Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

ÁLGEBRA: COMO AS CRENÇAS DOS PROFESSORES INFLUENCIAM NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS

Magno Luiz Ferreira

JULHO/2009

ÁLGEBRA: COMO AS CRENÇAS DOS PROFESSORES INFLUENCIAM NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS

Magno Luiz Ferreira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de **Mestre em Ensino de Matemática**, sob a orientação da **Profª. Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.**

JULHO/2009

FICHA CATALOGRÁFICA

F383

Ferreira, Magno Luiz.

Álgebra: como as crenças dos professores influenciam na aprendizagem dos alunos / Magno Luiz Ferreira. — Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.

XI, 151f.; 30cm.

Referências: f.131-135.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro/Instituto de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

Orientador: Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner.

1. Álgebra - Estudo e ensino. 2. Crenças e concepções 3. Educação Matemática I. Santos-Wagner, Vânia Maria Pereira dos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro.Instituto de Matemática. III. Título.

ÁLGEBRA: COMO AS CRENÇAS DOS PROFESSORES INFLUENCIAM NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS

Magno Luiz Ferreira

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Profª. Drª. Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
UFRJ / UFES
Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

Profª. Drª. Maria Laura Mouzinho Leite Lopes
Instituto de Matemática – UFRJ

Prof. Dr. Marcelo Almeida Bairral
UFRRJ

Profª. Dr.ª Estela Kaufman Fainguelernt
Universidade Estácio

DEDICATÓRIA

Da última vez que escrevi um trabalho desta envergadura ao final do curso de licenciatura, dediquei todo ele para as duas pessoas mais importantes de minha vida, meu pai e minha mãe. Antes de escrever esta dedicatória, preciso lembrar que na época do outro texto eles eram as duas pessoas mais importantes de minha vida.

Hoje existe uma terceira pessoa, que não rivaliza espaço com meus pais, já que conseguiu fazer com que meu coração aumentasse o suficiente para que ela pudesse se colocar ao lado deles em minha vida. Estou falando de minha esposa Sabrina.

Não posso negar que, desta vez, precisei muito mais dos três do que da última vez, e tenho que reconhecer que sem eles eu não teria escrito nem mesmo a primeira página. Este trabalho é tanto meu como deles. Mas se pensam que dedico este trabalho a eles por gratidão, se enganam. Dedico porque sem eles, minha vida não teria sentido.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente quero agradecer a Deus pela oportunidade que me deu de realizar este trabalho.

Também agradeço muito à minha orientadora Vânia, por todo apoio, compreensão e paciência nos momentos em que perdi o foco.

Agradeço ao professor Victor pela ajuda e pela oportunidade que me deu durante o período das aulas no mestrado.

Agradeço também a todos os meus companheiros de turma de 2007 do Mestrado. Com um agradecimento especial para Daniela, Ulisses, Rafael, Carolina, Ana, Luiz Marcos e Marcel, que me ajudaram muito em algumas dificuldades que tive nas disciplinas.

Também agradeço a todos os professores e alunos que participaram do trabalho de campo. Sem eles esta pesquisa não teria sido possível.

Finalmente, quero agradecer à minha sogra Elizabeth, que me deu muita força neste período. Também quero deixar claro que desta vez escrevi o nome dela.

Resumo

Esta pesquisa procurou verificar como os professores compreendem álgebra e quais concepções sobre álgebra possuem. Buscamos também identificar se ocorre ressonância das concepções dos professores na concepção de álgebra dos alunos. Realizamos um estudo de caso de cunho qualitativo, o qual se desenvolveu em três etapas. Inicialmente entrevistamos cinco professores do ensino fundamental e médio da rede pública do estado do Rio de Janeiro. As entrevistas abordaram os seguintes temas: matemática, ensino de matemática, álgebra e o ensino de álgebra. No segundo momento, observamos as aulas de duas professoras, pedimos que elas analisassem livros didáticos (escolhidos por elas) e situações referentes a equações do 2º grau. Posteriormente, entrevistamos três alunos de cada professora, que foram escolhidos em consenso com as docentes, para que pudéssemos verificar qual a ressonância das crenças e concepções das professoras nesses alunos. Os trabalhos de Ernest (1989), Usiskin (1988/1995), Lins e Gimenez (1997) ofereceram o suporte teórico para desenvolver a pesquisa e analisar os dados coletados. Procuramos relacionar as respostas nas entrevistas com o discurso das professoras ao longo da pesquisa de campo. A análise dos dados nos deu indícios de que as professoras apresentam semelhanças quanto às concepções sobre álgebra. Ambas entendem este campo da matemática como resultado de demandas do mundo. Além disso, concepções do tipo “álgebra como estudo de técnicas para resolver certos tipos de problemas” foram bastante freqüentes. Acreditamos que este trabalho contribui para uma discussão sobre o comportamento dos professores em sala de aula, observando como os mesmos pensam e divulgam a álgebra.

Palavras-chave: Álgebra; crenças e concepções; ensino de álgebra.

Abstract

This research tried to investigate how some teachers understand algebra and which conceptions about algebra they have. We also searched to identify if it occurs resonance of the teachers' conceptions about algebra in students. We conducted a case study of qualitative nature, which was developed in three stages. Initially we interviewed five teachers of elementary and secondary public schools in the state of Rio de Janeiro. The interviews were about the following themes: mathematics, mathematics teaching, algebra and teaching of algebra. In the second stage, we observed the lessons of two teachers; we asked them to examine books (chosen by them) and situations related to equations of the 2nd degree. Later, we interviewed three students from each teacher, who were chosen in agreement with the teachers so that we could see if there was resonance of teachers' beliefs and conceptions about algebra on these students. The work of Ernest (1989), Usiskin (1988/1995), Lins & Gimenez (1997) offered the theoretical support to develop the research and to analyze the collected data. We tried to relate the answers in interviews with the speech of teachers throughout the research. Data analysis has given evidence that the teachers have similarities as to the concepts of algebra. Both understand this field of mathematics as a result of demands of the world. Moreover, conceptions such as "algebra as study of techniques for solving certain types of problems" were frequent. We believe this work contributes to a discussion about the behavior of teachers in the classroom, observing how they think and disseminate algebra.

Keywords: Algebra; beliefs and conceptions; teaching of algebra.

Índice de Figuras

SUMÁRIO

1.Introdução

A inspiração para realizar este trabalho surgiu a partir de observações feitas durante minha própria prática docente. Pude perceber que alguns alunos, mesmo tendo bom desempenho em matemática (*no sentido quantitativo*), demonstram algumas atitudes mecânicas com relação às atividades que lhes são propostas. Desta forma, durante a resolução de problemas fazem uso de fórmulas decoradas, macetes de questões isoladas. Além disso, quando me lembro dos alunos que tive durante meus seis anos de experiência como professor percebo que, além dos alunos que resolvem os problemas de forma mecânica, existem também outros que apresentam a mesma segurança, mas têm atitudes bem diferenciadas. Lidam com matemática de forma menos rígida, ou seja, observam os problemas e tentam contextualizá-los matematicamente para resolvê-los.

