UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UM ESTUDO DO *COURS D'ANALYSE ALGÉBRIQUE* DE CAUCHY EM FACE DAS DEMANDAS DO ENSINO SUPERIOR CIENTÍFICO NA *ÉCOLE POLYTECHNIQUE*

Rubem Nunes Galvarro Vianna

Rio de Janeiro
2009

UM ESTUDO DO *COURS D'ANALYSE ALGÉBRIQUE* DE CAUCHY EM FACE DAS DEMANDAS DO ENSINO SUPERIOR CIENTÍFICO NA *ÉCOLE POLYTECHNIQUE*

Rubem Nunes Galvarro Vianna

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Tatiana Marins Roque

Aprovada por:

____

Tatiana Marins Roque, PEMAT/UFRJ

____

Gérard Emile Grimberg, PEMAT/UFRJ

____

Gert Schubring, PEMAT/UFRJ

____

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, PEMAT/UFRJ

____

Carlos Eduardo Mathias Motta, UFF

Rio de Janeiro

Dezembro de 2009

Vianna, Rubem Nunes Galvarro
V617 Um estudo do cours d'analyse algébrique de Cauchy em face das demandas do ensino superior científico na École Polytechnique/ Rubem Nunes Galvarro Vianna. -- Rio de Janeiro : IM/UFRJ, 2010.
viii,116f.;30 cm.
Orientador: Tatiana Marins Roque
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de pós-graduação em Ensino da Matemática, 2010.
Referências: f.117-9.

1.Análise matemática – História.2. Análise matemática – Estudo e ensino. I. Roque, Tatiana Marins II.Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática.

CDD 20ª: 515

AGRADECIMENTOS

Agradeço, antes e acima de tudo, a Deus. Ele me conforta, me dá ânimo, me protege, me ensina, me conduz, me alerta, me perdoa, me faz feliz. A Deus Pai, por intermédio de seu Filho e nosso salvador Jesus Cristo, toda a honra e toda a glória.

Agradeço, ainda, ao companheiro de labuta e leal amigo Ary de Oliveira Júnior, por quem serei eternamente grato, e sem cujo apoio não conseguiria realizar este trabalho.

Agradeço aos professores Carlos Eduardo Mathias Motta e Victor Giraldo, não só porque são educadores matemáticos brilhantes e exemplos de conduta numa sala de aula de ensino superior, mas principalmente por serem figuras humanas realmente extraordinárias.

Agradeço à professora Tatiana Marins Roque, minha orientadora, pela paciência e solicitude; ao professor Gert Schubring, pela valiosíssima revisão do texto, e ao professor Gérard Grimberg, pelo estímulo à excelência no trabalho de pesquisa.

Agradeço aos professores Marco Ruffino, Maria Elena Souza e Manuel Martins, pela confiança depositada ao me indicarem para este programa de mestrado.

Agradeço aos amigos que a Turma de 2007 me presenteou, em especial àqueles com os quais mantive maior contato: Daniela, minha “filha” baiana, ao mesmo tempo delicada e forte; Ulisses, meu “irmão mais novo” brasiliense, poeta maior e romântico incurável; Marcel, o único metaleiro algebrista que conheço, grandes papos regados a um saboroso café; Carolina e Rafael, um casal feliz cuja união tive a honra de testemunhar desde seu início. Agradeço também aos colegas do LabMA, Rodrigo e Felipe Moita, pelo auxílio em horas difíceis; ao Renato, pelo papo nas caronas; à Maria José (Masé, a mais brasileira das chilenas), pelo apoio e a boa companhia dos encontros no IMPA; à Andréa e à Mylena, pelos agradáveis fins de semana de estudo; ao Filipe, pelas dicas sempre pertinentes; aos demais colegas, pela alegria da convivência e pelo companheirismo.

Agradeço, enfim, de coração, a todos os que me ajudaram nessa empreitada.

Dedico este trabalho às mulheres de minha vida: minha filha Maria Clara, minha mãe Lili, minha mulher Claudia, minha tia Beth e, muito especialmente, à memória de minha querida vovó Zuleika, que hoje descansa na companhia de Nosso Senhor.

Dedico este trabalho também aos homens com quem tenho compartilhado as lutas e conquistas da vida: meu pai Ronald e meus irmãos Raul e Ronald Jr.

RESUMO

Este trabalho é um estudo do *Cours d'analyse algébrique*, obra publicada em 1821, de autoria do matemático francês Augustin-Louis Cauchy, inicialmente idealizada para se constituir o livro-texto da disciplina de análise na *École Polytechnique*. As motivações que culminaram na produção dessa importante obra e a importância que a arquitetura de seu conteúdo representou para o desenvolvimento posterior da análise são aqui especialmente analisadas. É apresentado ao leitor um panorama do início do século XIX na França, a fim de que o mesmo se sinta imerso nos contextos histórico e matemático em que Cauchy produziu sua principal obra em análise. É estudado o modo como a análise se desenvolveu no século que o antecedeu, a fim de que o leitor compreenda de que modo a herança conceitual que Cauchy recebeu de predecessores ilustres, como Euler e Lagrange, influenciou no desenvolvimento dos seus próprios conceitos. Finalmente, alguns dos principais conceitos de análise (limite, continuidade, função, convergência de séries), conforme expostos no *Cours d'analyse,* são estudados à luz da apreciação crítica de importantes historiadores da análise.

Palavras-chaves: Cauchy, história da análise, ensino de análise, análise algébrica.

ABSTRACT

This work is a study on the *Cours d'analyse algébrique*, published in 1821, authored by the French mathematician Augustin-Louis Cauchy, initially conceived to be the textbook of analysis at the *École Polytechnique*. The motivations that led to the production of this important work, and the importance of the architecture of its content for the further development of the analysis, are especially discussed in this dissertation. It is presented to the reader an overview of the early nineteenth century in France, in order to make him feel immersed in the mathematical and historical context in which Cauchy produced his major work in analysis. It is studied how the analysis was developed in the eighteenth century, so that the reader understands how the conceptual heritage that Cauchy received from illustrious predecessors, such as Euler and Lagrange, influenced the development of his own concepts. Finally, some of the key concepts of analysis set out in the *Cours d'analyse* (limit, continuity, function, convergence of series) are studied in the light of critical assessment of important historians of the analysis.

Keywords: Cauchy, History of analysis, teaching analysis, algebraic analysis.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em algumas obras de História da Análise, como *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass* (Botazzinni, 1986) e *The origins of Cauchy's rigorous calculus* (Grabiner, 1981), os autores afirmam que a necessidade de ensinar determinados conteúdos de análise teria sido crucial para o movimento de rigorização desta disciplina que se operou no século XIX.

Deste ponto de vista, destaca-se o papel do matemático francês Augustin-Louis Cauchy. A necessidade de ensinar análise na *École Polytechnique* motivou uma mudança no modo de se apresentar esse ramo da matemática. Daí a nossa opção em estudar sua obra dedicada ao ensino nesta instituição: o *Cours d'analyse algébrique*.

Faremos, em primeiro lugar, uma revisão de bibliografia acerca da novidade que significou o *Cours d'analyse* , escrito com a finalidade de ser um livro-texto universitário baseado nas aulas que Cauchy ministrou na *École Polytechnique*. Tratava-se de uma obra para ser utilizada pelos seus alunos, de modo que pudessem compreender claramente alguns conceitos fundamentais e introdutórios da análise, com base em pilares novos, mais claramente expostos, mais consistentes e mais rigorosos.

O tema é relevante, não só porque aborda um momento que é "divisor de águas" da História da Matemática – mais especificamente, da análise matemática – mas principalmente porque relaciona a Matemática propriamente dita com o Ensino da Matemática, mostrando a importância deste para a reconfiguração da produção matemática que se seguiria. De fato, pretendemos mostrar que a necessidade de expor o conteúdo da análise com a finalidade didática teria sido crucial para que se redesenhasse a própria arquitetura da análise, principalmente a partir da obra de Cauchy.

Além disso, nosso trabalho buscará produzir uma compilação de informações que no momento se encontram esparsas em trechos de artigos e livros os mais variados, mas que só farão sentido e só construirão uma fotografia fidedigna, com boa resolução gráfica, mediante uma cuidadosa e ampla revisão bibliográfica que trate de preservar os matizes, isto é, que organize criteriosamente as informações factuais e os argumentos dos historiadores, sempre focada nos objetivos da pesquisa.

A propósito, teremos alcançado nosso objetivo se, ao finalizar esta dissertação, tivermos conseguido:

- situar Cauchy em seu contexto histórico, a fim de compreender em que circunstâncias ele viveu e produziu sua obra matemática;
- descrever o estado da análise no século XVIII e no século XIX até os anos 1820, e como evoluiu o escopo de seu objeto de estudo;
- identificar as influências matemáticas que Cauchy sofreu (principalmente de Euler e Lagrange) e de que maneira isso se deu;
- expor com fidelidade as razões argumentativas acerca da importância da arquitetura do *Cours d'analyse* na História da Análise, e, partindo daí,
- apresentar aspectos importantes da evolução de conceitos fundamentais da análise no bojo das respectivas abordagens no *Cours d'analyse*,

Para conseguirmos nosso intento, dividiremos o trabalho em três capítulos. A ideia é a de desenvolver o tema de forma análoga ao dispositivo de uma câmera fotográfica tradicional, isto é, tencionamos fechar cada vez mais o foco da "lente objetiva" até a evolução de um determinado conceito exemplar, de modo que possamos compreendê-lo pontual e satisfatoriamente, sem que percamos de vista, todavia, a compreensão do contexto histórico da transformação desse conceito.

Destarte, o Capítulo I trará o panorama histórico que envolvia Cauchy, isto é, retratará o tempo em que Cauchy viveu e os antecedentes próximos. Tendo em vista a visceral relação de sua família com os poderes político e religioso – circunstância que resultou em vantagens e problemas por toda a sua trajetória profissional – e, dado o contexto histórico especialmente conturbado por que vivia o mundo (e, muito especialmente, a França), não poderíamos ignorar tais informações em uma dissertação histórica.

Do mesmo modo, precisamos entender como se dava o ensino superior científico na França, e o papel da *École Polytechnique*, instituição onde Cauchy estudou e trabalhou no período que focalizamos no trabalho e ainda, sobretudo, como foi sua experiência docente naquela casa.

Finalmente, buscaremos fechar o capítulo com uma motivação para os demais, relatando (muito embora, ainda sem apresentar o conteúdo matemático propriamente dito) o impacto que sua obra proporcionaria na ciência de sua época, em especial na obra de alguns matemáticos contemporâneos e posteriores a ele.

O Capítulo II começará a fechar o foco do trabalho, abordando os fatores essencialmente matemáticos que podem ter influenciado Cauchy no decorrer de sua trajetória como matemático. Começaremos com uma visão sobre o desenvolvimento da análise antes de Cauchy, abordando em especial a produção dos dois principais matemáticos cujas obras inspiraram o desenvolvimento da que foi denominada "análise algébrica": Euler e Lagrange. Falaremos também do que se entendia por rigor, de quão insatisfeitos se encontravam alguns matemáticos que antecederam a Cauchy com os fundamentos da análise, e as suas razões para tal.

No fechamento do capítulo, procuraremos reunir um consistente conjunto de referências – lavradas por historiadores da matemática – que ressaltam a importância crucial do ensino no próprio desenvolvimento da análise no decorrer do século dezenove.

O Capítulo III – o mais longo da dissertação – dedicar-se-á totalmente aos aspectos estritamente matemáticos da "nova arquitetura" da análise de Cauchy, especialmente aqueles constantes do *Cours d'analyse*.

Mergulharemos fundo no "espírito" dessa obra, e analisaremos a forma como conceitos fundamentais – limite, infinitesimal, função e convergência – foram apresentados e utilizados, até alcançarmos o conceito que será tomado como exemplo e do qual nos ocuparemos mais detidamente: o conceito de continuidade.

Tal conceito receberá maiores atenções, de modo que relataremos seu histórico até os idos de 1820, mostraremos como foi estabelecido e utilizado no *Cours d'analyse,* e como se transformou a partir de então. Mediante esse conceito, buscaremos mostrar como o modo e a ordem de apresentação dos conceitos foram originais e, segundo a historiadora Judith Grabiner, revolucionários, e ainda sustentaremos que isso não se deu de forma casual, e sim intencional e motivadamente. Desta forma, restará – assim esperamos – ilustrada e justificada a argumentação de que a necessidade de ensinar a análise transformou a forma de apresentá-la, o que contribuiu para a transformação dos seus próprios conceitos fundamentais.

É importante dizer aqui que não temos a pretensão de trazer algo especialmente novo na História da Matemática. Temos consciência de que estamos preparando uma revisão de bibliografia, tão somente isto. Esta poderá ter, no máximo, o mérito de um garimpo no qual, quando encontramos preciosidades, fazemos recolhê-las, lapidá-las, organizá-las e exibi-las.

Num olhar otimista, poderemos vislumbrar determinado aspecto, aqui e acolá, de um ângulo diferente, e daí buscaremos acrescentar uma modesta contribuição pessoal.

Porém, cremos firmemente que o maior mérito deste trabalho será o de apresentarmos uma compilação honesta, em língua portuguesa, de um tema que reputamos importante. É triste constatar que a esmagadora maioria das obras mais importantes de História e Epistemologia da Matemática não são encontradas em nossa língua, o que certamente dificulta a difusão do conhecimento e o interesse dos alunos pelo assunto.

É nosso objetivo, portanto, contribuir no que for possível para a construção dessa "ponte linguística", a fim de ampliar os horizontes temáticos de alunos brasileiros e estimulá-los a estudar História da Matemática.

Utilizaremos fontes primárias e secundárias; estas, porém, em maior quantidade. Estamos tendo a preocupação de consultar o maior número possível de títulos disponíveis nas principais bibliotecas dos Institutos de Matemática situados no Rio de Janeiro, nas línguas inglesa e francesa, e de autoria de historiadores da análise. Buscaremos apresentar as observações e análises de cada um dos historiadores que comentam determinado assunto, no intuito de fundamentá-lo o mais amplamente que pudermos.

As fontes primárias a serem pesquisadas são: a *Introductio* de Euler (na verdade, o primeiro tomo com a tradução francesa de 1799 do original em latim; e o segundo tomo, no original em latim); a *Théorie*, de Lagrange; o *Cours d'analyse* (evidentemente), de Cauchy e o *Résumé*, também de Cauchy. No corpo da dissertação falaremos mais detidamente a respeito dessas obras. As citações contidas nas fontes primárias também foram traduzidas, coerentemente com o que falamos acima. Transcreveremos diretamente alguns trechos do *Rapport Historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789*, da lavra de Delambre, e publicado em 1810.

Trabalharemos, enfim, com textos históricos matemáticos. Logo, nada mais justo do que buscar uma orientação metodológica apropriada. Encontramo-la, em suma, nas palavras do historiador Gert Schubring:

> "(...) uma metodologia estabelecida, como a *hermenêutica*, é indispensável para a interpretação de um texto: mesmo um texto matemático histórico não falará por si mesmo; não poderá ser decifrado como se estivesse num solitário nível microscópico, mas devendo ser simultaneamente analisado macroscopicamente, com referência explícita ao conhecimento disponível aos contemporâneos, a como eles viam os problemas, e às metodologias científicas que dispunham".[1] (grifos nossos)

Partamos já, então, para uma estimulante viagem pela História da Análise.

[1] Schubring (2005), p.3.

CAPÍTULO I – CAUCHY E SEU TEMPO

1.1 – O ensino superior de Matemática na França nos tempos que antecederam a Cauchy

Até meados da segunda metade do século XVIII, os conceitos básicos do cálculo eram apresentados em pequenas introduções de aulas e livros, e exposições para o público leigo[2]. A matéria era então exposta – seguindo uma justificável necessidade lógica e psicológica – mediante a definição de seus termos básicos, e tomava corpo nas respectivas sequências de capítulos ou aulas.

Além da finalidade meramente introdutória, havia outras, contudo. Observava-se um interesse crescente no século XVIII em matemática e ciências. As exposições tomavam a forma de livros-textos para um público cada vez maior. Além disso, os cientistas profissionais se tornavam mais numerosos, enquanto a atividade científica se tornava um "contínuo e organizado empreendimento"[3].

A metodologia de ensino dos conceitos científicos era em geral inspirada na clássica arquitetura dos "Elementos" de Euclides, mas a matemática francesa moderna excepcionalmente não seguia esta orientação. Ela estava envolta numa peculiaridade interessante, que vale a pena destacar para um melhor entendimento.

A França foi o único estado europeu que, desde meados do século XVI, se emancipou do uso dos "Elementos" como livro-texto matemático padrão. Petrus Ramus[4] atacou a preeminência da metodologia de Euclides, recusando seu modelo característico, seu arranjo de proposições e sua estrutura sistemática[5]. Em decorrência disto, desenvolveu novas regras metodológicas, que acabariam sendo seguidas por Descartes[6] e que influenciariam Arnauld, no século XVII. Em suma: foi a álgebra (com sua enorme capacidade de generalização e, consequentemente, de resolução de problemas os mais

[2] Grabiner (1981), p.23
[3] *idem*, p.24
[4] Pierre de la Ramée, dito Petrus Ramus, lógico francês (1515-1572).
[5] Schubring, *in* Goldstein (1996), p.377.
[6] *idem*, p.378. [René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês; Antoine Arnaud (1612-1694), matemático francês].

diversos que então se apresentavam), e não a geometria (entendida como um modelo dedutivo com a finalidade principal de justificar os resultados), o modelo da prática dos matemáticos do século XVIII. Mais à frente, trataremos mais detalhadamente acerca de como a análise no século XVIII foi pensada e desenvolvida. Por ora, fiquemos com as palavras de Grabiner sobre tal modelo:

> "Visto que nenhum erro grave foi encontrado, não havia razão para eles [os matemáticos] agirem de outro modo. A visão [dita] tradicional da matemática – hipóteses auto-evidentes, definições claras, provas logicamente confiáveis – pode ser dirigida à geometria dos Gregos, mas não descreve a análise do século dezoito"[7].

A Revolução Francesa, por sua vez, quando lançou o seu programa de educação para todos, veio quebrar decisivamente com essa tradição, "retornando aos valores do rigor". O livro "Elementos de Geometria", de Legendre[8], primeiramente publicado em 1794, foi o primeiro resultado importante dessa reorientação. Nas palavras de Lacroix e Delambre, "Sr.Legendre fez renascer entre nós o gosto das demonstrações rigorosas"[9].

A propósito, a composição do livro de Legendre reflete dois aspectos fundamentais da reforma educacional executada pela Revolução: em primeiro lugar, a criação do primeiro colégio de professores de nível terciário, a *École Normale Supérieure*, fundada em 1795; e em segundo, a implantação a partir de 1794 de um projeto de elementarização do conhecimento matemático reunindo as contribuições de pesquisa dispersas, reestruturando o estoque de conhecimento num corpo coerente e metodologicamente arranjado, e fazendo-o acessível a um amplo público na forma de livros elementares.

Em consequência disso, houve um concurso de livros elementares de 1794, compreendendo todas as matérias de nível primário. Coube ao já respeitado Legendre a autoria do livro de geometria (o referido "Elementos de Geometria").

Mas não convém que nos apressemos. Tornemos destarte à nossa linha do tempo – distante ainda do final do século XVIII – uma vez mencionada essa relevante particularidade da matemática francesa.

A rigor, os livros-textos elementares e avançados já se faziam necessários para a nova e crescente comunidade científica desde muito antes da iniciativa da Revolução.

---

[7] Grabiner (1981), p.28
[8] Adrien Marie Legendre (1752-1833), matemático francês.

Crescia o interesse científico de não-profissionais que se sentiam motivados por temas momentosos, como o sucesso da física newtoniana[10] no entendimento das leis do universo.

É preciso registrar que, desde bem antes da Revolução, a tarefa de ensino das faculdades de artes já vinham sendo transferidas aos *collèges*, reduzindo assim tais faculdades à realização dos exames necessários para a admissão às três faculdades profissionais.[11] Segundo Schubring,

> "Um dos efeitos desse desenvolvimento foi que, na França, as faculdades não favoreceram a emergência das disciplinas científicas. Cultura científica, na França, por outro lado, não estava confinada às universidades e seus contextos. Na aristocracia, em particular, consideráveis grupos existiram como suporte para a atividade científica. A Academia de Ciências em Paris, fundada em 1666, brevemente se tornaria um núcleo cristalizante para a pesquisa matemática e científica."[12]

O ensino de matemática nas universidades ficou restrito a uma parte da aula de física no final do curso do *collège*, assistida apenas por uma minoria de estudantes.

As universidades também competiam com as cada vez mais expandidas escolas militares, que se tornaram instituições que ofereciam uma instrução compreendendo matemática e ciências.[13] Estas escolas atraíam estudantes hábeis, embora o recrutamento fosse restrito à nobreza. Em tais instituições, a matemática emergiu como a disciplina mais importante e muitos professores foram contratados.

Outrossim, conforme se apagavam as luzes do século XVIII, foi se alterando significativamente o perfil da sustentação financeira da pesquisa científica. Se anteriormente muitos matemáticos só podiam contar com a benevolência de patronos e de reis, agora não havia mais como manter esse estado de coisas. Os novos cientistas – pertencentes a uma classe média crescente – precisavam de suporte institucional, donde se criariam novos postos de trabalho para eles.

Partindo daí, e com a idéia cada vez mais aceita de que os cientistas eram úteis à nação, tanto na expansão da indústria como no aperfeiçoamento da força militar, foram abertas novas escolas e departamentos científicos. Foi com esse espírito que os fundadores

---

[9] Schubring, *in* Goldstein (1996), p.378. [Sylvestre-François Lacroix (1765-1843); Jean Baptiste Joseph Delambre (1749-1822), matemáticos franceses].
[10] Referente à obra de *Sir* Isaac Newton (1642-1727), cientista inglês.
[11] Schubring (2005), p.63.
[12] *idem*, p.63.
[13] *idem*, p.63.

da *École Polytechnique* reconheceram que ciência e matemática eram valiosas para o Estado e propuseram usá-la a seu serviço para recrutar e treinar engenheiros.

Com efeito, corrobora Grattan-Guinness[14], desde l'Hospital (que ensinava o cálculo no estilo de livro-texto) que a educação científica propriamente dita já estava estendendo a sua ação, e podemos adiantar que a *École Polytechnique*, acabou atuando com destaque, através das aulas de cientistas da magnitude de Monge e Ampère[15].

Esses sábios, além de outros igualmente eminentes, também produziram livros-textos que se tornaram ferramentas cruciais do ensino superior de Engenharia e de Matemática na França, e que tinham características próprias, justificadas pelo contexto.

É certo que livros-textos emergem de uma cultura matemática específica e são determinados pelas estruturas e valores do sistema educacional desenvolvido pelo Estado[16]. Na França, particularmente, a abordagem dominante era a de não desencorajar os iniciantes ("*ne pas rebuter les commençants*"), isto é, procurava-se desviar dos obstáculos e evitar as dificuldades inerentes aos conteúdos. Bem diferente, porém, dos autores germânicos, que já insistiam em reflexões acerca dos fundamentos da ciência.

A tendência francesa era mais próxima àquela que normalmente a pessoa comum espera de um livro didático, ou seja, que o mesmo facilite o assunto e limpe o caminho do raciocínio, não se detendo em questões puramente reflexivas ou em paradoxos. Conquanto consideremos um pouco simplista e equivocada tal premissa (por desviar-se intencionalmente dos "obstáculos epistemológicos" ao invés de enfrentá-los cautelosamente e com critérios pedagógicos), isso é o que comumente faz os livros didáticos se tornarem populares, pelo menos em uma determinada época.

É-nos lícito conjecturar, outrossim, que Cauchy possa ter sido influenciado por essa estratégia didática de abordagem dos conteúdos, e por este motivo não podemos deixar de destacar os importantíssimos e largamente utilizados livros-textos de Lacroix, mais tarde professor de análise de Cauchy, e cujo assistente *répétiteur* era Ampère, amigo estreito e influente por quase toda a vida do próprio Cauchy.

---

[14] Grattan-Guinness (1980), p.95. Segundo Boniface (2002, p.4-5), o marquês Guillaume de l'Hospital (1661-1704), matemático francês, através de sua obra *"Analyse des infiniment petits pour l'inteligence des lignes courbes"*(1696) expôs de forma sistemática o cálculo diferencial leibniziano [referente ao jurista, teólogo, filósofo e cientista alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)].

[15] Gaspard Monge (1746-1818) e Adrien Marie Ampère (1775-1836), cientistas franceses.

[16] Schubring, *in* Goldstein (1996), p.364.

Sobre os livros-textos de Lacroix e a influência que os mesmos poderiam ter exercido sobre Cauchy, é suficiente no momento sublinharmos[17] que o amplamente difundido *Éléments d'algèbre* (de Lacroix) foi o único livro admitido para a disciplina de álgebra nas escolas secundárias francesas, durante a era napoleônica, justamente a época da preparação de Cauchy para ingressar na *École Polytechnique*. Além, evidentemente, do próprio livro-texto em que Cauchy estudou análise na *École Polytechnique*, o *Traité Élémentaire de Calcul Differentiel et Integral*, também de Lacroix. Mas deixemos os detalhes das influências matemáticas sobre a obra de Cauchy para o capítulo dois.

Chegamos finalmente à época de Cauchy. Continuaremos seguindo uma ordem cronológica. Porém, antes de estudarmos mais detalhadamente as características da *École Polytechnique* e a importância desta para o ensino superior científico francês, vamos nos deter um pouco na trajetória pessoal desse homem que foi um marco, um verdadeiro divisor de águas da análise na primeira metade do século XIX.

1.2 – A trajetória de Cauchy

Cauchy é o personagem principal de nosso estudo. Cremos firmemente que, além do conhecimento dos fatos marcantes da vida de Cauchy, faz-se mister – para os propósitos de nosso trabalho – uma compreensão mais aprofundada acerca da sua obra vista como um todo, mormente dos fatores que a influenciaram (em especial o fator-ensino), e de quanto a mesma foi importante para o desenvolvimento ulterior da análise. Comecemos, destarte, com um breve mas proveitoso voo horizontal sobre a vida de Cauchy e o ambiente em que ele nasceu, cresceu e se desenvolveu.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) sofreu as influências de seu tempo como qualquer homem em sua dimensão histórica. Mas o fato de ter sido quem foi e de ter representado tudo o que representou, tendo atuado de forma muito mais destacada em seu ramo de atividades do que um personagem ordinário da História, faz com que, ressaltamos, o conhecimento de tais influências se mostre indispensável para a compreensão da concepção de sua obra.

---

[17] *ibid*., p.368.

Wolf sustenta que a hermenêutica – isto é, “o método que nos ensina a entender e explicar os pensamentos de alguém mediante seus sinais”– necessita do “conhecimento dos costumes do período acerca do qual nós escrevemos e também de sua história e literatura, e deve estar familiarizado com o espírito da época”.[18] Prossigamos, pois, segundo sua prudente orientação.

O histórico familiar de Cauchy determinou sua origem, onde se dariam seus primeiros passos, as pessoas com quem primeiro lidou, suas primeiras letras. A proteção paternal o protegeu das intempéries de toda ordem, tanto nos planos físico e orgânico como também nos planos político e profissional.

A conjuntura histórica determinou os limites de sua visão de mundo.

A estrita fé católica pautou sua conduta moral.

O rígido dia-a-dia escolar da caserna forjou sua disciplina acadêmica.

As circunstâncias político-econômico-sociais turbulentas da França de sua época condicionaram sua trajetória.

A produção matemática acumulada – do mundo ocidental, em particular – foi seu referencial teórico, seu ponto de partida.

Se precisássemos resumir em poucas palavras, diríamos que Cauchy foi o matemático mais destacado da França no início do século XIX, numa época em que Paris ainda se via como o centro do mundo matemático. A tradição historiográfica credita a ele a fundação da idade moderna do rigor na matemática, embora reconheça que Gauss[19] trabalhava com padrões igualmente altos de rigor, mas que, todavia, publicava bem menos frequentemente seus resultados. Sob esse critério, ambos podem ser considerados os primeiros matemáticos verdadeiramente modernos.

E, em sede de fundamentos, diríamos que as exposições de análise de Cauchy teriam sido as que primeiro apresentaram o cálculo na forma em que ainda hoje é abordado[20]. Este, a propósito, é um dos temas que serão aqui neste trabalho alcançados.

O futuro católico ultraconservador e ultramonarquista Cauchy nasceu, por ironia do destino, quase um mês depois que a Bastilha caiu (1789), quando se iniciou a Revolução Francesa, a primeira da Era das Revoluções (1789-1848), num momento de ruptura crucial

---

[18] Wolf (1839) *apud* Schubring (2005), p.3. [Friedrich August Wolf (1759-1824), filólogo alemão, que propôs várias regras para lidar com problemas de interpretação de textos históricos].

[19] Karl Friedrich Gauss (1777-1855), alemão, um dos maiores matemáticos da História; recebeu o codinome de “Príncipe da Matemática”.

[20] Edwards (1979), p.309

da História, de tal forma importante, que inaugurou uma nova divisão da cronologia histórica, a chamada Idade Contemporânea.

A família de Cauchy foi vítima de vários acontecimentos que assustavam a sociedade francesa da época: mudança forçada de domicílio, de estilo de vida, do grau de sustentabilidade econômica, além do permanente estado de insegurança quanto aos acontecimentos que poderiam se seguir.

Reflitamos um pouco. Em momentos de estabilidade das instituições, é comum se pensar em certa linearidade da vida do homem comum, cuja inserção na cultura de determinada nação já estaria bem estabelecida. Ao contrário, em momentos de turbulência extrema, de total subversão de valores, de constante troca de paradigmas, só algo externo e de tradição inquebrantável poderia tornar minimamente estável o mundo ao redor de uma criança.

Foram a família e o Catolicismo que representaram a estabilidade e a segurança que cercaram o menino Augustin-Louis Cauchy até a adolescência. A disciplina militar só viria complementar a disciplina moral cristã.

Tendo crescido em ambiente cercado de organização e disciplina, com obediência a regras claras, coerentes, amplamente sabidas e perfeitamente executáveis, não é de se estranhar a força interior e o modo de pensar lógico-sistemático de Cauchy. Os jesuítas – importante referência educacional do segundo milênio no Ocidente – já detinham uma consolidada e secular experiência educacional e seu *modus operandi* se fazia internalizar no inconsciente coletivo, mormente nas idéias pedagógicas. Seus valores – ditos eternos – eram um porto seguro diante das modificações e incertezas daquele tempo.

Para se entender o Cauchy histórico não prescindimos de atentar para isso. Entendemos que qualquer análise envolvendo a atuação de Cauchy será incompleta se ignorarmos seu fortíssimo vínculo com os jesuítas e sua fanática convicção religiosa.

É seguro que não vamos nos deter em aspectos periféricos ou em questiúnculas acerca do amplo espectro de crenças e fatos que circundavam o mundo em que Cauchy viveu. Somente no que tange àquilo que pode ter influenciado sua obra matemática – e sua consequente postura pedagógica – é sobre o qual vamos realmente nos debruçar.

Consideraremos concêntricos os círculos de influência, dos quais partiremos então daquele de menor raio. O entorno mais próximo de Cauchy era sua família. Foi dito mais acima com ênfase que ela teria sido fundamental para sua carreira. Não foi exagero nosso.

Cauchy recebeu uma educação elementar de muito boa qualidade, no próprio ambiente doméstico. As aulas eram dadas por Louis-François Cauchy, seu pai, que preparava o material didático ele próprio, e se preocupava muito com a formação literária do filho, antes mesmo que este pudesse abrir seu primeiro livro de matemática[21]. A consequência disto é que Cauchy se tornaria poliglota e bom escritor, e que sua cultura humanística se destacaria bastante da mediocridade dos homens comuns.

Louis-François, por sua vez, sabia da importância de uma extraordinária formação cultural para a ascensão social na França de então. Ele próprio foi exemplo de uma conquista meritocrática, um estudante modelo, um membro da elite intelectual, a "fina flor" da inteligência francesa, ascendendo cargo a cargo mesmo num Antigo Regime essencialmente aristocrático. Ele era um operador do Direito, e desejava que seus filhos seguissem também a carreira jurídica (que Cauchy, entretanto, não abraçou). Mas, caso não a escolhessem, que fossem no mínimo brilhantes na carreira que seguissem. Por este ponto de vista, Cauchy foi um filho obediente.

Belhoste assinala ainda que

> "a personalidade intelectual de Augustin-Louis, como é estampada fortemente em seus trabalhos científicos, foi nutrida num círculo familiar íntimo, no contato estrito com sua contrita e piedosa mãe e com seu aberto e extremamente laborioso pai. Foi nesse círculo que ele desenvolveu sua excepcional capacidade para o trabalho duro e sua curiosidade e interesse em aprender, que com o passar do tempo, se tornou quase uma paixão exclusiva pela verdade"[22].

E, justificando o que havíamos asseverado mais acima, o autor estabelece a importante relação entre o caráter de Cauchy e sua obra, quando afirma que, se a rigidez de caráter e uma certa teimosia obstinada herdada dos seus pais faziam parte da constituição de sua personalidade, então:

> "(...) é fortemente improvável que sem eles ele [Cauchy] tivesse podido persistir em enfrentar e resolver tantas questões de pesquisa fundamentais e difíceis, algumas das quais muito resistentes aos seus esforços por longos períodos de tempo"[23].

---

[21] Belhoste (1985), p.18
[22] Belhoste (1991), p.8
[23] *idem*, p.9

Enfim, Cauchy herdaria de sua família de juristas uma visão que ele acabou adaptando àquilo que desejava ver na matemática: a habilidade de formalizar situações e manipular abstrações, e um rigor lógico e conceitual, assim como clareza e precisão expositiva[24]. Ou seja, de modo análogo às leis civis, sua meta era a de estabelecer diretrizes definidas claramente acerca do que pode e do que não pode ser feito em matemática.

O que Cauchy não herdaria do pai, entretanto, seria um modo mais pragmático e oportunista de enxergar as idas e vindas do poder temporal dos homens. Agindo diferentemente de seu pai, que conseguiu favores palacianos em razão de sua maneira hábil de se relacionar com o poder constituído, fosse quem fosse que estivesse no comando, Cauchy viria a ser na vida adulta um homem radical e solitário, com poucos amigos próximos, dada a sua visão um tanto estreita de mundo.

