Daniela Santa Inês Cunha

Investigações Geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de Matemática

Mestrado em Ensino de Matemática

UFRJ

RIO DE JANEIRO
2009

Investigações Geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de Matemática

Daniela Santa Inês Cunha

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob orientação da Profª. Drª. Claudia Coelho de Segadas Vianna.

UFRJ
RIO DE JANEIRO
2009

Cunha, Daniela Santa Inês.
C972i Investigações geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de matemática / Daniela Santa Inês Cunha. — Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.
98f.. : il.; 30cm.
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2009.
Orientador: Claudia Coelho Segadas Vianna..
Referências: f.95-8.
1. Matemática- Estudo e ensino-Tese. 2. Professores de Matemática-Treinamento- Tese I.Vianna, Claudia Segadas. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro.Instituto de Matemática. III.Título.

Investigações Geométricas: desde a formação do professor até a sala de aula de Matemática

Daniela Santa Inês Cunha

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Professora Claudia Coelho de Segadas Vianna
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

Professora Lílian Nasser
SENAI / CETIQT

Ana Teresa de Carvalho Correa de Oliveira
PEMAT / UFRJ

Maria de Fátima Lins Barbosa de Paiva Almeida
UERJ

Rio de Janeiro
17 de setembro de 2009

Dedico este trabalho ao meu pai, Maurício,
por ter sempre me incentivado
a vôos mais altos
dos que eu acreditava alcançar.

Agradecimentos

À minha orientadora, Claudia Segadas, pelo respeito, compromisso, dedicação e competência durante todo o processo de desenvolvimento deste trabalho.

Às professoras da banca, Ana Teresa, Lílian e Maria de Fátima, pelas leituras cuidadosas, sugestões e correções.

Ao professor Victor Giraldo, pelo exemplo na profissão e pelo apoio em tudo que esteve ao seu alcance.

Aos professores observados, pela disponibilidade em participar desta pesquisa.

À família que me orgulho de ter: minha gata, mãe e amiga; meu preto, pai dedicado; Leo, pela nossa história; Lú, pelas conversas e Lore sempre solícita aos meus pedidos.

À minha avó, Mercedes, pelo carinho declarado e pela referência profissional.

A todos os colegas de mestrado, em especial: ao Rubem e à Ana Cristina, pelo apoio e amizade nos momentos mais difíceis. À Mylena e Fábio Lennon, pelas nossas conversas. À Maria José, pela sua doçura, amizade e disposição em contribuir com a qualidade deste trabalho.

A Pablo e Ulisses, pelo caminho compartilhado. A Pablo, pela alegria dividida e pela amizade construída.

Ao meu amigo e, muitas vezes, meu professor, Ricardo Aurélio, companheiro de graduação, de profissão, de farras e de estudos.

À Mari, pelo presente que é tê-la como amiga.

À “tia” Mônica, pela disponibilidade e apoio profissional nas correções deste trabalho.

À Samantha, pela grande ajuda com a formatação das referências.

Resumo

Esta pesquisa pretendeu analisar de que maneira professores de Matemática trabalham com a visualização de figuras espaciais através da utilização de uma metodologia de investigação e resolução de problemas. Além disso, buscou-se detectar quais as dificuldades e desafios que são impostos aos professores no desenvolvimento de tarefas privilegiando tais metodologias e de que maneira as estratégias desenvolvidas e os conteúdos trabalhados seriam transferidos para a sala de aula destes professores. Para responder tais questionamentos foi utilizado um questionário de sondagem e foram aplicadas cinco atividades de visualização de figuras espaciais com um grupo de trinta professores em um curso de especialização em Ensino de Matemática, inseridos na disciplina "Tendências em Educação Matemática". Na aplicação das atividades, os professores participaram ativamente e, em sua maioria, alcançaram os resultados esperados. Após a aplicação das tarefas com os professores da especialização, foram discutidos textos referentes ao uso de investigação e resolução de problemas no ensino e, mais especificamente, o uso destas metodologias no contexto da geometria. Em seguida, observamos dois dos trinta professores participantes da pesquisa aplicando algumas das cinco atividades com seus alunos em sala de aula e ao final das observações realizamos uma entrevista com estes professores. Na transferência destes conhecimentos para a sala de aula de Matemática, os dois professores participantes conduziram as investigações de maneira produtiva, apesar de nem todos os estudantes terem alcançado os resultados esperados.

Palavras-chave: Investigações Matemáticas; visualização de figuras espaciais; formação de professores.

Abstract

The aim of this research is to investigate how mathematic teachers work with visualization of spatial figures through the use of a methodology of investigation and problem solving. In addiction, it tried to detect what difficulties and challenges are imposed to teachers in developing tasks using such methodologies and also, how such strategies and contents would be transferred to their classrooms. A questionnaire was applied and five activities were implemented using visualization of spatial figures with a group of thirty teachers in a specialization course in Mathematics Teaching, embedded in the discipline “Trends in Mathematics Education”. The teachers participated actively and most of them succeeded in the tasks. Some papers about investigation and problem solving were discussed, as well as the use of these methodologies in Geometry. Afterwards, we observed two of the thirty teachers while they were applying some of the five activities with their students in classroom and, at the end, we interviewed these teachers. These two teachers conducted investigations in their classrooms in a productive way, although not all of their students achieved the expected results.

Key words: Mathematics’ investigations; spatial figures visualization; teachers’ professional development.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

Introdução

A Matemática como ciência é formada por axiomas e definições sobre os quais se podem enunciar proposições e demonstrar teoremas. Estes, por sua vez, possibilitam a elaboração e a comprovação de novos teoremas, formando, assim, uma estrutura lógico-formal, que tanto contribui para uma série de aplicações na vida prática, como têm valor em si mesmo enquanto processo de pensamento.

Na mesma direção, em se tratando do ensino desta disciplina, também é importante evidenciar suas inúmeras aplicações no cotidiano, sem, contudo, deixar de ressaltar a riqueza do pensamento matemático e a necessidade de desenvolvê-lo não só para uso na Matemática, como, também, para auxiliar na compreensão das outras ciências, inclusive as humanas. Decidir entre uma compra à vista ou a prazo, não se deixar enganar por falsos descontos do tipo "leve 4 e pague 3" em supermercados, compreender gráficos de consumo em uma conta de luz ou estabelecer conclusões utilizando idéias lógico-dedutivas são habilidades matemáticas imprescindíveis a qualquer cidadão.

No entanto, é sabido que, apesar da importância indiscutível dos conhecimentos matemáticos para a constituição do indivíduo e sua participação na sociedade em que vive, a formação básica do professor de Matemática não contempla todas as habilidades necessárias para um ensino de qualidade. Diversos estudos neste sentido, nacionais e internacionais, mostram que os professores apresentam deficiências tanto na "forma", quanto no "conteúdo" matemático a ser ensinado. Moreira e David (2004), por exemplo, realizaram uma pesquisa com formandos em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e constataram que 80% dos formandos da amostra não conhecem um argumento com o qual possam justificar, para alunos da escola básica, a validade da propriedade comutativa do produto de números naturais. Em outro estudo realizado também com licenciandos em Matemática, Ball (1988) salienta que os futuros professores estão aptos a fornecer respostas corretas e buscar por "regras" particulares, mas não possuem habilidades para validar suas respostas e/ou explicar conceitos.

Estas pesquisas evidenciam a necessidade de uma metodologia que destaque a importância da justificação e validação dos resultados encontrados em Matemática. Concordando com os resultados obtidos com tais estudos, acreditamos que um ensino que privilegie métodos de investigação em resolução de problemas pode clarificar os estudantes da necessidade de argumentação e legitimação de suas respostas (sejam estes estudantes alunos da educação básica, professores ou futuros professores em cursos de formação), possibilitando assim um aprendizado completo, rico em significado e capaz de desenvolver a capacidade de argumentação na Matemática, influenciando indiretamente o raciocínio em todas as outras áreas do conhecimento.

Desta forma, esta pesquisa busca contribuir para a valorização dos métodos de pensamento matemático, a partir de uma apreciação acerca dos conhecimentos matemáticos construídos pelos professores desta disciplina, assim como da sua atuação em sala de aula para a disseminação destes saberes. Seu intuito precípuo é procurar dar suporte à formação do professor, no sentido de contemplar alguns tópicos relevantes ao ensino da Matemática que foram deixados de lado na formação inicial.

Neste sentido, o primeiro momento da pesquisa consiste na aplicação de atividades de caráter investigativo com professores de Matemática, participantes de um curso de especialização na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Em um segundo momento, acontece a observação de dois destes professores em sala de aula na condução da realização destas mesmas atividades com seus alunos.

Pretende-se analisar, em ambas as situações, de que maneira os professores lidam com esse tipo de tarefa e quais os desafios, dificuldades e limitações que encontram ao realizar atividades de investigação com seus alunos na sala de aula. A observação da aplicação das atividades na sala de aula dos professores é o que dará legitimidade à nossa pesquisa, uma vez que, em concordância com Tardif (2003), acreditamos que:

> ...se os pesquisadores universitários querem estudar os saberes profissionais da área do ensino, devem sair de seus gabinetes na universidade, largar seus computadores, largar seus livros e os livros escritos por seus colegas que definem a natureza do ensino, os grandes valores educativos ou as leis da aprendizagem, e ir diretamente aos lugares onde os profissionais do ensino trabalham, para ver como eles pensam e falam, como trabalham na sala de aula, como transformam programas escolares para torná-los efetivos... (pg. 258)

As atividades propostas aos professores e por estes aos seus alunos se inserem no contexto da geometria espacial, mais particularmente no trabalho com a visualização e com o auxílio do material concreto no desenvolvimento de habilidades espaciais. A seqüência das tarefas foi organizada em ordem crescente de dificuldade, de maneira que envolvessem estratégias mais simples de resolução até o desenvolvimento e a elaboração de conjecturas e generalizações. Desta forma, parte-se da resolução de problemas um pouco mais diretos, com enunciados mais objetivos e estratégias de resolução mais imediatas, e caminha-se para o trabalho com exercícios mais abertos, permitindo a realização de testes para a validação dos resultados obtidos, valorizando, assim, os processos de pensamento matemático envolvidos durante todo o desenrolar das atividades.

Além das tarefas a serem resolvidas, também foram selecionados para a leitura dos professores textos voltados à resolução de problemas, à investigação no ensino da geometria e aos dilemas relacionados a este ensino nas escolas. O texto referente à resolução de problemas de Onuchic (1999) foi discutido com os professores da especialização antes da aplicação das atividades e os textos que abordam o trabalho de investigação e o ensino da geometria foram analisados após a realização das mesmas. Esta ordenação na leitura dos textos se explica por acreditarmos que a vivência do professor com as atividades de investigação legitima as idéias encontradas por eles através da leitura dos textos.

A escolha por conteúdos de geometria deveu-se ao fato do estudo desta sub-área da Matemática ser negligenciado do currículo escolar ou visto de maneira insatisfatória. Kaleff (1993) afirma que a geometria é apresentada através da manipulação de objetos concretos representando as formas geométricas básicas seguida de atividades sistemáticas de aplicação de definições e propriedades sem que haja uma etapa intermediária que relacione tais abordagens e justifique as aplicações destas propriedades.

As atividades selecionadas e adaptadas trabalham mais especificamente com a geometria espacial e, neste caso, o uso do material concreto propicia a realização de um trabalho investigativo promovido pela manipulação dos objetos, além de representar fielmente o espaço tridimensional aproximando o estudo de situações do mundo real.

Com base nestas proposições, esperamos, com esta pesquisa, contribuir com a formação dos professores de Matemática, mais especificamente, auxiliá-los no desenvolvimento de habilidades espaciais no contexto da geometria espacial. Como conseqüência deste trabalho, esperamos também dar subsídios aos professores para a compreensão do espaço em que vivemos, destacando o trabalho com material concreto na facilitação desta aprendizagem. Em um âmbito ainda maior, ambicionamos também suscitar nestes profissionais uma reflexão sobre seu próprio papel e também o de seu aluno em uma sala de aula, assim como estimulá-lo na utilização de estratégias diversificadas e eficazes que verdadeiramente possibilitem uma aprendizagem significativa dos conteúdos trabalhados.

No primeiro capítulo, esclareceremos em que consiste a investigação no ensino da Matemática, quais os processos envolvidos na realização de uma investigação, a visão da sala de aula como um ambiente de investigação, o papel do professor e o papel do aluno na realização de atividades dessa natureza. Além disso, faremos uma revisão teórica das contribuições mais atuais de pesquisas com o uso de atividades de investigação na sala de aula de Matemática.

No segundo capítulo são apontadas referências de como trabalhar com a investigação dentro do ensino da geometria, o papel da geometria e da geometria espacial no currículo da matemática escolar. Será também evidenciado, neste capítulo, o papel da visualização no ensino da Matemática, o uso do material concreto como uma ferramenta auxiliar do ensino e a necessidade de passagem do concreto ao raciocínio abstrato.

O terceiro capítulo aponta as estratégias metodológicas que serão utilizadas na realização da pesquisa, bem como esclarece as atividades e os textos a serem utilizados e os detalhes de cada etapa da pesquisa. Este capítulo também evidencia os critérios que serão utilizados para a avaliação e validação dos resultados obtidos.

O quarto capítulo refere-se à análise e discussão das atividades de investigação aplicadas e desenvolvidas com os professores no curso de especialização de Matemática. Neste tópico constam observações sobre as diferentes maneiras que os professores apresentam suas soluções e justificativas, bem como as dificuldades vivenciadas pelos mesmos na execução das tarefas.

Os dois capítulos finais são dedicados às analises específicas de dois professores selecionados com a aplicação das atividades em suas salas de aula. Para estes capítulos são consideradas observações que vão desde a preparação dos professores para o trabalho investigativo com os alunos, incluindo o desenvolvimento das atividades na sala de aula destes professores e a correção das tarefas (em sala com a participação dos alunos), finalizando com a descrição das entrevistas realizadas individualmente com os dois professores.

Por fim são feitas as considerações finais sobre todo o trabalho e são dadas dicas e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 1. Investigações Matemáticas

1.1 A necessidade de investigar

A preocupação de pesquisadores da área de educação matemática com o desenvolvimento de metodologias que promovam uma aprendizagem significativa por parte dos estudantes tem sido uma constante. George Polya, professor e matemático, autor de diversos artigos e livros direcionados à Matemática e seu ensino, já se preocupava com o tipo de estratégia e metodologia que um professor dessa disciplina poderia recorrer para auxiliá-lo na aprendizagem dos seus alunos. Em seu livro "*How to Solve it*", traduzido para o português como *"A Arte de Resolver Problemas"* (POLYA, 1977), o autor evidencia as motivações e os procedimentos de resolução de problemas que servem como um conjunto de estratégias para auxiliar os estudantes a desenvolverem a sua própria capacidade de resolvê-los. Em 1987, em seu artigo intitulado *"Dez mandamentos para professores"*, Polya enfatiza que através da resolução de um problema o professor pode dar aos seus alunos (pelo menos algumas vezes) a oportunidade de descobrir as coisas por si mesmos, inclusive a possibilidade de encontrarem os seus próprios erros.

Desde então, vem sendo valorizado o ensino de Matemática através de uma metodologia de resolução de problemas. Muitos recursos neste sentido têm sido desenvolvidos visando ao trabalho em sala de aula, na forma de coleções de problemas, listas de estratégias, sugestões de atividades e orientações para avaliar o desempenho em resolução de problemas. Onuchic (1999) ressalta que, na década de 1980, já havia uma consciência por parte dos estudiosos da necessidade de valorização do processo da resolução do problema, em substituição a uma preocupação exclusivista com a sua solução. Deste modo, o trabalho investigativo e a atividade de descoberta assumem relevância no processo de ensino, cujo foco passa a ser a ação do aluno durante a aquisição da aprendizagem.

Atualmente, acredita-se na idéia de que "saber Matemática" corresponde a "fazer Matemática" (NCTM, 1991 apud ABRANTES, 1999, p. 1) e muitas pesquisas vêm sendo realizadas, dentro e fora da sala de aula, na tentativa de uma apropriação mais realista deste discurso. Oliveira (1998) realizou um estudo qualitativo acompanhando duas professoras de diferentes trajetórias profissionais na realização de atividades de investigação na sala de aula, estabelecendo como objetivos evidenciar o papel do professor, o tipo de conhecimento matemático exigido dele e os desafios que lhe são impostos nesse tipo de tarefa. As duas professoras que participaram da pesquisa consideraram as atividades de investigação como uma experiência enriquecedora para as suas práticas e para o trabalho dos alunos. Reconhecendo as potencialidades promovidas pelas atividades de investigação, as professoras refletiram sobre a possibilidade de tornar freqüente o uso das tarefas, mas vêem limites nesta estratégia, por questões de cumprimento do programa escolar e pelo tempo que precisa ser dedicado para a aplicação de tarefas de natureza investigativa.

Brocardo (2001) desenvolveu um projeto com a aplicação de treze tarefas de investigação em uma turma do 8º ano durante o período de um ano letivo. O enfoque da sua pesquisa se deu na maneira como os estudantes lidam com as atividades de investigação. Segundo a autora, no início do trabalho os alunos encararam o processo de coleta de dados como sendo o objetivo final da tarefa. Porém, com a realização de novas tarefas, os alunos foram se familiarizando com a investigação como um todo e alcançaram uma boa compreensão deste tipo de trabalho.

1.2 Os processos de uma investigação Matemática

A fim de situar o professor e o aluno na realização de atividades investigativas, faz-se necessário, inicialmente, clarificar o conceito de investigação. Enquanto o termo investigar, no seu sentido literal, significa procurar por coisas que não se conhece, a investigação, na Matemática, assume uma acepção muito particular. Ponte e Matos (1992 apud PONTE 2007, p.420) afirmam que investigações matemáticas contemplam processos de pensamento complexos e exigem do estudante criatividade e um alto nível de envolvimento. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), a investigação matemática estrutura-se em quatro momentos principais. O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a sua exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. Finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho realizado. Os autores afirmam, ainda, que estes momentos podem acontecer simultaneamente e cada um deles pode incluir diversas atividades, resumidas no quadro indicado na tabela 1.

Exploração e formulação de questões	Reconhecer uma situação problemática Explorar a situação problemática Formular questões
Conjecturas	Organizar dados Formular conjecturas e fazer afirmações sobre uma conjectura
Teste e reformulação	Realizar testes Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	Justificar uma conjectura Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Tabela 1- Momentos na realização de uma investigação (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006, p. 21)

Os processos envolvidos em uma investigação matemática se assemelham muito com as demandas exigidas na resolução de um problema. Pode-se dizer que para resolver problemas matemáticos é necessário passar pelas etapas descritas na tabela acima. Problemas que possibilitam maneiras distintas para se chegar a uma mesma solução, ou, até mesmo, problemas que não têm solução abrem espaço para a realização de atividades de investigação. Para nós, o que determina o fato de um problema se transformar em um trabalho investigativo é a maneira como o professor lida com este tipo de trabalho, a maneira como conduz a atividade e o tipo de interferência que ele realiza no desenvolvimento da atividade com seus alunos. Mais detalhes sobre a condução das aulas serão dados mais adiante.

É importante frisar que não estamos aqui interessados em defender o uso de atividades de investigação em detrimento das tarefas de resolução de problemas, na medida em que as duas abordagens apresentam idéias bem semelhantes, quando a preocupação do professor concentra-se em todo o processo de desenvolvimento das tarefas e quando sua atenção está voltada para as ações de seus alunos. Estamos preocupados, aqui, em valorizar, sobretudo, os processos envolvidos em atividades de resolução de problemas e acreditamos que estes processos devem se aproximar dos processos envolvidos em atividades de investigação. O enfoque se dá na resolução de problemas como uma metodologia de ensino, privilegiando todas as etapas intermediárias antes de atingir a solução, considerando este caminho como um processo genuinamente investigativo e representante da essência do que chamamos de conhecimento matemático.

A epistemologia do processo de pensamento matemático aproxima-se bastante das ações envolvidas em uma atividade de investigação. A natureza do "fazer" matemático fundamenta-se, todo o tempo, em processos investigativos. Saber matemática perpassa por vivenciar o processo de construção deste conhecimento, para que se possa perceber a necessidade de definir objetos, fazer afirmações, formular conjecturas, testá-las e demonstrá-las. Experimentar a rotina da construção do conhecimento matemático torna-o intuitivo, natural, permitindo, a quem experimenta, compreender as razões de sua construção.

1.3 A sala de aula como um ambiente de investigação

Considerando necessária a atividade de investigação na construção de aprendizagens matemáticas significativas e entendendo os processos matemáticos envolvidos nesta modalidade de atividade, faz-se mister criar na sala de aula um ambiente propício para a realização deste tipo de trabalho. Para Alro e Skovsmose (2006), a educação matemática tradicional se enquadra no paradigma do exercício. Nesta condição, o livro didático é a principal referência para a prática de sala de aula do professor. Segundo estes autores, a aula é dividida entre as apresentações de algumas idéias e técnicas matemáticas, seguidas pela resolução, por parte dos alunos, de uma série de exercícios do livro-texto selecionados pelo professor. O paradigma do exercício, conforme afirmam Alro e Skovsmove, baseia-se na premissa central de que existe uma, e somente uma, resposta correta.

Concordando com os autores, acreditamos que o paradigma do exercício pode ser contraposto a uma abordagem de investigação, sendo possível mover-se entre os diversos ambientes de aprendizagem resumidos no seguinte quadro:

	Paradigma do exercício	Cenários para investigação
Referências à Matemática pura	(1)	(2)
Referências a Semi-realidades	(3)	(4)
Referências ao mundo real	(5)	(6)

Tabela 2 – Ambientes de Aprendizagem (Alro e Skovsmove, 2006, p. 57)

O ambiente do tipo (1) pode ser caracterizado por exercícios puramente matemáticos, os quais poderíamos exemplificar da seguinte forma: “Resolva (3a + 5b) – (2a × 4b)”.

O tipo (2) poderia ser formado pelo exemplo acima, mas com alguma relação geométrica justificando o processo algébrico.

Problemas que simulam uma realidade "imaginária" se encaixam no tipo (3) e podem ser exemplificados pela seguinte questão: "Um supermercado A vende um quilo de tomate por R$ 0,98, enquanto no supermercado B, 1,2 kg de tomate custam R$ 1,10. Qual supermercado vende mais barato?".

Apesar de o problema do tipo (3) tratar de tomates, preços e compras, não existe uma pesquisa que anteceda o exercício baseada em supermercados e preços reais. Neste sentido, trata-se de uma semi-realidade. Ainda neste exemplo, se os alunos fossem convidados a fazer várias pesquisas de preço para uma mesma quantidade de tomates para saber até que ponto seria mais vantajoso comprar no supermercado B ao invés de comprar no supermercado A, estaríamos criando um cenário de investigação do tipo (4).

Já um ambiente do tipo (5) poderia ser representado por um gráfico que relacionasse as diferentes porcentagens de votos de um mesmo candidato político em diferentes regiões de um determinado país. E finalmente, poderíamos trabalhar com o tipo (6) na realização de um projeto envolvendo os alunos em situações da vida real. Por exemplo: um projeto de reciclagem do lixo da escola poderia levar os alunos a planejar as quantidades de diferentes materiais recicláveis necessárias para reaproveitar certa quantidade X do mesmo produto. Neste caso, além de o aluno aplicar conhecimento matemático no seu dia-a-dia, estaria adquirindo consciência para a importância da reciclagem para o futuro da sua cidade e do seu país. Estes exemplos foram adaptados do artigo de Skovsmove (2000), *Cenários para investigação*. Concordando com o autor, acreditamos que a transição entre esses ambientes estimula atitude e reflexão nos alunos, levando-os a pensar na Matemática de uma maneira mais crítica.

É possível mover-se do paradigma do exercício, com referências à Matemática pura, para cenários de investigação com referências ao mundo real. Mas, para que isso ocorra, é necessário que haja uma boa relação entre o professor e os alunos para que possam caminhar juntos pelos diversos ambientes de aprendizagem, discutindo, planejando e reavaliando acordos e caminhos a todo momento.

Para que aconteçam as mudanças de ambientes de aprendizagem é importante ter um professor disposto a fazer e refazer acordos didáticos com seus alunos e preparado para lidar com situações não rotineiras que, inevitavelmente, irão surgir no meio do caminho. Além disso, é necessário esclarecer os papéis que serão desempenhados pelo aluno e pelo professor neste novo ambiente de trabalho.

1.4 O aluno no ambiente de investigação

Em se tratando do ensino da Matemática, tendo em vista as idiossincrasias do conhecimento desta disciplina, é importante pensar em como criar um ambiente na sala de aula que favoreça a inclusão de atividades de investigação como parte do processo ensino-aprendizagem. Para tanto, é preciso pensar no papel do aluno na realização desse tipo de tarefa. Onuchic (1999) afirma que os estudantes deveriam ser expostos a numerosas e variadas experiências inter-relacionadas que os encorajassem a valorizar a iniciativa em matemática, a desenvolver hábitos matemáticos da mente e a entender e apreciar a função da Matemática nos afazeres humanos. Ainda, segundo a autora, os alunos deveriam ser levados a explorar, a adivinhar e, até mesmo, a cometer erros, de modo que, através dessas atividades, ganhassem confiança em sua capacidade de resolver problemas simples ou complexos; que lessem, escrevessem, e discutissem matemática; que conjecturassem, tentassem e construíssem argumentos sobre a validade de uma conjectura.

Alguns estudos privilegiando a realização de atividades de investigação evidenciam resultados frutíferos na aprendizagem. Pesquisas, como as de Brocardo (2001), mostram que os alunos se sentem bastante motivados com esse tipo de tarefa e apresentam progressos no raciocínio matemático extremamente compensadores. Segundo a autora, apesar das dúvidas e dificuldades sentidas, os alunos da turma não só aprenderam Matemática como experienciaram a atividade matemática e desenvolveram idéias sobre processos característicos desta ciência. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) também afirmam que esse tipo de atividade capacita o educando a resolver problemas de Matemática e do dia-a-dia, já que os conduz à busca de estratégias diversificadas para suplantar obstáculos e erros cometidos, levando ao constante questionamento de suas idéias e ao levantamento de novas questões, até atingir soluções.

Segurado (1997) realizou um estudo baseado na aplicação de tarefas de investigação em uma turma do 6° ano, com o objetivo de detectar concepções dos alunos a respeito da Matemática e sua aprendizagem. Após o trabalho com uma série de atividades investigativas relacionadas a números, a autora verificou que os estudantes passaram a perceber que a participação deles na consecução da tarefa era essencial para a compreensão dos conceitos envolvidos. Além disso, segundo a autora, os estudantes desenvolveram a capacidade de observar, estabelecer relações, conjecturar, testar, justificar e argumentar. Já em uma turma do 7° ano, Rocha (2003) também verificou uma mudança na concepção dos alunos em relação à

Matemática e ao seu papel na construção do conhecimento. De acordo com esta autora, os alunos passaram a ver a Matemática de um modo mais dinâmico e a considerá-la, muitas vezes, como um processo de descoberta. Os estudantes passaram a assumir um papel mais ativo na exploração de situações e na busca de relações matemáticas.

1.5 O papel do professor numa aula de investigação

O professor exerce um papel fundamental na inserção de atividades de investigação no currículo escolar. A ele cabe selecionar as atividades e conduzi-las de acordo com as demandas de sua classe. É necessário que o professor saiba dosar as suas intervenções, permitindo que os alunos criem seus caminhos e tirem suas próprias conclusões. Para Oliveira (1998), é importante que ao final das atividades o professor faça um apanhado dos aspectos mais importantes da investigação, permitindo que todos compreendam a essência do trabalho e levantem questionamentos a respeito da validação das hipóteses levantadas no início da atividade. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.47) destacam algumas tarefas para o educador na realização de atividades de investigação, sintetizadas da seguinte forma:

- Desafiar os alunos, garantindo que estes se sintam motivados para a atividade a realizar.
- Avaliar o progresso dos alunos, podendo variar desde um simples averiguar se tudo está sendo bem conduzido, dando o sinal de que podem prosseguir sem problemas, até a um apoio muito direto que interfere positivamente no trabalho dos alunos.
- Raciocinar matematicamente, lidando com questões imprevistas que surgem no decorrer da investigação e estabelecer conexões com outros conceitos matemáticos ou até mesmo não matemáticos.
- Apoiar o trabalho dos alunos, colocando questões mais ou menos diretas, fornecendo ou recordando informação relevante, fazer síntese e promover a reflexão dos alunos.

A função mediadora na realização de atividades de investigação na sala de aula imputa ao professor um papel fundamental e um tanto complexo no processo de ensino que se utiliza desta metodologia. Neste sentido, Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) afirmam que construir ou mesmo adaptar situações de investigação é um trabalho criativo para o qual não há "receitas" e que tem de ser feito tendo como referência alunos concretos. Segundo tais autores, este tipo de trabalho requer do professor "agilidade" matemática, uma boa noção dos conhecimentos, potencialidades e interesses dos seus alunos, bem como um bom domínio dos materiais e recursos que podem ser usados como apoio a esta atividade.

A respeito da condução da aula, o professor precisa saber balancear suas interferências de forma que mantenha os estudantes interessados e a aprendizagem crescente. Desta forma, Deci e Ryan (1985 apud ATENCIO 2004) acreditam que o educador deve procurar um equilíbrio nas suas intervenções pedagógicas, realizando as interferências necessárias para garantir a evolução da aprendizagem, mas com a preocupação de possibilitar aos alunos autonomia suficiente para que possam tirar suas próprias conclusões. Para estes autores, quando o professor chama a atenção do aluno para o seu erro, sem mostrar o que causou o equívoco e como retificá-lo, desmotiva o estudante. Em alguns casos, sempre que possível, julgamos ser produtivo que o próprio aluno encontre suas falhas na resolução de um problema. Neste caso, o professor pode fazer um retrospecto nas argumentações e escritos do estudante para que este tenha a chance de identificar os seus erros.