Quais as diferenças entre os comportamentos desses alunos, frente à atividade matemática? É fato que podem existir muitos caminhos para responder esta pergunta, nos levando a várias possibilidades. Desta forma, podemos pontuar algumas dessas vertentes. Uma diferença, vista com base em minha experiência docente, é que o aluno que tenta contextualizar os problemas parece ter melhor noção do que está fazendo do que o aluno que lida com eles de forma mais mecânica.

Ainda pensando nessas várias possibilidades, outra decorre de percebermos as atitudes dos alunos e o modo como enxergam a matemática como sendo fruto das experiências que os mesmos tiveram com a família e no seu círculo social. Além disso, é importante lembrar que as atitudes e modo de enxergar a matemática que os professores destes alunos apresentam, também podem influenciar o modo como essas crianças lidam com matemática.

Sendo assim, é importantíssimo que o professor dedique parte de suas explanações a interpretações referentes ao contexto dos problemas, apresentados em aula, para evitar situações ou conseqüências como a seguinte:

> Uma professora pergunta o seguinte a todos os meninos e meninas de uma turma da primeira série do ensino fundamental: Se um menino tem 7 lápis e lhe tiram 7, poderá escrever? Um menino responde: Isso depende se ele tem esferográfica ou pincel atômico. A professora não só não admite a resposta como correta, como também entende que encerra uma certa rebeldia do aluno. Quatro anos mais tarde, quando recordava a história a esse menino, ele a interrompe dizendo: Que problema mais bobo; claro que ele não poderá escrever! (CALLEJO; VILA, 2006, p. 9).

A citação acima, que não conta nada fora do comum, nos mostra que podem existir professores que agem em sala de aula como se concebessem a matemática como algo estático, ou ainda, só conseguem observar os problemas fora de seus contextos. Por causa deste comportamento e desta atitude podem acabar por destruir a criatividade de alguns alunos que muitas vezes apresentam respostas, muito criativas, com o intuito de resolver problemas e não apenas com a intenção de fazer um exercício. O importante é que o professor tenha consciência da possibilidade de que seus próprios desejos, ou seja, suas formas de resolver e pensar sobre uma tarefa, não passam pela cabeça dos alunos. Em outras palavras, os professores têm seus objetivos em suas aulas, mas precisam ter em mente que suas aulas devem ser marcadas por negociação e diálogo, de modo que situações, como a citada acima, não ponham tudo a perder.

Ainda sobre o caso citado acima, poderia existir uma outra interpretação possível para a atitude da professora. É possível que o aluno fosse daqueles que fazem piadas a qualquer oportunidade e, frente a isso, a professora sentiu a necessidade de manter o controle. Mesmo assim, esta ponderação não muda o fato de a resposta ter sido criativa e coerente com a pergunta feita.

Este tipo de atitude por parte de alguns professores é uma das razões pelas quais alguns alunos se tornam meros reprodutores de regras, pois começam a acreditar na existência de respostas certas, prontas e escritas em algum lugar ou na cabeça do professor. Para termos uma idéia de como isso acontece basta pensarmos no fato de existirem alunos com a crença de que copiar as repostas do final dos livros didáticos é uma boa maneira de aprender, ou pelo menos deixar o professor feliz.

É importante lembrar que professores que reagem e falam como os citados acima não são os únicos. Sabemos que existem várias possibilidades de ação, comportamentos, pensamentos e diálogos para nós, professores, em sala de aula. Ainda existem aqueles que pensam em planejar suas aulas com base em dificuldades próprias, esquecendo que o público, ou seja, os alunos é que são os verdadeiros alvos. Sendo assim, começamos a pensar sobre o que acontece durante a formação dos futuros professores na graduação, especificamente na licenciatura em matemática.

Durante minha graduação na Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro tive contato, nas disciplinas de “Matemática para o Ensino Médio”; “Didática da Matemática” e “Prática de ensino para Matemática”, com várias abordagens e técnicas de ensino, como jogos, materiais concretos, livros paradidáticos, etc. Além disso, na disciplina de evolução da matemática pude perceber, e compreender, muitos dos motivos pelos quais a matemática se constituiu como é hoje. Isto é, pude ver em que contextos históricos algumas das fórmulas ou técnicas que estudei na educação básica foram desenvolvidas. Esses novos horizontes fizeram com que meu olhar sobre matemática e sobre o ensino de matemática ganhasse outras imagens. Estes novos horizontes são completamente diferentes daqueles que eram fruto das experiências que tive enquanto aluno do ensino fundamental e ensino médio e das observações que fiz de meus professores desta fase da educação básica.

A partir destas idéias e juntamente com as discussões realizadas na disciplina de tendências em educação matemática no Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, comecei a perceber alguns fatos interessantes tais como: a importância de uma reflexão sobre o ensino nos cursos de formação de professores, uso da história da matemática no ensino de matemática, novas tecnologias de ensino e etc. Mesmo assim, notei que essas discussões eram sempre norteadas pelas crenças e/ou concepções que as pessoas tinham sobre o assunto.

Portanto, compreender melhor como as crenças e as concepções das pessoas influenciam na aprendizagem de matemática me pareceu ser um caminho que pode trazer contribuição para melhorar o ensino da mesma. Acreditamos que possivelmente os professores também planejariam suas aulas de acordo com suas crenças e concepções sobre matemática e o ensino da mesma.

Além disso, estamos de acordo com Thompson (1984/1997)[1], quando afirma que precisamos investigar o modo como os professores de matemática constroem seu conhecimento sobre a disciplina e que papel suas concepções podem ter no ensino. Estas questões precisam ser tão investigadas quanto questões sobre o conhecimento e desempenho dos professores. Sendo assim, uma das idéias que mais me instigaram, e que gostaria de investigar um pouco, nos últimos tempos é: O que as pessoas pensam sobre a matemática e sobre seu ensino, mais especificamente, o que pensam sobre a álgebra e seu ensino.

Pensando nisso, e conversando sobre o currículo da matemática escolar, foi possível perceber que algumas noções parecem tão bem estabelecidas que são tomadas como ponto de partida. Um bom exemplo deste fato é a noção, fortemente enraizada nos professores que conheço, de que álgebra é um requisito básico para o desenvolvimento dos alunos em matemática[2]. Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais [PCN] (BRASIL, 1998) apresentam esta noção nos objetivos de ensino apresentados para a educação dos 3º e 4º ciclos do ensino fundamental. É possível notar esta preocupação dos PCN no seguinte trecho dos objetivos para pensamento algébrico com relação ao 4º ciclo do ensino fundamental.

> - Produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades – identificando as equações, inequações e sistemas;
> - Resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos;
> - Observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis (p. 81).

[1] A referida obra foi publicada originalmente em 1984 , com o título The relationship of teachers` conceptions of mathematics and mathematics teaching of instructional practice na revista Educational Studies in Mathematics 15, 1984, p. 105-127.

[2] O que entendemos por desenvolvimento dos alunos em matemática está diretamente ligado a tomadas de decisão autônomas. Ou seja, acreditamos que os alunos precisam ter noção de que eles mesmos constroem sua matemática e as decisões relativas a um determinado problema são, todas elas, livres desde que estejam dentro da lógica da disciplina.