Essa personalidade difícil ajuda a explicar o flagrante contraste entre a grande quantidade de seguidores de sua obra propriamente dita, e a ausência quase absoluta de pupilos e favoritos no seu círculo pessoal de amizades. Aliás, isso também ajuda a explicar por que ele teve que provar sempre sua superioridade, mesmo em relação aos mais fracos entre seus contemporâneos, e teve que publicar trabalhos num fluxo virtualmente constante. E ajuda ainda a explicar por que motivo nunca auxiliou colegas mais novos em suas carreiras e trabalhos, como os jovens e brilhantes Abel e Galois[25].

Mas essa faceta de sua personalidade ainda demoraria alguns anos para aflorar. Ainda adolescente, Cauchy ingressaria então em 1802 na antiga *École Centrale du Panthéon*, depois denominada *Collège Royal Henri IV*, onde ficou até 1804.

A fim de ingressar na *École Polytechnique*, Cauchy fez um curso preparatório de matemática, onde teve um rápido progresso. Com somente dezesseis anos de idade, Cauchy afinal faz o exame de admissão e passa em segundo lugar[26].

Como era o ambiente em que Cauchy estudou em nível superior? O que representava essa instituição? Vamos então abordar a emblemática escola em que Cauchy adquiriu seus conhecimentos matemáticos e onde produziu seus mais notáveis frutos.

Afinal de contas, os valores sociais e culturais dominantes em uma sociedade ou um estado são moldados pelas tradições religiosas e filosóficas específicas que influenciam

---

[24] *ibid*., p.9
[25] Grattan-Guinness (1970), p.393. [Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático norueguês que sofreu forte influência da obra de Cauchy; Evariste Galois (1811-1832), matemático francês].
[26] Belhoste (1985), p.21.

sua respectiva história. E as estruturas institucionais das escolas e da educação superior acabam sendo não mais do que materializações dos valores culturais mais destacados[27]. Justifica-se assim a nossa preocupação em abrigar esse conjunto amplo de aspectos a fim de não perdermos a compreensão do todo.

1.3 – Cauchy e a *École Polytechnique*

A *École Polytechnique*, onde Cauchy estudou, se formou engenheiro, e donde veio a se tornar professor, é uma instituição de ensino fundada[28] em 11 de março de 1794 que "encarna os valores franceses e contribui há dois séculos para legitimar os valores republicanos revolucionários"[29]. Símbolo de uma concepção científica e técnica francesa, a *École* se voltou inicialmente para a formação de uma elite a princípio burguesa, em resposta à tendência dos grupos de poder sob os quais foi estabelecida.

A *École Polytechnique* foi a criação mais importante da Revolução em matéria de ensino. Como vimos, o ensino superior científico sob o Antigo Regime se achava numa situação peculiar. As ciências exatas ocupavam um lugar muito reduzido nas universidades, que sofriam um perceptível estado de obsolescência.

Somente as escolas de engenharia compreendiam em seus programas um curso de matemática de bom nível[30]. A melhor delas era a *École du Génie de Mézières*, onde Monge havia lecionado.

A influência de Monge e de antigos alunos dessa escola, como Carnot e Prieur-Duvernois[31], ambos membros do *Comité de salut public*, e as necessidades crescentes de engenheiros militares para a guerra revolucionária foram determinantes para a Convenção[32], e explicam a criação da *École centrale des Travaux Publics*, que em 1795 mudaria seu nome para *École Polytechnique*[33].

---

[27] Schubring, *in* Goldstein (1996), p.364
[28] A *École Polytechnique* só foi aberta, contudo, em dezembro de 1794.
[29] Dhombres, *in* Fourcy (1987), p.7
[30] Belhoste (1985), p.19
[31] Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), Claude Antoine Prieur Duvernois (1763-1832), renomados cientistas franceses, influentes na época da Revolução.
[32] Após o período de desordem em virtude da tentativa de contra-revolução liderada por Louis XVI, uma nova Assembléia Constituinte teve que ser formada. Surge então a Convenção Nacional (ou simplesmente Convenção). Para fins legislativos e administrativos a Convenção criou, entre outros, em 1793, o Comitê de Salvação Pública e o Comitê de Segurança Pública.
[33] Belhoste (1985), p.20. [após a Restauração, o nome passaria a ser *École Royale Polytechnique*].

T.Shinn afirma que:

> "A partir de 1793, a Convenção, em face da falta de quadros científicos e técnicos e das necessidades cada vez mais urgentes da nação, decide constituir uma comissão composta de cientistas e engenheiros os mais eminentes. Esta comissão é encarregada de estabelecer um programa que permita formar um grande número de cientistas e de técnicos seguros politicamente e competentes no plano técnico. O governo faz então chamar Monge, Lamblardie, Carnot, Prieur de la Côte-d'Or e outros cientistas renomados que ficaram encarregados de reformar o sistema de ensino técnico superior francês"[34] (grifo nosso)

Para o recrutamento dos novos estudantes, a idéia inicial era a de que o mesmo fosse realizado "sem discriminação de nascença nem de fortuna, mas unicamente baseado no valor e no mérito"[35].

Não obstante existam controvérsias acerca do caráter majoritariamente burguês da origem dos seus alunos nas primeiras décadas da *École*[36], o que havia de fato na inclusão dos elementos de classes sociais antes marginalizadas do poder político nos altos círculos acadêmicos era uma legitimação implícita do fato social que se impunha, qual seja, a ascensão da burguesia como classe social dominante e seu desejo de ser reconhecida como a elite da nação.

A título de ilustração, só para termos uma ideia do regime de estudos adotado pela *École* para atingir suas elevadas metas – impensável nos dias atuais – na época em que Cauchy lá estudou, reparemos no seu extremo rigor: diariamente (com exceção dos domingos), das 6:00 às 20:30, com intervalos somente no café da manhã, almoço e uma pequena recreação[37].

Da criação da *École* até 1825 (e, portanto, durante todo o período estudantil de Cauchy), as duas personalidades dominantes na vida da *École* foram Monge e Laplace.[38] Ambos exerceriam papéis muito importantes, embora por motivos distintos, sobretudo na ascensão profissional de Cauchy, como veremos mais adiante.

Do mesmo modo, ambos eram figuras exponenciais dos debates acerca da oposição entre ciência pura e ciência aplicada, que nascera junto com a própria *École Polytechnique*.

---

[34] T.Shinn *apud* Dhombres, *in* Fourcy (1987), p.21.
[35] Dhombres, *in* Fourcy (1987), p.21.
[36] Baseado nos dados expostos por Fourcy, Dhombres sustenta que haveria de fato, por assim dizer, uma distribuição mais diversificada das vagas. (*idem*, p.13)
[37] Grattan-Guinness (1980), p.2

Para Théodore Olivier[39], haveria uma corrente denominada "*École* de Monge", de cunho prático e aplicado, e uma outra, a "*École* de Laplace", de cunho mais puro e teórico. Tais diferenças de ponto de vista orbitavam no dia a dia da *École*, e certamente não passariam despercebidas por Cauchy, um protegido de Laplace.

É certo, porém, que Monge e Laplace estavam de acordo quanto ao essencial: utilizar os métodos mais gerais (mais teóricos), mais atualizados e mais consistentes, para possibilitar então as aplicações. Ambos idealizavam o engenheiro egresso da *École Polytechnique* como um homem formado nas especulações teóricas da matemática e que as aplica em realizações concretas.[40] Ou seja, uma formação teórica a serviço ulterior da prática.

Cabe aqui não deixarmos esmaecer em nossas vistas o debate acima referenciado, pois, no que tange à análise, essa discussão se manteve viva em alguns períodos por toda a vida da *École Polytechnique*. Perceberemos nitidamente os ecos desse debate quando tratarmos da atuação de Cauchy.

Vale destacar também a importante crítica a esse modo de se ver a matemática, a fim de nos ajudar a entender bem o espírito da época, da lavra do grande matemático tedesco Jacobi[41] – contemporâneo de Cauchy – que rejeitava certos valores definidos externamente, como a utilidade, e criticava os matemáticos franceses por darem importância exagerada à matemática aplicada, e por "confundir as causas verdadeiras com as incidentais para o progresso na ciência"[42].

Observemos bem o que escreveu Lacroix em 1810, em resposta a um colega que questionou por que ele e outros matemáticos franceses negligenciavam alguns resultados de pesquisa vindos da Alemanha, com suas teorizações abstratas, vistas como típicas da epistemologia matemática daquele país:

> "A análise e a geometria pura são sem dúvida em si mesmas belíssimas especulações, muito próprias para o exercício da mente, e podem oferecer a ocasião de desenvolver bastante sagacidade. Mas devo confessar que nunca consegui dar muita importância a essas vantagens, quando entendidas como o único objeto de estudo dessas ciências. Eu sempre acreditei que houvesse modos de

---

[38] Monge foi professor da *École Polytechnique*, enquanto Laplace [Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), cientista francês] fez parte do *Conseil de Perfeccionment*..

[39] T.Olivier *apud* Dhombres, *in* Fourcy (1987), p.30. Dhombres discorda, e justifica apontando trabalhos notáveis dos dois grandes cientistas: alguns teóricos, de Monge, e outros experimentais, de Laplace.

[40] Dhombres, *in* Fourcy (1987), p.30.

[41] Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), matemático alemão.

[42] Schubring, *in* Goldstein (1996), p.374

> exercitar o raciocínio, e especialmente de alimentar a atividade mental, muito mais satisfatoriamente do que a combinação de cálculos fatigantes os quais, quando muito aprofundados, isolam-nos do resto da humanidade. Depois das aplicações usuais, depois da exposição arrazoada dos métodos principais, que introduzem a filosofia da ciência e mostram o caminho que segue o espírito humano na pesquisa das propriedades da grandeza, a ciência do cálculo me parece não mais do que um tipo de jogo de xadrez, se não oferece a chave para muitos fenômenos que seriam inacessíveis sem seu socorro. Portanto, eu examino cada descoberta analítica relativamente às esperanças que podem inspirar para o avanço das ciências físico-matemáticas"[43].

A resposta de Lacroix é um raro documento, que expressa claramente o panorama epistemológico da matemática francesa; um *Credo* para essa caracteristicamente francesa *école physico-mathématique.* Característica esta que, como já vimos, foi sendo adquirida no próprio contexto das necessidades nacionais.

A *École Polytechnique*, em cumprimento fiel ao seu papel de formadora de engenheiros, não oferecia uma formação enciclopédica, mas privilegiava a matemática e as ciências físicas, o que resultou na formação de hábeis matemáticos, embora estes não ocupassem uma posição elevada no contexto institucional que os cercavam.[44] Todavia, a matemática estava reduzida a uma "função propedêutica", e, embora fosse uma disciplina fundamental na educação técnica, era considerada uma disciplina auxiliar para a prática posterior.[45] Ou seja, a *École Polytechnique* não se dedicava à pesquisa, mas ao ensino.

É importante assinalar que havia instituições especificamente estabelecidas para a pesquisa científica. O *Institut National*, com suas diferentes classes, compreendia todas as disciplinas, de humanidades às ciências e artes. De acordo com Schubring,

> "A concepção dominante era a de *complementaridade* entre pesquisa e ensino, de tal modo que acadêmicos de tempo integral não estavam, de fato, engajados em instituições de ensino. No início, a complementaridade era praticada desse modo; Legendre e Lagrange constituem exemplos instrutivos. Os professores das escolas especiais, supunha-se que fossem competentes em sua ciência, que seguissem o progresso da ciência e mantivesse assim a qualidade de seu ensino, mas não que funcionassem como pesquisadores determinados a estender as fronteiras do conhecimento."[46] (grifo do autor)

[43] *ibid.*, p.371
[44] *ibid.*, p.383
[45] Schubring (2002), p.47.

Pois bem. Foi na emblemática e seminal *École Polytechnique*, então militarizada, que Cauchy "sentou praça" no 4º esquadrão da 1ª companhia, sob o comando de Charles-Émile Laplace, filho do grande Laplace, como um dos mais jovens entre os alunos, sonhando em se tornar um engenheiro. Muito bem sucedido nos dois primeiros anos, escolhe prosseguir seus estudos na mais desejada escola de aplicação da França, a *École des Ponts e Chaussées*, onde cumpriu suas tarefas com brilhantismo.

Cauchy foi aceito no corpo de engenheiros da *École des Ponts e Chaussées*, no início de 1810. Foi enviado então para Cherbourg para trabalhar num gigantesco projeto napoleônico visando a estender um porto militar.

Nesta época, antes de assumir a cadeira de análise na École, ele não só cumpriu suas tarefas profissionais com louvor e extrema dedicação, como também começou suas pesquisas em matemática, embora ainda em campos compatíveis com a Engenharia[47].

Parece contraditório que Cauchy tenha começado a trabalhar em geometria pura em seu tempo livre em Cherbourg, não obstante desse inicialmente uma grande importância às ciências naturais. O fato é que ele levou consigo a *Mécanique Céleste*, de Laplace, e a *Théorie des Fonctions Analytiques*, de Lagrange[48], que o estimularam a fazer um estudo coerente de todos os ramos da matemática, começando com a aritmética, indo até a astronomia, clarificando pontos obscuros no que fosse possível, trabalhando em simplificar provas, e tentando descobrir novas proposições[49].

Paulatinamente, ele acabaria envolvido com sua própria pesquisa. Assim, começou a trabalhar no problema dos polígonos regulares estrelados e dos três poliedros regulares não-convexos de Poinsot. Ao mesmo tempo, estudou a "fórmula de Euler" que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro.

É certo que seu primeiro trabalho em poliedros exigia mais virtuosismo do que conhecimento matemático propriamente dito. Mesmo assim, é curioso que Cauchy não tivesse dado a devida importância ao seu *Recherches sur les polyèdres*, de 1811, que efetivamente lhe abriu os caminhos da notoriedade e que de fato chamou a atenção dos *savants* do *Institut*.

Ainda sob uma visão que dava pouca importância aos gêneros de pesquisa que não pareciam suscetíveis de aplicação, Cauchy abandonou em definitivo suas pesquisas em

---

46 *idem*, p.54.
47 Schubring (2005), p.428
48 Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), cientista nascido em Turim.
49 Belhoste (1991), p.25

geometria pura depois de 1812. Numa conferência de 1811, Cauchy chegara ao ponto de declarar enfaticamente: "a aritmética, a geometria, a álgebra, as matemáticas transcendentes, são ciências que podemos ver como terminadas, e com as quais não resta nada a fazer senão utilidades práticas"[50]. Tudo fazia crer que o futuro pertencia às ciências da engenharia.

Na verdade, esta estranha declaração não foi mais do uma tentativa de sufocar as sementes matemáticas que já brotavam fortes em sua mente e nos parece hoje um divertido e prematuro réquiem da carreira de engenheiro de Cauchy.

Aqui, podemos provocar uma reflexão: diante de tão firmes convicções utilitaristas, como pôde Cauchy dar uma guinada na sua atuação profissional, a ponto de ter sido uma das principais referências da matemática pura? O que pode tê-lo feito (e a alguns dos seus pares também) refletir acerca dos fundamentos da análise, algo tão aparentemente distante do espírito "aplicado" politécnico?

Mais à frente, restará mais bem esclarecida – esperamos convincentemente – esta reflexão, e já adiantamos aqui que a necessidade de ensinar a análise foi um fator determinante para essas mudanças de rumo. Tornemos, porém, à nossa linha do tempo.

Durante uma série de licenças de trabalho devidas ao seu estado precário de saúde, Cauchy largou, como dissemos, as pesquisas em poliedros e começou a orientar seu caminho em direção à análise. Retornou brevemente àquelas que seriam suas últimas tarefas como engenheiro, trabalhando no projeto do *Canal d'Ourcq*, em 1814, quando na mesma época terminava sua primeira grande obra em análise: *Sur les intégrales definies*[51].

Desde 1812, Cauchy já tentara algumas vezes conseguir colocações profissionais em instituições acadêmicas, mas ainda não obtivera êxito. Podia ser só uma questão de tempo. Realmente, para a geração de Cauchy, as vagas nas instituições de pesquisa francesas estavam cada vez menos disponíveis, fato que ajuda até mesmo a explicar o relativo declínio da ciência na França alguns anos depois.

Mas uma mudança crucial deste quadro para Cauchy veio mesmo somente com a Restauração de 1815, quando sua filiação a círculos religiosos e seu firme posicionamento político tiveram papel decisivo na sua vida profissional daí em diante.

Vamos ver agora como isto se deu. Ainda como aluno da *École Polytechnique*, em 1808, Cauchy convertera-se à *Congrégation* por um jovem *répétiteur*. Esta se constituía

---

[50] Belhoste (1985), p.44
[51] Schubring (2005), p.428

numa associação secreta, monarquista e ultracatólica, fundada por um padre jesuíta, que organizava uma resistência ao regime imperial napoleônico, e donde participavam "jovens de boas famílias" no intuito de se unirem e rezarem contra a corrente falta de fé, antir-religiosidade e secularismo. Eles prestavam assistência mútua, e vinham na maior parte das vezes da elite intelectual francesa.

A *Congrégation* veio a se infiltrar na *École Polytechnique*, como uma espécie de "missão" para a conversão de uma gente tão desligada dos valores religiosos. Pouco a pouco, a influência dessa sociedade religiosa foi se espraiando, e com ela os ideais monarquistas opostos aos do Império. As atitudes de Napoleão – o Usurpador – contra o papado só fizeram aquecer os ânimos e incrementar as atividades clandestinas que se sucederam.

Quando da restauração da realeza, com Luís XVIII, e a consequente derrubada dos valores revolucionários, muitos dos seus membros assumiram postos de poder no Estado, e Cauchy passou assim a poder contar com o apoio decisivo de seus confrades. Com a sua competência matemática jamais colocada em xeque, com correligionários bem posicionados na burocracia estatal e acadêmica, e ainda por cima com o incondicional apoio de seu influente pai – que dava um "suporte leal" a quem estivesse no poder – seus caminhos ficariam bem mais "asfaltados".

Não demorou, e Cauchy foi nomeado professor assistente de análise em 1815, mesmo não tendo sido antes um *répétiteur*, nem nunca ter tido experiência docente, contrariando a tradição da *École*, porém reforçando os compromissos do diretor com os restauradores emergentes.

Numa das numerosas licenças de Poinsot[52] – titular da cadeira de análise – que o impedia de começar a tempo seu curso, e mediante recomendações de homens ilustres como o seu protetor Laplace, Cauchy foi chamado a substituí-lo.

Já em 1816, com a suspensão das atividades da *École* (já desmilitarizada desde a queda de Napoleão), e com a saída forçada de Monge (promovida por um expurgo revanchista), Cauchy, agora um reconhecido cientista com 27 anos de idade, aceitou o convite e, debaixo de muitas críticas[53], assumiu a titularidade da cadeira – agora vaga – daquele que foi um dos grandes fundadores da *École Polytechnique*.

---

[52] Louis Poinsot (1777-1859), matemático francês.

[53] É consenso que tais críticas se deveram ao caráter político da opção de Cauchy em substituir Monge após o detestável e violento expurgo. Não encontramos na literatura dúvidas quanto à sua competência matemática. Cabe registrar, além disso, que Cauchy também substituiu Monge no *Institut*.

O professor Cauchy nada entendia de didática, a única experiência que tinha numa sala de aula era a de aluno que um dia foi. Sorte a nossa que discordasse dos modos como a matemática era apresentada até então, motivo pelo qual construiu uma arquitetura nova da análise no calor da necessidade de ensiná-la. E, principalmente, produziu livros-textos com essa finalidade, um dos quais é o principal foco do nosso trabalho, o *Cours d'analyse*. Ora discorreremos um pouco sobre isso.

1.4 – As primeiras experiências de Cauchy com o ensino de análise

Os livros-textos de Cauchy, baseados nos cursos que ministrou na *École Polytechnique*, firmam o estilo da análise matemática. Cauchy segue a tradição de apresentar suas aulas em volumes de *cours* ou *traités*. Escreve Grattan-Guinness que a qualidade dos livros-textos de Cauchy era tamanha que, por décadas, seus sucessores somente produziriam variações e expansões do seu tema[54].

A exposição do cálculo de Cauchy se tornou aquela que tem sido aceita até a época presente. E, entre suas maiores contribuições, estão os métodos rigorosos com os quais ele introduz o cálculo em seus três grandes tratados: o *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique. Première partie. Analyse algébrique* (a partir daqui referenciado somente como *Cours d'analyse)*, de 1821, o *Résumé des leçons données a l'École royale polytechnique, tome premier* (a partir daqui, somente *Résumé*), de 1823, e o *Leçons sur le calcul différentiel* (a partir daqui, somente *Leçons*), de 1829.

Mas como isso tudo se deu? Muitos percalços e incompreensões ainda surgiriam nesse drama histórico-matemático. Prossigamos, pois.

Cauchy deu sua contribuição para os fundamentos da análise principalmente nos quinze anos em que lecionou na *École Polytechnique*, quando produziu suas obras mais importantes nesse campo, citadas logo acima.

No início de sua carreira docente, o currículo de análise previa que, antes de ensinar cálculo diferencial e integral, o professor devia apresentar a chamada “análise algébrica”, que correspondia mais ou menos ao primeiro volume da clássica *Introductio* de Euler[55] (trataremos cuidadosamente desse tema mais adiante).

[54] Grattan-Guinness (1980), p.97
[55] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.160. [Leonhard Euler (1707-1783), um dos maiores matemáticos da História].

Em resposta a pedidos de homens como Laplace e Poisson[56], e *"pour la plus grande utilité des élèves"*[57], Cauchy decidiu então escrever e publicar, em 1821, a série de aulas que deu nessa parte do curso, que vem a ser justamente o *Cours d'analyse*.

Vale registrar que o trabalho de Ampère e suas aulas tiveram influência sobre Cauchy, e vice-versa; com efeito, Cauchy cita seu amigo entre aqueles a quem ele deve tanto o *Cours d'analyse* como o *Résumé*.[58] Ampère foi colega de Cauchy, e eles revezavam a regência de turma no primeiro e no segundo ano da *École*. A propósito, também foi pedido a Ampère pelo *Conseil de Perfectionnement* (era usual, na época) que publicasse suas aulas, e ele o fez em 1824, com o nome de *Précis des leçons sur le calcul différentiel et le calcul intégral*.

Quando da publicação da primeira parte do *Cours d'analyse*, porém, o currículo foi significativamente alterado, e não havia mais sentido em se preparar uma segunda parte desta obra. Foi quando Cauchy escreveu o *Résumé* em 1823, e alguns anos depois, em 1829, o *Leçons*.

Mas não foi nada linear a condução de seu magistério na *École Polytechnique*. Tão logo Cauchy assumiu a cadeira de análise, ele cuidou de reformar radicalmente o curso de análise[59]. E assim começou sua docência.

Entretanto, por uma desastrosa administração do tempo – talvez por inexperiência – acabou conduzindo mal o curso, o que resultou numa forte interferência direta da direção da *École* na sua atuação a partir de então.

Combinado a esse fato, havia a resistência a uma abordagem muito esmiuçada e reflexiva – que ia além das demandas de um curso de engenharia, por assim dizer – e uma pressão pela volta da instrução explícita dos *infiniment petits*[60] (isto porque os infinitesimais se mostravam sensivelmente mais práticos na apresentação dos cálculos, embora carentes de uma justificação rigorosa aos olhos dos matemáticos do século XIX).

Acrescente-se a isso – para dificultar ainda mais a situação – sua militância político-religiosa extremamente conservadora, que o fazia ficar um tanto isolado, e que o tornava vítima de certa desconfiança e má-vontade por parte de seus pares.

A princípio, avaliando-se anacronicamente, poder-se-ia esperar que seus alunos tivessem se sentido privilegiados ao se imaginarem co-participantes de uma mudança (ou,

---

[56] Siméon-Denis Poisson (1781-1840), o futuro rival francês de Cauchy em análise e fisica-matemática.
[57] Cauchy (1992), *Introduction*, p.*i*
[58] Bottazzini (1986), p.119
[59] Schubring (2005), p.429

segundo Grabiner, uma revolução) conceitual na análise. E também que, em consequência disso, tivessem sentido mais facilidade na aprendizagem dos conceitos básicos da análise.

Mas os fatos se mostrariam diferentes. Cauchy acabou sendo um professor muito contestado por muitos de seus colegas e superiores (e por alguns de seus alunos também), talvez pelo seu estilo muito "filosófico", ou melhor, por investigar por bastante tempo (excessivo, para seus superiores e colegas) e muito a fundo pequenos detalhes das partes introdutórias do curso, em detrimento das partes mais aplicadas, que na época "cativavam" mais o alunado de Engenharia. Estes eram, pelo menos, os argumentos de alguns dos seus pares[61]. Belhoste explica de outra forma. Os incidentes[62] envolvendo Cauchy e alguns estudantes teriam sido causados por motivos de natureza política.

Qualquer que tenha sido a verdadeira razão dos protestos, o importante é que foi precisamente essa insistência nos fundamentos que, através de seus livros-textos, fizeram o controverso professor Cauchy famoso como o iniciador do movimento de rigorização da análise[63] e, segundo Emile Borel, o criador da análise moderna[64].

A via-crúcis de Cauchy começou logo quando assumiu a cadeira de análise em 1816. A análise detinha uma espécie de hegemonia entre as demais disciplinas, uma vez que era comum a todas as carreiras da engenharia. Alguns cursos de aplicação dependiam dela mais fortemente, como por exemplo, a análise aplicada à geometria de três dimensões e geometria descritiva. Essa hegemonia impunha aos professores de análise uma responsabilidade difícil de ser abraçada, principalmente pela pequena bagagem matemática exigida dos alunos para cursá-la.

Precisamos levar em conta, igualmente, que a *École Polytechnique* inaugurou, por assim dizer, o primeiro curso de formação completa em matemática superior. O currículo para a sala de aula teve de ser construído no calor dos acontecimentos e sem modelos consagrados. Necessitava, assim, de constante aperfeiçoamento. Os próprios requisitos de formação do alunado ficavam à mercê das necessidades desse novo e instável currículo.

---

[60] *idem*, p.429

[61] Belhoste (1991), p.70 e ss.

[62] Em 1820, houve protestos e vaias contra Cauchy, partindo de alguns estudantes, quando o governo reduziu as liberdades civis, após o assassinato do Duque de Berry. A oposição liberal (antimonarquista) era popular entre os estudantes, e os teria motivado à reação em face do ultraconservador Cauchy [Belhoste (1991), p.72.]. É provável que ainda estivesse vivo na memória (e no ressentimento) dos liberais o fato de Cauchy ter substituído Monge na *École Polytechnique* e no *Institut* em condições de legitimidade questionável.

[63] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.160

[64] Disse Emile Borel (1871-1959), matemático francês: "esta admiração [por Cauchy] não cessa de crescer a medida que eu conheço melhor aquele que foi verdadeiramente o criador da análise moderna" (Dugac, *in* Dieudonné, p.341)

Pois bem. Cauchy e Ampère, destarte, propuseram em 1816 modificações no programa, mas a comissão designada para avaliá-las e encaminhá-las ao *Conseil de Perfectionnement* tinha uma visão diametralmente oposta à deles. Na opinião dos dois jovens professores, entender, assimilar, e usar os princípios da mecânica requeria um conhecimento tal de análise, que seria necessário dedicar todo o primeiro ano para análise, restringindo desse modo a mecânica ao segundo ano.

Por outro lado, na visão da comissão, a análise era apenas e tão-somente uma ferramenta – ainda que indispensável – para problemas concretos de construção, balística, engenharia, design, etc. A *École Polytechnique* tinha sido fundada não para o interesse da matemática e dos matemáticos, mas para o treinamento de engenheiros e o desenvolvimento das ciências da engenharia[65].

Os professores deveriam então – segundo a comissão – introduzir a análise tão sucinta e convenientemente quanto possível e apresentar a instrução em mecânica e suas aplicações de forma paralela à instrução em análise durante o primeiro ano.

Cauchy, coerente quanto ao que pensava e desobediente quanto às ordens dos superiores, não seguiu o programa instrucional e, ao invés disso, prosseguiu com grande originalidade, dando um "salvo conduto" à sua inspiração, e promovendo mudanças em seu ensino ano após ano, pelo menos até 1823.[66]

Entretanto, a originalidade de suas aulas provocou reações desfavoráveis. Cauchy estava mexendo com os modos precedentes de ensino, adotando uma abordagem conceitual nova – como veremos no decorrer de nossa exposição – o que suscitou críticas, como esta, de um diretor da *École*:

> "Os alunos ficam naturalmente contrariados quando os desviamos de seus objetivos (...) ocupando-os em longos desenvolvimentos não exigidos ou de teorias de luxo que sobrecarregam suas memórias e os privam de momentos preciosos"[67].

A instrução em matemática pura estaria indo longe demais e tal "extravagância" seria prejudicial às outras disciplinas. Cauchy então foi chamado a aderir estritamente às linha do programa e dedicar tempo no fim das aulas a introduzir para os alunos as aplicações numéricas. Mas não adiantou. Nada de substancial mudou.

---

[65] Belhoste (1991), p.63
[66] *idem.*, p.63
[67] Dhombres, *in* Fourcy (1987), p.39

Em 1820, o *Conseil d'Instruction* mandou Cauchy e Ampère revisarem seus cursos. Dessa forma, seria possível, pelo menos *a posteriori*, controlar o conteúdo dos cursos. Foi quando Cauchy aproveitou a oportunidade e informou ao *Conseil* que a vontade deste em relação ao curso de análise seria brevemente satisfeita pela publicação de um trabalho novo a ser impresso, e que o primeiro volume da obra já estava a caminho[68]. Ele se referia, nada mais, nada menos, ao *Cours d'analyse*, que seria publicado em junho de 1821, e cujo conteúdo terá absoluta prioridade na sequência de nossa exposição.

Cauchy, entretanto, jamais teria sossego, mesmo com sua incansável insistência. E ele não ia mais abrir mão de sua missão, não permitiria qualquer tipo de retrocesso. Com efeito, vale registrar que, quando o *Conseil d'instruction* decidiu em 1825 pela volta ao *status quo*, ou seja, ao antigo método de introduzir o cálculo sem preliminares algébricas, e por meio dos *infiniment petits*, Cauchy replicou, escandalizado ao ver reduzida a nada sua obra pedagógica:

> "Se algumas partes do curso de análise e de mecânica foram consideradas por muitos como que exigindo dos alunos, sobretudo no primeiro ano, um trabalho considerável, isto não se deve de jeito nenhum ao método seguido hoje pelos professores, mas ao grande número de artigos adicionados, desde a reorganização da École, ao programa de primeiro ano, e ao rigor que os professores se propuseram a introduzir em suas demonstrações. Comparando os novos métodos com aqueles que eram usados antes, reconheceremos facilmente que <u>os novos são em geral mais simples, para não dizer mais rigorosos</u> (...) a experiência demonstrará em breve que os novos métodos, longe de atrapalharem a instrução dos estudantes, <u>permitem que aprendam, em menos tempo e com menos trabalho, tudo o que aprendiam antes</u>"[69]. (grifos nossos)

E Cauchy prosseguiu produzindo bastante material de pesquisa, e continuou firme na sua missão de "converter o *gentio* à nova análise" no decorrer da década de 1820, ao final da qual já era um matemático consagrado, conhecido por toda a Europa, e considerado o melhor matemático francês de seu tempo, em igualdade de condições com o notável Poisson.

Até que explodiu a Revolução de julho de 1830, quando da abdicação do rei Charles X. Esta foi uma catástrofe pessoal para Cauchy, que se negou a jurar obediência ao novo soberano, o "rei cidadão" Louis-Philippe. Cauchy, com efeito, recebera de

[68] Belhoste (1985), p.89

Charles X a condecoração de cavaleiro da Legião de Honra, a homenagem máxima que a França concedia a um filho da pátria. Nada mais coerente então o ato de seguir os papistas e ultramonarquistas, e impor a si mesmo um exílio da França, que acabou durando longos oito anos. Sua atitude o fez perder seu posto de professor da *École Polytechnique* e o de professor adjunto da *Faculté des Sciences* (para onde retornaria somente em 1849), alem de fazê-lo perder a filiação ao corpo de engenheiros. Para a *École Polytechnique*, entretanto, ele não voltaria mais até a sua morte, em 1857.

O exílio voluntário de Cauchy em 1830 aconteceu três anos após a morte de Laplace, algumas semanas depois da de Fourier e dois anos antes da de Galois. Tais baixas foram muito pesadas para a matemática francesa, o que certamente contribuiu para que acabasse declinando, e também para que passasse sua liderança no continente para a pujante vizinha Alemanha, por todo o restante do século XIX.

1.5 – A nova arquitetura da análise de Cauchy

Como Lützen (2003), Grabiner (1981), Dhombres (1992) e Bottazzini (1990) já pontuaram, e aqui ora destacamos, <u>foi a arquitetura propriamente dita do cálculo de Cauchy – como um todo, e mais do que somente em razão de seus elementos vistos separadamente – que a fez tão diferente da dos seus antecessores</u>.

Somente à guisa de ilustração, pois estudaremos o assunto mais aprofundadamente no capítulo três, é difícil encontrar nos livros-textos de Euler um lugar específico onde a distinção entre a definição de função contínua e descontínua seja central numa prova. Por outro lado, o conceito novo de continuidade de Cauchy é altamente operacional, pois intervém de modo preciso em várias provas, como por exemplo, na da existência da integral e na solução de equações funcionais[70].

Isto não nos surpreende. Segundo Jarník, Cauchy era, acima de tudo, um matemático cuja finalidade última eram as questões práticas, ou melhor dizendo, não tinha as pretensões de um filósofo na busca pelos fundamentos. Isto é, Cauchy, diferentemente

---

[69] Dhombres, *in* Fourcy (1987), p.38
[70] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.161

de seu contemporâneo Bolzano (1781-1848, teólogo, filósofo e matemático tcheco), construiria fundamentos somente até o nível necessário para suas futuras deduções[71].

Mesmo que descontemos um possível excesso do historiador na ênfase quanto às finalidade práticas de Cauchy, não é difícil perceber que este não rompeu com o espírito politécnico que reinava em terras francesas. Ou seja, não eram só motivações puramente filosóficas que empurravam-no para fundamentar a análise. Donde voltamos a provocar: o que então o teria motivado a tal rearranjo de idéias?

Veremos mais abaixo que o propósito didático foi um dos diferenciais que fez com que Cauchy e muitos matemáticos do século XIX percorressem novos caminhos no sentido de organizar o conhecimento matemático acumulado até então, e passassem a enxergar lacunas que deveriam ser preenchidas consistentemente para que a matemática, cada vez mais fundada em bases sólidas, pudesse se desenvolver de forma segura. Este foi um dos legados mais importantes da obra de Cauchy.