1.6 A comunicação professor-aluno

Neste tópico iremos propor um modelo de aprendizagem que pode favorecer a comunicação professor-aluno. Denominado de cooperação investigativa (Modelo-CI), tal modelo foi proposto por Skovsmove e Alro (2006) e procura enfatizar os seguintes elementos para efetivar esta comunicação: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar. Em seguida, forneceremos detalhes sobre cada um dos elementos citados.

Estabelecer contato significa entrar em sintonia com o aluno, ouvindo, fazendo perguntas e dando apoio não-verbal, tentando descobrir o que se passa com o outro. Este momento consiste em um primeiro contato, onde o aluno e o professor trocam idéias inicias para que possam se manter informados sobre o problema proposto.

Perceber a perspectiva do aluno consiste em analisar a maneira que o aluno entende certo problema. O aluno pode compreender o problema sob vários aspectos diferentes, mas pode ter dificuldades em expressar suas idéias. Cabe ao professor, então, fazer perguntas de cunho investigativo para perceber de que forma o aluno está raciocinando no problema.

Reconhecer é uma função tanto do professor quando do aluno: o professor deve reconhecer quando o aluno se torna apto a expressar suas idéias matematicamente e o próprio aluno também reconhece que alcançou uma argumentação satisfatória. Em sentido contrário, o estudante também percebe as idéias da argumentação do professor.

Posicionar-se significa levantar idéias e pontos de vista que possam ser examinados e questionados. Este processo pode levar à reconsideração das perspectivas e/ou a novas investigações. Alunos e professores exprimem seus pontos de vista em relação a uma situação-problema e este posicionamento pode levar os envolvidos a refazerem acordos e/ou mudarem a direção das argumentações, analisando situações que não haviam sido pensadas inicialmente.

Pensar alto faz com que a informação se torne um conhecimento comum a todos, podendo, desta forma, ser investigada. A investigação leva à reformulação tanto do professor – que pode reordenar/complementar idéias incompletas dos alunos –, quanto dos alunos – que podem também reestruturar a idéia do professor através do seu ponto de vista – possibilitando a ambos deixar a situação evidente e esclarecer mal-entendidos.

Reconhecidas as perspectivas dos participantes da investigação, o professor tem condições suficientes para desafiar os alunos de uma maneira sólida. Skovsmove e Alro (2006) ressaltam que este desafio deve estar em equilíbrio com o entendimento do aluno e que o professor também deve estar pronto para ser desafiado.

Por fim, avaliar as perspectivas dos alunos e do professor faz parte de todo o processo investigativo. Vale ressaltar que o objetivo da avaliação não é estabelecer uma perspectiva correta e, sim, alcançar um "ideal" comum para o processo de investigação. Assim, a questão estar "certo" ou estar "errado", no que tange à aplicação de atividades que exijam buscas e argumentações, não é a única prioridade neste processo.

1.7 Como avaliar as tarefas de investigação

Quando se trata de avaliar atividades de investigação, os métodos convencionais não dão conta das questões envolvidas em todo o processo. Para Santos (1997), a concepção de educação e ensino de matemática mais tradicional privilegia, muitas vezes, o formalismo, o rigor e o produto final, isto é, a resposta correta. Neste caso, a avaliação é feita na forma de testes e provas, aplicados, em geral, no final de todo o processo educativo. Segundo a autora, estes instrumentos avaliativos e seus contextos de ocorrência só servem para ratificar a falta de conhecimento do aluno. Outra crítica da autora em relação a esse tipo de avaliação é que o professor não tem tempo para retomar e clarear os pontos onde os alunos apresentam dificuldades e, assim, o educador acaba elaborando uma visão pontual e estática dos estudantes.

Por este motivo, é necessário pensar de que maneira o professor pode avaliar os alunos no sentido não de puni-lo, mas visando à promoção de aprendizagens. Para tanto, é preciso ter a consciência de quais são as questões importantes a serem consideradas no desenvolvimento de atividades de investigação. A capacidade de argumentação, a criatividade, o raciocínio dedutivo e a habilidade de relacionar os conteúdos envolvidos na atividade presente com os conceitos matemáticos já sabidos são aspectos fundamentais a serem observados pelo educador. Diferente dos exercícios matemáticos convencionais, não é possível julgar somente as respostas finais dos alunos. Desta forma, faz-se necessário o uso de estratégias metodológicas que possam avaliar todo o desenvolvimento da atividade investigativa. Oliveira (1998) comenta que, na Inglaterra, onde esse tipo de atividade já foi institucionalizada no currículo, os processos se tornaram conteúdos a serem avaliados e é necessária a realização de testes escritos que exijam do aluno essas habilidades. É preciso notar, porém, que a sistematização das etapas da investigação como pontos a serem avaliados pode levar à mecanização da atividade, caindo no mesmo erro das metodologias já existentes.

Uma ferramenta que pode auxiliar o professor na avaliação do trabalho consiste na elaboração de relatórios escritos pelos alunos. Abrantes (1995) afirma que o relatório representa um instrumento muito poderoso de avaliação devido a sua essência auto-avaliativa. O autor salienta que não se realiza um relatório para aprender, seguido de outro para verificar se o aluno já aprendeu, já que aprendizagem e avaliação estão presentes de forma integrada na execução do mesmo. Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) defendem que um relatório deve incluir uma descrição, a mais detalhada possível, do trabalho que se realizou, podendo ser organizado da seguinte forma (p. 111):

1. Descrição dos passos seguidos para explorar a tarefa proposta e a explicação destes de forma clara e organizada, além do registro de todos os valores que foram trabalhados e, quando adequado, a apresentação de desenhos, tabelas e/ou esquemas.

2. Resumo do que foi aprendido após a realização do trabalho
3. Organização de um comentário geral em relação a tudo o que foi feito, destacando os interesses que a tarefa despertou e os aspectos que geraram maiores dificuldades.

É importante que o professor tenha claro quais aspectos devem ser avaliados nos relatórios. De acordo com Abrantes, o educador deve estabelecer critérios gerais, incluindo pontos como: compreensão do aluno acerca do problema concreto em estudo, correção dos aspectos matemáticos que surgem no trabalho, qualidade da argumentação, originalidade e apresentação. O autor ressalta, ainda, que o professor deve considerar, igualmente, critérios específicos que levem em conta o modo como cada aluno abordou a tarefa e que permitam fazer, tanto quanto possível, uma apreciação holística de cada trabalho.

Com relação à atribuição de valores ou conceitos aos relatórios, podem ser utilizadas escalas quantitativas – notas 1, 2, 3, etc. – ou qualitativas – bom, aceitável, insuficiente, etc. Experiências nas quais estas escalas foram utilizadas (Varandas, 2000) mostram que elas ajudam não só a avaliar os relatórios dos alunos, mas também a estruturar e monitorizar, de modo mais seguro, o seu desempenho durante a realização das tarefas de investigação.

É importante pensar que a avaliação deve estar presente em todo o processo educativo e que estamos avaliando tanto o progresso dos alunos, quanto a eficácia da metodologia utilizada pelo professor. Caminhando nesta direção, Santos (1997) destaca uma série de funções da avaliação, entre elas(p. 12):

- informar o aluno sobre o que ele consolidou no processo educativo;
- informar o professor sobre sua prática docente para que ele possa tomar decisões sobre o conteúdo e os métodos de ensino;
- desenvolver nos alunos o conhecimento deles próprios como aprendizes, para que estes possam fazer uma auto-reflexão do que dominam e o que não dominam do assunto, se estão usando estratégias corretas ou não para resolver determinados problemas;
- desenvolver no professor a auto-reflexão sobre seu conhecimento matemático e sobre seu conhecimento pedagógico de matemática. Este último refere-se ao conhecimento do professor em explorar diferentes maneiras de trabalhar com os conteúdos, levando em conta os obstáculos epistemológicos, as dificuldades dos estudantes e as particularidades de cada turma de alunos.

Destacamos aqui a nossa concepção de avaliação: uma atividade processual e contínua que oportuniza a verificação tanto do trabalho do aluno, quanto do professor. As idéias de Santos reforçam a nossa crença de que não é só o trabalho do aprendiz que deve ser submetido a uma apreciação, mas, também, a prática do professor, no sentido de analisar se as estratégias utilizadas atendem, ao mesmo tempo, aos objetivos inicialmente propostos e às necessidades de seus alunos.

Capítulo 2. O trabalho com a visualização de figuras espaciais

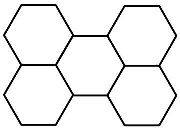
2.1 Reflexões sobre o ensino da geometria e da geometria espacial

A busca por entender o espaço em que vivemos, identificar a existência de objetos e figuras e as relações entre essas formas no espaço real faz da geometria um objeto de conhecimento particularmente relevante e motivador. A necessidade de compreensão das características intrínsecas dos objetos geométricos, determinantes de suas semelhanças e diferenças, pode proporcionar ao ensino da geometria um caráter dedutivo e investigador. Abrantes (1999) acredita que a geometria é um tema propício à realização de atividades de investigação e salienta a possibilidade de execução destas atividades em diversos níveis escolares. O autor afirma, ainda, que este tipo de atividade não exige grande número de pré-requisitos e evita uma visão de Matemática centrada na execução de algoritmos e em "receitas" para resolver exercícios-tipo. Estes sendo definidos como exercícios que seguem um padrão fixo de resolução. Como exemplo clássico, explica-se ao aluno a fórmula conhecida como "Fórmula de Báskara" e, em seguida, pede-se que o estudante resolva uma série de equações utilizando apenas a fórmula explicitada.

Neste mesmo artigo, Abrantes descreve diversas atividades de investigação que foram aplicadas em turmas dos ensinos básico e secundário. As atividades são elaboradas, selecionadas, testadas e reformuladas por professores e pesquisadores destes níveis de ensino e fazem parte de um projeto desenvolvido em Portugal, cujo enfoque consiste no desenvolvimento e na avaliação de propostas de trabalho para aulas de Matemática que proporcionem o envolvimento dos alunos em explorações e investigações. Por exemplo, foi aplicada em turmas do 2º ciclo (equivalente ao nosso 3º ciclo, 6º e 7º anos) a seguinte atividade retirada de Abrantes (1999, p. 5):

Mais hexágonos...

Hoje vamos investigar o perímetro de figuras formadas por cinco hexágonos unidos pelos lados. Este é apenas um exemplo



1. Constrói outras figuras diferentes, desenha-as e observa o que se passa com o seu perímetro. Tenta encontrar uma explicação para as descobertas que fizeres.
2. Constrói agora uma figura qualquer com cinco hexágonos. Conseguirás determinar o perímetro sem contar seus lados?

Figura 1: Mais hexágonos...

Analisando algumas respostas produzidas por alunos de uma turma do 6º ano (equivalente ao nosso 7º ano, antiga 6º série), observa-se que os alunos descobriram regularidades entre as figuras e seus respectivos perímetros, além de produzirem um raciocínio pré-algébrico na expressão de uma fórmula falada (o aluno explica com palavras, já que ainda não consegue "matematizar" seu raciocínio através de uma expressão algébrica) que generaliza o cálculo do perímetro do hexágono em função do número de lados utilizados.

As propostas de atividades em geometria descritas por Abrantes nos são bastante motivadoras e, de certa maneira, caminham na direção das sugestões curriculares. De acordo com os PCN´s (BRASIL, 1998), as atividades de Geometria são muito propícias para que o professor construa junto com seus alunos um caminho que os leve a compreender, a partir de experiências concretas, a importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas. Para delinear esse caminho, não se deve esquecer a articulação apropriada entre o espaço físico, as figuras geométricas e as representações gráficas. Assim, é preciso criar ambientes de aprendizagem na sala de aula de matemática que promovam a articulação destes três domínios da geometria.

Para Usiskin (1994), é importante analisar, de uma perspectiva curricular, as várias maneiras de formar conceitos em geometria. O autor salienta que nem mesmo os geômetras concordam quanto à natureza de sua matéria, e que nós, como educadores, deveríamos refletir sobre as diferentes visões, os objetivos e justificações dados ao estudo da geometria. Conseqüentemente, teremos critérios diferentes para a compreensão da geometria, definidas, por Usiskin, em três dimensões: a geometria como estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras; como estudo do mundo real, físico e como veículo para representar conceitos matemáticos, ou outros, cuja origem não é visual ou física (por, exemplo a reta numerada, usada para a representação de números reais).

Veloso (1998) comenta que em uma reunião, ocorrida em março de 1990, entre professores e investigadores universitários dos Estados Unidos, visando à reforma do ensino da geometria nas instituições de ensino superior, foram privilegiadas discussões sobre recomendações que salientam novos rumos para o ensino da Geometria, com o intuito de valorizá-la. É importante enfatizar que os estudiosos esperavam que estas novas idéias influenciassem, também, o ensino secundário, através da exposição dos futuros professores de matemática às mesmas. Podemos destacar algumas das principais indicações que o autor aponta (pg. 17), evidenciadas nesta reunião, para o "futuro" do ensino da geometria:

- O estudo dos conceitos e objetos geométricos privilegiando uma abordagem experimental e indutiva, em detrimento de uma visão axiomática;
- O uso de diagramas e modelos concretos como auxílio na construção de conceitos geométricos;
- O incentivo ao pensamento e raciocínio visuais como modo de pensamento matemático e resolução de problemas.

O fracasso do ensino da geometria de um ponto de vista excessivamente formal e axiomático nos leva a crer em uma estrutura de ensino que leve o próprio aluno, enquanto sujeito da sua aprendizagem, a se deparar com os problemas geométricos como se estes estivessem a surgir no momento em que está sendo estudado. Concordando com Veloso, acreditamos que a geometria deva ser ensinada como reinvenção, de maneira que o estudante tenha a sensação de estar “descobrindo” a Matemática, à medida que participa ativamente do processo de construção do conhecimento. Desta forma, ensinar geometria, através de resolução de problemas e a partir de uma metodologia de investigação, apresenta-se como uma alternativa para a concretização destas novas idéias.

Para melhor compreender as potencialidades do uso de atividades de investigação no ensino da geometria, e, particularmente, do uso destas tarefas no estudo das representações dos objetos espaciais, é necessário refletir sobre o ensino da geometria e o desenvolvimento do raciocínio espacial. De acordo com Usiskin (1994), até a 8ª série, embora todos os órgãos educacionais responsáveis e quase todos os professores percebam que o estudo da geometria é importante o bastante para merecer um lugar em todos os níveis, não existe um currículo padrão de geometria para a escola elementar. O autor salienta que não há uma concordância quanto ao conteúdo que deve ser ensinado, à seqüência dos tópicos e nem há consenso em relação ao tempo a ser dedicado ao seu ensino.

No Brasil, de acordo com Kaleff (1993), nos anos iniciais o ensino da geometria se restringe ao estudo e reconhecimento das formas geométricas básicas, através de uma abordagem empírica baseada na observação e manipulação de objetos concretos. A partir do 6º ano do ensino fundamental o foco do ensino da geometria passa a ser o estudo das definições formais, teoremas e propriedades. Por não haver um trabalho valorizando processos de pensamento matemáticos, os estudantes chegam nesta fase sem ter alcançado um nível cognitivo que lhes permitam atingir a organização formal necessária à compreensão do pensamento geométrico. Desta forma, o conteúdo da geometria acaba por se restringir, daí por diante, a aplicação de fórmulas e a resolução de exercícios-padrão.

Clements e Battista (1992) afirmam que a geometria escolar pode ser caracterizada pelo estudo de objetos espaciais e suas relações e transformações, as quais têm sido formalizadas e representadas por um sistema axiomático formal. Para os autores, raciocínio espacial é, por outro lado, o conjunto de processos cognitivos através do qual representações mentais para objetos espaciais, relações e transformações são construídas e manipuladas. Entender as relações entre os diferentes objetos "matemáticos" e a conseqüente classificação destes objetos em um sistema formal deve ser uma das funções do professor. A busca por estratégias de ensino que levem os estudantes a uma compreensão clara e dedutiva destes processos e os guiem na construção de estruturas mentais de representações espaciais significativas deve ser priorizada pelo educador.

2.2 O papel da visualização no ensino da matemática e da geometria

Um teste realizado com 1763 alunos (10% do total de alunos inscritos na rede municipal do Rio de Janeiro) detectou deficiências nos estudantes em diversas áreas da Matemática, sendo destacadas dificuldades encontradas em questões que envolviam visualização de figuras espaciais. Segadas et al.(2008) complementam que os alunos não conseguiam, em sua maioria, perceber elementos escondidos na representação da figura espacial, confundindo a figura real com sua representação.

Estudos mostram que, para muitas pessoas, parece que a capacidade de visualização espacial é algo inato (Veloso, 1998). Felizmente, a idéia é equivocada. O poder de visualizar mentalmente o espaço tridimensional é algo que pode ser trabalhado e desenvolvido. Veloso reforça que um ensino de geometria em que se utilizem métodos ativos de construção e manipulação de modelos e em que se privilegiem atividades explícitas para o desenvolvimento da visualização, tem como conseqüência o acréscimo desse poder.

Nesta direção, as representações visuais dos objetos matemáticos desempenham um papel fundamental na compreensão dos alunos. Na visão de Arcavi (2003), a visualização possui um poderoso papel complementar no aprendizado porque dá suporte e ilustra resultados essencialmente simbólicos (e possivelmente promove uma prova de que os resultados estão propriamente corretos), por ser um provável caminho de resolução de conflitos entre soluções simbólicas (corretas) e intuições (incorretas), além de também ser uma maneira de restabelecer e retomar entendimentos conceituais que podem não ter sido totalmente esclarecidos pelas soluções formais.

O auxílio das representações visuais pode proporcionar um ganho na aprendizagem da geometria, já que o formalismo ganha corpo através de imagens representativas, a intuição é verificada ou ratificada e os conceitos adquirem a possibilidade de serem trabalhados novamente e melhor compreendidos. Para evidenciar a importância da visualização, Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996) afirmam que nós estamos nos movendo de uma visão da matemática como uma estrutura lógica a qual devemos seguir (ou descobrir) para uma idéia de matemática como processo de conjecturar e justificar ou refutar e, nesta trajetória, a visualização pode desempenhar um papel fundamental.

A importância da visualização, especificamente no ensino da geometria, é enfatizada por Kaleff (2003) ao ressaltar que o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato da geometria ao praticar o exercício da visualização dos objetos geométricos. Alguns dos exemplos destes tipos de operação citados pela autora são (p. 16):

- Reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou imagem mental) são independentes de características físicas, como tamanho, cor e textura;
- Produzir imagens mentais de um objeto e visualizar suas transformações e movimentos;
- Relacionar um objeto a uma representação gráfica ou a uma imagem mental dele mesmo;
- Comparar vários objetos, suas representações gráficas ou suas imagens mentais para identificar semelhanças e diferenças entre eles.

Um trabalho que priorize o desenvolvimento da capacidade de visualização dos estudantes pode contribuir para uma aprendizagem mais plena da geometria – mais especificamente, a aprendizagem da geometria espacial –, no sentido de garantir ao aluno o acesso às múltiplas representações (imagens concretas, simbólicas e abstratas), favorecendo um estudo mais heurístico e rico em significado matemático.

A fim de explorar o papel da visualização na aprendizagem matemática e favorecer meios de trabalhar com os diferentes tipos de conhecimentos que podem ser proporcionados através das representações visuais, diversos autores, entre eles Kaleff (2003), Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996), consideram apropriada a iniciação do estudo da geometria partindo do reconhecimento do espaço a nossa volta, o espaço em que vivemos. Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996) reforçam este fato, quando defendem que o ensino sobre o espaço e as formas deve começar com a experimentação do espaço e, em particular, com "o que eu vejo", na medida em que esta situação está mais próxima das experiências pessoais do estudante. Os autores afirmam, ainda, que na descrição do espaço existem dois tipos diferentes de relação entre os objetos que são observados e o observador: uma relação direta, subjetiva e que envolve reflexão sobre o que o observador vê, e uma relação indireta, mais objetiva, relacionada à reflexão sobre como o observador vê.

A maneira como o observador percebe e manipula a representação de um objeto geométrico merece a atenção dos educadores. Kaleff (2003) salienta que, o fato de os objetos geométricos pertencerem ao mundo das idéias e, ao mesmo tempo, terem sua origem no mundo físico e representarem abstrações de objetos materiais, apresenta uma ambigüidade que gera uma grande dificuldade para os alunos. Isto porque, muitas vezes, os estudantes:

> [...] não percebem que os objetos geométricos são abstratos e que mesmo ao observarem o desenho de uma figura geométrica no livro texto ou no quadro-negro, ou mesmo sua imagem na tela do computador, estão, na realidade, vendo apenas uma representação do objeto geométrico (KALEFF, 2003, p. 16).

Alguns recursos e estratégias podem ser utilizados para mediar o trabalho de passagem dos objetos do mundo físico para suas representações simbólicas ou vice-versa, e, ainda, para auxiliar os alunos a pensar na maneira como eles interagem e interpretam as diferentes situações geométricas. O uso de diagramas, representações gráficas, simbólicas e/ou o uso de materiais concretos constituem estratégias didáticas que podem ajudar os estudantes na interpretação e no entendimento destas situações. Estamos aqui particularmente interessados em recursos e estratégias que favoreçam o ensino e a aprendizagem de objetos tridimensionais e desenvolvam o raciocínio espacial dos alunos.

Em se tratando do estudo da geometria espacial, é importante considerar as limitações da representação plana para objetos espaciais. Parzysz (1988) opina que existe, necessariamente, uma perda de informação, quando passamos de uma figura tridimensional para uma representação da mesma, através de um desenho em segunda dimensão. O autor salienta que a relação entre o objeto geométrico e sua representação (no caso de figuras espaciais) é muito mais obscura do que no caso de representações de figuras originalmente planas, e que esta limitação, muitas vezes, dificulta a percepção, pelo desenho, de certas propriedades dos objetos espaciais. Considerando as dificuldades para visualizar características de figuras espaciais por meio de representações planas, faremos o uso de materiais concretos. É importante ressaltar que nenhuma representação é capaz de preservar todas as características de um objeto real, mas, no caso de objetos tridimensionais, o modelo concreto pode favorecer e evidenciar algumas propriedades de caráter essencialmente espacial.

2.3 O auxílio do material concreto no ensino da geometria espacial

Szendrei (1996) faz uma análise histórica a respeito do uso de materiais concretos na sala de aula. Segundo a autora, os trabalhos educacionais de Comenius (1592-1670) tiveram grande influência na educação, pela crença de que os estudantes poderiam aprender mais e melhor usando a realidade dos sentidos e não apenas as palavras, e também pela criação de objetos pedagógicos passíveis de ser manuseados, na sala de aula, por professores e alunos. Szendrei afirma que Pestalozzi (1746-1827) é considerado o pai da adoção do uso sistemático da experiência dos sentidos nas escolas e, no início do século XX, os materiais concretos representavam uma alternativa quando o método tradicional não dava conta do ensino. Assim, blocos, balanças, geoplanos e espelhos foram sendo introduzidos no ensino da Matemática.

Moyer (2001) define materiais manipulativos como objetos designados para representar explicitamente e concretamente idéias matemáticas que são abstratas. Eles apresentam apelo visual e tátil e podem ser manejados pelos estudantes, através de experiências manuais. A autora explica que a manipulação ativa destes materiais leva os aprendizes a desenvolverem um repertório de imagens que podem ser usadas na manipulação mental de conceitos abstratos.

Em comparação a outros recursos didáticos, a grande vantagem dos materiais manipulativos no apoio ao ensino da geometria – especialmente no desenvolvimento do raciocínio espacial – deve-se ao fato deste tipo de material poder preservar a estrutura tridimensional dos objetos. Além disso, a manipulação direta dos objetos por parte dos estudantes pode favorecer autonomia e participação ativa dos mesmos no processo de aprendizagem. Clements e Battista (1992) afirmam que o uso de materiais manipulativos parece permitir aos alunos experimentar suas idéias, refletirem sobre elas e modificá-las. O autor destaca que esta abordagem física parece manter os estudantes interessados, auxiliá-los na criação de definições e novas conjecturas e também ajudá-los no ganho de *insights* para estabelecerem novas relações.

Kaleff (2003) acredita que o modelo concreto pode servir de representação para gerar uma imagem mental. A autora demonstra que esta primeira imagem inicia um processo de raciocínio visual no qual, dependendo das características do objeto, o aluno recorre à habilidade da visualização para executar diferentes processos mentais, gerando outras imagens mentais ou representações do objeto. Nesta direção, acreditamos que o uso de materiais manipulativos no ensino da geometria espacial pode favorecer a aprendizagem de propriedades relacionadas aos objetos tridimensionais. O volume de alguns sólidos, por exemplo, pode ser representado e calculado através da contagem de cubinhos de volume unitário.

É importante salientar que o material concreto, bem como qualquer outra ferramenta didática, não pode ser, por si só, carregado de significado (Ball, 1992). A riqueza do uso de um material didático se encontra na maneira como o professor utiliza-o com seus alunos. Além disso, a forma como o professor aborda o material em sala de aula é influenciada por suas crenças e concepções a respeito do uso destes recursos no ensino da Matemática. Moyer (2001) realizou uma pesquisa qualitativa com 10 professores de escolas públicas do ensino fundamental com o objetivo de avaliar de que maneira a inserção de materiais manipulativos na sala de aula interfere nos processos de ensino-aprendizagem da Matemática. Todos os professores observados tiveram acesso a um kit de materiais concretos, receberam instrução de sugestões para o uso dos objetos e participaram de seções interativas a respeito da importância de se criar um contexto de aprendizagem quando os materiais fossem utilizados. Das 40 lições observadas, 20 estiveram marcadas pelo uso dos materiais. Em 35% das aulas onde os manipulativos estiveram presentes, estes foram utilizados na exploração de conceitos geométricos, enquanto 30% das aulas com a presença dos materiais evidenciaram a utilização destes unicamente em jogos.

De acordo com a pesquisadora, os materiais não se encaixavam na aula propriamente dita, mas foram utilizados como atividade extra depois da aula de “conteúdo matemático”, como “quebra de rotina”, ou como jogo, ou, ainda, como recompensa pelo comportamento adequado dos alunos. A partir dos dados levantados, Moyer concluiu que os professores acreditam na compreensão de conceitos matemáticos pelos alunos apenas pelo uso de algoritmos presentes em livros-texto, ignorando a possibilidade de os estudantes criarem seus próprios algoritmos através de experiências com materiais concretos.

A simples inserção dos materiais na sala de aula ou até mesmo guias ou cursos que orientem os professores na utilização de alguns materiais concretos parecem ainda não constituir iniciativas suficientes para um bom uso de manipulativos. Ball (1992) assegura que existem muitos artigos de revistas educacionais e *workshops* que mostram como utilizar manipulativos específicos, mas nestes não acontece qualquer reflexão sobre possíveis associações que podem ser feitas pelos alunos na manipulação destes objetos pedagógicos, assim como não se discute a relevância dos mesmos para o processo ensino-aprendizagem, de que maneira os estudantes podem fazer conexões entre os materiais e a Matemática ou o uso de modelos alternativos. A autora enfatiza que pais e professores consentem quanto ao uso de manipulativos nas aulas de matemática e que Piaget é freqüentemente citado como tendo provado que crianças necessitam de experiências concretas para aprenderem Matemática.

O uso do material concreto, de maneira a contribuir com uma aprendizagem significativa dos conceitos matemáticos envolvidos, exige do professor um novo papel no ensino e uma formação profissional que o qualifique para essa nova gestão da sala de aula. O educador passa a assumir uma posição de guia das descobertas dos alunos e o responsável por favorecer relações entre os materiais e o conteúdo matemático.

2.4 A necessidade de passagem do concreto para o abstrato

A Matemática relacionada aos objetos concretos trabalhados não encerra os objetivos de aprendizagem. É necessário que os alunos ultrapassem este estágio para que possam alcançar a abstração. A possibilidade de diálogo entre alunos e professores em sala de aula pode auxiliar na passagem das experiências concretas para o raciocínio matemático abstrato. Hershkowitz, Parzysz e Dormolen (1996), ao ilustrarem atividades realizadas com blocos vistos de diferentes perspectivas, garantem que os estudantes precisam falar sobre como eles vêem os objetos. Os autores salientam que este tipo de abordagem envolve a reflexão sobre como os alunos têm que mover-se do que eles enxergam com os próprios olhos para o que eles visualizam com os “olhos da mente”. Tais processos, conforme afirmam os autores, criam uma situação sobre a qual os estudantes podem se tornar conscientes de certos métodos e idéias matemáticas.

Sabemos que a passagem concreto-abstrato deve ser alcançada pelos alunos, porém essa transição não é trivial. Algumas iniciativas têm sido realizadas no intuito de promover, através do estudo da geometria espacial associada à manipulação de objetos concretos, o alcance da abstração por parte dos estudantes. Segadas, Pereira e Silva (2004) realizaram uma série de atividades com alunos do 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental das redes Municipal e Federal do Estado do Rio de Janeiro, explorando a visualização e a representação de figuras no espaço. Dentre as atividades trabalhadas pelas professoras, destacamos a seguinte:

Quantas caixinhas de chocolate sobram após encher completamente a caixa grande?