Notamos também que a maior parte dos professores tenta seguir estas orientações e eles se vêem quase que obrigados a desenvolver as características apresentadas na citação acima em seus alunos. Mas, apesar da maior ênfase dada pela maioria dos professores, e por certos livros didáticos, aos conteúdos algébricos, percebe-se que esse momento de estudo da álgebra para a formação matemática continua sendo um dos mais difíceis para os alunos. Isso acontece pelo fato de os alunos, a parte de um determinado momento, terem contato com novos problemas e objetos matemáticos que são completamente novos para eles.

Segundo Booth (1988/1995)[3] os alunos costumam apresentar dificuldades com relação ao foco da atividade algébrica. De acordo com este autor, busca-se estabelecer relações para expressar respostas de forma geral. Respostas estas, que antes eram únicas. Em outras palavras, o foco da atividade algébrica é buscar uma generalização das respostas para os problemas que satisfazem um mesmo contexto. Outra dificuldade dos alunos descrita por alguns autores como Booth (1988/1995), Gil e Portanova (2007), é o fato de muitos alunos não lidarem bem com a linguagem formal da álgebra que, em alguns momentos, leva a uma confusão sobre o que deve ser feito com determinados símbolos matemáticos.

> Em aritmética, símbolos como + e = são interpretados geralmente em termos de ações a serem efetuadas, de maneira que + significa efetivamente realizar a operação e = significa escrever a resposta (BEHR, ERLWANGER; NICHOLS, 1980[4]; GINSBURG[5], 1977 apud BOOTH, 1988/1995, p. 27).

[3] A referida obra foi publicada originalmente em 1988 , com o título Children's difficulties in beginning algebra no livro The ideas of algebra. Esta obra foi publicada pelo National Council of Mathematics Teachers. A sua tradução no Brasil foi publicada em 1995.
[4] BEHR, M.; ERLWANGER, S.; NICHOLS, E. How children view the equals sign. Mathematics Teaching 92 (1980): 13-15.
[5] GINSBURG, H. Children's arithmetic: the learning process. Nova Iorque: Van Nostrand, 1977.

> A idéia de que o símbolo de adição possa indicar tanto o resultado de uma adição como a ação, ou de que o sinal de igualdade possa ser visto como indicador de uma relação de equivalência em vez de um símbolo para "escreva a resposta", pode não ser percebida de imediato pelo aluno, embora essas duas noções sejam necessárias para a compreensão algébrica (BOOTH, 1988/1995, p. 27).

As citações acima nos mostram algumas dificuldades que os alunos enfrentam durante o convívio com os símbolos matemáticos na atividade algébrica, que traz novas funções para os mesmos. Além disso, existem as dificuldades com relação aos significados das letras e variáveis, momento em que os alunos passam a lidar com letras que representam números o que é bem diferente das letras que antes representavam unidades, por exemplo.

Desta forma, podemos ter uma idéia de como é difícil para os alunos compreenderem a atividade algébrica mesmo com o grande esforço por parte dos professores. Acreditamos que esta dificuldade não seja exclusiva dos alunos, mas também de alguns professores. Pois com minha experiência enquanto professor, durante seis anos, conversando com alguns colegas de trabalho, foi possível perceber que a álgebra não é um campo tão claro como deveria ser na cabeça daqueles que são julgados por muitos, como especialistas no assunto. Na verdade, a sensação que tenho é que existem muitos professores mais preocupados com os currículos escolares e com o que está nos livros do que com o aprendizado dos alunos.

É fato que as dificuldades podem até não ser as mesmas com relação a professores e alunos, mas estamos convencidos de que os problemas docentes se refletem nos alunos. Acreditamos que os problemas de aprendizagem muitas vezes são resultado de uma visão limitada da álgebra. Por exemplo: eu já tive alunos que ao se depararem com algumas operações com incógnitas, apresentam relações como a operação x + y = 2xy, pois generalizavam o fato de operações como x + x, ter resultado 2x e assim x + y deveria seguir o mesmo raciocínio. Outros consideravam a = 1, porque a é a primeira letra do alfabeto, mostrando que falta um melhor entendimento sobre os significados de álgebra que vão sendo apresentados, construídos e compreendidos pelos alunos na escola. Além disso, é importante destacar que a forma como os alunos fazem a transição da linguagem corrente para a linguagem algébrica é fator determinante na construção das idéias referentes à álgebra desses alunos.

Com a oportunidade, durante o estudo exploratório em 2008, de realização de entrevistas com alguns professores do ensino fundamental e médio, pude perceber que eles mesmos não conseguiam definir, de forma clara, o que é álgebra ou mesmo o ensino da álgebra. Isso é preocupante pelo fato de uma aula ser dinâmica, no sentido de que várias situações ocorrem de forma diferente em todas as aulas e, por isso surpreendente, ou seja, se um professor não tiver conhecimento geral sobre o que está falando em suas aulas, existe a possibilidade de o mesmo ter um conhecimento limitado sobre aquilo que aprendeu na época em que foi aluno. É preciso que os responsáveis pela educação algébrica tenham uma visão mais ampla e geral de seu objeto de estudo para que possam desenvolver suas aulas de uma forma coerente e que possibilite comunicar as idéias de modo claro e objetivo aos alunos.

Quando pensamos nesta visão geral sobre álgebra, na verdade estamos falando de termos consciência daquilo que nós, educadores, estamos ensinando.

Em outras palavras, nos parece extremamente necessário que o professor seja capaz de caracterizar a álgebra ou a atividade algébrica para que ele mesmo possa ter noção dos possíveis caminhos a seguir.

Ter compreensão das possíveis definições de álgebra pode não ser uma tarefa simples. Segundo Lins e Gimenez (1997) parte do trabalho de caracterizar a atividade algébrica envolve oferecer (ou envolve apresentar) uma descrição com a qual seja possível ao aluno identificar quando a mesma ocorre ou acontece. Outra parte deste trabalho de caracterização é tentar saber se existem processos cognitivos exclusivos desta atividade algébrica. Ainda, segundo os mesmos autores, várias tentativas de descrever a atividade algébrica param na primeira parte, ou seja, a definem listando seus componentes. Essa idéia nos mostra a complexidade de uma definição do que é álgebra.

Usiskin (1988/1995)[6] define quatro concepções diferentes sobre a álgebra: 1) A álgebra como aritmética generalizada: onde as variáveis representam generalizações das regras da aritmética como, por exemplo: regra de sinais, ou representação de um número par como 2k e impar como 2k+1; 2) A álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas: conversões de situações em língua corrente para a linguagem algébrica e estudo das técnicas de resolução. Ex: resolução de uma equação do 2º grau por soma e produto; 3) A álgebra como estudo das relações entre quantidades: também se trata de uma generalização, mas ao invés de relações aritméticas buscamos generalizações da forma como certas grandezas, como comprimentos e velocidades se relacionam. Ex:

[6] O referido texto foi publicado originalmente em 1988 com o título Conceptions of school algebra and uses of variables no livro The ideas of algebra. Esta obra foi publicada pelo National Council of Mathematics Teachers. A sua tradução no Brasil foi publicada em 1995.

fórmula para área de figuras planas, as equações de movimento da física; 4) A álgebra como estudo de estruturas: Compreensão das estruturas dos entes algébricos. Ex: Fatoração, produtos notáveis.