A materialização deste legado em particular se deu principalmente no seu mais influente livro-texto, o *Cours d'analyse*, sobre cuja gênese, aliás, repousa um episódio curioso. Conforme mencionamos acima, o currículo de análise na *École Polytechnique* estava sendo alterado na mesma época da publicação do *Cours*. Gilain relata que isto acabou acarretando uma obsolescência da obra "antes mesmo de seu nascimento"[72]. Por paradoxal que possa parecer, o livro ainda por cima teve uma recepção fria quando apareceu e não se sabe ao certo nem se o próprio Cauchy o utilizou como livro-texto, ou se algum outro professor o tenha feito.

Qualquer que seja a verdade a esse respeito, o importante mesmo – e não há quem questione – é que a grande influência do *Cours d'analyse* se deveu principalmente ao uso que o próprio Cauchy fez dele por toda a sua vida, como um texto de referência nos seus trabalhos de pesquisa[73].

O grande Abel, a propósito, já dizia que Cauchy era louco e que não havia nada a ser feito junto a ele, muito embora naquele momento (os anos 1820) ele ser "o matemático que sabia como a matemática devia ser feita"[74]. Disse ainda que Cauchy tinha trabalhos excelentes, mas que escrevia de um modo muito confuso. Todavia, afirmava que Cauchy era o único matemático daquela época que trabalhava com matemática pura.

---

[71] Jarník (1981), p.43. Ainda segundo este autor, o padre Bolzano enxergava a matemática principalmente como um ramo da filosofia e um exercício de pensar corretamente (p.39).
[72] Gilain *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.CLVI
[73] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.CLVII

As obras de Cauchy foram então, por decorrência natural, ponto de referência de Abel. Em 1826, declarou: "o excelente trabalho de Cauchy: *Cours d'analyse de l'école polytechnique*, (...), servirá como meu guia"[75].

Abel não era, contudo, o único matemático que se sentia desconfortável com a relativa despreocupação com os níveis de rigor que embasavam os resultados àquela época. O *Cours d'analyse* acabou funcionando como um bálsamo que ajudou a curar as feridas que vinham sendo abertas a cada paradoxo ou incongruência com que se deparavam hábeis matemáticos, como por exemplo, Fourier[76].

A obra de Cauchy foi lida tanto por Bolzano, Dirichlet e Riemann[77], diretamente, como indiretamente por Weierstrass[78], através de Abel. Isto é, teve influência sobre os maiores analistas nos meados do século XIX.

Grabiner arremata, resumindo em poucas palavras o que queremos dizer ao exaltarmos a importância dos livros-textos de Cauchy:

> "Ele [Cauchy] sintetizou os trabalhos anteriores e construiu tão bem um fundamento firme, que obscureceu as tentativas dos que o precederam. Assim como os Elementos de Euclides foram tão bem-sucedidos que obscureceram os trabalhos anteriores; assim como o cálculo de Newton-Leibniz tornou desnecessária a leitura dos resultados anteriores de áreas e tangentes; do mesmo modo o *Cours d'analyse* e o *Calcul infinitésimal* [*Résumé*] de Cauchy tornaram obsoletos muitos dos tratamentos anteriores de limites, convergência, continuidade, derivadas e integrais"[79].

---

[74] Bottazzini (1986), p.85
[75] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.177
[76] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), matemático francês.
[77] Peter G.Lejeune Dirichlet (1805-1859), Georg F.Bernhard Riemann (1826-1866), matemáticos alemães.
[78] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897), matemático alemão.
[79] Grabiner (1981), p.15

CAPÍTULO II – A ANÁLISE ANTES DE CAUCHY E OS FATORES QUE INFLUENCIARAM O SEU *COURS D'ANALYSE*

2.1 – Visão geral da análise antes de Cauchy.

O século XVIII é frequentemente tido como um século de transição na História em geral e particularmente na História da Matemática. Situado entre duas épocas de conquistas excepcionais do conhecimento humano, foi um momento imprescindível de amadurecimento de alguns conceitos e de gênese d'outros. Houve mudanças e progressos marcantes na Filosofia, na Política, e nas Ciências em geral.

A Matemática não ficou de fora desse turbilhão de novas idéias. Para ela, sobretudo, foi um período de consolidação e exploração das grandes descobertas do século XVII. Consequentemente, não viu uma linha estrita entre o cálculo e suas aplicações e entre a matemática e a física matemática. Muitos dos resultados obtidos eram testados na prática – vigia então um critério que podemos chamar de "validação empírica dos resultados" (isto é, a correção das regras de análise tinha que ser corroborada pelo sucesso na aplicação). Essa época compreendeu matemáticos muito produtivos, como os Bernoullis, d'Alembert, Euler e Laplace, que exemplificam bem essa tendência[80].

O historiador Fraser, mediante uma análise fina, estudou as tendências nas publicações acadêmicas avançadas das três principais academias européias da época (Paris, Berlim e São Petersburgo) e dividiu o desenvolvimento do cálculo a partir do início do século XVIII em três estágios – não propriamente rígidos, ele ressalta – a saber: primeiramente, um estágio geométrico, no qual predominavam problemas e conceituações geométricas; em seguida, um estágio analítico ou "algébrico", que começa nos anos 1740 nos escritos de Euler e alcança sua expressão final no trabalho de Lagrange, no final do

[80] Grabiner (1981), p.17. [Jacques Bernoulli (1654-1705), Jean Bernoulli (1667-1748) e Daniel Bernoulli (1700-1782), matemáticos suíços; Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), destacado cientista francês e influente pensador iluminista].

século; e o terceiro estágio, que abrange a análise clássica, e que começa no início do século XIX nos escritos de Cauchy.[81]

A maior parte dos matemáticos do século XVIII usava seu tempo – é preciso frisar – não para contemplar métodos e conceitos fundamentais, mas para aplicá-los na resolução de problemas. Com efeito, no século XVIII o termo ‘matemática’ compreendia muito mais do que cálculo e análise, variando da aritmética, álgebra e análise até astronomia, ótica, mecânica e hidrodinâmica, e chegando até mesmo a englobar tecnologias como artilharia, construção de navios e navegação[82].

Para sermos honestos, nem mesmo é correto falar de álgebra e análise no século XVIII como ramos distintos da matemática. Ninguém pode dizer que Newton, Euler, Lagrange, etc., eram algebristas ou analistas. O próprio Cauchy não aprendeu cálculo e álgebra como matérias distintas. A “análise algébrica” de Cauchy, por exemplo, nada mais era do que uma grande síntese de métodos algébricos com conceitos básicos de análise[83].

A maneira como era vista a álgebra no século XVIII foi determinante para que tivesse sido considerada um suporte seguro para o cálculo. A própria expressão “análise algébrica” nasce dessa visão. Jahnke afirma – com uma ênfase talvez excessiva – que o pensamento dos analistas do século XVIII estaria “dominado cognitivamente”[84] pela álgebra. Ou seja, os analistas estariam pensando mediante fórmulas e variáveis. Cabe aqui uma pausa para uma explicação mais detalhada.

Com o passar do tempo, o cálculo foi se separando cada vez mais das suas aplicações a despeito das mútuas e óbvias conexões. Enquanto que nos livros-textos de Bernoulli se enxergavam problemas geométricos e mecânicos, nos de Euler via-se uma organização de natureza algébrica e na verdade um número pequeno de aplicações[85]. Essa separação era uma reação à complexidade crescente dos problemas e era provavelmente inevitável. A análise caminhava a passos largos para os braços da álgebra, cujo prestígio e confiabilidade não cessavam de aumentar.

Ainda, vários matemáticos enxergavam os processos infinitos como parte da álgebra, o que aproximava naturalmente seu objeto de estudo ao da análise. Quem compartilhava dessa visão baseava suas crenças na generalidade e na certeza da álgebra

---

[81] Fraser (1988), p.317.
[82] Bos, *in* Grattan-Guinness (1980), p.80
[83] Grabiner (1981), p.48.
[84] Jahnke (2003), p.121.
[85] *Idem*, p.106.

como as de uma “aritmética universal”[86], isto é, onde as operações da aritmética ordinária eram aplicadas às letras – que representavam quaisquer números. Os matemáticos poderiam então obter relações simbólicas complicadas, que produziriam resultados aritméticos válidos quando os números fossem substituídos pelas letras. Uma vez que a aritmética era considerada um ramo bem fundamentado da matemática, e considerando-se a álgebra uma generalização da aritmética, a verdade das conclusões da álgebra se justificaria como consequência natural das verdades da aritmética propriamente dita.

A fim de enriquecermos nossa revisão bibliográfica e no intuito de colaborar com uma ainda melhor compreensão da época, cabe aqui registrarmos o que pensa Jahnke[87], numa visão (possivelmente mais simplificada) do desenvolvimento da análise no século XVIII. Segundo ele, podemos dividir o século XVIII em diferentes *períodos*. Até os idos de 1730, prevaleceria uma visão “geométrica”, exemplificada nos livros-textos de Johann Bernoulli. Nos meados do século, a concepção dominante seria – nas palavras do historiador – “implicitamente algébrica”, pois, apesar de os conceitos fundamentais referirem-se à geometria, Euler na *Introductio* teria falado de quantidades no sentido de números em vez de quantidades geométricas. A estrutura do corpo e a concepção de seus objetos teriam sido apresentadas de forma puramente algébrica. A noção de função se tornaria fundamental, e Euler teria entendido funções como expressões algébricas ou analíticas. Finalmente, no final do século, Lagrange teria introduzido uma concepção “explicitamente algébrica” – ainda nas palavras do historiador – na qual eliminou as noções de diferencial e de infinitamente pequeno (infinitesimal), e definiu a derivada de uma função sem usar limites, como o coeficiente de x nas expansões em série de potências da função $f(x)$, que assumiu como existente. A aproximação com a análise mediante o estudo das séries infinitas teria sido, inclusive, um fator importante para que a álgebra fosse vista como um fundamento apropriado para o cálculo.

Isto posto, podemos dizer, em resumo, que a expressão que Lagrange inaugura – “análise algébrica” – significava uma análise de cunho algébrico, na acepção da palavra “álgebra” daquela época, ou melhor, é uma expressão que atesta a crescente invasão dos procedimentos algébricos no cálculo em prejuízo de uma evanescente concepção geométrica.

---

86 Grabiner (1981), p.49.
87 Jahnke (2003), p.106/7.

Pois bem. Vimos mais acima que as extensões dos métodos algébricos do domínio finito para o infinito poderiam ser justificadas pela (já mencionada) ideia de "aritmética universal". Com efeito, pesquisas com séries infinitas estavam entre as mais extensivas matérias de estudo do século XVIII, tendo sido usadas, por exemplo, em aproximações numéricas, na integração de equações diferenciais e nos fundamentos do cálculo[88]. A propósito, era comum se falar em "equações infinitas" quando eram referenciadas séries de potências, visto que não eram entendidas como entidades essencialmente diferentes[89].

Também a fé no poder da notação encorajou os matemáticos a aplicarem nos processos infinitos as técnicas já usadas nos processos finitos. Isso fez com que, por todo o século XVIII, séries infinitas fossem somadas, multiplicadas e convertidas em produtos infinitos, como se fossem tão-somente polinômios muito longos[90]. E aquele que mais proficuamente assim operou foi o "mestre de todos nós"[91], o grande Euler. Lagrange, por sua vez, criticou consistentemente tal método e adotou outro, de características marcadamente diferentes. Ambos tiveram influência decisiva para a análise e ora merecem uma atenção mais detida, em razão da extrema importância de seus legados.

2.2 – Euler e Lagrange

Principal matemático do século XVIII, Leonhard Euler foi um suíço da Basileia que, além de Matemática, estudou Medicina, Teologia, Astronomia, Física e Línguas Orientais. Aos vinte anos ingressou como professor adjunto de Medicina e Fisiologia na Academia de São Petersburgo, na Rússia czarista. Após assumir a cátedra nessa instituição, transferiu-se para a Academia de Berlim, onde trabalhou por muitos anos, e finalmente retornou a São Petersburgo no fim da carreira. Pai de treze filhos, ainda assim foi o matemático mais prolífico da História (sua produção média era de 800 páginas por ano durante toda a sua vida, inclusive nos dezessete anos finais, quando estava completamente cego).

---

[88] Fraser (1988), p.321.
[89] Jahnke (2003), p.108.
[90] Grabiner (1981), p.50.
[91] Trecho da famosa frase de Laplace: *"Lisez Euler, lisez Euler, c'est notre maïtre à tous"*.

Euler foi de fato um dos gigantes da História da Matemática e, mais especificamente, da análise. Ele não só contribuiu com muitas das novas descobertas e métodos da análise, como também unificou e codificou este campo da matemática através de seus três monumentais livros-textos: a "Introdução à análise do infinito" (a célebre *Introductio*), de 1748, o "Livro-texto de cálculo diferencial", de 1755, e o "Livro-texto de cálculo integral", de 1768-1770.

O trabalho de tornar a análise um ramo coerente da matemática significava primeiramente esclarecer qual era seu escopo e sua abrangência. No período que antecedeu a Euler, o cálculo em si consistia simplesmente de métodos analíticos para a solução de problemas acerca de curvas[92]. Os principais objetos eram as "quantidades geométricas variáveis" como apareciam nesses problemas.

Entretanto, como vimos, a medida que tais problemas se tornavam mais complexos e a manipulação das fórmulas mais intrincada, a origem geométrica das variáveis ficou mais remota e o cálculo converteu-se numa disciplina meramente relativa a fórmulas.

Euler acentuou essa transição afirmando explicitamente que análise era o ramo da matemática que lidava com "expressões analíticas", conceito que a rigor englobava todas as expressões que poderiam ser formadas aplicando-se finita ou infinitamente as operações algébricas da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, extração de raízes e outras operações de ordem superior que pudessem ser formadas com o auxílio das demais. Para Euler, o conceito de "expressão analítica" permanecia aberto enquanto novas operações pudessem aparecer.[93] A *Introductio* foi o primeiro trabalho no qual o conceito de função exerceu um papel específico e central.[94] E simbolizou mais claramente uma guinada fundamental em direção à álgebra.[95]

Em sua obra, vale registrar, uma mudança substancial se deu no conceito de variável; ele abandonou a dicotomia entre constante e variável, trocando-a pela universalidade da variável. Para ele, a constante constituiria um caso especial, enquanto a variável seria uma indeterminação apta a assumir certos valores[96]. Isto é, o conceito de variável se aproximaria do conceito moderno de um elemento arbitrário e genérico de um conjunto. As expressões algébricas em geral, e ainda as séries infinitas, eram consideradas funções. E as constantes e as quantidades variáveis podiam assumir valores complexos.

---

[92] Bos, *in* Grattan-Guinness (1980), p.76
[93] Jahnke (2003), p.114.
[94] Edwards (1979), p.270.
[95] Jahnke (2003), p.113.

Euler incumbiu-se de inventariar e classificar esse vasto domínio de funções na primeira parte da *Introductio*. Com efeito, vale reforçar aqui que foi a identificação das funções – em vez das curvas – como principal objeto de estudo, que permitiu a aritmetização da geometria e a consequente separação entre a análise infinitesimal e a geometria propriamente dita.

Essa obra seminal pretendia de fato ser uma visão geral de conceitos e métodos em análise e geometria analítica, preliminarmente ao estudo do cálculo diferencial e integral. Para Euler e seus contemporâneos, com efeito, a análise superior começava apenas onde a noção de diferencial era necessária.

A *Introductio* foi fruto de um magistral exercício de apresentar o máximo possível do conteúdo necessário para a compreensão da diferenciação e da integração. Destacamos com ênfase que isso foi uma influência notavelmente clara na "análise algébrica" de Cauchy (e, em consequência, no *Cours d'analyse*), conforme constataremos mais adiante. É certo, entretanto, assinalarmos que, se foi o primeiro volume da *Introductio* o modelo do que veio se chamar "análise algébrica", também é verdade que esta teve um desenvolvimento novo na *École Polytechnique*, conforme também veremos mais adiante.

A *Introductio*, vale registrar, vem a ser o mais antigo livro-texto de matemática que pode ser lido com relativo conforto pelos estudantes modernos (mesmo que possuam um conhecimento precário de latim). Com efeito, se a notação e a terminologia de Euler parecem quase "modernas", isto se dá pelo simples fato de que ele originalmente introduziu grande parte da notação e da terminologia que ainda hoje são utilizadas[97].

Euler determinou – através principalmente das suas três supracitadas obras-primas – o escopo e o estilo da análise pelos cinquenta anos que se seguiram, pelo menos[98]. Isto quer dizer que, embora a análise prosseguisse sendo aperfeiçoada, a influência de Euler se fez sentir nas obras dos analistas que o sucederam.

Antes de ingressarmos, porém, na obra de Lagrange – e a fim de compreendê-la melhor – cabe aqui um retorno às primeiras décadas do século XVIII, para uma observação importante do contexto de sua época.

A despeito do grande progresso da análise no século XVIII, as questões de fundamentos permaneciam sem respostas convincentes. Matemáticos que escreveram sobre um ou outro aspecto deste tema tentaram em vão contribuir com explicações mais ou

---

[96] Schubring (2005), p.20.
[97] Edwards (1979), p.270.

menos pragmáticas as quais alguns de seus contemporâneos não consideravam satisfatórias ou logicamente consistentes. O próprio Euler não se detinha acuradamente nas questões de fundamentos.

Berkeley[99], em 1734, fora o responsável pela mais influente crítica aos resultados do cálculo até então produzidos[100], através de sua obra incisiva "O Analista *ou* Um Discurso Dirigido ao Matemático Infiel - no qual é examinado se o objeto, princípios, e inferências da análise moderna são concebidos mais distintamente, ou deduzidos mais evidentemente, do que os Mistérios religiosos e os pontos de fé".

Esta obra de longo título expressava claramente um ataque às frágeis bases do cálculo àquela época. A crítica de Berkeley se apresentava bem informada e eficiente, e mostrava que muitas definições do cálculo infinitesimal se mostravam paradoxais e não podiam ser justificadas pela intuição.

Em 1742, o "Tratado das Fluxões" de Maclaurin buscava responder a essas críticas, abandonando as "quantidades infinitamente pequenas" e voltando aos antigos métodos da exaustão e da dupla redução ao absurdo, e interpretando o cálculo das fluxões de Newton como uma generalização da "geometria dos antigos".[101]

D'Alembert, por sua vez, tentou estabelecer o cálculo diferencial em torno de um explícito – mas ainda ingênuo – conceito de limite. Sua apresentação era muito influenciada pelo cálculo newtoniano, e suas observações sobre o 0/0, segundo Fauvel, demonstravam quão intuitivas permaneciam suas ideias[102]. Para ele, *dy/dx* não seria mais um quociente de dois diferenciais ou "zeros" (como na obra de Euler), mas sim o limite do quociente de dois incrementos finitos se aproximando de zero. Entretanto, ele não laborou com tais conceitos e acabou usando os diferenciais da mesma forma que os demais matemáticos continentais o faziam.

É nesse contexto que, no terço final do século XVIII, despontou o importante trabalho de Lagrange, figura crucial de transição entre os pontos de vista dos séculos XVIII e XIX. Sua abordagem foi a que mais influenciou o desenvolvimento da análise que se seguiria. Em contraste com Maclaurin, ele não apelou ao método geométrico antigo, mas buscou tornar o cálculo rigoroso mediante uma redução à álgebra. Embora não tivesse

---

98 Bos, *in* Grattan-Guinness (1980), p.79
99 George Berkeley (1685-1753), irlandês, bispo anglicano e filósofo empirista.
100 Jahnke (2003), p.127.
101 *Idem*, p.127. [Colin Mclaurin (1698-1746), cientista escocês].
102 Fauvel (1987), p.555.

sucesso nessa tentativa, algumas das técnicas por ele usadas acabariam sendo efetivamente empregadas pelo próprio Cauchy. Vejamos com isso se deu.

Lagrange nasceu em 1736 em Turim, norte da atual Itália. De ascendência francesa, adotou tal nacionalidade já em idade madura, tendo sido inclusive nomeado conde por Napoleão. Foi professor de geometria da Escola de Artilharia Real de Turim, onde ajudou a fundar a Academia Real de Ciência em 1757. Em razão do excesso de trabalho e da baixa remuneração, sofria com a saúde debilitada, o que lhe causou problemas pelo restante de sua vida.

Quando Euler se retira da direção da seção de matemática da Academia de Berlim, em 1766, Lagrange deixa Turim e assume o posto. Já em 1787, sai de Berlim e torna-se membro da Academia de Ciências de Paris, onde permanece até o fim de sua carreira.

Lagrange foi de fato o primeiro matemático de renome a tratar da questão dos fundamentos como um problema matemático sério. E não apenas considerou os problemas de fundamentos, mas voltou a eles de tempos em tempos[103] – diferentemente de seus contemporâneos. Esse questionamento era sempre retomado, em parte por demandas de ensino, e em parte porque Lagrange foi muito afetado pelas (acima mencionadas) críticas de Berkeley, as quais o fizeram descontente com os fundamentos existentes. Ele, por algum tempo, acreditou inclusive que a teoria da compensação de erros de Berkeley solucionaria os mistérios do cálculo.

Lagrange acaba, porém, por abandonar tal teoria e, em 1772, apresenta à Academia de Berlim o trabalho *Sur une nouvelle espèce du calcul rélatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, no qual sua nova abordagem estaria delineada. Esta, por sinal, foi a que ele sempre empregaria a partir daí, e assim o fez quando prestou serviços para a *École Polytechnique*[104].

Com efeito, entre 1760 e 1772, transformara-se sua visão acerca da suficiência dos fundamentos do cálculo, e pode ser dito que tal visão de Lagrange no final das contas acabou prevalecendo com Bolzano e Cauchy.

Pois bem. Lagrange acreditava que havia uma "teoria de séries" inteiramente algébrica que daria a qualquer função uma expansão em séries de potências. Era sobre tal ideia que sua nova fundamentação se apoiava. Ele aduzia que o cálculo diferencial, em

[103] Grabiner (1981), p.37.
[104] Grattan-Guinness (1990), p.128.

toda a sua generalidade, "consistia em encontrar diretamente, mediante procedimentos simples e fáceis"[105], as funções $p,\ p',\ p'', \ldots$ na expansão geral:

$$u(x + h) = u(x) + ph + p'h^2 + p''h^3 + \ldots$$

para uma dada função $u(x)$. Lagrange afirmava que esta visão do cálculo era a mais clara e a mais simples já exposta. Sua fundamentação tencionava ser puramente algébrica, não maculada nem pela filosofia e nem por ideias vagas, ou melhor, como diz o título de sua obra, "independente de toda metafísica e de toda teoria de quantidades infinitamente pequenas e evanescentes"[106].

Lagrange se tornou, destarte, o primeiro matemático de grande envergadura a admitir a validade das críticas aos fundamentos pouco confiáveis do cálculo. Há que se registrar, é bem verdade, que, em 1772, ele ainda não havia rompido completamente com a atitude predominante em face dos fundamentos. Pelo menos até a publicação de sua *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797) ele não havia explicitado razões para rejeitar os antigos pontos de vista. O seu trabalho de 1772 – mencionado mais acima, sobre as funções derivadas – não priorizava os fundamentos, e o que havia nesse sentido era tão-somente breve e incidental. Naquela época, ele sequer havia deduzido as regras algorítmicas básicas do cálculo diferencial mediante o novo fundamento[107].

Lendo-se seu trabalho, no entanto, nota-se claramente seu sentimento acerca das normas gerais; sua ideia de que qualquer resultado particular de algum interesse, seja a insolubilidade das equações quínticas, ou a precisão de uma aproximação, ou as equações de movimento de um sistema físico, enfim, cada uma delas seria um caso especial de algum princípio mais geral. Seu apego obsessivo à generalização não era tão comumente encontrado àquela época e contrastava com a ênfase de muitos dos seus contemporâneos em resolver problemas específicos. A fundamentação algébrica que intentou imprimir ao cálculo seria consistente com essa tendência (excessivamente) generalizante[108].

Apesar de já tê-lo em mente, seu projeto de algebrização do cálculo estava – vale registrar – apenas em fase embrionária em 1772. Com efeito, tanto o próprio Lagrange como alguns de seus colegas estavam em busca de fundamentação consistente para o cálculo, a ponto de estipularem um prêmio para quem respondesse convincentemente a

---

[105] Grabiner (1981), p.39.
[106] *Idem*, p.40.
[107] *Idem*, p.40

uma questão sobre os alicerces do cálculo em si. Isto se deu em 1784 por proposta de Lagrange à classe de matemática da Academia de Berlim.

Essa data marca o reconhecimento público de Lagrange de duas proposições: a primeira, que os fundamentos do cálculo eram insatisfatórios; e a segunda, que tal situação se constituía num problema matemático da maior gravidade ainda não resolvido.

Lagrange achava que o corpo de resultados do cálculo estava mais ou menos completo, necessitando apenas de uma sistematização. Mas o que viria a seguir só trouxe mais frustração. A fundamentação de fato não existia, ou melhor, teria de ser produzida. Vejamos como foi.

O anúncio do concurso, publicado em junho de 1784, era uma exposição cristalina da essência daquilo que se considerava uma preocupante lacuna matemática na opinião de alguns sábios da época. Merece, pois, a citação integral:

> "A utilidade que encontramos na Matemática, a estima que temos por ela, e a honrada denominação de Ciência exata por excelência que lhe damos a justo título, são devidas à clareza de seus princípios, ao rigor de suas demonstrações e à precisão de seus teoremas. Para assegurar a essa bela parte de nosso conhecimento a continuação desta preciosa vantagem, é preciso *uma teoria clara e precisa do que chamamos Infinito em Matemática*. Sabemos que a alta Geometria faz uso regularmente dos *infinitamente grandes* e dos *infinitamente pequenos*. Entretanto, os Geômetras, e mesmo os antigos Analistas, evitaram cuidadosamente tudo que aproxima do infinito, e grandes Analistas modernos confessam que os termos grandeza infinita são contraditórios. A Academia deseja então que se explique como deduzimos tantos teoremas verdadeiros de uma suposição contraditória, e que indiquemos um princípio seguro, claro, numa palavra, verdadeiramente matemático, que substituira o *Infinito*, sem tornar muito difíceis, ou muito longas, as pesquisas que obteremos por esse meio. Exigimos que esta matéria seja tratada com toda a generalidade, com todo o rigor, claridade e simplicidade possíveis"[109] (grifos de Youschkevitch)

Schubring, todavia, nos informa que este concurso não teria causado grande impacto entre os matemáticos daquela época.[110] Com efeito, vários trabalhos compreendiam somente poucas páginas, sendo que quinze, entre vinte e um dos trabalhos consultados (foram vinte e três entregues, no total), eram de autoria de leigos. Segundo o

---

[108] *Idem*, p.39.
[109] Youschkevitch, *in* Gillispie (1979), p.234.
[110] Schubring (2005), p.619.

historiador, os matemáticos da época não teriam considerado a questão como sendo significante e fundamental – como vem sendo até agora apontada pela historiografia.

Pois bem. Lagrange, ao finalizar a leitura dos trabalhos, provavelmente ficou ainda mais insatisfeito com o estado dos fundamentos.

Embora ter sido dado o prêmio ao trabalho considerado "menos incompleto" – no caso, o de autoria de l'Huilier – a decisão unânime da classe de matemática da Academia, sob a presidência de Lagrange, foi proferida em junho de 1786, nos seguintes termos:

> "A Academia recebeu muitas peças sobre esse assunto. Seus autores se esqueceram todos de explicar *como deduzimos tantos teoremas verdadeiros de uma suposição contraditória,* como é o caso da quantidade infinita. Todos se afastaram, mais ou menos, da *claridade*, da *simplicidade,* e, sobretudo, do *rigor* que exigíamos. A maioria nem mesmo viu que o princípio questionado não devia estar limitado ao cálculo infinitesimal, mas estendido à Álgebra e à Geometria tratada à maneira dos antigos. O sentimento da Academia é então que sua questão não recebeu nenhuma resposta completa..." [111] (grifos do autor)

Mas a insatisfação com uma velha teoria por si só não é suficiente para a criação de uma nova. De fato, Lagrange não estava trabalhando exatamente com o tema à época em que finalizava sua memorável *Mécanique analytique* (que seria publicado só em 1788). Contudo, este fato estimulou-o ainda mais a tentar tornar o cálculo rigoroso, porque ele estava exatamente fazendo reduzir toda a mecânica ao cálculo propriamente dito. E o cálculo precisava ser rigoroso para que a mecânica também o fosse.

Após longos anos de uma profunda depressão, nos quais Lagrange perdera o gosto pela pesquisa, é convidado para trabalhar na *École Polytechnique*, à época de sua fundação. Sendo um homem ameno e diplomático, sobreviveu sem sobressaltos à Revolução. O fato importante é que esta nomeação – em boa hora – o teria estimulado (ou pressionado) sobremaneira a retomar sua obra.

O posicionamento de Lagrange influenciou a produção de três importantes livros do final do século XVIII que trataram com grande seriedade do problema de fundamentos: *Exposition Élémentaire* (1787), de L'Huillier, *Reflections sur la métaphysique du calcul infinitésimal* (1797), de Carnot, e, naturalmente, a *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797, a partir daqui, somente *Théorie*), de autoria do próprio Lagrange.

---

[111] Youschkevitch, *in* Gillispie (1979), p.235.

Lagrange, em sua *Théorie*, sustentava ter resolvido o problema de pôr o cálculo numa base rigorosa[112]. Seu subtítulo muito extenso é quase uma exposição de motivos: "Teoria das funções analíticas compreendendo os principais teoremas do cálculo diferencial sem as noções de infinitamente pequeno, de quantidades evanescentes, de limites e fluxões, apresentados completamente na forma da *análise algébrica* das quantidades finitas". Destaquemos com ênfase que esta última frase sugere a origem do programa de Cauchy de introduzir o ensino de cálculo mediante a "análise algébrica".

Várias são as causas da originalidade de Lagrange na *Théorie*: primeiro, a causa imediata de ter que preparar um curso de análise. Segundo, as demandas da matemática recente, a qual necessitava de uma sintetização real de seus resultados. Finalmente, havia um método, a álgebra das séries infinitas, que fazia parte da tradição por ele tão apreciada e a qual ele havia esboçado como um fundamento para o cálculo já há muito tempo.

Delambre, em seu *Rapport Historique*, destaca isso, no discurso para Napoleão:

> "Ocupamo-nos mais em estender o cálculo infinitesimal do que em esclarecer sua metafísica: enxergamos os efeitos miraculosos, os resultados incontestáveis; mas o espírito não podia se familiarizar com as suposições fundamentais. Sr.Lagrange, numa memória célebre, colocara algumas dessas ideias fecundas que só aparecem nos gênios de primeira ordem; <u>ele indicou os meios de reduzir ao cálculo puramente algébrico todos os procedimentos do cálculo infinitesimal, afastando cuidadosamente toda a ideia de infinito</u>. Impressionados por esta iluminação, muitos geômetras buscaram desenvolvimentos que ninguém podia realizar tão bem quanto o inventor. Sr.Lagrange aceitou as funções de *instituteur* na École Polytechnique, e criou sob os olhos de sua audiência, todas as partes das quais foi constituído seu *Traité des fonctions analytiques*, obra clássica, a qual seria supérfluo elogiar e que basta tê-la citado."[113] (grifos nossos)

Apoiando-se nos fundamentos acima expostos, Lagrange desenvolveu a análise como uma teoria fechada. A *Théorie* compreendia três partes: "Vista geral da teoria e suas mais importantes aplicações na análise", "Aplicação da teoria de funções na geometria" e "Aplicação da teoria de funções na mecânica".

A crítica decisiva aos fundamentos do cálculo com a qual inicia o livro não era particularmente original. Sua originalidade estava no uso que Lagrange fez dela, isto é, como um prefácio a uma nova abordagem, na qual resultados elementares e avançados

---

[112] Grabiner (1981), p.37.
[113] Delambre (1810), p.14.

seriam exibidos como consequências das definições. Isto fez com que a obra ingressasse na literatura padrão de análise de tal forma que Cauchy, Bolzano e seus contemporâneos não podiam ignorá-la[114].

Além dos fundamentos descritos acima, a primeira parte contém derivações das expansões de séries de potências de funções transcendentes elementares, expansões de funções em pontos singulares, a estimativa do resto se os termos são considerados apenas finitamente numa expansão de série de potências, uma teoria elementar de equações diferenciais ordinárias incluindo suas soluções singulares, a teoria das funções de várias variáveis e o método de Lagrange de inverter séries.[115]

Lagrange, a propósito, introduziu o conceito de "derivação", "função derivada" e "função "primitiva"[116]. O passo principal foi a passagem de uma função para sua derivada e o processo reverso.

Os infinitesimais não representavam rigor para Lagrange. Em sua opinião, Leibniz, L'Hospital e os Bernoulli "não se ocuparam em demonstrar os princípios do cálculo"[117]. Enquanto Euler tinha como fundamental o conceito de diferencial, Lagrange usava o teorema de Taylor e as funções derivadas para livrar a análise dos infinitesimais[118]. O cálculo infinitesimal – segundo ele – chegaria a resultados exatos apenas em razão da compensação de erros, e infelizmente este fato não poderia ser usado para fundamentar o cálculo, pois "seria talvez difícil dar uma demonstração"[119] de que os erros seriam sempre compensados.

Os fluxões de Newton não eram aceitáveis porque consideravam as quantidades matemáticas como "engendradas pelo movimento"[120]. Uma vez que não temos uma ideia clara do que seria velocidade instantânea, e que a matemática não é a física, deveríamos ter somente quantidades algébricas como objeto. Velocidade seria então uma ideia estranha à análise, o que exclui os fundamentos newtonianos.

O conceito de limite, como existia àquela época, era considerado por Lagrange estreito, vago, e mais geométrico do que algébrico[121]. A razão entre duas quantidades finitas "não mais oferecem uma ideia clara e precisa à mente, quando os termos da razão se

---

[114] Grabiner (1981), p.44.
[115] Jahnke (2003), p.130.
[116] *Idem*, p.128.
[117] Lagrange (1797), p.2.
[118] Fraser (1988), p.319 . [Brook Taylor (1685-1731), matemático inglês].
[119] Lagrange (1797), p.3.
[120] *idem*, p.3.
[121] Grabiner (1981), p.44.

tornam simultaneamente zero". A ideia de limite seria, inclusive, baseada no exemplo da curva como limite de uma sequência de polígonos, o que indicaria sua essência geométrica, estranha ao espírito da análise. Para Lagrange, o cálculo era essencialmente algébrico e, portanto, não necessitava – e nem mesmo poderia – ser fundamentado em princípios emprestados de outros campos.