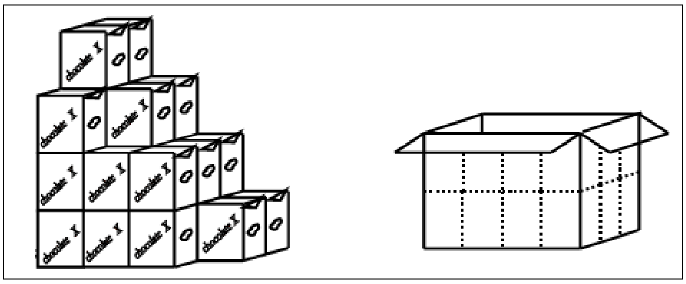


Figura 2: Atividade das Caixas de Chocolate

Através do relato das professoras das diversas estratégias adotadas pelos estudantes, pode-se notar que muitos deles utilizaram mentalmente a idéia de movimento das caixinhas em torno da sua base até que esta ganhasse o formato da caixa grande. As autoras mencionam que um aluno do 6º ano justificou a sua resolução, afirmando: "Fui tirando as caixas lá de cima e fui enchendo aqui em baixo nas duas últimas pilhas, aí eu vi que sobraram 2 caixas de chocolate." (p. 3) Apesar do estudante ter errado o número de caixas que sobrou, o seu raciocínio foi adequado à questão. Este problema evidencia o uso mental da idéia de concretude como auxiliar no desenvolvimento da habilidade espacial e da abstração. É importante frisar que, neste caso, os estudantes não dispunham do material concreto em mãos e, desta forma, se fazia necessário "mentalizar" a situação proposta.

Em Portugal, Pinheiro (1997) realizou atividades que valorizavam a visualização, a representação e a comunicação em uma turma do 8º ano (equivalente ao nosso 9º ano). Foram elaboradas três atividades: a primeira, formada por projeções de diferentes montagens de cubos, evidenciando as diferentes vistas de uma mesma construção, com o objetivo do aluno reconhecer qual deveria ser a figura que gerava determinadas vistas; a segunda, composta por desenhos de plantas e vistas e, com o auxílio de modelos concretos de cubos, os alunos deveriam representar a figura espacial que fosse fiel às representações; e a terceira era uma atividade colaborativa, onde os alunos foram divididos em grupos e um dos componentes do grupo deveria descrever as vistas de um objeto que estava a sua mão para que os outros componentes do grupo tentassem descobrir a forma da figura espacial correspondente a tal descrição. Todas as atividades tinham que ser registradas no papel pelos alunos que, em sua maioria, apresentavam idéias claras e sucintas. As atividades foram consideradas lúdicas, os materiais manipuláveis permitiram experimentar e estabelecer relações entre o concreto e o abstrato e contribuíram para a estruturação do conhecimento do espaço.

O uso de materiais concretos como auxiliar no caminho para a abstração é valorizado na Universidade Federal Fluminense (UFF) no Laboratório de Ensino de Geometria (LEG), coordenado pela professora Ana Maria Kaleff. Kaleff (2008) assevera que as vivências didáticas do LEG se contrapõem ao mito de que os materiais concretos dificultam a abstração e o ensino da Matemática mais avançada. A autora afirma que pesquisadores estudaram a utilidade dos recursos concretos frente a abstração e garantiram que na aprendizagem:

> os conceitos evoluem com o processo de abstração e esta ocorre pela separação mental das propriedades inerentes a objetos [...]. Esse processo começa com o apoio dos nossos sentidos e, assim, ele é aparentemente paradoxal, porque para se chegar ao abstrato [considerado, como o isolamento de alguma propriedade sensorialmente acessível ao objeto], é preciso se partir do concreto. (LORENZATO, 2006 apud KALEFF, 2008, p. 55)

As experiências relatadas evidenciam a possibilidade de utilização de materiais concretos como auxiliar no desenvolvimento do raciocínio abstrato. As atividades também mostram a importância do professor ter objetivos claros ao escolher ou elaborar uma tarefa e destacam a necessidade de dar espaço para que os alunos exprimam suas idéias. É descrevendo a maneira como estão pensando e observando os objetos que os estudantes podem alcançar a abstração.

Capítulo 3. Aspectos Metodológicos

3.1 Questões de pesquisa e público alvo

Neste capítulo, iremos definir a metodologia que foi utilizada na pesquisa e estabelecer os critérios de avaliação dos resultados obtidos, dentro dos objetivos e questionamentos já propostos, buscando discutir e responder às seguintes questões:

- De que forma os professores de Matemática se envolvem com atividades privilegiando a visualização de figuras espaciais através de uma metodologia de investigação e resolução de problemas?
- Que entendimento detêm os professores acerca das atividades desta natureza, quais as dificuldades que encontram para resolvê-las e de que maneira lidam com essas dificuldades?
- Como as estratégias desenvolvidas e os conteúdos adquiridos pelos professores estão sendo transmitidos para os seus estudantes?

A pesquisa foi realizada com professores de Matemática, que são alunos do curso de especialização em Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), e foi estruturada em três etapas. As duas primeiras etapas foram realizadas com todos os professores matriculados na disciplina – de caráter obrigatório para o curso – Tendências em Educação Matemática, cuja professora responsável, Dra Claudia Segadas Vianna, é também orientadora desta pesquisa. A última etapa, por sua vez, envolveu apenas dois destes professores cursistas.

3.2 Etapas da pesquisa

A primeira etapa da pesquisa pode ser caracterizada como um período de sondagem. Nesta fase, procurou-se conhecer o perfil dos alunos do curso, a partir da observação das aulas da disciplina mencionada, em que foram discutidos textos sobre resolução de problemas, e também através da análise das respostas de um questionário, elaborado pela pesquisadora deste trabalho, respondido pelos professores. As perguntas do questionário buscaram detectar aspectos da formação dos cursistas, crenças e concepções dos mesmos a respeito da Matemática e seu ensino.

Na segunda etapa, aplicamos algumas atividades de visualização de figuras espaciais com os professores de Matemática participantes do curso de especialização. Após a realização destas, foram discutidos com eles textos relacionados ao ensino da geometria e ao uso de atividades de investigação no ensino da Matemática.

Na terceira etapa, realizamos um estudo de caso com dois dos professores (de um grupo de aproximadamente 30 professores) do curso da especialização, observando seu desempenho em sua sala de aula na aplicação de algumas das atividades trabalhadas anteriormente na disciplina da especialização. A escolha destes professores foi privilegiada pela disponibilidade em participar da pesquisa, a seriedade no trabalho com o ensino de Matemática e o fato de lecionarem em turmas do 8º ou 9º anos do ensino fundamental, períodos escolares que julgamos propícios e adequados à aplicação das atividades.

Após a observação das aulas, realizamos uma entrevista com estes profissionais para que pudessem relatar os ganhos e as dificuldades encontrados na aplicação das atividades de investigação com seus alunos.

Visando garantir a organização e a clareza das reflexões, usaremos, neste capítulo, a palavra "professor" para nos referir aos professores de Matemática participantes do curso de especialização da UFRJ, enquanto a palavra "aluno" será utilizada, apenas, como referência aos estudantes do ensino fundamental que são alunos dos professores do referido curso.

Apresentamos a seguir algumas informações sobre o curso de especialização em Ensino da Matemática da UFRJ, bem como fornecemos características relevantes da disciplina Tendências em Educação Matemática.

3.3 O curso de especialização em Ensino da Matemática

O curso de especialização em Ensino da Matemática da UFRJ, vinculado ao Instituto de Matemática da UFRJ, tem funcionado continuamente desde 1993. Este curso é destinado exclusivamente a professores do ensino fundamental ou médio de Matemática que se encontram em exercício em sala de aula nas redes pública ou particular, ou a recém-graduados em cursos de licenciatura em Matemática.

As motivações da existência do curso devem-se à grande demanda de professores licenciados em Matemática que buscam pela formação continuada. Além de promover a revisão de conceitos abordados na licenciatura, o curso se propõe a contribuir para o esclarecimento de dúvidas sobre tópicos específicos da Matemática e fazer conexões entre conteúdos desta disciplina (o que ensinar) e metodologias de ensino (como ensinar). O curso de especialização também visa à preparação dos professores para o uso consciente e apropriado de recursos tecnológicos, além de fornecer informações sobre as pesquisas atuais na área da Educação Matemática.

A disciplina Tendências em Educação Matemática está inserida no curso de especialização como disciplina obrigatória, com o intuito de favorecer o alcance dos objetivos gerais do curso evidenciados anteriormente. A disciplina preocupa-se também em analisar os reflexos das pesquisas de estruturas cognitivas em Educação Matemática, discutir o papel da avaliação no ensino da Matemática, conceder informações sobre as pesquisas atuais na formação inicial e continuada do professor de Matemática e dar suporte metodológico de pesquisa em Educação Matemática aos professores participantes.

A seguir, iremos detalhar o papel da pesquisadora na realização de todas as etapas, bem como os métodos de coleta de dados e avaliação utilizados em cada uma delas.

3.4 Detalhamento das etapas

1ª Etapa

Esta primeira etapa foi dedicada à observação e análise do perfil dos professores integrantes do curso de especialização. Para detectar algumas das concepções e crenças destes professores a respeito da Matemática e seu ensino, aplicou-se, na primeira parte desta etapa, um questionário composto de 10 perguntas abertas, a fim de levantar aspectos da sua formação matemática profissional, o tempo de experiência com o ensino da disciplina, os motivos que os levaram a optar por lecionar Matemática e suas opiniões relativas a esta ciência e ao seu ensino. Segue a lista de perguntas presentes no questionário.

1. *Qual é a sua formação acadêmica?*
2. *Em qual(s) nível(s) de ensino atua e/ou já atuou e por quanto tempo?*

3. *Quais foram os motivos que levaram você a optar em seguir a carreira de professor de Matemática?*
4. *Qual deve ser o papel do professor na sala de aula de Matemática?*
5. *Qual deve ser o papel do aluno na sala de aula de Matemática?*
6. *Como você acha que deve ser a avaliação dos alunos (como avaliá-los) em Matemática?*
7. *Você considera a Matemática importante para o dia a dia das pessoas? Por quê?*
8. *Você considera a Matemática importante para a vida profissional das pessoas? Por quê?*
9. *Para você, o que é o conhecimento matemático?*
10. *Para você, o que é importante saber em Matemática?*

As questões elaboradas para conhecer as idéias dos professores sobre a Matemática e seu ensino enfocam os seguintes aspectos: o papel do aluno e do professor na sala de aula de matemática; como avaliar a aprendizagem dos alunos; a importância da Matemática para o dia a dia e para a vida profissional das pessoas; a natureza do conhecimento matemático e tópicos relevantes ao ensino.

Na segunda parte desta etapa, assistimos a algumas aulas da disciplina Tendências em Educação Matemática, quando a regente da disciplina solicitou aos professores a leitura, em grupos, do texto *"Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas"*, de Onuchic (1999), e propôs algumas questões relativas ao texto, elaboradas por ela. Durante estas aulas, a pesquisadora estava inserida em um dos grupos de discussão e desempenhava o papel de cursista, eventualmente contribuindo com as discussões do grupo.

Foram utilizados como instrumentos de avaliação de pesquisa para esta primeira etapa a observação e os registros das aulas assistidas em diários, além da análise do questionário aplicado com os professores do curso.

2ª Etapa

Esta fase consistiu na realização, com os professores, de cinco atividades de resolução de problemas e de investigação voltadas para a questão da visualização de figuras espaciais e com o uso do material concreto.

Na aplicação destas atividades, o pesquisador atuou como colaborador, ajudando a professora da disciplina neste empreendimento, bem como no direcionamento do trabalho dos professores, buscando interferir de maneira a não lhes dar respostas prontas e, ao mesmo tempo, promover o avanço destes na construção do conhecimento.

Vale ressaltar que todas as atividades realizadas pelos professores foram por eles registradas em forma de relatórios escritos que serviram, posteriormente, como um instrumento de avaliação da pesquisa. Além disso, o pesquisador também realizou o registro do desenvolvimento das atividades em diários.

Após a execução das cinco atividades propostas, foram discutidos com os professores do curso os textos "*Investigações Geométricas em Sala de Aula*", de Abrantes (1999), e *"Resolvendo os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar"*, de Usiskin (1994), com o objetivo de auxiliá-los na fundamentação teórica das atividades trabalhadas anteriormente, bem como garantir o enriquecimento da discussão dos tópicos abordados.

3ª Etapa

A terceira fase corresponde à observação dos dois professores previamente selecionados, que participaram das duas primeiras etapas do trabalho, desenvolvendo, com seus alunos do 8º ou 9º ano escolar, algumas das atividades já trabalhadas no curso de especialização. Dentre as cinco tarefas propostas para todos os professores do curso na 2ª etapa, algumas foram escolhidas pelos dois professores selecionados para participar desta etapa, a fim de também propô-las em sala de aula para seus respectivos alunos. Os professores selecionados também foram submetidos a entrevistas ao final desta etapa, para que expusessem suas opiniões, críticas e/ou dificuldades que sentiram na realização das atividades.

Nesta última etapa, o pesquisador assume o papel de observador e colaborador, procurando interferir o mínimo possível na dinâmica do trabalho do professor com seus alunos. Quanto à realização das tarefas de investigação propostas, os alunos também foram solicitados a elaborarem relatórios escritos, detalhando o raciocínio utilizado e justificando as conclusões encontradas. Estes relatórios fizeram parte da documentação avaliada pelo pesquisador para contribuir com possíveis conclusões e resultados da pesquisa. Além disso, as aulas em que os professores selecionados desenvolveram com seus alunos as atividades de investigação e resolução de problemas foram gravadas e, posteriormente, transcritas.

Ao final das observações na sala de aula dos professores, estes foram submetidos a uma entrevista com o pesquisador para que pudessem expor suas dificuldades e críticas em relação às aulas em que aplicaram as tarefas, bem como suas expectativas e comentários sobre o ensino da Matemática através da utilização de atividades de resolução de problemas e investigação.

A seguir, são detalhados os conteúdos e objetivos das atividades pré-selecionadas que foram propostas, na 2ª etapa, aos professores e, na 3ª etapa, por estes aos seus alunos.

3.5 As atividades

As tarefas desenvolvidas pelos professores cursistas e pelos alunos foram selecionadas e reformuladas pela pesquisadora deste trabalho. Na seleção, privilegiamos as atividades de resolução de problemas e investigação no ensino da geometria, especificamente aquelas que possibilitassem o desenvolvimento de habilidades espaciais, o raciocínio visual e o uso de materiais manipulativos. A reformulação de alguns enunciados foi realizada com o intuito de torná-los menos diretos e mais propícios ao trabalho investigativo.

A escolha da seqüência das atividades favorece um grau crescente de dificuldade, bem como o uso de problemas que vão desde aqueles cujo enunciado pede uma resposta objetiva e imediata até questões mais abertas que favorecem o uso de investigações.

As primeiras atividades contêm alguns exemplos resolvidos, que o aluno deve tomar como base para a resolução dos posteriores. Porém, à medida que se vai avançando nas atividades, vai sendo exigido do aluno um grau cada vez maior de autonomia. Seguem comentários e objetivos específicos de cada atividade. As atividades constam, em anexo, na ordem em que foram propostas aos professores.

Atividade 1. Dobrando e Triplicando[1]

A atividade inicial consta de uma tabela que deveria ser preenchida pelos professores. Nesta tabela, estão desenhadas diferentes figuras espaciais formadas com cubinhos unitários. Solicita-se que os alunos completem a tabela calculando o perímetro e a área do topo, a área da superfície e o volume das figuras espaciais desenhadas. Cada figura da tabela aparece novamente com suas dimensões dobradas e, então, pede-se para completar os dados desta nova figura. Por fim, propõe-se aos alunos que desenhem as figuras iniciais triplicando todas

---

[1] Adaptada de: Fagan (2005), Creating an Environment for Learning with Understanding: The Learning Principle, Mathematics Teaching in the Middle School, vol 11, nº 1.

as dimensões e, novamente, eles devem calcular o perímetro e a área do topo, a área da superfície e o volume das figuras triplicadas.

O objetivo desta atividade é evidenciar as diferenças entre perímetro, área e volume de figuras. A superação de freqüentes confusões relacionadas ao cálculo de perímetros, áreas e volumes é fundamental para o desenvolvimento de habilidades espaciais. O uso de cubinhos unitários permite a participação ativa dos estudantes pela manipulação dos objetos. Além disso, o modelo concreto auxilia o desenvolvimento do raciocínio espacial, uma vez que seu uso aproxima, significativamente, o modelo representativo do espaço tridimensional propriamente dito.

Atividade 2. O Problema de Pintura de Faces[2]

A idéia desta atividade consiste em um trabalho ativo dos alunos, através de uma abordagem investigativa, na busca por padrões numéricos que relacionam forma e quantidade. O estudo consiste na contagem de cubos acoplados entre si e o cálculo do número de faces pintadas dos mesmos após a pintura de sua superfície externa.

A quantidade de cubos acoplados vai crescendo horizontalmente e gradativamente, e os estudantes são convidados a investigar padrões que relacionem a quantidade de cubos com o número de faces pintadas. Os primeiros exemplos apresentam-se já resolvidos, com o objetivo de auxiliar o aluno a compreender o processo de contagem para que ele possa, em seguida, continuá-lo. Inicialmente, é fornecida a quantidade de cubinhos acoplados e pede-se que os estudantes calculem a quantidade de faces pintadas, e, em seguida, sugerimos uma generalização do cálculo. Posteriormente é pedido que os alunos efetuem o processo inverso, ou seja, dado o número de faces pintadas, pede-se que eles determinem a quantidade de cubinhos utilizados. Por último é pedido, também, uma generalização para este cálculo.

A atividade relaciona geometria e álgebra e tem o objetivo de conduzir o aluno do processo de contagem para a busca de generalização. Nessa direção, a álgebra ganha significado concreto, ao mesmo tempo em que se desenvolve a percepção espacial através do contato com os cubos produzidos com material concreto.

[2] Adaptada de: Fagan (2005), Creating an Environment for Learning with Understanding: The Learning Principle, Mathematics Teaching in the Middle School, vol 11, nº 1.

Atividade 3. Cubos, cubos e mais cubos[3]

Após o desenvolvimento de habilidades espaciais promovidas pelas atividades 1 e 2, e a iniciação do trabalho investigativo possibilitado na realização da atividade 2, pretende-se propor um problema de investigação um pouco mais aberto. Inicia-se a atividade com a construção de um cubo $3 \times 3 \times 3$ formado por cubinhos unitários. A idéia consiste em imaginar a pintura da superfície externa do cubo, investigando a quantidade de cubinhos unitários que ficarão com 0, 1, 2 e 3 faces pintadas. O problema é estendido para o cubo $4 \times 4 \times 4$ e $5 \times 5 \times 5$ e, finalmente, é pedido aos alunos que busquem uma generalização do problema para um cubo $n \times n \times n$.

Atividade 4. Investigando Esqueleto de Cubos[4]

Esta tarefa pode ser realizada com naturalidade depois de trabalhada a atividade 3. Trata-se de investigar "esqueletos" de cubo, isto é, descobrir, também manipulando cubinhos unitários, a quantidade necessária para a construção da estrutura que dá forma ao cubo, sem preencher seu interior. Novamente pretende-se buscar padrões numéricos/algébricos que representem a quantidade de cubos utilizados em função do crescimento da estrutura do cubo. Aqui pretende-se, também, explorar o cálculo de volume de uma maneira intuitiva, sem fazer o apelo à fórmula, promovendo o desenvolvimento da habilidade espacial.

Atividade 5. Quantos Cubos[5]?

O exercício em questão pode ser considerado de um nível um pouco mais avançado (em relação aos anteriores) e tem como objetivo aprofundar os conhecimentos trabalhados anteriormente. A tarefa consiste em contar os cubos de todos os tamanhos existentes no cubo $n \times n \times n$. Para facilitar o encaminhamento do raciocínio, pode-se partir da contagem de todos os cubos dentro de um cubo $1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$, para que se possa, em seguida, propor uma conjectura para a quantidade de cubos no cubo $n \times n \times n$.

---

3 Adaptada de: Veloso, Fonseca, Ponte & Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio*, Lisboa: DEFCUL, 1999.

4 Adaptada de: Spellen (1997), Skeletal Cube Investigation, Mathematic Teacher 158.

5 Adaptada de Litwiller e Duncan (1994), Problemas Geométricos de Contagem, *Aprendendo e Ensinando Geometria,* Atual Editora.

3.6 Descrição do questionário de sondagem

O questionário foi aplicado com o objetivo de conhecer as idéias e opiniões dos professores a respeito da Matemática e seu ensino. Faremos aqui, uma breve descrição das respostas dadas pelos professores. Após a realização da 3ª etapa, onde iremos assistir às aulas de dois professores trabalhando com atividades de investigação, analisaremos com mais detalhes os questionários respondidos especificamente por esses professores.

As perguntas 1 e 2 do questionário pediam que os professores dissessem qual a sua formação acadêmica, qual (s) nível (s) de ensino atuam ou já atuaram e por quanto tempo. Como todos os professores (28 estavam presentes no dia da aplicação do questionário) são licenciados em Matemática, não haveria necessidade em descrever as respostas da primeira pergunta. Com relação às respostas à segunda pergunta, os professores atuam ou já atuaram nos diversos níveis de ensino (do 6º ano do ensino fundamental ao 3º ano do ensino médio) e por tempos variados, não havendo uma concentração por maioria de professores em nenhum nível específico e com nenhuma convergência referente a tempo de experiência em um determinado nível. Pelos motivos evidenciados acima, optamos por descrever a análise das perguntas 3 à 10. Para uma melhor compreensão do leitor, reescrevemos as perguntas do questionário e logo a seguir descrevemos as respostas dadas pelos professores.

3- Quais foram os motivos que levaram você a optar em seguir a carreira de professor de Matemática?

O encantamento pela profissão de professor, o gosto por ensinar e por tirar dúvidas das outras pessoas foi descrito como motivo de oito professores pela escolha da carreira. Metade dos professores disseram ter afinidade e aptidão pelo estudo da disciplina. Alguns (3 professores) ainda escolheram a profissão pela influência da família, por acreditarem na facilidade de conseguir emprego na área ou por alegar ser a carreira mais fácil de exatas no vestibular. E ainda tiveram professores (3) que escolheram a profissão de professor de matemática por vislumbrarem a disciplina como um jogo e se sentirem desafiados por ela.

4- Qual deve ser o papel do professor na sala de aula de Matemática?

A idéia de que o professor deve desenvolver estratégias que promovam a compreensão da Matemática pelos alunos, esteve presente em seis respostas. O papel do educador, na opinião de muitos professores (20 dos 28 que responderam ao questionário), deve ser o de mediador, problematizador, motivador e facilitador do aprendizado. Para alguns (3 respostas) o professor deve levar os alunos a pensar na matemática de forma crítica, tornando-os seres questionadores e curiosos, contribuindo na formação do aluno enquanto cidadão.

5- Qual deve ser o papel do aluno na sala de aula de Matemática?

Na opinião da grande maioria dos professores (22) o aluno é o norteador da prática do professor, um agente ativo no processo ensino-aprendizagem, cabendo a ele questionar, investigar e formular hipóteses participando da construção de seu próprio conhecimento. Mas, para outros (6 respostas) o aluno é visto como um receptor participativo, que precisa ter bom comportamento e comprometimento com a aula.

6- Como você acha que deve ser a avaliação dos alunos (como avaliá-los) em Matemática?

A grande maioria dos professores (26 dentre os 28 presentes) afirmou que as avaliações devem ser de dois tipos: formais e alternativas. As avaliações formais devem ser feitas através de testes e provas, onde o raciocínio do aluno seja valorizado e não apenas o acerto. As avaliações alternativas consistem na observação da participação em sala através do desenvolvimento de trabalhos individuais e em grupo e na resolução de lista de exercícios pelos alunos. Os professores defendem a possibilidade dos alunos realizarem avaliações de recuperação e enfatizam que o esforço e a dedicação devem ser valorizados. Porém, duas respostas deixavam claro que, para estes professores, a prova escrita é o único método para avaliar o desempenho dos seus alunos em Matemática.

7- Você considera a Matemática importante para o dia a dia das pessoas? Por quê?

Os professores que responderam ao questionário consideram a Matemática importante para o dia a dia das pessoas por diversos motivos. O motivo mais citado (17 respostas) é que lidamos diariamente com situações de contagem, lidando com dinheiro, fazendo comparações de preços no supermercado ou escolhendo entre efetuar uma compra à vista ou a prazo. Para três professores, a Matemática auxilia as pessoas a se localizar no espaço, a ler e interpretar gráficos, a fazer comparações e exercer a cidadania. Outro argumento (citado por oito professores) é que a Matemática desenvolve o raciocínio lógico-dedutivo, trabalha a concentração, o poder de síntese, ajuda a aprender a aprender e desta forma nos auxilia nas mais diversas situações, inclusive situações que não envolvam números.

8- Você considera a matemática importante para a vida profissional das pessoas? Por que?

A Matemática é importante para a vida profissional das pessoas, segundo a opinião de 22 professores, porque ajuda na organização do pensamento, melhora a qualidade do raciocínio, cria no indivíduo um espírito de investigação e de busca por solução de problemas. Mais diretamente, a Matemática constitui a base da engenharia e contribui para o avanço tecnológico, à medida que esse avanço exige o uso de conceitos lógico-dedutivos (idéia presente nas outras seis respostas). Um dos professores afirmou que: “o profissional que tem um bom racicínio logico-dedutivo e utiliza corretamente as operações matemáticas se destaca em qualquer área”.

9- Para você, o que é o conhecimento matemático?

Para alguns professores (seis dos que responderam ao questionário), o conhecimento matemático está associado ao conhecimento do conteúdo. Para eles, este conhecimento é a “bagagem” que o indivíduo carrega das variadas áreas da disciplina (álgebra, geometria, aritmética, lógica, etc.). Nesta mesma direção alguns (três do total das respostas) argumentam que o conhecimento matemático baseia-se na compreensão de símbolos bem definidos e estruturados e regras que simplificam determinadas lógicas, no conhecimento dos axiomas e definições e na capacidade de demonstrar teoremas. Por outro lado, muitos professores (cerca de metade dos presentes) associam o conhecimento matemático à capacidade de raciocinar logicamente, à habilidade de interpretar situações, analisá-las e compará-las. É o poder de analisar uma situação e saber reconhecer o que é necessário para resolvê-la e a capacidade de tomar decisões rápidas de forma consciente. É a compreensão dos processos envolvidos no raciocínio matemático, o conhecimento das fórmulas, de como elas são obtidas, suas aplicações na vida prática e na resolução de problemas. E para alguns ainda (seis professores) o conhecimento matemático seria o conhecimento do conteúdo, que constitui como “uma grande herança deixada por muitas gerações” e a habilidade de relacioná-los e utilizá-los como ferramentas de aplicação à vida prática e para a leitura do mundo em que vivemos.

10- Para você, o que é importante saber em matemática?

Muitos professores afirmaram que as únicas coisas importantes a saber em Matemática são as quatro operações (11 das 28 respostas). Outros acrescentaram que também é necessário compreender a matemática financeira, além de desenvolver o raciocínio lógico e o raciocínio espacial (sete respostas). E um terceiro grupo de professores (10) afirmaram que é importante saber como a Matemática é estruturada e como os conteúdos se relacionam entre si. Para este grupo, mais importante do que o conteúdo é desenvolver o poder de raciocinar, o poder de pensar. Um comentário interessante que surgiu na resposta a essa pergunta foi à afirmação que "o professor de matemática deve saber muito mais do que a maioria das pessoas".

Neste tópico fizemos uma descrição geral das respostas dos professores ao questionário. Posteriormente, faremos uma análise mais detalhada nos questionários respondidos pelos dois professores que iremos acompanhar na realização da etapa 3 (observação destes dois professores aplicando as atividades de investigação com seus alunos).

Capítulo 4. Os trabalhos em grupo e a discussão em sala

4.1 Apresentação e organização

A segunda etapa desta pesquisa realizou-se em 2 aulas da disciplina Tendências em Educação Matemática, inserida no curso de Especialização em Ensino da Matemática, cujas aulas acontecem uma vez por semana no turno matutino e possuem a duração de quatro horas com um pequeno intervalo de quinze minutos.

Nesta etapa, o trabalho se desenvolveu em dois momentos. No primeiro momento, planejado para ser realizado em uma aula de quatro horas, foram aplicadas cinco atividades (anexo I) de investigação e resolução de problemas com os professores da especialização. A resolução das atividades foram guiadas pela professora da disciplina em questão e pela pesquisadora.

O segundo momento, programado para acontecer em uma aula de quatro horas, foi dedicado à discussão dos textos (atividade 6, anexo I) referentes ao trabalho com investigações no ensino da geometria, aos problemas do ensino da geometria nas escolas e a posterior apresentação de alguns slides pela pesquisadora referentes aos mesmos temas. Vale destacar que os textos foram entregues aos professores em aulas anteriores para que a leitura fosse efetuada em momentos anteriores à discussão dos mesmos.

Como uma aula de quatro horas não foi suficiente para a realização das cinco atividades de investigação, a aula seguinte, que seria dedicada totalmente à discussão dos textos e apresentação dos slides, iniciou-se com o trabalho dos professores na atividade 5.

Para a aplicação das atividades de investigação, foi proposta, na aula que deu início a esta etapa da pesquisa, a divisão da turma em grupos de 4 ou 5 componentes, ficando a escolha dos parceiros de equipe por conta dos 30 professores presentes, por acreditarmos que, desta forma, cada um deles se sentiria mais a vontade para expressar suas idéias, tornando, assim, as discussões mais ricas e produtivas.

