração de definição.....	50
Figura 4.6: Ilustração de abordagem histórica.....	51
Figura 4.7: Ilustração de representação.....	51
Figura 4.8: Ilustração de tarefa que envolve classificar utilizando relação de pertinência.....	53
Figura 4.9: Ilustração de tarefa que envolve classificar entre racional ou irracional.....	53
Figura 4.10: Ilustração de tarefa que envolve classificar em verdadeiro ou falso.....	54
Figura 4.11: Ilustração de tarefa que envolve encontrar a fração geratriz.....	54
Figura 4.12: Ilustração de tarefa que envolve obter número irracional entre dois números dados.....	55
Figura 4.13: Ilustração de tarefa que envolve calcular utilizando aproximação.....	56
Figura 4.14: Ilustração de tarefa que envolve escrever sequência de irracionais.....	56
Figura 4.15: Ilustração de tarefa que envolve representar números na reta real.....	57
Figura 4.16: Ilustração de tarefa que envolve intervalo numérico.....	57
Figura 4.17: Ilustração de exemplo de definição.....	59
Figura 4.18: Ilustração de exemplo de propriedade.....	59
Figura 4.19: Ilustração do tipo de definição D_A	60
Figura 4.20: Ilustração do tipo de definição D_B	60
Figura 4.21: Ilustração do tipo de definição D_C	60

ÍNDICE DE TABELAS

TABELA 3.1: Classificação dos registros mobilizáveis no funcionamento matemático.....	29
TABELA 4.1: Matriz preliminar.....	47
TABELA 4.2: Matriz preliminar tipo de tarefas.....	52
TABELA 4.3: Matriz preliminar tipo de definição.....	58
TABELA 4.4: Matriz preliminar tipo de representação.....	61
TABELA 4.5: Matriz preliminar tipo de abordagem histórica.....	62
TABELA 5.1: Matriz tipo de definição apresentadas.....	64
TABELA 5.2: Matriz tipo de representação apresentadas.....	67
TABELA 5.3: Matriz tipo de abordagem histórica apresentadas.....	68
TABELA 5.4: Matriz tipo de tarefas apresentadas.....	69

CAPÍTULO 1: PROBLEMÁTICA DO ENSINO DE NÚMEROS REAIS DA EDUCAÇÃO BÁSICA À SUPERIOR

Já no início da escolarização, no ensino de matemática elementar, os alunos desenvolvem ideias fundamentais em relação ao conceito de número contando ou ordenando elementos. A necessidade de criação de números veio com a necessidade de contar. Para Russel (p.60, 1966) “número é a classe de todas as classes equivalentes a uma dada classe.” Uma criança definitivamente não entenderia essa definição, porém seria capaz de identificar uma propriedade comum aos três conjuntos abaixo e identificá-la como o número “dois”, que é o resultado do processo de contagem de cada conjunto, desconsiderando a natureza dos elementos e a ordem segundo a qual estão organizados.



Figura 1.1: o número 2.

Já no 6º ano de escolaridade os alunos revisitarão os números, agora inseridos em um contexto mais formal: *como elementos do conjunto dos números naturais*. Este novo contexto inclui a formalização de propriedades importantes: o conjunto dos números naturais possui um menor elemento, todo número natural possui um único sucessor, a soma de dois naturais é um número natural, o produto de dois números naturais é um número natural, etc. A natureza dos elementos do conjunto dos números naturais e as propriedades citadas garantem o processo de contagem infinita através da função sucessor e estabelece uma estrutura algébrica bem definida.

No conjunto dos números naturais sabemos que as operações de adição e multiplicação estão bem definidas, porém não é sempre que a diferença entre dois naturais resultará em outro natural. Essa limitação, para o ensino, justifica a necessidade de criar outro conjunto de números, o dos inteiros, que contenha os naturais, que seja consistente com suas propriedades, operações, estrutura e que seja tal que a diferença esteja bem definida. De forma análoga, no caso dos inteiros, o fato da operação de divisão não ser fechada, justifica, para o ensino, a

necessidade de criar outro conjunto de números, o dos racionais. Do ponto de vista matemático, este processo de expansão de sistemas numéricos é por essência abstrato. Do ponto de vista do ensino, por outro lado, envolve desconstrução e reconstrução de saberes. Como David e Moreira (p. 49, 2007) apontam, o processo de expansão numérica proporciona *“um processo de acomodação do ‘novo’ conhecimento e desconstrução de um estágio diferenciado de compreensão do conhecimento antigo”*.

Ao final das etapas de expansão – natural \rightarrow inteiro \rightarrow racional – espera-se que os alunos tenham a ideia de número racional como representante de uma razão entre medidas inteiras. Assim, a noção de número transita entre diferentes ideias: da ideia de contar à ideia de medir; das noções intuitivas de contagem, comparação e medição à noção formal de estrutura algébrica. Para todas essas etapas são exigidas do aprendiz muitas reelaborações de esquemas cognitivos (DAMM, 2002).

Porém, uma questão fundamental é a seguinte: Dadas duas magnitudes (de mesma espécie) quaisquer, é possível encontrar um unidade comum em relação à qual as medidas de ambas sejam inteiras? Em outras palavras: É possível representar a comparação entre duas magnitudes quaisquer como uma razão entre números inteiros? A história nos mostra que esta foi uma questão central no desenvolvimento da matemática na Grécia antiga (EVES, 2004). De fato, a constatação de que o lado e a diagonal do quadrado fornecem um contra-exemplo para a questão, levou ao conceito de magnitudes incomensuráveis e à reformulação por Eudoxo da definição de proporção dos pitagóricos – o que por, sua vez constituiu-se em um novo paradigma para o pensamento matemático grego. Do ponto de vista da matemática moderna, esta questão está na gênese do conceito de número real.

Até este momento, para o ensino, as limitações que motivavam a expansão de cada conjunto número estavam relacionadas ao não fechamento das operações – isto é, eram de natureza puramente algébrica. Agora, na passagem para os números reais, temos a impossibilidade de representar certas medidas como razão de inteiros. Seria natural, nessa etapa, pensar em uma expansão numérica que criasse um novo conjunto contendo os racionais, que fosse consistente com sua estrutura e que pudesse representar todas as medidas de grandezas. Do ponto de vista matemático, esta não é uma passagem de natureza algébrica, como as anteriores e sim aritmética. Sabemos que o “novo” conjunto que satisfaz tais

condições é o conjunto dos números reais e que sua construção não é uma tarefa tão simples. Então, o que é o objeto matemático número real? Sua introdução, na educação básica, pode proporcionar obstáculos diferentes daqueles associados com os conjuntos numéricos anteriores? Entretanto, em muitos casos as abordagens no ensino básico parecem não considerar as implicações cognitivas das extensões de cada conjunto numérico, especialmente quando são introduzidos os números reais a partir dos racionais. Será que é razoável esperar que os alunos no ensino formem uma imagem adequada do conjunto dos números reais, suas propriedades e seus significados, sem que sejam discutidos criticamente os níveis de conhecimento em torno dos irracionais?

Por outro lado, nos cursos universitários de matemática, em particular nos cursos de licenciatura, a abordagem das disciplinas iniciais de cálculo parece ser baseada na suposição de que os alunos dominam certas questões, tais como:

- A estrutura algébrica dos reais (como o fato das operações estarem bem definidas).
- A estrutura topológica dos reais (como a propriedade de completude da reta).
- A ideia intuitiva de limite de funções.

Esta postura tem paralelo com a adotada na educação básica, uma vez que muitos fatos são assumidos sem nenhum questionamento, como se sua veracidade fosse óbvia para os alunos. Mais adiante, nos cursos de Análise, um número real é em geral conceituado de várias formas:

- Um elemento do único corpo ordenado completo.
- Um corte de Dedekind, isto é, um par (A, B) de subconjuntos não-vazios e complementares de \mathbb{Q} tais que A não possui máximo, todo elemento de A é cota inferior de A , e todo elemento de B é cota superior de A .
- Uma classe de equivalência de seqüências de Cauchy de números racionais, segundo a seguinte relação: duas seqüências são equivalentes se e somente se a diferença entre elas converge para zero.

Embora as três construções acima sejam diferentes, estas geram estruturas mutuamente isomorfas, o que esgota a questão do ponto de vista matemático. No entanto, a diferença das construções tem implicações cognitivas na maneira como os estudantes conceituam números reais. Estas construções equivalentes também resolvem todas as questões acerca da estrutura dos números reais, como: *O que é um irracional? O que é operar dois irracionais? O símbolo $\pi^{\sqrt{2}}$ representa um número real? Este número é irracional? E o número $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ é irracional? Que conjunto é “maior”: racionais ou irracionais? Entre dois reais sempre existe um racional? E um irracional? É possível definir a noção de sucessor em \mathbb{R} ? Há uma correspondência entre a reta e \mathbb{R} ?* Além disso, o conhecimento destas questões do ponto de vista puramente formal é suficiente para equipar o futuro professor para o ensino de números irracionais?

A discussão acima sugere que há grandes saltos no ensino de números reais, tanto na passagem do ensino médio para o ensino superior quanto na passagem das disciplinas iniciais para as avançadas nos cursos de graduação. Em particular, estes saltos podem acarretar em deficiências na preparação do professor para o ensino de números reais – o que pode acarretar em ciclo vicioso.

Além das questões levantadas anteriormente, encontramos constatações que destacam dificuldades de alunos, professores e futuros professores sobre os conceitos de número real, tanto em pesquisas nacionais (e.g. SOARES, FERREIRA e MOREIRA, 1999; PENTEADO, 2004; DIAS, 2002), quanto internacionais (e.g. SIROTIC e ZAZKIS 2004, ZAZKIS e SIROTIC 2007; BERGÉ 2004, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b; BERGÉ e SESSA, 2003; FISCHBEIN, JEHAN e COHEN, 1995). Algumas dessas pesquisas sugerem que as dificuldades podem influenciar a aprendizagem de conceitos mais avançados. Essas dificuldades envolvem classificação errônea de números em racional ou irracional, desconhecimento de propriedades como densidade e completude dos reais e não enumerabilidade dos irracionais. Algumas concepções são apontadas nesse sentido: classificação de que número irracional é aquele que possui representação ilimitada, mesmo sendo uma representação decimal periódica; concepção de que duas grandezas são sempre comensuráveis; representação de π como sendo 3,1416; classificação de 3,1416 como sendo irracional; a definição de números irracionais como sendo somente aqueles com representação

como raízes; noção de existência de sucessor para números reais; noção de que um número irracional é não exato ou não é inteiro; classificação redundante de que número irracional como aquele que não é racional e por sua vez de número real como aquele que é racional ou irracional; dentre outras.

Com base na problemática descrita acima e nos resultados de pesquisa, buscamos criar uma metodologia de análise de livros didáticos para que possamos responder as seguintes perguntas iniciais:

- Como o conceito número irracional / real é organizado nos Livros Didáticos da Educação Básica, no Brasil? Que registros de representação são empregados?
- Como essa organização se propõe a promover a aquisição do conhecimento número irracional / real?

CAPÍTULO 2: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No que diz respeito ao estudo dos números irracional / real, veremos na revisão de literatura a constatação de que muitos alunos chegam ao final do curso fundamental e médio com conhecimento insuficiente, o que sugere que é dado um tratamento inadequado para os números e operações entre eles. É demasiada a limitação ao apresentar, na educação básica, apenas o cálculo com radicais como exemplo de operação e $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π como únicos exemplos de irracionais. Acreditamos que esse fato aconteça devido à má formação em nível superior dos futuros professores e à maneira pela qual tais conceitos são apresentados nos livros didáticos. Ou seja, os futuros professores ministrarão em sala de aula aquilo que encontram nos livros didáticos, pois o que é tratado nos cursos de licenciatura é de certa forma distante e desconectado das problemáticas que envolvem o ensino desses conceitos na Educação Básica. É certo que uma apresentação formal da construção dos números reais em nível da Educação Básica não é conveniente, entretanto é pertinente que o professor saiba do desenvolvimento histórico desse conteúdo e suas implicações, por exemplo, no estudo do cálculo infinitesimal.

Pesquisas brasileiras (e.g. SOARES, FERREIRA e MOREIRA 1999; PENTEADO 2004; DIAS 2002) e internacionais (e.g. SIROTIC e ZAZKIS 2004, ZAZKIS e SIROTIC 2007; BERGÉ 2004, 2006a, 2006b, 2008a, 2008b; BERGÉ e SESSA 2003; FISCHBEIN, JEHIAN e COHEN 1995) apontam dificuldades por parte dos alunos e professores a respeito dos números irracionais e essas certamente podem, por exemplo, acarretar em obstáculos de aprendizagem na educação básica e também na educação superior, no que toca o estudo de limite e continuidade de funções reais.

De forma geral, essas pesquisas destacam dificuldades de alunos e futuros professores em torno do conceito de número irracional-número real nos seguintes aspectos: definição, representação, propriedade de densidade do conjunto dos números racionais e do conjunto dos números irracionais no conjunto dos números reais, cardinalidade, necessidade de criação dos irracionais e completude do conjunto dos números reais.

2.1 Dificuldades em torno da definição e representação de número irracional

Em relação a professores da educação básica, o trabalho realizado por PENTEADO (2004), baseado em uma pesquisa diagnóstica, que investiga a concepção dos professores em relação à densidade dos números reais, destaca que alguns sujeitos associam irracionalidade de um número com a infinitude de sua representação, relacionando a representação decimal infinita, ou o sinal de reticência com número irracional, isto é, o fato de um número ter reticência para simbolizar infinitas casas decimais já o caracteriza como irracional mesmo que nada seja analisado sobre a possibilidade de haver um período o que o caracterizaria como número racional. Estabelece também que os padrões para os irracionais sejam principalmente aqueles associados às raízes quadradas e a ao número π .

O trabalho de SIROTIC e ZAZKIS (2004), que foi baseado em uma pesquisa diagnóstica com 46 professores secundários de matemática, tem por objetivo investigar como as diferentes representações influenciam as respostas dos participantes no que diz respeito à irracionalidade, destaca que mais de 40% dos participantes não reconhecem a representação decimal infinita e não periódica como uma representação de um número irracional. Além disso, mais de 30% dos participantes ou não reconhecem que um número representado por uma fração de inteiros é racional ou reconhecem com justificativas incorretas. Nesse sentido, é sinalizado que há duas fontes interligadas de conflitos responsáveis pelas crenças erradas: aplicação de definição incorreta ou incompleta (“*Se há um padrão, então o número é racional. Portanto 0,12122122212 ... é racional*”) e não entendimento da relação entre frações e decimais e suas representações (“*0,012222 ... não é racional. Eu não posso pensar em qualquer divisão de dois números que obtenha esse decimal*”). Assim, os autores afirmam que um possível obstáculo para o entendimento dos estudantes é a equivalência das duas definições de números irracionais dada na matemática escolar (número irracional possui uma representação decimal infinita e não periódica / número irracional não possui uma representação $\frac{a}{b}$, em que a, b são inteiros com $b \neq 0$). Também é destacado pelas autoras que os participantes têm preferência pelos decimais em relação à representação de fração. No caso de uso de novas tecnologias é apresentada pelos participantes uma tendência em confiar

na representação que a calculadora oferece sobre uma divisão de inteiros e, desconsiderando a representação simbólica da divisão. Esta concepção implica na classificação de $\frac{53}{83}$ como irracional, com base na visualização na calculadora o seguinte numeral 0,6385542 (onde não se identifica nenhum período) após a divisão de 53 por 83. Fica caracterizado assim que a limitação da calculadora pode ser gerador de conflitos, ao exibir um número reduzido de dígitos no seu visor. Também é destacada pelas autoras o mesmo resultado encontrado em PENTEADO (2004) no que diz respeito à confusão entre irracionalidade e representação decimal infinita, independente da estrutura desta representação (periódica ou não periódica). Esta confusão sugere ainda possíveis interpretações pessoais a respeito do termo padrão, como por exemplo, o número 0,1234... é considerado racional pois apresenta um padrão. A pesquisa de PENTEADO (2004) destaca que professores têm dificuldade em entender que representações como 1,333; 1,3330 e 1,332999... representam o mesmo número. A pesquisa de ZAZKIS e SIROTIC (2007), realizada com 62 estudantes e 29 futuros professores e que desejava apresentar as inconsistências entre as diferentes dimensões – formal, algorítmica e intuitiva - do conhecimento dos professores e dos futuros professores secundários de matemática sobre números irracionais, indica que os participantes possuem grande dependência em relação à representação decimal ao efetuar adição e multiplicação de números decimais com infinitas casas decimais da mesma forma com que se é definida para números decimais com finitas casas decimais, isto é, operam a soma (0,111... + 0,222...) como se fosse 0,111 + 0,222. Além disso, foi constatado que 20% dos participantes demonstraram conhecer apenas os números irracionais “genéricos”: $\sqrt{2}$, π ou raízes quadradas em geral.

Em relação a alunos do ensino médio (ou equivalente), o trabalho de FISCHBEIN, JEHIAN e COHEN (1995), realizado na França trata de investigar a interação entre as concepções dos alunos sobre os números reais e a aprendizagem de análise, constatou que a concepção de que um número irracional é um número que não é inteiro ou que é negativo, que número irracional é um número que não é exato e que número racional e o número que possui representação decimal independente da forma. Além disso, foi constatado que os sujeitos associam números que possuem representação decimal a números racionais, esses possuem a concepção de que número irracional é aquele que possui uma representação ilimitada, mesmo

sendo uma representação decimal periódica resultado encontrado também em (PENTEADO (2004), SIROTIC e ZAZKIS (2004) e SOARES, FERREIRA e MOREIRA (1999)). A pesquisa diagnóstica com 84 alunos dos cursos de Matemática da UFMG e da UFSC de SOARES, FERREIRA e MOREIRA (1999) a respeito da imagem de conceito dos sujeitos em relação ao conjunto dos números irracionais destaca que menos de 25% dos entrevistados entendem que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ representa um número e que o significado da incomensurabilidade de dois segmentos, o sentido e a necessidade dos irracionais passam ao largo de quase todas as respostas.

2.2 Dificuldades em torno da propriedade de densidade

Em relação a professores do ensino médio (ou equivalente) o trabalho de DIAS (2002), que foi baseado em uma pesquisa diagnóstica com a hipótese de que as concepções dos professores do ensino fundamental e médio seriam as mesmas apresentadas por estudantes, do mesmo segmento de ensino, a respeito da imagem de conceito e definição de conceito relacionados às propriedades da reta real e, particularmente, à noção de densidade, aponta que os sujeitos possuem: imagem de conceito quase que discreto para os reais por meio de considerações subjacentes à inexistência ou a finitude de números, entre dois reais distintos; ausência de definição de conceito relacionado com o nome densidade; manifestação da definição de conceito a respeito de densidade pela existência da bijeção entre o conjunto dos reais e a reta e a não distinção entre densidade e continuidade. A pesquisa de ZAZKIS e SIROTIC (2007) aponta que é possível que os participantes interpretem mal algumas questões a respeito dos irracionais, pois ignoram o significado matemático das palavras “sempre” e “qualquer”. Isso se verifica em alguns argumentos dos particulares ao responderem alguns itens como: “*É sempre verdadeiro que entre dois irracionais há um racional. Seja $\sqrt{2} = 1,414$ e $\sqrt{3} = 1,732$ existe entre eles $1,6 = \frac{16}{10}$, isto é, pode ser escrita na forma $\frac{m}{n}$ onde $n \neq 0$. Portanto, esta afirmação é verdadeira*”. Essa ação pode determinar um obstáculo extra em relação a propriedade de densidade.

Em relação a alunos, o trabalho de SOARES, FERREIRA e MOREIRA (1999) destaca que cerca de 58% dos entrevistados não afirmaram que existem infinitos racionais e infinitos irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ e apenas 25% conseguiram exibir três irracionais entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ enquanto 44% exibiram 3 racionais.