Realmente, não pecaremos por excesso ao sublinhar que a *Théorie* diferia marcadamente das exposições anteriores do cálculo. E não porque fornecia definições de conceitos básicos, como outros já faziam. Muito mais importante era o fato de que – temos que frisar – ela fazia derivar dessa fundamentação seus principais resultados. E embora não buscasse novos resultados para o cálculo – mas principalmente estabelecer o seu rigor – Lagrange deduziu de seus novos fundamentos resultados conhecidos de grande complexidade, não apenas no cálculo, mas também na mecânica e na geometria[122].

De Prony, por sua vez, num discurso introdutório ao seu magistério, publicado no *Journal de l'École Polytechnique* nos auxilia a entender, e mostra com clareza o contexto educacional das aulas de Lagrange:

> "A análise matemática se divide em duas partes; uma que podemos chamar de *análise determinada*, considera as relações entre quantidades desconhecidas mas invariáveis, e outras quantidades dadas na questão; as relações entre uma e a outra se dão mediante *equações* (...) Essas pesquisas nos levam à doutrina de séries, que por muitos pontos de vista se vincula à primeira parte, mas que também é tão fortemente vinculada à segunda [parte], chamada de *análise indeterminada*, que de certa maneira pode ser vista como uma transição de uma para a outra. Esta segunda parte considera as relações entre as quantidades dadas pela questão, e outras quantidades sujeitas a uma infinidade de valores sob o domínio da lei comum"[123] (grifos do autor)

A ênfase de de Prony nas relações funcionais entre constantes ou variáveis abraça a característica principal da abordagem de Lagrange que, em 1799, assim fala aos leitores em seu próprio ensaio introdutório no *Journal de l'École Polytechnique*: "Para dizer corretamente, álgebra é em geral apenas a teoria de funções"[124] (neste ponto, concorda com a visão euleriana). A álgebra se constituiria, assim, numa teoria que se divide em dois ramos. O primeiro seria a "álgebra pura", que produziria "funções primitivas" das operações algébricas ordinárias; o segundo seria a "teoria das funções analíticas", que

[122] *Ibid.*, p.45.
[123] Grattan-Guinness (1980), p.96. [Gaspard de Prony (1755-1839), matemático francês].

consideraria as "funções derivadas". Tais funções tinham sido obtidas no passado pela utilização de limites ou infinitesimais, mas para Lagrange, como vimos, esses métodos careciam de rigor. Nota-se aí uma distinção notável com o ponto de vista de Euler.

À época de sua publicação, a *Théorie* de Lagrange foi vista como a mais rigorosa apresentação do cálculo. Inspirou inclusive o *Calcul des derivations* (1800), de Arbogast, e a *Analisi derivata* (1802), de Brunacci[125]. "Politécnicos" como J.Français e F.J.Servois desenvolveram as ideias de Lagrange numa direção puramente formal mediante a elaboração de um cálculo original de operadores.

O ponto de vista de Lagrange foi usado na Inglaterra como base da reforma do ensino de cálculo em Cambridge. Suas ideias ganhariam força através de uma série de notas para a tradução inglesa do *Traité* de Lacroix. Babbage, Herschel, Peacock e seus amigos da *Analytical Society* encontraram no trabalho de Lagrange o ponto de partida para a crítica da tradição newtoniana do cálculo e para o desenvolvimento de técnicas puramente analíticas para a manipulação de operadores e séries formais.[126]

A obra de Lagrange foi traduzida também para o alemão. Isto é muito relevante, haja vista que, até os anos 1790 as matemáticas francesa e alemã praticamente não se comunicavam. Raros são exemplos de correspondências ou visitas. Traduções de uma para outra língua também eram raras.[127] O fato de Lagrange ter trabalhado em Berlim acabou ajudando a melhorar a comunicação entre as escolas matemáticas dos dois países, muito diferentes entre si. A francesa, com sua cultura físico-matemática, e a alemã, por sua vez, com sua insistência em reflexões sobre os fundamentos da ciência[128]. A abordagem de Lagrange se mostrava palatável para os padrões alemães, uma vez que buscava de alguma forma atingir o máximo de rigor, tão ao gosto dos germânicos.

Como registro, vale assinalar que, na primeira década do século XIX, o clássico *Disquisitiones Arithmeticae* de Gauss foi um dos poucos livros traduzidos do alemão para o francês (1807). Cauchy fez, inclusive, um minucioso estudo desta obra. Segundo Belhoste, Cauchy parece ter dominado rapidamente a metodologia e a percepção de Gauss; e, compreendendo a importância da teoria das formas que Gauss usou na prova do teorema

---

[124] Grattan-Guinness (1990), p.128.
[125] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XLIV. [Louis-François Arbogast (1759-1803), matemático francês; Vincenzo Brunacci (1768-1818), matemático italiano].
[126] *Idem*, p.XLIV. [Charles Babbage (1791-1871), John Herschel (1792-1871) e George Peacock (1791-1858), matemáticos ingleses].
[127] Schubring, *in* Goldstein (1996), p.365.
[128] *Idem*, p.366.

de Fermat dos números triangulares, Cauchy trabalhou para simplificá-la e também para generalizar alguns resultados, particularmente os de discriminantes[129].

Lagrange, por sua vez, trabalhou para a *École Polytechnique*, e sua obra influenciou muitos dos futuros matemáticos, entre eles Cauchy. A abordagem de Lagrange aos fundamentos da análise acabaria sendo influente por duas décadas e representaria a visão da maioria dos matemáticos. Como verificaremos no capítulo três, Bolzano citou Lagrange em seu principal trabalho e Cauchy foi um leitor atento de sua obra. Da obra de Lagrange, é importante destacar que Cauchy e Bolzano não aprenderam somente técnicas, mas uma atitude perante os fundamentos. Tal atitude era essencial para o cálculo se apoiar sobre uma firme fundamentação[130].

O que temos como certo, portanto, é que Cauchy foi beneficiário de duas fontes preciosas que proveriam a base de suas notáveis conquistas: os numerosos resultados positivos em problemas particulares e nas técnicas de cálculo, e o programa de algebrização da análise de Lagrange.

Houve também – vale registrar – outras tentativas de algebrização da análise. Assim como em Lagrange, tais tentativas se apoiaram na suposição de que as funções consideradas podiam ser desenvolvidas em séries de potências, e se concentravam em estabelecer um cálculo unificado e formalmente elegante.[131]

Arbogast desenvolveu um cálculo geral do qual o cálculo diferencial ordinário era apenas um caso especial. Essencialmente, consistia num método para determinar o coeficiente de $\boldsymbol{x^n}$ no desenvolvimento de $\varphi\ (a + bx + cx^2 + \ldots)$ para uma função arbitrária φ.

Uma outra abordagem deste tipo foi elaborada pela chamada Escola Combinatória Alemã. A ideia era escrever relações entre séries de potências e operações combinatórias. De um certo modo, era o inverso do método de funções geradoras desenvolvido por Euler e Laplace, onde relações entre séries de potências eram usadas para derivar identidades combinatórias. Em razão de sua grande generalidade e larga aplicabilidade no contexto do seu programa de pesquisa, os matemáticos que compunham tal Escola consideravam o teorema polinomial (para expoentes arbitrários) como sendo o mais importante teorema da

---

[129] Belhoste (1991), p.32. [Por outro lado, não encontramos na literatura outros indícios de influência da obra de Gauss sobre o *Cours d'analyse*. Gauss publicava pouco, e muito atrasadamente, suas descobertas. É pouquíssimo provável que tenha chegado nas mãos de Cauchy algum material de Gauss – além do *Disquisitiones* – antes de o matemático francês formular sua “análise algébrica”. Por esse motivo, nossa menção a Gauss ficará restrita ao que foi dito acima].

[130] Grabiner (1981), p.46.

análise. Muito embora essas tentativas não se tornassem bem-sucedidas, elas representaram um estágio preliminar na evolução do cálculo geral de operadores sobre o qual vários matemáticos do século XIX se debruçariam.

2.3 – A descoberta da insuficiência da visão de Euler e de Lagrange e a introdução de uma nova noção de rigor

Em poucas palavras, o cálculo de Euler e Lagrange diferia da análise posterior em suas premissas acerca da existência matemática. A relação deste cálculo com a geometria ou a aritmética era de correspondência em vez de representação[132]. Ou melhor, seus objetos eram fórmulas construídas de variáveis e constantes usando operações elementares e transcendentes e composição de funções.

Quando Euler e Lagrange usavam o termo função "contínua" eles se referiam à função dada por uma simples expressão analítica; "continuidade" significava continuidade da forma algébrica – conforme dissertaremos mais à frente. No cálculo hodierno, a atenção é focada localmente numa curva, próximo a um ponto ou numa vizinhança de um número. Em contraste, o ponto de vista algébrico de Euler e Lagrange era global.

A existência de uma equação envolvendo variáveis implicaria a validade global da relação em questão. Um algoritmo ou uma técnica analítica implicaria um modo geral e uniforme de operação. Como de fato, na apresentação de um teorema de cálculo por Euler ou Lagrange, nenhuma atenção era dada à consideração sobre o domínio. A ideia por detrás da prova era algébrica. Estaria, assim, invariavelmente entendido que o teorema em questão era geralmente correto, verdadeiro onde quer que fosse, excetuando-se possivelmente em valores isolados. A falha do teorema em tais valores não era considerada relevante[133].

Enfim, nas visões de Euler e Lagrange – embora com ênfases distintas – o rigor estaria, *grosso modo*, intimamente relacionado à álgebra. É certo que Cauchy sofreu forte influência da visão matemática de ambos, ou diretamente (com a leitura de suas obras), ou

---

131 Jahnke (2003), p.130.
132 Fraser (1988), p.328.
133 *idem*, p.329.

indiretamente (através dos livros-textos de Lacroix). Contudo, Cauchy não considerava suficiente a álgebra para fundamentar a análise. Com efeito, segundo Grabiner:

> "Cauchy foi fortemente influenciado pela visão de Lagrange de que o cálculo poderia ser reduzido à álgebra. Além do que, ele adotou várias das inovações algebricamente induzidas de Lagrange. **Entretanto, Cauchy não aceitou a fundamentação algébrica particular usada por Lagrange**. Ele [Cauchy] a considerou deficiente tanto no rigor quanto na generalidade. Lagrange permitiu que quase todos os métodos usados na álgebra do infinito fossem trazidos para o cálculo. Cauchy, não obstante, tinha dúvidas bem fundadas acerca da interpretação geral automática de expressões simbólicas. Ele estava prevenido de que 'muitas fórmulas [algébricas] são verdadeiras apenas sob certas condições, e para certos valores das quantidades que elas contêm'. Em particular, relações acerca de séries infinitas prosperam apenas quando as séries são convergentes. Esta era, eu creio, a principal razão de Cauchy para concluir que o cálculo não pode ser fundamentado na álgebra das séries de potências. Acrescente-se a isso que Cauchy observara que diferentes funções poderiam ter a mesma série de Taylor. Polidamente, mas firmemente, e, 'apesar de todo o respeito que tamanha autoridade faz jus', Cauchy rejeitou a fundamentação de Lagrange para o cálculo."[134] (grifos nossos)

Muito embora a ênfase de Lagrange nas expansões em séries de potências ter sido muito influente, é certo que sua filosofia "em bloco" do cálculo não foi tão prontamente aceita. Portanto, seria um equívoco pensar que a abordagem de Lagrange – ainda que aceita por muitos como uma fundamentação da análise – teria tido um efeito real na prática e no pensamento dos analistas do final do século XVIII. E isso é verdade tanto para os livros-textos como para as aplicações[135].

Registre-se que manuais de sucesso na época, como o *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (a partir daqui, *Traité*), com três volumes (1797-1800), de Lacroix, eram ecléticos e tratavam das diferentes abordagens da análise que coexistiam naquele tempo. Isso se fazia necessário porque muitas aplicações simplesmente não poderiam abandonar as noções de diferencial e limite. Físicos teóricos (especialmente Laplace) derivavam suas equaçoes diferenciais imaginando, por exemplo, que fluidos consistiam de partículas infinitesimais. De forma similar, Monge trabalhou a geometria diferencial decompondo superfícies em retângulos e tiras infinitesimais ou mediante o corte de "normais adjacentes" de uma superfície.

---

[134] Grabiner (1981), p.54.

Delambre descreveu bem o objetivo do *Traité*: "M.Lacroix se propôs a conservar tudo o que o método antigo tinha de essencial, de sorte, portanto, que seu livro pôde servir de introdução à análise moderna"[136]. E resumiu com clareza a forma com que a academia francesa enxergava essa obra:

> "O cálculo diferencial e integral ocupa os geômetras há cem anos; e os Infinitamente pequenos de l'Hôpital, o Cálculo integral do Sr.Bougainville, eram as únicas obras que formavam um corpo de doutrina. Euler, em seguida, forneceu tratados mais completos, enriquecidos de suas descobertas; a marcha tão rápida da análise os tornou insuficientes. Sr.Lacroix, que é devotado ao ensino, reuniu num grande tratado todos os métodos esparsos: reaproximando-os, desenvolvendo-os, e adicionando suas próprias ideias, ele se associou à glória dos grandes geômetras de quem ele propagou as descobertas"[137]. (grifos do autor)

Todavia, segundo Schubring, não se pode sentenciar que o monumental livro-texto de Lacroix teria tomado a forma "enciclopédica" que a historiografia geralmente sugere.[138] Com efeito, o incentivo original e ponto de partida de Lacroix, como ele mesmo diz, é o tratado de Lagrange de 1772, em que este formula a análise em termos puramente analíticos, sem qualquer consideração de infinito. Lacroix repetidamente enfatiza sua rejeição ao método das quantidades infinitamente pequenas.[139] O *Traité* realmente teria apresentado o tratamento baseado em um único método: o método dos limites. Para Lacroix – complementa o historiador – o método dos limites não seria apenas o fundamento necessário para a análise, mas ao mesmo tempo o modo de dispensar o uso das quantidades infinitas.[140]

Ainda assim, mesmo considerada esta opção de Lacroix, isso não muda o fato de que a prática da análise e suas aplicações ainda não permitiam que surgisse e amadurecesse uma fundamentação teórica unificada.

Como pudemos ver, a relação entre o uso do cálculo e a justificação do cálculo não é – decididamente – óbvia. Esses dois diferentes aspectos do cálculo, que coexistem hodiernamente, são legados de dois diferentes períodos históricos: os séculos XVIII e XIX.

---

[135] *ibid.*, p.130.
[136] Delambre (1810), p.4.
[137] *idem*, p.13.
[138] Schubring (2005), p.374.
[139] *idem*, p.374.
[140] *idem*, p.375.

Na virada do século XVIII para o XIX, os matemáticos se encontravam diante do seguinte quadro[141]: o conceito de função não estava claro; o uso das séries – sem o cuidado de observar a convergência ou divergência – produzia paradoxos e discordâncias; a controvérsia acerca da representação de funções por séries trigonométricas – conforme veremos mais adiante – introduziu confusões ulteriores; e as noções fundamentais de derivada e integral não haviam sido propriamente definidas.

Entretanto, segundo Bottazzini, aquele que observar a discussão dos fundamentos do cálculo entre o final do século XVII e meados do século XIX, observará que os participantes deste debate eram motivados ou influenciados muito frequentemente por atitudes filosóficas básicas[142]. Justamente porquanto estaremos tratando da justificação dos resultados da análise, é importante mencionarmos antes – e mui brevemente – algumas questões filosóficas subjacentes aos debates.

Para começar, o próprio significado da palavra "análise" deve ser estudado com cautela. A "análise" – disciplina matemática – não pode ser confundida com a "análise" - método científico. E esta última precisa ter seu significado bem delimitado, principalmente quando confrontado com o da palavra "síntese". Se não, vejamos.

A distinção básica entre "análise" e "síntese" nos métodos de prova em matemática é a de que, em análise, parte-se do resultado desejado e regressa-se até que os princípios aparentemente impecáveis são encontrados, enquanto a síntese começa com esses princípios e deriva o resultado. Entretanto, os matemáticos do século dezoito se acostumaram a associar "análise" com álgebra e "síntese" com geometria, embora tais conexões não estivessem claras, menos ainda no desenvolvimento e uso do cálculo[143].

A "síntese" também estaria sendo associada, na matemática, a uma apresentação sistemática do conhecimento já alcançado, enquanto "análise" seria um método de descobrir novos conhecimentos[144]. E, ainda, chegou-se a associar – de forma simplista – "análise" à indução científica e "síntese" à dedução.

Se o que foi dito acima contribui para aumentar nossa compreensão acerca do que se entendia por "análise" no século XVIII, por outro lado faz com que se justifique sermos ainda mais cautelosos ao tratarmos tudo o que é referenciado por "análise", e não somente

---

141 Kline (1972), p.947.
142 Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XLIII
143 Grattan-Guinness (1990), p.135.
144 *Idem*, p.136.

pela não consolidação do significado do termo na época estudada, mas também porque um mesmo termo em épocas ou locais diferentes pode possuir significados distintos.

Não vamos aqui (e nem é nosso objetivo, pois foge do escopo do trabalho) aprofundar este assunto, mas é importante mencionarmos que o método sintético ressurgiu com força na *École Polytechnique* em 1811, após anos de prevalência do método analítico.[145] Mas essa mudança está longe de ter sido pacífica, completa e muito menos consensual. Sublinhamos que conviviam concepções conflitantes, ou melhor, quando se retrata mui resumidamente a sequência histórica de prevalência dos métodos na *École Polytechnique*, não se pode perder de vista que houve momentos em que tendências se apresentavam concorrentes e até contraditórias.

Outra questão epistemológica que merece também uma breve menção, mormente por ter sido citada explicitamente no *Cours d'analyse* de Cauchy, e também por se relacionar estreitamente com o desenvolvimento dos fundamentos da análise, é a da "generalidade da álgebra". Já falamos neste capítulo acerca da visão da álgebra no século XVIII. Mas o poder subjacente à ideia de generalização que se espraiou pelos cientistas se constituía de fato numa motivação fantástica para o desenvolvimento da análise.

Assim como em álgebra, a análise lida com fórmulas. Seus teoremas são provados mediante cálculos com quantias indeterminadas. Se uma demonstração se dá dessa maneira, então a fórmula resultante é válida em geral. Entretanto, isso não previne a fórmula de lidar com relações talvez impossíveis de se interpretar ou mesmo de estar errada para valores especiais.[146] Isso pode ser facilmente visto se, após uma substituição, aparece uma divisão por zero. Em outros casos, por exemplo, se uma série numérica diverge, a não-validade da fórmula para valores especiais pode não ser tão facilmente evidente.

A distinção entre a validade geral de uma fórmula e sua deficiência para casos especiais da variável tinha um "fundamento pragmático" na prática dos cálculos algébricos. Ou seja, apenas no final de um cálculo pensava-se acerca da interpretação do resultado e das possíveis restrições de sua validade.[147]

Essas convicções passariam a ser acompanhadas por uma atitude geral no sentido de que generalização deveria ser a mais importante estratégia para o entendimento de uma matéria, e uma importante estratégia para a solução de problemas. Quando uma série

---

[145] Schubring (2005), p.295 e ss.
[146] Jahnke (2003), p.131.

trigonométrica produzia resultados inválidos para determinados valores numéricos, Euler tentava generalizar e completar a fórmula mediante a introdução de um termo adicional.

Lagrange, em sua obra *Leçons sur le calcul des fonctions*, de 1801, nos fornece uma exata descrição de tal estratégia, que ajuda a entender melhor o significado da expressão "generalidade da álgebra" no contexto da passagem do século XVIII ao XIX:

> "Eu acreditava que deveria tratar deste detalhe ao ensinar nossos jovens analistas, sobretudo a fim de mostrar que, em todo caso onde a análise parece estar equivocada, a razão é que o respectivo problema não está sendo considerado de um modo suficientemente geral, e não está sendo abordado com a generalidade da qual ele é capaz"[148]. (grifos nossos)

Da leitura de Schubring, depreende-se, entretanto, que nem todos os matemáticos do século XVIII concordavam com o irrestrito alcance da "generalidade da álgebra". Cabe registrar que D'Alembert criticou severamente alguns aspectos dessa questão, mormente quanto ao estatuto dos números negativos. Segundo o historiador, d'Alembert escreveu artigos na *Encyclopédie* com críticas radicais à então corrente concepção dos números negativos, "pela sua falsa metafísica".[149] Com efeito, ele não reconhecia senão os números positivos como objetos matemáticos, e rejeitou radicalmente a generalidade dada pela álgebra na solução de equações, rotulando-a de "desvantagem".[150] O trabalho de d'Alembert nos fundamentos dos números negativos contradizem outros aspectos de seu trabalho, nos quais ele advogava algebrização e generalização. D'Alembert, um dos líderes do Iluminismo na França, contribuiria assim para o movimento ulterior contra o método analítico e contra a algebrização.

Finda essa breve abordagem das acepções de "análise" e de "generalidade da álgebra", podemos agora tratar de um problema cujos desdobramentos recrudesceram especialmente no século XIX, e que foi se tornando uma preocupação cada vez mais relevante na mente dos matemáticos: a questão do rigor.

Como vimos, a estreita ligação do conceito de função à ideia de fórmula distinguiu profundamente a análise do século XVIII daquela que surgiria no século seguinte.

---

[147] *idem*, p.131.
[148] Lagrange *apud* Jahnke (2003), p.131
[149] Schubring (2005), p.104.
[150] *idem*, p.104.

Segundo Jahnke, não fazia sentido, para um analista do século dezoito, provar a existência de um objeto abstratamente, uma vez determinado como uma fórmula *a priori*.[151]

Como de fato, em contraste com o século XVIII, uma das tarefas mais importantes dos analistas do século XIX foi a de dar definições rigorosas de conceitos básicos e, ainda mais relevante, provas rigorosas dos resultados do cálculo. Como já frisamos, a diferença conceitual entre os respectivos modos de ver e fazer o cálculo nos séc.XVIII e XIX era enorme. De acordo com Grabiner, tal diferença justificaria dizer que o que aconteceu foi uma "verdadeira revolução científica"[152].

Seria equivocado, entretanto, afirmar que o problema do rigor era a principal questão em análise no século XIX. A grande maioria dos matemáticos estava envolvida em questões técnicas de extensão e aplicação de teorias analíticas herdadas de seus predecessores. A bem da verdade, mais abaixo confirmaremos a afirmação de Lützen, qual seja, a de que o desenvolvimento de "tecnicalidades" em teoremas acabariam provendo motivos para o crescente interesse em questões de fundamentos[153].

Mas a febre da busca despreocupada por resultados teve seu preço. Um dos componentes desse preço se deu em função do crescente número de falhas em generalizações, justamente uma prática que se tornou tão cara no século anterior, à medida que se apagavam suas luzes. Isto foi um fator tipicamente interno à matemática, que impulsionou os matemáticos a buscarem um rigor mais elevado na análise.

Abel, já nos anos 1820, foi um dos que observaram que generalizações apressadas e não fundamentadas estavam conduzindo a análise para algumas conclusões errôneas – escancaradamente errôneas, para sermos sinceros – e não somente paradoxais, como se poderia parecer. Na sua correspondência a Holmboe[154], de 1826, Abel menciona falhas graves em generalizações, como por exemplo:

> "Pode-se demonstrar que
>
> $$\frac{x}{2} = sen\, x - \frac{1}{2} sen\, 2x + \frac{1}{3} sen\, 3x - ...$$
>
> para todos os valores menores que π . Aparentemente a mesma fórmula seria verdadeira para $x = \pi$. Porém, teríamos:
>
> $$\frac{\pi}{2} = sen\, \pi - \frac{1}{2} sen\, 2\pi + \frac{1}{3} sen\, 3\pi - etc. = 0$$
>
> Podem-se encontrar inúmeros exemplos deste tipo. (...)

[151] Jahnke (2003), p.132.
[152] Grabiner (1981), p.2
[153] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.155
[154] Abel *apud* Bottazzini (1986), p.89.

> Onde está demonstrado que se pode obter a derivada de uma série infinita derivando-se termo a termo? É fácil citar exemplos onde isso não é certo, por exemplo:
> $$\frac{x}{2} = sen\,x - \frac{1}{2}sen\,2x + \frac{1}{3}sen\,3x - ...$$
> Derivando-se termo a termo, tem-se:
> $$\frac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - etc...$$
> Um resultado completamente falso, porque a série é divergente..."

A carta ajuda a entender o quão desconfortável estava o espírito dos matemáticos em relação aos fundamentos. Tal precariedade incomodou sobremaneira o gênio norueguês, a ponto de assim desabafar com seu professor Hansteen, de Oslo: "Eu quero dedicar todos os meus esforços a fim de trazer um pouco mais de clareza para a obscuridade prodigiosa que é hoje encontrada incontestavelmente na análise"[155].

Abel personificava assim o auge da insatisfação que estava há tempos, e progressivamente, tomando conta dos matemáticos. A ênfase que Lagrange dava às séries infinitas como pilares da análise não se justificava mais. Os fundamentos puramente algébricos com os quais Lagrange pretendia sustentar toda a análise caíram em descrédito. Em exemplos como o citado acima, é claramente perceptível que o "rigor algébrico" se tornara insuficiente em face dos resultados teratológicos que surgiam cada vez mais numerosos e significativos.

A título de ilustração e reforço, o grande Gauss mesmo, em uma dissertação de 1799, criticou a demonstração de d'Alembert do teorema fundamental da álgebra, acusando os matemáticos franceses de "não manipularem corretamente séries infinitas"[156].

A rigor, eles não foram os primeiros a se dar conta dessa sorte de incongruências. Um caso exemplar, um pouco mais antigo, mas que vale a pena mencionar pela sua simplicidade, é o seguinte: a série alternada $1 - 1 + 1 - 1 + ...$, obtida pela série geométrica $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$, para $x = -1$.

Houve manifestações de Guido Grandi (1710), Leibniz (1713), Varignon (1712) propondo valores como 1/2 (haja vista ser o resultado da substituição de x no lado esquerdo da igualdade), zero (para número par de membros da série), um (para número

---

[155] Abel *apud* Bottazzini (1986), p.86.
[156] Bottazzini (1986), p.92.

ímpar de membros da série), ou mesmo que a série não teria soma[157]. Os argumentos, contudo, jamais levaram em consideração a noção de convergência da série.

Temos que levar em conta, é bem verdade, que não se pode comparar a postura dos matemáticos do início do século XVIII em face dos fundamentos da análise com a postura dos matemáticos de um século após. Mas os erros apontados ajudam a compreender porque recrudescia a demanda por um *novo rigor* na análise.

O fato é que de um lado havia o antigo – e ainda não resolvido – problema do cálculo infinitesimal, que, a despeito de sua aplicação universal e da quantidade imensa de resultados que produziu, permanecia problemático quanto aos princípios. De outro lado, havia o fato de que novos resultados mostravam claramente que nem mesmo os conceitos fundamentais, como o de função, por exemplo, pareciam estar adequadamente definidos[158].

Ora, que o cálculo se constituía num campo bem desenvolvido, com um corpo conhecido de resultados, se mostrava um fato inconteste. E, para fazê-lo rigoroso, todos os resultados válidos e prévios deveriam derivar de fundamentos rigorosos.

Mas, enfim, o que era considerado rigoroso para um matemático do tempo de Cauchy? Vejamos. Quando um matemático do século dezenove pensava em rigor na análise, ele tinha três coisas em mente[159]:

- Primeiramente, todo conceito teria que ser definido explicitamente em termos de outros conceitos cujas naturezas fossem firmemente conhecidas;
- Em segundo lugar, os teoremas teriam que ser provados, sendo que cada passo deveria ser justificado:
    - por um outro teorema previamente provado, ou
    - por uma definição, ou
    - por um axioma explicitamente declarado (isso significava em particular que a derivação de um resultado por manipulação de símbolos não provaria um resultado, e nem o desenho de um diagrama provaria afirmações sobre curvas contínuas);
- E, finalmente, em terceiro lugar, as definições escolhidas e os teoremas provados teriam que ser suficientemente amplos para suportar a estrutura inteira de resultados válidos pertencentes à matéria.

---

[157] Jahnke (2003), p.121/122.
[158] Bottazzini (1986), p.90.
[159] Grabiner (1981), p.5

Precisamos, contudo, de muita cautela quando falamos de rigor na matemática. Segundo Pierpont – um estudioso acerca do rigor matemático – "o rigor absoluto não será alcançado jamais, e se um tempo chegar em que se pense que foi alcançado, será um sinal de que a classe dos matemáticos está em declínio"[160].

A bem da verdade, o rigor matemático é em si mesmo um conceito histórico e, portanto, em progresso. Matemáticos do século XVIII consideravam-se rigorosos e realmente o eram, de acordo com os padrões do seu tempo[161].

Grabiner argumenta que nada há de repreensível na atitude dos matemáticos do século XVIII perante os fundamentos do cálculo. Uma vez que resultados eram conseguidos com um determinado manejo das séries infinitas, e que equações diferenciais originavam-se de problemas físicos, por que dizer que esta atitude é inadmissível?[162]

Nem mesmo podemos enxergar alguma espécie de hostilidade por parte deles com relação a esse assunto. Durante o século XVIII – aduz ainda a historiadora – não ocorreu nenhum "escândalo" nas contas que demandasse imediata atenção. Mesmo se observarmos com os olhos modernos, os matemáticos daquela época surpreendentemente cometeram poucos erros. Isto pode ter sido porque eles tratavam com séries infinitas de coeficientes limitados, que se comportavam analogamente a polinômios, ou porque as funções com as quais eles trabalhavam vinham de modelos físicos e eram relativamente bem comportadas. E ela arremata: na ausência de erros óbvios, "eles não sentiram um dos tradicionais atrativos do rigor: a necessidade de separar a verdade da mentira"[163].

Muitos matemáticos do século XIX, por outro lado, achavam-se superiores aos seus antecessores por não mais aceitarem a intuição como parte de uma prova matemática, tampouco "permitiam que o poder da notação substituísse o rigor da prova"[164]. Cauchy, como vimos, foi um destes matemáticos que perceberam a falibilidade do "rigor algébrico" e o perigo da adoção indiscriminada dos resultados da generalidade da álgebra. Cabe registrar aqui, por ora, que o já mencionado movimento contra o método analítico, cuja inspiração já remontava os tempos de d'Alembert, produziria frutos na *École Polytechnique* nos anos 1810 e, especialmente, na obra de Cauchy.

---

[160] Pierpont *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XVI. [James P. Pierpont (1866-1938), matemático estadunidense].
[161] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XV
[162] Grabiner (1981), p.21.
[163] *Idem*, p.22.
[164] *Idem*, p.5

Para sermos honestos, entretanto, não se pode esconder que mesmo os matemáticos do século XIX frequentemente adotaram métodos que, embora fecundos, não agasalhavam propriamente um rigor desejável (segundo os critérios de rigor deles próprios), mormente quando eram desenvolvidos novos assuntos. Com efeito, o próprio Cauchy não foi consistentemente rigoroso em todos os seus *papers*.

É certo, igualmente, que, como assinala Lützen, o movimento no sentido de um novo rigor pode ser visto também como um processo de criação, que produziu novas áreas da matemática, em particular o importante suporte topológico da análise, tratando de conceitos inteiramente novos, tais como continuidade (e convergência) uniforme, compacidade, completude, etc.[165]

A bem da compreensão, finalizamos este tópico permitindo-nos a utilização de uma figura de linguagem: Cauchy, nos anos iniciais de magistério na *École Polytechnique*, reconheceu que, em primeiro lugar, a análise estava com um quadro "patológico" em sede de fundamentos; em segundo lugar, que os "tratamentos aos quais ela foi submetida" não surtiram o efeito desejado; e em terceiro lugar, que ela merecia um tratamento novo, que na verdade ainda não havia sido sequer criado. Podemos dizer que as influências intramatemáticas que descrevemos até aqui resultaram em tal diagnóstico, o que motivou Cauchy a, digamos assim, criar um novo tratamento.

Contudo, estaríamos apresentando um quadro incompleto das influências sofridas por Cauchy se esquecêssemos que não foram somente as lacunas matemáticas que motivaram Cauchy a reformular a análise. Houve um fator que, embora externo à matemática em si, foi fundamental para o incremento da análise no século XIX: a necessidade de bem ensiná-la. É, portanto, com o estudo dessa relevante influência extramatemática sobre Cauchy, que finalizaremos este capítulo.

2.4 – O propósito didático como motivação para adoção de um novo rigor na análise e como fator de seu desenvolvimento.

A matemática começou a ser modernamente profissionalizada um pouco antes da institucionalização do próprio ensino superior da matemática. O estabelecimento da *École Polytechnique*, como vimos, foi um impulsionador particularmente importante da prática

[165] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.155.

educacional científica em toda a Europa, e escrever livros-textos baseados nos cursos de tal instituição se tornou um procedimento padrão.

Grattan-Guinness ressalta, com efeito, que "algumas áreas da matemática foram estimuladas nos seus desenvolvimentos pelas necessidades educacionais (...) [e] a análise matemática foi uma dessas áreas" (grifos nossos). E ainda destaca:

> "A profissionalização da matemática levou a um vasto crescimento no número de matemáticos pesquisadores e, em consequência, do montante de trabalhos publicados. Para apresentar aos alunos os componentes básicos desse mundo expandido de uma forma inteligível, professores e escritores de livros-textos (...) <u>tentaram apresentar da melhor maneira possível</u> as essências dos ramos particulares da matemática em questão numa forma econômica e rigorosa."[166] (grifos nossos)

Na análise de Bottazzini, houve fatores internos e externos para que se formasse um novo ponto de vista a respeito da necessidade de novos padrões de rigor na matemática. Um dos fatores externos seria o fato de que, no começo do século XIX, a grande maioria dos matemáticos "militantes" estava engajada em ensinar nas *grandes écoles*, e isto na verdade quer dizer que

> "...eles estavam envolvidos em <u>reorganizar a teoria matemática para propósitos didáticos</u>. Isso significa isolar os princípios fundamentais da teoria (em análise, tipicamente os conceitos de função, continuidade, derivação, etc.) e deles fazer derivar teoremas de modo dedutivo, o que mostra claramente como as variadas proposições estão conectadas umas com as outras. Isso pode ser visto num grande número de livros-textos escritos para estudantes naquela época."[167] (grifos nossos)

Lützen desposa opinião semelhante, ressaltando a importância do fator-ensino não só no início, como também em todo o restante do século XIX:

> "<u>O ensino foi também uma das principais motivações por detrás da rigorização da análise</u>. Vários matemáticos se encontraram em uma situação desconfortável quando tinham que ensinar a introdução à análise, <u>e então decidiram reformá-la</u>. Isto foi o motivo direto para as reformas de Cauchy e Weierstrass e a construção dos números reais de Dedekind e de Méray."[168] (grifos nossos)

---

[166] Grattan-Guinness (1980), p.2
[167] Bottazzini (1986), p.91
[168] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.155. [Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897); Richard Dedekind (1831-1916); Charles Méray (1835-1911)].