Concluída a constituição dos diferentes grupos, foi sugerido aos seus componentes que escolhessem, de forma criativa, um nome para identificá-los. Foram formados então os grupos FAEDVAGA (denominação oriunda das duas primeiras letras dos nomes dos componentes), F^{2}RL (iniciais dos nomes de cada membro do grupo), Os Atrasados (os componentes deste grupo chegaram cerca de 40 minutos após o início das atividades), Quadrado Perfeito, Quarteto Fantástico e Galileo, todos com 4 membros, e apenas um grupo com 5 componentes, autodenominado Infinito.

Após a formação dos grupos, foi entregue a cada um dos membros de cada uma das equipes um caderno composto pelas cinco atividades de investigação previamente selecionadas para a pesquisa, que deveria ser identificado com o próprio nome (escrito de forma destacada), assim como o nome do grupo e dos seus demais componentes.

Enfatizamos, neste momento, a necessidade de o trabalho ser analisado e discutido de forma coletiva por todos os elementos do grupo, apesar de cada membro possuir a sua folha de respostas. Os professores foram orientados também a resolver as atividades na ordem que elas foram apresentadas no caderno, pois a seqüência tinha sido planejada com o intuito de partir de tarefas de resolução mais direta (atividades 1 e 2) até chegar em problemas mais abertos (atividades 3, 4 e 5). Além disso, foi ressaltada a necessidade da resolução gradual das tarefas, de forma que o grupo só poderia começar a próxima atividade após a finalização da anterior.

Aqui cabe destacar que o uso do material concreto para a resolução dos problemas propostos foi considerado opcional. Neste sentido, foram disponibilizados para todos os grupos vários cubinhos de madeira, de dimensões idênticas. Quanto ao auxílio do material concreto, pôde-se observar que todos os grupos se utilizaram do material, alguns grupos com maior freqüência que outros.

Quanto à realização coletiva das atividades propostas pelos componentes dos grupos, foi também possível perceber que os membros do Quarteto Fantástico e do F^2RL trabalharam mais individualmente, sem compartilhar idéias ou mesmo tirar dúvidas com os outros componentes do grupo. Uma vez que a realização da última tarefa (atividade 5) ficou prejudicada, já que as outras despenderam um tempo maior do que o esperado, a aula seguinte se iniciou priorizando o trabalho com esta atividade.

Os momentos finais da primeira aula (cerca de 50 minutos) foram reservados para a exposição dos conceitos e procedimentos construídos pelos grupos na resolução das atividades Seguindo o mesmo processo adotado na realização das tarefas, as exposições também obedeceram à ordem preestabelecida no caderno de atividades. As equipes se revezaram voluntariamente na ida ao quadro negro para descrever para a turma as estratégias desenvolvidas e, quando por vezes ocorria o aparecimento de idéias distintas para a resolução de um mesmo problema, mais de um grupo apresentava a mesma atividade no quadro.

A seguir, sempre lançando mão, como exemplo, dos escritos e desenhos dos professores registrados no caderno de atividades, além de alguns dos seus comentários, descreveremos e analisaremos, de forma mais aprofundada, as diferentes estratégias utilizadas por estes nas suas tentativas de chegarem à solução e encontrarem justificativas para a resolução dos problemas propostos. Após o comentário individual de cada uma das cinco atividades sobre as explicações dos professores, faremos um breve relato do que ocorreu no segundo momento desta etapa da pesquisa.

4.2 Trabalhando com as atividades

Atividade 1 – Dobrando e Triplicando

Nesta primeira atividade, a maioria dos grupos utilizou os cubinhos disponíveis para construir as figuras duplicadas e triplicadas, mas alguns preferiram desenhar as figuras e fazer a contagem pelo desenho. Todos os professores perceberam que o perímetro do topo dobrava e triplicava, à medida que a figura fosse dobrada e triplicada, respectivamente. No entanto, alguns sentiram dificuldade na hora de dobrar e triplicar as figuras, não se dando conta de que todas as dimensões (comprimento, largura e altura) deveriam ser dobradas e triplicadas. Por este motivo, não conseguiram perceber, por exemplo, a relação da figura 2 com a representação visual de seu dobro, evidenciada na tabela abaixo:

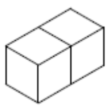
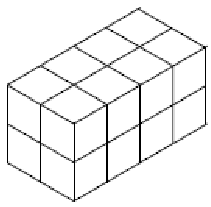
Figura 2	Figura 2 dobrada
	

Tabela 3: Figura 2 e Figura 2 dobrada

Inicialmente, certos professores pensaram que a área da figura 1 dobraria e que o volume triplicaria se a figura fosse dobrada. Após um longo período de observação e a realização de cálculos dos perímetros do topo, das áreas do topo e da superfície e dos volumes das diferentes figuras, a grande maioria pôde perceber que a área da superfície e, também mais especificamente, a área do topo da figura eram multiplicadas por 2^2, quando as dimensões da figura eram dobradas, e multiplicadas por 3^2, quando as dimensões da figura eram triplicadas. No caso do volume, este era multiplicado por 2^3, quando as dimensões da figura eram dobradas, e multiplicado por 3^3, quando as dimensões da figura eram triplicadas.

A figura 3 mostra como um dos professores participantes da pesquisa, ao realizar a atividade 1, desenvolveu seu raciocínio na descoberta das relações entre o perímetro, a área e o volume da figura original com seus respectivos valores para a mesma figura dobrada e triplicada.

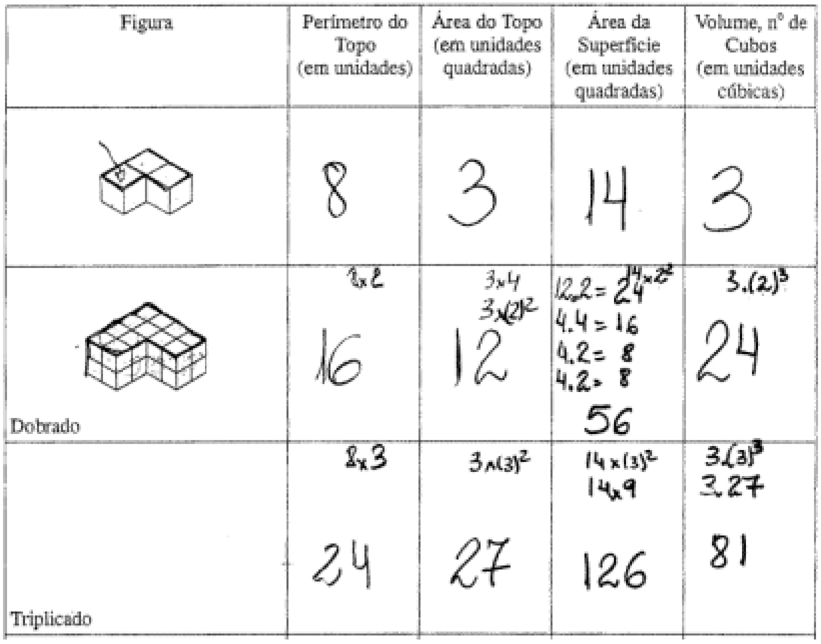


Figura	Perímetro do Topo (em unidades)	Área do Topo (em unidades quadradas)	Área da Superfície (em unidades quadradas)	Volume, nº de Cubos (em unidades cúbicas)
	8	3	14	3
Dobrado	8x2 16	3x4 3x(2)² 12	12.2= 24 14x2² 4.4 = 16 4.2= 8 4.2= 8 56	3.(2)³ 24
Triplicado	8x3 24	3x(3)² 27	14x(3)² 14x9 126	3.(3)³ 3.27 81

Figura 3: Resolução do professor. Atividade 1

É importante observar que este professor calculou os valores do perímetro do topo, da área do topo, da área da superfície e do volume da figura cujas dimensões foram dobradas e, posteriormente, triplicadas sem recorrer ao desenho. Ele percebeu que quando as dimensões da figura eram dobradas a área de seu topo e de sua superfície poderiam ser calculadas multiplicando-se os resultados da figura inicial pelo fator 2^2. O volume da figura com as dimensões dobradas, por sua vez, ficava multiplicado pelo fator 2^3. No caso da figura com as dimensões triplicadas, as áreas e o volume foram encontrados através da multiplicação dos valores da figura inicial pelos respectivos fatores 3^2 e 3^3.

Especificamente para o cálculo do volume das figuras, alguns professores recorreram à contagem dos cubinhos, enquanto outros lançaram mão da fórmula correspondente.

Atividade 2 – O Problema de Pintura de Faces

Foram observadas nesta atividade diversas estratégias de contagem do número de faces pintadas em função do número de cubos acoplados. Vale ressaltar que muitos professores utilizaram os cubinhos no desenvolvimento da tarefa.

Um dos procedimentos adotados pelos componentes dos grupos foi observar que, considerando-se os três cubinhos acoplados, há um total de 4 “partes” em volta, cada uma delas com 3 faces. Assim, em volta tem-se 4×3 faces. Com mais duas faces das pontas, obtém-se $4 \times 3 + 2$ faces pintadas.

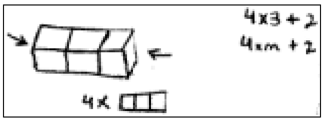


Figura 4: Resolução do professor. Atividade 2

No caso de quatro cubinhos acoplados, são observadas também 4 “partes” em volta, mas cada parte agora tem 4 faces. Assim, em volta tem-se 4×4 faces. Somando mais duas faces das pontas, formam-se $4 \times 4 + 2$ faces pintadas. A partir deste raciocínio, e levando-se em conta que, independente da quantidade de cubinhos acoplados, há sempre duas faces nas pontas, chega-se facilmente à generalização $F = 4n + 2$, onde F é o número total de faces pintadas em função do número n de cubinhos acoplados.

Outra estratégia utilizada pelos participantes da pesquisa foi a contagem do número de todas as faces existentes e a posterior subtração das faces que não seriam pintadas.

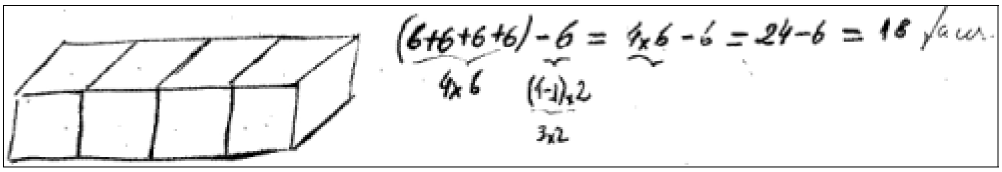


Figura 5: Resolução do professor. Atividade 2

Uma terceira maneira de resolver a tarefa proposta foi conseguir perceber que os cubinhos das extremidades teriam sempre 5 faces pintadas, enquanto os outros cubinhos teriam 4 faces pintadas.

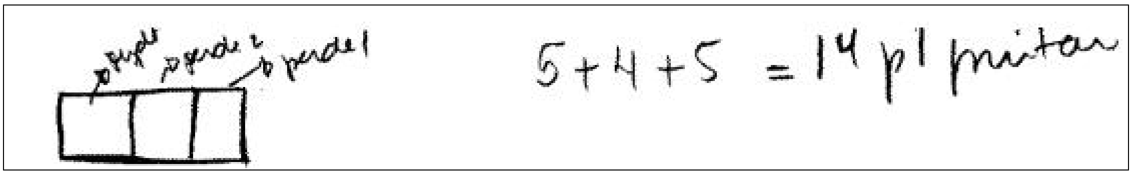


Figura 6: Resolução do professor. Atividade 2

Um fato interessante que observamos nesta etapa foi que um determinado professor, durante todo o seu processo de resolução da atividade 2, optou pela utilização de raciocínios aritméticos em detrimento da álgebra. Foi possível perceber que mesmo para quantidades maiores, quando foi dado, por exemplo, um total de 286 faces visíveis pintadas e foi pedida a quantidade de cubinhos acoplados, este professor não utilizou a fórmula correspondente.

286 - 10 = 276 → já achei 2 cubos
276 ÷ 4 = 69 cubos
total 69 + 2 cubos

Figura 7: Resolução do professor. Atividade 2

A idéia deste professor, inicialmente, foi tirar 5 faces de cada cubo das extremidades, perfazendo um total de 10 faces, deixando claro que já tinha encontrado dois cubos acoplados. Em seguida, como os outros cubos não estariam na extremidade, cada um deles teria somente 4 faces visíveis. Assim, de quatro em quatro faces, ele verificou que haveria um cubo formado, e concluiu que seria necessário dividir o total de faces restantes por quatro para encontrar a outra quantidade de cubos que faltava. Finalmente, bastaria somar a esta quantidade os dois cubos das extremidades já encontrados no início.

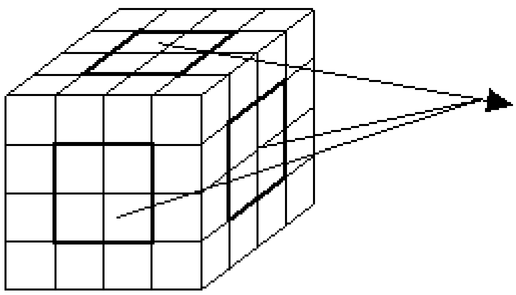
Atividade 3 – Cubos, Cubos e mais Cubos

A construção de uma tabela com os números de cubinhos que receberiam cor em uma, duas ou três faces para os cubos $2\times 2\times 2$, $3\times 3\times 3$, $4\times 4\times 4$, $5\times 5\times 5$ e $n\times n\times n$ foi a estratégia mais utilizada pelos professores para resolver esta atividade. Alguns não analisaram o caso $5\times 5\times 5$, passando imediatamente para a generalização.

Um dos alunos tirou da mochila um cubo mágico para auxiliá-lo na visualização e na contagem. Todos perceberam facilmente que o número de cubinhos com três faces pintadas era fixo e igual a 8, independente do tamanho da aresta do cubo.

A procura do número de cubinhos com duas faces pintadas gerou muita dificuldade para alguns professores. A contagem por face ficava complicada, já que um mesmo cubinho com duas faces pintadas se repetia em duas faces. Certos professores perceberam que ficava mais fácil se fossem percorridas as arestas, eliminando o problema de repetição das faces. Nem todos chegaram à generalização $12(n-2)$ para o número de cubinhos com duas faces pintadas. Esse número pode ser associado ao número de arestas do cubo (12) multiplicado por $n-2$, já que cada aresta corresponde a dois cubinhos na extremidade que não possuem somente duas faces pintadas.

O número de cubinhos com uma única face pintada pôde ser visto e generalizado facilmente pelos professores. Ao observar uma das faces do cubo maior, eles perceberam que os cubinhos com uma única face pintada apareciam na região central de cada face. Desta forma, a quantidade de cubinhos com uma única face pintada foi associada ao número de quadrados de cada face que não tinham contato com a aresta do cubo maior. A união dos quadradinhos em cada face formava um quadrado com a retirada de uma unidade de comprimento e uma de largura. O desenho abaixo pode auxiliar no entendimento da situação em questão:



Cubinhos que ficam com apenas uma face pintada. Observe que, em cada face, estes cubinhos unidos formam um quadrado com comprimento e largura medindo duas unidades a menos que as respectivas dimensões do quadrado formado na face do cubo original.

Figura 8: Explicação para a atividade 3

Como cada cubo possui 6 faces, para o cubo de aresta *n* teríamos $6 \cdot (n-2)^2$ cubinhos com apenas uma face pintada.

No início, muitos professores tiveram dificuldade de visualizar o número total de cubinhos com nenhuma face pintada no cubo $4 \times 4 \times 4$. Vários deles afirmavam que este total deveria ser 4. O material concreto, neste momento, foi fundamental para que os professores verificassem seu erro. Com o auxílio dos cubinhos de madeira, perceberam que, neste caso, havia 8 cubinhos com nenhuma face pintada.

Após muita discussão, o número de cubinhos com nenhuma face pintada pôde ser pensado como a quantidade destes presentes em um cubo "interno", cuja aresta media duas unidades a menos que o cubo original (tirando uma unidade no comprimento e uma na largura). Assim o número de cubinhos com exatamente uma face pintada pôde ser calculado em função do número *n* da aresta como $(n-2)^3$.

Um professor chamou a atenção para o fato de que o número de cubinhos com 0, 1, 2 e 3 faces pintadas em função do total de cubinhos representavam funções do terceiro grau, quadrática, linear e constante, respectivamente. Chamando de P_0, P_1, P_2, P_3 o número total de cubinhos com 0, 1, 2 e 3 faces pintadas respectivamente, temos as funções:

$P_0 = (n-2)^3$, $P_1 = 6 \cdot (n-2)^2$, $P_2 = 12 \cdot (n-2)$ e $P_3 = 8$.

Atividade 4 – Investigando Esqueleto de Cubos

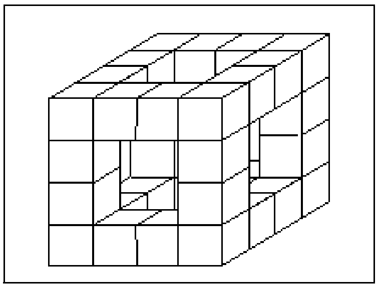


Figura 9: Esqueleto do cubo de aresta 4.

A grande maioria dos professores fez esta atividade com uma certa agilidade, já que a tarefa exigia um raciocínio semelhante ao utilizado na questão anterior. Eles concluíram que o esqueleto de um cubo, mostrado na figura ao lado, poderia ser obtido retirando do cubo "maciço" os cubos com uma face pintada e os cubos com nenhuma face pintada.

Uma professora tentou construir os esqueletos dos cubos utilizando os cubinhos de material concreto disponíveis e percebeu que a estrutura não se sustentava. Para resolver esse problema, utilizou folhas de papel entre os cubinhos para auxiliar na sustentação da estrutura. Apesar de se mostrar muito criativa na busca pelo entendimento e pela visualização das diversas situações propostas, pudemos notar que a professora ficou muito presa ao material concreto e a contagem sistemática dos cubinhos de madeira, sem conseguir atingir a abstração nem generalizar os processos de contagem.

Alguns alunos fizeram uma tabela relacionando o tamanho da aresta *n* do esqueleto de cubo com o total de cubinhos utilizados. Ao completarem a tabela, perceberam que, a partir de $n = 2$, a quantidade de cubinhos para formar o esqueleto do cubo era aumentada sempre em 12 unidades, como mostra o desenho representado na figura 10 feito por um professor.

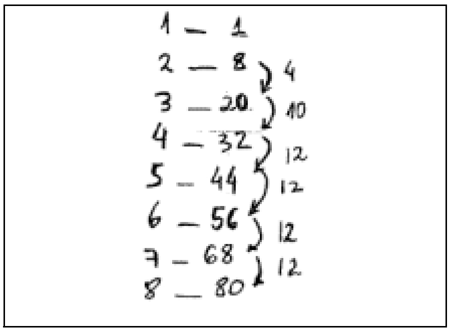


Figura 10: Explicação do professor. Atividade 4

Após algum tempo de discussão com os colegas, concluíram que isso acontecia porque cada aresta era aumentada em um cubinho. E, como todo esqueleto era formado por 12 arestas, para formar o próximo esqueleto era necessário o acréscimo de 12 cubinhos ao esqueleto anterior.

Na tentativa de generalização do resultado, houve duas maneiras diferentes de elaborar uma fórmula. Uma delas foi pensar que a estrutura do cubo teria que ser formada pelos cubos das "pontas" e pelos cubos que ligassem as pontas, que seriam os cubinhos da questão anterior que possuíam apenas duas faces pintadas. Então, a generalização foi imaginada da seguinte forma:

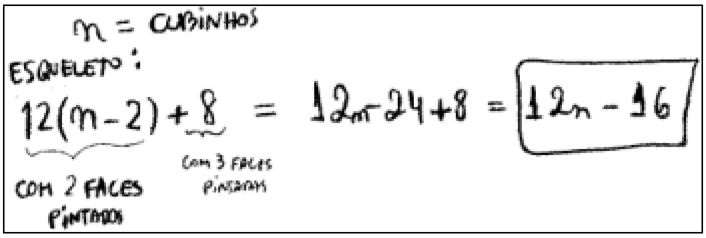


Figura 11: Explicação do professor. Atividade 4

O outro raciocínio utilizado para encontrar o total de cubinhos existentes no esqueleto $n \times n \times n$ foi pensar em retirar os excessos do volume do cubo $n \times n \times n$ da seguinte maneira: Total de cubos do esqueleto $n \times n \times n$ = (total de cubos no cubo $n \times n \times n$) - (total de cubos com uma face pintada) – (total de cubos com nenhuma face pintada). Pelas generalizações encontradas na atividade 3, temos:

$$\text{Total de cubos do esqueleto } n \times n \times n = n^3 - 6 \cdot (n-2)^2 - (n-2)^3$$

Após o desenvolvimento da fórmula e as devidas simplificações, os professores encontraram a expressão $12n - 16$ para representar o número total de cubinhos necessários para construir o esqueleto do cubo $n \times n \times n$. Em seguida, questionamos a possibilidade de este resultado possuir algum significado geométrico. Após algum tempo de análise e discussão, alguns deles responderam afirmativamente, a partir do argumento de que o esqueleto de qualquer cubo é formado por 12 arestas. No caso do cubo $n \times n \times n$, como cada aresta é formada por *n* cubos, teríamos um total de 12*n* cubinhos. Mas como os cubinhos das extremidades aparecem cada um em exatamente três arestas, cada um desses cubinhos será contado três vezes. Como existem exatamente 8 cubinhos na extremidade, temos que tirar $2 \times 8 = 16$ cubinhos do total para garantir que os cubos das extremidades só sejam contados uma única vez. Assim o esqueleto do cubo $n \times n \times n$ possui $12n - 16$ cubinhos unitários.

Outros professores ainda acrescentaram que para evitar a contagem em excesso e a posterior retirada dos cubinhos que fossem contados mais de uma vez, poderíamos contar $(n-2)$ cubinhos de cada aresta (subtraímos os dois cubinhos das extremidades que causariam a repetição) e, finalmente, somar os cubinhos das extremidades que são em um total de 8. O desenho abaixo, feito por um professor, ajuda a entender este fato.

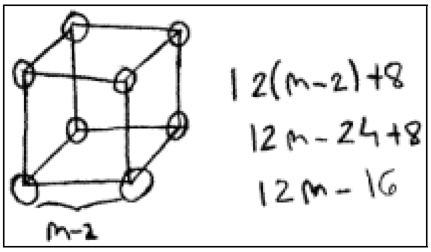


Figura 12: Explicação do professor. Atividade 4

Assim o total de cubinhos no esqueleto do cubo $n \times n \times n$ poderia ser pensado como $12(n-2)+8$ que reflete um outro caminho para encontrar o mesmo resultado.

Atividade 5 – Quantos Cubos?

A atividade em questão foi descrita da seguinte maneira:

Queremos contar os cubos de todos os tamanhos (medidas inteiras) formados nos cubos $1 \times 1 \times 1$, $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$, ...

Em seguida, uma tabela mostra a contagem desejada para os casos do cubo $1 \times 1 \times 1$ e do cubo $2 \times 2 \times 2$. Já no caso do cubo $3 \times 3 \times 3$, pede-se que o estudante complete a tabela e, após estes três exemplos, pergunta-se:

Você seria capaz de prever quantos cubos (com a aresta de medida inteira) de todos os tamanhos existem em um cubo $n \times n \times n$? Anote suas conclusões e justificativas.

Na leitura da atividade, os professores demonstraram dificuldade tanto para entender o que estava sendo pedido no enunciado da questão, como para resolver o problema proposto.

Um grupo de professores já sabia o que ocorria no caso da contagem dos quadrados de todos os tamanhos existentes em um quadrado $n \times n$. Neste caso, a contagem era feita da seguinte maneira:

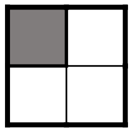
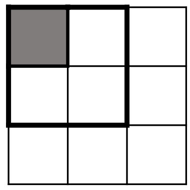
Quadrado 1×1	Quadrado 2×2	Quadrado 3×3
		
1 quadrado 1×1 (1^2)	1 quadrado 2×2 (1^2) 4 quadrados 1×1 (2^2)	1 quadrado 3×3 (1^2) 4 quadrados 2×2 (2^2) 9 quadrados 1×1 (3^2)

Tabela 4: Explicação do professor. Atividade 5

E assim, o número total de quadrados de todos os tamanhos formados no quadrado $n \times n$ era dado por:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + n^2$$

Desta forma, conjecturaram a seguinte soma para o total de cubos num cubo $n \times n \times n$:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3$$

Assim, foram testar a conjectura para os cubos $2 \times 2 \times 2$, $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$ e concluíram que a fórmula era válida.

Outro grupo de professores percebeu que havia uma espécie de recorrência na contagem dos cubos. Por exemplo: no cubo $3 \times 3 \times 3$ tínhamos um total de 8 cubos $2 \times 2 \times 2$. Para o cubo $4 \times 4 \times 4$ tínhamos, novamente, um total de 8 cubos $3 \times 3 \times 3$. Um professor generalizou este raciocínio, escrevendo:

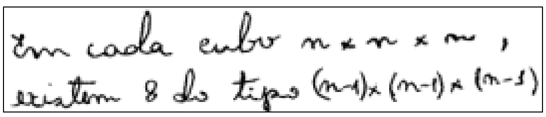


Figura 13: Explicação do professor. Atividade 5

Este fato permitiu o entendimento do problema e a formulação de uma conjectura para a generalização da fórmula esperada. Alguns grupos de professores, apesar de identificar a existência de uma relação de recorrência, tiveram dificuldade em chegar à generalização. Embora os professores tivessem identificado regularidades na contagem dos cubos e explicitado a fórmula para a soma dos cubos, a etapa de justificação dos resultados não foi plenamente alcançada.

4.3 Discussão dos textos

Após o trabalho com a atividade 5, que decidimos colocar no tópico anterior por uma questão de organização textual, iniciamos o trabalho com os textos pré-selecionados e já lidos pelos professores. Pedimos que em 15 minutos eles anotassem duas idéias (três linhas para cada idéia) que considerassem como principais para cada texto.

Analisando as respostas dos professores, podemos descrever as principais idéias de cada um dos textos, de acordo com a opinião dos mesmos. No texto do autor Paulo Abrantes (1999) foram evidenciadas pelos professores os seguintes tópicos:

- A apresentação de propostas que envolvam o aluno em atividades investigativas e exploratórias, considerando que este tipo de trabalho exige do aluno um papel mais ativo no processo ensino-aprendizagem;
- O reconhecimento da geometria como uma área propícia à realização de atividades de investigação;
- A exploração de situações, a elaboração de conjecturas, a generalização, a discussão, a justificação e a utilização de provas são elementos fundamentais para o trabalho com investigações em sala de aula.

No texto do Zalman Usiskin (1994) foram destacados pelos professores os itens seguintes:

- A abordagem de três problemas fundamentais: a questão do baixo desempenho dos alunos em geometria, o problema de não existir um currículo bem definido para a geometria e o despreparo dos professores que nunca estudaram geometria;
- Para resolver os problemas do ensino de geometria são sugeridas as seguintes estratégias: a elaboração de um currículo de geometria específico para cada

série, não afastar os alunos do estudo da geometria por eles serem fracos em aritmética ou em álgebra, exigir de todos os alunos um conhecimento mínimo de geometria e explorar conteúdos de geometria nos cursos de formação básica para professores de matemática da escola elementar ou secundária;

- A geometria pode ser considerada por diferentes dimensões: a geometria como o estudo da visualização, do desenho e da construção de figuras; a geometria como o estudo do mundo real, físico e a geometria como meio de representar conceitos matemáticos, ou outros, cuja origem não é visual ou física. Esta maneira de entender a geometria demonstra o caráter multidimensional da mesma.

Após o recolhimento das anotações das idéias principais dos textos, entregamos uma folha com três perguntas para cada texto que constam em anexo (anexo I, atividade 6). Foi disponibilizada uma hora da aula para a discussão das perguntas em grupo. Em seguida reunimos a turma para discutir as respostas às perguntas pelo grupo.

Com relação a esta discussão do texto de Paulo Abrantes (1999), excluindo as idéias que se apresentavam muito semelhantes ao trabalho desenvolvido anteriormente, podemos destacar os seguintes pontos levantados pelos alunos:

1- A geometria se mostra um tema propício à realização de atividades investigativas por recorrer com naturalidade à intuição, à visualização e à manipulação de materiais, além de representar um vasto campo para escolha de tarefas desta natureza que podem ser desenvolvidas em sala de aula. Este tipo de trabalho não exige um grande número de pré-requisitos e conseqüentemente, evita uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos "prontos";
2- O trabalho com atividades de investigação e a discussão sobre os processos envolvidos neste tipo de atividade pode desenvolver não só conhecimentos de Matemática, mas também conhecimentos sobre a Matemática, isto é a compreensão sobre como esta ciência é construída e sobre aspectos característicos de sua essência.

O debate com as perguntas sobre o texto de Zalman Usiskin (1994) apresentou idéias muito semelhantes às enumeradas pelos professores na atividade anterior, citadas na página 47.

Ao final da aula a pesquisadora fez aos professores uma breve exposição, com a utilização de slides, a respeito da realização de tarefas de investigação na sala de aula, enfatizando os seguintes aspectos:

- A transição entre ambientes de resolução de exercícios e atividades de investigação.
- Os momentos envolvidos na realização de atividades de investigação.
- O papel do professor numa aula de investigação.