2.3 Dificuldades em torno da propriedade de cardinalidade.

Em relação a professores, a pesquisa de ZAZKIS e SIROTIC (2007) aponta que embora 22 dos 46 participantes tenham identificado corretamente o conjunto de números irracionais como mais “rico” que os racionais, apenas 3 destes apresentaram argumentos que se referem à cardinalidade dos conjuntos. Algumas respostas em relação à “riqueza” de conjuntos infinitos expõem equívocos associados a intuições, tais como: a parte é menor do que a totalidade, infinito adicionado a infinito é duas vezes tão grande quanto o infinito original; a probabilidade de obter um racional no intervalo $[0,1]$ é quase zero, pois o conjunto dos racionais é finito; e a crença de que para cada número racional existe um irracional e esses números são dispostos em uma ordem que pode ser associada à ideia consecutiva de números em um conjunto discreto (o consecutivo de um racional é um irracional, o consecutivo de um irracional é um racional). Além da intuição, outros fatores são geradores de equívocos, como considerar a palavra contável como algo finito, implicando a conclusão de que conjunto dos racionais é finito. O desconhecimento de outros irracionais como π e a influência da propriedade de densidade dos racionais por alguns participantes implica a crença de que o conjunto dos números racionais é mais “rico” que os irracionais no intervalo $[0,1]$.

2.4 Dificuldades em torno da propriedade de completude

No trabalho de BERGÉ (2008b) realizado com 232 estudantes de uma universidade de Buenos Aires trata de uma investigação a respeito da má compreensão e má interpretação dos estudantes em relação à completude do conjunto dos números reais ao longo do curso universitário, sobre o que os alunos pensam a respeito do conjunto dos números reais, quais as representações desse conjunto que os alunos possuem e quando os alunos superam a ideia inicial de continuidade ao longo do curso universitário. Uma das questões utilizada na

pesquisa era: *O que significa para você “ R é um conjunto completo”?* A autora constatou que cerca de 63% dos alunos parecem ter uma ideia intuitiva do que é ser completo, mas esta ideia não é suficiente para ser utilizada em questões que envolve a completude do conjunto dos números reais. Ainda assim, uma grande parte dos alunos recorda a noção de reta, mas não necessariamente para melhor ajudá-los a conceituar a noção de completude. Um dos participantes dá uma definição operacional. *“ R é completo, o que significa que não tem saltos, nem lacunas. Ela tem a propriedade do supremo, e é contínuo”*. Algumas respostas estão mais perto de serem operacionais, descrevendo R tal como um conjunto de cortes, no sentido de Dedekind, sem “saltos” nem “lacunas”. Outras respostas referem-se à reta real como justificativa formal. De modo geral, as respostas dos alunos evocam o sentido cotidiano da palavra completo. Isto sugere imagens fracas de definições matemáticas.

Em FISCHBEIN, JEHIAN e COHEN (1995), alguns sujeitos indicam que o modelo geométrico de reta real possui as mesmas propriedades que o modelo de “reta” racional, isto é, os irracionais não acrescentam nenhuma propriedade ao modelo de reta racional. Algo parecido é verificado por DIAS (2002), quando alguns professores indicam ter conhecimento vago dos irracionais, proporcionado por uma generalização abusiva dos racionais para os reais que constitui uma imagem de conceito de “reta racional”. Ainda em Dias é manifestado por parte de alguns professores a existência de uma “sucessão de decimais”, e até de irracionais e a existência de um número máximo como atributo do conjunto dos números reais, isto é, em conjuntos formados só por números racionais não existe um número máximo. **Outros dois trabalhos de BERGÉ (2006a, 2006b) tratam do conceito número real. O primeiro, direcionado a estudantes e professores da Universidade de Buenos Aires, tinha como objetivo analisar as oportunidades que os alunos de licenciatura em Matemática e os professores de Matemática têm de enfrentar as situações que envolvem a completude dos números reais nos primeiros anos de formação universitária. A autora conclui que nas tarefas dos cursos iniciais na universidade, em geral, a completude do conjunto dos números reais aparece implicitamente em teoremas e critérios de convergência de sequências, fazendo com que os alunos não problematizem a respeito dessa propriedade. A completude de R , inicialmente, é atribuída à existência do supremo, que é utilizado para definir melhor alguns subconjuntos e definir certos números, tendo exclusivamente caráter de ferramenta. Indica também que a maioria dos cursos**

de Cálculo de Uma Variável é baseada em um sistema numérico que satisfaz implicitamente tudo o que se sabe e que o conceito de completude é um dado adquirido em determinados níveis de ensino. Para a autora, para compreender as razões que incorporam a propriedade da completude do conjunto de números reais é necessário “sentir” uma espécie de necessidade de provar as propriedades que foram previamente tomadas ou entendidas intuitivamente. A autora considera que a propriedade de completude tem um papel fundamental na compreensão do conceito de limite, logo que sua existência seja problematizada. Em relação a questão de **uma** sequência real não-decrescente e limitada superiormente ter um limite, BERGÉ (2008b) indica que alguns estudantes não põem em questão a existência do limite: eles explicam o que é uma sequência real, o que é ser não-decrescente e o que é ser limitada superiormente; então conclui-se que não tem outra possibilidade para a sequência se não convergir para o limite, não se menciona o axioma da completividade para o conjunto dos números reais, para garantir que não existe “saltos” ou “buracos” na reta real. Mais da metade das respostas utilizaram gráfico para auxiliar na argumentação. Outros estudantes argumentam utilizando contextos extra-matemáticos: a maioria deles corresponde a situações que caracterizam um processo finito e discreto, como se a sequência fosse finita no sentido de que ser limitada significasse ter fim. Assim limite seria o valor máximo alcançado por esse conjunto finito. Outros justificam a existência do limite dizendo que existe um teorema que afirma a existência do supremo.

CAPÍTULO 3: FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Apresentaremos neste capítulo as teorias que fundamentam a análise das questões de pesquisa de nossa investigação: Teoria dos registros de representação semiótica e Teoria antropológica do didático (daqui em diante TAD). A teoria dos registros de representação semiótica é uma teoria de natureza cognitiva, proposta pelo filósofo e psicólogo Raymond Duval. Sua teoria sugere que uma análise do conhecimento matemático é uma análise do sistema de produção das representações semióticas referente a esse conhecimento. Isto é, a forma de se pensar e visualizar em matemática estão intimamente ligados à forma de utilizar representações semióticas e é através destas que se faz toda comunicação em matemática. Para Duval, a análise do conhecimento cognitivo e as dificuldades encontradas na aprendizagem confrontam-se com três fenômenos interligados: existência de diferentes registros de representação semiótica, diferenciação do objeto representado de seus registros de representação semiótica e a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica. Nesse sentido, toda variedade de representação, tratamentos e conversões devem figurar na abordagem pedagógica de um dado conceito.

A TAD é uma teoria criada por Chevallard nos finais dos anos 1970, que em sua essência permite estudar as atividades matemáticas na forma como elas acontecem dentro de um contexto social, nas instituições escolares e de forma não isolada dos indivíduos.

Assim, este capítulo terá como princípio esclarecer o que é um registro de representação semiótica, quais são os tipos de registros, o que é um tratamento, o que é uma conversão, quais são as relações necessárias (coordenações) entre esses componentes para que haja aquisição do conhecimento e definir a noção de praxeologia para identificar posteriormente qual praxeologia está associada às atividades que envolvem números irracionais nos livros didáticos.

3.1 Teoria de Registros de Representação Semiótica de Duval

“As representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento”. (Duval, apud DAMM, p. 143, 2002)

Duval (2003) entende que não devemos nos restringir à matemática e à sua história para compreender as dificuldades dos alunos e a natureza dessas dificuldades, mas é necessária também uma abordagem cognitiva. Essa abordagem procura descrever o funcionamento cognitivo que possibilite a um aluno compreender, efetuar e controlar a diversidade dos processos matemáticos que lhe são propostos. Duas questões preliminares são postas por Duval (p.12, 2003) para analisar as condições e os problemas da aprendizagem em Matemática:

- 1) *Quais sistemas cognitivos são necessários mobilizar para aceder aos objetos matemáticos e para efetuar as múltiplas transformações que constituem os tratamentos matemáticos?*
- 2) *Esses sistemas são os únicos a serem mobilizados por qualquer processo de conhecimento em outros domínios científicos e práticos, ou, ao contrário, trata-se de sistemas específicos, cujo desenvolvimento e cuja aquisição são próprios da atividade matemática?*

Para entendermos o sentido dessas questões devemos entender primeiramente o que caracteriza a atividade matemática do ponto de vista cognitivo. Para Duval (2003), a diferença entre a atividade cognitiva requerida pela Matemática e aquela requerida em outros domínios do conhecimento não deve ser procurada **unicamente** nos conceitos, mas **também** nas seguintes características: a importância primordial das representações semióticas e a grande variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática.

O sistema de representação semiótica desenvolve papel primordial, pois é ele que pode determinar a possibilidade de tratamento matemático. Por exemplo, o desenvolvimento do cálculo da expressão $0,5 + 1,5$ pode ser totalmente diferente ao dado à expressão $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}$, e essa diferença é sem dúvida determinada pelo tipo de representação que cada uma das expressões apresenta. Além disso, há o fato de que os objetos matemáticos não são diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. No caso particular dos números o acesso está intimamente ligado ao sistema de representação que se propõe a designá-los.

Dependendo da necessidade, as duas expressões acima poderiam ter uma interpretação geométrica ou ainda poderiam estar sendo citadas em linguagem natural. Esse fato se dá pela grande variedade de representações semióticas utilizada em matemática. Essa variedade de representações proporciona mudanças entre elas e essas mudanças poderão ser ou não mais econômicas. Como por exemplo, consideremos o problema de determinar o denominador de uma das frações na expressão a seguir:

$$\frac{7}{20} = \frac{1}{4} + \frac{1}{?}$$

A solução descrita na forma decimal $0,35 = 0,25 + 0,10$ é muito mais econômica, e passando o decimal 0,10 para forma fracionária $\frac{1}{10}$ temos trivialmente o denominador desejado.

Para designar os diferentes tipos de representação semiótica, Duval (2003) fala de registro de representação, que para ele se **classificam** em quatro tipos muito diferentes.

	Representação Discursiva	Representação Não Discursiva
<p>Registros Multifuncionais Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Língua natural Associações verbais (conceituais). Formas de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definição ou de teoremas.</p>	<p>Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.</p>
<p>Registros Monofuncionais Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Sistemas de escritas numéricas (binária, decimal, fracionária ...); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo</p>	<p>Gráficos cartesianos Mudanças de sistemas de coordenadas; interpolação, extrapolação.</p>

Tabela 3.1: Classificação dos registros mobilizáveis no funcionamento matemático

Então, entendendo a importância das representações no tratamento e aceitando que na atividade matemática podemos ter uma variedade de representações, é que Duval (2003, p. 14)

afirma: *a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação*. Nesse sentido, para compreender algo em matemática é necessário existir a possibilidade de passar de um registro ao outro, isto é, a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas. **Uma possível maneira dessa** coordenação de registros de representação se dá é nos tratamentos e nas conversões.

Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro (DUVAL, p.16, 2003). Por exemplo, efetuar um cálculo no mesmo sistema de representação.

As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos adotados (DUVAL, p.16, 2003). Por exemplo, passar de uma escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. Do ponto de vista matemático a conversão intervém **principalmente** para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em outro registro. Do ponto de vista cognitivo é a atividade de conversão que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. Importante destacar que realizar uma conversão não é **necessariamente** realizar uma codificação, isto é, não é simplesmente uma tradução preestabelecida entre nomes e figuras.

Em um processo de conversão existem várias variáveis cognitivas, específicas do funcionamento de cada registro, que determinam as unidades de significado pertinentes a serem consideradas em cada um dos registros. São elas:

- **Variações de congruência e não-congruência:** quando o registro de entrada transparece no registro de saída diz-se que há congruência, caso contrário tem-se uma não congruência.
- **Heterogeneidade dos dois sentidos de conversão:** nem sempre a conversão da mesma forma se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada, isto é, saber converter em um sentido não implica saber converter no sentido contrário.

Para compreensão de um conceito os fenômenos de não-congruência ocupam lugar de destaque, uma vez que os alunos podem não reconhecer o mesmo objeto através de duas representações diferentes (entrada e saída). Esses fatores de não-congruência mudam conforme os tipos de registro entre os quais a conversão é efetuada. Nesse sentido, a compreensão em Matemática implica a capacidade de mudar de registro, porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação.

No exposto, podemos destacar alguns elementos que caracterizam a atividade matemática do ponto de vista cognitivo:

- Importância primordial das representações semióticas;
- Grande variedade de representações semióticas utilizadas em matemática;
- Diferenciação entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica;
- Coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

É com base nessas características que Duval (2003) enuncia a hipótese fundamental de **compreensão** em matemática: A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifesta-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Tal hipótese é representada pelo esquema:

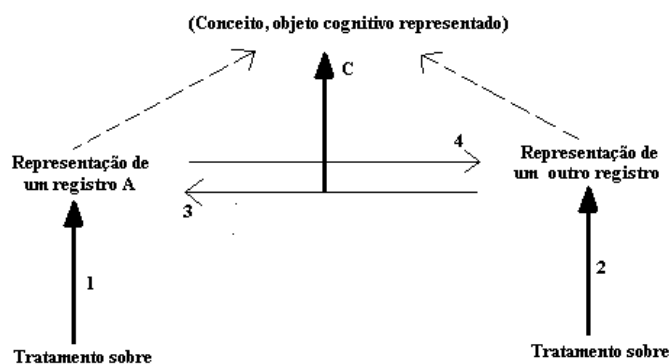


Figura 3.1: Hipótese para aprendizagem dada por Duval

As flechas 1 e 2 correspondem às transformações internas a um registro de representação, as 3 e 4 correspondem as transformações externas, ou seja, as conversões por mudanças de registro. A flecha C corresponde a que Duval chama de compreensão integrativa de uma representação que supõe uma coordenação de registros. As flechas pontilhadas correspondem à distinção entre representante e representado.

Neste trabalho, procuraremos observar se os livros didáticos **favorecem** a coordenação de registros de representação **para os conceitos, analisando as atividades de** tratamento e de conversão. Mais especificamente, buscaremos:

- Compreender se os livros didáticos proporcionam uma variedade de registros destinados ao conceito de número irracional. Isto porque, é preciso de, ao menos, dois registros de representação diferentes para não confundir um objeto com sua representação.
- Compreender se as tarefas propostas promovem a articulação entre os registros. Isto porque, é essa articulação que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, ou seja, o “enclausuramento” em cada registro.
- Identificar cuidadosamente aquilo que é evidenciado (ressaltado) no tratamento em um registro e aquilo que é evidenciado em uma conversão. Isto porque, do ponto de vista pedagógico, tais transformações podem estar sendo utilizadas para objetivos específicos, diferentes dos dados por Duval quando se trata de aprendizagem.

3.2 Teoria antropológica do didático de Chevallard

De acordo com Chevallard (1999), toda atividade humana pode ser descrita a partir de um modelo chamado praxeologia ou organização praxeológica. Para o autor, uma praxeologia é uma organização da atividade humana em tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Para Chevallard, uma tarefa (T) é tudo aquilo que é pedido para uma pessoa fazer/executar. Toda tarefa faz parte de uma rede de tarefas designada tipo de tarefa, por sua vez todo tipo de tarefa faz parte de uma rede chamada gênero de tarefas. Uma técnica (τ) é uma maneira de fazer uma tarefa. Tecnologia (θ) é todo discurso racional que justifica e esclarece uma técnica. Teoria

(Θ) é todo discurso que justifica a tecnologia. As tarefas e técnicas formam o bloco saber-fazer e as tecnologias e teorias formam o bloco do discurso fundamentado.

Uma tarefa requer um objetivo preciso a ser alcançado, por exemplo, “lavar o carro”, “arrumar a casa”, “enviar um e-mail”, “organizar uma reunião de chefes de estado”, “resolver um problema de matemática”. O que caracteriza uma tarefa é um verbo (lavar, arrumar, enviar, organizar, resolver), porém somente a palavra lavar (um verbo) não caracteriza uma tarefa.

Para responder/executar toda e qualquer tarefa com êxito tem que se dispor de uma técnica que permita realizar a tarefa de uma forma relativamente sistemática e segura. Por exemplo, para resolver a equação do segundo grau $x^2 - 2 = 0$, que é uma tarefa particular do tipo de exercício/tarefa “resolver uma equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ ”, uma técnica conhecida nas escolas necessita dos seguintes passos:

- (I) Determinar os coeficientes a , b e c ;
- (II) Determinar o valor numérico de Delta: Δ ;
- (III) Determinar o valor numérico da fórmula de Bhaskara.

(I)

$a = 1$, a é o coeficiente do termo x^2 ; $b = 0$, b é o coeficiente do termo x e c é o termo independente ($c = -2$). Determinar esses coeficientes requer habilidades específicas e é natural pensar que com a mudança da natureza desses coeficientes essas habilidades requeridas também mudam. Isto é, determinar o coeficiente de x^2 no termo $2x^2$ requer habilidade diferente da requerida para determinar o coeficiente do termo $-\frac{x^2}{2}$.

(II)

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$\Delta = 8$$

(III)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-0 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \pm \sqrt{2}$$

Claro que esta não é a única maneira/técnica de se resolver a equação do segundo grau em questão, **também** poderia ser utilizada a seguinte técnica, **que consta de três pasos**:

- (I) Fatoração (diferença de quadrados);
- (II) Propriedade operacional dos números reais: $m \cdot n = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $n = 0$;
- (III) Resolver equação do primeiro grau (III).

(I) $x^2 - 2 = 0$ $(x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2}) = 0$	(II) $x + \sqrt{2} = 0$ ou $x - \sqrt{2} = 0$	(III) $x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$
---	--	--

Para que ambas as técnicas apresentadas sejam utilizadas/aplicadas de maneira compreensiva e justificada deve-se supor a existência de discurso interpretativo e justificativo da técnica no seu campo de validez. No caso das técnicas aplicadas para resolver a equação do segundo grau dada anteriormente podemos ter para o primeiro conjunto de técnicas a fórmula de Bhaskara como o discurso justificativo da técnica, que Chevallard chama de tecnologia, e que permite a execução das técnicas. Por sua vez, uma tecnologia também requer um discurso interpretativo e justificativo no seu campo de validez e é esse discurso que Chevallard chama de teoria, que na resolução da equação do segundo grau dada pode ser entendida como toda teoria envolvendo equações algébricas.

Nesse contexto não se espera que a atividade matemática se cumpra sem se entender o que se está fazendo, ou seja, não pode existir tarefa e técnica sem que exista uma tecnologia e teoria associadas, e vice-versa.

Assim, buscaremos observar a organização matemática que se constitui em torno das noções de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias envolvendo o conceito número irracional / real encontradas nos livros didáticos, a fim de modelar as práticas matemáticas existentes e determinar se é estabelecido uma organização praxeológica completa $[T/\tau/\theta/\Theta]$ ou parcial $[T/\tau]$ que é o saber-fazer (praxe) e $[\theta/\Theta]$ tecnológico - teórico (logos). Essa ação está pautada nos seguintes postulados:

- Toda prática institucionalizada pode ser analisada, de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas;
- O cumprimento de toda tarefa decorre, **do ponto de vista da instituição**, do desenvolvimento de uma técnica bem sistematizada, compreendida, justificada e segura;
- A existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas, isto é, a existência de uma tecnologia.
- A existência de um discurso descritivo e justificativo das tecnologias, isto é, a existência de uma teoria.

CAPÍTULO 4: METODOLOGIA

4.1 Questões de pesquisa

Foram levantadas, anteriormente, algumas questões de pesquisa. Nossas questões gerais de pesquisa são as seguintes:

- Como o conceito número irracional / real é organizado nos Livros Didáticos da Educação Básica, no Brasil? Que registros de representação são empregados? E estes como são empregados?
- Como essa organização se propõe a promover a aquisição do conhecimento número irracional?

De forma mais específica, considerando os referenciais teóricos de Duval e de Chevallard, nossos objetivos são:

- Compreender se os livros didáticos proporcionam a utilização de uma variedade de registros destinados ao conceito número irracional / real.
- Identificar e analisar os tipos de tarefas propostas pelos livros didáticos em relação ao conceito de número irracional / real.
- Compreender se as tarefas propostas promovem a articulação entre os registros.