Nessa mesma linha de pensamento, Lins e Gimenez (1997) também apresentam formas diferentes de descrever as atividades algébricas, baseando estas descrições em quatro caracterizações: 1) caracterização da álgebra pela evolução histórica de algumas notações, 2) caracterização da álgebra pela presença de certos conteúdos, 3) caracterização da álgebra como resultado da ação do pensamento formal e 4) caracterização da álgebra através de campos conceituais.

Sendo assim, podemos concluir que a álgebra se apresenta de várias formas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem de matemática. Acreditamos que o ideal seria que todos os professores responsáveis pela educação algébrica tivessem plena consciência da existência destas facetas. Ou seja, o professor precisa e deve saber lidar com cada uma dessas facetas da álgebra apresentando a mesma segurança.

É importante ficar claro que o fato de estarmos dizendo que existem várias concepções e caracterizações diferentes para a álgebra não implica, tanto direta como indiretamente, na existência de várias formas diferentes de ensinar álgebra para os alunos. É necessário que se perceba que todas essas manifestações de álgebra precisam ser de fato abordadas no ensino fundamental e médio (seja simultaneamente ou seqüencialmente). Os alunos precisam ter contato com todas as diferentes manifestações de álgebra para que possam ter uma noção mais abrangente do assunto e não se tornem estudantes com uma visão limitada das possibilidades de representação e informação que este campo da matemática tem.

Mas, como mostra Keppke (2007) não é isso que acontece. Alguns dos professores entrevistados por este autor apresentaram uma provável tendência a certas concepções apresentadas anteriormente e uma provável aversão a outras concepções. Por exemplo, quando perguntados sobre quais tópicos eles achavam melhor excluir do seu planejamento, alguns professores deram as seguintes respostas:

> - Divisão de polinômios, pois não acho que este tópico tenha relevância para o aprendizado (KEPPKE, 2007, p. 81).
> - Não digo excluído, mas não é tão necessário, por exemplo, inequação, onde o aluno a usará na vida cotidiana? (KEPPKE, 2007, p. 82).

O primeiro exemplo mostra que o professor provavelmente não percebe a álgebra como o estudo de estruturas, já que divisão de polinômios se revela de grande utilidade para, por exemplo, resolução de certos tipos de equações. No segundo provavelmente o professor não percebe a concepção de álgebra como relação entre grandezas, já que entender quando determinados entes matemáticos podem ou não ser maiores ou menores que outros é de grande importância para o aprendizado em matemática.

Sendo assim, se levarmos em conta os exemplos acima, é possível constatar que alguns dos professores responsáveis pela educação algébrica, tanto não têm consciência quanto não percebem a utilidade das diferentes manifestações apresentadas neste campo do ensino de matemática. Isso acontece mesmo com o fato de o ensino de álgebra ter sido fortemente investigado nos últimos anos.

Com essas idéias já comentadas em mente, das várias manifestações possíveis de álgebra, e pelo fato de que alguns professores, que conheço, não terem consciência sobre quais caminhos estão seguindo e pela possível não contemplação das várias manifestações de álgebra durante o processo de ensino-aprendizagem de matemática nos levam aos seguintes questionamentos:

1) O que os professores pensam sobre álgebra, ou seja, quais as crenças e concepções dos professores sobre álgebra?

2) Qual a ressonância que essas crenças podem ter sobre o aprendizado dos alunos?

3) O que os professores percebem, ou não, de suas próprias crenças sobre álgebra e de como elas influenciam suas aulas? Como a pesquisa de campo pode contribuir para esta tomada de consciência sobre o assunto?

No desenrolar da pesquisa, quando procuramos responder estes questionamentos buscamos alcançar os seguintes objetivos:

a) Descobrir como os professores percebem a álgebra e o ensino da álgebra.

b) Compreender como a aprendizagem dos alunos pode ser influenciada pelas crenças dos professores.

c) Alertar, caso necessário, os professores para a necessidade de uma reflexão e tomada de consciência sobre as próprias crenças sobre álgebra e o ensino de álgebra.

Para responder a esses questionamentos e atingir seus referentes objetivos realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa. Este estudo desenvolveu-se em dois momentos. Inicialmente implementamos uma fase exploratória no fim de 2008 e inicio de 2009, que contou com a participação de cinco professores da rede pública estadual. Outra fase definitiva em 2009, momento no qual o número de participantes se reduziu a dois por motivos de tempo e para poder organizar e trabalhar melhor com os dados coletados durante a pesquisa. Na pesquisa de campo definitiva realizamos várias atividades bem como entrevistas com os professores e com os alunos destes professores. A análise dos dados foi realizada com base nos textos de Usiskin (1988/1995), Ernest (1989) e outros autores que apresentamos no próximo capítulo.

Este trabalho está organizado em seis capítulos. Este primeiro capítulo aborda nossas motivações para a realização desta pesquisa, bem como alguns autores que já ajudam a contextualizar o referido estudo. No segundo capítulo apresentamos uma revisão de bibliografia com trabalhos recentes a respeito do tema da pesquisa, definições e teorias que nos permitiram realizar a análise dos dados coletados ao longo da pesquisa de campo. O capítulo três traz a descrição de nossos procedimentos metodológicos juntamente com uma breve descrição sobre a formação profissional dos cinco professores que nos ajudaram na investigação. Além disso, o terceiro capítulo se destina a mostrar algumas das dificuldades e soluções que vivenciamos durante o trabalho de campo. O quarto capítulo se reserva a uma descrição cuidadosa das atividades que realizamos com os professores de Janeiro até Junho de 2009. Também mostramos, no capítulo quatro, os motivos e as pretensões que tínhamos com estas atividades. O capítulo cinco é destinado para a análise dos dados coletados na pesquisa de campo. Neste capítulo apresentamos também nossa impressão sobre os participantes. É importante lembrar que estas análises serão feitas à luz das teorias apresentadas no próximo capítulo. O sexto capítulo tem como objetivos responder aos questionamentos da pesquisa, explicitar nosso próprio aprendizado com a mesma e relatar as possíveis continuidades para este trabalho, bem como relatar as dificuldades e limitações que enfrentamos ao longo de todo o período, no qual participamos desse programa de mestrado. As entrevistas e atividades realizadas estão, de forma integral, nos anexos deste trabalho.

2. Referencial Teórico

Neste capítulo o objetivo é proporcionar ao leitor uma visão mais aprofundada dos conceitos e teorias que norteiam este trabalho. Para isso, apresentamos quatro seções nas quais são desenvolvidas as idéias e teorias que nos ajudaram nas análises dos dados da pesquisa de campo. Na primeira seção trazemos algumas idéias sobre o sentido de crenças e concepções em Educação Matemática, além de uma discussão sobre as particularidades das diferentes descrições. A segunda seção é reservada a uma reflexão sobre o sentido do que vem a ser álgebra, bem como o seu ensino. Colocamos uma breve descrição da evolução histórica da álgebra na tentativa de explicar a formação de algumas tendências que caracterizam a atividade algébrica. A terceira seção se dedica à discussão das formas como a álgebra se mostra ao longo da vida acadêmica e as idéias de alguns autores sobre estas manifestações. A quarta e última seção deste capítulo aborda as diferentes visões de matemática descritas por Ernest (1989). Acreditamos que estes quatro momentos são capazes de contextualizar nossa pesquisa e apresentar as obras que nos servem de base para a realização das análises da pesquisa de campo, que serão apresentadas mais à frente no texto.