O objetivo da apresentação e do detalhamento dos tópicos acima foi fornecer aos professores suporte teórico sobre como inserir na sala de aula atividades de investigação e resolução de problemas. Acreditamos que esta exposição levou-os a refletirem sobre a existência de diversos ambientes de aprendizagem, sobre a necessidade de se trabalhar com base nas etapas envolvidas nos processos de investigação e sobre o papel que têm na realização de aulas desta natureza. A transição entre ambientes de resolução de exercícios e atividades de investigação foi proposta por Skovsmose (2000).

Durante a apresentação da pesquisadora sobre os ambientes de aprendizagem propostos pelo autor procurou-se esclarecer e exemplificar esses ambientes (mais detalhes sobre este modelo podem ser observados no capítulo 1) e ressaltar a importância de se trabalhar na transição dos mesmos. É importante frisar que não foi defendido o trabalho único e exclusivo com cenários de investigação fazendo referências ao mundo real. A pesquisadora procurou esclarecer que nem sempre existe a possibilidade e a contextualização adequada para o trabalho com este tipo de ambiente e que, por isso, era importante ter a consciência da existência dos diversos ambientes para utilizá-los quando possível e da maneira mais apropriada.

Também foram destacados na apresentação os momentos envolvidos na realização de atividades de investigação. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) investigar em Matemática passa pelas seguintes ações: explorar e formular questões; conjecturar; testar e reformular as conjecturas e justificar e avaliar estas conjecturas. O objetivo foi esclarecer como se estrutura uma atividade de caráter investigativo para que o professor pudesse guiar o seu trabalho com investigações em sala de aula baseando-se no cumprimento destas etapas.

Por fim foram apresentados quais seriam os papéis do professor em uma aula de investigação. De acordo com as idéias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), o professor tem a função de: desafiar os alunos; avaliar o progresso dos alunos; raciocinar matematicamente, lidando com questões imprevistas e apoiar o trabalho dos alunos. Detalhes sobre as etapas de realização de uma investigação matemática e sobre o papel do professor neste tipo de atividade podem ser vistos no primeiro capítulo deste trabalho.

Capítulo 5. As atividades na sala de aula de Fernando

A terceira etapa desta pesquisa traz como objetivo principal refletir, com base nos nossos referenciais teóricos, sobre os desempenhos de Fernando e Lucas, os dois professores selecionados no curso de especialização em Ensino de Matemática, durante a aplicação de algumas atividades de investigação e resolução de problemas em suas salas de aula.

Neste capítulo iremos descrever e analisar as aulas com a aplicação das atividades de investigação e resolução de problemas do professor Fernando que, dentre as tarefas disponibilizadas, optou por aplicar, em suas turmas, as atividades 1 (Dobrando e Triplicando) e 2 (O Problema de Pintura de Faces). Vale ressaltar que tais atividades – que foram escolhidas pelo professor e fazem parte das cinco tarefas previamente desenvolvidas e discutidas com ele no curso de especialização – se encontram devidamente descritas no anexo I.

Procurando facilitar a leitura e o entendimento desta etapa da pesquisa, decidiu-se dividir este capítulo em três tópicos. O primeiro deles refere-se à descrição das respostas dadas pelo professor pesquisado ao questionário 1 (descrito no terceiro capítulo deste trabalho), que traz dez questões abertas, elaboradas com o intuito de levantar dados sobre sua trajetória profissional, assim como suas concepções, enquanto professor desta disciplina, sobre os conhecimentos matemáticos.

O segundo e mais extenso tópico deste capítulo, por conta da sua extensão, foi subdividido em oito itens, que buscam, da forma mais objetiva possível, apresentar os apontamentos feitos pela pesquisadora na sala de aula, enquanto o professor desenvolvia com suas turmas as atividades investigativas previamente escolhidas. Tais apontamentos foram elaborados a partir da observação direta da atuação do professor, do registro em diário, da transcrição das aulas gravadas e do acesso às atividades resolvidas pelos alunos.

Por fim, o último tópico expõe e analisa as considerações feitas pelo professor Fernando em uma entrevista realizada após a aplicação destas tarefas. As considerações basicamente se referem à sua opinião acerca do seu próprio desempenho durante as aulas observadas pela professora.

5.1 A formação de Fernando e suas opiniões iniciais

A partir da análise das respostas obtidas no questionário 1, neste tópico serão fornecidas informações mais detalhadas a respeito da formação e atuação profissional do professor Fernando, um dos dois participantes selecionados para esta terceira etapa da pesquisa, além de suas considerações acerca da importância da Matemática e dos aspectos que envolvem o processo de ensino-aprendizagem dos seus conteúdos.

Desde o ano de 2003, Fernando é licenciado em Matemática pela UFF (Universidade Federal Fluminense). Atua há cinco anos com o ensino profissionalizante, lecionando Estatística, Informática e Matemática. Com esta ultima disciplina, também trabalha há cinco anos no nível médio e há um ano no ensino fundamental.

É um professor que vem buscando aprimorar a sua prática de ensino, através da realização de cursos de aperfeiçoamento para professores de Matemática do ensino médio oferecidos pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada). Atualmente, faz o curso de especialização em ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro.

O principal motivo de Fernando para seguir a carreira de professor de Matemática, segundo suas respostas ao questionário inicial, foi "o prazer de semear nos alunos uma cultura participativa e investigativa". Para ele, a função do professor é orientar e motivar o aluno no processo de aprendizagem, na medida em que considera o estudante a peça principal que atua e dinamiza o ensino. Com relação às avaliações, Fernando acredita que estas devem ser diversificadas, contínuas e acumulativas.

O professor julga também os conteúdos da Matemática importantes para o dia-a-dia das pessoas, pois, segundo ele, muitos conceitos matemáticos podem ser aplicados na vida prática a partir de diferentes olhares. Considera também a Matemática fundamental para a vida profissional, quando usada com propriedade, de acordo com as necessidades de cada um, já que, de acordo com Fernando, ela facilita e auxilia na organização e execução de inúmeras tarefas exigidas ao trabalhador.

O conhecimento matemático, para ele, é a capacidade que o indivíduo tem de utilizar a Matemática, "mesmo sem saber que está usando". Na opinião de Fernando, é importante saber em Matemática as operações e as relações dentro dos diversos conjuntos numéricos e suas aplicações.

O professor em questão escolheu duas turmas de uma mesma instituição para desenvolver as atividades de investigação anteriormente trabalhadas por ele no seu curso de especialização. Na sua turma do 9º ano do ensino fundamental aplicou a atividade 1 (Dobrando e triplicando), enquanto a atividade 2 (O Problema de Pintura de Faces) foi selecionada por ele para ser desenvolvida com os alunos do 8º ano deste mesmo nível de ensino. Os aspectos que consideramos mais importantes ocorridos durante a o trabalho com estas tarefas serão descritos, por tópicos, ao longo deste capítulo, sempre buscando relacionar a postura e as estratégias adotadas pelo professor com os referenciais teóricos desta pesquisa.

5.2 Observação na sala de aula

Este tópico, dividido em oito itens, descreve a atuação do professor Fernando durante a aplicação das tarefas pré-selecionadas de investigação e resolução de problemas (atividades 1 e 2) em duas das suas turmas. Vamos relatar os principais fatos ocorridos nas diferentes salas de aula, relacionando-os, como dito anteriormente, com nossos referenciais de pesquisa, enfatizando, em cada item, a ação do professor, que é o nosso principal foco de estudo. Vale observar que ambos os itens**:** 5.2.1 (Os processos envolvidos na investigação) e 5.2.3 (O aluno no ambiente de investigação) apresentam descrições e exemplos de explicações dadas pelos alunos, mas o primeiro item apresenta idéias destes alunos que se relacionam com os processos envolvidos nas investigações enquanto o item 5.2.3 destaca os momentos em sala de aula que os alunos participaram de maneira ativa no processo ensino-aprendizagem.

No momento em que a tarefa "O Problema de Pintura de Faces" (atividade 2) foi desenvolvida com a turma do 8º ano – apenas uma aula de 50 minutos, excedendo mais 10 minutos do intervalo –, havia na sala 45 alunos, que se dividiram em 10 grupos de 4 componentes e apenas um grupo com 5 elementos. Já nos períodos em que a tarefa Dobrando e triplicando (atividade 1) foi aplicada – foram disponibilizados três aulas seguidas, de 50 minutos cada uma, para a aplicação da mesma –, estavam presentes 30 alunos do 9º ano do ensino fundamental, divididos em grupos de três componentes, com um deles assumindo a responsabilidade de manter a ordem dentro da sua equipe.

Um fato importante que foi observado durante a formação das equipes é que, nas duas turmas em que foram aplicadas as tarefas, o professor já possuía grupos preestabelecidos para a execução de trabalhos em equipe. Ao ser questionado sobre tal fato, Fernando considerou este procedimento mais prático e mais produtivo. De acordo com o argumento do professor, formar diferentes grupos a cada trabalho a ser efetuado despende muito tempo, além do fato de que a constância dos grupos deixava os alunos mais à vontade para expor suas idéias dentro da equipe e, conseqüentemente, o trabalho se tornava mais produtivo.

Para a correção das tarefas propostas a cada turma foi utilizada a aula seguinte à execução destas atividades pelos grupos, com duração de 50 minutos.

5.2.1 Os processos envolvidos na investigação

Neste primeiro item deste tópico, esclareceremos como se deu o desenvolvimento dos processos de investigação da atividade 1 (Dobrando e triplicando) pelos alunos do 9º do professor Fernando, assim como da atividade 2 (O Problema de Pintura de Faces) pelos alunos do 8º ano. É importante ressaltar que, em concordância com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), estamos levando em conta as seguintes etapas envolvidas na realização de uma atividade investigativa: explorar e formular questões, fazer conjecturas, testar e reformular as conjecturas e, por fim, justificar e avaliar. Descreveremos as situações ocorridas nas salas de aula destas duas turmas, considerando, separadamente, cada uma destas etapas.

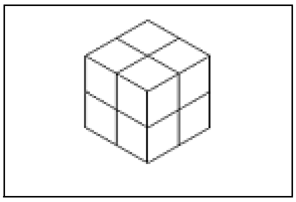


Figura 14: Atividade 1 (Figura 1 dobrada)

No momento inicial de exploração da atividade 1, os alunos do 9º ano apresentaram diversas dúvidas com relação ao que estava sendo proposto. No cálculo do perímetro do topo da figura ao lado, por exemplo, alguns estudantes achavam que deveriam contar as linhas interiores. Desta forma, encontravam $12a$ como resultado do perímetro do topo, ao invés de $8a$. Surgiu também um questionamento acerca da figura triplicada, se esta deveria representar o triplo da figura já dobrada ou o triplo da figura original. Os alunos também não estavam acostumados com a expressão "área da superfície", e, por isso, tiveram dificuldade de relacioná-la com o cálculo da área total.

Logo que o problema de pintura de faces (atividade 2) foi aplicado aos alunos do 8º ano, muitos questionaram se deveriam ser consideradas visíveis as faces que ficavam apoiadas na mesa e alguns confundiram a imagem real com a representação visual das figuras. A figura a seguir mostra a contagem das faces visíveis efetuadas por um grupo de estudantes:

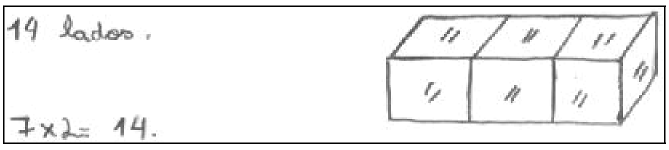


Figura 15: Explicação do aluno. Atividade 2

Primeiramente o grupo escreveu que no caso de três cubinhos acoplados havia um total de sete faces visíveis a serem pintadas. Após a interferência do professor, os alunos corrigiram o resultado, multiplicando-o por 2 e obtendo um total de 14 faces visíveis pintadas.

Na formulação das conjecturas para a atividade 1, a grande maioria dos alunos do 9º ano afirmou que os perímetros do topo da figura dobrada e triplicada deveriam ser, respectivamente, o dobro e o triplo do perímetro do topo da figura original. Com a realização de vários testes, eles puderam perceber que tal afirmação era sempre válida.

A relação entre a área do topo, a área da superfície e o volume das figuras originais com seus respectivos valores ao se duplicar e triplicar a figura requisitou dos estudantes um pouco mais de tempo. Após um longo período de investigação, muitos alunos descobriram essa relação. Para clarificar o que estamos dizendo, segue uma parte da tabela preenchida por uma aluna e suas conclusões sobre as regularidades encontradas:

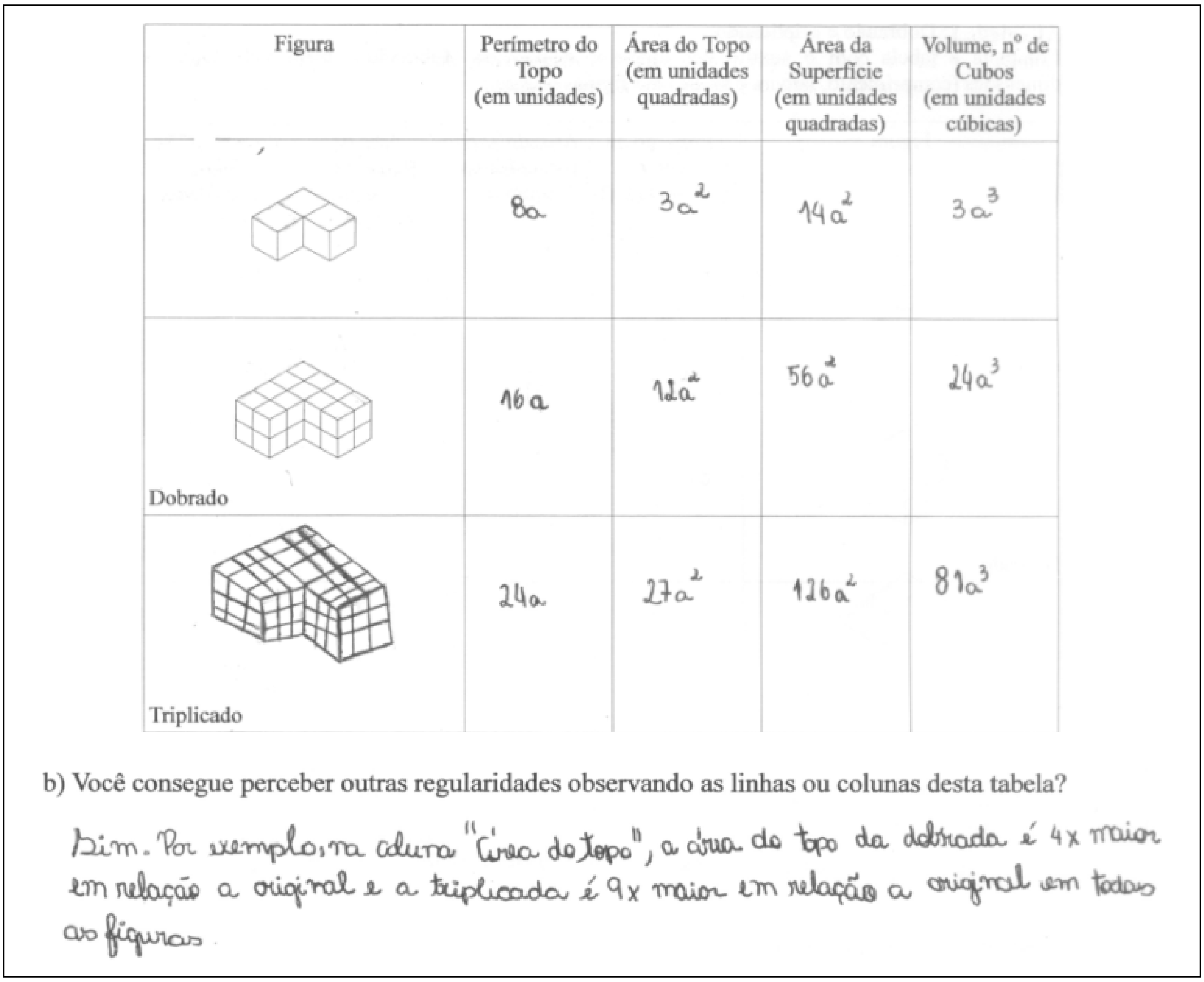


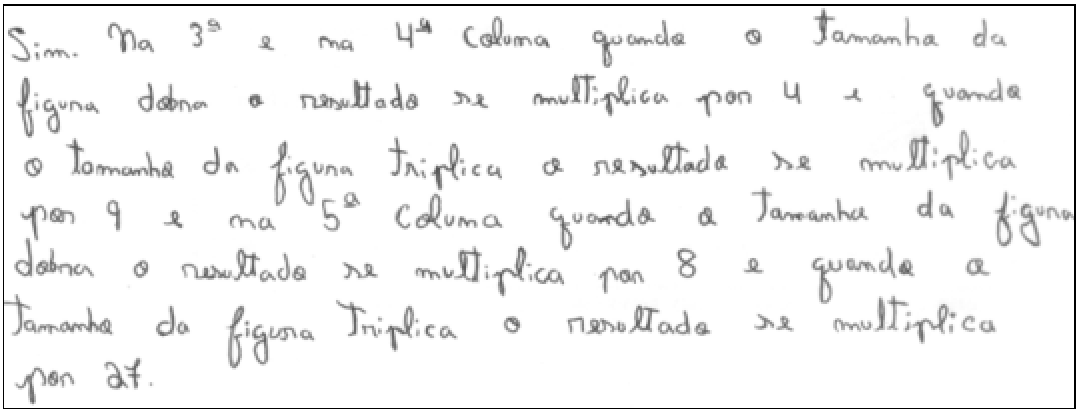
Figura	Perímetro do Topo (em unidades)	Área do Topo (em unidades quadradas)	Área da Superfície (em unidades quadradas)	Volume, nº de Cubos (em unidades cúbicas)
	8a	$3a^2$	$14a^2$	$3a^3$
Dobrado	16a	$12a^2$	$56a^2$	$24a^3$
Triplicado	24a	$27a^2$	$126a^2$	$81a^3$

b) Você consegue perceber outras regularidades observando as linhas ou colunas desta tabela?

Sim. Por exemplo, na coluna "área do topo", a área do topo da dobrada é 4x maior em relação a original e a triplicada é 9x maior em relação a original em todas as figuras.

Figura 16: Explicação do aluno. Atividade 1

Outro aluno do 9º ano apresentou uma resposta ainda mais completa para esta mesma pergunta, evidenciando também as relações entre o volume da figura original e o das figuras dobrada e triplicada.

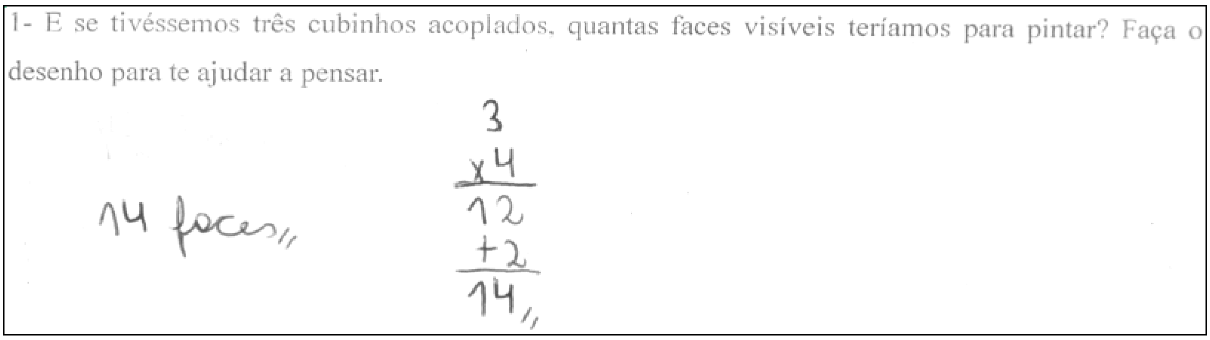


Sim. Na 3ª e na 4ª coluna quando o tamanho da figura dobra o resultado se multiplica por 4 e quando o tamanho da figura triplica o resultado se multiplica por 9 e na 5ª coluna quando o tamanho da figura dobra o resultado se multiplica por 8 e quando o tamanho da figura triplica o resultado se multiplica por 27.

Figura 17: Explicação do aluno. Atividade 1

Embora alguns alunos do 9º ano não tenham conseguido, neste momento de conjecturas, descobrir tais relações, estes mesmos foram capazes de perceber que existia uma regularidade e descreveram que os valores das áreas das superfícies e dos volumes das figuras dobradas e triplicadas eram respectivamente valores múltiplos de dois e de três.

Na turma do 8º ano, o período de formulação e testes de conjecturas para a atividade 2 realizou-se de maneira rápida e produtiva para a maior parte das equipes. Após 15 minutos do início da atividade, já se ouvia alguns grupos de alunos explicando: "Sempre aumenta de 4 em 4 faces". Muitos alunos já representavam a situação através de cálculos numéricos ou até mesmo do uso da expressão algébrica para justificar os valores encontrados nas perguntas iniciais. A solução do grupo 1 mostra a compreensão dos alunos a respeito do cálculo numérico que justifica a resposta encontrada.



1- E se tivéssemos três cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar? Faça o desenho para te ajudar a pensar.

14 faces

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 4 \\ \hline 12 \\ +2 \\ \hline 14 \end{array}$$

Figura 18: Explicação do aluno. Atividade 2

Já o grupo 2 justificou o resultado encontrado através de uma sentença matemática fechada.

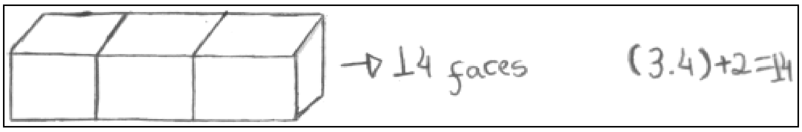


Figura 19: Explicação do aluno. Atividade 2

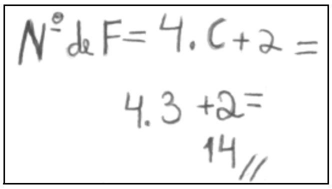


Figura 20: Explicação do aluno. Atividade 2

Este outro grupo de alunos do 8º ano utilizou a equação que fornece o número n de faces pintadas em função do número C de cubinhos acoplados. Em seguida, os alunos substituíram o número C de cubinhos por 3 (pedido no enunciado da questão) para encontrar o número de faces pintadas.

Vale ressaltar que os cálculos representados são fundamentais à generalização do problema para o número *n* de cubinhos acoplados solicitada na página seguinte da atividade. Alguns alunos, inclusive, só justificaram seus resultados iniciais, dados de forma numérica, após o término da atividade.

O processo de justificação das respostas para a atividade 1 não foi plenamente alcançado pelos alunos do 9º ano. Somente um dos grupos argumentou que existia uma razão de semelhança entre os valores do perímetro do topo, da superfície e do volume da figura original com os respectivos valores das figuras dobrada e triplicada. Mas os estudantes deste grupo não souberam dizer qual era a razão e nem porque ela funcionava.

O 8º ano, no entanto, apresentou conclusões compensadoras e uma boa compreensão da atividade 2 como um todo. A alta produtividade dos alunos desta turma nesta atividade foi favorecida por pré-requisitos fornecidos pelo professor Fernando em aulas anteriores. Mais detalhes sobre as aulas anteriores podem ser encontrados em um tópico posterior referente ao papel do professor.

5.2.2 A sala de aula como um ambiente de investigação

Baseado nas leituras de Skovsmose e Alro (2000), este item analisa a importância do desenvolvimento de uma atmosfera investigativa na realização de tarefas matemáticas e de que forma este clima pode ser construído na sala de aula pelo regente de classe.

Pode-se dizer que foi criado, nas salas de aula de ambas as turmas do professor Fernando, um ambiente de investigação. Isso porque, além de as duas atividades propostas para cada classe naturalmente sugerir um trabalho investigativo, também o professor, com os passos adotados e os comandos formulados na proposta das tarefas, contribuiu para que os estudantes se envolvessem na realização das mesmas com uma postura de interesse e curiosidade. No caso específico do 9º ano, vale ressaltar, ainda, o cuidado que Fernando teve em ampliar o seu tempo para a execução e a auto-correção da tarefa com os estudantes, na medida em que, na escolha da atividade 1 para esta turma, julgou-a muito enriquecedora para seus alunos, observando, porém, que sua resolução despenderia um tempo maior. Neste sentido, para não dividir as aulas em dois dias, negociou com o professor que assumiria a turma imediatamente depois dele, dispondo, assim, de quatro aulas consecutivas para aplicar e depois corrigir tal atividade.

Fernando iniciou tanto a primeira das três aulas do 9º ano disponibilizadas para a resolução da tarefa Duplicando e triplicando, como a aula do 8º ano destinada para a execução da tarefa 2 (O Problema de Pintura de Faces), entregando uma atividade para cada equipe formada, reforçando a idéia de que o trabalho deveria ser feito por todos os seus membros, de forma coletiva.

Outra atitude do professor que também favoreceu a criação de um ambiente investigativo foi o fato de disponibilizar dez minutos para que os membros de um grupo, após a execução da tarefa e a realização de observações e questionamentos, transitassem pela sala, trocando informações com os componentes dos outros grupos. De forma bem criativa e criteriosa, Fernando colocou como única restrição a esta troca de informações a impossibilidade de qualquer aluno levar consigo a folha de respostas da sua equipe, evitando assim a cópia das respostas de um grupo pelo outro e obrigando, de certa forma, os alunos de determinada equipe a entenderem também as resoluções das outras equipes, ao invés de reproduzir os resultados dos colegas em sua folha de respostas.

Cabe destacar que a turma do 8º ano se envolveu com a atividade de tal maneira que o ambiente de investigação pôde ser caracterizado pela participação ativa dos estudantes na realização da tarefa. Os alunos permaneceram envolvidos durante todas as etapas de desenvolvimento da atividade (exploração, teste, formulação, reformulação, validação e justificação dos resultados). Os estudantes também participaram ativamente da correção da atividade no quadro pelo professor. Apesar de não irem ao quadro, eles respondiam às perguntas feitas pelo professor e algumas vezes propunham suas próprias idéias. Mais detalhes sobre a interação professor-aluno durante a correção da atividade podem ser encontrados na seção 5.2.6.

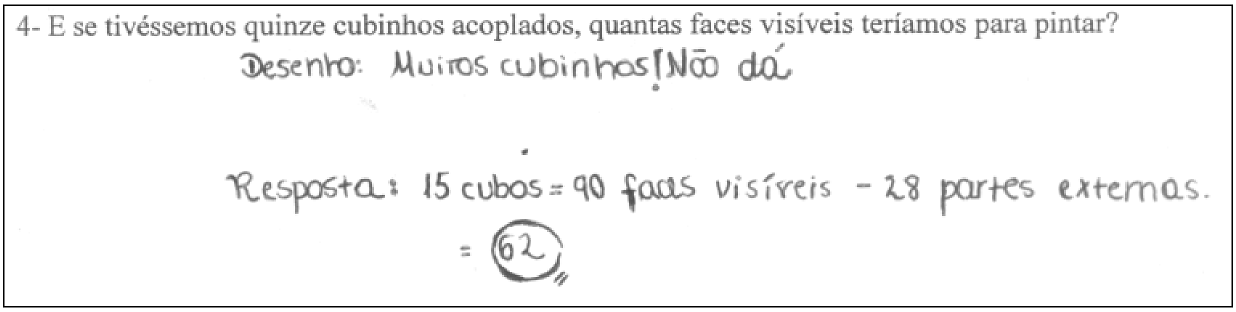
5.2.3 O aluno no ambiente de investigação

Serão descritos neste item os momentos de execução das tarefas de investigação em sala de aula destacando a participação dos estudantes no desenvolvimento das atividades. Em concordância com Onuchic (1999) acreditamos que os alunos devem experimentar exercícios que valorizem a iniciativa em Matemática e trabalhem hábitos matemáticos de pensamento. Acreditamos que as atividades aqui destacadas ofereceram aos alunos a oportunidade de desenvolverem tais hábitos de pensamento, além de ter capacitado os estudantes a resolverem problemas de Matemática e do dia-a-dia (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006)

Na realização da tarefa 1 (Dobrando e Triplicando) com a turma do 9º ano do ensino fundamental do professor Fernando, podemos dizer que os alunos desenvolveram o raciocínio matemático e apresentaram resultados satisfatórios no que concerne ao cumprimento das etapas de investigação. Apenas a etapa de justificação dos resultados obtidos ficou prejudicada. Os estudantes conseguiram identificar regularidades entre os valores do perímetro, das áreas (topo e superfície) e do volume com seus respectivos resultados para as figuras dobradas e/ou triplicadas. Porém eles não sabiam explicar por que estas regularidades sempre funcionavam. Por exemplo, no caso da área do topo (figura 16, p. 54), os alunos identificaram que o seu valor na figura original se multiplicava por 4 para o cálculo da área do topo da figura dobrada, mas os estudantes não associavam o número 4 ao fator 2^2 e não relacionaram este fato com a idéia de área. Acreditamos que um trabalho mais constante quanto ao uso de atividades de investigação poderá desenvolver nos alunos a capacidade de justificação e validação dos fatos.

Na turma do 8º ano, os alunos apresentaram raciocínios matemáticos compensadores. Como mostrado no tópico anterior, muitos alunos representaram, já nas primeiras perguntas, os cálculos necessários para encontrar o número de faces pintadas de acordo com a quantidade de cubinhos enunciada no problema.

A quarta pergunta da atividade 2 envolvia uma quantidade maior de cubinhos a serem acoplados e os estudantes começaram a perceber que poderiam calcular a quantidade de faces visíveis a serem pintadas sem se utilizarem da representação concreta ou visual. Veja o enunciado da questão quatro, seguida do argumento de um grupo de alunos:


4- E se tivéssemos quinze cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?