Para isso, investigaremos na direção de quatro temas de análise:

- Tema 1: Tipos de definição utilizadas
- Tema 2: Tipos de representação utilizadas
- Tema 3: Tipos de tarefa (no sentido de Chevallard) propostas
- Tema 4: Tipos de abordagem histórica utilizadas

A escolha desses temas deu-se após a revisão bibliográfica e análise preliminar feita com dois Livros didáticos. Na revisão bibliográfica ficou claro que muitos alunos, futuros

professores e professores em exercício apresentaram dificuldades em definir número irracional e/ou definir número real; representar número irracional em diferentes registros, fazer possíveis conversões entre eles; apontar conceitos históricos relevantes à necessidade de se definir o conceito de número real. Assim, na próxima seção discutiremos quais as questões que cada tema de estudo se propõe focar.

4.1.1 TEMA 1: Que tipo de definições são propostas nos Livros didáticos para introduzir o conceito número irracional / real?

No ensino de matemática, constantemente nos deparamos com perguntas do tipo: O que é um conjunto? O que é uma função? O que é uma matriz? O que é uma sequência? O que é um número irracional? O que é uma derivada? O que é um quadrado? Essas perguntas pertencem a uma classe de perguntas: O que é “tal objeto matemático”? Respondê-las muitas das vezes não é uma **questão** fácil. Porém, respondê-las não garante a habilidade para se ensinar tais conceitos.

Por exemplo, para a pergunta: O que é um quadrado? Podemos obter muitas respostas:

- É um polígono regular de quatro lados.
- É um quadrilátero equiângulo e equilátero.
- É um retângulo que possui os lados congruentes.
- É um losango que possui os ângulos congruentes.
- É um quadrilátero que possui duas diagonais congruentes, perpendiculares e interceptando-se nos seus respectivos pontos médios.

As respostas acima são entendidas como definições do objeto matemático em questão, no sentido de que “é uma expressão lingüística formal, que expressa por meio de palavras propriedades que são compartilhadas que pertencem a classe definida”. Numa perspectiva do saber dos conteúdos e estritamente formal, todas essas definições de objeto quadrado são aceitáveis, pois são equivalentes. O objeto matemático quadrado é perfeitamente caracterizado por qualquer uma dessas definições e tudo que se pode afirmar matematicamente sobre esse

objeto poderá ser deduzido através dessas definições. Assim, do ponto vista estritamente formal, pode-se dizer que um objeto matemático **pode ser caracterizado pela** sua definição.

Entretanto, cada definição dada acima enfatiza alguns aspectos e omitem outros a respeito do objeto quadrado. Para a definição “*é um retângulo que possui os lados congruentes*” dá-se ênfase ao fato que todo quadrado é retângulo e que possui os quatro lados com a mesma medida, porém nada se estabelece diretamente sobre suas diagonais, por exemplo. Já na definição “*é um quadrilátero que possui duas diagonais congruentes, perpendiculares e interceptando-se nos seus respectivos pontos médios*” dá-se ênfase a quantidade de lados desse polígono, à congruência de suas diagonais, a maneira como elas se interceptam e onde elas se interceptam, porém nada se estabelece diretamente sobre seus ângulos. Interessante que tanto uma definição como outra se utiliza de termos anteriores. Para a primeira definição lança-se mão dos termos: retângulo e congruência. Enquanto na segunda são utilizados os termos diagonais, perpendiculares, interceptar e quadrilátero. Um fato importante que se dá entre equivalências de definições é a ordem que se apresentam as propriedades relacionadas aos objetos matemáticos. Se admitirmos a definição: *um quadrado é um retângulo que possui os lados congruentes*, com raciocínio lógico dedutivo podemos provar que todos os quadrados possuem a seguinte propriedade: possuir duas diagonais congruentes, perpendiculares e interceptando-se nos seus respectivos pontos médios. Por outro lado, se admitirmos a definição: *um quadrado é um quadrilátero que possui duas diagonais congruentes, perpendiculares e interceptando-se nos seus respectivos pontos médios*, podemos provar que todos os quadrados possuem a seguinte propriedade: todo quadrado é retângulo e possui os lados congruentes.

Assim a escolha de uma definição para um objeto matemático desempenha um papel primordial no processo de aprendizagem. Tratando-se da aprendizagem de um determinado conteúdo, o objeto matemático é muito mais amplo do que a sua definição, não é uma ação localizada como a expressão ou um registro lingüístico, é necessário recorrer a outros conceitos e teorias que podem revelar novos saberes que o aluno deve aprender que a definição não é capaz de expressar, isto é, conceituar exige muito mais do que definir apenas.

Nossa pesquisa analisa livros didáticos, assim, observaremos como são propostos nos livros didáticos a aprendizagem do conceito número irracional e suas conexões com as

definições, termos anteriores utilizados nas definições, propriedades e raciocínio lógico dedutivo. Para isso, concordamos com Giraldo (p. 73, 2004), que afirma ser importante analisar a relação entre os dois contextos pedagógico e teórico-formal pelo menos em dois aspectos: *“os mecanismos por meio dos quais as práticas pedagógicas em educação matemática influenciam o desenvolvimento formal das teorias; e as formas como as teorias formais inserem-se no ensino e aprendizagem da matemática.”*

4.1.2 TEMA 2: Quais são as representações utilizadas nos Livros didáticos no ensino de Números Reais?

Duval (2003) afirma que não há conhecimento sem representação. Então pensando no ensino, em como se dá a aquisição do conhecimento e na organização de situações de aprendizagem podemos pensar nas seguintes questões: Que tipo de representação é essencial para a compreensão do objeto número irracional / real? Como estas representações se organizam e se relacionam nos Livros didáticos?

A aprendizagem em matemática não pode se resumir na aquisição de conceitos da forma tradicional – no sentido de “passar” conhecimento da instituição detentora do saber (a academia, os Livros didáticos, o professor, o material didático) para instituição recebedora do saber (o aprendiz, a sociedade). Compreender matemática no sentido de Duval requer formas específicas de trabalhar cognitivamente os saberes em comparação com outras áreas do conhecimento, isto é, em matemática a aprendizagem passa pelo crivo da representação. Em matemática para a aquisição do conhecimento é preciso recorrer à noção de representação, distinguir pelo menos dois tipos de representação, distinguir o objeto matemático da sua representação, fazer tratamentos em diferentes registros de representação e fazer as conversões entre as representações da maneira mais natural possível.

À luz da teoria de Duval, a resposta para primeira questão acima **pode** ser esboçada: não há representação essencial que privilegie a aquisição do conhecimento, **uma vez que é necessário a coordenação de ao menos dois registros de representação para a compreensão (integral) de um conteúdo**, porém sem o uso de representações é impossível a construção do

conhecimento. O essencial não é o tipo de representação e sim a forma como essas representações estão sendo utilizadas e se essas **favorecem a coordenação entre representações.**

Se o essencial não é o tipo de representação parece paradoxal tomar o título acima para esse tema de análise, porém trataremos de observar se tais tipos de representação são candidatas a proporcionarem realmente ao sujeito coordenação de vários registros de representação do objeto número irracional / real. Para isso buscaremos identificar como os registros são utilizados nos Livros didáticos e se tais representações promovem as seguintes atividades cognitivas: *a formação de uma representação identificável do objeto, o tratamento e a conversão.*

Ou seja, tentaremos de responder se as representações apresentadas nos Livros didáticos e como são apresentadas promovem produção do conhecimento no sentido de Duval.

4.1.3 TEMA 3: Quais são as tarefas que são propostas nos Livros didáticos no ensino de número irracional / real?

Para Duval (2003) é essencial a coordenação de ao menos dois registros de representação e esta coordenação manifestando-se pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Assim, uma importante aliada à compreensão (integral) do conhecimento é a implantação de uma variedade (na sua forma de representação) de tarefas, e mais do que isso, a forma pela qual são exploradas essas representações e se é valorizada a possibilidade de coordenação. De acordo com Chevallard (1999) toda atividade humana pode ser descrita a partir de um modelo chamado organização praxeológica e que a aquisição do conhecimento está condicionada a vivência de uma paraxiologia completa. Assim, é essencial que as tarefas propostas nos livros didáticos valorizem não somente técnicas de solução, mas algum discurso racional que justifique e que esclareça tais técnicas, e que tal discurso racional esteja fundamentado em um discurso teórico, possibilitando assim a construção de uma organização praxiológica completa.

Admitindo que as tarefas desempenham um papel importante na aquisição de um conteúdo conceitual, a análise das tarefas propostas pelos livros didáticos assume um papel fundamental no estudo das práticas humanas que influenciam no processo de aprendizagem da matemática, pois essas tarefas além de promoverem a interação e colaboração entre alunos e professores podem determinar parte da organização praxiológica a respeito do conteúdo em questão. Posterior à análise da organização praxiológica promovida pelos tipos de tarefas propostas pelos livros didáticos, se pode determinar qual delas tem possível potencial de influenciar na aprendizagem da matemática, além de estabelecer padrões e práticas de ensino.

Tratando dos padrões e das práticas, os tipos de tarefas de determinada praxiologia podem condicionar a forma pela qual os alunos e/ou professores entendem a tarefa e até mesmo como entendem o conceito, como devem processar as informações a respeito do conceito e as relações mentais que o “constroem”, influenciando e estruturando a capacidade de raciocínio e na aprendizagem da matemática. Assim, os tipos de tarefas que valoriza procedimentos e padrões previamente memorizados podem reduzir a capacidade de pensamento do aprendiz uma vez que os argumentos que justificam os procedimentos não são valorizados e/ou evidenciados. Já os tipos de tarefas baseadas numa valorização da construção do conceito, da exploração de múltiplas representações, de explicação de raciocínio aos alunos e na exploração de praxiologias completas conduzem um raciocinar mais produtivos promovendo melhor o domínio dos conceitos.

Nesse sentido, a análise de tarefas proposta nesse trabalho enuncia cada gênero de tarefa utilizado; lista as possíveis variações desse gênero de tarefa; descreve os tipos de técnicas utilizadas, ou seja, identifica o bloco saber-fazer utilizado; descreve as tecnologias e teorias utilizadas no gênero de tarefa analisada, ou seja, identifica o bloco tecnológico-teórico utilizado; discute a organização praxeológica desenvolvida em cada gênero de tarefa; descreve os tipos de registros utilizados nas tarefas e descreve como se relacionam os registros identificados em cada gênero de tarefa, isto é, descreve os tipos de tratamentos e conversões, caso existam.

4.1.4 TEMA 4: Como a História da Matemática é utilizada nos Livros didáticos no ensino de Número irracional / real?

Cada vez mais é defendido o uso de história da matemática no ensino da matemática. Na verdade, muitas ações do governo federal têm defendido o uso do mesmo na educação básica como é o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais – (BRASIL, 2001)

As avaliações de Livros Didáticos pelo Ministério de Educação – MEC por meio do Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, dentro do item Aspectos Metodológicos e do subitem Contextualização, no ponto 4.3 sugerem que os conhecimentos matemáticos sejam contextualizados *significadamente*, dentre outras formas, através da história da matemática. É verdade que a história da matemática pode contextualizar o saber internamente e externamente à matemática, mostrando que seus conceitos são frutos da época histórica, dentro de um contexto sócio-cultural.

O fato de haver um critério dentro do PNLD a ser cumprido pelos autores, para que suas obras sejam aprovadas é definitivamente um grande incentivo para que o uso de história da matemática apareça nos Livros didáticos. Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN indicam que:

“A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área de conhecimento. Ao revelar a Matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que os alunos desenvolvam atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento” (BRASIL, 2001, p.42)

Porém tal recomendação não explicita claramente o que se pretende dizer a palavra “significadamente”, isto é, como exatamente os conceitos históricos devem ser explorados. Nossa preocupação é no sentido de que a história da matemática não seja utilizada como mera exibição de fatos, datas e acontecimentos.

Nesse sentido, utilizar história da matemática como abordagem de ensino proporciona ao professor um olhar mais crítico sobre os conhecimentos possibilitando ao aluno uma visão de que a Matemática é uma disciplina em plena construção, fruto muitas das vezes das

necessidades humanas e de como seu desenvolvimento não se dá de forma linear, mas sim influenciada por fatores sociais, culturais, econômicos, políticos, filosóficos, científicos. A própria história dos conhecimentos pode sugerir caminhos de abordagem deles, bem como os objetivos a alcançar, não se reduzindo a abordagens inocentes que valorizam fatos, datas, nomes a serem memorizados.

Nosso trabalho não terá o objetivo de avaliar os Livros uma vez que nós olharemos somente livros já aprovados pelo MEC, então nosso objetivo é investigar e registrar de que forma o uso de história da matemática aparece nos Livros didáticos. Para isso, criamos categorias específicas de avaliação influenciadas pela análise preliminar e por Ozámiz e Pérez (1993) quando afirma que a história da Matemática, como recurso didático, visa atingir seguintes objetivos:

- Mostrar que o processo do descobrimento matemático é algo vivo e em desenvolvimento;
- Aceitar o significado dos objetos matemáticos em seu triplo significado: institucional, pessoal e temporal;
- Estabelecer distinções entre uma prova, uma argumentação e uma demonstração dos conceitos matemáticos, bem como saber dosá-las de maneira equilibrada no currículo escolar.

Sendo assim, queremos responder se a abordagem histórica nos livros didáticos possui tais características: de Informação Geral, de Informação Adicional ou Estratégia Didática.

4.2 Os livros selecionados

Os livros selecionados por esta pesquisa foram aprovados pelo ministério da educação, no âmbito dos programas PNLD – Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2007a) e PNLEM - Programa Nacional do livro Didático para o Ensino Médio (BRASIL, 2007b). Em 2008 foi produzida pela quarta vez a edição do Guia de Livros Didáticos de Matemática, do 6º ao 9º ano de escolaridade (anos anteriores: 1999, 2002 e 2005). Nesse guia, é oferecida uma

lista de livros avaliados por educadores que estão envolvidos com o ensino de 6º ao 9º ano. Esses livros podem ser escolhidos pelos professores, adquiridos pelo Ministério da Educação e enviados a todas as escolas de ensino público do país que oferecem os anos finais do Ensino Fundamental. Nesta quarta edição foram avaliadas 28 coleções, cada coleção contendo quatro livros, onde 16 coleções foram aprovadas. São elas:

- **F01- Aplicando a Matemática** – Autores: Alexandre Luis Trovon de Carvalho, Lourisnei Fortes Reis
- **F02- Tudo é Matemática** – Autor: Dante, L. Editora: Ática.
- **F03- Matemática** – Autores: Souza, M. e Spinelli, W. Editora: Ática.
- **F04- Matemática na Vida e na Escola** – Autores: Rego, A., Rubinstein, C., Marques, E., Borges, E. e Portela, G. Editora: Editora do Brasil.
- **F05- Novo Praticando Matemática** – Autores: Andrini, Á. e Zampirolo, M. Editora: Editora do Brasil.
- **F06- Matemática em Movimento** – Autor: Longen, A. Editora: Editora do Brasil.
- **F07- Matemática Hoje é Feita Assim** – Autor: Bigode, A. Editora: FTD.
- **F08- Fazendo a Diferença – Matemática** – Autores: Azenha, R., Bonjorno, J. e Olivares, A. Editora: FTD.
- **F09- Projeto Araribá – Matemática** – Autores: Editora Moderna, Editora: Moderna.
- **F10- Ideias & Relações** – Autores: Siedel, C., Peracchi, E. e Estephan, V. Editora: Positivo.
- **F11- Matemática paratodos** – Autores: Imenes, L. e Lellis, M. Editora: Scipione.
- **F12- Matemática na Medida Certa** – Autores: Jakubovic, J., Lellis, M. e Centurión, M. Editora: Scipione.
- **F13- Construindo Consciências – Matemática** – Autores: Soares, E. e Ribeiro, J. Editora: Scipione.
- **F14- Matemática e Realidade** – Autores: Machado, A. Iezzi, G. e Dolce, O. Editora: Saraiva.

- **F15- Para Saber Matemática** – Autores: Poli, E., Vieira, F., Sosso, J. e Cavalcante, L. Editora: saraiva.
- **F16- Matemática – Ideias e Desafios** – Autores: Mori, I. e Onaga, D. Editora: Saraiva.

Desses dezesseis livros analisamos nove livros, uma vez que o acesso a todos não foi possível. Em 2007 foi produzida pela primeira vez a edição do Guia de Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio. Da mesma forma que o guia para o Ensino Fundamental o guia do Ensino Médio oferece uma lista de livros avaliados por educadores que estão envolvidos com o Ensino Médio onde esses livros serão escolhidos pelos professores, adquiridos pelo Ministério da Educação e enviados a todas as escolas de ensino público do país que oferecem os três anos finais da Educação Básica. Neste guia foram avaliadas 28 coleções sendo 8 coleções aprovadas. São elas:

- **M17- Matemática ensino médio** – Autores: Smole, K., Kiykawa, R. e Diniz, M. Editora: Saraiva.
- **M18- Matemática aula por aula** – Autores: Filho, B. e Silva, C. Editora: FTD.
- **M19- Matemática completa** – Autores: Bonjorno, J., Giovanni, J. e Júnior, J. Editora: **FTD**
- **M20- Matemática e suas tecnologias** – Autores: Rubió, A. e Freitas, L. Editora: IBEP.
- **M21- Matemática no ensino médio** – Autor: Goulart, M. Editora: Scipione.
- **M22- Matemática** – Autor: Dante, L. Editora: Ática.
- **M23- Matemática** – Autores: Yossef, A., Soares E. e Fernandez, V. Editora: scipione.
- **M24- Matemática** – Autor: Paiva, M. Editora: Moderna.

Desses oito livros analisamos cinco livros, uma vez que o acesso a todos os livros não foi possível.

4.2.1 PNLD e PNLEM

O governo brasileiro executa três programas voltados ao livro didático: o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) iniciado em 1929, o Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) iniciado em 2004 e o Programa Nacional do Livro Didático para a Alfabetização de Jovens e Adultos (PNLA). Todos os programas são mantidos pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e tem por objetivo prover de forma gratuita livros didáticos para os alunos de todas as séries da educação básica da rede pública e para os matriculados em classes do programa Brasil Alfabetizado.

Entre 1994 e 2005, o PNLD adquiriu, para utilização nos anos letivos de 1995 a 2006, 1,077 bilhão de unidades de livros, distribuídos para uma média anual de 30,8 milhões de alunos matriculados em cerca de 163,7 mil escolas.

Em 2007, o PNLD comprou 110,2 milhões de livros para serem utilizados no ano letivo de 2008. Essa aquisição custou R\$ 559,7 milhões. Foram adquiridos livros de todas as disciplinas para 13,4 milhões de alunos de 5^a a 8^a série do ensino fundamental (ou 6^o ao 9^o ano, para as redes que já haviam adotado este nível de ensino em 9 anos) e para todos os alunos da 1^a série, além de reposição para estudantes de 2^a a 4^a série.

4.3 Procedimentos metodológicos para a análise de livros didáticos

Os procedimentos metodológicos desta pesquisa podem ser divididos em três etapas:

- Etapa 1: Análise preliminar de uma amostra de Livros didáticos selecionados.
- Etapa 2: Elaboração das matrizes de análise, com base na análise preliminar.
- Etapa 3: Análise de quatorze Livros didáticos aprovados pelo PNLD - 2007 e PNEM - 2008.

A Análise preliminar foi feita com os livros (F05) Andrini e Vasconcellos (2002) e (M23) Paiva (2004), selecionados aleatoriamente em cada grupo (PNLD e PNLEM, respectivamente). Esta análise teve como objetivo inicial a coleta de dados e não foi feita nenhuma consideração com base nos pressupostos teóricos. Entretanto, nos proporcionou

levantar algumas constatações, destacar concepções e compreender algumas condições de pesquisa, com o intuito de planejar o estudo principal (Etapa 3). Os dados obtidos nessa análise foram tabulados na matriz preliminar (Tabela 4.2). Esses dados iniciais ajudaram na elaboração das matrizes de pesquisa destinadas a cada tema de análise citado anteriormente: tipos de definição, tipos de representação, tipos de tarefas, tipos de abordagem histórica. A análise de todos os livros selecionados ocorrerá segundo apresentado nas próximas seções.