2.1 Crenças e Concepções

Para uma melhor compreensão sobre como as crenças e concepções de uma pessoa se organizam, é muito importante que se tenha uma noção clara do que estas duas palavras significam e quais sentidos elas podem representar. Com isso em mente, buscamos na literatura o que alguns autores falam sobre o tema. Primeiramente buscamos a descrição precisa no dicionário:

> Crença: **1.** Ato ou efeito de crer, **2.** Fé religiosa, **3.** Aquilo que se crê, que é objeto de crença, **4.** Convicção íntima, **5.** Opinião adotada com fé e convicção, **6.** Forma de assentimento que é objetivamente insuficiente, embora subjetivamente se impões com grande evidência (FERREIRA, 1986, p. 496).
>
> Concepção: **1.** O ato de conceber ou criar mentalmente, de formar idéias. **2.** Noção, idéia, conceito, compreensão. Ex: Sua concepção de autoridade está baseada nos moldes tradicionais. **3.** Modo de ver, ponto de vista, opinião, conceito. Ex: Na minha concepção vocês agiram de maneira impensada (FERREIRA, 1986, p. 445).

A descrição do dicionário nos mostra como ambos os termos têm sentidos diferenciados em várias situações, embora essencialmente as citações acima denotem a idéia de crenças como uma opinião oriunda basicamente de um sentimento e concepções como uma opinião que se cria através de outras informações a respeito de um determinado assunto. Ainda assim, para que fosse possível compreender os termos dentro do contexto da matemática buscamos outros autores no campo da Educação Matemática.

Em nossa pesquisa bibliográfica encontramos a seguinte descrição: “crenças são julgamentos que indicam a probabilidade subjetiva de uma pessoa ou objeto ter uma característica em particular” (CARVALHO; NEVES, 2006, p 202). Essa definição nos leva a conclusão de que as crenças são, de forma semelhante às concepções, resultado de uma combinação de informações recebidas sobre um determinado assunto. Desta forma, pode-se perceber o quanto estes termos se confundem quando pensamos no sentido psicológico das crenças e comparamos com a definição da palavra concepção.

Ainda é possível pensar, de maneira mais específica, nas crenças relacionadas diretamente com a matemática. Nesse caso, a crença constitui o ponto de vista matemático sobre si mesmo, sobre o contexto, sobre o tema e sobre a matemática que determina a conduta de um indivíduo (GAROFALO; LESTER, 1985[7] apud GÓMEZ CHACÓN, 2003). Acreditamos que estas idéias estão de acordo com a definição mais geral apresentada, anteriormente, por Carvalho e Neves (2006).

Na busca por um melhor esclarecimento sobre o significado do termo concepção, encontramos a seguinte definição: o termo concepção representa algo amplo, que abrange conceitos, proposições, regras, significados, imagens mentais, preferências, semelhanças e inclusive as próprias crenças (PONTE, 1992). Esta idéia nos permite compreender as crenças como um dos agentes que influenciam na constituição das concepções. Com isso, podemos a partir de agora nos preocupar com as crenças, porque desta forma estaremos nos preocupando indiretamente com as concepções, pois acreditamos que ambos os termos não sejam exatamente diferentes, mas um complementa o outro. Sendo assim, apresentaremos algumas discussões importantes sobre o assunto. De acordo com Callejo e Vila (2006), as crenças podem ser compreendidas de três formas diferentes, de acordo com sua origem.

A primeira forma é o que podemos chamar de descritiva. Estas são crenças que provém de observações diretas e sobre tudo das experiências, contato com pessoas e objetos. Uma característica interessante deste tipo de crença é o fato de manterem um alto grau de certeza ao serem validadas continuamente pela

[7] GAROFALO, J.; LESTER, F. Metacognition: cognitive monitoring, and mathematical performance. Journal for Research in Mathematics Education, 16, 1985, p. 163-176.

experiência e costumarem ter um peso quase que decisivo nas atitudes das pessoas. Outro tipo de crenças são as que Callejo e Vila (2006) chamam de inferências. A origem destas crenças está nas relações previamente aprendidas ou no uso de sistemas formais de codificação. É importante que se perceba que a base deste tipo de crenças é sempre algum tipo de crença descritiva. Por fim, ainda pode-se destacar as crenças informativas que, como o próprio nome diz, provém de uma informação exterior, como outras pessoas, meios de comunicação e, entre outras coisas, da escola.

Também achamos que é interessante compreender como as crenças se constituem dentro do contexto da Educação Matemática. Nesta linha, podemos encontrar em Gómez Chacón (2003) a descrição de quatro eixos distintos: Crenças sobre matemática, sobre si mesmo, sobre a aprendizagem de matemática e sobre o contexto social ao qual pertencem os alunos. A seguir apresentamos uma breve discussão sobre estes eixos.

Crenças sobre matemática – Este é um ponto importante e pode ser mais um motivo para a existência de alunos tão diferentes como os descritos na introdução deste trabalho. Segundo Gómez Chacón (2003) as próprias certezas que uma pessoa tem sobre matemática afetam a maneira como ela acredita que a disciplina deve ser apresentada. Em outras palavras, mais do que pensar em "como ensinar", um professor pensa em "o que ensinar".

Crenças sobre a aprendizagem de matemática – É importante ter em mente que os alunos têm várias expectativas sobre como a matemática deveria ser ensinada e conseqüentemente o que deveria ser ensinado. Para Gómez Chacón

(2003) é importante que os professores consigam deixar claro para os alunos duas coisas: o que significa aprender matemática e o que significa saber matemática. Por exemplo, entender o que é raiz de uma equação é diferente de apenas "encontrar o valor de x".

Crenças sobre si mesmo como aprendiz de matemática – Destacam-se neste eixo as diferenças entre as crenças dos alunos que pensam ser bons em matemática e aqueles que pensam que não servem para a matemática. A visão de matemática que um indivíduo tem é de grande influência para este eixo.

Crenças sobre o contexto social ao qual os alunos pertencem – Segundo Gómez Chacón (2003) essas crenças se manifestam na tentativa de compreender o sucesso e o fracasso escolar e envolvem os valores de um grupo social, de sua dimensão afetiva e do posicionamento que eles assumem diante da matemática.

Sendo assim, acreditamos que as idéias apresentadas podem ser de grande ajuda para o entendimento sobre o papel das crenças em nosso trabalho. Entendemos as mesmas como parte constituinte do termo concepção e por isso acreditamos que os dois termos se confundem. Além disso, o termo em inglês belief apresenta os dois sentidos, tanto de crença como concepção. Uma parte importante desta pesquisa é se aproximar o máximo possível da compreensão do modo como os professores de matemática pensam sobre álgebra e o ensino de álgebra. Sendo assim, parte de nossas análises será baseada na idéia das crenças sobre o papel dos professores na aprendizagem de matemática. De acordo com Gómez Chacón (2003), as crenças mais destacadas são sobre o professor ser um mero transmissor de conhecimento, ou seja, o professor apenas informa verdades prontas e acabadas. Além dessas, também se pode destacar as crenças sobre o professor ser uma fonte de respostas. Acreditamos que enxergar o professor como uma fonte de respostas seja um pouco melhor do que encará-lo como um mero transmissor de conhecimento, pois existe a possibilidade de o aluno pensar no professor como uma ponte para responder suas dúvidas e não apenas como um "catálogo". Ainda é importante lembrar que, como já foi mencionado antes, planejar uma aula de matemática consiste muito mais em entender o que nós mesmos pensamos sobre o que é matemática, e conseqüentemente em qual matemática se quer ensinar. Do mesmo modo, para que possamos ter um ensino cada vez mais completo de álgebra, precisamos ter claro para nós: o que é álgebra?