Desenho: Muitos cubinhos! Não dá

Resposta: 15 cubos = 90 faces visíveis − 28 partes externas.
= 62

Figura 21. Explicação do aluno. Atividade 2

Neste argumento, é interessante observar que os estudantes partiram do total de cubinhos, multiplicaram esta quantidade por seis (já que cada cubinho possui seis faces visíveis) e, em seguida, retiraram 28 faces que eles escreveram como externas. Mas, na verdade, estas 28 faces representam as que não são visíveis, pois existem $n-1$ interseções para cada n cubinhos e cada uma delas "esconde" 2 faces. No caso da questão acima, como temos 15 cubinhos acoplados, existem 14 interseções, e cada uma delas esconde duas faces. Assim, temos um total de $2 \cdot 14 = 28$ faces "escondidas".

Na generalização do problema "O número F de faces pintadas em função do número n de cubinhos acoplados", houve duas maneiras distintas de representação algébrica corretas da situação pelos grupos de alunos. A generalização mais freqüente entre os grupos foi a seguinte:

$$F = (n \cdot 4) + 2$$

Alguns grupos, porém, escreveram a generalização da seguinte maneira:

$$F = 6 + (n-1) \cdot 4$$

Nesta segunda generalização, os alunos apresentavam dificuldades em explicar por que a fórmula funcionava. Ainda houve um grupo de alunos que representou equivocadamente a expressão $n \cdot 4$ para o caso de n cubinhos acoplados.

Finalmente, foi pedido que os estudantes calculassem o número de cubinhos acoplados, dado certo número de faces pintadas. A seguir, destacamos o enunciado da questão, seguida da resolução de dois grupos distintos de alunos:

7- E se você soubesse o número de faces visíveis que ficam pintadas, saberia dizer quantos cubinhos foram acoplados? Por exemplo, se tivéssemos um total de 86 faces visíveis pintadas, quantos cubinhos estariam acoplados?

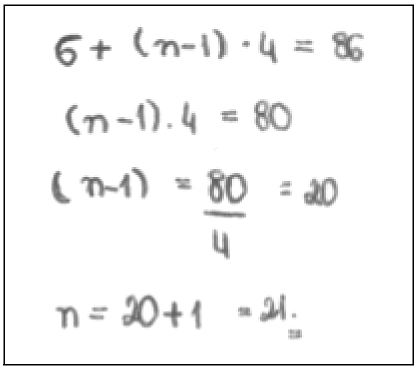


Figura 23. Explicação do aluno. Atividade 2

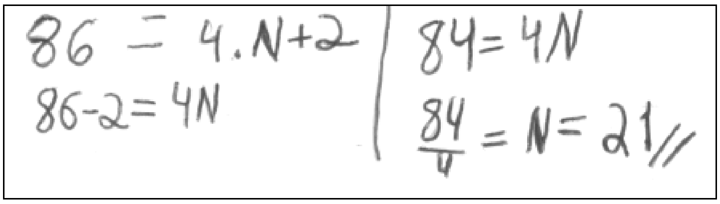


Figura 22. Explicação do aluno. Atividade 2

Alguns grupos ainda não haviam se familiarizado com a fórmula, mesmo após terem escrito na questão anterior. Desta forma, para determinar o número de cubinhos acoplados, sendo dado o número de faces visíveis, estes alunos se utilizaram do método de tentativas, buscando o número que multiplicado por quatro e somado com dois totalizasse 86 (número de faces pedidas no enunciado acima). O grupo responde, justificando com o cálculo:

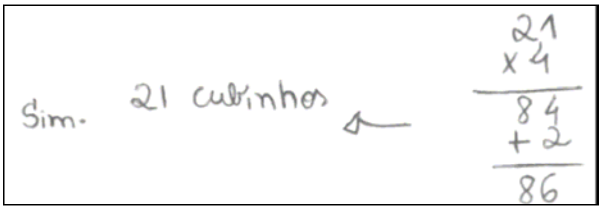


Figura 24. Explicação do aluno. Atividade 2

Os grupos que não haviam encontrado a generalização para a fórmula na questão anterior não conseguiram calcular o número exato de cubinhos para as questões seguintes. Para a questão acima, por exemplo, eles pegaram o número total de faces pintadas (86), dividiram por quatro e encontraram 21 como quociente e 2 como resto, respondendo: “Aproximadamente, 21 cubinhos”.

5.2.4 O papel do professor

Este tópico foi destinado ao relato de momentos em sala de aula nos quais a figura do professor exerceu papel importante. É importante destacar que de acordo com os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2007) consideramos como fundamentais ao educador as seguintes ações: desafiar e avaliar o progresso dos alunos; raciocinar matematicamente e apoiar o trabalho dos estudantes.

Durante aplicação da atividade 1 (Dobrando e Triplicando), o regente da classe do 9º ano mostrou-se ativo e participativo desde o início da sua realização. Após a divisão da turma em grupos de três pessoas, entregando a cada equipe uma cópia da tarefa 1, o professor, eventualmente, esclareceu dúvidas dos alunos no quadro, mas isso só foi feito depois de dar aos alunos um tempo razoável para que, entre eles, analisassem e resolvessem o problema proposto. Tentando respeitar a autonomia dos alunos no trabalho de investigação, Fernando interferiu apenas quando percebia que um mesmo questionamento se mostrava presente em diversos grupos, ou quando verificava que a dúvida do estudante iria interferir em todo o desenvolvimento da tarefa.

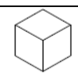


Figura 1

Figura 25: Atividade 1

Nos momentos iniciais da execução da tarefa com o 9º ano, Fernando falou da necessidade de se estabelecer uma unidade fixa para que os alunos começassem a trabalhar. Ele sugeriu então que, na figura 1, os estudantes considerassem a aresta do cubo como a unidade padrão de trabalho e a chamassem de *a*. Como alguns alunos não se sentiam ainda confortáveis em trabalhar com letras, sugeriram que fosse dado um valor numérico para a aresta. O professor acabou por convencê-los de que eles teriam muito trabalho para calcular os valores dos perímetros do topo, das áreas de superfícies e do volumes nas figuras maiores que se seguiam. Os alunos sugeriam, por exemplo, estabelecer o valor cinco para a aresta da figura 1. Fernando explicou que, desta forma, o perímetro do topo seria equivalente a 20, e que, para as figuras dobradas e triplicadas, o valor do perímetro se tornaria ainda maior. Na nossa opinião, o professor poderia ter sugerido o valor unitário para a aresta, evitando despender muito tempo com cálculos algébricos e enfatizando os aspectos geométricos do problema.

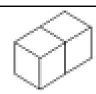


Figura 2

Figura 26: Atividade 1

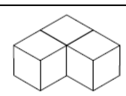


Figura 3

Figura 27: Atividade 1

O trabalho numérico foi poupado, mas surgiram muitas dificuldades com a álgebra. Os estudantes apresentaram muitas dúvidas para efetuar os cálculos envolvendo potências de a. No cálculo do perímetro do topo, por exemplo, na figura 2 ao lado, os alunos não estavam seguros quanto ao resultado da soma $2a + a + 2a + a$. Alguns encontraram $6a^4$ como resultado e, à medida que prosseguiam para o cálculo do perímetro do topo das figuras seguintes, as arestas possuíam dimensões maiores e, conseqüentemente, as potências do resultado iam se tornando cada vez maiores. Para o perímetro do topo da figura 3, por exemplo, representado pela soma $2a + 2a + a + a + a + a$, foi atribuído o resultado $8a^6$. Neste momento, o professor chamou a atenção dos alunos para o erro.

Na turma do 8º ano, Fernando teve a preocupação de preparar os alunos para iniciarem a atividade de investigação. Em suas aulas anteriores, o professor trabalhou com equações e com a idéia de função através dos seguintes exemplos:

Certo tanque A está vazio e enche 2 litros de água a cada minuto, enquanto um tanque B esvazia 3 litros de água por minuto. Qual é a expressão que representa a vazão de água em função do tempo para os respectivos tanques A e B?

Fernando comentou que analisou a situação junto aos alunos com muita calma, substituindo diferentes intervalos de tempo, calculando a vazão para cada um dos intervalos e representando graficamente as duas situações. Este preparo foi fundamental para o desenvolvimento dos alunos do 8º ano na atividade 2 e potencializou o raciocínio matemático e as argumentações dos alunos na atividade de investigação.

5.2.5 A comunicação professor-aluno

Os detalhes e comentários a respeito do diálogo professor-aluno serão descritos neste item tendo como base o modelo de cooperação investigativa (Modelo-CI) proposto por Alro e Skovsmove (2006). Desta forma, iremos enfatizar os seguintes elementos, defendidos pelos autores como auxiliares na efetivação da comunicação: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar.

Momentos marcantes de comunicação entre o professor e seus alunos ocorreram durante a correção da atividade 2 na turma do 8º ano. O contato entre Fernando e seus alunos foi estabelecido já no início da correção, quando estes responderam em coro as perguntas do professor, assim esquematizadas:

1 cubinho: 6 faces visíveis 2 cubinhos: 4 (faces visíveis para cada cubo) $\times$ 2 (total de cubos) $+$ 2 (cubos das extremidades) 3 cubinhos: 4 (faces visíveis para cada cubo) $\times$ 3 (total de cubos) $+$ 2 (cubos das extremidades) $\vdots$ n cubinhos: 4 (faces visíveis para cada cubo) $\times$ n (total de cubos) $+$ 2 (cubos das extremidades)

Durante a explicação desses fatos por Fernando, alguns alunos do 8º ano perceberam e comentaram em voz alta sobre o que acontecia ao ser acrescido mais um cubinho à estrutura: "Vai crescendo de quatro em quatro". O professor posicionou-se diante da turma, enfatizando que cada cubo possuía quatro faces visíveis (tirando as duas faces laterais) a serem pintadas e os alunos reconheceram o significado geométrico do número quatro, além de perceberem que este fato era uma constante para todos os casos.

Após explicar o caso de cinco cubinhos acoplados, Fernando desafiou os alunos do 8º ano a calcular o número de faces pintadas para o caso de dez cubinhos acoplados. Alguns responderam que o número dobra em relação ao caso de cinco cubinhos. Fernando construiu com eles os resultados para o caso de três e seis cubinhos acoplados e os alunos perceberam o erro para o caso anterior e reformularam seus resultados.

Desta forma, o momento da correção da atividade 2 com os alunos do 8º ano apresentou características do Modelo-CI e representou para Fernando um momento de estabelecer contato, desafiar e avaliar qualitativamente seus alunos, enquanto para os estudantes foi um momento de expor suas idéias, questionar os resultados e reformular suas conclusões.

5.2.6 A avaliação das tarefas de investigação

O momento da avaliação deve representar uma oportunidade de observação do progresso dos alunos e, não menos importante uma ocasião para o professor analisar a eficácia da sua didática em sala de aula (Santos, 1997). Caminhando nesta direção, iremos descrever, neste item, os processos de avaliação ocorridos sobre a regência do professor Fernando.

A avaliação da atividade 1 foi feita pelo professor através da correção dos relatórios escritos por cada grupo do 9º ano. No início da realização desta tarefa, Fernando chamou a atenção que a atividade iria valer nota e que a nota do grupo valeria para todos os seus membros. Durante a correção, o professor procurou valorizar todo o desenvolvimento do raciocínio empregado, e, desta forma, as questões parcialmente corretas também foram pontuadas.

No dia da entrega dos trabalhos aos alunos, Fernando corrigiu a atividade no quadro, dando ênfase para alguns detalhes importantes. Apesar de ter valorizado, na atividade escrita, as idéias dos alunos e seus argumentos coerentes, embora incompletos, não foi observada interação no processo avaliativo. Os alunos receberam a atividade corrigida, mas não existiu espaço para que fossem ao quadro mostrar suas diferentes maneiras de realização da tarefa. Acreditamos que os métodos tradicionais de avaliação, onde apenas a resposta final do aluno é analisada, não avaliam de forma construtiva a aprendizagem dos estudantes (Santos, 1995) e que a existência de um espaço para que estes mostrassem ao professor e aos colegas as suas diferentes maneiras de pensar sobre o problema proposto, poderia tornar a avaliação mais dinâmica e enriquecedora para o processo de aprendizagem.

5.2.7 O papel da visualização

Partindo de pressupostos teóricos tais como Veloso (1998) que afirma que o poder de visualizar pode ser trabalhado e desenvolvido e reforçando a idéia de Arcavi (2003) que enfatiza a função da visualização como sendo, muitas vezes, o de suportar, ilustrar e confirmar a veracidade de resultados simbólicos, iremos destacar momentos das aulas observadas em que a visualização assumiu um papel importante.

A visualização teve papel importante na apresentação inicial das atividades 1 e 2 pelo professor Fernando aos seus alunos do 9º e 8º anos, respectivamente. Compreender o que estava sendo proposto nas tarefas passava, necessariamente, por enxergar o que estava acontecendo em cada uma das atividades. Um momento interessante em que a visualização mereceu papel de destaque foi durante a correção da atividade 2 na turma do 8º ano, onde Fernando optou pela utilização de raciocínios visuais para auxiliar os alunos na compreensão dos resultados obtidos. Detalhes sobre esta correção já foram evidenciados na seção anterior.

5.2.8 A utilização do material concreto

A respeito do uso do material concreto, Moyer (2001) afirma que a manipulação ativa desses materiais leva os aprendizes a desenvolverem um repertório de imagens que podem ser utilizados, posteriormente, na manipulação mental de conceitos abstratos. Reconhecendo a importância e a eficácia do material concreto, quando utilizados com propriedade, iremos nos deter aqui à descrição de seu uso durante as aulas observadas.

Ao iniciar a atividade 1 na turma do 9º ano, Fernando distribuiu uma pequena porção de cubinhos para cada grupo. O material foi importante nos primeiros momentos, contribuindo para a visualização das figuras trabalhadas e para o desenvolvimento do raciocínio espacial. Com a utilização dos cubinhos de madeira, os alunos perceberam geometricamente que as áreas das superfícies das figuras aumentavam bidimensionalmente em relação à figura original. Desta forma, os valores das superfícies das figuras dobradas e triplicadas eram multiplicados por uma constante elevada ao quadrado. Os estudantes verificaram que o volume das figuras crescia tridimensionalmente e, por isso, os valores da figura original eram multiplicados por uma constante elevada ao cubo para que fossem encontrados os volumes das figuras dobradas e triplicadas.

O material concreto deu suporte para que a grande maioria dos alunos da turma do 9º ano alcançasse a abstração, percebendo as relações entre as figuras e seus respectivos perímetros, áreas e volumes na atividade 1. À medida que as figuras iam se tornando maiores e menos uniformes, ficava mais complicado visualizar o desenho da mesma quando suas dimensões eram dobradas e triplicadas. Muitos alunos não conseguiram fazer os desenhos que representavam a duplicação e triplicação das dimensões das figuras 3 e 4 (desenho ao lado). Recorrer à construção das figuras utilizando os cubinhos de madeira também se tornava inviável, já que o número de cubinhos necessários para tal construção era muito superior a quantidade de cubinhos disponíveis. Porém os estudantes conseguiam perceber o que acontecia com as medidas dos seus perímetros, áreas e volumes em relação aos respectivos valores na figura original. Foi possível "prever" o comportamento das figuras dobradas e triplicadas e calcular os valores de suas dimensões através da análise dos valores encontrados para as figuras anteriores (1 e 2).

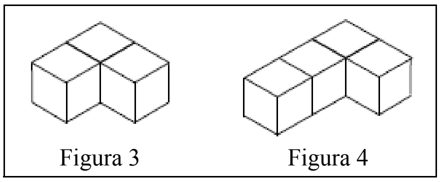


Figura 28: Atividade 1

Notamos, entretanto, que alguns alunos não alcançaram a generalização. Isto foi verificado pelo fato de certos estudantes solicitarem mais cubinhos de madeira ao professor. As figuras cresciam em todas as suas dimensões e tornava-se inviável representá-las utilizando os cubinhos de madeira. Tal situação mostra que alguns alunos ainda não haviam percebido as relações entre os valores dos perímetros do topo, das áreas do topo e da superfície e do volume das figuras originais e os seus respectivos resultados quando a figura era dobrada ou triplicada.

5.3 Entrevista Final

Após a observação das aulas do professor Fernando, nas quais foram aplicadas as tarefas previamente selecionadas de investigação e de resolução de problemas, realizamos uma entrevista – que foi gravada e depois transcrita pela pesquisadora – para saber um pouco mais sobre o professor e suas impressões a respeito destas aulas. O guia da entrevista se encontra no Anexo II.

O professor justificou a escolha da atividade 1 (Dobrando e Triplicando) para ser desenvolvida com sua turma do 9º ano de uma rede particular de ensino, por achá-la mais adequada em termos de conteúdos matemáticos já trabalhados. Além disso, Fernando queria saber como esta turma iria lidar com a metodologia proposta, pois os alunos tinham dificuldades de realizar trabalho em grupo, permanecendo constantemente agitados nestas situações.

Os aspectos que norteiam a prática do professor, segundo Fernando, consistem em auxiliar os alunos na percepção da Matemática como uma ferramenta de utilização diária na vida prática e trabalhar com os estudantes no desenvolvimento do raciocínio matemático aplicável às diversas áreas do conhecimento.

Eventualmente, algumas aulas não funcionam de maneira produtiva em termos de desenvolvimento do conteúdo. Fernando confirmou o fato de que algumas de suas aulas não acontecem da maneira prevista, sentindo, algumas vezes a necessidade de retomar alguns conteúdos. Mostrou-se sincero e reconheceu, durante a entrevista, que certos problemas ocorreram na sala de aula devido à sua falta de experiência com o ensino fundamental, na medida em que 2008 marcou seu primeiro ano de trabalho com o ensino fundamental.

Para contornar este tipo de problema, o professor tem retomado, em aulas posteriores, temas que considerou como mal trabalhados nas aulas iniciais. Ele salientou que nem sempre há a possibilidade de retomada dos conteúdos. O professor relatou que na rede estadual, por exemplo, é freqüente a suspensão das aulas por problemas de infra-estrutura ou até mesmo de violência, faltando, assim, nestas escolas, tempo disponível para a revisão de conteúdos.

Quando optou pela carreira de professor, Fernando já considerava a Matemática uma disciplina importante e já havia se deparado com situações em sua vida profissional que confirmavam este fato. Antes de se tornar professor de Matemática, Fernando trabalhava com informática e se percebia, por vezes, resolvendo questões de informática pelo uso de idéias matemáticas.

> “Como eu tinha trabalhado com informática, normalmente quando eu tinha que programar alguma coisa, fazer algum procedimento... alguma instrução que eu tinha que dar para a máquina, o que facilitava a minha vida era o meu conhecimento da Matemática perante as outras pessoas”.

Fernando acredita que tem conseguido mostrar a importância da Matemática para os alunos, mas ressaltou o fato de que apenas os alunos interessados e pré-dispostos a aprender percebem esta relevância da disciplina em questão.

O conteúdo programático (de acordo com os PCN´S) orienta a prática do professor. Segundo Fernando é necessário manter certa ordem e sistematização dos conteúdos, para não prejudicar os alunos que, ocasionalmente, necessitam trocar de turma ou de turno.

De acordo com o professor entrevistado, suas aulas se caracterizam como aulas práticas, descontraídas, que priorizam o trabalho com os conceitos. Quando perguntado sobre as diferenças entre as suas aulas rotineiras e as aulas em que foram aplicadas as atividades de investigação, ele afirmou que, desde a sua entrada no curso de especialização, estas diferenças têm diminuído bastante. Isto porque, de acordo com ele, o curso oferece uma variedade de opções para um trabalho em sala de aula.

> “Depois do curso de“Tendências” não, antes sim. Porque...é muita variedade que a gente vê em uma semana. Em uma mesma aula a gente vê, por exemplo, uma curiosidade em relação à geometria e uma curiosidade em relação à fração. Aí...você vê numa outra aula...você tem uma equação e também uma outra relação algébrica que é aquele ponto chave para que você consiga fazer a coisa diluir de uma maneira razoável na cabeça do aluno. (...) Aí a mudança [na maneira como aborda os assuntos] é inevitável”.

Fernando aceitou o convite em trabalhar nesta pesquisa com o intuito de contribuir com a melhoria do ensino, além de se mostrar curioso pelos resultados apresentados pelos alunos sendo desafiados dentro do contexto do trabalho com as investigações. A oportunidade de participar desta pesquisa, segundo ele, fortaleceu a sua experiência matemática, e o fez acreditar que está se desenvolvendo na profissão de maneira positiva, levando-o a afirmar a seguinte frase: “Estou no caminho certo”.

Quanto ao uso de materiais manipuláveis em suas aulas, de maneira geral, ele os utiliza bastante, mas não sabe especificar se passou a utilizá-los após as sugestões apresentadas na disciplina “Tendências em Educação Matemática”, oferecida no seu curso de especialização, ou se após iniciar o seu trabalho com o ensino fundamental. A respeito do uso deste material concreto na aplicação das atividades de investigação em sua sala de aula, Fernando afirmou que a sua utilização foi essencial.

> "Agora eu já não sei se foi depois de Tendências ou se foi depois que eu comecei a trabalhar com o ensino fundamental. [...] Agora quando eu comecei a trabalhar com o ensino fundamental...é fundamental mesmo [o material concreto], é necessário. Tanto é que na mala do meu carro lá eu tenho três caixas de xerox...ali para onde eu vou...por exemplo, na semana passada eu trabalhei com área, aí um aluno perguntou: pra que a gente calcula isso? Aí eu respondi: por exemplo, se você quiser calcular quantos mililitros de um determinado líquido você têm num recipiente você precisa saber a área. Aí o aluno disse: ué mas com a área, mas o que é que a gente faz com a altura? Aí eu falei bom, aí você precisa da altura e da área prá chegar lá. Aí na semana seguinte eu já levei os sólidos. Levei caixa de leite, caixa de suco, caixa de perfume. Aí um aluno [calculando o volume dos sólidos] falou: ué professor aqui na caixa está dizendo que tem só 80ml de perfume, mas eu calculei o volume da caixa e achei 120ml. Aí eu disse: É, mas o perfume vem dentro do vidro e não da caixa. Ai o aluno disse: Ah! É mesmo professor! "

Quando perguntamos a Fernando qual deveria ser o seu papel em uma aula de natureza investigativa, afirmou que, nessas aulas, o professor tem a função de nortear, incentivar e motivar as ações dos alunos. Fernando salientou que o professor precisa tomar cuidado para não facilitar demais e acabar por tirar conclusões ou dar respostas que deveriam ser obtidas pelos alunos. Além disso, ele ressaltou a importância de se criar uma cultura de trabalho contínuo com a realização de tarefas investigativas e pensa não ser plausível esperar sucesso com a aplicação esporádica deste tipo de atividade.

> "Nortear, incentivar, motivar o aluno...eu acho que se você facilitar demais você pode estar até atrapalhando. Agora a questão é: você também não pode fazer uma atividade dessas da noite para o dia e querer obter sucesso, pois eu acho que o aluno tem que se acostumar com isso porque, se não for da cultura dele, é complicado."

A função do aluno neste tipo de aula é, para Fernando, mostrar interesse e disposição para novos aprendizados. Na entrevista, o professor reforçou e exemplificou a importância deste fato relatando que os alunos cobraram a correção da atividade, pois estavam interessados em conferir suas respostas. Após a aplicação e a correção das atividades de investigação, o professor entrevistado considerou que houve progresso no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos. Ele acrescentou que já havia trabalhado as noções de volume com os estudantes e acredita que, se tivesse trabalhado com material concreto desde o início, a atividade em questão teria tido mais êxito, no sentido de garantir maior habilidade na manipulação dos cubinhos e maior progresso no raciocínio matemático para os conceitos de volumes de figuras espaciais.

> "Na turma do 6º ano, quando eu comecei a trabalhar volume com eles eu já fui com material concreto. Com eles [9o ano, turma que aplicou a atividade] até então, com volume eu não tinha ido, porque eu estava esperando este momento. Acredito que se eu tivesse tratado, desde o início, volume usando material concreto ia chegar nessa hora aqui... ia ficar mais fácil a manipulação e até o raciocínio deles."

O professor afirmou que não existem limitações na aplicação de atividades de caráter investigativo, destacando, inclusive, que já aplicou as atividades da pesquisa em mais duas outras turmas do ensino fundamental e que pretende continuar trabalhando com esse tipo de atividade e, sempre que possível, modificando-as em cima das experiências anteriores.

Capítulo 6. As atividades na sala de aula de Lucas

Este capítulo será dedicado à descrição e à análise da aplicação de atividades de resolução de problemas e investigação pelo professor Lucas em sua sala de aula. É importante frisar que este professor, anteriormente, resolveu estas mesmas atividades no curso de especialização, onde também participou da leitura e discussão de textos relativos ao ensino baseado na aplicação desse tipo de tarefa e assistiu à exposição da pesquisadora sobre tópicos relacionados ao trabalho investigativo, vivenciando, desta forma, os processos envolvidos em tarefas de resolução de problemas, discutindo e analisando aspectos relevantes para a execução desta metodologia para, posteriormente, desenvolver com seus alunos o trabalho com estas atividades.

As atividades aplicadas pelo professor em sua sala de aula, descritas no anexo 2, foram escolhidas por ele dentre as cinco tarefas pré-trabalhadas na especialização. As aulas foram gravadas e transcritas pela pesquisadora que, nesta etapa, desempenhou o papel de observadora, realizando, inclusive, registros em diários.

Além de fornecer detalhes da observação do professor em sala de aula, iremos analisar de forma mais aprofundada suas respostas ao questionário aplicado no início da pesquisa – cujas perguntas estão no Anexo 1–, bem como descrever os aspectos importantes da entrevista realizada com o professor após a sua experiência em sala de aula.

6.1 A formação de Lucas e suas opiniões iniciais

Este tópico refere-se à exposição das opiniões iniciais dadas pelo professor Lucas. As suas primeiras impressões sobre a Matemática e seu ensino, bem como aspectos relevantes da sua formação puderam ser observados pelas respostas deste professor ao questionário 1 (descrito no capítulo 3).

Lucas passou por um processo de formação complicado. Em 1998, entrou para o curso de licenciatura em matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro, cujas aulas aconteciam no período diurno. Devido à necessidade de trabalhar no horário do curso, sua freqüência ficou comprometida, acabando por perder muitas disciplinas. No ano de 1999, conseguiu transferência para o mesmo curso, agora com aulas no turno da noite, na Universidade Estadual do Rio de Janeiro (UERJ). Poucos dias após a sua entrada na UERJ, a universidade entrou em greve por 8 meses. Percebendo a necessidade de rapidamente concluir sua licenciatura para conseguir melhores condições de trabalho, na medida em que, ao procurar emprego nas escolas, era exigido diploma, em 2000 prestou novo vestibular para a Universidade Iguaçu (UNIG), concluindo sua graduação em 2003.

Lucas já atua como professor de Matemática nos ensinos fundamental e médio há seis anos. Inicialmente, optou por seguir esta carreira apenas por afinidade com a disciplina. Posteriormente, porém, passou a ter como objetivo, no exercício da profissão, contribuir com a melhoria do modo matemático de pensar dos seus alunos.

Para ele, o professor é o mediador do processo ensino-aprendizagem, enquanto o aluno desempenha o papel de "curioso pela compreensão dos conceitos". A respeito da avaliação, Lucas acha que devem ser levados em conta critérios como conteúdos adquiridos e sua capacidade de aplicação, a organização das idéias, o esforço e a dedicação dos alunos.

A Matemática é considerada por Lucas como relevante para o dia-a-dia das pessoas, por estar relacionada a todas as áreas do conhecimento, além de ser importante à vida profissional, já que, segundo ele, qualquer carreira exige um conhecimento mínimo e necessário da Matemática.

O conhecimento matemático é, para Lucas, a aquisição do domínio das quatro operações e o conhecimento das sub-áreas da Matemática, como a aritmética, a álgebra, a geometria e a estatística, entre outros tópicos. Para ele, é importante que o aluno desenvolva, através do ensino da Matemática, habilidades como operar, relacionar, concluir e interpretar.

No tópico a seguir, detalharemos as observações feitas na sala de aula do professor Lucas durante o desenvolvimento, com seus alunos, das atividades de investigação e resolução de problemas pré-selecionados por ele.

6.2 Observação na sala de aula

A descrição da observação das aulas do professor Lucas com a aplicação das atividades de investigação e resolução de problemas foi desenvolvida tendo como base nossos referenciais de pesquisa. Neste sentido, mantendo-se o foco na ação do professor, privilegiou-se o relato e a análise dos fatos ocorridos em sala de aula relacionados com os temas da pesquisa.

Num primeiro momento, Lucas decidiu pela aplicação da atividade 1 (Dobrando e Triplicando) em duas de suas turmas do 8º ano do ensino fundamental. Devido à carência de resultados dos seus alunos no desenvolvimento desta atividade, influenciada pelas constantes ausências do professor em sala, optamos por não descrever tais aulas. Após tal acontecimento, tivemos uma conversa com o professor explicitando a importância de sua presença em sala durante a execução da tarefa, justificada pelo fato de o professor ser o principal foco da nossa pesquisa. Desta forma, fez-se necessário um segundo momento de observação das aulas de Lucas que, por questões práticas e mudanças de rotina, ocorreram em outras turmas.