4.3.1 Análise preliminar e Matriz preliminar

A Análise preliminar dos Livros F05 (PNLD) e M23 (PNLEM) foi feita em relação ao conceito número irracional / real. A coleção F05 é composta por quatro volumes enquanto a coleção M23 é composta por três volumes. Nossa análise não ocorreu em todos os volumes de cada coleção, nós focamos o estudo em capítulos destinados ao conceito número irracional / real. Assim, para a coleção F05, analisamos o livro destinado ao 8º ano de escolaridade (antiga 7ª série do ensino fundamental). Tal livro é composto de 11 unidades e nosso estudo ficou centrado nos capítulos 5, 6 e 7 da unidade I. Para a coleção M23, analisamos o livro da 1ª série do ensino médio, tal livro é composto por 14 capítulos e nosso estudo ficou centrado nas partes 12 e 13 do capítulo 1. A seguir, apresentamos a matriz de análise preliminar e a explicação das siglas empregadas.

Análise preliminar de dois Livros Didáticos											
		Quantificando									
Grupo	Nº do Livro	ER	EP	EC	EX	PR	PG		D	AH	R
F	05	4	18	14	9	8	15	7%	2	2	75
IM	23	2	6	8	15	11	9	4%	2	0	88
Média aritmética		3	12	11	12	9,5	12	5,5%	2	1	81,5

Tabela 4.1: Matriz preliminar

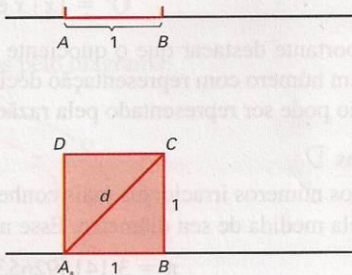
Exercícios Resolvidos (ER)

Entendemos como exercício resolvido qualquer exemplo adotado pelo autor, qualquer exercício utilizado pelo autor com objetivo de explicar conceitos ou de apresentar métodos de solução de problemas.

EXERCÍCIO RESOLVIDO

R5 Considerar o segmento \overline{AB} de comprimento 1, em uma unidade u . Descrever um processo para obter o ponto E da semi-reta \overline{AB} , tal que o comprimento do segmento \overline{AE} seja $\sqrt{2}$ na unidade u .

Resolução
Seja um quadrado em que um dos lados é o segmento \overline{AB} . A medida d da diagonal do quadrado é dada por:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$


The diagram shows a horizontal line segment AB of length 1. Above it, a square is constructed with vertices A, B, C, and D. The diagonal AC is labeled 'd'. The side length of the square is labeled '1'.

Figura 4.1: Ilustração de exercício resolvido. (PAIVA, p.18, 2004)

Então, os números 4 e 2 da coluna de *ER* exprimem que cada livro analisado apresentou 4 e 2 exercícios resolvidos respectivamente.

Exercícios Propostos (EP)

Entendemos como exercício proposto qualquer tarefa utilizada pelo autor com objetivo de fixar novos conceitos, tais tarefas estão dispostas no decorrer no capítulo. Então, os números 18 e 6 da coluna de *EP* exprimem que cada livro analisado apresentou 18 e 6 exercícios propostos respectivamente.

Exercícios Complementares (EC)

Entendemos como exercício complementar qualquer tarefa utilizada pelo autor com objetivo de revisar o conceito de número irracional / real, tais tarefas estão dispostas no final do capítulo.

Revisando

1 Sejam os números:

$\sqrt[3]{10}$	$1 + \sqrt{3}$	9	$-\frac{7}{2}$	π
$\frac{180}{4}$	$-\frac{10}{5}$	$\sqrt{80}$		

a) Quais são inteiros? $9, \frac{180}{4}, -\frac{10}{5}$

b) Quais são racionais? $9, -\frac{7}{2}, \frac{180}{4}, -\frac{10}{5}$

c) Quais são irracionais? $\sqrt[3]{10}, 1 + \sqrt{3}, \pi, \sqrt{80}$

d) Que nome pode ser dado a todos eles?
Números reais.

Figura 4.2: Ilustração de exercício complementar. (ANDRINI e VASCONCELLOS, p. 28, 2002)

Então, os números 14 e 8 da coluna *EC* exprimem que cada livro analisado apresentou 14 e 8 exercícios complementares respectivamente.

Exemplos (EX)

Nessa variável observaremos todos os números que estão sendo apresentados como exemplos de irracionais ou reais.

$\sqrt{2}$ é um número irracional.

Os matemáticos mostraram também que existem infinitos números irracionais. Por exemplo, as raízes quadradas dos números primos: $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{11}, \sqrt{13} \dots$ são números irracionais, bem como seus opostos $-\sqrt{3}, -\sqrt{5}, -\sqrt{11}, -\sqrt{13} \dots$

Figura 4.3: Ilustração de exemplo. (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.21, 2002)

Nesta ilustração, temos 9 exemplos de números irracionais.

Então, os números 9 e 15 da coluna *EX* exprimem que cada livro analisado apresentou 9 e 15 exemplos respectivamente.

Propriedades (PR)

Entendemos por propriedade qualquer afirmação que derive logicamente da definição de número irracional ou real e de outras verdades previamente estabelecidas.

Então, os números 2 e 2 da coluna *D* exprimem que os respectivos livros apresentaram 2 definições, para número irracional e para número real.

Abordagem Histórica (AH)

É qualquer menção a história da matemática.

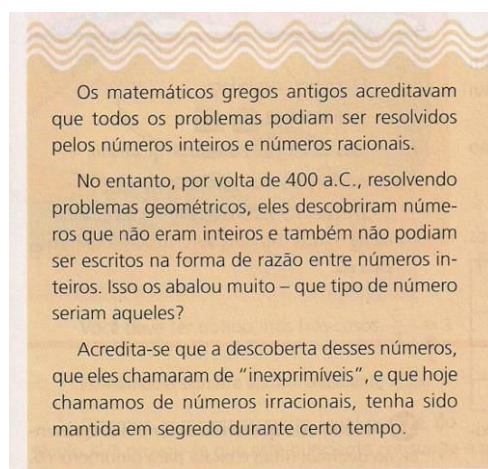


Figura 4.6: Ilustração de abordagem histórica. (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.21, 2002)

Então, os números 2 e 0 da coluna *AH* exprimem que cada livro analisado apresentou 2 e 0 abordagens históricas respectivamente.

Representações (R)

Admitiremos aqui qualquer registro figural, simbólico numérico, simbólico algébrico e na língua natural relacionados a número irracional / real.

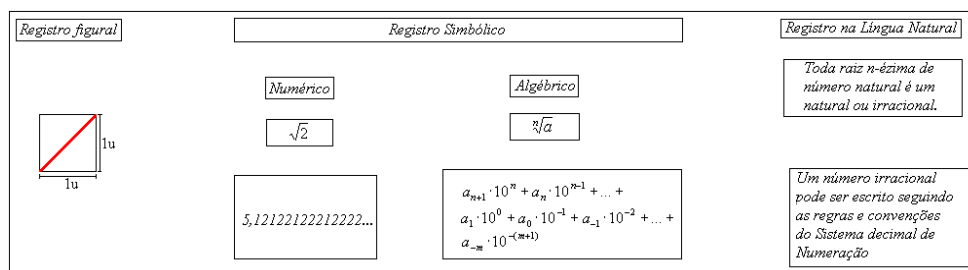


Figura 4.7: Ilustração de representações.

Então, os números 75 e 88 da coluna R exprimem que cada livro analisado apresentou 75 e 88 representações dos números irracionais ou reais respectivamente. Para o registro na língua natural adotamos a seguinte estratégia: computaremos nesta variável qualquer discurso na língua corrente que queira caracterizar ou mesmo citar uma propriedade dos irracional / real. Importante destacar que uma mesma representação aparecendo várias vezes será computada uma única vez e várias representações de um mesmo registro são todas computadas distintamente.

4.3.2 Matriz preliminar tipos de tarefas

Esta matriz tem por objetivo categorizar as tarefas que são propostas nos Livros didáticos no ensino de número irracional / real e será composta por qualquer tipo de tarefa: exercícios resolvidos, exercícios propostos, exercícios complementares, testes. Na seção 5.2.4 estaremos explicando como funcionará a análise de cada tipo de tarefa. A seguir, apresentamos a matriz de tipos de tarefas, a explicação das siglas empregadas assim como acontecerá o procedimento de análise de cada tarefa.

Identificação do Livro		$T_{C\epsilon}$	T_{CC}	T_{CV}	T_G	T_E	T_{CAL}	T_{ES}	T_R	T_I
Grupo	Nº									
F	05	11	2	0	0	5	14	1	3	0
M	23	1	1	2	1	3	0	0	2	7
Média aritmética		6	1,5	1	0,5	4	7	0,5	2,5	3,5

Tabela 4.2: Matriz preliminar tipos de tarefas

Tarefas que envolvem *classificar* utilizando a relação de pertinência ($T_{C\epsilon}$)

43 Construa a tabela no caderno e assinale a que conjuntos pertencem cada um dos números:

	10	-8	$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{2}$	0	$\sqrt{4}$	$\sqrt{7}$	π	1,76
Naturais	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Inteiros	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Racionais	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Irracionais	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>

• Que nome pode ser dado a todos eles? *Números reais.*

Figura 4.8: Ilustração de $T_{C\epsilon}$. (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.26, 2002)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha a classificação de um número qualquer em natural, inteiro, racional, irracional ou real, utilizando a relação de pertinência, estabelecida entre o elemento dado (o número) e o conjunto dado. A questão 43, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz identifique que o número 10 pertence ao conjunto dos números naturais, inteiros e racionais simultaneamente e não pertence ao conjunto dos números irracionais. Então, os números 11 e 1 da coluna $T_{C\epsilon}$ exprimem que cada livro analisado apresentou 11 e 1 tarefas respectivamente que envolvem classificar utilizando pertinência, isto é, se o número a é um elemento do conjunto A então ele pertence a esse conjunto, caso contrário é dito que não pertence.

Tarefas que envolvem *classificar* entre Racional ou Irracional (T_{CC})

36 Identifique como número racional ou como número irracional:

a) 4,25 racional f) 0,0061 racional
 b) $\sqrt{81}$ racional g) $-\sqrt{18}$ irracional
 c) $\sqrt{50}$ irracional h) 48 799 racional
 d) -76 racional i) 7,171771777... irracional
 e) $\frac{1}{3}$ racional j) 8,434343... racional

Figura 4.9: Ilustração de T_{CC} . (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.22, 2002)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha a classificação de um número qualquer em racional ou irracional. A questão 36, utilizada aqui como exemplo dessa tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz identifique o número 4,25 como número racional. Então, os números 2 e 1 da coluna T_{CC} exprimem que cada livro analisado apresentou 2 e 1 tarefas que envolvem classificar entre racional e irracional, respectivamente.

Tarefas que envolvem *classificar* entre Verdadeiro ou Falso (T_{CV})

- 49 Classifique cada uma das afirmações como verdadeira ou falsa.
- I. Todo número racional é real.
 - II. Todo número irracional é real.
 - III. Existe número real que não é racional.
 - IV. Existe número real que não é irracional.
 - V. Existe número que é, ao mesmo tempo, racional e irracional.
 - VI. Existe número real que não é racional nem irracional.

Figura 4.10: Ilustração de T_{CV} . (PAIVA, p.25, 2004)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha a classificação de uma sentença matemática envolvendo conjunto numérico em verdadeira ou falsa. A questão 49, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera que o aprendiz identifique, por exemplo, que a sentença “*Todo número racional é real*” é verdadeira. Então, os números 0 e 2 da coluna T_{CV} exprimem que cada livro analisado apresentou 0 e 2 tarefas que envolvem classificar em verdadeiro ou falso, respectivamente.

Tarefas que envolvem *encontrar* fração geratriz de números racionais (T_G)

- 20 Transforme em fração irredutível os números racionais:
- a) 2,5
 - b) 3,81
 - c) 0,03
 - d) 4,222... (dízima periódica)
 - e) 3,4555... (Para obter a geratriz dessa dízima, faça $g = 3,4555...$; a seguir, multiplique por 10 e por 100 ambos os membros dessa igualdade; finalmente, efetue $100g - 10g$.)

Figura 4.11: Ilustração de T_G . (PAIVA, p.20, 2004)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha a transformação de um racional na sua forma decimal em forma de fração. A questão 20, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz transforme, por exemplo, o número 2,5 na fração irredutível $\frac{5}{2}$. Então, os números 0 e 1 da coluna T_G exprimem que cada livro analisado apresentou 0 e 1 tarefas que envolvem encontrar fração geratriz, respectivamente.

Tarefas que envolvem *obter* número irracional entre dois números dados (T_E)

48 Obtenha dois números irracionais da forma $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{N}$, que estejam compreendidos entre 5 e 6.

Figura 4.12: Ilustração de T_E . (PAIVA, p.25, 2004)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha obter número irracional entre dois números reais dados. A questão 48, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz obtenha dois números irracionais entre os reais 5 e 6. Então, os números 5 e 3 da coluna T_E exprimem que cada livro analisado apresentou 5 e 3 tarefas que envolvem obter número irracional entre dois outros números, respectivamente.

Tarefas que envolvem *calcular* utilizando aproximação (T_{CAL})

32 Os números seguintes são valores aproximados de $\sqrt{20}$.

4	4,4	4,48	4,472
---	-----	------	-------

a) Calcule o quadrado de cada um desses números, indicando se é maior ou menor do que $\sqrt{20}$. Menor; menor; maior; menor.

b) Qual desses números é a melhor aproximação de $\sqrt{20}$? 4,472

Figura 4.13: Ilustração de T_{CAL} . (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.22, 2002)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha calcular o valor aproximado de um número irracional ou efetuar cálculos com valores aproximados de números irracionais. A questão 32, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz responda que a melhor aproximação do número irracional $\sqrt{20}$ entre as opções dadas é o número 4,472. Então, os números 14 e 0 da coluna T_{CAL} exprimem que cada livro analisado apresentou 14 e 0 tarefas que envolvem calcular utilizando aproximação, respectivamente.

Tarefas que envolvem escrever “sequência” de irracionais (T_{ES})

35 Escreva os cinco termos seguintes da sequência:

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \dots, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$

Quais deles são irracionais?

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$

Figura 4.14: Ilustração de T_{ES} . (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.22, 2002)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha escrever “sequências” de números irracionais ou obter a ordem entre números irracionais dados ou entre números reais dados. A questão 35, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz obtenha a seguinte “sequência” $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{9}, \sqrt{10}, \sqrt{11}$. Então, os números 1 e 0 da coluna T_{ES} exprimem que cada

livro analisado apresentou 1 e 0 tarefas que envolvem escrever sequência de irracionais, respectivamente.

Tarefas que envolvem representar números na reta real (T_R)

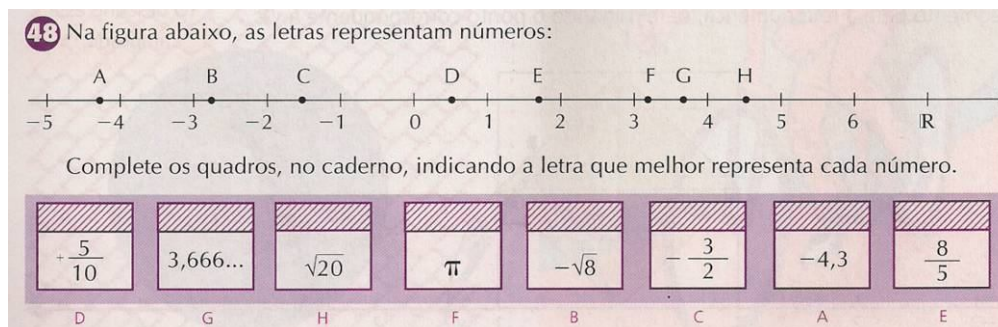


Figura 4.15: Ilustração de T_R . (ANDRINI e VASCONCELLOS, p.48, 2002)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que proponha estabelecer uma correspondência entre pontos da reta real e os números reais e vice versa. A questão 48, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz identifique que o ponto A na reta real representa o número real $-4,3$. Então, os números 3 e 2 da coluna T_R exprimem que cada livro analisado apresentou 3 e 2 tarefas que envolvem representar números na reta real, respectivamente.

Tarefas que envolvem intervalos numéricos (T_I)

51 Considere os infinitos intervalos:

$$A_1 = [0, 1]; A_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right]; A_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right]; A_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right]; \dots; A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]; \dots; n \in \mathbb{N}^*$$

a) Determine $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

b) Determine $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$.

c) Pode-se estender a definição de intersecção de conjuntos para um número infinito de conjuntos, da seguinte maneira:

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots = \{x \mid x \in A_1 \text{ e } x \in A_2 \text{ e } x \in A_3 \text{ e } \dots\}$$

Determine a intersecção de **todos** os intervalos do tipo $\left[0, \frac{1}{n}\right]$, com $n \in \mathbb{N}^*$.

Figura 4.16: Ilustração de T_I . (PAIVA, p.25, 2004)

Como o título sugere, estaremos enquadrando nessa seção qualquer tarefa que envolva operação com intervalo numérico ou representação de intervalo numérico na reta real e vice versa. A questão 51, utilizada aqui como exemplo desse tipo de tarefa, espera, por exemplo, que o aprendiz determine que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = A_4 = \left[0, \frac{1}{4}\right]$. Então, os números 0 e 7 da coluna T_I exprimem que cada livro analisado apresentou 0 e 7 tarefas que envolvem intervalos numéricos, respectivamente.

4.3.3 Matriz tipos de definições

Esta matriz será composta por qualquer tipo de exemplo, propriedade e definição que envolve os conceitos números irracionais e números reais. A escolha de computar definições, exemplos e propriedades em uma mesma matriz, deu-se porque a análise preliminar revelou que os exemplos desempenham duas funções: justificação de propriedades e exemplificação de definições. Embora nenhum exemplo seja suficiente para justificar propriedade e muito menos exibir todo o conteúdo de um conceito, é assim que alguns exemplos têm sido empregados nos livros analisados preliminarmente. Então, esta matriz nos motiva fazer a análise das definições e propriedade interligadas aos exemplos.

Identificação do Livro								
Grupo	Nº	E_{PD}	E_D	E_P	TD	DFI	P	PJ
F	05	0	8	1	D_A / D_C	D_I	8	0
M	23	0	2	16	D_B / D_C	D_I	11	0
Média		0	5	8,5			9,5	0

Tabela 4.3: Matriz tipo de definição

Exemplos:

- E_{PD} : Exemplos que problematizam a necessidade de uma nova definição

Para esta variável não detectamos nenhum dado na análise preliminar dos livros escolhidos.

- E_D : Exemplos das definições

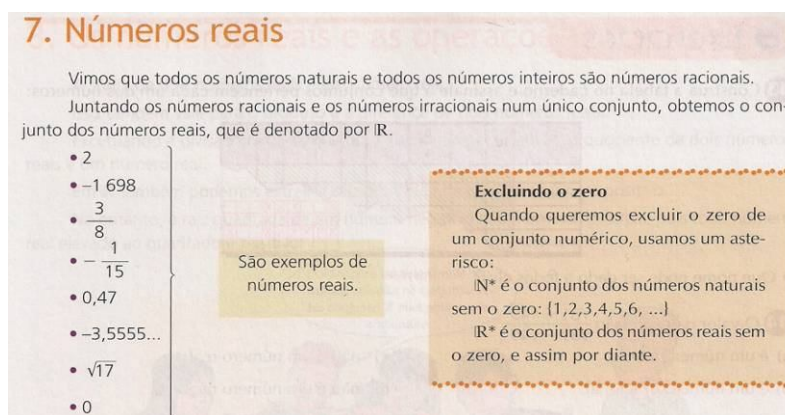


Figura 4.17: Ilustração de E_D . (ANDRINI e VASCONCELLOS, p. 25, 2002)

Então, os números 8 e 2 da coluna E_D exprimem que cada livro analisado apresentou 8 e 2 exemplos para definições, respectivamente.

- E_p : Exemplos de propriedades.

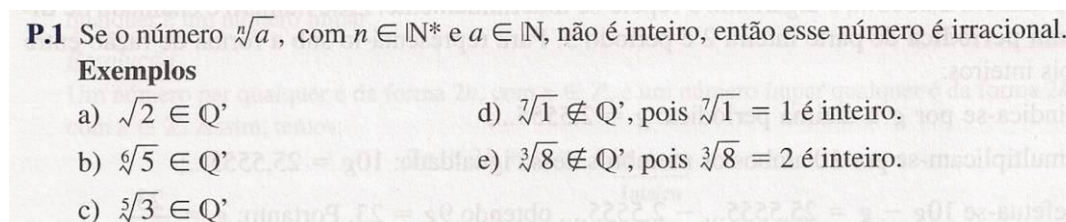


Figura 4.18: Ilustração de E_p . (PAIVA, p.18, 2004)

Então, os números 1 e 16 da coluna E_p exprimem que cada livro analisado apresentou 1 e 16 exemplos para propriedades, respectivamente.