2.2 O que é álgebra?

Certamente não é viável responder esta pergunta de maneira imediata. São necessários conhecimentos bem vastos do modo como as coisas foram se desenvolvendo ao longo da história. Além disso, a álgebra se caracteriza por se manifestar de muitas formas diferentes durante essa mesma história. Esta seção busca caracterizar a álgebra ou a atividade algébrica de modo que possamos ter uma idéia ampla sobre este campo da matemática.

Não estamos interessados em apresentar uma conceituação definitiva e encerrada sobre o que é álgebra. Na verdade, pretendemos apresentar algumas maneiras de enxergar o assunto. Juntamente com isso, pretendemos fazer uma discussão sobre o que tem sido estudado no mundo acadêmico com relação ao tema, pois esperamos proporcionar ao leitor uma boa posição sobre o assunto um tema que foi abordado nesta pesquisa. Com essas intenções, iniciamos essa exposição de idéias a partir de uma breve descrição histórica do desenvolvimento da álgebra.

2.2.1 Desenvolvimento histórico da álgebra

Para autores como Boyer (1996) e Garbi (2007) as primeiras manifestações do que podemos, hoje, chamar de álgebra datam de aproximadamente 1650 a.C. num dos documentos matemáticos mais famosos da história, o Papiro de Ahmes (ou Rhind). Segundo Garbi (2007), este documento foi encontrado no final do século 19 pelo egiptólogo inglês Rhind, apresenta uma lista com as soluções de 85 problemas de matemática, dentre os quais encontra-se o seguinte: "Uma quantidade somada a seus 2/3, mais sua metade e mais sua sétima parte perfaz 33. Qual é essa quantidade?" (GARBI, 2007, p. 12).

O problema citado acima pode ser traduzido para a linguagem atual na seguinte forma: $X + 2X/3 + X/2 + X/7 = 33$ que representa uma equação do primeiro grau. Logicamente a simbologia que usamos hoje é bem diferente da usada no Papiro de Ahmes que apresenta o que podemos chamar de linguagem retórica. Mais à frente, será esclarecido o significado do termo linguagem retórica.

Após essa parte inicial do desenvolvimento da álgebra, ou pelo menos de suas primeiras manifestações, podemos entender que outra evidência só vai ocorrer 2 mil anos mais tarde com Diofanto. Uma das maiores contribuições de Diofanto para o desenvolvimento da álgebra foi a criação de um sinal especial para a incógnita, ou variável, de uma equação. Diofanto também criou um símbolo especial para a igualdade e, entre outras coisas, podemos dizer que sua escrita das equações pode ser interpretada como muito parecida com a nossa (LINS; GIMENEZ, 1997).

Apesar desses desenvolvimentos prévios, o nome álgebra só foi surgir de maneira mais próxima do que é usado hoje em dia por cerca dos anos 700 d.C com os árabes. De acordo com autores como Boyer (1996), Guedj (1999) e Dewdney (2000) o nome álgebra é derivado do nome Al-Jabr, palavra que na época era usada com sentido de restauração, equilíbrio ou endireitar. O termo Al-Jabr foi encontrado pela primeira vez na obra de Al-Djafar Mohamed ibn Mussa al-Khowarizmi, um dos primeiros matemáticos árabes, que pode ser considerado como o pai da álgebra (BOYER, 1996). Um fato importante na obra de Al-Khowarizmi é que ele não representava uma incógnita usando uma letra, como por exemplo X, nos problemas em seu livro. Na verdade, ele também fazia uso de uma linguagem pouco simbólica, assim como fez Ahmes nos problemas que aparecem no Papiro de Ahmes. Uma das grandes contribuições de Al-Khowarizmi se faz presente no livro "Ilm al-jabr Wa al Muqabalah", que pode ser entendido como: restauração por transposição de termos de um lado da equação para outro (RIBEIRO, 2007), o que nos mostra as idéias que seguimos quando resolvemos equações de um modo geral.

Após este momento histórico da álgebra, é possível avançar até a época do Renascimento no século XV. Nesta fase ocorreram, por exemplo, as disputas pelo método de resolução das equações do terceiro grau entre Tartaglia (1499-1557) e Cardano (1501-1576), e a descoberta do método para resolver equações do quarto grau de Ferrari (1522-1560). Todos estes nomes contribuíram significativamente para o desenvolvimento da álgebra ao longo da história, mas um passo evolutivo importante para a constituição da álgebra que conhecemos hoje se deve a François Viète (1540-1603).

> Sem dúvida foi à álgebra que Viète deu suas maiores contribuições, pois foi aqui que chegou mais perto das idéias modernas. (...) Não poderia haver grande progresso na teoria da álgebra enquanto a preocupação principal fosse encontrar a "coisa" numa equação com coeficientes específicos (BOYER, 1996, p. 208).

Esta citação nos mostra que Viète realizou sua grande contribuição para a teoria da álgebra quando passou a utilizar uma notação que era capaz de representar todas as equações de uma mesma categoria ao mesmo tempo, definindo que vogais seriam usadas para representar quantidades conhecidas e consoantes (*como o X*) seriam usadas para representar as quantidades desconhecidas. Outra contribuição importante de Viète foi acenar para o que conhecemos hoje como *o teorema fundamental da álgebra.* Segundo Ponte (2006), apesar de Girard (1595-1632) ter sido o primeiro a afirmar que uma equação de grau n possui n soluções, Viète também teria feito esta afirmação em seus trabalhos. Mais tarde, este teorema viria a ser provado de forma satisfatória por Gauss (1777-1855) em 1816. De acordo com Neves (2008), é possível dizer que nesta época a álgebra poderia ser definida como a ciência das equações, pois ainda existia a idéia de que a álgebra era apenas um simbolismo da aritmética, ou seja, eram apenas representações de números e operações. Em outras palavras, a álgebra era a aritmética universal.

Segundo Ponte (2006), existem duas teorias que marcam a etapa final do desenvolvimento da teoria das equações algébricas: a prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação de grau 4 com coeficientes arbitrários e a formulação das condições necessárias e suficientes para se resolver uma equação de grau superior a 4 por métodos algébricos. Estas duas teorias foram enunciadas por dois jovens prodígios, os matemáticos Abel (1802-1829) e Galois (1811-1832) respectivamente. Galois foi ainda o precursor do último grande avanço da álgebra ao criar a teoria dos grupos.