Como já adiantáramos mais acima, não fosse a Revolução Francesa, que levou Lagrange a lecionar na recém fundada *École Polytechnique*, ele talvez nunca tivesse escrito a sua *Théorie*. Ele possivelmente teve muitas de suas idéias antes de lecionar na *École Polytechnique*, mas foi a necessidade de ensinar que o levou a reunir suas idéias e torná-las públicas[169]. O ensino na *École* deu a Lagrange a ocasião para retomar de forma decisiva a reflexão acerca dos fundamentos do cálculo[170].

Grabiner sublinha que, para a tarefa de ensinar cálculo, Lagrange sentiu que não era mais suficiente reconhecer que infinitésimos, limites, e primeiras e últimas razões eram fundamentos inadequados; uma doutrina positiva se fazia necessária[171].

Com efeito, Lagrange baseava seus argumentos na força da álgebra formal, como vimos, mas isso não era suficiente. Havia também o lado íngreme do problema. A fim de tornar o cálculo rigoroso, portanto, seria necessário derivar seus resultados em uma ordem lógica[172], e consequentemente mais clara e compreensível.

Segundo Grabiner:

> "<u>Ensinar, talvez mais ainda que escrever livros-textos, estimulou matemáticos a considerarem os fundamentos de suas matérias</u>. Ao apresentar uma matéria como a análise para iniciantes, não se pode apelar ao modo como o conceito é entendido em uso, uma vez que o iniciante não tem a experiência necessária para esse entendimento. <u>Ter alunos tende a forçar um professor a expor claramente os primeiros princípios de uma matéria e a pensar esses princípios de uma nova maneira</u>. Isso ajuda a explicar por que as contribuições aos fundamentos do cálculo de Lagrange, Cauchy, Weierstrass e Dedekind <u>foram todas estimuladas pelo seu ensino</u>".[173] (grifos nossos)

Diante de tudo que foi exposto acima, estamos autorizados a afirmar que o propósito didático e a necessidade de rigorização se alimentavam reciprocamente, confundindo-se nos papéis de causa e efeito, no sentido de se gerar uma "nova análise". E também nos tornamos aptos a avaliar, de maneira clara e inequívoca, o quanto foi importante e decisivo o "fator ensino" no desenvolvimento dos fundamentos da análise no século XIX.

---

[169] Grabiner (1981), p.43.
[170] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XVII.
[171] Grabiner (1981), p.43.
[172] Fauvel (1987), p.556.
[173] Grabiner (1981), p.25

Outrossim, como poderemos ver também, o próprio Cauchy foi um dos que mais sofreu a forte influência da atividade docente na sua obra. Se não, vejamos.

O período da Restauração (1815-1830) foi certamente o mais frutífero da carreira de Cauchy. O número de publicações que apresentou nesse período – algo em torno de cem, incluindo livros-textos, artigos em jornais científicos e extratos – era considerável.

Nessa época, seu trabalho era dominado por três temas cruciais: o ensino, com ênfase nos fundamentos da mecânica clássica e especialmente em análise; a física matemática, com especial interesse em teoria da elasticidade e sua aplicação à teoria da luz; e finalmente, análise avançada, com ênfase no desenvolvimento da teoria das funções e o cálculo de resíduos[174].

Belhoste relata que a carreira dupla de professor e membro do *Institut*, fez com que diferentes interesses de pesquisa fossem surgindo em Cauchy, cada um atuando como fonte de inspiração do outro, ou seja,

> "em sua imensamente criativa cabeça, havia um enlace de problemas, métodos e resultados, que entre 1821 e 1825 culminaram em seus grandes livros-textos, na criação da teoria geral da elasticidade e no desenvolvimento da integração complexa e do cálculo de resíduos."[175] (grifos nossos)

Dugac, por sua vez, faz destacar a finalidade didática do *Cours d'analyse*, sublinhando que a obrigação de ensinar imposta aos matemáticos foi fator da renovação dos fundamentos, e que "nesse livro-texto Cauchy exprime claramente o objetivo o qual ele se propõe atingir".[176]

Bottazzini acentua o caráter pedagógico decisivo da atuação de Cauchy, quando declara que

> "existe certamente um senso no qual pode ser dito que, de Cauchy em diante, o passo decisivo na conceitualização do rigor e a organização da teoria que se tornaria dominante no século dezenove se originou com questões didáticas, ou pelo menos estariam presentes nelas.[177] (grifos nossos)

[174] Belhoste (1991), p.60
[175] *Idem*, p.60
[176] Dugac, *in* Dieudonné (1978), p.341
[177] Bottazzini (1986), p.91.

E, reforçando a argumentação em defesa da existência de uma forte influência que a atividade de organizar didaticamente um conteúdo pode ter no desenvolvimento do próprio conteúdo, podemos ilustrar o ocorrido na segunda metade do século XIX, quando Weierstrass não apresentou seu trabalho sobre os elementos do cálculo através de tratados nem em uma série de publicações diversas, como fizera Cauchy, mas, antes, suas idéias se tornaram conhecidas através do trabalho dos alunos que assistiram às suas aulas.

Grabiner, enfim, nos auxilia a fechar a argumentação, aduzindo que, "...tivesse o interesse público em matemática e ciência sido menor, e não tivessem os matemáticos sido obrigados a ensinar, teria havido ainda menos dessas discussões"[178].

Como pudemos perceber, causas externas e internas à matemática produziram as discussões sobre os fundamentos da análise no século dezoito que seriam exaustivamente debatidos e formulados no século seguinte.

E Cauchy acabou herdando, segundo Belhoste, dois problemas não resolvidos, um de ordem matemático-filosófica e outro de ordem pedagógica[179]. O primeiro se referia à questão: "como podemos extrair resultados verdadeiros e profundos de premissas obscuras e possivelmente falsas?". E o segundo, se referia à questão: "como podemos apresentar a iniciantes um cálculo cujos princípios não estão assegurados?".

Podemos dizer que, após esta passagem de olhos pela análise produzida antes de Cauchy e pelos fatores que o influenciaram na produção de sua "análise algébrica", já estamos em condições, finalmente, de mergulhar no *Cours d'analyse*, observar seus conceitos e linhas gerais, compreender como Cauchy trabalhou com a herança acima mencionada e por fim dissertar especificamente sobre o conceito de continuidade, que serve de exemplo para que possamos compreender quão profundas foram as mudanças na análise operadas por Cauchy a partir do *Cours d'analyse*.

É disso que trataremos no próximo capítulo.

---

[178] Grabiner (1981), p.28.
[179] Belhoste (1985), p.102.

CAPÍTULO III – O *COURS D'ANALYSE* E A NOVA ARQUITETURA DA ANÁLISE

3.1 – O *Cours d'analyse*

3.1.1 – O estilo de Cauchy e o *Cours d'analyse*

O *Cours d'analyse* – que, segundo Dugac, "é sem contestação um livro que marcou época na literatura matemática"[180] – propõe uma nova arquitetura da análise, baseada nas noções de limite, continuidade e função. Ordem lógica, relativa concisão, especificidade do domínio, recuperação dos resultados conhecidos, enfim, os ingredientes todos mostram quão organizadas foram a concepção e a consecução dessa obra-prima.

Entretanto, o próprio Cauchy não seria tão coerente e sistemático assim em seus trabalhos no decorrer de sua carreira. Numerosas vezes recorreu a métodos tidos por ele mesmo como inadequados ou não rigorosos o bastante. Com efeito, era pragmático o suficiente para perceber que determinados caminhos poderiam ser seguidos ainda que sem a fundamentação suprida, e, quando agia assim, acabava não se diferenciando dos demais, neste aspecto. O *Cours d'analyse* viria mostrar sua face ordeira e sistemática. Freudenthal analisa bem essa peculiaridade:

> "Por que, então, o *Cours d'analyse* foi tão diferente de outros trabalhos seus? Não porque era mais fundamental, <u>mas porque era um livro-texto</u>, no qual ele não apenas comunicou seus resultados, mas também tornou explícita sua experiência prática. Cauchy não era um amante da pesquisa sobre os fundamentos como Bolzano, mas, <u>para ensinar a iniciantes, ele teve que analisar e apresentar as técnicas implícitas em sua prática. Uma situação que é comum hoje, quando um professor moderno torna explícitos seus hábitos lógicos, mesmo que não seja um lógico</u>"[181] (grifos nossos)

[180] Dugac, *in* Dieudonné (1978), p.344
[181] Freudenthal (1971), p.378.

Grabiner corrobora essa afirmação, aduzindo que "Cauchy começou seu trabalho em análise com problemas particulares (...) [e,] só quando ministrou seus cursos sistemáticos na *École Polytechnique* é que ele lidou primeiramente com as questões de rigor em toda sua generalidade"[182].

Cauchy, como de fato, ensinava com grande zelo na *École Polytechnique*. Charles Combes, seu aluno, primeiro colocado da turma de 1818, assim escreveu em 1857 sobre o estilo do ensino de Cauchy:

> "Todos nós achávamos este professor extremamente ativo, de boa índole, e incansável. Eu frequentemente ouvia-o repetir e rever, por várias horas, lições inteiras que não havíamos entendido claramente; ficávamos impressionados com <u>a clareza elegante de sua análise, uma análise seca e tediosa</u>. Como de fato, Sr.Cauchy tinha o gênio de Euler, Lagrange, Laplace, Gauss e Jacobi, e <u>seu amor pelo ensino, que revestia com puro zelo</u>, trouxe com ele uma amabilidade, uma simplicidade, e um entusiasmo no coração que ele preservou até o fim de sua vida."[183] (grifos nossos)

Para lidarmos com o estilo literário de Cauchy temos que nos reportar aos costumes da época. Uma grande dificuldade para o leitor de hoje compreender tal estilo de escrita matemática é sua característica marcadamente discursiva de exposição matemática, costumeiramente usada no início do século XIX.[184]

Não obstante, Cauchy distinguiu explicitamente – como teremos a oportunidade de observar com clareza – heurística e justificação. Isto é, separou a tarefa de descobrir resultados por meios da "generalidade da álgebra" (que levava, como vimos, à extrapolação das expressões simbólicas finitas para as infinitas, e das reais para as complexas) da bem diferente tarefa de provar teoremas[185].

Cauchy não apenas contrastou o "rigor da geometria" com a "generalidade da álgebra", mas também pôs a geometria como a encarnação do rigor, enquanto desvalorizava a álgebra, atribuindo a esta apenas "induções" e uma extensão não confiável da aplicabilidade de suas fórmulas. Segundo Schubring, ao fecharmos o olhar no debate acerca dos conceitos fundamentais, particularmente na França, vê-se claramente que Cauchy assim pensava

---

[182] Grabiner (1981), p.77.
[183] Belhoste (1991), p.64.
[184] Grabiner (1981), p.7.
[185] *Idem* (1981), p.6

> "(...) devido ao 'retorno à síntese', à geometria como o mais alto valor em matemática, em seguida ao apogeu do método analítico durante a Revolução Francesa, e particularmente após as regulamentações dos princípios básicos na *École Polytechnique* em 1810/1811, que recolocaram a geometria como a última instância."[186]

Todavia, Kline, ao introduzir um capítulo de seu livro, estampa uma frase de Cauchy que ajuda a entender bem o seu estilo: "seria um erro sério pensar que alguém pode encontrar certeza somente em demonstrações geométricas ou no testemunho dos sentidos"[187]. Com efeito, na introdução do *Cours d'analyse*, quando referiu-se ao rigor da geometria como o ideal a que aspirava, ele tinha em mente não diagramas, mas uma estrutura lógica: a forma como os trabalhos de Euclides e Arquimedes foram construídos[188].

Coerente com seu estilo de pensar, Cauchy desfila suas definições e conceitos no *Cours d'analyse*, de forma que

> "(...) eles não se apoiam em considerações geométricas. Usando a teoria dos limites como fonte das definições das propriedades básicas, e a aritmética de inequações como principal artifício nas provas, <u>Cauchy pôde trazer para a análise matemática uma autonomia tanto da geometria quanto da álgebra</u>. Uma característica marcante do *Cours d'analyse* (...) é que <u>nenhum diagrama é usado, nem mesmo para propósitos ilustrativos</u>"[189]. (grifos nossos)

O *Cours d'analyse* (1821) foi pensado por Cauchy como uma introdução ao cálculo. O cálculo propriamente dito constituía a segunda parte do curso a ser dado no primeiro ano da *École Polytechnique*. E o *Résumé* – que traria os conceitos de derivada e integral – só seria publicado em 1823. Portanto, esses conceitos, na forma como definidos por Cauchy, não estão no escopo do *Cours d'analyse*, e não serão aqui aprofundados.

Uma visão compreensiva sobre a estrutura do *Cours d'analyse* mostra que sua parte "real" culmina na prova da expansão binomial, enquanto que a parte "imaginária" culmina com a prova do teorema fundamental da álgebra. Isto correspondia a dois problemas

---
[186] Schubring (2005), p.436
[187] Cauchy *apud* Kline (1972), p.947
[188] Grabiner (1981), p.6
[189] Grattan-Guinness (1980), p.111

básicos que tinham de ser encarados quando do ensino de cálculo para iniciantes: a definição da derivada de x^{α} para algum α real e a integração de funções racionais[190].

A bem da verdade, pretendia-se a "análise algébrica" como uma introdução ao cálculo, muito embora, de modo um tanto vago, tanto seu escopo quanto seu conteúdo pudessem ser sumariados como "tudo o que pode ser feito sem se lançar mão do cálculo propriamente dito". Se voltarmos um pouco no tempo, como já vimos, encontraremos na *Introductio* de Euler, em meados do século dezoito, uma boa inspiração para o que mais tarde seria chamado de "análise algébrica" pelos matemáticos franceses.

É preciso registrar, entretanto, que houve mudanças no que se entendia por "análise algébrica", desde a *Introductio*. A bem da verdade, não havia um currículo consolidado de matemática superior que propiciasse uma determinação clara e definitiva do escopo da "análise algébrica". Como vimos, não havia modelos pré-estabelecidos de currículos das disciplinas matemáticas. Afinal de contas – reforçamos – foi na *École Polytechnique* que surgiu o primeiro curso de formação com currículo de matemática superior. Daí ser necessário – e com grande urgência – construir-se um currículo próprio para a sala de aula.

Outrossim, provavelmente como herança da abordagem algébrica lagrangiana do cálculo, por um longo tempo a "análise algébrica" foi tratada pelo programa oficial como uma parte preliminar e separada no primeiro ano do curso de análise.

Quando Cauchy ingressou no quadro docente da *École Polytechnique*, as coisas já não estavam mais exatamente como nos seus tempos de estudante – detalharemos isto mais adiante, quando tratarmos do conceito de infinitesimal.

Cauchy assegurava, porém, que os conceitos básicos da "análise algébrica", introduzidos no *Cours d'analyse*, seriam fortes o suficiente para sustentarem o edifício inteiro da análise com fundamento rigoroso.

Abel disse uma vez que o *Cours d'analyse* "deveria ser lido por todo analista que aprecia o rigor nas pesquisas matemáticas"[191]. Com efeito, vale expor aqui a concepção de Cauchy de um vigoroso rigor analítico, expressa na *Introduction*:

> "Como método, eu tive em vista dar [à análise] **todo o rigor que se demanda na geometria, de tal modo que jamais recorresse aos raciocínios baseados na generalidade da álgebra**. Raciocínios deste tipo, embora comumente admitidos, particularmente na passagem das séries convergentes às divergentes e das quantidades reais à expressões imaginárias, podem, assim me parece, apenas

[190] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.CXXXVIII.
[191] Bottazzini (1986), p.102.

> ocasionalmente ser considerados como induções apropriadas para apresentar a verdade, uma vez que eles estão tão pouco de acordo com a precisão tão estimada nas ciências matemáticas. Devemos ao mesmo tempo observar que eles tendem a atribuir uma extensão indefinida às fórmulas algébricas, ao passo que na realidade a maior parte dessas fórmulas existem somente sob certas condições e para certos valores das quantidades que elas contêm. **Ao determinar essas condições e esses valores, eu faço abolir toda incerteza**"[192]. (grifos nossos)

As observações acima, na opinião de Belhoste – biógrafo de Cauchy – visavam a Laplace e a Poisson, o primeiro por basear sua teoria de funções geradoras na consideração de séries genericamente divergentes, e o segundo por ter avançado num método de computar integrais definidas pela passagem intuitiva da reta real ao domínio complexo[193].

Schubring, todavia, não concorda com esta afirmação. Segundo o historiador, tais ideias de Cauchy refletiam a volta do método sintético e a troca do método dos limites pelo método das quantidades infinitamente pequenas, quando da ruptura que se deu na *École Polytechnique* em 1811, que alterou significativamente o ensino de análise "na primeira instituição moderna de ensino superior, uma instituição fundada originalmente como uma cidadela do método analítico".[194]

Pois bem. Vimos mais acima que, embora Cauchy concordasse com Lagrange na necessidade de se fundamentar rigorosamente a análise, não justificando os métodos por uma aplicação bem-sucedida na geometria e na física, ele discordava de seu grande antecessor na medida que não aceitava os argumentos baseados na generalidade da álgebra como base para a precisão analítica.

Lagrange disse que repelia todo tipo de "metafísica", reduzindo o cálculo a manipulações algébricas de quantidades finitas. Na realidade, ele simplesmente operava uma mudança de "metafísica", se entendermos esse termo como o conjunto de princípios e conceitos metamatemáticos nos quais se funda a prática de um matemático[195].

Normalmente, a "metafísica" – como entendida acima – aparece mais na introdução de *papers* e livros, onde os matemáticos apresentam as linhas gerais dos seus trabalhos e a maneira de acordo com a qual eles querem que sejam lidos.

---

[192] Cauchy (1992), *Introduction*, p.ii-iii .
[193] Belhoste (1991), p.51.
[194] Schubring (2005), p.V.
[195] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XXXVII.

Bottazzini nos alerta, entretanto, que frequentemente "a metafísica apresentada na introdução de um livro aparece bem diferente nos métodos reais que são usados nas provas dos teoremas e na obtenção dos resultados no restante do livro"[196]. E completa, opinando que, por este motivo, as histórias baseadas somente em introduções são tão insatisfatórias.

Aprofundemos, pois, a investigação do conteúdo matemático, a fim de não cairmos nessa tentação simplista.

3.1.2 – Os novos fundamentos da análise no *Cours d'analyse*

Ao findar a *Introduction*, o *Cours d'analyse* começa seu conteúdo matemático nas *Préliminaires* com uma revisão dos diversos tipos de números (natural, racional, etc.) e introduz o conceito de valor absoluto (que ele chama "valor numérico") e os cálculos com quantidades literais.

Cauchy, assim como os demais matemáticos que tencionaram reconstruir positivamente a análise, admitia como "certo" o sistema de números reais. Segundo Kline, nenhuma tentativa foi feita de analisar tal estrutura ou de construí-la logicamente[197]. Aparentemente – de acordo com o historiador – os matemáticos se sentiam em terreno seguro no que se referia a essa área. Vale registrar, a propósito, que o processo denominado "rigorização da análise", levado a efeito no século XIX por Bolzano, Abel, Dirichlet, e outros, além do próprio Cauchy, não provou ser o fim das investigações em fundamentos. Com efeito, praticamente todo trabalho pressupunha o sistema de números reais, cujo objeto, todavia, permanecia sem a devida construção.

Pois bem. Ainda nas *Préliminaires,* Cauchy define quantidade variável, e o faz distanciando-se da definição de Euler. Segundo este último, variável é "quantidade numérica indeterminada ou genérica que incluiria todos os valores determinados sem exceção"[198]. As variáveis de Cauchy atingem valores diferentes, mas não necessariamente todos os valores, isto é, elas podem ser limitadas a um dado intervalo. Ainda voltaremos oportunamente a esse tema, mais à frente.

---

[196] *Ibid.*, p.XXXVIII.
[197] Kline (1972), p.950.
[198] Euler (1948) *apud* Lützen, *in* Jahnke (2003), p.162.

Chega então o momento de Cauchy introduzir o conceito de limite. Ora, é pacífico que Cauchy herdou a ideia de basear seu cálculo no conceito de limite de muitos dos seus antecessores, como Newton, d'Alembert e Lacroix. Mas todos eles deixaram de fundamentar efetivamente os seus resultados com tal conceito. A rigor, segundo Grabiner, há uma diferença entre estabelecer definições que soam corretas e entender de fato os conceitos. E, ainda mais importante: é diferente o entendimento do conceito da realização da dura tarefa de provar importantes teoremas usando o conceito.[199]

A historiadora aduz ainda que Cauchy teria sido o que primeiro entendeu plenamente o conceito de limite e o que primeiro aplicou tal conceito no cálculo com sucesso.[200] Sobre tal afirmação, contudo, há controvérsias. De acordo com Schubring, o autor da primeira tentativa de abordagem para uma elaboração algébrica do conceito de limite foi o matemático português Francisco de Borja Garção Stockler (1759-1829). Ele publicou em 1794 seu "Compêndio da Theorica dos Limites, ou Introdução ao Método das Fluxões", onde, com seus fundamentos conceituais, desenvolveu uma concepção puramente algébrica de operação com variados limites.[201]

Independentemente da primazia de compreensão do conceito, seguiremos com o nosso objetivo de apresentar como Cauchy definiu os conceitos fundamentais da análise e de que maneira operou com eles no *Cours d'analyse*.

Limite

É importante ressaltar que o conceito de limite funciona na análise de modo análogo ao conceito de quantidade em relação à matemática como um todo. Ele é o conceito básico essencial, que o "enciclopedista" d'Alembert mencionava como sendo a base da *vraie métaphysique* do cálculo diferencial.

Muito embora o mesmo d'Alembert, e também l'Huilier e Lacroix, tivessem preparado o terreno para Cauchy, popularizando a idéia de limite em seus trabalhos, essa concepção permanecia, até então, amplamente geométrica. Com efeito, o exemplo dado por d'Alembert fora o da circunferência e os polígonos regulares inscritos e circunscritos aproximando-se dela.

---

[199] Grabiner (1981), p.78.
[200] *Idem*, p.78.
[201] Schubring (2005), p.237. [Stockler é, ao mesmo tempo, a mais eminente figura da História da Ciência no Brasil e em Portugal. A importância do livro mencionado ainda não é, infelizmente, reconhecida].

No trabalho de Cauchy, todavia, o conceito de limite se tornou – assim como no pensamento de Bolzano, e no sentido em que foi preconizado na *Introduction* – clara e definitivamente aritmético em vez de geométrico. Dentro deste aspecto, vejamos o que diz Grabiner a respeito do processo de "aritmetização da análise", que teve Cauchy como importante inspirador. Ela assinala que a realização simultânea de dois fatos foi central para a bem-sucedida rigorização do cálculo operada por Cauchy:

> "Primeiro, que o conceito de limite do século XVIII pôde ser entendido em termos de inequações ('dado um épsilon, achar um *n* ou um delta'). Segundo, e mais importante, que, uma vez feito isso, todo o cálculo pôde ser baseado em limites e, por meio disso, resultados prévios de funções contínuas, séries infinitas, derivadas e integrais transformaram-se em teoremas na sua nova análise rigorosa."[202] (grifos nossos)

Embora houvesse falhas ocasionais em seu raciocínio, ele distanciou-se grandemente de famosos predecessores. E seu trabalho forneceu a base necessária para uma mais completa rigorização (e aritmetização) da análise pela escola de Weierstrass.

Não obstante, é preciso registrar que é bem complexo – além de não ser o objetivo do nosso trabalho – o estudo da evolução do conceito de limite na História. Ainda que se assemelhem bastante, as abordagens do conceito de limite mudaram não somente em seus termos, mas também nas "metafísicas" que os inspiravam.

E mesmo que não tivessem sofrido qualquer modificação aparente, temos que ser cautelosos, pois "conceitos tendem a mudar de significado no passar do tempo, ainda que seus termos permaneçam idênticos"[203].

A fim de enriquecer nossa visão contextual da época, Schubring nos brinda com uma comparação acerca do desenvolvimento dos conceitos de número negativo e de limite:

> "Em contraste com o caso dos números negativos, em que o conceito foi desenvolvido quase exclusivamente na prática, isto é, principalmente em livros-textos, e onde reflexões conceituais independentes e tratados ligados a elas começaram a aparecer, exceto por raras exceções, não antes da metade do século dezoito, o desenvolvimento correspondente do campo conceitual dos processos-limites foi caracterizado desde o início pelo fato de que o problema foi refletido teoricamente e, ao mesmo tempo, apresentado para propósitos práticos de ensino"[204] (grifos nossos)

[202] Grabiner (1981), p.77.
[203] Schubring (2005), p.1
[204] *Idem*, p.151.

Serve-nos de alerta, a propósito, a sua observação de que os estudos do desenvolvimento conceitual dos processos-limites são costumeiramente dados como exauridos, mas que não se pode concordar com isto. Com efeito, se tais estudos se encontram num contexto intramatemático, ainda há muito para se estudar sobre as relações do conceito em âmbito não confinado à matemática, como na filosofia, na teologia, na física e em sua sub-área, a mecânica, nos idos dos séculos dezessete e dezoito, quando o conceito não era abordado em disciplinas separadas.

Pois bem. Cauchy deu uma notável contribuição à evolução desse conceito, formulando a seguinte definição:

> **Quando os valores atribuídos sucessivamente a uma determinada variável se aproximam indefinidamente de um valor fixado, de modo que a diferença entre eles seja tão pequena quanto desejarmos, tal valor é chamado *limite* de todos os demais.**[205] (grifo nosso)

Fato interessante a ser observado na formulação verbal de limite feita por Cauchy é o de que ele não declara explicitamente a relação funcional entre as variáveis envolvidas.[206] Também a definição de Cauchy está livre da idéia de movimento (se afastando assim das concepções "mecânicas"). Além disso, e mais importante, sua definição de limite não depende da geometria. E, finalmente, ela não contém a restrição desnecessária – comum nas definições mais antigas – de que a variável não poderia ultrapassar[207] seu limite. Embora tais características tivessem já aparecido no *Traité* de Lacroix, este não chegou a definir explicitamente limite.

Vale registrar, a propósito, o que Lützen sustenta[208], quando aduz que o conceito de variável de Cauchy é "dinâmico" enquanto o de Euler, como vimos, é mais próximo ao conceito moderno de um elemento arbitrário e genérico de um conjunto. Mais especificamente, as variáveis de Cauchy podem ter limites. Isto parece estranho aos olhos do leitor moderno, que enxerga o significado de $f(x) \to a$ quando $x \to b$, sem contudo compreender $f(x) \to a$ ou $x \to b$ separadamente. Entretanto, a diferença entre a concepção moderna e a de Cauchy quase desaparece quando consideramos como Cauchy

---

[205] Cauchy (1992), p.4.
[206] Grattan-Guinness (1980), p.141.
[207] Grabiner (1981), p.84.
[208] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.162.

usava o conceito de limite. Quando aplicado às sequências s_n , estava entendido que n tendia ao infinito e, em outros casos – na definição de continuidade, por exemplo – há de fato sempre duas variáveis em jogo, nas quais uma é função da outra. Vejamos o exemplo salientado para ilustrar tal argumento:

> **"2º Teorema. Se a função *f(x)* é positiva para todo grande valor de *x* e a razão $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ converge para o limite *k* quando *x* cresce indefinidamente, então a expressão $[f(x)]^{\frac{1}{x}}$ convergirá ao mesmo tempo para o mesmo limite."** [209]

Aqui não há dúvida acerca do significado da terminologia, especialmente se observarmos como começa a prova desse teorema:

> **"Prova. Suponhamos inicialmente que a quantidade *k*, necessariamente positiva, possui um valor finito e denotemos por ε um número tão pequeno quanto desejarmos. Uma vez que valores crescentes de *x* fazem a razão $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ convergir para o limite *k*, podemos dar ao número *h* um valor tão grande que para *x* maior ou igual a *h* , a razão estará constantemente compreendida entre os limites $k-\varepsilon$, $k+\varepsilon$ "**[210]

Assim, Cauchy substanciou com quantificadores, ***ε's*** e ***N's***, e inequações, o que sua definição tencionava abarcar, e é possível constatar nisto uma correspondência com o moderno conceito de limite.

Pois bem. De acordo com Grabiner, havia duas "questões-problema" bastante relevantes que cercavam a ideia de limite, e as mesmas foram amplamente debatidas no decorrer do século XVIII, a saber: primeiro, se a variável poderia ultrapassar seu limite, e segundo, se uma quantidade alcançaria seu limite.

A primeira questão já fora respondida corretamente por l'Huilier em 1795, quando da discussão de séries alternadas. Segundo a historiadora, aqui fica bem evidente uma carência geral de interesse sério acerca dos fundamentos do cálculo no século XVIII.[211]

---

[209] Cauchy (1992), p.53/4.
[210] *Idem*, p.54.
[211] Grabiner (1981), p.84.

Lacroix veio a abandonar a restrição de "nunca ultrapassar" em 1810, e isso certamente influenciou seu aluno Cauchy, um leitor atento de seus trabalhos.

A segunda questão é ainda mais crucial que a primeira. A objeção mais importante de Berkeley – no bojo de sua crítica aos fundamentos do cálculo, conforme mencionada em capítulo anterior – foi justamente essa. McLaurin, d'Alembert e Lacroix tentaram explicar a distinção entre a razão das diferenças e seu limite, como Newton fizera. Todos esses matemáticos assumiram que a razão de quantidades evanescentes convergiria para um limite e questionaram como isso poderia se dar.

Cauchy simplesmente disse que tal razão <u>poderia</u> convergir para um limite, e não que necessariamente o fizesse. Para ilustrar essa característica, Grabiner assinala que,

> "Quando ele [Cauchy] define a derivada [no *Résumé*] como o limite da razão $\Delta y/\Delta x$ de forma que tanto Δy como Δx 'se aproximam indefinidamente e simultaneamente do limite zero', ele diz, 'esse limite, <u>quando existe</u>, tem um valor determinado para cada valor particular de x'"[212] (grifos da autora)

Com efeito, exemplos já havia bem conhecidos nos quais os limites das razões não existiam. Aparentemente – aduz a historiadora – Cauchy foi o primeiro que percebeu que o reconhecimento de tais casos não invalidaria a definição geral de derivada. Esse tratamento pretendia dar suporte a provas válidas, e não meramente confortar iniciantes quando confrontados com um conceito difícil.[213] <u>Sua definição não precisava de nada mais do que o estritamente necessário para os seus propósitos</u>.

No tempo de Cauchy, qualquer um podia calcular limites simples; o problema estava em definir o conceito e determinar se limites diversos existiam. Por exemplo, Lacroix expôs a prova (já conhecida por d'Alembert) de que o limite do produto é o produto dos limites:

> "Seja p o limite de P; q o limite de Q. Em geral, $P = p + \alpha$, $Q = q + \beta$, onde α e β desvanecem juntos depois de passarem por todo estágio de diminuição sucessiva. Uma vez que $PQ = (p + \alpha)(q + \beta)$, $PQ = pq + p\beta + q\alpha + \alpha\beta$. Então vemos que a diferença $PQ - pq$ pode ser feita tão pequena quanto desejarmos mediante valores apropriados para α e β." [214]

[212] *Ibid*., p.86.
[213] *Ibid*., p.86.
[214] Lacroix *apud* Grabiner (1981), p.83.

Esses argumentos de limite são importantes porque exemplificam traduções de um conceito verbal de limite para uma linguagem algébrica – embora simples. Além disso, as expressões algébricas mostram – como meras palavras não conseguiriam mostrar – que a diferença entre a variável e seu limite poderia de fato ser feita menor do que qualquer quantidade dada.

Cauchy, conhecedor das aproximações algébricas mediante métodos nos quais computava verdadeiramente as inequações correspondentes, estava apto a visualizar provas rigorosas acerca de limites e convergência e, portanto, também acerca de todos os conceitos do cálculo.[215]

Em várias ocasiões, quando a prova necessitava do uso de limite, Cauchy traduziu sua definição para a linguagem das inequações algébricas. E com isso provou resultados mais poderosos do que o do limite de um produto, que vimos acima. Segundo Grabiner[216], quando o limite de uma expressão complicada era discutido, Cauchy, às vezes – e o suficiente para nos mostrar sua clara compreensão – trabalhava efetivamente com delta ou *n* correspondendo a um dado épsilon.

Podemos dizer, assim, que a superioridade do conceito de limite de Cauchy em relação aos de seus antecessores <u>não repousa somente na definição explícita, mas no uso que ele fez desta definição nas demonstrações</u>.

Há que se mencionar, entretanto, que o conceito de limite de Cauchy diferencia-se do conceito moderno em pelo menos um aspecto. Cauchy algumas vezes permitiu que uma variável (ou uma sequência) tivesse mais do que um limite. Lützen cita como exemplo o teste da raiz para uma série com termos positivos:

> **1º Teorema. Ache o limite <u>ou os limites</u> para os quais a expressão $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ converge quando *n* cresce indefinidamente e denote por *k* <u>o maior desses limites</u>, ou, em outras palavras, o limite de maior valor da referida expressão. A série será convergente se *k* < 1, e divergente se *k* > 1."**[217] (grifos nossos)

Na prova que segue, fica claro que: (i) para todo $U > k$ existe um n_0 tal que para $n > n_0$, a quantidade $(u_n)^{\frac{1}{n}}$ será menor que U; e (ii) que para todo $U < k$ existem números *n*

[215] Grabiner (1981), p.84.
[216] *Idem*, p.86.
[217] Cauchy (1821, p.121) *apud* Lützen, *in* Jahnke (2003), p.163.

arbitrariamente grandes tais que $(u_n)^{\frac{1}{n}} > U$. Então "limite" neste caso significa ponto de acumulação, e o maior entre os "limites" é precisamente o que chamamos *lim sup*.[218] Apesar disso, em muitos outros casos – como por exemplo a definição de soma de séries – fica entendido que só pode existir um único limite.[219]

Enfim, podemos fechar a análise do conceito de limite no *Cours d'analyse* aduzindo que o mérito de Cauchy teria sido, enfim, o de reunir o conhecimento que havia sido desenvolvido até então e de ter enxergado o potencial e a viabilidade da álgebra de inequações, e o poder do conceito de limite como fundamento seguro para o cálculo. Isto é, foi graças ao desenvolvimento do cálculo no século XVIII, às tentativas de fundamentação de Lagrange, e à compilação bem-sucedida feita por Lacroix que Cauchy pôde enxergar mais longe. Vale aqui também a famosa frase de Newton: "se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei no ombro de gigantes".