Tipos de definição (TD):

- D_A : Número irracional é um número que não é racional.

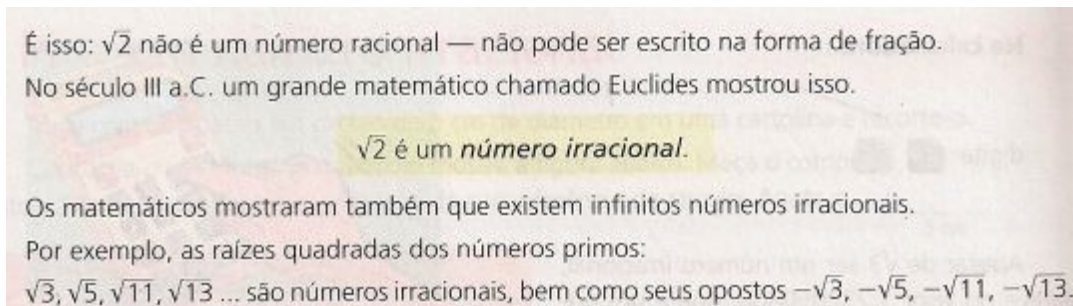


Figura 4.19: Ilustração de D_A . (ANDRINI e VASCONCELLOS, p. 21, 2002)

- D_B : Dentre os números representados na forma decimal, número irracional é um número que possui infinitas casas decimais e não periódicas.

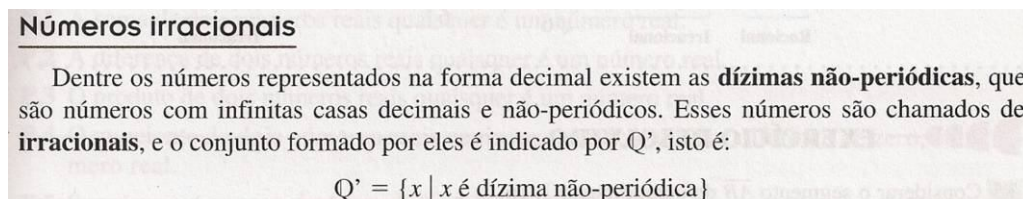


Figura 4.20: Ilustração de D_B . (PAIVA, p.17, 2004)

- D_C : Número real é um número que é irracional ou racional.

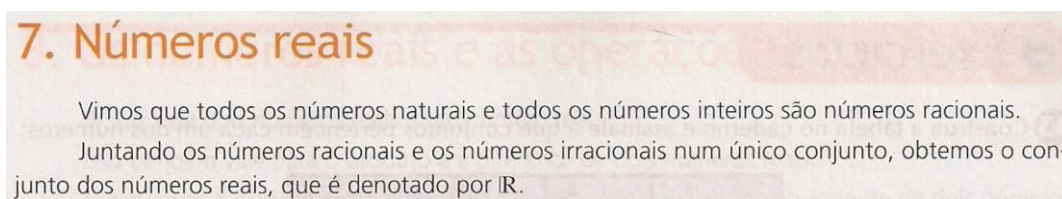


Figura 4.21: Ilustração de D_C . (ANDRINI e VASCONCELLOS, p. 25, 2002)

Momento em que a definição aparece no LD (DFI).

- D_F : é o fim do processo.

Entenderemos que uma definição é o fim do processo se for criada alguma problemática nos Livros didáticos para que haja necessidade da construção dos números irracionais ou reais, ou seja, a definição será o fechamento de metodologia aplicada ao conceito número real.

- D_1 : é o início de processo.

Entendemos que um a definição é o início do processo se os conceitos número irracional e/ou número real forem desenvolvidos a partir de suas respectivas definições.

Propriedades

- P: Quantidade de propriedades apresentadas.
- PJ: Quantidade de propriedades justificadas.

4.2.4 Matriz tipos de representação

Esta matriz tem por objetivo categorizar os tipos de representação propostas nos Livros didáticos no ensino de número irracional / real e será composta por qualquer representação relacionada com número irracional / real de qualquer natureza.

Identificação do Livro		Bloco Representação			
Grupo	Nº	RF	RSN	RSA	RLN
F	05	2	33	1	9
M	23	13	30	21	24

Tabela 4.4: Matriz tipos de representação

As siglas possuem a seguintes denominações:

- RF: Registro figural;
- RSN: Registro Simbólico Numérico;
- RSA: Registro Simbólico Algébrico;

- RLN: Registro na língua natural.

4.3.5 Matriz tipos de abordagem histórica

Esta matriz tem por objetivo categorizar os tipos de abordagem histórica propostas nos Livros didáticos no ensino de número irracional / real e será composta por qualquer menção a história da matemática.

Identificação do Livro		Abordagem Histórica
Grupo	Nº	TAH
F	05	AHD1 / AHD1
M	23	0

Tabela 4.5: Matriz tipos abordagem histórica

TAH: Tipo de abordagem Histórica

AHD: Abordagem histórica deslocada da teoria e que serve apenas como informação adicional, dando ênfase a datas e nomes.

- AHD1: Abordagem no decorrer do texto;
- AHD2: Abordagem no fim do texto como anexo ou apêndice.

O símbolo AHD1 / AHD1 dado na matriz acima significa que o livro analisado continha dois textos relacionados à história da matemática e ambos estão relacionados a informações adicionais dispostos no decorrer do texto.

AHC: Abordagem complementar à teoria ou que problematiza e enriquece a introdução do conceito.

- AHC1: Abordagem no decorrer do texto;
- AHC2: Abordagem no fim do texto como anexo ou apêndice.

CAPÍTULO 5: ANÁLISE E INTERPRETAÇÃO DOS DADOS.

5.1 Análise e algumas reflexões

5.1.1 Matriz tipos de definições

Essa matriz é composta pelas seguintes variáveis de análise:

- ER: Exercícios resolvidos;
- E_{PD} : Exemplos que problematizam uma definição;
- E_D : Exemplos de definição;
- E_P : Exemplos de propriedades;
- TD: Tipo de definição;
- P: Propriedades;
- PJ: Propriedades justificadas.

Identificação do livro		EXEMPLOS - DEFINIÇÕES – PROPRIEDADES						
GRUPO	Nº	ER	E_{PD}	E_D	E_P	TD	P	PJ
F	2	15	0	7	7	D_B/D_C	2	0
F	3	0	0	3	15	D_A/D_C	0	0
F	5	4	0	8	1	D_A/D_C	8	0
F	7	9	1	1	31	D_A/D_C	12	0
F	9	3	4	5	3	D_B/D_C	1	0
F	10	0	0	5	0	D_A/D_C	0	0
F	11	1	3	0	0	D_A/D_C	3	0
F	14	0	1	3	13	D_A/D_C	11	0
F	16	5	1	13	3	D_B/D_C	1	0
M	17	12	1	3	13	D_B/D_C	0	0
M	18	7	1	13	0	D_B/D_C	0	0
M	19	1	2	3	12	D_B/D_C	2	0
M	22	10	0	3	11	D_B/D_C	3	0
M	24	2	0	2	16	D_B/D_C	11	0
MÉDIA		4,9	1	4,9	8,9		3,9	0
MÉDIA F.		4,1	1,1	5	8,1		4,2	0
MÉDIA M.		6,4	0,8	4,8	10,4		3,2	0

Tabela 5.1: Matriz tipo de definições apresentados

Essa matriz é composta por exemplos, definições e propriedades encontradas nos 14 livros analisados. Foi observado que cinco livros do ensino fundamental e todos os livros observados do ensino médio analisados utilizaram exercícios resolvidos como estratégia de ensino. De modo geral, os exemplos apresentados de números irracionais são usados principalmente para ilustrar definições e propriedades. Isto é, depois de enunciada uma definição ou uma propriedade, são apresentados alguns exemplos que as verificam. Dos quatorze livros analisados, nove se utilizaram de exemplos de números que não são racionais para introduzir o conceito de número irracional, ilustrando a existência de outro tipo de número que não seja racional. Desses nove livros, dois apresentaram $\sqrt{2}$ como primeiro exemplo de número não racional, três utilizaram números com representação **decimal** infinita e não periódica e três utilizaram a medida da diagonal do quadrado com lado medindo uma unidade. Apesar de algumas coleções introduzirem os conteúdos por meio de um exemplo contextualizado, nenhuma delas utiliza esse exemplo como situação problema para que o aluno resolva inicialmente e construa por si mesmo seu conhecimento a respeito do conteúdo. Verificou-se também os casos de exemplos mais comuns de número irracional apresentados nos livros didáticos: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e π .

As definições apresentadas para os números irracionais foram: “irracional é o número que não pode ser escrito em forma de fração” (D_A) e “dentre os números representados na forma decimal existem as dízimas não-periódicas, chamados de irracionais” (D_B). Sendo que cinco livros adotam a definição D_A , oito a definição D_B e um único livro, que não havendo apresentado qualquer definição de número irracional, utilizou apenas problemas para introduzir o conceito. Todos os livros observados definiram número real da seguinte forma: “qualquer número racional ou irracional é um número real” (D_C). É importante destacar que tanto D_A como D_B pressupõem a existência de outro tipo de número que não seja racional e a possibilidade de decidir se estes números podem ou não ser escritos em forma de fração de inteiros. Assim, as definições são logicamente recursivas e, do ponto de vista matemático, não podem nem mesmo ser consideradas definições. Além disso, a definição D_B se baseia na suposição de que todo número real admite representação decimal, o que é uma propriedade

consideravelmente não trivial, cuja verificação depende da familiaridade com alguma noção de convergência. Outro problema é a falta de caracterização em relação à natureza do numerador e do denominador de frações, o que pode acarretar em uma confusão do conceito de fração com o conceito mais geral de razão (que não corresponde necessariamente a números racionais). Além disso, sabemos que os números complexos não reais, não podem ser escritos em forma de fração de inteiros, mas nem por isso são classificados como irracionais.

As propriedades destacadas encontradas nos Livros didáticos envolvem fundamentalmente as operações (fechamento e relações de operações entre racionais e irracionais) e a localização de pontos na reta. Destaca-se a utilização de exemplos para ilustrar as propriedades. Como nenhuma propriedade é demonstrada formalmente, isto pode levar os aprendizes a desenvolver a falsa imagem de que uma propriedade pode ser verificada através de exemplos. A propriedade de completude apareceu nos livros analisados **na forma de bijeção entre o conjunto dos números reais e os pontos de uma reta, dez livros analisados apresentaram a seguinte afirmação: para cada número real, há um ponto correspondente na reta; e nove livros apresentaram a afirmação: para cada número real, há um ponto correspondente na reta. A propriedade** densidade dos reais foi observada em apenas dois livros didáticos analisados.

5.1.2 Matriz tipo de representações

Essa matriz é composta pelas seguintes variáveis de análise:

- RF: Registro figural;
- RSN: Registro simbólico numérico;
- C. A.: Combinação (**operação**) dos registros simbólicos numéricos anteriores;
- RSA: Registro simbólico algébrico;
- RLN: Registro em língua natural.

Identificação do livro		Representações						
GRUPO	Nº	RF	RSN				RSA	RLN
			DECIMAL	FRACIONÁRIO	RAÍZES	C.A.		
F	2	3	22	4	6	0	8	4
F	3	3	25	12	3	0	7	2
F	5	1	27	3	12	0	7	10
F	7	7	16	14	6	13	16	14
F	9	3	30	3	2	1	2	3
F	10	0	0	0	0	0	0	0
F	11	5	20	10	1	0	8	5
F	14	3	65	22	2	2	20	13
F	16	5	64	8	5	1	14	3
M	17	3	59	19	17	3	4	2
M	18	2	12	1	3	7	7	2
M	19	2	7	0	3	0	8	4
M	22	12	35	1	2	0	32	5
M	24	22	38	0	13	4	28	13
MÉDIA		5,1	30	6,9	5,4	2,2	11,5	5,7
MÉDIA F.		3,3	29,9	8,4	4,1	1,9	9,1	6,
MÉDIA M.		8,2	30,2	4,2	7,6	2,8	15,8	5,2

Tabela 5.2: Matriz tipo de representações apresentadas

Os Livros didáticos analisados apresentaram registros figurais, simbólico-numéricos, simbólico-algébricos e de linguagem natural, privilegiando o registro numérico. Os livros do ensino fundamental e do ensino médio utilizaram os registros figurais na forma de diagonal do quadrado, circunferência para determinação da razão entre comprimento e diâmetro, diagrama de Venn e representação de intervalos numéricos na reta. Estas duas últimas formas apresentam-se em sua maioria no ensino médio para estabelecer uma representatividade para a inclusão dos conjuntos numéricos e para dar a ideia geométrica de intervalos. Em relação ao registro simbólico numérico, destaca-se tanto para o ensino fundamental e quanto para o médio o uso em sua maioria da forma decimal. Na comparação ensino fundamental com ensino médio percebe-se que no ensino fundamental privilegia-se a forma fracionária mais do que o médio e no médio privilegia-se mais as raízes do que o fundamental. Talvez isso ocorra pelo fato das operações entre raízes serem definidas no final do ensino fundamental e as frações serem estudadas desde início do ensino fundamental. Para o registro simbólico algébrico

foi destacado seu uso com mais frequência no ensino médio. Este fato pode indicar uma matemática mais algébrica, mais simbólica sendo ensinada nesse nível.

5.1.3 Matriz tipo de abordagem histórica

Essa matriz é composta pelas seguintes variáveis de análise:

- TAH: Tipo de abordagem histórica;
- AHD: Abordagem deslocada da teoria e que serve apenas como informação adicional, dando ênfase a datas e nomes;
 - AHD1: Abordagem no decorrer do texto;
 - AHD2: Abordagem no fim do texto como anexo ou apêndice;
- AHC: Abordagem complementar à teoria ou que problematiza e enriquece a introdução do conceito;
 - AHC1: Abordagem no decorrer do texto.

Identificação do livro		Abordagem Histórica
GRUPO	Nº	TAH
F	2	AHD1
F	3	AHD2/AHD1/AHD2
F	5	AHD1/AHD1
F	7	AHD1/AHD1
F	9	0
F	10	0
F	11	AHD1/AHD2
F	14	AHD2
F	16	AHC1/AHD1/AHD2
M	17	AHD1
M	18	0
M	19	0
M	22	0
M	24	0

Tabela 5.3: Tipo de abordagem apresentados

Podemos constatar que seis dos livros analisados não continham abordagem histórica e oito continham, sendo todas relacionadas a informações adicionais dispostas no decorrer ou fim do texto. Estes textos enfocam a descoberta de números não racionais pelos gregos, citação do comprimento da circunferência na Bíblia, escola pitagórica, incomensurabilidade, criação dos Reais e utilização de valores aproximados de π por algumas civilizações.

5.1.4 Matriz tipo de tarefas

Identificação do livro		TIPO DE TAREFAS									
GRUPO	Nº	T _{Cξ}	T _{CC}	T _{CV}	T _G	T _E	T _{CAL}	T _{ES}	T _R	T _I	Total
F	2	2	3	1	0	2	8	0	1	1	18
F	3	1	4	1	2	1	6	1	1	0	17
F	5	11	2	0	0	5	14	1	3	0	36
F	7	0	0	0	0	1	3	0	3	0	7
F	9	2	1	0	1	1	8	1	3	0	17
F	10	0	3	0	0	3	2	0	1	0	9
F	11	6	0	1	2	0	0	0	0	4	13
F	14	2	3	3	2	1	7	8	3	0	29
F	16	3	2	0	0	0	12	1	3	0	21
M	17	0	1	1	2	3	3	1	3	11	25
M	18	2	0	2	0	0	0	0	0	2	6
M	19	0	1	2	0	0	0	0	0	2	5
M	22	0	1	4	1	0	0	1	1	9	17
M	24	1	1	2	1	3	0	0	2	7	17
MÉDIA		2,1	1,6	1,2	0,8	1,4	4,5	1	1,7	2,6	16,9
MÉDIA F.		3	2	0,7	0,8	1,6	6,7	1,3	2	0,6	18,6
MÉDIA M.		0,6	0,8	2,2	0,8	1,2	0,6	0,4	1,2	6,2	14

Tabela 5.4: Tipo de tarefas apresentados

Essa matriz é composta pelas seguintes variáveis de análise:

- T_{Cξ}: Tarefas que envolvem *classificar* utilizando a relação de pertinência;
- T_{CC}: Tarefas que envolvem *classificar* entre Racional ou Irracional;
- T_{CV}: Tarefas que envolvem *classificar* entre Verdadeiro ou Falso;
- T_G: Tarefas que envolvem *encontrar* fração geratriz de números racionais;

- T_E : Tarefas que envolvem *obter* número irracional entre dois números dados;
- T_{CAL} : Tarefas que envolvem *calcular* utilizando aproximação;
- T_{ES} : Tarefas que envolvem escrever “sequência” de irracionais;
- T_R : Tarefas que envolvem representar números na reta real;
- T_I : Tarefas que envolvem Intervalos numéricos.

Nesta seção, dar-se-á a análise das tarefas comuns aos livros observados. Tais tarefas estão representadas pelo seguinte conjunto de tarefas $\{ T_{CC}, T_{C\in}, T_{CV}, T_G, T_E, T_{CAL}, T_{ES}, T_R, T_I \}$. É importante destacar que cada tarefa aqui resolvida encontra-se proposta em algum dos livros analisados e todas as técnicas utilizadas foram extraídas dos livros analisados. Durante a análise de cada tarefa realizaremos a seguinte sequência de etapas:

- Etapa 1: Enunciar o gênero de tarefa;
- Etapa 2: Listar as possíveis variações desse gênero de tarefa encontradas nos livros analisados;
- Etapa 3: Resolver cada variação de tarefa, utilizando técnicas expostas nos livros analisados, assim descreveremos os tipos de técnicas utilizadas;
- Etapa 4: Descrever as tecnologias e teorias utilizadas no gênero de tarefa analisada, ou seja, identificar o bloco tecnológico-teórico utilizado;
- Etapa 5: Discutir a organização praxeológica desenvolvida em cada gênero de tarefa;
- Etapa 6: Descrever os tipos de registros utilizados nas tarefas dos livros analisados;
- Etapa 7: Descrever como se relacionam os registros identificados em cada gênero de tarefa, isto é, descrever os tipos de tratamentos e conversões, caso existam.

Lembremos que, segundo Chevallard, uma Tarefa (T) é tudo aquilo que é pedido para uma pessoa fazer. Toda tarefa faz parte de uma rede de tarefas designada tipo de tarefas, por sua vez todo tipo de tarefa faz parte de uma rede chamada gênero de tarefa. Uma técnica (τ) é uma maneira de fazer uma tarefa, é o saber fazer. Tecnologia (θ) é todo discurso racional que justifica e esclarece uma técnica. Teoria (Θ) é todo discurso que justifica a tecnologia.

Tarefa T_{CC} : Tarefas que envolvem classificar entre Racional ou Irracional

Etapa 1: Essa tarefa faz parte do seguinte gênero de tarefa: dado um número real a , ele é racional ou irracional?

Etapas 2 e 3: Esse gênero de tarefa foi formado pelas seguintes variações de tarefas encontradas nos livros analisados:

(t_1): -76 é racional ou irracional?

(τ_1): É racional, pois pode ser escrito em forma de fração de inteiros.

(τ_2): É racional, pois possui representação decimal finita.

(t_2): $\frac{1}{3}$ é racional ou irracional?

(τ_1): É racional, pois está escrito em forma de fração de inteiros.

(τ_2): É racional, pois possui representação decimal infinita ou periódica.

(t_3): 4,25 é racional ou irracional?

(τ_1): É racional, pois pode ser escrito em forma de fração de inteiros. Assim como todo decimal exato.

(τ_2): É racional, pois possui representação decimal finita.

(t_4): 8,434343... é racional ou irracional?

(τ_1): É racional, pois pode ser escrito em forma de fração de inteiros. Assim como toda dízima periódica.

(τ_2): É racional, pois possui representação decimal infinita periódica.

(t₅): $\sqrt{81}$ é racional ou irracional?