Compreender a, ou ter uma idéia geral da, evolução histórica da álgebra é uma grande ajuda na difícil missão de conceber que tipo de álgebra nós queremos que nossos alunos aprendam. Entretanto, essa compreensão não se constitui apenas com base nos fatos históricos. É necessário um entendimento maior sobre os movimentos e tendências que formalizaram a álgebra como ela é hoje. Sendo assim, faz-se necessária uma discussão sobre o modo como as coisas evoluíram. Daremos inicio a essa discussão através do modo como a linguagem algébrica evoluiu ao longo dos tempos.

2.2.2 Estágios de evolução da linguagem algébrica

Parte do processo de compreender a evolução histórica da álgebra, passa por entender como sua linguagem se desenvolveu ao longo da história. Para Lochhead e Mestre (1988/1995)[8] a transposição da linguagem corrente para a linguagem da álgebra é um problema até entre alunos dos cursos de graduação que lidam com matemática.

Segundo Moura e Sousa (2005), compreender o lógico-histórico da linguagem algébrica significa compreender o vir-a-ser das letras, ou seja, entender que no processo de formação da linguagem simbólica, síntese da síntese, de abstrações

[8] O referido texto foi publicado originalmente em 1988 com o título From words to algebra: Mending misconceptions no livro The ideas of algebra. Esta obra foi publicada pelo National Council of Mathematics Teachers. A sua tradução no Brasil foi publicada em 1995.

diversas, existe um movimento cultural, expresso a partir da palavra e da figura que representam este movimento. É importante lembrar que estes movimentos não são lineares e podem ser divididos em três estágios de evolução: retórico, sincopado e simbólico.

Estágio retórico

Historicamente, este estágio pertence ao período que antecede Diofanto. Segundo Lins e Gimenez (1997) a principal característica da retórica é o uso exclusivo das palavras. Outros autores também apresentam esta idéia, como no trecho abaixo:

> A retórica, definida a partir de sua base comum, é discurso natural que serve para convencer. A retórica na matemática seria, simplesmente, a linguagem comum posta a serviço de convencer-nos de que alguma coisa ligada a matemática é o ponto importante (DAVIS; HERSH, 1988[9] apud MOURA; SOUSA, 2005, p. 17).

Com esta citação somos levados a pensar no fato de a álgebra não ser apenas uma coleção de códigos e fórmulas, mas sim uma forma de expressar idéias sobre um determinado fato. Lins e Gimenez (1997) apresentam um exemplo de resolução de problema com o uso da retórica:

> **Problema:** Mostre que, se você souber a soma e a diferença de dois números, é sempre possível descobrir os números. Dê sua resposta da forma mais geral possível (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 92).
>
> **Solução retórica:** Você pega a diferença e tira da soma, depois divide o resultado por dois; esse é um dos números. Para achar o outro, soma a diferença ao primeiro (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 93).

Um ponto interessante é que a maioria dos professores da atualidade, não discute ou apresenta a retórica em suas aulas. Não estamos aqui dizendo que os

[9] DAVIS, P.J.; HERSH, R.A. A matemática e a retórica. In: O sonho de Descartes. Rio de Janeiro. Livraria Francisco Alves Editora S.A., p. 61-80, 1988.

professores devem modificar suas aulas para uma abordagem retórica, mas acreditamos que é necessário falar sobre os significados e as ligações dos símbolos com as palavras na linguagem corrente (ou com as palavras na língua portuguesa ou com as palavras na língua materna).

Estágio Sincopado

Segundo Tinoco (2008), neste período, que durou do século II até cerca de 1500, as palavras foram, gradualmente substituídas por abreviações. Um dos grandes representantes desse estágio, como já acenamos anteriormente, foi Diofanto, que introduziu o estilo sincopado de escrever equações ao representar pela primeira vez uma abreviatura para a incógnita.

A diferença determinante deste estágio para a retórica está no fato de ao invés de escrever tudo, são construídas estruturas que aparecem continuamente na resolução de problemas (MOURA; SOUSA, 2005). O mesmo problema apresentado anteriormente pode gerar uma solução sincopada.

> **Problema:** Mostre que, se você souber a soma e a diferença de dois números, é sempre possível descobrir os números. Dê sua resposta da forma mais geral possível (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 92).
>
> **Solução sincopada:** Depois de escolher dois valores particulares para a soma e a diferença (por exemplo 10 para a soma e 2 para a diferença) resolve-se o sistema: $x + y = 10$; $x – y = 2$ (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 93).

Estágio simbólico

Este estágio, que abrange os séculos XVI e XVII, representa as idéias algébricas por meio de símbolos, como resultado de uma evolução gradual no aperfeiçoamento das notações. Por volta de 1500, devido ao crescimento econômico, que proporcionou várias viagens e facilitou o intercâmbio de idéias, este processo teve grande avanço (TINOCO, 2008).

O caráter demasiadamente simbólico da álgebra que ensinamos hoje é a principal característica deste estágio de desenvolvimento da álgebra. Como foi feito nos outros dois estágios, podemos destacar uma solução de natureza simbólica para o mesmo problema presente em Lins e Gimenez (1997).

> **Problema:** Mostre que, se você souber a soma e a diferença de dois números, é sempre possível descobrir os números. Dê sua resposta da forma mais geral possível (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 92).
>
> **Solução simbólica:** Montar e resolver o sistema: $x + y = a$; $x - y = b$ (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 93).

Apesar de a álgebra simbólica ser um ponto imprescindível para a compreensão de como a álgebra se desenvolveu até o que conhecemos hoje, Moura e Sousa (2005) acreditam que limitar a discussão sobre o desenvolvimento da álgebra apenas a questões de notação é o mesmo que considerar apenas o fim do processo e deixar de lado o percurso do movimento do pensar humano, que configura as diversas elaborações sobre os conceitos de número, movimento e variável.

2.2.3 Caracterizações de atividade algébrica

Como já dissemos anteriormente a álgebra se apresenta de várias formas e nossa intenção com este trabalho é apresentar o maior número possível de manifestações de álgebra para que possamos ter uma visão ampla do assunto, além de permitir com esta panorâmica realizar uma análise de dados mais cuidadosa e criteriosa. A seguir apresentamos uma exposição de quatro tendências de caracterizações de álgebra presentes no livro de Lins e Gimenez (1997).

Tendência letrista (caracterização pela evolução histórica de algumas notações) – Segundo os autores, o Brasil é um país muito influenciado por este tipo de caracterização da atividade algébrica. A idéia principal dessa tendência é descrever a álgebra através do processo histórico de desenvolvimento das notações algébricas. Os estágios de desenvolvimento da linguagem algébrica, o retórico, o sincopado e o simbólico fazem parte desta tendência. Ainda segundo Lins e Gimenez (1997), essa tendência apresenta uma falha de se limitar a discutir assuntos praticamente exclusivos do ambiente escolar. Além disso, essa caracterização não dá conta de todo o processo de desenvolvimento da álgebra.

Tendência conteudista (caracterização pela presença de certos conteúdos) – Talvez esta seja a caracterização mais simplista dentre as quatro que estamos apresentando aqui. Segundo Lins e Gimenez (1997), esta tendência se limita a descrever a álgebra a partir de uma lista de objetos matemáticos que são de alguma forma julgados como álgebra. Acreditamos que, além de simplista, esta forma de caracterizar a atividade algébrica não é precisa, pois os objetos matemáticos que seriam objetos da álgebra podem mudar de pessoa para pessoa.