Todavia, se se pode dizer que as fontes supracitadas se mostraram imprescindíveis, e alimentaram a inspiração de Cauchy, é necessário recordar que foi a necessidade de expor coerentemente os conceitos – premida pelo exercício do magistério da análise – é que o motivou a tomar esse novo caminho.

É bem visível a disputa entre as necessidades da atividade magisterial e o desenvolvimento teórico da matemática quando Cauchy lida com o programa da *École* referente ao ensino dos infinitesimais. Mergulhemos, pois, nesse conceito.

Infinitesimal

Com a noção de limite bem posta, Cauchy define também *infinitesimal*:

> **Quando valores numéricos sucessivos da mesma variável decrescem indefinidamente, de modo que se tornem menores do que qualquer número dado, essa variável se torna um *infinitamente pequeno* [infinitesimal] ou uma *quantidade infinitamente pequena*. Uma variável deste tipo tem o zero como limite.**[220] (grifos nossos)

[218] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.163.
[219] *Idem*, p.163.
[220] Cauchy (1992), p.4.

De acordo com Schubring,

> "Pode-se ver que a definição é completamente construída de forma análoga à de limite. A única diferença é que aqui a condição para os valores absolutos é feita para os valores a fim de conceber operacionalmente um 'tornar-se menor' para números ('menor do que qualquer número dado'). Isto faz de quantidades infinitamente pequenas variáveis especiais, a saber, variáveis com limite zero"[221]

E Cauchy complementa, ainda nas *Préliminaires*:

> **Quando os valores numéricos sucessivos da mesma variável aumentam mais e mais, de modo que se tornem maiores do que qualquer número dado, dizemos que tal variável possui *infinito positivo* como limite, indicado pelo símbolo ∞, se for variável positiva, e *infinito negativo*, indicado pelo símbolo $-\infty$, se for uma variável negativa. Os infinitos positivo e negativo são designados conjuntamente sob o nome de quantidades infinitas.**[222]

Cauchy, um pouco antes, na *Introduction*, já havia declarado que, "falando-se de continuidade de funções, eu não posso deixar de fazer conhecer as propriedades principais das quantidades infinitamente pequenas, que servem de base ao cálculo diferencial"[223].

A propósito, em 1810, o ensino da análise estava sendo muito criticado pelo alto nível de abstração, se comparado com as necessidades dos oficiais do exército e dos engenheiros. Consequentemente, os programas oficiais foram modificados no conteúdo e no método. O *Conseil de Perfectionnement* justificou no *Rapport à l'Empereur* de 1812 que, "para a exposição do cálculo diferencial, nós substituímos o método dos limites por aquele dos infinitamente pequenos, que é mais fácil e ao qual somos por outro lado obrigados a recorrer à mecânica[224]. Gilain registra ainda o teor do documento, que recomendava fortemente

> "...levar o ensino da *École Polytechnique* até o fim último de sua instituição, [a saber,] o de preparar os alunos aos estudos práticos das Escolas de todos os serviços públicos. Os [estudos] da *École Polytechnique* cessarão daqui por diante de se elevar às teorias especulativas que convém somente aos sábios, ou de descer a aplicações prematuras que pertencem somente ao engenheiro." [225]

[221] Schubring (2005), p.453.
[222] Cauchy (1992), p.5.
[223] *idem*, *Introduction*, p.ii
[224] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.CXXXVIII
[225] *idem*, p.CXXXIX

Apenas para termos uma ideia clara do fervor com que se empenhavam os que entravam nessa contenda, vejamos o que dizia Servois em 1814 acerca do "perigo" que os infinitesimais representavam:

> "[os infinitesimais] não têm e nem podem ter teoria; na prática, é um perigoso instrumento na mão de iniciantes (...) Antecipando, de minha parte, o julgamento da posteridade, eu ousaria prever que esse método será acusado um dia, e corretamente, de ter retardado o progresso das ciências matemáticas"[226]

Cauchy conviveu com esse contraste entre os propósitos práticos do sistema educacional e o desejo de apresentar teorias rigorosas e abstratas por toda a sua carreira na *École*. Logo que começou a lecionar, o programa oficial para 1815/1816 requeria que ele expusesse "os princípios do cálculo diferencial pela consideração dos infinitamente pequenos; fazer ver, nos casos mais simples, a concordância desse método com os limites ou o desenvolvimento em séries"[227].

O empenho de Cauchy em banir tal requerimento, de 1817 em diante, quando membro da comissão encarregada de preparar os programas e, com isso, fazer mencionar os infinitesimais nos programas apenas em relação às aplicações do cálculo na geometria, foi um detalhe que, segundo Bottazzini[228], mostra bem a atitude de Cauchy acerca dos infinitesimais.

Tivesse Cauchy sido um "infinitesimalista" convicto – argumenta esse historiador – ele estaria muito feliz com a orientação oficial do programa, o que não ocorreu. Mas o fato a ser destacado é que o novato Cauchy acabou sendo extremamente hábil nesse espinhoso problema da abordagem dos infinitesimais na École. Ele se achava no meio de vários pontos de vista conflitantes, que já remontavam ao século anterior, sendo que alguns teimavam em sobreviver aos paradoxos que a filosofia denunciava.

Não nos alongaremos aqui acerca de tais correntes, a um, por ser o tema muito extenso, e a dois, por fugir do escopo do trabalho. Simplesmente nos filiaremos a Schubring, que sumaria bem a questão:

---

[226] Servois *apud* Grattan-Guinness (1990), p.137. [François Joseph Servois (1768-1847), matemático francês.]
[227] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.CXXXIX
[228] *idem*, p.CXXXIX

> "Pode-se entender a definição de Cauchy dos infinitamente pequenos como uma hábil e característica implementação conciliatória da concepção dos fundamentos da análise praticada na *École Polytechnique*. Por um lado, isso garantiu aos infinitamente pequenos um status de conceito básico; desse modo, Cauchy foi ao encontro das exigências do contexto educacional. Por outro lado, eles foram subjugados ao conceito de limite, confirmando por meio disso (...) a dominância da abordagem de limites. Entretanto, o acoplamento do 'limite' ao 'infinitamente pequeno' preveniu Cauchy de uma algebrização ulterior do conceito de limite"[229].

Pois bem. Finalizando as *Préliminaires*, Cauchy introduz a noção aritmética de "meio" (*moyen*) de várias quantidades: a quantidade x é um "meio" de quantidades $a, a', a'', \dots$, se satisfaz as desigualdades $\inf (a, a', a'', \dots) \leq x \leq \sup (a, a', a'', \dots)$. Cauchy usou esses "meios" habilmente, em vez das inequações, como ferramentas poderosas para provar muitos teoremas do *Cours*, como o teorema do valor médio, teoremas de convergência de séries, a prova da existência da integral definida de uma função contínua e a solução de uma equação diferencial[230].

Cauchy apresenta também as operações usuais de cálculo, soma, produto, etc., e as funções exponencial, logarítmica e trigonométrica. E finalmente adentra o primeiro capítulo, quando introduz o conceito de função, um dos alicerces da análise, que passa agora a merecer nossa atenção especial.

Função

Como dissemos mais acima, Cauchy não conceitua limite a partir das relações funcionais entre as variáveis. Vale discorrermos sobre isso. Comecemos com a herança que Cauchy recebeu de seus antecessores acerca do conceito de função. Após, investigaremos como ele o utiliza em sua obra.

Desde Euler, o cálculo era uma teoria das funções. E o que seria uma função? O significado deste conceito mudou com o tempo. Na *Introductio*, ele define função como

---

[229] Schubring (2005), p.454
[230] Belhoste (1991), p.68.

uma expressão analítica – ou seja, uma fórmula[231] – contendo constantes e variáveis. Tal definição de Euler foi virtualmente repetida por d'Alembert na *Encyclopédie*:

> "Chamamos função de *x* ou, em geral, de uma quantidade qualquer, uma quantidade algébrica composta de tantos termos quanto queiramos, e na qual *x* se encontra de uma maneira qualquer, misturado ou não, a constantes."[232]

Com efeito, vale lembrar, foi o método analítico de introduzir funções que revolucionou a matemática e, em razão de sua extraordinária eficiência, assegurou à noção de função uma posição central em todas as ciências exatas.[233]

Já no *Institutiones Calculi Differentialis*, função era definida por Euler como variável dependendo de outra variável. Sofrendo pequenas variações por Fourier e Dirichlet, e chegando até Riemann, a definição de função como uma dependência geral entre variáveis sobreviveu quase como nos termos de Euler, e acabou sendo usada sistematicamente após 1820.[234]

A *Théorie* de Lagrange, por sua vez, começa exatamente com o conceito de função, que essencialmente reflete o disposto na *Introductio*:

> Chamamos função de uma ou mais quantidades toda *expressão de cálculo* na qual essas quantidades entram de uma maneira qualquer, misturadas ou não com outras quantidades que enxergamos como tendo os valores dados e invariáveis, ao passo que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções nós só consideramos as quantidades que supomos variáveis, sem nos preocuparmos com as constantes que podem estar misturadas a elas."[235] (grifos nossos)

A precariedade do conceito e a falta de uma compreensão unificada do mesmo na comunidade matemática se mostravam patentes. A questão da continuidade viria a pôr em xeque mais ainda a ideia de função. O grande Poincaré conseguiu descrever muito bem como se dava a compreensão da noção de função na época de Cauchy:

> "Ao começo do século [XIX], a ideia de função era uma noção ao mesmo tempo muito restrita e muito vaga (...) A fronteira entre as

[231] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.156
[232] D'Alembert *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XIX
[233] Youschkevitch (1976), p.39.
[234] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.157. Joseph Fourier (1768-1830), cientista francês. Gustav Peter Lejeune Dirichlet (1805-1859); Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), matemáticos alemães.
[235] Lagrange (*Théorie*, 1797) *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XIX

> funções analíticas e as demais estava longe de ser completamente traçada. Na realidade, como por uma herança devida aos fundadores do cálculo infinitesimal, que se preocupavam inicialmente com as aplicações, nos reportávamos inconscientemente ao modelo que nos era fornecido pelas funções consideradas na mecânica e rejeitávamos tudo que se destacava desse modelo; não éramos guiados por uma definição clara e rigorosa, mas por um tipo de intuição e de um instinto obscuro"[236].

Precisamos então ser cautelosos. Na História da Matemática e da Ciência, assinala Lützen, é frequentemente insuficiente considerar como os conceitos são definidos; é necessário também considerar como eles são usados[237]. Tendo isso em vista, analisemos, pois, o conceito de função em Cauchy.

Cauchy claramente deve ter tido em mente as expressões analíticas. Mas as suas provas e outros conceitos não se socorreram dessa visão, como fez Fourier, embora este tivesse afastado conscientemente tal ponto de vista nas provas de convergência de séries. Essa mudança de ambos no uso dos conceitos é paradigmática. Com efeito, Lützen informa que, a bem da verdade,

> "Era muito usual para os matemáticos do início do século XIX definir função de um modo geral e então implicitamente ou explicitamente atribuir diversas propriedades adicionais a elas no curso dos argumentos. <u>Boa parte do movimento do rigor consistia</u>, precisamente, numa consciência crescente de que <u>somente podiam ser usadas propriedades de funções que estivessem explicitamente declaradas</u>"[238]. (grifos nossos)

Havia de fato uma grande confusão entre os matemáticos. Como de fato, os melhores livros-textos até a metade do século XIX, reforça Hankel[239], "estavam perdidos quanto ao que fazer acerca do conceito de função". Alguns definiam uma função essencialmente no sentido de Euler; outros requeriam que *y* variasse com *x* de acordo com alguma lei, mas não explicavam o que "lei" significava; alguns usavam a definição de Dirichlet[240]; e outros ainda sequer definiam função. Contudo, todos os autores deduziam consequências (não necessariamente lógicas) das definições.

---

[236] Poincaré *apud* Boniface (2002), p.5
[237] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.157
[238] *Idem*, p.158
[239] Hankel *apud* Kline (1972), p.950.
[240] Dirichlet assim definiu função: "Se uma variável *y* está relacionada com uma variável *x* de modo que, sempre que é dado um valor numérico a *x*, existe uma regra segundo a qual um valor único de *y* fica determinado, então diz-se que *y* é função da variável independente *x*."

Cauchy, nos anos 1820, estava mergulhado num "oceano conceitual". Ele então tomou o conceito de função da forma mais conveniente para a sequência de seu trabalho. No Capítulo I do *Cours d'analyse* (devotado, como dissemos, para as funções reais), Cauchy fornece a definição de função de uma ou mais variáveis:

> **Quando quantidades variáveis vinculam-se de modo que, quando o valor de uma é dado, possamos inferir os valores das outras, nós ordinariamente concebemos que essas quantidades variáveis são expressas por meio de uma delas, a qual então leva o nome de *variável independente*; e as quantidades remanescentes, expressas por meio da variável independente, são aquelas que chamamos *funções* dessa variável.**[241] (grifos do autor)

De forma similar, ele define funções de muitas variáveis independentes e faz a distinção entre funções explícitas e implícitas. Estas ocorreriam quando tivéssemos somente "as relações entre as funções e as variáveis, isto é, as equações que tais quantidades devem satisfazer, de modo que essas equações não sejam resolvidas algebricamente"[242].

Controvérsias da época acerca dos problemas matemáticos que surgiam no trato com funções de várias variáveis (como por exemplo, $2^m \cos^m x$, com m racional) parece terem desempenhado um papel importante em convencer Cauchy da necessidade de estabelecer rigorosamente o conceito de função de uma única variável. Muitos anos depois, numa carta a Coriolis, seu *répetiteur* na *École Polytechnique*, Cauchy enfatizou explicitamente a importância dessa "monovariabilidade", relacionando tal característica com o conceito de continuidade, que veremos mais à frente:

> "Segundo a definição dada no meu curso de análise, uma função de uma variável é contínua entre limites dados, quando entre esses limites cada valor da variável produz um valor único e finito da função, e que esta varia por graus insensíveis com a variável ela mesma. Dito isso, uma função que não se torna infinita só cessa de ser contínua, em geral, quando se torna múltipla. Assim, uma raiz de uma função só cessará, em geral, de ser uma função contínua de um parâmetro contido na equação quando esta equação tiver raízes iguais."[243]

---

[241] Cauchy (1992), p.19/20.
[242] *idem*, p.20.
[243] Cauchy *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXIII.

No Capítulo II, ele reexamina os infinitesimais. Usando a noção de limite, Cauchy compara quantidades infinitesimais em termos de ordens de magnitude, e daí introduz a noção de continuidade num intervalo. Tal conceito, segundo ele, “poderia ser classificado entre as matérias que estão fortemente conectadas com a investigação dos infinitesimais”[244].

Continuidade

No *Cours d'analyse*, Cauchy começou com uma definição global de uma função contínua de uma variável em um intervalo. Daí, introduziu o conceito de continuidade local (na vizinhança do ponto). Esta é a primeira definição:

> **Seja *f(x)* uma função da variável *x*, e suponhamos que, para cada valor de *x* intermediário entre dois limites dados, esta função admite constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor compreendido entre estes limites, atribuímos à variável *x* um acréscimo infinitamente pequeno *α*, a função por sua vez receberá por acréscimo a diferença *f(x + α) – f(x)* que dependerá ao mesmo tempo da nova variável *α* e do valor de *x*. Isto posto, a função *f(x)* será, entre os dois limites assinalados à variável *x*, *<u>função contínua</u>* desta variável se, para cada valor de *x* intermediário entre esses limites, o valor numérico [absoluto] da diferença *f(x + α) – f(x)* decresce indefinidamente com o de *α*.**[245] (grifo nosso)

E, logo após, complementa com a segunda:

> **Em outros termos, *a função f(x) restará contínua em relação a x entre os limites dados se, entre tais limites, um acréscimo infinitamente pequeno da variável produzir sempre um acréscimo infinitamente pequeno da função propriamente dita.***[246] (<u>grifos de Cauchy</u>)

Schubring opina que os grifos em itálico na versão do próprio Cauchy se deram provavelmente para enfatizar que a segunda definição é mais fácil de memorizar. Giusti, por sua vez, acredita que a segunda definição parece mais importante aos olhos de Cauchy,

[244] Cauchy (1821) *apud* Belhoste (1991), p.68.
[245] Cauchy (1992), p.34.
[246] *idem*, p.34/35.

haja vista não só ter sido grifada pelo próprio, mas também porque a mesma foi repetida em outros de seus livros-textos, como o *Résumé*.[247]

Cauchy acrescenta ainda uma terceira definição:

> **Além disso, dizemos que a função *f(x)* é, na vizinhança de um valor particular dado à variável *x*, uma função contínua dessa variável, sempre que ela é contínua entre dois limites de *x*, mesmo quando muito próximos um do outro, que contenham esse valor particular.**[248]

Cauchy determina a continuidade na vizinhança do valor de uma variável no intuito de expor uma nova definição de descontinuidade. Assim diz Cauchy:

> **Finalmente, quando a função *f(x)* cessa de ser contínua na vizinhança de um valor particular da variável *x*, diz-se que ela se torna <u>*descontínua*</u> e que ela possui, para esse valor particular, uma *solução de continuidade*.** [249] (grifos nossos)

Expusemos aqui, por ora, somente as definições de continuidade, a fim de não subverter a ordem em que aparecem no *Cours d'analyse*. Deixaremos para o tópico **3.2** desta dissertação o estudo aprofundado do conceito de continuidade, conforme já havíamos anunciado.

Prosseguindo na ordem do *Cours d'analyse*, o próximo conceito importante de que trataremos será o de convergência de séries.

<u>Convergência de séries</u>

A bem da compreensão da sequência de nosso trabalho, cabe neste instante um oportuno esclarecimento. Alguém pode dizer – e estará absolutamente correto – que há outro conceito extremamente importante e inovador no *Cours d'analyse* que, assim como o de continuidade, também poderia figurar perfeitamente como o exemplo a ser aprofundado em nosso estudo. A saber, o conceito de convergência de séries.

---

[247] Giusti *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXXII.
[248] Cauchy (1992), p.35.
[249] *Idem*, p.35.

Entretanto, o escopo deste trabalho e a abrangência considerável do referido tema não permitem que esmiucemo-lo sem prejuízo de nosso norte. Portanto, assim como estamos fazendo quanto aos demais conceitos de Cauchy, ater-nos-emos àquilo que pode estar em relação mais estrita com o conceito de continuidade, a fim de que possamos atingir o difícil objetivo de ampliar o espectro sem perder o foco.

Em poucas palavras, os matemáticos do século dezoito usavam séries indiscriminadamente, como já tivemos oportunidade de mencionar. No final desse século, algumas dúvidas e alguns resultados realmente absurdos, frutos do trabalho com séries infinitas, estimularam questionamentos quanto à validade das operações com elas. Por volta de 1810, Fourier, Gauss e Bolzano começariam um manuseio mais cuidadoso e exato dessas séries.

Na visão de Dugac, o capítulo VI, está entre os mais importantes do *Cours d'analyse*[250]. Cauchy fornece no § 1 desse capítulo a definição de série:

> **Uma série é uma sequência indefinida de quantidades**
> $$u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$$
> **que sucedem umas das outras seguindo uma determinada lei. Tais quantidades são os diferentes termos da série considerada.**[251]

Após ter introduzido a soma dos n primeiros termos, $s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$, Cauchy introduz os conceitos de convergência e de divergência de uma série:

> **Se, para valores sempre crescentes de *n*, a soma s_n se aproxima indefinidamente de um certo limite *s*, a série será dita *<u>convergente</u>*, e o limite em questão se chamará a soma da série. Ao contrário, com *n* crescendo indefinidamente, a soma s_n não se aproximar de algum limite fixo, a série será *<u>divergente</u>* e não possuirá soma. Num e noutro caso, o termo que corresponde ao índice *n* , dito a_n , será o termo geral. É suficiente que se dê o termo geral em função do índice n para que a série seja completamente determinada.**[252] (grifos nossos)

A novidade deste conceito era o uso estrito de uma caracterização da convergência, mediante *ε's* e *N's*, em várias de suas provas[253]. Havia também uma insistência que

---

[250] Dugac, *in* Dieudonné (1978), p.342.
[251] Cauchy (1992), p.123.
[252] *idem*, p.123.
[253] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.167.

atravessou todos os seus livros-textos em afirmar que uma série divergente não possuiria soma. Matemáticos do século dezoito trabalharam livremente com séries divergentes, e mesmo Euler tentara formalizar uma definição de suas somas. Vale dizer que Cauchy estava consciente de que chocaria a comunidade matemática com essa estranha insistência, conforme se pode notar na *Introduction* do *Cours d'analyse*.[254]

Apenas no intuito de compreendermos melhor o “banimento” das séries divergentes por Cauchy (e logo depois por Abel), reflitamos acerca do que este último escreveu, em uma carta a Holmboe:

> “As séries divergentes são uma invenção do demônio, e é uma vergonha basear nelas qualquer demonstração. Usando-as, podemos chegar a qualquer conclusão que desejarmos e por isso é que tais séries produziram tantas falácias e tantos paradoxos (...) e, com a exceção das séries geométricas, não existe em toda a matemática uma única série infinita cuja soma seja bem determinada rigorosamente”[255].

Dizer que as séries divergentes não têm soma torna necessário estabelecer a convergência das séries antes de se tentar encontrar suas somas. Para tal, Cauchy provou vários testes de convergência, entre eles o primeiro e fundamental, conhecido como “critério de Cauchy”. Ele estabelece que uma série convergente é uma “série de Cauchy” (sua soma parcial s_n forma uma sequência de Cauchy). Ele provou a “ida”. Entretanto, nada menciona sobre a “volta”. Modernamente, a “volta” deve levar em consideração a completude dos números reais, que deve ser postulada como um axioma ou obtida da construção dos números reais.

Segundo Lützen[256], essa ausência na consideração da completude é uma lacuna fundamental que aparece em numerosos trabalhos na análise de Cauchy, em particular na sua prova do teorema do valor intermediário e na prova da existência da integral de uma função contínua. A propósito, ambas possuem o conceito de continuidade como uma das suas colunas de sustentação.

Aqui vale a pena citar – e brevemente analisar – um dos mais famosos (e comentados) problemas no cálculo de Cauchy, que vem a ser o seguinte teorema, que conectaria dois dos principais conceitos da análise – <u>convergência e continuidade</u>:

---

[254] Cauchy (1992), *Introduction*, p.iv .
[255] Abel *apud* Kline (1972), p.973-974.
[256] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.168.

> **1ºTeorema. Quando os diferentes termos da série são funções da mesma variável *x*, e contínuas com respeito a essa variável na vizinhança de um valor particular para o qual a série é convergente, então a soma *s* da série é também uma função contínua de *x* na vizinhança desse valor particular.**[257]

Ele assim conduz sua prova: uma vez representada a soma da série s como $s = s_n + r_n$, onde s_n é a enésima soma parcial e r_n é o *resto* da série a partir do enésimo termo,

> **quando os termos da série contendo uma mesma variável *x*, [com] a série sendo convergente, e seus diferentes termos funções contínuas de *x*, numa vizinhança de um valor particular atribuído a esta variável; [então]**
>
> $$s_n\ ,\ r_n\ \text{ e }\ s$$
>
> **são ainda três funções da variável *x*, em que a primeira é evidentemente contínua em relação a x na vizinhança do valor particular de que se trata.**
> **Isto posto, consideremos a variação dessas três funções quando *x* é incrementado por uma quantidade infinitamente pequena α. A variação de s_n será, para todos os valores possíveis de *n*, uma quantidade infinitamente pequena, e a variação de r_n tornar-se-á insensível ao mesmo tempo que r_n , se atribuirmos a *n* um valor muito grande. Portanto, a variação da função *s* nada mais será do que uma quantidade infinitamente pequena.**[258]

Segundo Lützen, a tradição historiográfica vem caracterizando esse teorema e sua prova como falsos, em razão de serem realmente falsos quando tomamos os termos envolvidos com seus significados modernos.[259] Por outro lado, assinala o historiador, a conclusão de Cauchy seria verdadeira se assumíssemos que a série converge uniformemente na vizinhança de *x*. E o debate acaba se estendendo em alguns autores, havendo argumentos fortes de ambos os lados, alguns defendendo, outros apontando falhas em Cauchy. Isso foge, entretanto, ao escopo do nosso trabalho. O que é importante para nós, sobretudo, é a constatação de como Cauchy entrelaçou os conceitos fundamentais e de como utilizou massivamente o conceito de continuidade nos teoremas (e respectivas provas) do *Cours d'analyse*.

---

[257] Cauchy (1992), p.131/2.
[258] *Idem*, p.131.
[259] Lützen, in Jahnke (2003), p.168.

Finalmente, vamos nos servir do artigo de Laugwitz[260] para sumariar os alicerces conceituais dos livros-textos de Cauchy publicados nos anos 1820, relacionando especificamente os temas abordados no *Cours d'analyse*:

i. As séries infinitas seriam legítimas apenas se convergissem;
ii. As funções *f(x)* teriam um único valor para cada *x* (usualmente de um intervalo I) e seriam usualmente tomadas por contínuas (nesse intervalo);
iii. Uma igualdade A = B significaria que A e B eram quantidades iguais, isto é, números reais. Em particular, uma equação *f(x)* = *g(x)* nunca significaria que *g(x)* era algum "desenvolvimento" formal de uma "expressão analítica" *f(x)* [aspas do historiador]. A "generalidade da álgebra" mediante a qual outros teriam obtido tais equações era rejeitada por Cauchy. [idem];
iv. Os conceitos básicos de convergência e continuidade seriam ligados pelo seu 1º Teorema (aquele por nós examinado mais acima).

E, enfim, como ferramentas, Cauchy teria utilizado:

- Inequações, para valores reais, generalizando o item (iii) acima;
- Sua teoria de "meios" (*moyennes*);
- Quantidades infinitamente pequenas;
- A linguagem dos limites.

Assim, através da breve exposição que ora finda, cremos que o leitor pôde construir uma imagem conceitual suficiente para prosseguir no estreitamento de foco do assunto, isto é, no aprofundamento que pretendemos ingressar. Antes de seguirmos, porém, ainda falta um esclarecimento importante.

Já havíamos visto ***por que*** (motivações extra e intramatemáticas) e, logo em seguida, vimos ***como*** alguns dos principais conceitos fundamentais da "análise algébrica" foram expostos da maneira que o foram no *Cours d'analyse*.

Estamos agora em condições, portanto, de responder a uma questão importante que ajuda a justificar a grandeza dessa obra: teria a tão festejada arquitetura da exposição dos conceitos acontecido como obra simplesmente do acaso, isto é, Cauchy teria agido intuitiva e despreocupadamente quando escreveu uma sucessão arbitrária de conceitos de análise, ou, pelo contrário, teria Cauchy trabalhado criteriosamente, respeitando algum princípio ordenador e inovador?

---

[260] Laugwitz (1988), p.197 e ss.

3.1.3 – Sobre a ordem de exposição dos conceitos no *Cours d'analyse*

Pelo que vimos até aqui, a ordem em que Cauchy expôs os conceitos no *Cours d'analyse* não foi casual. Analisando acuradamente os fatos e resultados até aqui estudados, não é difícil perceber que Cauchy não poderia ter deixado de, por exemplo, introduzir continuidade antes de definir convergência de séries (e de provar seus critérios), ou antes de definir derivada, ou mesmo integral. Isso porque ele utilizou efetivamente o conceito de continuidade ***nas*** definições e ***nas*** hipóteses de provas posteriores à sua definição.

É inimaginável, nos dias de hoje, que se considere, na hipótese de um teorema, a continuidade de uma função, sem que haja a anterior e bem posta definição de continuidade. Anteriormente a Cauchy, todavia, era possível que uma ideia baseada em conceitos tirados de um senso comum (dos cientistas de então, evidentemente) pudesse simplesmente ser aceita como bem colocada ou razoavelmente posta. Pudemos constatar isso mais acima em nossa exposição, inclusive.

Contudo, a partir de Cauchy, um trabalho (ou um livro-texto) cujo conteúdo fosse exposto mediante definições soltas, inúteis ou ainda matematicamente descontextualizadas seria visto como um trabalho inadequado e não rigoroso. Com efeito, quando estudamos hoje um livro de análise, o que vemos, basicamente, é a ordem de exposição de conteúdo que Cauchy introduziu.

Essa ordem de exposição evidentemente não é “genética”, isto é, não se preocupa em reproduzir – e acaba realmente não reproduzindo – o modo como determinado conceito foi desenvolvido historicamente, com suas contradições e paradoxos, idas e vindas, progressos e recaídas. Não é exigível – tampouco razoável – se pensar que alguém o faria desse modo naquela época. E, para falar a verdade, nem mesmo hoje em dia encontraríamos material didático de análise disposto dessa forma.

Permitimo-nos dizer que Cauchy teria seguido uma tradição cartesiana – do mais fácil e elementar para o mais difícil e complexo – na ordem de exposição. Opinamos no sentido de que isto se deu em face da aplicação de uma concepção corrente acerca de como deveria ser preparado um livro com finalidade mormente didática.

Para escrevermos esta dissertação, a propósito, investigamos capítulos da *Introductio* e da *Théorie*. Vale registrar que, ao tomarmos o *Cours d'analyse* para analisar, sentimos mais conforto e facilidade para concatenar o raciocínio. A exposição se nos mostrou mais clara, a linguagem matemática mais familiar, e a ordem de apresentação do conteúdo mais parecida com a que estudamos hoje em dia.

Pode-se argumentar, é verdade, que isto se dá pelo simples fato de o *Cours d'analyse* ter sido publicado posteriormente às duas outras obras. Ora, o fato em si de uma obra ser publicada após a outra não significa automaticamente que seja apresentada de forma mais clara. É lícito, destarte, que se postule a existência de uma nova forma de exposição dos conteúdos no *Cours d'analyse*.

O "didatismo seguro" de Cauchy é perceptível, com efeito, na preocupação em explicar detalhadamente uma definição antes de seguir em frente. A leitura acaba sendo árida e um pouco cansativa (menos, porém, do que na leitura da *Introductio* e da *Théorie*), mas isto se dá principalmente em função do estilo da época de se escrever matemática, como vimos mais acima. Não é nosso objetivo nesta dissertação tentar explicar quão clara é a exposição dos conteúdos do *Cours d'analyse*, mas reputamos importante dizer que consideramos tal exposição mais clara do que às da *Introductio* e da *Théorie*.

Ademais, para a felicidade de todos, Cauchy acabou sendo ao mesmo tempo mentor e escravo de sua própria exposição criteriosa. Isso fez com que ele só pudesse subir um determinado degrau depois de ter construído sólida e completamente aquele em que se encontrava, em coerência com seus estritos padrões de rigor. Essa situação não o impediu de ser pragmático; pelo contrário, vimos mais acima que ele definiu os conceitos convenientemente, para fins práticos de utilização nas provas subsequentes. Assim, operou com tais ferramentas habilmente, sem deixar para trás definições inúteis e sem mencionar hipóteses sem definições prévias. Isto é, agiu segundo os critérios de rigor que os matemáticos do século XIX passariam a adotar desde então, conforme vimos no capítulo anterior de nosso trabalho.

Ora, toda essa preocupação resultou numa obra coerentemente preparada, intencionalmente "fechada", a fim de que o rigor se mostrasse soberano. Não é de se estranhar que outros tivessem seguido seu modelo característico em obras posteriores, e que tal modelo fizesse escola na apresentação da análise até hoje, uma vez que teria sido – para além dos propósitos didáticos – <u>uma arquitetura bem-sucedida no âmbito da própria escrita matemática</u>, independente de uma finalidade didática.

O rigor matemático, assim, havia galgado mais uma etapa. O modelo anterior de escrita e pensamento matemáticos “precluíra”, pois, como a comporta de um canal que se fecha quando o navio passa para um nível d’água superior. Não havia mais como regressar.

E chegamos, assim, ao momento derradeiro de nosso trabalho, onde o “foco da objetiva” se fechará ao máximo, o suficiente para que investiguemos pontualmente um conceito que bem exemplifica como a necessidade de se ensinar a análise – somada a outros fatores igualmente importantes – fez com que se mudasse a partir de Cauchy o modo de se apresentar a matemática. Esse exemplo é justamente o conceito de continuidade, cuja novidade causou forte impacto aos que beberam na fonte da “análise algébrica” de Cauchy.

Nunca é demais insistir, entretanto, que, ao destacarmos um determinado conceito, ainda que importantíssimo e fundamental, estamos tão-somente fechando o foco de estudo. É primordial não perdermos de vista – conforme estamos sublinhando desde o início – que foi a arquitetura da análise de Cauchy, vista em seu conjunto, e mais do que neste ou naquele conceito, definição ou demonstração, que funcionou como um divisor de águas na análise.

O aprofundamento da evolução de um dos conceitos que receberam tratamento e abordagem novos no *Cours d'analyse*, no bojo do nosso estudo, ajuda a compreender, e principalmente mensurar, o alcance das mudanças geradas pela obra. Se conseguirmos ilustrar esse ponto com clareza para o leitor, teremos enfim conseguido nosso objetivo.

3.2 – O novo conceito de continuidade

Na visão de Lützen, a maior novidade e provavelmente o mais central conceito do *Cours d'analyse* é a noção de continuidade, marcadamente diferente da amplamente aceita noção euleriana, cuja natureza seria algébrica e global. A noção de Cauchy, por sua vez, poderia ser vista anacronicamente como topológica e local em sua natureza[261]. Esse passo – do global para o local – estaria em harmonia, destarte, com a rejeição de Cauchy à

[261] Lützen, in Jahnke (2003), p.164

"generalidade da álgebra". Além disso, em contraste com seus antecessores, que, embora tivessem introduzido a continuidade, mal se utilizaram dela, Cauchy apresenta extensivas aplicações operacionais desse conceito. Explicar como tudo isso se deu é um de nossos objetivos, a partir deste momento.

Na *École Polytechnique*, a continuidade de funções se tornara um tópico universal em análise e mecânica. Com efeito – assinala Schubring – Garnier, Lacroix e Prony fizeram menção várias vezes em seus livros-textos e aulas, embora predominantemente como mais uma condição "metafísica" básica ("lei") do que como um conceito individual aplicável operacionalmente.[262] Aprofundaremos ainda este aspecto mais adiante.