(τ₁): $\sqrt{81} = \sqrt{9^2} = 9$. É racional, pois a raiz quadrada de número natural quadrado perfeito é um número inteiro que por sua vez é racional de acordo com o exposto em (t₁).

(t₆): $\sqrt[3]{8}$ é racional ou irracional?

(τ₁): $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$. É racional, pois a raiz cúbica de número inteiro que é cubo perfeito é um número inteiro que por sua vez é racional de acordo com o exposto em (t₁).

(t₇): $\sqrt{3}$ é racional ou irracional?

(τ₁): É irracional, pois a raiz quadrada de número natural que não é quadrado perfeito é um número irracional.

(τ₂): É irracional, pois a raiz quadrada de número primo é um número irracional.

(τ₃): É irracional, pois possui representação decimal infinita e não periódica.

(τ₄): É irracional, pois não pode ser escrito em forma de fração de inteiros.

(τ₅): É irracional, pois $\sqrt{3}$ é exemplo genérico de número irracional.

(t₈): $\sqrt[3]{5}$ é racional ou irracional?

(τ₁): É irracional, pois a raiz cúbica de número inteiro que não é cubo perfeito é um número irracional.

(τ₂): É irracional, pois não pode ser escrito em forma de fração de inteiros.

(τ₃): É irracional, pois possui representação decimal infinita e não periódica.

(t₉): π é racional ou irracional?

(τ_1): É irracional, pois π é exemplo genérico de número irracional.

(τ_2): É irracional, pois possui representação decimal infinita e não periódica.

(t_{10}): $5 \pm \sqrt{3}$ é racional ou irracional?

(τ_1): É irracional, pois a adição/subtração de um número racional com um número irracional resulta em um número irracional.

(t_{11}): $2\sqrt[3]{5}$ é racional ou irracional?

(τ_1): É irracional, pois a multiplicação de um número racional com um número irracional resulta em um número irracional.

(t_{12}): $2\sqrt[3]{8}$ é racional ou irracional?

(τ_1): É racional, pois a multiplicação de um número racional com um número racional resulta em um número racional.

(t_{13}): $\frac{2}{\sqrt{3}}$ é racional ou irracional?

(τ_1): É irracional, pois a divisão de um número racional por um número irracional resulta em um número irracional.

(t_{14}): $\sqrt{1,44}$ é racional ou irracional?

(τ_1): É racional, pois $\sqrt{1,44} = \sqrt{\frac{144}{100}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{100}} = \frac{12}{10} = 1,2$.

(t₁₅): $\sqrt{5,2}$ é racional ou irracional?

(τ_1): Irracional, pois $\sqrt{5,2} = \sqrt{\frac{52}{10}} = \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{130}}{5}$ e a divisão de um número

irracional por um número racional resulta em um número irracional.

Etapa 4: Bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] encontrado nesse gênero de tarefa:

[θ/Θ]₁: Utilização das definições de número irracional (D_A , D_B) e da definição de número racional;

[θ/Θ]₂: Utilização de propriedades relacionadas ao fechamento de algumas operações:

1. A soma de dois números racionais quaisquer é um número racional.
2. A diferença de dois números racionais quaisquer é um número racional.
3. O produto de dois números racionais quaisquer é um número racional.
4. O quociente de dois racionais quaisquer, sendo o divisor diferente de zero, é um racional.
5. A soma de um número racional com um número irracional é um número irracional.
6. A diferença de um número racional com um número irracional é um número irracional.
7. O produto de um número racional com um número irracional é um número irracional.
8. O quociente de um número racional, não nulo, com um número irracional é um número irracional.

[θ/Θ]₃: Utilização de propriedades relacionadas a radiciação:

1. A \sqrt{a} , com a sendo número primo é um número irracional.
2. A \sqrt{a} , com a sendo número não quadrado perfeito é um número irracional.
3. Se $\sqrt[n]{a}$, com $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{N}$, não é inteiro, então essa raiz é um número irracional.
4. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, para n número par, a número racional não negativo e b número racional positivo. Para n número ímpar, a número racional qualquer e b número racional diferente de zero.

[θ/Θ]₄: Utilização de propriedades relacionadas a inclusão de conjuntos numéricos:

1. Todo número natural é inteiro.
2. Todo número inteiro é racional.

[θ/Θ]₅: Utilização de propriedades relacionadas a representação do número.

1. Todo número decimal exato pode ser escrito em forma de fração de números inteiros.
2. Toda dízima periódica pode ser escrita em forma de fração de números inteiros.
3. Toda fração de inteiros possui representação decimal finita ou infinita periódica.

[θ/Θ]₆: Prova por absurdo.

Etapa 5: O gênero de tarefa relacionado a classificar em racional ou irracional, apresentou um bloco *saber-fazer* [T/ τ] vasto, baseado em técnicas tanto conceituais quanto operacionais. O bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] também se apresentou vasto, porém nenhuma das propriedades utilizadas como teoria para solução dos problemas não foram provadas nos livros analisados. Então, podemos concluir que a praxeologia relacionada ao respectivo gênero de tarefa é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber fazer.

Etapa 6: Os enunciados e técnicas relacionados ao gênero de tarefa analisado apresentam em sua totalidade registro de representação simbólico numérico na forma de número decimal, número fracionário, raízes, irracionais genéricos e a combinação desses.

Etapa 7: As tarefas t_{14} e t_{15} foram resolvidas utilizando conversão do registro numérico decimal para o registro numérico fracionário e a manipulação de alguns tratamentos na realização de algumas operações. O restante das tarefas ($t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}, t_{13}$) pode ser resolvido apenas observando o tipo de representação utilizada para os números a serem classificados. Essa característica vai em direção contrária ao que Duval afirma: o conceito não pode ser confundido com sua representação.

Tarefa $T_{C\epsilon}$: Tarefas que envolvem classificar utilizando a relação de pertinência

Etapa 1: Essa tarefa faz parte do seguinte gênero de tarefa: Classifique se $a \in A$ ou se $a \notin A$, onde a é um número real e $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \mathbb{R}\}$.

Etapas 2 e 3: Esse gênero de tarefas utiliza-se das mesmas técnicas que foram utilizadas no gênero de tarefa anterior. As técnicas que se acrescentam estão relacionadas à teoria de conjuntos, em especial, a relação de pertinência que se dá entre elemento e conjunto.

Etapa 4: Bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ encontrado nesse gênero de tarefa:

Esse gênero de tarefas utiliza-se das mesmas teorias que foram utilizadas no gênero de tarefa anterior. O que se acrescenta está relacionado à teoria de conjuntos, em especial, a relação de pertinência que se dá entre elemento e conjunto. Isto é, como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, então um número que pertence aos naturais pertencerá também aos inteiros, racionais e os reais. Também são utilizadas as relações entre os conjuntos racionais e irracionais: $\mathbb{Q} \cup I = \mathbb{R}$ e $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$.

Etapa 5: O gênero de tarefa relacionado a relação de pertinência apresentou um bloco *saber-fazer* $[T/\tau]$ vasto, baseado em técnicas tanto conceituais quanto operacionais. O bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ também se apresentou vasto, porém nenhuma das propriedades utilizadas como teoria para solução dos problemas foi provada nos livros analisados, com exceção das inclusões $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. A justificativa apresentada pelos livros para primeira inclusão dá-se pela forma como os inteiros são gerados: acrescenta-se números negativos aos números naturais, esses números negativos são entendidos como número opostos aos números naturais. A segunda inclusão é justificada usando a fração de inteiros $\frac{n}{1}$, em que n pertence ao conjunto dos números inteiros. A terceira inclusão é justificada pela forma cíclica pela qual os irracionais e os reais são definidos. Então, podemos concluir que a praxeologia relacionada ao respectivo gênero de tarefa é completa.

Etapa 6: Os enunciados relacionados ao gênero de tarefa analisado apresentam em sua totalidade o registro de representação simbólico numérico na forma de número decimal, número fracionário, raízes, irracionais genéricos e a combinação desses.

Etapa 7: As tarefas t_{14} e t_{15} foram resolvidas utilizando conversão do registro numérico decimal para o registro numérico fracionário e a manipulação de alguns tratamentos na realização de algumas operações. O restante das tarefas ($t_1, t_2, t_3, \dots, t_{12}, t_{13}$) pode ser resolvido apenas observando o tipo de representação utilizada para os números a serem classificados. Essa característica vai em direção contrária ao que Duval afirma: o conceito não pode ser confundido com sua representação.

Tarefa T_G : Tarefas que envolvem encontrar fração geratriz de números racionais

Etapa 1: Essa tarefa faz parte do seguinte gênero: considerando $a, a_1 a_2 \dots a_m \overline{b_1 b_2 \dots b_n}$ uma dízima periódica, em que a é a parte inteira, $a_1 a_2 \dots a_m$ representa a parte não periódica e $\overline{b_1 b_2 \dots b_n}$ a parte periódica, encontre sua fração geratriz.

Etapas 2 e 3: Esse gênero de tarefa foi formado pelas seguintes variações de tarefas (t) encontradas nos livros analisados:

(t₁): Encontre a fração geratriz do número 0,777... .

Assim, temos

(τ₁): Dado $x = 0,777\dots$, temos

$$\begin{aligned} x &= 0,777\dots & \text{(I)} \\ 10x &= 7,777\dots & \text{(II): (I) x 10} \\ 9x &= 7 & \text{(III): (II) - (I)} \\ x &= \frac{7}{9} & \text{(IV): (III) x } \left(\frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

(t₂): Encontre a fração geratriz do número 2,555... .

(τ₁): Dado $x = 2,555\dots$, temos

$$\begin{aligned} x &= 2,555\dots & \text{(I)} \\ 10x &= 25,555\dots & \text{(II): (I) x 10} \\ 9x &= 23 & \text{(III): (II) - (I)} \\ x &= \frac{23}{9} & \text{(IV): (III) x } \left(\frac{1}{9}\right) \end{aligned}$$

(τ₂): Dado $x = 2,555\dots = 2 + 0,555\dots$, temos $x = 2 + \frac{5}{9} = \frac{18}{9} + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}$.

(t₃): Encontre a fração geratriz do número 0,35111... .

(τ_1): Dado $x = 0,35111\dots$, temos

$$\begin{aligned} x &= 0,35111\dots & \text{(I)} \\ 1000x &= 351,111\dots & \text{(II): (I) x 1000} \\ 100x &= 35,111\dots & \text{(III): (I) x 100} \\ 900x &= 316 & \text{(IV): (II) - (III)} \\ x &= \frac{316}{900} & \text{(V): (IV) x } \left(\frac{1}{900} \right) \end{aligned}$$

(t_4): Encontre a fração geratriz do número 2,7333...

(τ_1): Dado $x = 2,7333\dots$, temos

$$\begin{aligned} x &= 2,7333\dots & \text{(I)} \\ 100x &= 273,333\dots & \text{(II): (I) x 100} \\ 10x &= 27,333\dots & \text{(III): (I) x 10} \\ 90x &= 246 & \text{(IV): (II) - (III)} \\ x &= \frac{246}{90} & \text{(V): (IV) x } \left(\frac{1}{90} \right) \end{aligned}$$

(τ_2): Dado $x = 2,7333\dots = 2,7 + 0,0333\dots$, temos

$$x = 2,7 + \frac{3}{90} = \frac{27}{10} + \frac{3}{90} = \frac{243}{90} + \frac{3}{90} = \frac{246}{90}.$$

Etapa 4: Bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] encontrado nesse gênero de tarefa:

[θ/Θ]₁: Utilização do método que multiplica por potências de 10.

1. Toda dízima periódica é uma série infinita.
2. Série infinita é um limite de uma sequência.
3. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é uma série convergente e k é uma constante real, então a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (k \cdot x_n) \text{ é convergente e seu limite é dado por } \sum_{n=1}^{+\infty} (k \cdot x_n) = k \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n).$$

4. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} y_n$ são séries convergentes, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n)$ é convergente

$$\text{e seu limite é dado por } \sum_{n=1}^{+\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n + \sum_{n=1}^{+\infty} y_n$$

Etapa 5: O tipo de tarefa relacionado a obter a fração geratriz de uma dízima periódica apresentou um bloco *saber-fazer* [T/τ] composto por dois métodos básicos: multiplicar por potências de 10 e soma dos termos de uma progressão geométrica. O bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] é composto por conceitos relacionado a séries: definição de série, convergência de série e propriedades de séries convergentes. Então, podemos concluir que a praxeologia relacionada à respectiva tarefa é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber fazer. Uma vez que os conceitos relacionados a séries não fazem parte da educação básica.

Etapa 6: Os enunciados relacionados ao gênero de tarefa analisado apresentam em sua totalidade registro de representação simbólico numérico na forma de número decimal infinito e periódico. Nas técnicas utilizadas os registros utilizados são os da forma de decimal exato e fracionário.

Etapa 7: Nas técnicas analisadas ao gênero de tarefa referido observamos alguns tratamentos em solução de equações e nas operações entre números. Houve conversão do registro numérico decimal para o numérico fracionário. Nesse gênero de tarefa destaca-se o fenômeno de não congruência (entrada: registro numérico decimal e saída: registro numérico fracionário).

Tarefa T_E : Tarefas que envolvem encontrar um número real entre outros dois números reais.

Etapa 1: Essa tarefa faz parte do seguinte gênero de tarefa: encontre um número real a entre os dois números reais b e c .

Etapas 2 e 3: Esse gênero de tarefa foi formado pelas seguintes variações de tarefas (t) encontradas nos livros analisados:

(t₁): obter um número racional entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$.

(τ₁): Utilizar média aritmética.

$$a = \frac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \frac{\frac{8+9}{12}}{2} = \frac{17}{24}$$

(τ₂): Escrever frações equivalentes que tenham o mesmo denominador.

Como $\frac{2}{3} = \frac{8}{12} = \frac{16}{24}$ e $\frac{3}{4} = \frac{9}{12} = \frac{18}{24}$, temos que encontra um número a tal que $\frac{8}{12} < a < \frac{9}{12}$.

Por exemplo $\frac{17}{24}$.

(τ₃): Passar as frações para representação decimal.

Como $\frac{2}{3} = 0,666\dots$ e $\frac{3}{4} = 0,75$, temos que encontra um número a tal que $0,666\dots < a < 0,75$. Por exemplo, $0,708333\dots$

(t₂): obter um número racional entre π e $\sqrt{17}$.

(τ₁): Utilizar a representação decimal dos números dados.

Como $\pi = 3,14159265\dots$ e $\sqrt{17} = 4,12310562\dots$, então desejamos o número racional a que satisfação $\pi < a < \sqrt{17}$, isto é, $3,14159265\dots < a < 4,12310562\dots$. Assim, podemos gerar um número racional a desejado manipulando a parte decimal dos irracionais dados. Por exemplo, $a = 3,24159265$.

(t₃): obter um número irracional entre $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$.

(τ_1): Desejamos o número irracional a que satisfaça $\frac{22}{3} < a < \frac{23}{3}$. Como $\frac{22}{3}$ e $\frac{23}{3}$ são números positivos maiores que 1, então: $\left(\frac{22}{3}\right)^2 < a^2 < \left(\frac{23}{3}\right)^2$. Logo, $\frac{484}{9} < a^2 < \frac{529}{9}$. Assim podemos atribuir a a^2 uma fração de inteiro conveniente que esteja entre $\frac{484}{9}$ e $\frac{529}{9}$. Por exemplo, $a^2 = \frac{495}{9}$. Logo, $\frac{484}{9} < \frac{495}{9} < \frac{529}{9}$, então $\frac{484}{9} < 55 < \frac{529}{9}$. Extraindo a raiz de todos os membros dessa desigualdade, temos: $\sqrt{\frac{484}{9}} < \sqrt{55} < \sqrt{\frac{529}{9}}$; $\frac{22}{3} < \sqrt{55} < \frac{23}{3}$. Assim, $\sqrt{55}$ é o irracional desejado.

(τ_2): Utilizar a representação decimal dos números dados.

Desejamos o número irracional a que satisfaça $\frac{22}{3} < a < \frac{23}{3}$. Sabemos que $\frac{22}{3} = 7,333\dots$ e $\frac{23}{3} = 7,666\dots$, então podemos gerar um número irracional a desejado manipulando a parte decimal dos racionais dados. Por exemplo, $a = 7,412345\dots$ ou até mesmo o $\sqrt{55} = 7,41619848\dots$ da solução anterior.

(t_5): obter um número irracional entre π e $\sqrt{17}$

(τ_1): Utilizar a representação decimal dos números dados.

Como $\pi = 3,14159265\dots$ e $\sqrt{17} = 4,12310562\dots$, então desejamos o número irracional a que satisfaça $\pi < a < \sqrt{17}$, isto é, $3,14159265\dots < a < 4,12310562\dots$. Assim, podemos gerar um número irracional a desejado manipulando a parte decimal dos irracionais dados. Por exemplo, $a = 3,24159265\dots$.

Etapa 4: Bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] encontrado nesse gênero de tarefa:

$[\theta/\Theta]_1$: Utilização da propriedade de densidade dos reais (média aritmética).

$[\theta/\Theta]_2$: Utilização de frações equivalentes.

$[\theta/\Theta]_3$: Utilização da propriedade de que toda fração de inteiros possui uma representação decimal.

$[\theta/\Theta]_4$: Utilização da propriedade/definição de que todo número irracional possui infinitas casa decimais e não periódicas.

$[\theta/\Theta]_5$: Utilização da propriedade de que dados a, b números reais positivos. Se $a < b$ então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Etapa 5: O gênero de tarefa relacionado a encontrar um número entre dois reais, apresentou no bloco *saber-fazer* $[T/\tau]$ técnicas operacionais. O bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ apresentou propriedades utilizadas que não foram provadas nos livros analisados. Por exemplo, a propriedade de densidade dos reais. Então, podemos concluir que a praxeologia relacionada ao respectivo gênero de tarefa é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber fazer.

Etapa 6: Os enunciados e técnicas relacionados ao gênero de tarefa analisado apresentam em sua totalidade registro de representação simbólico numérico na forma de número fracionário, raízes, irracionais genéricos e a combinação desses.

Etapa 7: Nas técnicas analisadas ao gênero de tarefa referido observamos alguns tratamentos na busca frações equivalentes e nas operações entre frações. Houve conversão do registro numérico fracionário para o numérico decimal. Nesse gênero de tarefa destaca-se o

fenômeno de não congruência (entrada: registro numérico fracionário e saída: registro numérico decimal).

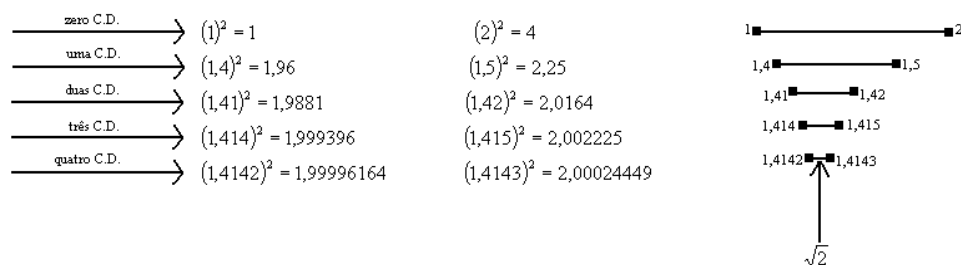
Tarefa T_{CAL} : Tarefas que envolvem calcular utilizando aproximações.

Etapa 1: Essa tarefa faz parte do seguinte gênero de tarefa: calcule o valor aproximado do número irracional a .

Etapas 2 e 3: Esse gênero de tarefa foi formado pelas seguintes variações de tarefas (t) encontradas nos livros analisados:

(t_1) Determine o valor aproximado de $\sqrt{2}$.

(τ_1): Desejamos encontrar uma aproximação para a raiz quadrada de 2. Isto é, estamos a procura de um número racional que elevado ao quadrado resulte no valor mais próximo de 2, que depende diretamente do número de casas decimais desejadas para a aproximação. A figura abaixo mostra a sequência das aproximações por falta (1; 1,4; 1,41; 1,414, 1,4142;) e a sequência das aproximações por excesso (2; 1,5; 1,42; 1,415; 1,4143;...) do número $\sqrt{2}$.



(t_2) Determine o valor aproximado de π .