Lucas optou por aplicar a atividade 2 (O Problema de Pintura de Faces) em duas turmas do 7º ano do ensino fundamental, que aqui serão denominadas de Turma 1 e Turma 2. Para cada uma delas foram disponibilizados dois tempos seguidos de 45 minutos para o desenvolvimento da atividade escolhida. Vale ressaltar que a correção da atividade nas duas turmas em separado ocorreu uma semana após a aplicação das mesmas e teve a duração de 30 minutos em cada turma. Em ambas as turmas, para dar início aos trabalhos, Lucas solicitou que os alunos se organizassem em grupos de 3 ou 4 componentes. Na turma 1 estavam presentes 22 alunos, enquanto que na turma 2 havia um total de 27 alunos.

6.2.1 Os processos envolvidos na investigação

De acordo com nossos referenciais de pesquisa, analisamos, na aula de Lucas, o desenvolvimento das etapas de investigação: exploração e formulação de questões, elaboração de conjecturas, teste e reformulação de conjecturas e, por fim, justificação e avaliação. Os primeiros 20 minutos de aula foram dedicados à exploração e formulação de questões pelos alunos. Lucas optou por disponibilizar os momentos iniciais da aula para a investigação do problema pelos alunos. Surgiram dúvidas quanto à contagem das faces visíveis dos cubinhos e quanto ao que deveria ser considerado como "face". Na união horizontal de três cubinhos, por exemplo, os estudantes perguntavam ao professor se as faces apoiadas na mesa eram consideradas visíveis e se, depois de acoplados os cubinhos, a junção das faces em um mesmo plano deveria ser contada como uma única face.

Em seguida, Lucas dirigiu-se ao quadro para explicar a atividade, lançando mão, também, de cubinhos de madeira para ilustrar a situação. Neste momento, deteve-se na explicação dos casos nos quais estavam envolvidos 1 ou 2 cubinhos acoplados, pedindo depois que os alunos continuassem a analisar os outros casos. Alguns alunos pediram mais cubinhos de madeira para representar 66 cubinhos acoplados, o que evidencia que estes não haviam percebido a existência de uma regularidade. Já outros alunos observaram que numericamente o número de faces visíveis aumentava sempre em quatro quando era acrescido um novo cubinho, mas não sabiam justificar a observação.

Encerrado os momentos iniciais de investigação, onde os alunos exploravam a tarefa e formulavam as questões iniciais, alguns já haviam percebido o "mecanismo" da atividade. Porém, apenas um grupo de alunos se aproximou da formulação da conjectura que generalizava o problema. Lucas percebeu a dificuldade dos alunos na elaboração de uma expressão em função do número n de cubinhos acoplados. Mais detalhes sobre as interferências do professor e da reação de seus alunos serão dados mais adiante em tópicos referentes ao papel do professor e do aluno.

A carência de elaboração de conjecturas pelos alunos fez com que o processo de justificação perdesse um pouco o sentido. Lucas optou por não pontuar a atividade e desta forma não avaliou o desenvolvimento dos alunos na atividade em questão.

6.2.2 A sala de aula como um ambiente de investigação

O desenvolvimento da atividade 2 nas turmas de 7º ano do ensino fundamental do professor Lucas pode ser dividido em três momentos: A primeira parte se deu no desenvolvimento da atividade pelos alunos. Lucas tirou dúvidas pontuais dos grupos e, eventualmente, explicou algumas idéias e procedimentos no quadro, quando percebeu dificuldades comuns em diferentes grupos. Uma semana depois aconteceu a segunda etapa, com a correção completa da atividade pelo professor, no quadro negro com a participação ativa dos alunos e sem a utilização dos cubinhos. A terceira etapa, no mesmo dia da segunda, consistiu na verificação dos resultados dos grupos, após a correção com o professor, e na reelaboração das respostas pelos grupos.

Na realização da primeira etapa, podemos dizer que o professor Lucas contribuiu positivamente para fazer da sua sala de aula um ambiente de trabalho investigativo. Esta preocupação pôde ser evidenciada quando o professor pediu aos alunos que lessem com atenção o enunciado da questão para entender o que estava sendo solicitado na atividade. Para a leitura e interpretação inicial dos alunos foram disponibilizados 20 minutos da aula. O tempo inicial disponibilizado foi importante para que os alunos trabalhassem suas próprias idéias da atividade e discutissem com seus colegas em grupo. Isso mostra a preocupação de Lucas em promover aos estudantes um momento de investigação da tarefa proposta, buscando levá-los a tentar "investigar" por eles mesmos como funcionava a atividade.

Após esta primeira fase de exploração pelos alunos, o professor foi ao quadro para esclarecer a tarefa. Lucas apresentou a atividade explicando-a de maneira muito semelhante ao enunciado e fornecendo exemplos que já estavam presentes na tarefa. A intenção do professor foi ilustrar, de uma maneira ainda mais clara, como funcionava a tarefa e o que estava sendo proposto aos estudantes.

Nos momentos em que esteve presente em sala, o professor apresentou bom envolvimento com as turmas e realizou interferências relevantes, as quais foram evidenciadas no tópico referente ao papel do professor. No entanto, é importante destacar que diferentes momentos das aulas, enquanto os estudantes faziam a leitura da atividade e novamente enquanto resolviam as questões, foram marcados pela saída do professor da sala. Ao retornar para a sala pela primeira vez, Lucas chega terminando o lanche e num segundo momento de ausência comenta que estava resolvendo algumas questões da escola com a diretora. Acreditamos que estas ausências eventuais contribuíram para a carência de conclusões e para a fraca fundamentação das respostas dadas pelos alunos, na medida em que impediram um acompanhamento contínuo, por parte do regente, do raciocínio dos estudantes, necessário para que a investigação acontecesse da melhor forma possível .

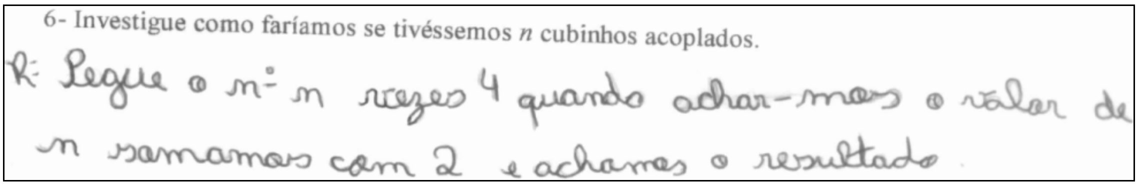
A segunda etapa, representada pela correção expositiva da atividade 2 pelo professor Lucas, teve uma duração de 30 minutos para cada turma e foi prejudicada por conta de um imprevisto ocorrido – a aplicação de provas em todas as turmas do colégio, por decisão da direção da escola, a partir de um determinado horário que fazia parte do tempo destinado a correção. Mesmo com pouco tempo disponível, esta etapa ocorreu de maneira produtiva e foi marcada pela ativa participação dos estudantes. Lucas explicou cada caso (o caso de um cubinho, dois cubinhos acoplados, três cubinhos acoplados e assim por diante até o caso de sete cubinhos acoplados, seguido do caso de cem cubinhos e partiu para a generalização) com muito cuidado e paciência para que os alunos pudessem acompanhar o raciocínio e entender o processo. Apesar de não irem ao quadro para mostrarem suas respostas, os estudantes respondiam aos questionamentos feitos pelo professor e algumas vezes pediam para explicar como estavam pensando. Por último, Lucas redistribuiu a atividade aos alunos e solicitou que refizessem os tópicos que julgassem incompletos ou incorretos após a correção no quadro.

A terceira etapa não apresentou muitos progressos e acreditamos que isto se deveu ao fato de o professor não cobrar que os alunos corrigissem a atividade e não considerasse tal correção como critério de avaliação.

6.2.3 O aluno no ambiente de investigação

Os alunos se mostraram interessados e envolvidos na atividade. O professor destacou que até mesmo os alunos que não demonstravam interesse em suas aulas rotineiras estavam empenhados no trabalho com a atividade 2.

Os estudantes tiveram muita dificuldade em generalizar o problema para o cálculo do número de faces visíveis em função do número *n* de cubinhos acoplados. Este fato evidenciou a dificuldade dos alunos na utilização do raciocínio algébrico. Após muitos alunos perguntarem: "Professor, quem é esse número *n* de cubinhos?", Lucas foi ao quadro explanar o fato através de outros exemplos. Detalhes sobre a explicação do professor podem ser vistos no tópico seguinte. Apenas um grupo de alunos da turma 2 conseguiu explicar em palavras como generalizar o problema. O enunciado do problema e a resposta do grupo foram os seguintes:


6- Investigue como faríamos se tivéssemos *n* cubinhos acoplados.

R: Pegue o nº n vezes 4 quando achar-mos o valor de n somamos com 2 e achamos o resultado.

Figura 29: Explicação do aluno. Atividade 2

A resposta do grupo reafirma a dificuldade dos alunos em trabalhar com a álgebra. Ao argumentar sobre o que deveria ser feito no caso de existirem *n* cubinhos acoplados, alguns alunos diziam: "Mas professor, você precisa me dizer quem é esse número *n* de cubinhos para eu poder calcular o número de faces pintadas!".

Na figura acima, é possível notar que o grupo de alunos respondeu que era preciso saber quem era *n* para que este fosse multiplicado por quatro, em seguida, somado com dois, para que, finalmente, fosse encontrado um resultado. Houve uma necessidade dos alunos de obter um resultado numérico, pois, para eles, uma resposta final precisaria ser, obrigatoriamente, um "número".

6.2.4 O papel do professor

O professor desempenhou um papel importante na condução da aula de investigação. Ele disponibilizou tempo necessário e suficiente para que os alunos pudessem fazer suas próprias análises e tirassem suas próprias conclusões. Lucas realizou intervenções pontuais nos grupos em separado, para esclarecer as dúvidas específicas de cada aluno ou grupo de alunos, e interveio com explicações no quadro para toda a turma, no caso de dúvidas que prevaleciam para a grande maioria dos estudantes. Para explicar o caso da generalização do número de faces em função da quantidade *n* de cubinhos, o professor apresentou a seguinte situação no quadro para a Turma 1:

Alunos		Cadeiras		Tênis
1	→	1	→	2
2	→	2	→	4
3	→	3	→	6
.		.		.
.		.		.
.		.		.
10	→	10	→	20
.		.		.
.		.		.
.		.		.
100	→	100	→	200
x	→	x	→	$2x$
n	→	n	→	$2n$

Tabela 5: Explicação do professor. Atividade 2

Os valores foram preenchidos pelo professor com a participação de toda a turma. A idéia do professor foi fundamental para que os estudantes compreendessem como generalizar processos que variavam de forma linear, como era o caso do número de faces e cubinhos na situação proposta. Já na Turma 2, onde o professor aplicou a mesma atividade após a aplicação na Turma 1, ele acrescentou outras variáveis à tabela, que ficou representada da seguinte maneira:

Alunos		Cadeiras		Tênis		Dedos das Mãos
1	$\to$	1	$\to$	$2\ (1\cdot 2)$	$\to$	$10\ (10\cdot 1)$
2	$\to$	2	$\to$	$4\ (2\cdot 2)$	$\to$	$20\ (10\cdot 2)$
3	$\to$	3	$\to$	$6\ (3\cdot 2)$	$\to$	$30\ (10\cdot 3)$
4	$\to$	4	$\to$	$8\ (4\cdot 2)$	$\to$	$40\ (10\cdot 4)$
5	$\to$	5	$\to$	$10\ (5\cdot 2)$	$\to$	$50\ (10.5)$
6	$\to$	6	$\to$	$12\ (6\cdot 2)$	$\to$	$60\ (10\cdot 6)$
.		.		.		.
.		.		.		.
.		.		.		.
100	$\to$	100	$\to$	$100\cdot 2$	$\to$	$10\cdot 100$
.		.		.		.
.		.		.		.
.		.		.		.
200	$\to$	200	$\to$	200.2	$\to$	$10\cdot 200$
x	$\to$	x	$\to$	$x.2$	$\to$	$10\cdot x$
n	$\to$	n	$\to$	$n.2$	$\to$	$10.n$

Tabela 6: Explicação do professor. Atividade 2

É interessante observar que em ambas as tabelas utilizadas pelo professor como auxílio à generalização das situações exemplificadas, foi utilizada, inicialmente, a variável x e, em seguida, a variável n. Ao ser perguntado pelo uso de diferentes variáveis para representar a mesma situação, Lucas argumentou que os estudantes estavam acostumados com o uso da letra x para representar quantidades desconhecidas. Desta forma, ele optou por generalizar o processo para uma quantidade x e, posteriormente, para uma quantidade n, já que a atividade trabalhada fazia referência a um número n.

6.2.5 A comunicação professor-aluno

Este tópico analisa os processos de comunicação ocorridos entre o professor Lucas e seus alunos durante o desenvolvimento da atividade 2 (Problema de pintura de faces, anexo I). Optamos por destacar, nesta observação, características do modelo de cooperação investigativa proposto por Alro e Skovsmove (2006). Segundo estes autores, a comunicação professor-aluno se efetiva através das seguintes ações: estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar. Iremos descrever momentos de interação entre o professor Lucas e seus alunos, sem nos preocupar, especificamente aqui, com a turma que estamos nos referindo, já que não há intenção de compará-las.

A comunicação professor-aluno ocorreu de maneira efetiva durante a correção da atividade, que se realizou duas semanas após a execução da atividade 2 pelos alunos. Ao iniciar a correção, o professor retomou o raciocínio utilizado na primeira etapa para a introdução da álgebra no problema. Lucas reescreveu a tabela, mas, desta vez, optou por relacionar apenas alunos e dedos das mãos, da seguinte maneira:

Alunos		Dedos da Mão
1	$\rightarrow$	10
2	$\rightarrow$	$10 \cdot 2$
3	$\rightarrow$	$10 \cdot 3$
4	$\rightarrow$	$10 \cdot 4$
$\vdots$		$\vdots$
10	$\rightarrow$	$10 \cdot 10$
x	$\rightarrow$	$10 \cdot x$
$\vdots$		$\vdots$
n	$\rightarrow$	$10 \cdot n$

Tabela 7: Explicação do professor. Atividade 2

Neste momento, o contato entre o professor e os alunos foi sendo estabelecido, à medida que o professor prosseguiu preenchendo a tabela no quadro com a participação dos estudantes. Ao perceber que estes estavam compreendendo o raciocínio utilizado para preencher a tabela acima, Lucas reescreveu o problema, utilizando a idéia de função:

$D_n = 10n$, sendo D_n a quantidade de dedos das mãos para um número n de alunos e n o número de alunos.

Em seguida, o professor forneceu exemplos dando o número n de alunos e questionou acerca da quantidade total de dedos das mãos:

$$D_1 = 10.1 = 10,\ D_{30} = 10.30 = 300.$$

Depois desafiou os estudantes a encontrarem o número n de alunos, caso fosse fornecido o total de dedos das mãos. Lucas exemplificou, explicando: se "$D_n = 400$, então $n = 40$". Neste momento, percebeu que muitos alunos não haviam entendido e complementou: "Substituindo D_n por $10n$ temos $10n = 400$, logo $n = 40$". Para reforçar a idéia, o regente deu outros exemplos em que era dado o total de dedos das mãos (D_n) e pedido o número n de alunos:

$$D_n = 1000 \Rightarrow n = 100$$

$$D_n = 800 \Rightarrow n = 80$$

$$D_n = 70 \Rightarrow n = 7$$

Todos os exemplos foram resolvidos no quadro com a participação dos alunos. Para finalizar, o professor perguntou aos estudantes qual seria o número n para $D_n = 55$. Alguns ficam calados, percebendo que havia algo estranho. Até que se escutou: "Professor, não tem como achar esse n!". O regente da classe reforçou o fato, argumentando que não existia um número (natural, já que se trata de quantidade de pessoas) que multiplicado por 10 pudesse dar como resultado 55. Em seguida, Lucas retomou a atividade 2, explicando no quadro:

1 cubinho $\rightarrow$ 6 faces pintadas

O professor expôs que o número 6 poderia ser escrito como $6 = 4 + 2$, onde o número dois representava o número de faces "laterais", e o número quatro representava as faces superior, inferior, na frente e atrás. Em seguida, Lucas descreveu o caso para dois cubinhos acoplados:

2 cubinhos $\rightarrow$ 10 faces pintadas

Da mesma forma, Lucas escreveu $10 = 8 + 2$ e ressaltou que o número dois representava os cubinhos das extremidades, enquanto o número oito significava que existiam dois cubinhos em cima, dois embaixo, dois na frente e mais dois cubinhos atrás. Para o caso de três cubinhos, o professor utilizou um raciocínio análogo para escrever:

$$3 \text{ cubinhos} \rightarrow 14 \text{ faces pintadas } = 12 + 2$$
$$4 \text{ cubinhos} \rightarrow 18 \text{ faces pintadas } = 16 + 2$$

Para o caso de cinco cubinhos acoplados, Lucas pediu que os estudantes pensassem sem desenhar os cubinhos. A grande maioria dos alunos respondeu que, neste caso, haveria $20 + 2$ faces pintadas. Lucas pediu então que os alunos prestassem atenção aos números que eram acrescidos de 2: 4, 8, 12 e 16. Um aluno concluiu: “Todos estão na tabuada de 4”. E o professor complementou: “Todos são múltiplos de 4”. O professor reescreveu os resultados encontrados, acrescentando, assim, a observação dos alunos:

$$\boxed{\begin{array}{c} 1 \text{ cubinho} \rightarrow 6 \text{ faces pintadas } = 4 + 2 = 4 \cdot 1 + 2 \\ 2 \text{ cubinhos} \rightarrow 10 \text{ faces pintadas } = 8 + 2 = 4 \cdot 2 + 2 \\ 3 \text{ cubinhos} \rightarrow 14 \text{ faces pintadas } = 12 + 2 = 4 \cdot 3 + 2 \\ 4 \text{ cubinhos} \rightarrow 18 \text{ faces pintadas } = 16 + 2 = 4 \cdot 4 + 2 \\ 5 \text{ cubinhos} \rightarrow 22 \text{ faces pintadas } = 20 + 2 = 4.5 + 2 \end{array}}$$

É interessante observar que, até o caso de 4 cubinhos acoplados, Lucas utilizou uma justificativa geométrica, destacando para os alunos o fato de haver sempre duas faces nas extremidades e uma certa quantidade fixa para um dado número de cubinhos acima, abaixo, na frente e atrás. Porém, a partir do número 5 de cubinhos acoplados, o professor retomou os casos fazendo uso do raciocínio aritmético, buscando uma regularidade apenas numérica. Daí em diante, o professor não utilizou, em nenhum outro momento, o raciocínio geométrico.

Lucas afirmou querer dos alunos o cálculo do total de faces pintadas no caso de 100 cubinhos acoplados, sem lançar mão do desenho ou material concreto (100 cubinhos). Retomando os casos anteriores e com um pouco de dificuldade, todos os estudantes das turmas chegaram ao total de $4 \cdot 100 + 2$ faces pintadas. Posteriormente, o professor pediu que os estudantes calculassem o número de faces pintadas para um total de cubinhos acoplados. Poucos alunos responderam, mas, posto no quadro, todos concordaram com o resultado

$4 \cdot n + 2$. Lucas acrescentou que iria chamar este resultado de F_n e escreveu: $F_n = 4 \cdot n + 2$. Ele perguntou se os alunos recordavam o D_n usado no exemplo anterior para auxiliar na interpretação do F_n. Em seguida, o professor mostrou que poderiam ser calculados F_1, F_2, F_{10}, F_{15}, F_x, F_a e F_n.

O professor explicou que, até aquele momento, juntos estavam buscando encontrar o número de faces pintadas para um dado número de cubinhos, e acrescentou que a fórmula também servia para que fosse calculado "o inverso". Lucas complementou que se fosse dado o número de faces pintadas era possível chegar ao número n de cubinhos acoplados. Exemplificou questionando aos alunos quantos cubinhos estavam acoplados se tivéssemos um total de 86 faces pintadas. Como a idéia de equação ainda não tinha sido trabalhada com os estudantes, Lucas escreveu a situação-problema da seguinte forma:

$$F_n = 86$$

$$F_n = 4n + 2$$

$$4n + 2 = 86$$

$4n + 2 = 84 + 2$ (Lucas separou o dois da fórmula)

$n = 21$ (Os alunos responderam que bastava dividir o 84 por 4 para obter este resultado)

6.2.6 A avaliação das tarefas de investigação

Lucas utilizou a atividade como um exercício extra e não fez uso de nenhum instrumento de avaliação em momento algum. Vale ressaltar que a atividade foi desenvolvida em três etapas: 1- desenvolvimento da atividade pelos alunos; 2- correção da atividade com a participação dos alunos; 3- devolução da atividade para os alunos efetuarem eventuais correções. Porém nenhuma das etapas foi registrada quantitativamente ou qualitativamente pelo professor como forma de avaliação.

6.2.7 O papel da visualização

Nos momentos iniciais do desenvolvimento da atividade 2, a visualização desempenhou um papel fundamental. Os cubinhos de madeira auxiliaram os alunos a terem uma idéia mais clara e visualmente representativa da situação que estava posta. A visualização também foi importante na correção do professor com a participação dos alunos. Porém esta só foi utilizada nos momentos iniciais da atividade, até a explicação do cálculo do número de faces para 4 cubinhos acoplados. A partir daí, Lucas optou pela utilização do raciocínio numérico.

6.2.8 A utilização do material concreto

Como já foi dito na seção anterior, o material concreto foi importante na fase inicial da resolução da atividade, quando os alunos estavam passando pelo processo de reconhecimento e exploração da situação proposta. Porém, no decorrer da tarefa, os alunos não alcançaram a abstração desejada e continuaram a utilizar os cubinhos de madeira mesmo para quantidades muito grandes de cubinhos acoplados.

6.3. Entrevista Final

Ao final da aplicação das atividades de investigação e resolução de problemas na sala de aula do professor Lucas, nosso interesse se concentrou em descrever e analisar quais foram as impressões do professor diante do desenvolvimento das tarefas com seus alunos. Além disso, sentimos necessidade de obter mais detalhes sobre o perfil do professor para dar um melhor suporte às nossas observações. O questionário inicial (Anexo I), cuja descrição foi realizada no início deste capítulo, permitiu expor idéias gerais sobre a formação de Lucas e suas concepções a respeito da Matemática e seu ensino. A entrevista final, a qual iremos descrever neste tópico (o guia da entrevista se encontra no Anexo III), nos traz mais detalhes sobre sua experiência com o ensino fundamental, suas observações a respeito do trabalho realizado com os alunos, suas opiniões quanto ao uso do material concreto e, finalmente, sobre a realização de atividades de natureza investigativa na sala de aula de Matemática.

Lucas é um professor de Matemática que possui uma larga experiência em cursos preparatórios (cursinho pré-vestibular e cursos para concursos). Atua nestes níveis há 9 anos e leciona nos ensinos fundamental e médio há 5 anos.

A opção de Lucas pela turma do 9º ano do ensino fundamental da rede municipal de Nilópolis para aplicar as atividades de investigação se deu pela crença na melhor receptividade da turma. O regente afirmou ter confirmado sua hipótese, uma vez que os alunos demonstraram interesse pela realização do trabalho, interagiram e discutiram com os colegas sobre as idéias do problema.

Ao ser perguntado sobre os aspectos que norteiam a prática como professor de Matemática, Lucas declarou:

> "O que direciona a minha prática é a preocupação com o futuro do meu aluno. É a preocupação com o que o meu aluno vai encontrar daqui a quatro anos... daqui a cinco anos com relação à dificuldade e com relação ao que ele vai precisar saber...ao que ele vai precisar ter de conhecimento matemático."

A declaração de Lucas sugere que ele se sente responsável em preparar seu aluno para a vida futura em termos de garantir ao estudante um conhecimento matemático que o auxilie na sua carreira profissional. Esta fala evidencia a consciência do professor de que a Matemática é necessária para o desenvolvimento profissional do indivíduo e, de certa forma, parece sugerir uma didática e um tipo de conhecimento que não pode ser desenvolvido através de uma aula de Matemática tradicional.

Algumas aulas, segundo Lucas, não são satisfatórias em termos de aprendizagem. Para ele, as maiores causas da falta de aproveitamento nas aulas estão relacionadas à questão da organização e da disciplina. Esta disciplina, de acordo com Lucas, se refere ao cumprimento de horários (tanto do professor quanto dos alunos) e à organização da escola com relação à disponibilidade de recursos. Lucas exemplificou, argumentando que planejou uma aula em que utilizaria o aparelho de DVD da unidade de ensino, solicitando com antecedência à administração da escola, e, apesar disto, teve problemas no dia da aula em conseguir a chave da sala de vídeo por falta de organização da instituição. Entretanto, Lucas salientou que o professor deve saber lidar com imprevistos ou aulas que não se mostram produtivas em termos de aprendizado, tendo sempre outras idéias para pôr em prática ou outra atividade previamente planejada.

Quando decidiu ser professor de Matemática, Lucas afirma que já a considerava uma disciplina importante, reforçando: "Talvez, uma das mais importantes". Ele acredita que tem conseguido transmitir a relevância da Matemática somente aos alunos que ele mantém um contato mais próximo.

Em relação ao cumprimento do programa curricular de Matemática, Lucas afirmou que a escola em que trabalha se preocupa com a interdisciplinaridade proposta e defendida nos PCN's. Ele diz concordar e desenvolver trabalhos interdisciplinares com professores de outras áreas. Alem disso, Lucas diz ter muita liberdade para trabalhar os conteúdos de Matemática da maneira que considera apropriada.

Em suas aulas rotineiras, Lucas diz procurar ser amigo do aluno e fazê-lo sentir-se em um ambiente agradável e familiar. Ao ser perguntado sobre as diferenças entre as aulas em que foram aplicadas as atividades de investigação com relação às suas aulas diárias, Lucas afirmou ter havido muitas diferenças. Ele destacou que na aplicação das tarefas de investigação houve uma dinâmica mais interativa e um maior interesse dos alunos no desenvolvimento do trabalho do que normalmente ocorre em suas aulas.

Lucas justificou o fato de ter aceitado o convite em participar da pesquisa pela vontade de contribuir com a melhoria do ensino e pela curiosidade de observar como os seus alunos iam trabalhar com as mesmas atividades com as quais ele já havia tido contato no curso de especialização. Lucas explicou:

> "Eu queria saber como essas atividades iriam funcionar numa turma do ensino fundamental, já que eu já tinha participado de uma aula em que eu tinha feito as atividades [as mesmas aplicadas com os alunos]".

Com a experiência na aplicação das atividades de investigação em sua sala de aula, Lucas diz ter percebido o quanto seu aluno pode crescer e desenvolver-se matematicamente. Além disso, o professor diz que esta experiência o fez refletir, principalmente a respeito da avaliação.

> "Para mim significou muito, porque eu percebi o quanto meu aluno pode crescer numa aula dessas, com uma dinâmica como essa. O quanto ele pode aprender em uma única aula... ele pode aprender em vários aspectos...tem vários conceitos envolvidos. (...) Me fez refletir com relação à minha prática, principalmente em relação à avaliação. Alguns alunos me surpreenderam, alunos que não...que eu não esperava tanto, que não têm muita argumentação, não tem muito conteúdo matemático me surpreenderam com relação à participação e com relação à discussão, às idéias que eles apresentaram."

Com relação ao uso do material concreto no desenvolvimento das atividades, Lucas acredita que este foi de importância fundamental. Ele afirmou já ter trabalhado com material concreto, mas salientou que o faz com pouca freqüência.

A respeito do papel do professor em uma aula investigativa, o professor explicou que é necessário detectar as dificuldades e trabalhar em cima dos erros dos alunos. Já o aluno, na opinião do Lucas, precisa mostrar-se curioso e comunicativo, expressando suas idéias e dificuldades.

A avaliação de aulas investigativas, na opinião do professor, deve considerar os seguintes aspectos: interesse, participação, conteúdo e conclusão, sendo este último aspecto a capacidade de fornecer a resposta correta. Além de considerar importante avaliar o aluno em todos estes aspectos, Lucas afirmou anteriormente que a experiência com as atividades de investigação na sua sala de aula o fez refletir no quesito avaliação. Apesar disto, ao perguntarmos como foi feita a correção das atividades, Lucas respondeu:

> "A minha correção [o professor refere-se a correção da atividade 1 que, por falta de dados, optamos por não descrever neste trabalho.] foi muito objetiva. Eu peguei aqueles papéis... peguei aquelas folhas e fiz um gabarito... um gabarito meu. Fui fazendo, resolvendo e fui comparando as minhas respostas com as respostas dos alunos. As únicas questões que eu tive dificuldades em corrigir e avaliar foram as questões que têm como resposta a resposta pessoal, aquelas que têm respostas mais abertas. Aquelas ali eu analisei a expressão, a argumentação do aluno. (...) Não corrigi no quadro. Só peguei e corrigi. Vou entregar com as devidas observações e com a devida pontuação...eu falei que ia valer nota."

Com relação ao trabalho dos alunos com as atividades, o professor assegurou que houve progresso no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos no que tange aos conceitos trabalhados: perímetros, áreas e volumes. Declarou que não existem limitações quanto à aplicação deste tipo de atividade e que, à medida que os alunos vão aprendendo novos conteúdos, é possível aplicar novas tarefas de investigação. Lucas pretende continuar trabalhando neste tipo de tarefa de investigação e resolução de problemas em suas aulas e pretende fazer um planejamento para poder aplicar as atividades.