Quando da efetiva entrada de Cauchy na *École Polytechnique*, em 1816, ele e seu amigo Ampère (colega da *École*, ex-*répetiteur* de análise e depois professor titular de mecânica) propuseram mudanças expressivas – como vimos – no programa de análise. O curso começaria com uma seção de "análise algébrica". Tal seção introduziria três inovações. A primeira era uma unidade instrucional chamada "Expressões Imaginárias", que seria ensinada antes do teorema de DeMoivre e de a exponencial imaginária ser introduzida. O dado importante para nós é que essa unidade seria seguida por <u>uma que trataria da diferença entre funções contínuas e descontínuas, um tópico totalmente negligenciado no programa tradicional</u>.[263]

Embora o plano não contivesse detalhes, pode-se assumir que a esta altura Cauchy já detinha importantes resultados que apareceriam depois no *Cours d'analyse*. Com efeito, um exame de seu estudo *Sur les intégrales définies*, de 1814, sugere que naquela época ele havia começado a desenvolver os conceitos de limite e continuidade na forma como seriam expostos alguns anos depois no *Cours*.[264]

Em Ampère, diferentemente, não é possível encontrar qualquer introdução concreta do conceito de continuidade em suas aulas, anteriormente a 1815. A definição de continuidade de Cauchy como conceito individual representou, portanto, uma grande e independente inovação dentro do contexto francês.[265]

A fim de podermos compreender com total clareza o motivo de tamanha importância e influência, faz-se mister, porém, entender antes como se desenvolveu o conceito matemático de continuidade até a época de Cauchy.

---

[262] Schubring (2005), p.457.
[263] Belhoste (1991), p.62.
[264] *idem*, p.62.
[265] Schubring (2005), p.457.

3.2.1 – O conceito matemático de continuidade antes de Cauchy

A ideia de continuidade já era objeto de reflexão desde a Antiguidade. Não vamos aqui contar a história completa do conceito, já que a mesma é muito extensa e também por englobar considerações que ultrapassam a matemática, fugindo do escopo do trabalho. Porém, vale a pena observar o que Schubring diz acerca do desenvolvimento de tal conceito antes do século XVIII:

> "Uma vez que a continuidade foi por um longo tempo entendida como sendo uma lei inerente ao processo da natureza, a matemática estava ao mesmo tempo destinada a modelar tal natureza, <u>e uma teorização matemática independente dessa vinculação ontológica era inconcebível</u>. Onde os debates sobre continuidade se deram anteriormente ao século dezoito, estes eram teológico-filosóficos, respectivamente debates físicos-mecânicos acerca da validade geral da lei de continuidade, e acerca das consequências desta lei para a estrutura da matéria e para leis particulares e fenômenos da física."[266] (grifos nossos)

Assinala ainda o historiador que o conceito de continuidade foi integrado à análise como uma premissa para a física-matemática. Teria sido, assim, um "processo para transformar o conceito de continuidade de sua função epistemológica numa função operatória como um conceito intramatemático".[267] Ou seja, um processo de desvincular a ideia de continuidade de cerrados vínculos com a natureza, no sentido de apresentá-la e utilizá-la como um conceito legitimamente matemático e, por conseguinte, operacional dentro da própria matemática.

Pois bem. Como já tivemos oportunidade de estudar, diversas concepções de "função" coexistiram no século XVIII e no início do século XIX. Youschkevitch assinala que o principal impulso para o desenvolvimento do conceito de função no século XVIII veio do trabalho de Euler em Física matemática, começando com o celebrado problema das vibrações infinitamente pequenas de uma corda homogênea finita fixada nos dois extremos.[268] Tal discussão, que remontava a Galileu, e que foi primeiramente interpretada

[266] *ibid.*, p.153/154.
[267] *ibid.*, p.174.
[268] Youschkevitch (1976), p.65.

por Taylor em 1715, teve seu primeiro passo decisivo no memorial de d'Alembert, comunicado à Academia de Ciências de Berlim em 1746 e publicado em 1749.[269]

Da discussão acerca da natureza das "funções arbitrárias" que apareciam na integração de equações diferenciais parciais que representavam o movimento da tal "corda vibrante" participaram os mais expressivos matemáticos da época (Euler, d'Alembert, Daniel Bernoulli e, mais tarde, Lagrange).[270] Esta teria sido, segundo Fraser, a mais interessante e mais documentada controvérsia matemática do século XVIII.[271]

E o que D'Alembert fez? Ele expressou as condições desse problema por equações equivalentes a uma equação diferencial parcial $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, a equação da onda, para descrever o movimento de uma corda elástica esticada entre os pontos $x = 0$ e $x = L$ no eixo dos x e posta a vibrar em um plano, sendo $y(x,t)$ o deslocamento transversal no tempo t no ponto x da corda. Daí, ele provou que a solução geral do problema poderia ser representada por uma soma de duas funções arbitrárias $y = \Phi(x + at) + \Psi(x - at)$, que, em razão da condições de contorno, se reduz a $y = \Phi(at + x) - \Phi(at - x)$.[272]

Havia um desacordo acerca de qual seria o tipo de função arbitrária $y = f(x)$ que poderia representar a forma inicial da corda. D'Alembert sustentava que para dar legitimidade à operação de cálculo, cada função deveria ser expressa em todo o domínio em termos de uma e a mesma equação algébrica ou transcendental. Segundo Edwards, isso era equivalente na época a dizer que "a função estava sujeita à lei de continuidade da forma".[273]

O trabalho de d'Alembert era brilhante, tanto no âmbito matemático quanto no uso dos princípios dinâmicos.[274] Sua derivação foi prontamente adotada por Euler, mas este reinterpretou a solução para permitir uma classe mais extensa de curvas aceitáveis como deformações iniciais da corda. Euler argumentou que as limitações de d'Alembert às curvas não eram fisicamente realistas, isto é, uma corda poderia ser deformada de tal modo que sua forma inicial pudesse ser descrita por diferentes expressões analíticas em intervalos diferentes. Daí ele defender a admissão na análise matemática das funções que ele chamou de "mistas" ou "descontínuas e irregulares", pelo fato de corresponderem a

---

[269] *ibid.*, p.65.
[270] Edwards (1979), p.301.
[271] Fraser (1988), p.325.
[272] Youschkevitch (1976), p.65.
[273] Edwards (1979), p.302.

funções "contínuas" diferentes em intervalos diferentes. Euler também classificou como função "descontínua" aquela cujo gráfico pode ser traçado com o livre movimento das mãos, não estando sujeita a qualquer "lei de continuidade"[275].

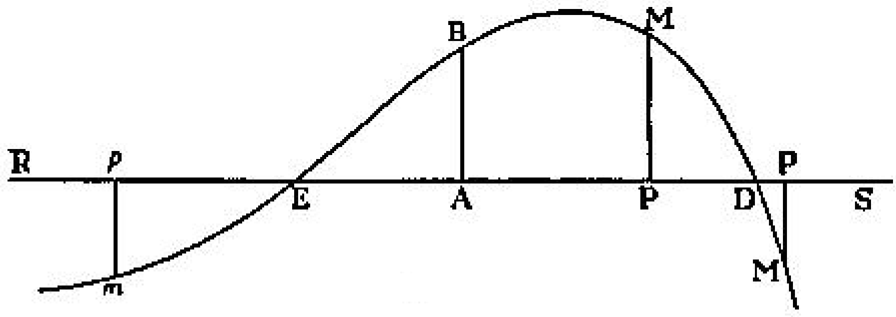
Como podemos ver, recrudesceu diante de um problema concreto da física a necessidade de se "apurar" a noção matemática de continuidade. A bem da verdade, no final do século XVIII, todas as funções tratadas naquela época, essencialmente, eram contínuas do ponto de vista moderno. O conceito de "continuidade" referia-se à constância da expressão analítica da função, mais do que à conectividade do seu gráfico. "Descontinuidade", por sua vez, referia-se tanto às "falhas" em pontos isolados (onde a expressão analítica mudava) quanto à simples ausência de uma expressão analítica (como no caso das curvas à mão livre). Vigia basicamente a concepção de Euler, que referendou essa ideia no segundo volume da *Introductio*, após ter introduzido o sistema cartesiano de referência no plano:

> "Embora várias linhas curvas possam ser descritas pelo movimento mecânico contínuo de um ponto, que apresenta a linha curva inteira aos olhos em um tempo, todavia aqui nós vamos especialmente considerar a origem das linhas curvas das funções, uma vez que isso é mais analítico, mais amplamente acessível e mais apropriado para o cálculo. Assim, qualquer função de x nos dá uma linha, seja reta ou curva, e daí é possível que por sua vez se cubram linhas curvas por funções. Consequentemente, a natureza de qualquer linha curva pode ser expressa por alguma função de x (...) Dessa ideia de linhas curvas segue imediatamente a divisão entre *continua* e *descontínua* ou *mista*. Uma linha curva ***contínua*** é definida de modo que sua natureza é expressa por uma única função definida de x. Mas, se a linha curva é definida de modo que suas partes diferentes BM, MD, DM, etc, são expressas por diferentes funções de x (...) chamamos as curvas deste tipo de ***descontínuas*** ou *mistas e irregulares*, porque não são formadas por qualquer lei constante e são compostas de partes de curvas contínuas diferentes."[276] (grifos nossos)

Euler assim ilustrou[277] o exemplo de "descontinuidade" descrito acima:

---

[274] Fraser (1988), p.325.
[275] Edwards (1979), p.302.
[276] Euler (1948) *apud* Bottazzini (1986), p.25.
[277] A figura tal como se apresenta aqui foi extraída do tomo segundo da *Introductio,* p.10.



Isto é, no sentido de Euler, continuidade significava invariabilidade, imutabilidade da lei, da equação que determina a função sobre todo o domínio de valores da variável independente, enquanto descontinuidade da função significava uma mudança da lei analítica, uma existência de leis diferentes em dois ou mais intervalos desse domínio.[278] Youschkevitch exemplifica: para Euler, dois ramos conjugados de uma hipérbole constituíam uma curva contínua. Essa propriedade principal das linhas contínuas seguia diretamente da sua concepção de continuidade, que também poderia ser expressa de outra forma: qualquer parte pequena de uma linha contínua (função) determina unicamente essa linha como um todo.[279]

Essa classificação das curvas permaneceu padrão por um longo período e era ainda encontrada no início do século dezenove – até mesmo em Ampère, como veremos.

Louis Arbogast (1759-1803), por sua vez, distinguiu "descontinuidade" de "descontiguidade". Em 1787 a Academia de São Petersburgo ofereceu um prêmio para quem melhor respondesse à seguinte questão:

> "Se as funções arbitrárias que são obtidas pela integração de uma equação em três ou mais variáveis representam quaisquer curvas ou superfícies, sejam algébricas ou transcendentais, sejam mecânicas, descontínuas, ou produzidas pelo livre movimento das mãos; ou se tais funções incluem somente curvas contínuas representadas por uma equação algébrica ou transcendental."[280]

Num oportuno reforço ao que já foi mais acima tratado, Grattan-Guinness assinala que a fraseologia da questão denuncia bem o estado caótico da teoria das funções naquele

[278] Youschkevitch (1976), p.64.
[279] *Idem*, p.68.
[280] Edwards (1979), p.303.

tempo; uma coleção de termos extraídos de diversas fontes: da mecânica, da geometria, da álgebra, e do ramo ainda um tanto incoerente conhecido como "análise".[281]

Na resposta em que venceu o concurso, Arbogast escreveu:

> "A lei de continuidade consiste em a quantidade não poder passar de um estado para outro sem que passe por todos os estados intermediários que estão sujeitos à mesma lei. Funções algébricas são vistas como contínuas porque os diferentes valores dessas funções dependem da mesma maneira dos valores da variável; e, supondo que a variável aumenta continuamente, a função receberá variação correspondente; mas não passará de um valor a outro sem passar por todos os valores intermediários. Logo, a ordenada *y* de uma curva algébrica, quando a abscissa *x* varia, não pode passar bruscamente de um valor a outro; não pode haver um salto de uma ordenada à outra quando a diferença entre elas é uma quantidade determinável; mas todos os valores sucessivos de *y* devem estar ligados por uma e a mesma lei que faz as extremidades dessas ordenadas comporem uma curva regular e contínua."[282] (grifos nossos)

Ainda segundo Arbogast, essa "continuidade" poderia ser destruída de duas maneiras:

> "**1.** A função pode mudar sua forma, isto é, a lei pela qual a função depende da variável pode mudar subitamente. Uma curva formada pela reunião de muitas porções de curvas diferentes é deste tipo (...) Não é nem necessário que a função *y* tivesse que ser expressa por uma equação para um certo intervalo da variável; ela pode continuamente mudar sua forma, e a linha que representa isso, ao invés de ser uma reunião de curvas regulares, pode ser tal que para cada um dos seus pontos se tenha uma curva diferente; isto é, ela pode ser inteiramente irregular e não seguir qualquer lei para qualquer intervalo, ainda que pequeno. Seria esta uma curva traçada ao acaso pelo livre movimento das mãos. Esses tipos de curvas não podem ser representadas por uma nem por muitas equações algébricas ou transcendentes.
> **2.** A lei de continuidade é novamente rompida quando as partes diferentes de uma curva não estão unidas umas às outras (...) Chamamos as curvas desse tipo de curvas descontíguas, porque nem todas as suas partes são contíguas."[283] (grifos nossos)

---

[281] Grattan-Guinness (1980), p.103.
[282] Arbogast *apud* Edwards (1979), p.303
[283] Arbogast *apud* Edwards (1979), p.303/4

Schubring assinala, entretanto, no tocante à aproximação – festejada, na apreciação de alguns historiadores[284] – do significado de "descontiguidade" em Arbogast com o significado hodierno de "descontinuidade", que

> "as reflexões de Arbogast acerca do significado de *contínua*, *descontínua* e *descontígua* ainda se referem a curvas, e que funções, para ele, eram apenas de importância secundária para representar partes particulares de uma curva."[285] (grifos do autor)

Ele ressalta que, com Arbogast, assim como com muitos matemáticos contemporâneos, o conceito *loi de continuité* ocorre em duplo significado: como expressão analítica (fórmula) de uma curva ou duma parte desta, e como o conteúdo conceitual da propriedade de continuidade da função.[286] Ele adverte que não se pode avançar no estudo da conceituação de continuidade antes de ser clarificada a relação entre esses dois significados. O abandono da epistemologia prevalecente mediante a adoção de uma visão algébrico-analítica dos objetos matemáticos teria conferido – finaliza o historiador – um status mais fundamental às funções do que às curvas que elas representam.[287]

Grattan-Guinness, por sua vez, aduz que o caráter geométrico da definição de Arbogast é claro, assim como a sua justificativa. Esse movimento em direção à geometria teria sido, na opinião do historiador, um importante passo intermediário no progresso da análise matemática, sendo possível enxergar isso no trabalho de Fourier.[288] A opinião desse historiador provavelmente se sustenta – assim cremos – numa visão do progresso da análise começando com motivações e aspectos mecânicos, passando intermediariamente pela visão geométrica, depois pela tentativa de fundamentação algébrica, até atingir a "maturidade" mediante a aritmetização. E suas considerações apontam para o crucial papel de Fourier nesse progresso.

Edwards corrobora esta argumentação, e assinala que veio exatamente de Fourier, na primeira década do século dezenove, <u>o argumento decisivo para a necessidade de se considerar funções "descontínuas" na análise matemática</u>.[289]

Fourier nasceu em 1768 em Auxerre e ficou órfão aos nove anos de idade, tendo sido um exemplo de pessoa de origem humilde que progrediu mediante as oportunidades

---

[284] Schubring (2005), p.26, menciona Edwards (1979), Grabiner (1981) e Bottazzini (1986).
[285] *idem*, p.26/27.
[286] *idem*, p.27.
[287] *idem*, p.27.
[288] Grattan-Guinness (1980), p.104.

oferecidas pela Revolução Francesa. Ele ambicionava a carreira de ensino e pesquisa, e até conseguiu uma oportunidade de exercer muito brevemente o magistério na *École Polytechnique*, mas seu brilhantismo pessoal acabou chamando a atenção do Imperador, levando Fourier a exercer também uma série de outros papéis importantes para o regime napoleônico, a saber, membro da delegação científica na campanha do Egito, secretário perpétuo do *Institut d'Egypte*, e *Préfet* do fronteiriço departamento de Isère. É fácil deduzir que tal ligação estreita com Napoleão obviamente viria a causar dissabores em sua vida quando da queda do imperador.

A sua "Teoria Analítica do Calor" foi publicada em 1822, mas muito de seu conteúdo já havia sido apresentado em dezembro de 1807 para a Academia de Ciências de Paris. Neste trabalho, Fourier desenvolve numa teoria geral compreensiva o método de séries trigonométricas que Euler e Bernoulli aplicaram em casos especiais isolados em seus trabalhos sobre a corda vibrante meio século antes.

O detalhe novo é que Fourier sustentava que <u>qualquer</u> função, não importasse quão "caprichosamente" definida no intervalo $(-\pi, \pi)$, poderia ser representada neste intervalo por

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \, sen\, nx \qquad (*)$$

onde os a's e b's são números reais apropriados.

Sabendo que seno e cosseno são funções periódicas com período 2π , segue que qualquer função representada por uma série trigonométrica é também periódica com período 2π. Então não é preciso escolher o intervalo $(-\pi, \pi)$; com efeito, qualquer intervalo $(c, c + \pi)$ de comprimento 2π terá sido bem escolhido.

Entretanto, os membros presentes à sessão da Academia se mostraram muito céticos quanto às razões de Fourier. Assim, o trabalho foi julgado e rejeitado por Lagrange, Laplace, Lacroix e Monge. Mas Fourier foi encorajado a desenvolver suas ideias mais cuidadosamente, e ele assim o fez, até submetê-las novamente à Academia francesa quando esta ofereceu um grande prêmio (1811-1812) pelo melhor trabalho sobre o problema da propagação do calor. Embora tivesse ganhado o prêmio, as críticas por falhas no rigor não permitiram que o trabalho fosse publicado. Somente em 1822, dois anos

[289] Edwards (1979), p.307.

depois de tornar secretário da Academia francesa, Fourier conseguiu publicar sua obra na forma original.

Fourier já havia em 1811 generalizado as fórmulas dos coeficientes que levam o seu nome: assumindo-se que a série (*) possa ser integrada termo a termo de $-\pi$ a π, se uma função Φ(x) pode ser representada por uma série trigonométrica (*), então os coeficientes nesta série são dados por:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\ x\ \cos nxdx \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi\ x\ sen\, nxdx \qquad ,\ n \geq 0$$

Ele observou que, para poder calcular tais coeficientes na série de Fourier de uma função Φ(x), bastava que a região sob

$$y = \Phi(x)\ sen\ nx \tag{**}$$

tivesse uma área (para cada n) que pudesse ser interpretada como o valor da integral

$$\int_0^{\pi}\Phi(x)\, sen\, nx\, dx$$

Não seria necessário que (**) fosse “contínua” e, portanto, tivesse uma integral que pudesse ser calculada por antidiferenciação.

Além disso, ele observou que, ainda que Φ(x) fosse “contínua” em $[0,\pi]$, mas com $\Phi(\pi) \neq 0$, então a função estendida para a qual sua série de Fourier converge (presumivelmente) na reta real inteira necessariamente seria “descontínua” (no caso, descontígua) nos pontos x que fossem múltiplos ímpares de π, pois tal função estendida seria ímpar com período 2π.

Consequentemente – completa Edwards – a introdução das técnicas das séries de Fourier essencialmente forçou a consideração das funções descontínuas em pé de igualdade com as contínuas, e levaram ao desenvolvimento da teoria da integração das funções descontínuas por matemáticos da envergadura de Cauchy e Riemann.

Há que se registrar, todavia, que Fourier trabalhava com a definição de “descontinuidade” corrente no século dezoito (descontinuidade da forma analítica). Suas funções – assim como as de todos naquela época – eram na pior das hipóteses “suaves por partes”, com apenas um número finito de descontiguidades em cada intervalo finito.

Não é difícil perceber, destarte, que uma definição satisfatória do conceito de continuidade era efetivamente uma lacuna a ser preenchida na análise. Por exemplo, em nenhum momento na sua *Théorie*, Lagrange definiu o que seria uma curva contínua (muito menos o que seria uma função contínua). A princípio, poderíamos deduzir que sua ideia de continuidade – do mesmo modo que Fourier – seria a mesma que predominava no século dezoito, ou seja, como uma propriedade global de funções (e curvas).

Entretanto, Bottazzini questiona acerca de quais propriedades de uma curva (ou função) seguiriam dessa continuidade, de acordo com Lagrange. Tendo Lagrange afirmado que a curva será necessariamente contínua a partir da origem – destaca o historiador – assim prossegue:

> "Por conseguinte, ela se aproximará pouco a pouco do eixo antes de cortá-lo e se aproximará, por consequência, de uma quantidade menor do que qualquer quantidade dada, de sorte que poderemos sempre encontrar uma abscissa *i* correspondente a uma ordenada menor que uma quantidade dada, e então qualquer valor menor que *i* corresponderá também às ordenadas menores que a quantidade dada".[290]

Lagrange não estaria se referindo à imagem trivial de curva contínua como vista na geometria elementar nem ao conceito global de continuidade relacionada a definição de uma função como uma simples expressão analítica. Ele estaria usando, segundo o mencionado autor, um argumento local surpreendentemente "moderno", correspondente ao verdadeiramente moderno conceito aritmético de continuidade de uma curva ou, de forma equivalente, de uma função na vizinhança de um ponto.

Muito embora projetada num caso muito particular, a ideia implícita no raciocínio de Lagrange seria bem diferente daquelas de seus contemporâneos e de seus seguidores imediatos (incluindo Bolzano e Cauchy). Quando pensou em continuidade, ao invés de considerar pequenas variações da variável independente e correspondentes pequenas variações no valor da função, como Cauchy o fez, Lagrange seguiu outro caminho. Para Bottazzini, seu argumento poderia ser traduzido em simbolismo moderno da seguinte maneira: "seja $f(i) = iP$ (ou, de forma equivalente, iQ, iR) uma função contínua na vizinhança da origem, tal que $f(0) = 0$. Então, para um dado $\varepsilon > 0$, existe $i > 0$, tal que $|f(i)| < \varepsilon$ e para $|j| < i$, $|f(j)| < \varepsilon$ ".[291]

---

[290] Lagrange (1797) *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XXIV
[291] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.XXV.

De acordo com Lagrange – prossegue Bottazzini – tal resultado era uma consequência do conceito de continuidade. O conceito moderno aparece quando essa propriedade é formulada em termos gerais e tomada como uma definição.[292]

E chegamos finalmente a Cauchy. Focalizaremos agora o período em que Cauchy lecionou na *École Polytechnique* antes da publicação do *Cours d'analyse*, sumariando a narrativa dos fatos, conforme Schubring[293].

Em 1815/16, Cauchy não usou o conceito de continuidade em suas aulas, até que os trabalhos escolares fossem abruptamente interrompidos – como vimos – em face do momento político que agitava a França. Recordemos que, após retornarem em 1816 mesmo, ele e Ampère propuseram um novo programa de ensino, que continha, pela primeira vez, um tópico "sobre a distinção entre as funções contínuas e as descontínuas".

Segundo Bottazzini, Cauchy aparentemente introduziu uma definição de função contínua primeiramente em 1817 em suas aulas para os alunos primeiranistas da *École Polytechnique*.[294] Não foram encontradas, todavia, notas sobre as suas aulas naqueles anos, obrigando então os historiadores a colher indicações nos registros individuais de Cauchy. Segundo tais registros, ele teria nas aulas enfatizado enormemente o método de limites, com teoremas sobre limites de somas, produtos e potências, além daquele que diz que o limite de uma função contínua de várias variáveis é uma função contínua dos limites dessas variáveis. Schubring esclarece:

> "Evidentemente, <u>Cauchy, de forma otimista, pensou que poderia estabelecer fundamentos seguros para a análise com a ajuda de apenas um princípio universal: continuidade</u>. E este era o princípio de continuidade de Leibniz em sua forma "metafísica", que afirmava que leis se mantêm válidas quando da transição do finito para o infinito. Este era também o princípio de continuidade que l'Huilier transferiu ao limite *lim* das variáveis em seu premiado memorial: o princípio de que a variável possui *depois* da passagem ao limite as mesmas propriedades que possuía *antes* (...) O famoso e controverso teorema de Cauchy, de que a soma de uma série convergente de funções contínuas é ela própria uma função contínua, se ajusta tranquilamente ao <u>esforço entusiástico de derivar teoremas de um simples princípio epistemológico declarado como que possuindo uma validade geral</u>."[295] (grifos em itálico: do autor; sublinhado: nossos)

---

[292] *Ibid.*, p.XXV
[293] Schubring (2005), p.458 e ss.
[294] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXX
[295] Schubring (2005), p.458.

A fim de auxiliar a compreensão sobre a utilização do conceito de continuidade nas aulas de Cauchy pré-*Cours d'analyse*, o historiador menciona um manuscrito de Ampère denominado *Ancien cours d'analyse algébrique*, recentemente descoberto. Tal manuscrito abrangeria a época compreendida entre 1816 e 1820/21, quando drásticas reduções no tamanho e no conteúdo da análise algébrica começaram a ser introduzidos.[296]

Schubring aduz que a definição de continuidade dada por Ampère no manuscrito corresponde muito precisamente à que Cauchy anotou em seus registros em março de 1817. Diz ainda que a definição de função de Ampère está ainda vinculada completamente ao conceito de curva geométrica e é completamente geral:

> "Existe ainda outra distinção de funções. Elas podem ser divididas em funções contínuas e descontínuas (...) Suponha eixos retangulares e façamos com que a abscissa cresça ou decresça de maneira contínua. Se a ordenada cresce ou decresce da mesma maneira, a função assim como a curva será contínua, se não, será descontínua. Observe que uma curva é descontínua quando sua descrição não está sujeita a uma e a mesma lei. Quando, por exemplo, é composta por diversos arcos de círculos ou parábolas que se unem"[297]

É interessante notar que a definição não era apenas totalmente global e não algébrica; ela explica a continuidade de uma função mediante uma não explicada continuidade de variáveis. Além disso, a explicação final de descontinuidade aponta para o sentido tradicional euleriano.

Um pouco além, ainda no manuscrito, Ampère insere uma segunda definição de continuidade, muito parecida – a diferença estaria na ausência de intervalos-limites e na formulação global – com uma daquelas que Cauchy usou no *Cours d'analyse*, quando menciona os *infiniment petits*:

> "Diz-se que uma função é contínua quando para cada incremento infinitamente pequeno da variável *y* corresponde a um também infinitamente pequeno incremento na função".[298]

Ora, isto vai ao encontro da tese que defende a existência de uma estratégia coordenada por Cauchy e Ampère no outono de 1817 para responder à pressão pela volta

[296] *Ibid.*, p.460.
[297] Ampère (*Nachlass*) *apud* Schubring (2005), p.460.
[298] Ampère (*Nachlass*) *apud* Schubring (2005), p.461.

do uso dos *infiniment petits* na *École Polytechnique*,[299] e torna claro que a definição de continuidade mudou entre o começo de 1817 e 1821, e que a menção aos *infiniment petits* foi uma resposta ao contexto da *École*.

Pouco antes de publicar o *Cours d'analyse*, já no final de 1820, Cauchy externou suas ideias sobre continuidade, ao comentar um tratado de geometria projetiva apresentado por Poncelet. Cauchy advertiu contra a aplicação indiscriminada do "princípio de continuidade" – que Poncelet usava sistematicamente no tratado – a todo tipo de questões em geometria e análise. Para Cauchy, "confiando-se em demasia nesse princípio, alguém pode ocasionalmente cair num erro óbvio"[300]. No ponto de vista de Cauchy, fazia-se mister, naquele instante, uma <u>explícita definição de continuidade de uma função, de tal modo que ela eliminasse toda ambiguidade ou recurso à intuição geométrica</u>.

A rigor, Cauchy não estava confortável com a ideia de continuidade segundo Euler, que predominava até então. E não era o único. Conforme vimos mais acima, a noção de continuidade segundo Euler deve ter sido posta em dúvida pelos que aceitaram as ideias de Fourier[301]. Como de fato, a série de Fourier de uma função "descontínua" *f(x)* = | *x* | (convenientemente "continuada" de forma ininterrupta além de [– π, π]) – como já vimos – fornece a "expressão analítica"

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)d\alpha+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\ \cos nx\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha+sen\, nx\int_{-\pi}^{\pi} f(\alpha) sen\, n\alpha d\alpha$$

de modo que a função *f(x)*, que antes era tomada como "descontínua" na acepção de Euler, teria de ser classificada como "contínua", na mesma acepção, o que naturalmente desqualifica tal classificação, e a torna imprópria.

Cauchy, mais tarde (1844), apresentaria outros exemplos, tais como

$$f(x)=\begin{cases} x & , x\geq 0 \\ -x & , x<0 \end{cases} = \sqrt{x^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{x^2dt}{t^2+x^2}$$

onde "uma mudança simples de notação frequentemente basta para transformar uma função 'contínua' em 'descontínua' e vice-versa"[302]. Ou seja, a menos que aceitemos que a

---

[299] Schubring (2005), p.461.
[300] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXXI.
[301] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.164.
[302] Cauchy *apud* Lützen, *in* Jahnke (2003), p.165.

continuidade de uma função dependa do modo que a mesma foi escrita, é lícito dizermos que o conceito na acepção de Euler é ambíguo. Fourier, por sua vez, não foi tão longe, mas Cauchy foi. De onde então teria Cauchy tirado sua definição alternativa?

A bem da verdade, quando iniciou suas pesquisas em análise – mais especificamente, nas suas investigações sobre integrais definidas – Cauchy já descobrira a importância do que ele chamaria posteriormente de continuidade para a validação do teorema fundamental do cálculo $\int_{b'}^{b''} \varphi'(z)dz = \varphi(b'') - \varphi(b')$.

Assim diz Cauchy em 1814:

> "Entretanto, este teorema só é verdadeiro no caso em que a função [φ] **cresce ou decresce de modo contínuo entre dois dados limites**. Mas se a função repentinamente salta de um valor a outro quando a variável cresce insensivelmente entre os limites de integração, então a diferença entre esses dois valores deve ser subtraída da integral definida como usualmente é retirada, e cada um dos saltos que a função pode dar necessita duma correção da mesma natureza"[303]. (grifos nossos)

Mais à frente, nesse mesmo trabalho, ele assim formalizaria: se $\boldsymbol{Z}$ é um ponto onde φ dá um salto, então, "...denotando por ζ uma quantidade muito pequena, tem-se:

$$\varphi\,(Z+\zeta) - \varphi\,(Z-\zeta) = \Delta\,,$$

de modo que o valor ordinário da integral, isto é, $\varphi\,(b'') - \varphi\,(b')$, deve ser reduzido da quantidade Δ ...."[304]

Deste modo, Cauchy enxergou cedo que, mais do que o conceito de continuidade de Euler, a propriedade de ter ou não "saltos" era de importância direta quando se provavam teoremas sobre funções (mormente sobre integrabilidade), e ele formulou uma expressão para tal "salto" que antecipou sua definição posterior de continuidade.

Com efeito, segundo Freudenthal, não deve haver dúvida de que a abordagem acima foi o ponto de partida de Cauchy para a continuidade.[305]

E é do conceito de continuidade no *Cours d'analyse* de Cauchy que trataremos no próximo tópico.

---

303 Cauchy (1814) *apud* Lützen, *in* Jahnke (2003), p.165.
304 Cauchy (1814) *apud* Lützen, *in* Jahnke (2003), p.166.
305 Freudenthal (1971), p.380.

3.2.2 – O conceito de continuidade no *Cours d'analyse*

Examinando-se a estrutura do *Cours d'analyse*, é possível perceber que o teorema binomial e suas expansões representam a viga mestra da primeira parte do livro, dedicada à análise real. Desse ponto de vista, podemos entender melhor o papel dos conceitos que Cauchy introduziu ao longo do *Cours*, em especial o de continuidade de uma função. Segundo Bottazzini, este conceito é essencial, e relaciona-se com alguns dos principais resultados que Cauchy apresentou em toda sua obra matemática[306].

É preciso sublinhar, outrossim, que a reviravolta conceitual definitiva – para o próprio Cauchy, inclusive – em termos da conceituação de continuidade se deu, efetivamente, apenas a partir do *Cours d'analyse*. Até então, como vimos mais acima, havia ainda em Cauchy e Ampère um processo no sentido de "descontaminar" o conceito de acepções como a euleriana, e de desviá-la de um olhar intuitivo.

E ainda, apesar de já termos falado a respeito, nunca é demais lembrar que Cauchy define continuidade de uma função num intuito eminentemente prático. A historiadora Sinaceur é precisa ao escrever acerca dessa definição:

> "...esta definição não é estabelecida por si mesma, isto é, pelo rigor formal, mas como referência destinada a facilitar a tarefa de 'reconhecer entre quais limites uma função dada da variável *x* é contínua em relação a esta variável'; ela não fornece o conceito primitivo, indispensável para uma demonstração formal da continuidade de uma função *f* qualquer, mas deve antes alimentar a intuição adquirida pelo manejo das funções usuais e ajudar a determinar praticamente seus intervalos de continuidade" [307]

Cabe recordar o que Cauchy disse na *Introduction*, quando enfatizou explicitamente a conexão entre infinitesimais e continuidade. Bottazzini ressalta ainda que Cauchy chegou a utilizar ambas as definições (a primeira e a segunda) num trabalho posterior, em 1847, na definição de continuidade para funções de uma quantidade geométrica (isto é, funções complexas de uma variável complexa)[308].

Segundo Cauchy, a continuidade de funções elementares familiares é facilmente verificável (em intervalos não contendo pontos singulares correspondendo a zero no

[306] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXX
[307] Sinaceur (1973) *apud* Boniface (2002), p.17.
[308] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXXII

denominador). Por exemplo, a função *sen x* é contínua em todo intervalo porque “o valor numérico de $sen\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ e, consequentemente, o da diferença

$$sen(x+\alpha)-sen\,x=2sen\left(\frac{1}{2}\alpha\right)\cos\left(x+\frac{1}{2}\alpha\right)$$

decresce indefinidamente com o de α ”.[309]

Observando detidamente a terceira definição de continuidade de Cauchy, vemos que ele traz a definição de continuidade de uma função na vizinhança de um ponto. Aparentemente, ele troca a ordem – de pontos para intervalos – de acordo com a qual continuidade é introduzida hoje nos livros. É importante sublinhar aqui que, em nenhum instante, segundo Bottazzini, Cauchy definirá continuidade em um ponto. Para o historiador, isso é perfeitamente natural numa visão matemática pré-weierstrassiana[310].