(τ_1): Sendo $\pi = 3,14159265\dots$, temos a seguinte sequência de suas aproximações (3; 3,1; 3,14; 3,142; 3,1416; 3,14159; ...). Observemos que a aproximação de π com uma casa

decimal é 3,1 e com duas casas decimais 3,14, foram ambas obtidas fazendo o truncamento na respectiva casa decimal desejada uma vez que a próxima casa décimas é ocupada por um número menor que 5, caso contrário devemos fazer um acréscimo de uma unidade na aproximação. Esse exercício requer uma dificuldade a mais em relação ao exercício anterior, vejamos a aproximação de π com três casas decimais.

(t₃): calcule o valor aproximado da soma $8 + \sqrt{2}$, com duas casas decimais:

(τ_1): $8 + \sqrt{2} \cong 8 + 1,41 \cong 9,41$ este resultado é a aproximação por falta. $8 + \sqrt{2} \cong 8 + 1,42 \cong 9,42$ este resultado é a aproximação por excesso.

(t₄): calcule o valor aproximado da soma $\pi + \sqrt{2}$, com duas casas decimais:

(τ_1): $\pi + \sqrt{2} \cong 3,14 + 1,41 \cong 4,55$ este resultado é a aproximação por falta. $\pi + \sqrt{2} \cong 3,14 + 1,42 \cong 4,56$ este resultado é a aproximação por excesso.

(t₅): calcule o valor aproximado do produto 3π , com duas casas decimais:

(τ_1): $3\pi \cong 3 \cdot 3,14 \cong 9,42$.

(t₆): calcule o valor aproximado do quociente $\frac{\sqrt{10}}{2}$, com duas casas decimais:

(τ_1): $\frac{\sqrt{10}}{2} \cong \frac{3,16}{2} \cong 1,58$.

(t₇): calcule o valor aproximado do comprimento de circunferência utilizando $\pi \cong 3,14$.

(τ_1): Seja o comprimento da circunferência de raio r dado por $C = 2\pi r$, temos $C \cong 2 \cdot (3,14) \cdot 3 \cong 18,84$.

Etapa 4: Bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ encontrado nesse gênero de tarefa:

$[\theta/\Theta]_1$: Utilização definição da operação de radiciação no conjunto dos número racionais.

$[\theta/\Theta]_2$: Utilização da propriedade de que todo número irracional possui aproximação por falta e por excesso.

$[\theta/\Theta]_3$: Utilização de operações no conjunto dos números racionais.

$[\theta/\Theta]_4$: Utilização do conceito de valor numérico.

Etapa 5: O tipo de tarefa relacionado à aproximação de número real apresentou um bloco *saber-fazer* $[T/\tau]$ composto basicamente da definição de radiciação e a utilização de substituição de variáveis. O bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ é composto por conceitos relacionados com a definição de operações no conjunto dos números racionais. Então, podemos concluir que a praxeologia relacionada à respectiva tarefa é completa, uma vez que os conceitos relacionados a operações nos racionais estão bem definidas.

Etapa 6: Os enunciados e as técnicas relacionados ao gênero de tarefa analisado apresentam em sua totalidade registro de representação simbólico numérico na forma de raízes, números irracionais genéricos e composição entes esses. Também foi utilizado o registro algébrico na composição de fórmulas ($C = 2\pi r$) e expressões algébricas.

Etapa 7: Nas técnicas analisadas ao gênero de tarefa referido observamos alguns tratamentos no cálculo do valor numérico de fórmulas e expressões algébricas e nas operações entre números racionais. Houve conversão do registro numérico decimal infinito para registro numérico decimal finito. Nesse gênero de tarefa destaca-se o fenômeno de congruência (entrada: registro numérico decimal exato e saída: registro numérico decimal exato).

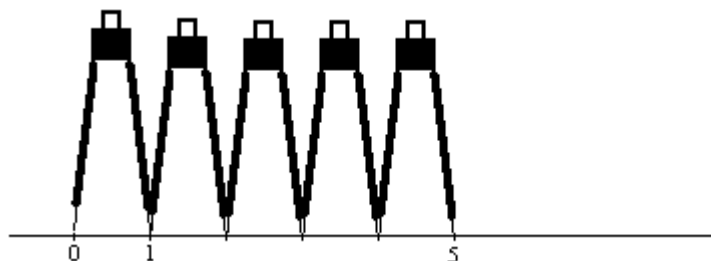
Tarefa T_R : Tarefas que envolvem representar números na reta real.

Etapa 1: Essa tarefa faz parte do seguinte gênero de tarefa: dado um número real a , represente-o na reta real.

Etapas 2 e 3: Esse gênero de tarefa foi formado pelas seguintes variações de tarefas (t) encontradas nos livros analisados:

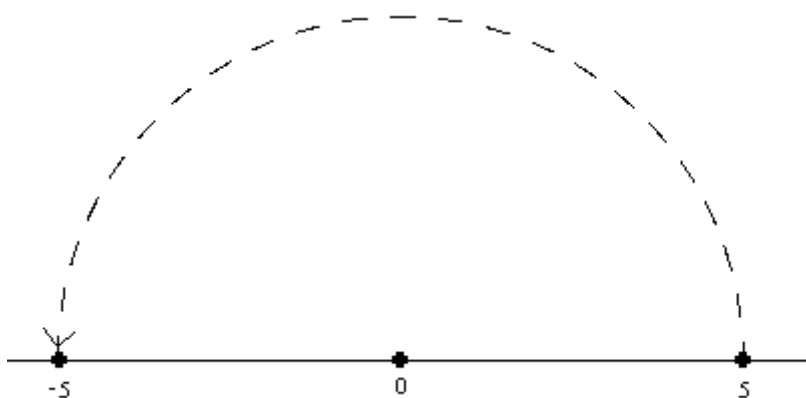
(t_1): Represente na reta real o número 5?

(τ_1): Escolher um ponto na reta como origem, esse ponto é o zero (0) da reta. Marcar outro ponto sobre a reta, chamado de (1). Normalmente pontos à direita de zero representam números positivos e os pontos à esquerda representam números negativos. O segmento de extremidade 0 e 1 mede uma unidade. Para marcarmos o número inteiro positivo cinco, construímos cinco unidades à direita de zero com auxílio do compasso.

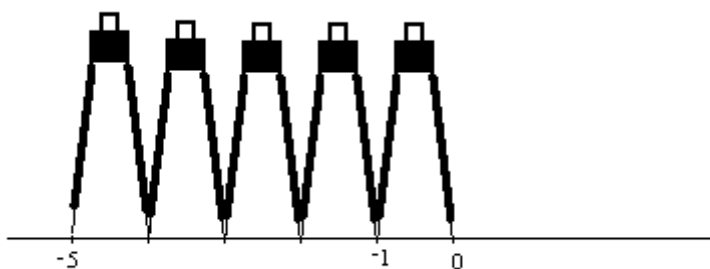


Esta técnica se aplica a qualquer número inteiro.

Para marcar o inteiro negativo cinco basta tomar o segmento de extremidades 0 e 5 e com auxílio do compasso marcarmos o ponto que representa o -5 à esquerda do zero. Esta técnica se aplica a qualquer número real negativo.



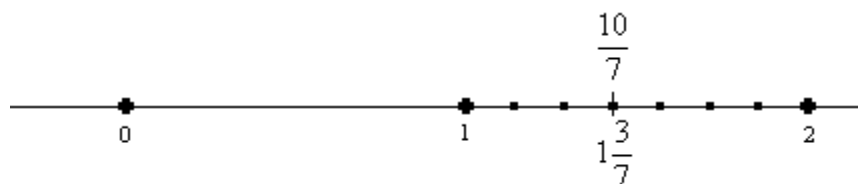
Ou procedemos como descrito em (τ_1) da direita para esquerda.



Assim, com estas técnicas pode-se marcar na reta real qualquer número inteiro.

(t_2) : Represente na reta real o número $\frac{10}{7}$?

(τ_1) : O número $\frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$ está entre 1 e 2. Dividindo em sete partes iguais o segmento de extremidades 1 e 2 e tomemos as três primeiras partes para determinar o ponto que representa o número $\frac{10}{7}$.

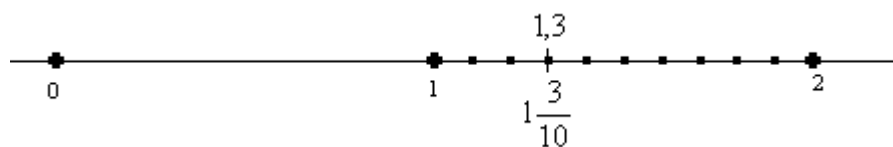


Está técnica se aplica a qualquer fração de números inteiros, cujo denominador é diferente de zero. Lembramos que para se obter frações negativas deve-se aplicar a ideia descrita em (t₁) para valores negativos.

(t₃): Represente na reta real o número 1,3?

(τ₁): Utilizando a representação fracionária: O número $1,3 = \frac{13}{10} = 1\frac{3}{10}$ está entre 1 e

2. Dividindo em dez partes iguais o segmento de extremidades 1 e 2 e tomemos as três primeiras partes para determinar o ponto que representa o número 1,3.

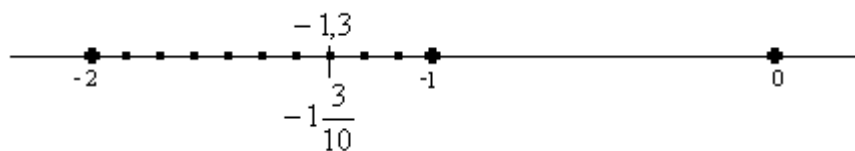


Esta técnica se aplica a qualquer número cuja representação é decimal exata.

(t₄): Represente na reta real o número -1,3?

(τ₁): Utilizando a representação fracionária: O número $-1,3 = -\frac{13}{10} = -1\frac{3}{10}$ está

entre -1 e -2. Dividindo em dez partes iguais o segmento de extremidades -1 e -2 e tomemos as três primeiras partes (da direita para esquerda) para determinar o ponto que representa o número -1,3.



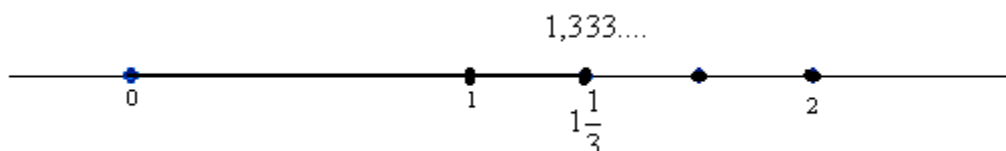
Esta técnica se aplica a qualquer número cuja representação é decimal exata.

(τ₂): Seguir as técnicas sugeridas para construção de -5 em (t₁).

(t₅): Represente na reta real o número 1,333... ?

(τ_1): Utilizando a representação fracionária: O número $1,333\dots = 1\frac{1}{3}$ está entre 1 e

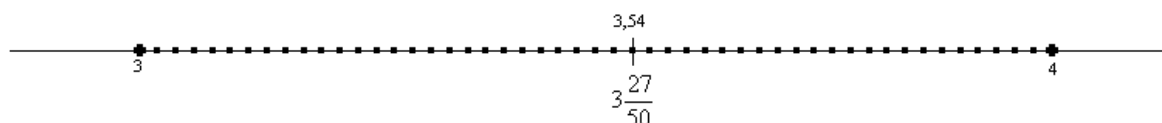
2. Dividindo em três partes iguais o segmento de extremidades 1 e 2 e tomemos a primeira parte para determinar o ponto que representa o número $1,333\dots$.



Esta técnica se aplica a qualquer número cuja representação é decimal infinita e periódica.

(t_6): Represente na reta real o número $3,54345793\dots$.

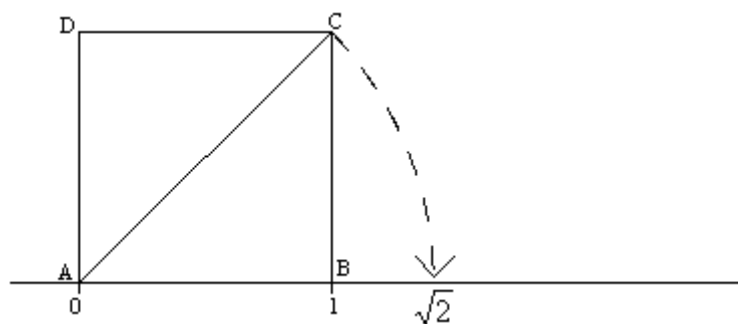
(τ_1): Utilizando aproximação e a representação fracionária: O número $3,54345793\dots$ possui a seguinte aproximação com duas casas decimais $3,54$. O número $3,54 = \frac{354}{100} = 3\frac{54}{100} = 3\frac{27}{50}$ está entre 3 e 4. Dividindo em cinquenta partes iguais o segmento de extremidades 3 e 4 e tomemos as vinte e sete primeiras partes para determinar o ponto que representa o número $3,54$, que aproximadamente representa $3,5434793\dots$.



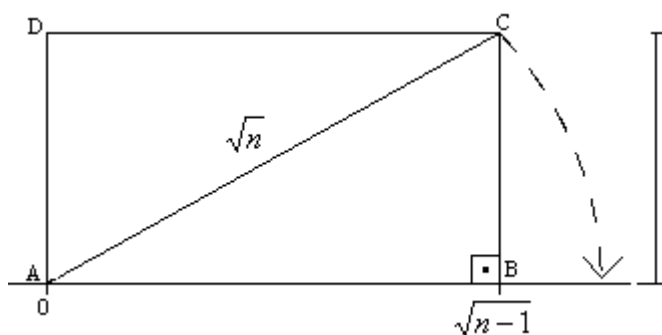
Esta técnica se aplica a qualquer número cuja representação é decimal infinita e não periódica.

(t_7): Represente na reta real o número $\sqrt{2}$?

(τ_1): utilizando teorema de Pitágoras: Construir sobre a reta um quadrado ABCD cujo o lado tenha medida do segmento de reta de extremidades 0 e 1. Com auxílio do compasso marque a abertura AC na reta real obtendo o ponto correspondente a $\sqrt{2}$.

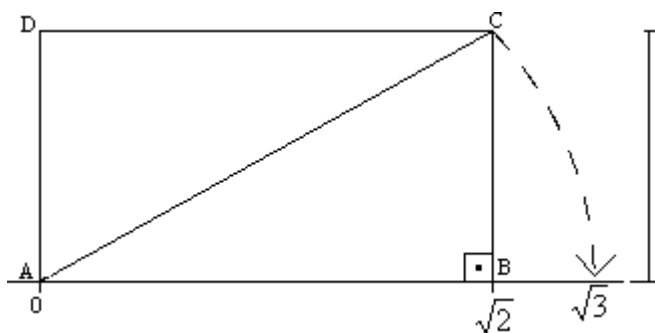


Esta técnica se aplica, de forma análoga, a qualquer número cuja representação é da forma \sqrt{n} , onde n é natural maior que 1, tomando triângulo retângulo de catetos medindo $\sqrt{n-1}$ e 1.



Exemplo:

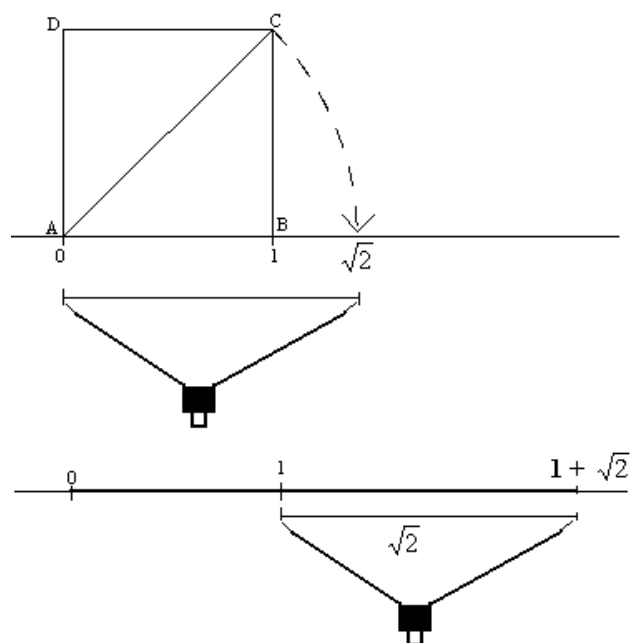
$$\sqrt{3}$$



Esse processo é recorrente, pra determinar o ponto que representa o número $\sqrt{3}$ foi necessário conhecer segmentos com medida $1 = \sqrt{1}$ e $\sqrt{2}$. Assim, com essa técnica, para determinar o ponto que representa o número \sqrt{n} é necessário conhecer segmentos medindo $1 = \sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{n-1}$.

(t₈): Represente na reta real o número $1 + \sqrt{2}$?

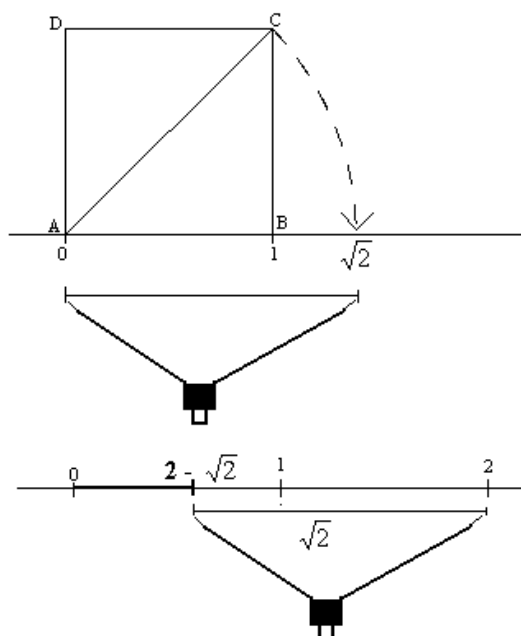
(τ₁): Composição de segmentos (Adição).



Esta técnica se aplica a qualquer número da forma $a + b$, onde a e b são contrutíveis com régua e compasso ou que já tenhamos os segmentos que representem a e b respectivamente. Observa-se que esta técnica exige que o compasso promova o transporte de segmentos.

(t₉): Represente na reta real o número $2 - \sqrt{2}$?

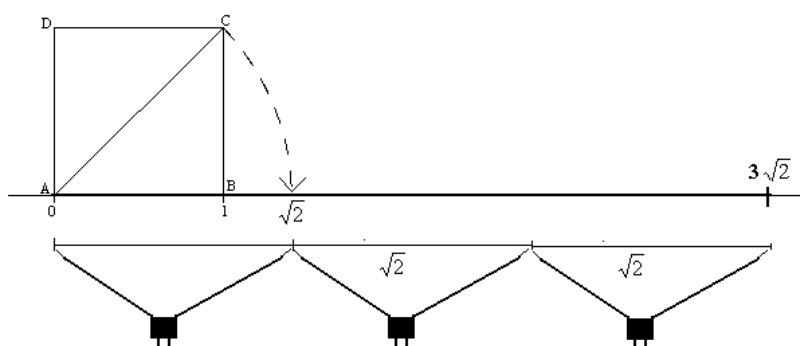
(τ₁): Composição de segmentos (Diferença).



Esta técnica se aplica a qualquer número da forma $a - b$, onde a e b são construtíveis com régua e compasso ou que já tenhamos os segmentos que representem a e b respectivamente. Observa-se que esta técnica exige que o compasso promova o transporte de segmentos.

(t_{10}): Represente na reta real o número $3\sqrt{2}$?

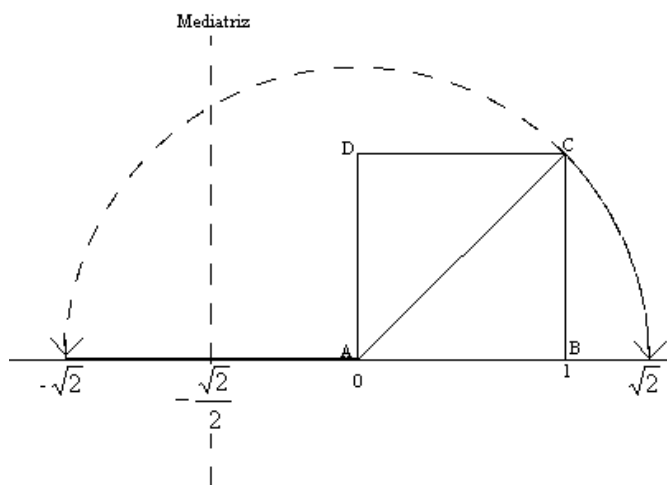
(τ_1): Composição de segmentos (Adição - Multiplicação).