Considerações Finais

Esta pesquisa, realizada com professores, buscou referenciais teóricos e metodológicos numa tentativa de responder às seguintes questões:

1. De que forma os professores de Matemática se envolvem em atividades privilegiando a visualização de figuras espaciais através de uma metodologia de investigação e resolução de problemas?
2. Que entendimento detêm os professores acerca das atividades desta natureza, quais as dificuldades que encontram para resolvê-las e de que maneira lidam com essas dificuldades?
3. Como as estratégias desenvolvidas e os conteúdos adquiridos pelos professores estão sendo transmitidos para os seus estudantes?

Para responder às duas primeiras perguntas foram aplicadas cinco atividades de caráter investigativo com um grupo de 30 professores inseridos na disciplina Tendências em Educação Matemática, obrigatória no curso de especialização para professores de Matemática. O trabalho foi guiado privilegiando uma abordagem de investigação proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). De acordo com a análise descrita no capítulo quatro deste trabalho, podemos afirmar que os professores percorreram todas as etapas necessárias à realização de uma atividade investigativa na concepção dos autores acima citados, são elas: 1- reconhecimento, exploração de uma situação problemática e formulação de questões; 2- organização de dados, formulação de questões e afirmações sobre uma conjectura; 3- realização de testes e refinamento de uma conjectura; 4- justificação de uma conjectura e avaliação do raciocínio ou resultado do raciocínio.

Organizados em grupos, os professores reconheceram e exploraram as situações problemáticas propostas, muitas vezes com dificuldades em entender, inicialmente, o que estava sendo proposto e com questionamentos sobre as afirmações propostas nos problemas. Por exemplo, na atividade 1 (Dobrando e Triplicando) alguns professores não concordavam com o desenho que representava a figura imediatamente anterior dobrada, pois apresentavam dificuldades em perceber que todas as dimensões da figura original (comprimento, largura e altura) deveriam ser duplicadas. Esses questionamentos iniciais quando superados representaram um ganho na aprendizagem destes professores.

Vencida esta etapa, a segunda fase da investigação ocorreu de forma tranqüila e produtiva. Ainda na atividade 1, por exemplo, a tabela presente na tarefa foi preenchida pelos professores levando-os a estabelecer relações matemáticas entre valores de perímetros, áreas e volumes com seus respectivos resultados ao dobrar ou triplicar determinadas figuras. Os professores puderam verificar o crescimento linear do perímetro e o crescimento exponencial de áreas e de volumes, que aumentavam segundo razões quadradas e cúbicas. Acreditamos que este reconhecimento e diferenciação entre perímetros, áreas e volumes são fundamentais para aquisição destes respectivos conceitos.

A realização de testes e o posterior refinamento de uma conjectura, terceira fase do processo investigativo, pôde ser destacado, por exemplo, pelo desenvolvimento de muitos professores na resolução da atividade 3 (Cubos, cubos e mais cubos) na busca por um resultado algébrico que representasse o número n de cubinhos com apenas uma face pintada em um cubo $n \times n \times n$. Munidos da conjectura $6 \cdot (n-2)^2$ para o cálculo do total de cubinhos, os professores testaram tal resultado para os cubos $3 \times 3 \times 3$, $4 \times 4 \times 4$ e $5 \times 5 \times 5$.

Verificada a validade do resultado para alguns casos, os professores partiram para a justificação e validação do mesmo, ações relacionadas à quinta e última etapa do processo investigativo. Para tanto foi necessário fazer uso do argumento geométrico de que $(n-2)^2$ representava um quadrado reduzido em uma unidade no comprimento e uma unidade na largura, já que os cubinhos com uma única face pintada não possuíam contato com a aresta do cubo original. Finalmente bastava multiplicar este resultado por seis, já que a mesma situação se repetia nas seis faces do cubo original. Como cada quadrado era face de um cubinho, o número total de cubinhos no cubo $n \times n \times n$ estava determinado pela fórmula $6 \cdot (n-2)^2$. Esta etapa da investigação permitiu aos professores o uso do raciocínio espacial na medida que demandava argumentos geométricos para justificar a conjectura acima mencionada.

De acordo com a descrição do desenvolvimento das atividades pelos professores no capítulo quatro e alguns exemplos aqui mencionados podemos afirmar que os professores desenvolveram um trabalho investigativo, passando por todas as etapas, consideradas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), essenciais na realização de um trabalho genuinamente investigativo. Salientando a importância desse tipo de trabalho no contexto da geometria espacial, vale destacar que os professores desempenharam bem as tarefas propostas, o que certamente contribuiu para o desenvolvimento de algumas habilidades espaciais.

Ainda sobre o desenvolvimento da visualização de figuras espaciais é importante destacar que a utilização do material concreto favoreceu o trabalho com tais habilidades. Na resolução da atividade 3, por exemplo, muitos professores tiveram dificuldade de visualizar o número total de cubinhos com nenhuma face pintada no cubo $4\times4\times4$. Vários deles afirmavam que este total deveria ser 4. O material manipulável possibilitou a retificação do resultado assim, com o auxílio dos cubinhos de madeira, os professores perceberam que, neste caso, havia 8 cubinhos com nenhuma face pintada. Porém, é importante registrar que alguns professores ao se utilizarem do material concreto ficaram muito presos à ele e não alcançaram a abstração, conseqüentemente, não obtiveram resultados satisfatórios. Este fato pode ser exemplificado pela resolução de um professor para a atividade 3 onde este contava manualmente a quantidade de cubinhos com uma face pintada presente nos cubos $3\times3\times3$, $4\times4\times4$ e $5\times5\times5$ através da utilização dos cubinhos de madeira sem buscar por uma regularidade que relacionasse todos os casos.

Numa tentativa de resposta à terceira e última questão desta pesquisa observamos dois professores, dentre os 30 participantes do trabalho com as atividades anteriores, Fernando e Lucas aplicando uma das cinco atividades (os professores escolheram livremente dentre as cinco atividades disponíveis) com seus alunos em sala de aula. Fernando optou por aplicar a atividade 1 (Dobrando e Triplicando) em uma turma do 9º ano do ensino fundamental e escolheu a atividade 2 (O Problema de Pintura de Faces) para aplicação numa turma do 8º ano deste mesmo nível de ensino. O professor Lucas trabalhou com a atividade 2 em duas turmas distintas do 7º ano do ensino fundamental.

Com relação às etapas de investigação mencionadas no início deste capítulo é importante destacar alguns acontecimentos. Os momentos iniciais da investigação nas turmas do 7º do professor Lucas ficaram prejudicados por eventuais saídas do professor. Acreditamos que este fato contribuiu para a fraca formulação de questões e conjecturas pelos alunos em ambas as turmas. Além disso, um dos enunciados da atividade 2 pedia uma generalização do problema e percebemos, durante a observação das aulas, a dificuldade dos alunos em utilizar a álgebra, mesmo para aqueles alunos que estavam compreendendo o “mecanismo” da atividade. Na aplicação desta mesma atividade com a turma do 8º ano do professor Fernando, a grande maioria dos alunos cumpriu de maneira produtiva todas as etapas da investigação e alcançaram as conclusões esperadas. Vale ressaltar que Fernando havia realizado explicações em aulas anteriores sobre tópicos matemáticos que considerou como pré-requisitos para um bom desenvolvimento da atividade 2. Já no desenvolvimento da atividade 1 no 9º ano, os alunos do professor Fernando não efetuaram todas as conclusões esperadas. Acreditamos que

Fernando chamou muita atenção para que os estudantes trabalhassem utilizando a notação a para representar a aresta do cubo e esta denominação acabou induzindo toda a atividade para procedimentos algébricos. Desta forma, os alunos tiveram dificuldades em efetuar cálculos de potências de a para a obtenção de valores de perímetros, áreas e volumes. Assim o foco da atividade acabou se direcionando para raciocínios algébricos, desviando a atenção do trabalho com habilidades espaciais e, conseqüentemente, houve pouca conclusão desta natureza.

Apesar do raciocínio algébrico não ter sido o foco do nosso estudo nas observações de sala de aula dos professores, as dificuldades dos alunos com a utilização da álgebra chamou-nos atenção. Na atividade 2 (O Problema de Pintura de Faces), por exemplo, onde a álgebra aparece como generalização da aritmética, muitos alunos não conseguiram alcançar tal generalização. Surgiram comentários dos alunos do tipo: "se eu soubesse quem é esse n eu multiplicaria por quatro e somava com dois" ou "eu posso escolher um valor para esse n e fazer a conta?" Dificuldades semelhantes foram detectadas e descritas por Tinoco (2008) em análises de atividades que trabalham com o pensamento algébrico. A autora afirma que a iniciativa de recorrer às letras no início de um raciocínio não é um fenômeno que se dá espontaneamente nos estudantes, ele precisa ser ensinado e estimulado pelos professores.

A respeito da utilização do material concreto na sala de aula dos professores, este foi de importância fundamental para o desenvolvimento do trabalho dos alunos, tanto nas turmas do professor Fernando quanto nas turmas de Lucas. A exemplo disso, podemos citar na turma do 9º ano do professor Fernando como os cubinhos foram importantes para que os alunos, através de seu manuseio, percebessem que ao dobrar ou triplicar uma figura todas as suas dimensões (comprimento, largura e altura) eram dobradas ou triplicadas. Outro fato interessante foi a explicação dos alunos do 8º ano do professor Fernando a respeito da generalização do Problema de Pintura de Faces (atividade 2). Eles escreviam a fórmula $4n+2$ para representar o total de faces pintadas para o caso de n cubinhos acoplados e apontavam para as duas extremidades de uma determinada fileira de cubinhos de madeira para justificar a presença do número 2 na expressão encontrada. Porém, alguns alunos, do professor Fernando e do professor Lucas, se prenderam demasiadamente ao material concreto e, desta forma não conseguiam estabelecer as relações esperadas. Este fato foi claramente percebido quando os estudantes solicitavam mais cubinhos e continuavam por contá-los, manualmente, mesmo em situações que consideravam grandes quantidades dos mesmos.

A correção das atividades na sala de aula pelos professores Fernando e Lucas representou um momento rico para a aprendizagem dos alunos. Pelas observações feitas durante as aulas e os referenciais teóricos considerados podemos afirmar que este foi o momento em que a comunicação professor-aluno, de acordo com o modelo de comunicação proposto por Alro e Skovsmove (2006), ocorreu de maneira mais efetiva. As ações, consideradas pelos autores acima citados como imprescindíveis para o estabelecimento da comunicação, estabelecer contato, perceber, reconhecer, posicionar-se, pensar alto, reformular, desafiar e avaliar foram compartilhadas entre os professores e seus alunos. O que diferenciou o trabalho dos dois professores nesta etapa foi a maneira como cada um conduziu a tarefa. Na correção da atividade 2, por exemplo, Fernando direcionou o trabalho através de justificativas geométricas, enquanto Lucas privilegiou o uso de raciocínios numéricos. Isto pode ser exemplificado na correção de Fernando quando ele relaciona os valores encontrados com o número de faces visíveis nos cubinhos. Lucas prefere buscar uma seqüência numérica crescente para o total de faces quando o número de cubinhos acoplados aumenta. Acreditamos que a preferência de cada professor estava diretamente relacionada com a maneira que cada um entendeu e interpretou a atividade proposta. Isto pôde ser confirmado, de certa forma, ao observar que a maneira como cada professor resolveu a atividade, anteriormente, na aula da especialização, foi muito semelhante à maneira como desenvolveu no quadro em sala de aula para seus alunos.

Um olhar mais abrangente sobre o desenvolvimento das atividades de resolução de problemas e investigação pelos professores da especialização nos permite afirmar que estes educadores puderam vivenciar processos de construção matemáticos característicos da própria natureza desta ciência, no sentido de que a Matemática possui características de exploração, formulação de conjecturas e justificação destas conjecturas em sua formação. Esta vivência possibilitou aos professores participantes o trabalho com a capacidade de justificação e validação dos resultados, característica importante para um bom professor de Matemática. Acreditamos que o trabalho influenciou positivamente, direta e indiretamente, a sala de aula dos professores e supomos que trabalhos como este possam auxiliar professores e alunos a compreender a natureza da Matemática e, até mesmo, levá-los a se sentir produzindo Matemática.

Referências Bibliográficas

ABRANTES, P. *Avaliação em Educação Matemática*. Rio de Janeiro: GEPEM, 1995.

ABRANTES, P. Investigações em Geometria na sala de Aula. In: VELOSO, Eduardo et al (Eds). *Ensino da geometria no virar do milênio*. Lisboa: DEFCUL, 1999.

ALRO, H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ARCAVI A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics* v. 52. p. 215–241, 2003.

ATENCIO, D. J. Structured Autonomy or Guided Participation? Constructing Interest and Underesting in a Lab Activity. *Early Childhood Education Jornal*, v.31, n.4, june, p. 233-239, 2004.

BALL, D. L. *The Subject Matter Preparation of Prospective Teachers*: challenging the myths. (Research Report). East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education, 1988.

BALL, D. L. Magical Hopes: manipulatives and the reform of math education. *American Educator*. Summer, p.15–18; p. 46–47, 1992.

BRASIL, *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

BROCARDO, J. *As Investigações na Sala de Aula de Matemática*: um projecto curricular no 8.º ano. Tese (Doutorado). Universidade de Lisboa, 2001. Disponível em <http://ia.fc.ul.pt >Acesso em 18 de julho. 2008.

CLEMENTS D., BATTISTA, M. Geometry and Spatial Reasoning. In: Grouws, D. (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 1992. p. 420-464.

DECI, E. L. e RYAN, R. M. *Intrinsic Motivation and Self-determination in Human Behavior*. New York: Pleninum Press, 1985.

HERSHKOWITZ, R., PARZYSZ, B. and DORMOLEN, V. J. L. Space and Shape, In: BISHOP A. J., CLEMENTS K., KEITEL C., KILPATRICK J. and LABORDE C. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer, 1996. v. 1. p. 161-206.

KALEFF, A. M. A Importância do Ensino da Geometria na Formação do Educador Matemático, Rio de Janeiro: GEPEM. n.31, 1993.

KALEFF, A. M. *Vendo e Entendendo Poliedros*. Niterói: EDUNFF, 2003.

KALEFF, A. *Novas Tecnologias no Ensino da Matemática*: tópicos em ensino de geometria, 2008. ISBN: 978- 85-7648-453-0

LORENZATO, S. *O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores.* Campinas: Autores Associados, 2006.

MOREIRA P. e DAVID, M. M. A Formação Matemática na Licenciatura e Três Questões Sobre Números. In: ENEM, 8., 2004. Recife. *Anais*..., 2004

MOYER, P. S. Are we Having Fun Yet? How Teachers use Manipulatives to Teach Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v.47. n. 2. p. 175-197, 2001.

OLIVEIRA, H. *Actividades de Investigação na Aula de Matemática*: aspectos da prática do professor. Dissertação (Mestrado). Universidade de Lisboa, 1998. Disponível em <http://ia.fc.ul.pt >Acesso em 18 de julho. 2008.

OLIVEIRA, H., PONTE, J. P., SANTOS, L., e BRUNHEIRA, L. Os Professores e as Actividades de Investigação. In: ABRANTES P., PONTE J. P., Fonseca H.; BRUNHEIRA L. (Eds.), *Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo*. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999. p. 97-110.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M.A.V. (org.). *Pesquisa em Educação Matemática*: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 199-218.

PARZYSZ, B. Knowing vs. Seeing: problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, n.19, p. 79-92, 1988.

PINHEIRO, A. Visualização, representação e comunicação numa aula do 8º ano. *Educação e Matemática*, Lisboa: APM, n.44, p. 31-34, set/out 1997.

POLYA, G. Dez mandamentos para professores. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n.10, p. 2-10, 1987.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

PONTE, J. P. Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM,* v.39 n. 5-6, p. 419-430, 2007.

PONTE, J. P., BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P.; MATOS, J. F. *Cognitive processes and social interaction in mathematical investigations.* In J. P.Ponte, J. F.Matos; D. Fernandes (Eds.). Mathematical problem solving and new information technologies: Research in contexts of practice, 1992. p. 239–254. Berlin: Springer

ROCHA, A. *Uma experiência com Actividades de Investigação na Aula de Matemática*: competências matemáticas, atitudes e concepções de dois alunos do 7º ano de escolaridade. Dissertação (Mestrado). Universidade do Porto, 2003. Disponível em <http://ia.fc.ul.pt >Acesso em 18 de julho. 2008.

ROCHA, A. PONTE, J. P. Aprender Matemática Investigando. Zetetiké, Campinas. v. 14, n. 26, p. 29-54, jul/dez 2006.

SANTOS, V. (Coord.). *Avaliação de Aprendizagem e Raciocínio em Matemática:* métodos alternativos. Rio de Janeiro: UFRJ /Projeto Fundão, 1997.

SKOVSMOSE, O. Cenários para Investigação. *Bolema*, Rio Claro. v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SEGADAS, C. et al. *Visualizando Figuras Espaciais*. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2008.

SEGADAS, C.; PEREIRA, M.; SILVA, F. Explorando atividades de visualização e representação de figuras no espaço. In: ENEM, 8., 2004, Recife. *Anais*... Rio de Janeiro: SBEM, 2004. CD-ROM.

SEGURADO, I. *A investigação como parte da experiência matemática dos alunos do 2º ciclo*. Dissertação (Mestrado). Universidade de Lisboa, 1997. Disponível em <http://ia.fc.ul.pt >Acesso em 18 de julho. 2008.

SEGURADO, I. O que Acontece quando os Alunos Realizam Investigações Matemáticas? In: GTI (Ed.). *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* Lisboa: APM, 2002. p. 57-73

SEGURADO, I., e PONTE, J. P. Concepções sobre a Matemática e Trabalho Investigativo. *Quadrante*, v.7, n.2, p. 5–40, 1998.

SZENDREI, J. Concrete Materials in the Classroom In: BISHOP A. et al. (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer, Dordrecht, p. 411-435, 1996.

TARDIF, M. *Saberes Docentes e Formação Profissional*. Petrópolis:Vozes, 2003.

TINOCO, Lucia Arruda de Albuquerque (Coord). *Álgebra*: pensar, calcular, comunicar. Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2008.

USISKIN, Z. Resolvendo os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar In: LINDQUIST M. M. e SHULTE A. P. (org) *Aprendendo e Ensinando Geometria*, São Paulo: Atual, 1994.

VARANDAS, J. *Avaliação de investigações matemáticas*: uma experiência. Dissertação (mestrado). Universidade de Lisboa, 2000. Disponível em <http://ia.fc.ul.pt >Acesso em 18 de julho. 2008.

VELOSO, E. Geometria: temas actuais. Lisboa: IIE, 1998.

ANEXO I. Atividades

Atividade 1: Dobrando e Triplicando

Complete a tabela com o auxílio dos cubinhos disponíveis, dobrando e triplicando todas as dimensões (comprimento, largura e altura) das figuras originais.

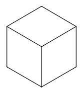
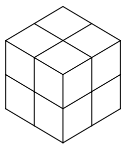
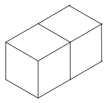
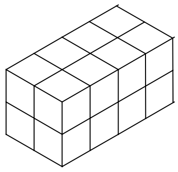
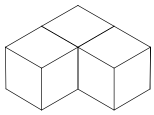
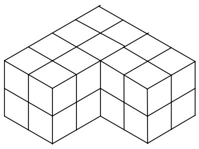
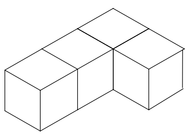
Figura	Perímetro do Topo (em unidades)	Área do Topo (em unidades quadradas)	Área da Superfície (em unidades quadradas)	Volume, nº de Cubos (em unidades cúbicas)
1. 				
 Dobrado				
Triplicado				
2. 				
 Dobrado				
Triplicado				

Figura	Perímetro do Topo (em unidades)	Área do Topo (em unidades quadradas)	Área da Superfície (em unidades quadradas)	Volume, nº de Cubos (em unidades cúbicas)
3. 				
 Dobrado				
Triplicado				
4. 				
Dobrado				
Triplicado				

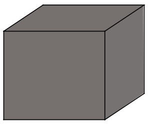
Com relação à tabela que você acabou de preencher, responda:

a) Observando a 2ª coluna da tabela, o que acontece com o perímetro ao se duplicar e triplicar uma determinada figura?

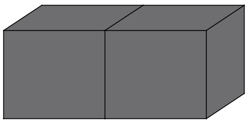
b) Você consegue perceber outras regularidades observando as linhas ou colunas desta tabela? Em caso afirmativo, explique essas regularidades.

<u>Atividade 2:</u> O Problema de Pintura de Faces

Deseja-se pintar as faces visíveis (externas) de cubinhos unitários sempre após a união gradativa de mais um cubinho na direção horizontal. A figura a seguir mostra como devemos proceder.



→ Um cubinho com todas as faces visíveis pintadas de cinza. Aqui temos um total de 6 faces visíveis pintadas.



→ Dois cubinhos acoplados com todas as suas faces visíveis pintadas. Neste caso, teríamos um total de 10 faces visíveis pintadas.

1- E se tivéssemos três cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar? Faça o desenho para te ajudar a pensar.

2- E se tivéssemos quatro cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?

3- E se tivéssemos cinco cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?

4- E se tivéssemos quinze cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?

5- E se tivéssemos 66 cubinhos acoplados, quantas faces visíveis teríamos para pintar?

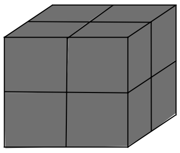
6- Investigue como faríamos se tivéssemos *n* cubinhos acoplados.

7- E se você soubesse o número de faces visíveis que ficam pintadas, saberia dizer quantos cubinhos foram acoplados? Por exemplo, se tivéssemos um total de 86 faces visíveis pintadas, quantos cubinhos estariam acoplados?

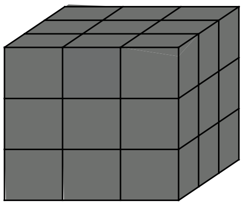
8- E se tivéssemos um total de 286 faces visíveis pintadas, quantos cubinhos estariam acoplados? Justifique sua resposta.

<u>Atividade 3:</u> Cubos, cubos e mais cubos

Cubos de diferentes dimensões são construídos a partir de cubinhos unitários (arestas mendindo 1u.c.). Imagine que queremos pintar estes cubos exteriormente de cinza conforme está representado abaixo:



Cubo $2\times2\times2$ pintado exteriormente de cinza



Cubo $3\times3\times3$ pintado exteriormente de cinza

No caso do cubo $3\times3\times3$ pintado exteriormente, quantos cubinhos unitários ficam com uma única face pintada? E com duas? E com três?... E com nenhuma?

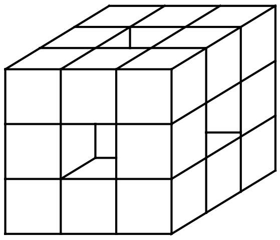
Investigue o que aconteceria se pintássemos exteriormente um cubo $4\times4\times4$. E se pintássemos um cubo $5\times5\times5$ construído da mesma forma?

Você pode utilizar os cubinhos unitários disponíveis para auxiliar a sua investigação. Organize uma tabela com as suas descobertas sobre o número de cubinhos com 0, 1, 2, ... faces pintadas num cubo $3\times3\times3$, $4\times4\times4$ e $5\times5\times5$.

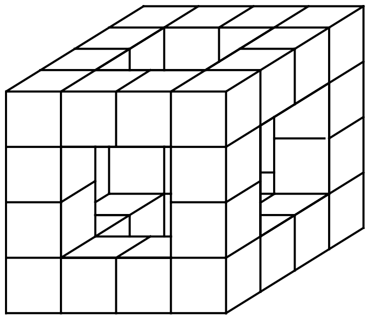
Pense o que aconteceria em um cubo $n\times n\times n$. Anote as suas conclusões.

<u>Atividade 4:</u> Investigando Esqueleto de Cubos

Um esqueleto de cubo é uma forma que preserva a estrutura sem que seja necessário o seu preenchimento total formando um objeto maciço. As figuras abaixo mostram alguns exemplos de esqueletos de cubos.



Esqueleto do cubo $3 \times 3 \times 3$



Esqueleto do cubo $4 \times 4 \times 4$

Com base nessa idéia, responda as seguintes perguntas:

1- A próxima figura segue o mesmo padrão de formação?

2- A estrutura pode ainda ser chamada de cubo?

3- De quanto é acrescida a aresta para a formação deste próximo padrão?

4- É possível calcular o volume deste objeto?

5- Desenhe o esqueleto do cubo $2\times 2\times 2$. O que você pode observar?

6- Quantos cubinhos são necessários para formar o esqueleto do cubo $3\times 3\times 3$?

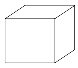
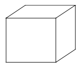
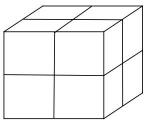
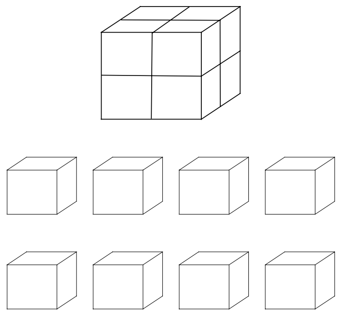
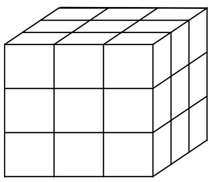
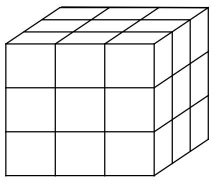
7- Quantos cubinhos são necessários para formar o esqueleto do cubo $4\times 4\times 4$?

8- Pode-se encontrar uma generalização que lhe permita calcular a quantidade n de cubinhos necessários para formar o esqueleto de um cubo $n\times n\times n$?

<u>Atividade 5:</u> Quantos Cubos?

Queremos contar os cubos de todos os tamanhos (medidas inteiras) formados nos cubos $1\times1\times1$, $2\times2\times2$, $3\times3\times3$, $4\times4\times4$, ...

Vamos por etapas:

 Cubo $1\times1\times1$		• 1 cubo $1\times1\times1$
 Cubo $2\times2\times2$		4. 1 cubo $2\times2\times2$ 5. 8 cubos $1\times1\times1$
 Cubo $3\times3\times3$		• 1 cubo $3\times3\times3$ • __ cubos $2\times2\times2$ • __ cubos $1\times1\times1$

Você seria capaz de prever quantos cubos (com a aresta de medida inteira) de todos os tamanhos existem em um cubo $n\times n\times n$? Anote suas conclusões e justificativas.

<u>Atividade 6:</u> Leitura dos textos, descrição das idéias principais e questões para discussão.

Textos:

- ABRANTES, P. Investigações em Geometria na sala de Aula. In: VELOSO, Eduardo et al (Eds). *Ensino da geometria no virar do milênio*. Lisboa: DEFCUL, 1999.
- USISKIN, Z. Resolvendo os Dilemas Permanentes da Geometria Escolar In: LINDQUIST M. M. e SHULTE A. P. (org) *Aprendendo e Ensinando Geometria*, São Paulo: Atual, 1994.

Atividades em sala:
1- Individualmente, descrever em uma folha de papel duas idéias que considerar importantes para cada um dos textos. Cada idéia deve ser descrita em aproximadamente três linhas.
2- Analisar e discutir em grupo as seguintes perguntas:

Texto: Investigações em Geometria na Sala de Aula
Autor: Paulo Abrantes

a) Como se caracterizam as atividades do tipo investigativas?

b) Por que a geometria é um tema propício à realização de atividades de investigação?

c) Explique com suas palavras o seguinte trecho retirado do texto: "...a experiência de realização de atividades investigativas e de discussão sobre os processos utilizados pode desenvolver não só conhecimentos de Matemática mas também conhecimentos *sobre* a Matemática, isto é relativos à natureza desta ciência."

Texto: Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar
Autor: Zalman Usiskin

a) Quais são as sugestões propostas pelo autor para resolver o problema do baixo desempenho dos alunos em geometria? Explique-as

b) Segundo o autor, existem várias maneiras de formar conceitos em geometria e diversas formas de considera-la. Explicite essas formas e explique cada uma delas.

3- Discussão e análise das perguntas com a turma.

ANEXO II. Guia da Entrevista

Guia de Entrevista

1- Fale um pouco da sua formação profissional (tempo de trabalho, níveis de ensino os quais já atuou)?

2- Por que escolheu esta turma para aplicar as atividades de investigação?

3- Quais são os aspectos essenciais que norteiam a sua prática como professor de Matemática?

4- O que falta, por vezes, em algumas aulas para que funcionem?

5- Como você tem ultrapassado os problemas que surgem na sua prática?

6- Quando você decidiu ser professor de Matemática já considerava que era uma disciplina importante? Você acha que tem conseguido passar isso para os seus alunos?

7- Em que medida o programa (o currículo) orienta a sua prática?

8- Como se caracteriza uma aula sua típica?

9- Como você caracteriza as tarefas de investigação em relação às suas aulas costumeiras? Que mudanças foram necessárias para a realização dessas aulas?

10- Por que você aceitou o convite para trabalhar nesse estudo?

11- Que significado esta experiência teve pra você?

12- Que ganhos esta experiência lhe deu em relação ao saber profissional?

13- Você acha que o material concreto auxiliou o trabalho dos alunos?

14- Você costumava ou costuma realizar aulas dessa natureza?

15- Qual deve ser o papel do professor nessas aulas?

16- E o papel do aluno?

17- Como avaliar o aluno nesse tipo de aula?

18- Como foi feita a correção da atividade?

19- Você considera que houve progresso no desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos?

20- Você acha que existem limitações na aplicação de atividades dessa natureza?

21- Você costuma utilizar material concreto em suas aulas?

22- Você aplicou ou pretende aplicar essas atividades (ou as outras não escolhidas) em outras turmas?

23- Você pretende continuar trabalhando com esse tipo de atividade (investigação e resolução de problemas) com seus alunos?