Já quando Cauchy define função descontínua, ele não apenas destaca este conceito do tradicional vínculo com uma expressão analítica, mas também da discriminação entre descontiguidade e descontinuidade.[311] Desta forma, fica a descontinuidade definida para um conceito de função completamente geral.

Lützen, por sua vez, identifica já em Lagrange e descrição da propriedade correspondente à continuidade em um ponto, diferentemente de Cauchy. E concorda que este teria enxergado descontinuidade ocorrendo em um ponto; continuidade, entretanto, ocorreria num intervalo – possivelmente a vizinhança de um ponto. Deste modo, destaca o historiador, Cauchy reteve algo da ideia intuitiva e filosófica de continuidade (realmente, não está claro qual propriedade se mantém numa função que é contínua em um ponto), enquanto dava a ela uma caracterização que se mostrou crucial em várias de suas provas posteriores.[312]

Para Schubring, Cauchy traz diferentes definições em sucessão e, como não são idênticas no significado, suas interpretações ficam ainda mais difíceis.[313] A primeira definição, por sinal, corresponderia em estrutura à versão “matemática” da lei de continuidade de Leibniz. Para esse historiador, ainda, há uma inovação na precondição de que todos os valores da função no intervalo em questão são únicos e finitos.[314]

---

[309] Edwards (1979), p.311.
[310] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXXII
[311] Schubring (2005), p.462.
[312] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.166.
[313] Schubring (2005), p.461.
[314] *Idem*, p.461.

Quando Cauchy se refere a todo *x* "entre tais limites", assinala Grattan-Guinness, a definição parece seguir a tradição de definir continuidade globalmente, e os exemplos que ele fornece de funções contínuas são todos expressões algébricas. Porém, a condição da definição é local, descrevendo o comportamento de $f(x)$ em torno de *x*, uma situação que Cauchy descreve separadamente em seu texto[315]. Novamente, a expressão "acréscimo da função" – em vez de variação do seu valor – exemplifica o hábito de concentrar-se em funções monotonicamente crescentes e o de identificar uma função com seu valor. Entretanto – ele finaliza – Cauchy menciona valores absolutos ("numéricos") logo antes da citação acima; e ele é claro – diferentemente de muitos de seus antecessores do século anterior – no sentido de que a função deve ser de uma variável.

Vale assinalar também que, quando Cauchy introduz a derivabilidade no *Résumé*, ele a condiciona à continuidade da função. Entretanto, nos capítulos subsequentes, ele simplesmente assume a continuidade da função (ou silencia a respeito), ainda que derivasse a mesma certo número de vezes. Isto mostra como Cauchy ainda estava apegado à ideia setecentista de um "domínio seguro" no qual a análise era mais ou menos universalmente válida[316]. Com Euler e d'Alembert, esse domínio consistia de todas as funções; com Cauchy, consistia das funções contínuas.

Mergulhemos agora numa questão que foi muito debatida nas últimas décadas sobre o que Cauchy exatamente queria dizer por 'continuidade': continuidade no sentido pontual, continuidade uniforme, ou alguma outra coisa.

Vimos acima que ele trouxe duas (ou três, para alguns autores) definições, a primeira sem e a segunda com menção a infinitesimais. A primeira especifica com grande clareza um valor para a variável *x* e estabelece que $f(x + \alpha) - f(x)$ tende a zero com α. Isto soa de forma suspeita como continuidade pontual. A segunda formulação não fala de um valor específico de *x*, mas do incremento da "função". Podemos interpretar isso como continuidade uniforme. Para Lützen, com efeito, a definição parece ambígua[317].

Podemos citar um exemplo, a saber: quando Cauchy não diz que uma função como $\frac{a}{x}$ é contínua no intervalo $(0,\infty)$ – o que seria falso, se "continuidade" significasse "continuidade uniforme". Em vez disso, ele diz que essa função é contínua numa

---

[315] Grattan-Guinness (1980), p.111.
[316] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.169.
[317] *Idem*, p.166.

vizinhança de cada ponto do intervalo – o que é, de fato, verdadeiro, ainda que pensemos em continuidade uniforme.

Além do mais, ele usou a ideia de continuidade uniforme em duas de suas importantes provas. A primeira destas provas é a da existência da integral de uma função contínua. Aqui transcrevemos algumas partes dela, no bojo dos comentários de Dugac:

> "Seja f uma função real contínua num intervalo $[x_0, X]$ e seja uma sequência (x_i), com $1 \leq i \leq n-1$, de elementos deste intervalo tais que $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < X$. Ele introduz a soma
>
> $$S = (x_1 - x_0)\, f(x_0) + (x_2 - x_1)\, f(x_1) + ... + (X - x_{n-1})\, f(x_{n-1})$$
>
> E determina: 'a quantidade S dependerá evidentemente, 1º) do número n de elementos nos quais teremos dividido a diferença $X - x_0$; 2º) dos próprios valores desses elementos e, por consequência, do modo de divisão adotado.' Para demonstrar que o limite de S, quando o "passo" da subdivisão $h = \sup_{0 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1})$ tende a zero, não dependendo da subdivisão escolhida, Cauchy utiliza [*Résumé*, pp.123-125] implicitamente a continuidade uniforme da função f sobre $[x_0, X]$."[318]

Com efeito, esclarece Dugac, para demonstrar que a diferença das somas S e S', correspondentes a duas subdivisões quaisquer, tendem a zero, quando h tende a zero, Cauchy raciocina como se, para qualquer $\varepsilon > 0$, podemos encontrar um $\eta = \eta(\varepsilon)$ tal que, para todo (x, x'), com x e $x' \in [x_0, X]$ e $|x - x'| \leq \eta$, temos $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$.[319]

Isto é verdadeiro, pois uma função real contínua sobre um intervalo [a,b], sendo a,b $\in$ **R**, é uniformemente contínua sobre [a,b]. Cauchy demonstrou, assim, que $\lim_{h \to 0} S$ existe, se f é contínua sobre $[x_0, X]$, "limite que dependerá unicamente da função $f(x)$ e dos valores extremos x_0, X atribuídos à variável x. Este limite é que chamamos de integral definida".[320]

Como segundo exemplo, também é possível enxergar, de forma contundente, a continuidade uniforme na prova do seguinte teorema :

> **1º Teorema. Se as variáveis *x, y, z, ...* têm as quantidades fixas e determinadas *X, Y, Z, ...* como seus respectivos limites e a função *f(x,y,z,...)* é contínua com respeito a cada uma de suas variáveis *x, y, z, ...* na vizinhança do**

[318] Dugac, *in* Dieudonné (1978), p.354.
[319] *Idem*, p.355.
[320] Cauchy *apud* Dugac, in Dieudonné (1978), p.355.

> **sistema particular de valores $x = X$, $y = Y$, $z = Z$, ... , então $f(x,y,z,...)$ tem $f(X,Y,Z,...)$ como seu limite.**[321]

Para Cauchy a prova é simples. Ele observa que o valor numérico de

$f(X+\alpha, Y, Z, ...) - f(X, Y, Z, ...)$, assim como o de

$f(X+\alpha, Y+\beta, Z, ...) - f(X+\alpha, Y, Z, ...)$, assim como o de

$f(X+\alpha, Y+\beta, Z+\gamma, ...) - f(X+\alpha, Y+\beta, Z, ...)$, etc, etc,

"decrescem indefinidamente com o valor das variáveis α, β, γ " e portanto também o valor numérico de $f(X+\alpha, Y+\beta, Z+\gamma, ...) - f(X, Y, Z, ...)$.

Para essa prova, há que se assumir certa uniformidade na "pequenez" de, por exemplo, $f(X, Y, Z+\gamma, ...) - f(X, Y, Z, ...)$, com respeito às variáveis *X, Y, Z,* .... Isto fez com que Giusti sustentasse[322] que Cauchy definira continuidade uniforme.

Freudenthal aduz que Cauchy teria "inventado nossa noção de continuidade"[323], tomando como idênticos os conceitos moderno e o de Cauchy. Segundo Schubring, a historiadora Grabiner também teria defendido tal ponto de vista.[324] O equívoco dessa visão residiria no fato de que, se Cauchy idealizasse o moderno conceito de continuidade, o teorema da continuidade de uma função de várias variáveis seria inadequado, porque requer continuidade uniforme.

Freudenthal afirma, entretanto, que "embora tenha sido o primeiro a definir continuidade, parece que Cauchy nunca provou a continuidade de qualquer função particular (...) O ponto mais fraco na reforma do cálculo de Cauchy é que ele nunca compreendeu a importância da continuidade uniforme".[325]

Laugwitz discorda. Para ele, qualquer um que leia a página seguinte à da definição de continuidade no *Cours d'analyse* [1821, p.44], observará que Cauchy provou cuidadosamente a continuidade de funções elementares. Além disso, Cauchy nunca definiu continuidade no ponto. Seu conceito, embora não literalmente consonante com a continuidade uniforme "*epsilontic*", tinha conseqüências idênticas. Talvez ele não tivesse visto necessidade da continuidade no ponto. Assim como a grande maioria dos

---

[321] Cauchy (1992), p.39.
[322] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.167.
[323] Freudenthal *apud* Schubring (2005), p.464.
[324] Schubring (2005), p.464.
[325] Freudenthal (1971), p.137.

historiadores do cálculo – finaliza Laugwitz – Freudenthal não teria entendido Cauchy, confundindo as noções com aquelas que pertencem a um contexto conceitual posterior.[326]

Grabiner, por sua vez, assinala que havia duas importantes lacunas no trabalho de Cauchy, por volta de 1825: a primeira é ele não ter apreciado a distinção entre continuidade e continuidade uniforme; a segunda, embora tenha implicitamente assumido várias formas do axioma de completude dos números reais, é ele não ter entendido plenamente a natureza da completude ou as propriedades topológicas relacionadas de conjuntos de números reais ou de pontos no espaço. A confusão entre as propriedades pontuais e uniformes o teria levado ao falso teorema e à sua respectiva "prova" – comentada mais acima – de que uma série infinita de funções contínuas seria contínua.[327]

Já Bottazzini traz uma comparação entre a C-continuidade (continuidade no sentido de Cauchy) e aquela que Ampère usava em suas aulas na *École Polytechnique*. Afinal de contas, o próprio Cauchy afirmou na *Introduction* do *Cours d'analyse* que "tirou proveito várias vezes" não apenas das observações de Ampère mas também "dos métodos que ele desenvolve em suas aulas de análise".[328] A concepção de Bottazzini está baseada sobretudo na opinião de que o significado em Ampère teria de concordar essencialmente com o de Cauchy.[329] Exatamente nestes termos era a definição de continuidade de Ampère para uma função de uma variável:

> "Quando se faz crescer ou decrescer por graus insensíveis uma variável independente, a partir de um valor determinado até outro, uma função desta variável cresce ou decresce também por graus insensíveis, de modo que tomando arbitrariamente, dentro do intervalo entre esses dois valores, dois outros valores da variável independente, dos quais a diferença seja tão pequena quanto queiramos, a diferença dos valores correspondentes da função se torna também tão pequena quanto queiramos, dizemos que a função é contínua neste mesmo intervalo"[330]

Com efeito, essa formulação corresponde inquestionavelmente ao que denominamos 'continuidade uniforme'. Não obstante – e diferentemente de Ampère – Cauchy enfatizou claramente que a função teria de ser de uma variável (e limitada) no intervalo considerado.

[326] Laugwitz (1988), p.241.
[327] Grabiner (1981), p.12.
[328] Cauchy (1992), *Introduction*, p.vii / viii.
[329] Schubring (2005), p.465.
[330] Ampère (1824) *apud* Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXXIV.

Ampère foi bem explícito, outrossim, quando exigiu que, para cada par de valores de x em dado intervalo, com uma diferença arbitrariamente pequena entre eles, a correspondente diferença dos valores de $f(x)$ teria de ser arbitrariamente pequena, enquanto que o mesmo não pode ser dito do que foi definido por Cauchy. Não haveria dúvidas – na opinião de Bottazzini – que a linguagem de Cauchy era ambígua[331]. E, ainda, a definição de Ampère parece alimentar com mais evidência a interpretação da definição de continuidade de Cauchy em termos de continuidade uniforme.

Giusti, em 1984, mostrou que os "erros" de Cauchy incluíam não só o teorema da continuidade de uma função de várias variáveis, mas também outros posteriores a ele. Inclusive, Burkhardt, 70 anos antes, em 1914, já havia compilado uma lista de teoremas problemáticos de Cauchy.[332] Segundo Schubring, foi exatamente Giusti que forneceu a interpretação mais apropriada do estilo pessoal de notação de Cauchy.[333] A questão que ele coloca é precisa: o que realmente acontece a x enquanto α está assumindo sucessivamente valores diferentes? A resposta só poderia ser que a variável varia também. Caso contrário, ela perderia seu caráter variável e se transformaria numa constante para a qual nem função nem continuidade seriam relevantes. E porque possui o mesmo status que α, poder-se-ia assim formalizar: "Enquanto a variável assume sucessivamente os valores α_n decrescendo para zero, a outra variável x assumirá valores x_n confinados ao intervalo (a,b) no qual f está definida".[334]

Entretanto, tal interpretação carece de alguma informação acerca da direção tomada pelos valores da sequência x_n. Para testar a continuidade de $f(x)$ no intervalo (a,b), Giusti afirma que é necessário mostrar que a variável dependente $f(x_n + \alpha_n) - f(x_n)$ tem zero como limite.[335] Todavia, isso já é equivalente à continuidade uniforme no intervalo (a,b).

Pode-se ver então, conclui Schubring, que a definição de continuidade de Cauchy está baseada numa dupla passagem ao limite; e particularmente os problemas com tais passagens múltiplas ao limite é que são também tão persistentes no teorema da continuidade.

Finalmente, não podemos falar do conceito de continuidade em Cauchy sem mencionarmos a obra de um contemporâneo, o padre tcheco Bolzano. Alguns historiadores já vêm, há muito tempo, dissertando acerca da semelhança que certos

---

[331] Bottazzini, *in* Cauchy (1992), p.LXXXV.
[332] Schubring (2005), p.464.
[333] *idem*, p.466.
[334] Giusti (1984) *apud* Schubring (2005), p.466.

conceitos (mormente o de continuidade) apresentam nas obras de ambos os matemáticos citados. É certo que não é nosso objetivo aqui tratarmos esmiuçadamente deste assunto, mas não convém que o ignoremos, dado que a análise comparativa contribuirá para aprofundarmos ainda mais a compreensão do conceito propriamente dito, e da novidade trazida por ele. Se não, vejamos.

Houve um debate[336] bem conhecido entre os historiadores Grattan-Guinness e Freudenthal sobre se Cauchy teria plagiado ou não determinados resultados encontrados no livro de Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reele Wurzel der Gleichung liege*, publicado em 1817, em Praga, cidade então pertencente ao antigo Império Austro-Húngaro. Ora, se houve conhecimento prévio da obra de Bolzano por Cauchy a ponto de ter podido plagiá-lo, nada de material foi encontrado. A literatura (ainda) não apresenta prova contundente e inequívoca do suposto plágio. Restam especulações que, embora bem argumentadas, não passam ainda de elucubrações. E estas residem principalmente na semelhança dos conceitos e da abordagem.

Em benefício da dúvida, filiar-nos-emos à interpretação de Bottazzini, o qual assinala firmemente que:

> "Não há evidência de que os trabalhos de Bolzano, publicados nas Atas da Sociedade Boêmia Real de Ciência, tenham sido lidos por Cauchy. Nem encontramos qualquer referência ao matemático de Praga nas obras ou demais papéis de Cauchy. O fato digno de nota de que ideias similares em continuidade e em convergência de séries são encontradas simultaneamente em Bolzano e Cauchy, como vemos, não fornece bases suficientes para falarmos de uma influência direta do primeiro no segundo e menos ainda para a acusação de plágio da parte de Cauchy. Continuidade e convergência de séries eram problemas de grande interesse àquela época, e não seria a primeira vez que dois matemáticos que trabalharam sobre o mesmo problema chegaram a conclusões similares, ambos desconhecendo um ao outro[337]."

Quanto à semelhança dos conceitos, analisemos agora, pois.

Bolzano buscava encontrar uma prova puramente aritmética do teorema fundamental da álgebra no lugar da primeira prova de Gauss (1799), que usava ideias geométricas. Assim como Lagrange considerava desnecessárias as ideias de tempo e

---

[335] Schubring (2005), p.466.
[336] Grattan-Guinness (1970) e Freudenthal (1971).
[337] Bottazzini (1986), p.98.

movimento na matemática, Bolzano tencionava descartar de suas provas toda consideração derivada da intuição espacial. Essa atitude tornou necessária uma definição satisfatória de continuidade. Desta forma, ele acabou estabelecendo conceitos corretos para o cálculo (exceto para a teoria dos números reais), muito embora seu trabalho permanecesse desconhecido por meio século.

Bolzano negava a existência dos números infinitamente pequenos (infinitesimais) e infinitamente grandes. No livro acima mencionado, ele forneceu uma definição de continuidade, a saber: $f(x)$ é contínua num intervalo se para cada x pertencente ao intervalo a diferença $f(x + \omega) - f(x)$ pode ser feita tão pequena quanto desejarmos, tomando ω suficientemente pequeno. Ele também provou, a propósito, que polinômios eram contínuos.[338]

Freudenthal fornece um sumário[339] daquilo que há de conhecido até o momento, na comparação dos conceitos dos dois matemáticos, dentro do escopo que nos interessa:

1. A ideia de continuidade, comum a ambos, foi alcançada por cada um independentemente;
2. O chamado "critério de convergência de Cauchy" foi formulado por cada um deles; é até possível que Cauchy tenha se baseado em Bolzano, mas é facilmente explicável como uma invenção original de Cauchy;
3. O teorema do valor intermediário de uma função contínua era uma proposição mais ou menos óbvia há muito tempo. A ideia de prová-la pode ter chegado a Cauchy quando leu o panfleto de Bolzano – se é que leu. Mas sua prova é diferente da de Bolzano;

Além disso, vale destacar que esta prova de Bolzano-Cauchy do teorema do valor intermediário para funções contínuas requer a "propriedade da sequência monótona limitada" dos números reais, característica que, como dissemos mais acima, denuncia a ausência de um entendimento pleno acerca do sistema dos números reais, mostrando assim uma fraqueza na fundamentação do cálculo de ambos, a qual seria satisfatoriamente suprida nas décadas seguintes, com o recrudescimento do movimento de aritmetização da análise, mediante trabalhos de Dedekind, Cantor, Weierstrass, e outros.

[338] Kline (1972), p.951.
[339] Freudenthal (1971), p.387.

Outra observação ainda cabe sobre esses dois matemáticos do início do século XIX. Embora Bolzano e Cauchy tenham tornado de certo modo mais rigorosas as noções de continuidade e derivada, Cauchy e quase todos os matemáticos de sua época acreditavam que uma função contínua deveria ser diferenciável (exceto evidentemente em pontos isolados tais como $x = 0$ para $y = 1/x$). Kline sustenta que Bolzano, por sua vez, compreendia a distinção entre continuidade e diferenciabilidade.[340] No seu livro *Funktionenlehre*, escrito em 1834, mas só publicado em 1930, ele dá um exemplo de função contínua que não possui derivada finita em nenhum ponto.[341]

Comparando os procedimentos de Bolzano e Cauchy, Lützen enumera algumas diferenças[342]:

- Bolzano não usou infinitesimais em definições ou provas; Cauchy usou.
- A definição de continuidade de Bolzano é mais clara que a de Cauchy e parece mais pontual. Bolzano ainda ressaltou que continuidade não implica continuidade uniforme, mas nunca apreciou completamente a importância da uniformidade.
- Ambos contavam com a completude dos números reais.
- Bolzano teria construído *(vide nota de rodapé 341)* uma função contínua que ele provaria não ser diferenciável num conjunto denso (tal função, de fato, não seria diferenciável em nenhum ponto). Embora Cauchy não tivesse tentado provar o errôneo teorema de que qualquer função contínua pudesse ser diferenciável, ele teria dado a impressão de que o mesmo seria verdadeiro.

O fato mais importante é que as definições de Bolzano e de Cauchy, de continuidade de uma função, se equivaliam. A do "filósofo" Bolzano era mais moderna (embora ele usasse $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\Omega}$ em vez de $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\delta}$) e a sucessão de quantificadores se apresentava correta e clara.[343] Contudo, buscava mais o rigor do que a aplicabilidade. Já a definição do "engenheiro" Cauchy, embora utilizasse a linguagem dos infinitesimais e não tornasse

[340] Kline (1972), p.955.
[341] Uma controvérsia aí surge. Grattan-Guinness assinalou que, em 1821, Cauchy não sabia que continuidade não implicava diferenciabilidade, enquanto Bolzano já sabia isto. Freudenthal rechaçou essas afirmações, aduzindo que não há provas com relação à segunda, e que a primeira seria ridícula, se raciocinarmos à luz do papel exercido pela continuidade no tratado de Cauchy de 1814.[Freudenthal (1971), p.380].
[342] Lützen, *in* Jahnke (2003), p.175/176.
[343] Freudenthal (1971), p.380.

clara a sucessão dos quantificadores na sua formulação, era operacional e abundantemente presente em hipóteses e demonstrações ao longo de sua obra analítica.

Dito tudo isso, e finalizando o capítulo, estamos agora em condições de compreender por que a exposição de Cauchy do conceito de continuidade serve para bem exemplificar quão nova foi a arquitetura da análise de Cauchy.

Afinal de contas, Cauchy fez o conceito de continuidade se firmar como pilar da análise; libertou-o da antiga concepção setecentista, destacando-o do vínculo com a expressão analítica e da discriminação entre descontiguidade e descontinuidade; tornou-o operacional, ao usá-lo em importantes demonstrações e ao determinar os intervalos em que uma determinada função é contínua; e, enfim, estipulou a condição local de sua definição, descrevendo o comportamento de uma função *f(x)* no entorno de *x*.

Embora tivessem sido notados no cálculo de Cauchy argumentos que hoje sabemos falhos, em especial quando ele não distingue entre continuidade e continuidade uniforme, Cauchy teve, segundo Fraser, o mérito de rejeitar o ponto de vista algébrico e de ter feito o cálculo retornar à sua relação original com a curva, onde em sua teoria aritmética a linha foi trocada pelo *continuum* numérico e a curva, pela relação funcional entre números.[344]

Laugwitz defende que:

> "O conceito de continuidade de Cauchy, quando expresso por ε e δ, provou ser frutífero, e se tornou uma base da topologia que, na época de Bourbaki, foi tida como o segundo pilar do universo matemático, depois das estruturas algébricas. Como um todo, seu conceito de continuidade foi bem-sucedido, tanto no ensino como na pesquisa, embora a ideia original estivesse para perecer quando trocada por *epsilontics* "[345]

E Grabiner assinala ainda que,

> "mais tarde, matemáticos estenderam a teoria das funções contínuas de Cauchy. Abel corretamente tratou a continuidade de funções definidas por séries de potências. Weierstrass e sua escola distinguiram – como Cauchy não o fez – entre continuidade pontual e continuidade uniforme. **Tudo isso se tornou possível porque Cauchy isolou a crucial definição de função contínua, associou-a a um método válido e frutífero de prova, e ensinou isso tudo a uma geração de matemáticos através do seu *Cours d'analyse***." [346] (grifos nossos)

[344] Fraser (1988), p.331/332.
[345] Laugwitz (1988), p.199.
[346] Grabiner (1981), p.97.

Após Cauchy – prossegue a historiadora – os fundamentos se tornaram uma parte essencial da análise e os livros e o ensino de análise de Cauchy foram largamente responsáveis por isso.[347]

Schubring, por sua vez, adverte que não é apropriado considerar o trabalho de Cauchy como a conclusão da clarificação do conceito de continuidade.[348]

Com efeito, podemos finalizar o capítulo exatamente com esta conclusão, isto é, com a ideia em mente de que – embora tendo sido um bom exemplo das novidades que o *Cours d'analyse* trouxe para a análise do século XIX – o desenvolvimento do conceito de continuidade não seguiu somente uma lógica sequencial, um progresso linear. Na verdade, foi sendo trabalhado dentro de um complexo de tendências diferentes e por vezes até parcialmente contraditórias. E tal conceito continuou sendo desenvolvido nas décadas subsequentes a Cauchy, até atingir a formulação que conhecemos hoje em dia.

---

[347] *Ibid.*, p.15.
[348] Schubring (2005), p.27

CONCLUSÃO

Em qualquer trabalho de História da Matemática existe a inclinação viciosa de se analisar determinado conceito de acordo com as tendências do pensamento atual, e segundo o cabedal matemático que já possuímos. Por este tipo de anacronismo, chega-se a conclusões equivocadas, pois dissociadas do "espírito" da época em que o conceito foi discutido, definido e utilizado. Em nosso trabalho, procuramos deixar de lado, o máximo possível, esta tentação, por exemplo, quando rejeitamos a ideia equivocadamente disseminada de que o rigor era um aspecto desprezado pelos matemáticos do século XVIII.

Além disso, há a tendência – também distorcida – de se interpretar o desenvolvimento dos conceitos matemáticos no contexto puramente intramatemático, desconsiderando os fatos sociais, econômicos e políticos como importantes inspiradores, inibidores ou impulsionadores do recrudescimento de certos pontos de vista; ou da condução profissional de determinados matemáticos; ou mesmo da influência de um pensamento hegemônico sobre o trabalho dos profissionais de ciência da época. Tivemos a oportunidade de confrontar tal tendência, por exemplo, ao citarmos a Revolução Francesa e a Restauração como fatos políticos e ideológicos cruciais para a carreira de Cauchy e para a ascensão e queda do método analítico na *École Polytechnique*.

Em derradeiro, há o perigo do emprego de fontes secundárias eventualmente não muito confiáveis, nas quais a inobservância de fatos e de aspectos relevantes leva a interpretações gravemente errôneas, mas que só são detectadas no decorrer da pesquisa, e ainda assim com muita acuidade na leitura comparada das fontes. Estas, tivemos o cuidado de corrigi-las no decorrer da pesquisa.

Acrescente-se a tudo isso o fato de que – mais uma vez destacamos – um mesmo termo pode possuir significados distintos de acordo com a obra ou a época estudada. Por exemplo, alguns autores distinguem a C-continuidade (continuidade no sentido de Cauchy) da Euler-continuidade (continuidade no sentido de Euler). Quando não há tais distinções, torna-se difícil compreender o alcance do termo em seu contexto.

Após tantos obstáculos, ainda há que se considerar as interpretações de cada um dos historiadores da matemática acerca do conteúdo de textos matemáticos e das possíveis intenções de seus autores. Encontramos visões algumas vezes próximas, outras vezes complementares, e ainda, em alguns momentos, divergentes. Com efeito, estamos tratando de interpretações, o que de fato enriquece, mas dificulta sobremaneira a pesquisa.

Tivemos a preocupação, assim, de não omitir as abordagens que não se mostravam totalmente coincidentes, para que não perdêssemos detalhes importantes das análises dos historiadores que tomamos por referências.

É certo que sabemos das nossas limitações, tanto em metodologia como na capacidade de síntese e compilação. Do mesmo modo, temos consciência da limitação da bibliografia à nossa disposição – que está longe de exaurir completamente o tema; pelo contrário, há muito material que não foi por nós alcançado; e ainda há um caminho extenso no sentido de se investigar alguns aspectos de muitos dos assuntos aqui tratados.

Contudo, cremos firmemente que o resultado final foi positivo. No término da leitura, estamos seguros de que o leitor pôde experimentar a sensação de uma viagem não muito cansativa, mas bastante esclarecedora, através de uma época de grandes realizações na História da Análise. Se ele conseguiu também avaliar com clareza a importância do *Cours d'analyse* para o desenvolvimento ulterior da análise, e, além disso, se ele pôde perceber a importância do ensino como motivação para tal desenvolvimento, daí podemos finalmente concluir que este trabalho alcançou sua precípua finalidade.

REFERÊNCIAS

BARBIN, Évelyne; BÉNARD, Dominique (orgs.). *Histoire et enseignement des mathématiques: rigueurs, erreurs, raisonnements.* Institut National de Recherche Pédagogique (IREM), Université Blaise-Pascal de Clermont-Ferrand, 2007.

BELHOSTE, Bruno. *Cauchy, 1789-1857: un mathématicien légitimiste au XIXe siécle.* Paris: Belin, 1985. (Série: Savant, une époque).

————. *Augustin-Louis Cauchy: a biography.* Translated by Frank Ragland. New York: Springer-Verlag, 1991.

BONIFACE, Jacqueline. *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse.* Paris: Ellipses, 2002. (Collection: Comprendre les mathématiques par les textes historiques).

BOS, Henk**.** Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition. In: GRATTAN-GUINNESS, Ivor (ed.). *From the calculus to set theory, 1630-1910: an introductory history.* London: Duckworth, 1980.

BOTTAZZINI, Umberto**.** Geometrical rigour and 'modern analysis'. An introduction to Cauchy's Cours d'analyse. In: CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique; 1re partie – Analyse algébrique.* Bologna: Clueb, 1992. (Instrumenta rationis. 7, 1990).

————. *The higher calculus: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass.* Translated by Warren Van Egmond. New York: Springer-Verlag, 1986.

BOURBAKI, Nicolas. [Henri Cartan; Claude Chevalley; Jean Coulomb; Jean Delsarte; Jean Dieudonné; Charles Ehresmann; René de Possel; Szolem Mandelbrojt; André Weil]. *Elements of the history of mathematics.* Translated from the French by John Meldrum. Berlin; New York: Springer, 1994

CAUCHY, Augustin-Louis. *Cours d'analyse de l'École Polytechnique; 1re partie – Analyse algébrique.* Bologna: Clueb, 1992. (Instrumenta rationis 7, 1990).

————. *Résumé des leçons données a l'École Polytechnique sur le calcul infinitésimal; Tome premier.* Paris: Gauthier-Villars, 1899. (*Oeuvres complètes, IIe série,Tome IV).*

————. *Leçons sur le calcul différentiel.* Paris: Gauthier-Villars, 1899. (*Oeuvres complètes, IIe série, Tome IV).*

DELAMBRE, Jean Baptiste Joseph. *Rapport historique sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789.* Paris: De l'Imprimerie impériale, 1810.

DHOMBRES, Jean**.** L'École polytechnique et ses historiens. In: FOURCY, Ambroise. *Histoire de l'École Polytechnique.* Paris: Belin, c1987.

DUGAC, Pierre**.** Fondements de l'analyse. In: DIEUDONNÉ, Jean Alexandre (org.). *Abrégé d'histoire des mathématiques: 1700-1900.* Paris: Hermann, 1978.

EDWARDS, Charles Henry. *The historical development of the calculus.* New York: Springer-Verlag, 1979.

EULER, Leonhard. *Introduction à l'analyse infinitésimal.* Trad. du latin en français par J.B.Labey. Paris: Chez Barrois, l'an IV-V, 1796-97.

FAUVEL, John; GRAY, Jeremy (eds.). *The history of mathematics: a reader.* Basingstoke: Macmillan Education, 1987.

FOURCY, Ambroise. *Histoire de l'École Polytechnique.* Paris: Belin, c1987.

FRASER, Craig**.** The calculus as algebraic analysis: some observations on Mathematical Analysis in the 18th century. *Archive for the History of Exact Sciences.* V.39(4), pp. 317-332, 1988.

FREUDENTHAL, Hans**.** Did Cauchy plagiarize Bolzano?. *Archive for the History of Exact Sciences.* V.7, pp. 375-392, 1971.

GILLISPIE, Charles. *Lazare Carnot savant et sa contribuition à la théorie de l'infini mathématique.* Paris: J.Vrin, 1979.

GOLDSTEIN, Catherine; GRAY, Jeremy; RITTER, Jim (orgs.). *L'Europe mathématique: histoires, mythes, identités.* Paris: Editions de la Maison des sciences de l'homme, 1996.

GRABINER, Judith V. *The origins of Cauchy's rigorous calculus.* Cambridge, Mass.: MIT, 1981.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor**.** Bolzano, Cauchy and the "new analysis" of the early nineteen century. *Archive for the History of Exact Sciences.* V.6, pp. 372-400, 1970.

————. *Convolution in French mathematics, 1800-1840: from the calculus and mechanics to mathematical analysis and mathematical physics.* Boston: Birkhäuser, 1990. (Science networks historical studies v. 2-4).

————. (ed.). *From the calculus to set theory, 1630-1910: an introductory history.* London: Duckworth, 1980.

JAHNKE, Hans Niels**.** Algebraic analysis in the 18th century. In: ———— (ed.). *A history of analysis.* Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.

JARNÍK, Vojtech. *Bolzano and the foundations of mathematical analysis.* Prague: Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, 1981.

KLINE, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times.* New York: Oxford University Press, 1972.

LACROIX, Sylvestre François. *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Tome premier.* Paris, 1797. (disponível em http://gallica.bnf.fr, acesso em 15/04/2009**).**

LAGRANGE, Joseph Louis. *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits ou d'évanouissans, de limites ou de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.* Paris: Impr. de la République, prairal an V [1797]. (Pre-1801 Imprint Collection (Library of Congress)).

LAUGWITZ, Detlef**.** Definite values of infinite sums: aspects of the foundations of infinitesimal analysis around 1820. *Archive for the History of Exact Sciences.* V.39(3), pp. 197-245, 1988.

LÜTZEN, Jesper. The foundation of analysis in the 19th century. In: JAHNKE, Hans Niels (ed.). *A history of analysis.* Providence, RI: American Mathematical Society, [London]: London Mathematical Society, 2003.

SCHUBRING, Gert. *Conflicts between generalization, rigor and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany.* New York: Springer, 2005. (Sources and studies in the history of mathematics and physical sciences).

————. A Framework for Comparing Transmission Processes of Mathematics to the Americas. *Revista Brasileira de História da Matemática.* V.2, nº3, pp. 45-63, 2002.

————. Mathematics and institutional contexts. In: GOLDSTEIN, Catherine; GRAY, Jeremy; RITTER, Jim (orgs.). *L'Europe mathématique: histoires, mythes, identités.* Paris: Editions de la Maison des sciences de l'homme, 1996.

YOUSCHKEVITCH, Adolf**.** Lazare Carnot et le concours de l'Académie de Berlin de 1786 sur la théorie de l'infini mathématique. In: GILLISPIE, Charles. *Lazare Carnot savant et sa contribuition à la théorie de l'infini mathématique.* Paris: J.Vrin, 1979.

————. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for the History of Exact Sciences.* V.16, pp. 37-85, 1976.