Esta técnica se aplica a qualquer número da forma ab , onde a é um racional e b é real qualquer construtível com régua e compasso ou que já se conheça o segmento de reta cuja medida o represente. Observa-se que esta técnica exige que o compasso promova o transporte de segmentos.

(t₁₁): Represente na reta real o número $-\frac{\sqrt{2}}{2}$?

(τ₁): Composição de segmentos (Divisão).



Esta técnica se aplica a qualquer número da forma $\frac{a}{2^n}$, onde a é um real qualquer construtível com régua e compasso ou que já se conheça o segmento de reta cuja sua medida represente-o, onde n é natural.

(t₁₂): Represente na reta real o número π ?

(τ₁): Utilização de valor aproximado, uma vez que, o número π não é construtível por régua e compasso. Assim pode-se marcar na reta o número 3,1 que é a aproximação de π com uma casa decimal utilizando a técnica descrita em (t₃).

Esta técnica se aplica a qualquer número real não construtível com régua e compasso, cuja representação decimal é conhecida.

(t₁₃): Represente na reta real o número $\frac{\pi}{2}$?

(τ_1): Utilização de valor aproximado, uma vez que, o número $\frac{\pi}{2}$ não é construtível por régua e compasso. Assim pode-se marcar na reta o número $\frac{3,14}{2} = 1,57$ que é a aproximação de $\frac{\pi}{2}$ com duas casas decimais, utilizando a técnica descrita em (t_3).

Esta técnica se aplica a qualquer número real não construtível com régua e compasso, cuja representação decimal é conhecida.

Etapa 4: Bloco tecnológico-teórico [θ/Θ] encontrado nesse gênero de tarefa:

[θ/Θ]₁: Bijeção entre pontos da reta e o conjunto dos números reais;

[θ/Θ]₂: Utilização de ideias relacionadas a geometria:

- A adição de dois segmentos de reta.
- A subtração de dois segmentos de reta.
- Multiplicação de um segmento por um número natural.
- A divisão de um segmento de reta em n partes iguais.
- Transporte de segmentos.
- Teorema de Pitágoras.

[θ/Θ]₃: Números construtíveis com régua e compasso:

- Todo número racional é construtível com régua e compasso.
- Todo número da forma \sqrt{n} , onde n é natural, é construtível com régua e compasso.

[θ/Θ]₄: Todo número real possui representação decimal;

Etapa 5: O gênero de tarefa relacionado a classificar em racional ou irracional, apresentou um bloco *saber-fazer* $[T/\tau]$ vasto, baseado em técnicas tanto conceituais quanto operacionais. O bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ também se apresentou vasto, porém nenhuma das propriedades utilizadas como teoria para solução dos problemas não foram provadas nos livros analisados. Então, podemos concluir que a praxeologia relacionada ao respectivo gênero de tarefa é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber fazer.

Etapa 6: Os enunciados e técnicas relacionados ao gênero de tarefa analisado apresentam em sua totalidade registro de representação simbólico numérico na forma de número decimal, número fracionário, raízes, irracionais genéricos e a combinação desses.

Etapa 7: As tarefas foram resolvidas utilizando construção com régua e compasso privilegiando a conversão de registro numérico para o registro numérico figural e a manipulação de alguns tratamentos na realização de aproximação. Poucas foram as tarefas em que se explorava a conversão do registro figural para o simbólico numérico para que se cumprisse o processo de conversão em dois sentidos exigido pela teoria de Duval para que se tenha uma compreensão completa do conceito.

A tarefa T_{CV} não foi analisada uma vez que as técnicas utilizadas para a solução das mesmas se confundem com as técnicas desenvolvidas nas tarefas T_{CC} e $T_{C\epsilon}$. Da mesma forma, a tarefa T_{ES} também não foi analisada, pois as técnicas utilizadas para sua solução se confundem com as técnicas desenvolvidas nas tarefas T_E .

CAPÍTULO 6: CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho investigou como o conceito número irracional / real é organizado nos livros didáticos da educação básica no Brasil; que registros de representação são empregados e como estes são empregados; isto é, como essa organização se propõe promover a aquisição do conhecimento número irracional / real. Como o próprio título do trabalho destaca, fizemos uma análise do conceito número irracional / real nos livros. Por sua natureza, essa ação se distingue da ação de avaliar. Não pretendemos avaliar os livros observados, mesmo porque os livros escolhidos já estão aprovados pelo ministério da educação. Por outro lado, nosso objetivo central é descrever todas as características que envolvem o conceito analisado, sejam elas corretas ou não do ponto de vista matemático ou didático. Escolhemos o conceito número real, por ser o sistema numérico que fecha o estudo de números no ensino fundamental, por ser o sistema numérico base no estudo de funções no ensino médio e por ser de central importância no ensino superior, servindo com base para o estudo dos temas: limite de funções reais, convergência, contagem e continuidade. O livro didático serviu de objeto de estudo por ser fonte de acesso ao saber institucionalizado que os professores e alunos dispõem e por ser, de certa alguma forma, fonte de validação do saber a ser ensinado.

O trabalho foi realizado com quatorze livros, sendo nove do nível fundamental e cinco do médio. Conduzimos uma análise qualitativa de dados em relação às seguintes temas de estudo: tipo de definição, tipo de exemplo, funcionalidade dos exemplos apresentados, exercícios resolvidos, propriedades, registro de representação, abordagem histórica e tarefas. Esta análise deu-se à luz das teorias de Duval (2003) e Chevallard (1999).

6.1 Respondendo as questões de pesquisa

Com exceção de um dos livros analisados, o conceito número irracional / real é apresentado no 8º do ensino fundamental, e no primeiro ano do ensino médio. Tais livros utilizam em média 4,3% das páginas que compõem o corpo do livro para apresentar esse conceito. Os conteúdos são dispostos de maneira linear da seguinte forma: número natural, número inteiro, número racional, número irracional e número real, sendo os três primeiros

conjuntos apresentados como revisão, visto que já foram abordados em anos escolares anteriores.

Nove livros buscam problematizar a existência de um novo tipo de conjunto numérico exibindo exemplos de números que não são racionais. Os números escolhidos para esse momento são em geral a raiz quadrada de dois seja na forma de registro simbólico numérico $\sqrt{2}$, seja na forma de registro figural dado pela medida da diagonal do quadrado; e também números cuja representação decimal é infinita e não periódica. Esse último tipo é construído de maneira que a parte decimal infinita não tenha um período. É importante destacar que das problemáticas apresentadas somente o caso da medida da diagonal do quadrado está relacionado à limitação do conjunto dos números racionais em relação à possibilidade de representar todas as medidas.

A funcionalidade dos exemplos encontrada nos livros está diretamente ligada à exemplificação de definições. São apresentados em média 4,7 exemplos associados a cada definição de número irracional e número real. Esse número pequeno de exemplos é consistente com as dificuldades encontradas nas pesquisas de SOARES, FERREIRA e MOREIRA (1999) e SIROTIC e ZAZKIS (2007) por parte de alunos e futuros professores em exhibir exemplos desses tipos números. Os exemplos também são utilizados para justificar propriedades. Em média, cada propriedade encontrada relacionada aos conceitos número irracional e número real foi justificada por 8,9 exemplos. A prática de adotar exemplos para justificar propriedades pode cristalizar a ideia errônea de que toda propriedade matemática pode ser justificada através de exemplos. Isso pode ser observado na constatação de SIROTIC e ZAZKIS (2007) de que os participantes interpretam mal algumas questões a respeito dos irracionais, pois ignoram o significado matemático das palavras “sempre” e “qualquer”.

Os exercícios resolvidos, em média, 4,9 por livro, servem em sua maioria de algoritmos para serem seguidos nas atividades propostas. As definições apresentadas para os números irracionais foram: “*irracional é o número que não pode ser escrito em forma de fração de inteiros*” (D_A) e “*dentre os números representados na forma decimal existem as dízimas não-periódicas, chamados de irracionais*” (D_B). Cinco livros adotaram a definição D_A , oito a definição D_B e um, não havendo definido número irracional, utilizou apenas de problemas

para introduzir o conceito. Todos os livros observados definiram número real da seguinte forma: “qualquer número racional ou irracional é um número real” (D_C). Do ponto de vista matemático nenhum dos dois discursos utilizados para caracterizar número irracional pode ser entendido como definição. O discurso D_A é falho, pois possibilita a classificação dos números complexos da forma $a+bi$, com $b \neq 0$, como irracionais, uma vez que estes não podem ser escritos em forma de fração de números inteiros. O discurso D_B também é falho, pois junto ao discurso D_C torna as definições de número irracional e número real logicamente recursivas: irracional é todo número real que não é racional e número real é todo número irracional ou racional. Esse fato se caracteriza uma vez que todo número real possui representação decimal e que todo número que possui representação decimal é um número real.

As propriedades citadas nos livros analisados envolvem fundamentalmente as operações fechamento, relações de operações entre racionais e irracionais e a localização de pontos na reta. Destaca-se a utilização de exemplos para ilustrar as propriedades. A propriedade de densidade dos racionais nos reais é observada através da média aritmética entre dois racionais, isto é, dados dois racionais a e b distintos, existe outro racional entre eles dado por $\frac{a+b}{2}$. A propriedade de densidade dos irracionais nos reais não foi observada nos livros analisados. O fato da propriedade de densidade dos reais não ser exposta de maneira completa tem paralelos com as dificuldades encontradas por alunos e futuros professores nas pesquisas de SOARES, FERREIRA e MOREIRA (1999) e SIROTIC e ZAZKIS (2007), quando são exigidos dos sujeitos que encontrem exemplos de irracionais entre dois reais quaisquer.

Nove dos quatorze livros observados apresentam a propriedade de completude dos reais da seguinte forma: “todo número real possui representante na reta real e todo ponto da reta real representa um número real”. Nada é exposto além dessa afirmação. Em BERGÉ (2008b) esse fato também pode ser observado quando um dos participantes da pesquisa deu a seguinte resposta para uma das perguntas “ \mathbb{R} é completo, o que significa que não tem saltos, nem lacunas”. A incomensurabilidade é citada apenas em dois livros didáticos sem nenhuma problematização. Talvez esse fato possa ter paralelos com o evidenciado pelos entrevistados

de SOARES, FERREIRA e MOREIRA (1999), que, em sua maioria, não consideram a possibilidade de incomensurabilidade de segmentos.

Os livros analisados apresentaram registros figural, simbólico-numérico, simbólico-algébrico e de linguagem natural, privilegiando o registro numérico. No ensino fundamental são privilegiados o registro decimal, o registro fracionário e o registro em língua natural; enquanto que no ensino médio são privilegiados os registros: figural, em forma de raízes e o simbólico algébrico.

Sete livros do ensino fundamental e um do ensino médio apresentaram algum tipo de abordagem histórica. Estas estão relacionadas a informações adicionais, dispostos no decorrer e no fim dos textos, que enfocam a descoberta de números não racionais pelos gregos, a citação do comprimento da circunferência na Bíblia e utilização de valores aproximados de π por algumas civilizações. Isto é, tais abordagens privilegiam dados isolados e datas de acontecimentos, desprovidos de problemática.

As tarefas encontradas nos livros apresentaram o bloco saber-fazer $[T/\tau]$ vasto, baseado em técnicas tanto conceituais quanto operacionais. O bloco tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$ também se apresentou vasto, porém nenhuma das propriedades utilizadas como teoria para solução dos problemas foram provadas nos livros analisados. Então, podemos concluir que a praxeologia relacionada às tarefas envolvendo irracionais e reais é incompleta, valorizando técnicas relacionadas ao saber-fazer. As tarefas aqui analisadas foram resolvidas, de modo geral, utilizando conversão do registro numérico decimal para o registro numérico fracionário, conversão do registro numérico decimal infinito para registro numérico decimal finito, de registro numérico para o registro numérico figural e a manipulação de alguns tratamentos na realização de algumas operações, em solução de equações, no cálculo do valor numérico de fórmulas e expressões algébricas. Destacou-se o fenômeno de não congruência (entrada: registro numérico decimal, saída: registro numérico fracionário; e vice-versa) em algumas das atividades analisadas.

6.2 Contribuições desta pesquisa

A nosso ver, a principal contribuição desta pesquisa é exibir de fato o que se encontra no livro didático brasileiro a respeito do conceito número irracional / real. Acreditamos que, mais

do que sugerir uma abordagem inovadora, apresentar de forma crítica o que está ocorrendo e apontar pontos a serem ou não seguidos possa contribuir significativamente para a prática de futuros professores e pesquisadores. Além de oferecer informações pedagógicas, acreditamos que nossa contribuição está em revelar o que tem sido entendido como o “ideal” para conduzir a prática escolar, uma vez que os livros aqui analisados são aprovados pelo ministério de educação e exibir tendências atuais, estratégias e propostas.

6.3 Desdobramentos

Os dados e constatações aqui obtidos são relacionados ao livro didático, entretanto o ensino e aprendizagem de um determinado conceito se fazem, não somente com material didático, e sim, com professores e alunos. Então, algumas perguntas surgem naturalmente e encaminham novas possibilidades de pesquisa:

- Qual é a concepção dos alunos em relação ao conceito número irracional / real ao finalizar o ensino fundamental?
- Qual é a concepção dos alunos em relação ao conceito número irracional / real ao finalizar o ensino médio?
- Qual é a concepção dos alunos/futuros professores em relação ao conceito número irracional / real ao finalizar a graduação?
- Qual é a concepção dos professores de ensino fundamental em relação ao conceito número irracional / real?
- Qual é a concepção dos professores de ensino médio em relação ao conceito número irracional / real?
- Qual é a concepção dos professores de ensino superior em relação ao conceito número irracional?
- Como o conceito número real é apresentado nos livros destinados ao ensino superior?

Obtendo algumas constatações ao analisar tais questões poderemos delinear possíveis saltos existentes entre os níveis de ensino (fundamental – médio – universitário), constatar se

os conhecimentos do professor e do aluno se confundem com o que se é apresentado nos livros e projetar novas estratégias de ensino a respeito do número irracional / real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1]. ANDRINI, Á. e VASCONCELLOS, M. J. **Novo Praticando Matemática**. São Paulo: Editora do Brasil, 2002. 7ª série.
- [2]. BERGÉ, A. **A Study on the evolution of mathematical thinking: the example of the conceptualisation of the set of real numbers and the notion of completeness at university level**, PhD Thesis, Argentina: University of Buenos Aires, 2004.
- [3]. BERGÉ, A. (2006a). **Convergence of Numerical Sequences – a Commentary on "The Vice: Some Historically Inspired and Proof Generated Steps to Limits of Sequences" by R.P. Burn**, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 61 (3), pp. 395-402.
- [4]. BERGÉ, A. (2006b). **Un análisis institucional a propósito de la noción de completitud del conjunto de los números reales**, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, vol. 9 (1), pp. 31-64.
- [5]. BERGÉ, A. (2008a). **The Completeness Property of the Set of Real Numbers in the Transition from Calculus to Analysis**, *Educational Studies in Mathematics*, vol. 67 (3), pp. 217-235.
- [6]. BERGÉ, A. (2008b). **Students' perceptions of the Completeness Property of the Set of Real Numbers**, presented at the 11th *International Conference on Mathematics Education (ICME11)*, Monterrey (Mexico), available at <http://tsg.icme11.org/tsg/show/18>.
- [7]. BERGÉ, A. & SESSA (2003). **Continuidad y completitud revisadas a través de 23 siglos**. Aportes a una investigación didáctica, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, vol. 6 (3), pp. 163-197.
- [8]. BIGODE, A. **Matemática Hoje é Feita Assim**. São Paulo: FTD, 2006. 7ª Série.

- [9].BONJORNO, J., GIOVANNI, J. **Matemática completa**. São Paulo: FTD, 2005. V. 1, 1ª Série.
- [10].BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*(5ª à 8ª série). Brasília: MEC, 2001.
- [11].BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Guia de livros didáticos PNLD, 2008: Matemática*. Brasília: MEC, (2007a).
- [12].BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. *Guia de livros didáticos PNLEM, 2008: Matemática*. Brasília: MEC, (2007b).
- [13].CHEVALLARD, Y. **L'analyse de pratiques enseignantes em théorie antropológica du didactique**. Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble : La Pensée Sauvage-Éditions, vol. 19, nº 2, pp. 221-226, 1999.
- [14].DAMM, R. F. **Registros de Representação**. In: MACHADO, S. D. A. et al. Educação matemática: uma introdução. 2. ed. São Paulo: Educ, 2002. Cap. 8, p. 135-154.
- [15].DANTE, L. **Tudo é Matemática**. São Paulo: Ática, 2005. 7ª série.
- [16].DANTE, L. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2005. V. 1. 1ª série.
- [17].DAVID, M. M. M. S. et MOREIRA, P. C. (2007) **O conhecimento sobre os números e a prática docente na escola básica**. In: A formação matemática do professor: licenciatura e prática escolar. ED. Autêntica, BH, p.47-100
- [18].DIAS, M. S. **Reta Real, Conceito imagem e conceito definição**. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC/SP, (2002).
- [19].DINIZ, M., SMOLE, K. **Matemática ensino médio**. São Paulo: Saraiva, 2005. V. 1. 1ª série.

- [20].DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. p.11-33. 2 ed. São Paulo: Papirus, 2003.
- [21].ESTEPHAN, M., PERACCHI, F. et TOSATTO, M. **Ideias & Relações.** Curitiba: Positivo, 2005.
- [22].EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** São Paulo: Editora Campinas. 2004.
- [23].FILHO, B., SILVA, C. **Matemática aula por aula.** São Paulo: FTD, 2003. V. 1. 1ª série
- [24].FISCHBEIN, E., JEHIAN, R. & COHEN, D. (1995). **The concept of irrational number in High-School Students and Prospective Teachers,** *Educational Studies in Mathematics*, 29 (1), pp. 29-44.
- [25].GIRALDO, V. **Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada.** Tese (Doutorado em Ciências) - COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.
- [26].IEZZI, G., DOLCE, O. MACHADO, A. **Matemática e Realidade.** São Paulo: Atual, 2005.
- [27].LIMA, E. L. **Análise Real.** Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CPq, 1989. v.1.
- [28].MORI, I.,ONAGA, D. S. **Matemática – Ideias e Desafios.** São Paulo: Saraiva, 2006.
- [29].LELLIS, M., IMENES, L. M. **Matemática paratodos.** São Paulo: Scipione, 2002.
- [30].OZÁMIZ, M. de G.; PÉREZ, D. (1993). **Enseñanza de las ciencias y la matemática: tendencias e innovaciones.** Madrid: IBER cima.
- [31].PAIVA, M. **Matemática.** Ensino Médio. São Paulo: Moderna, 2004. V. 1. 1ª série.

- [32].PENTEADO, C. B. (2004). **Concepções do professor do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade.** São Paulo: PUC/SP. Dissertação de Mestrado.
- [33].PROJETO ARARIBÁ – **Matemática.** São Paulo: Moderna, 2006. 7ª série.
- [34].RUSSEL, B. **Introdução à filosofia matemática.** Rio de Janeiro: Zarah, 1966.
- [35].SCHWARZENBERGER, R. L. E. & Tall, D. (1978). **Conflicts in the learning of real numbers and limits,** *Mathematical Teaching*, 82, pp. 44-49.
- [36].SHULMAN, L. S. (1986). *Those who understand: knowledge growth in teaching.* **In Educational Researcher**, v.15, n.2, p. 4 – 14.
- [37].SIROTIC, N. e ZAZKIS, A. (2004). **Making sense of irrational numbers:focusing on representation,** *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME28)*, Israel, V.4; pp. 497-504.
- [38]. SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C. e MOREIRA, P. C. (1999). *Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura.* Zetetiké, Campinas, v.7, n.12, p. 95-117.
- [39]. SOUZA, M., SPINELLI, W. **Matemática.** São Paulo: Ática, 2002. V. 1. 1ª série.
- [40]. ZAZKIS, A. e SIROTIC, N. (2007). **Irrational Numbers: The Gap between Formal and Intuitive Knowledge,** *Educational Studies in Mathematics*, 65 (1), pp. 49-76.