Estamos de acordo com os autores quando estes dizem que as tendências apresentadas até aqui não dão conta de descrever, de forma precisa, o que viria a ser uma atividade algébrica. De fato, pensar na essência das operações aritméticas para resolver um problema pode caracterizar um pensamento algébrico.

Tendência de ação (caracterização como resultado da ação do pensamento formal) – Segundo Lins e Gimenez (1997), o pensamento formal consiste em refletir sobre as operações, ou seja, pensar nas conseqüências que estas operações podem trazer para o problema em questão. De acordo com os autores o lado mecânico da atividade algébrica não estaria sendo contemplado por essa caracterização. Isso nos mostra que esta caracterização também não contempla tudo aquilo que os autores tentam apresentar como atividade algébrica.

> Parece-nos que essa abordagem também deixa coisas demais de fora. Por exemplo, se uma criança de 10 anos resolve uma equação, mas fracassa em dar quaisquer sinais de ter atingido o estágio operatório formal piagetiano, vamos negar a esse episódio o *status* de atividade algébrica? (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 100).

De fato, acreditamos que resolver uma equação, mesmo que de forma mecânica, é um exemplo de uma atividade algébrica, embora estejamos de acordo que a álgebra seja, de certa forma, um modo de pensar. Essa caracterização se diferencia das outras duas na maneira de tratar do assunto. As tendências letrista e conteudista se caracterizam por "julgar" que objetos são álgebra. Por outro lado, a tendência de ação se caracteriza mais por "julgar" quais situações são de fato álgebra.

Tendência conceitual (caracterização através de campos conceituais) – Esta tendência faz uma caracterização através da idéia de campo conceitual, modelo criado pelo psicólogo francês G. Vergnaud que envolve por si só, conceito, notações, esquemas mentais que resolvem e dão sentido aos conceitos relacionados com estes mesmos esquemas.

> Pode-se falar de um "campo conceitual da álgebra elementar", mas, sendo uma unidade muito ampla para a investigação experimental, Vergnaud e

> seus seguidores preferem tratar, por exemplo, de um “campo conceitual das equações do 1º grau (lineares)”. Alguém trabalhando nesse ou em outros campos conceituais da álgebra estaria engajado em atividade algébrica (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 103)

Na citação acima os autores afirmam ser possível pensar em um campo conceitual da álgebra elementar. Podemos encontrar em Castro (2003) uma descrição um pouco mais precisa do campo conceitual da álgebra. Segundo a autora, o campo conceitual da álgebra apresenta algumas ferramentas representacionais, tais como: algoritmos, regras sintáticas, propriedades de operações e princípio de equivalência entre equações, além de elementos que constituem o campo como: números, medidas, incógnitas e variáveis, vários sentidos do sinal de igual, transição entre linguagens e regras para atribuir os símbolos.

2.2.4 O pensamento algébrico e alguns problemas da escola

Essas caracterizações de fato nos ajudam a perceber a complexidade do que é uma atividade algébrica. Entretanto, elas representam apenas tendências que norteiam os pensamentos sobre álgebra. Esta seção visa proporcionar ao leitor uma panorâmica de como se desenvolve o pensamento algébrico e como alguns problemas da escola têm sido abordados.

Uma das principais fontes de informação do ambiente escolar é o livro didático que, segundo Santos (2007), mantém forte influencia sobre alunos e professores. Segundo a autora, o livro didático é um recurso poderoso usado pelos agentes do processo de ensino-aprendizagem e, na maioria das vezes, determina o que será ensinado. Este fato nos preocupa a partir do momento em que observamos, durante nossa prática docente e até quando estudante, que alguns professores se tornam reféns dos livros didáticos.

Estamos de acordo com Santos (2007) quando esta afirma que a parte referente à álgebra no livro didático se torna quase que um ‘manual de faça você mesmo’, apesar das recentes melhoras nos livros didáticos de hoje em dia. Entretanto, acreditamos que essa dependência acontece por falta de uma reflexão um pouco mais detalhada sobre o que vem a ser a álgebra para este professor.

Outro problema presente no ambiente escolar é a dificuldade que alguns alunos têm para gerarem significados a respeito das coisas estudadas no campo da álgebra. Segundo Pinto e Fiorentini (1997) um dos motivos para esta dificuldade está na ação do professor, que pode não utilizar um discurso adequado ao negociar os significados de um determinado ente algébrico. Segundo os autores, é necessário que os professores pensem muito sobre quais palavras escolher antes de começar a negociar os significados. Acreditamos que esta transição da linguagem corrente para a linguagem algébrica, com símbolos ou não, é um dos principais problemas no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Nesta linha de produção de significados, podemos destacar o trabalho de Celeste (2008), que investigou como os alunos lidam com situações não rotineiras para construir soluções. Neste trabalho, a autora sugere que se aproveite mais a produção escrita dos alunos, ou seja, é interessante tentar avaliar os processos reflexivos dos estudantes ao resolver problemas. Para isso, a autora desenvolveu várias atividades investigativas, com a intenção de colocar os alunos frente a situações em que eles mesmos deveriam construir seus significados. Esta seria uma boa maneira de tentarmos compreender quais significados são produzidos pelos próprios estudantes.

> O uso precoce e exclusivo do formalismo tem vinculado uma matemática destituída de significado, de tal forma que queima as etapas necessárias à estruturação do pensamento do mesmo. O recurso quase exclusivo do simbolismo faz com que os alunos aprendam, em geral, apenas representações de idéias, tornando-se manipuladores de símbolos em situações padronizadas (OLIVEIRA, 2001, p. 18).

Esta citação, apesar de discordarmos do termo precoce, representa bem um dos motivos para a ingênua frase: “matemática é para quem tem boa memória”. Esta frase é muito usada justamente pelo fato de que, em algum momento, os professores, ou pelo menos boa parte deles, perderam o foco do que estavam ensinando e passaram apenas a reproduzir situações padronizadas, ou seja, situações rotineiras e apenas reprodutivas.

Como se pode perceber, existem vários problemas que afligem a educação algébrica. Acreditamos que esses problemas, principalmente os de significação, têm parte das suas origens no fato de alguns professores de matemática não terem consciência sobre que álgebra se quer ensinar, ou seja, falta uma reflexão sobre o que está sendo ensinado.

2.3 As “multi-manifestações” da álgebra

Como vimos na seção anterior, existem várias formas de se caracterizar a atividade e a educação algébrica. Essas caracterizações são tentativas de descrever quais são as propriedades que fazem com que um determinado objeto matemático seja ou não um objeto algébrico. Esse fato, já pode gerar divergências gravíssimas entre os alunos, caso o professor não esteja consciente das possibilidades.

Segundo Kieran (1988/1995)[10], é possível identificar dois grupos distintos de aprendizes de álgebra, se pensarmos nos métodos de resolução de uma equação. Segundo a autora, os alunos apresentam, basicamente, dois tipos de comportamentos. Um com foco na ordem direta das operações presentes na equação, caracterizada pela resolução por tentativa e erro. Outro com foco na ordem inversa das operações presentes na equação, caracterizada pela resolução com transposição de termos para o outro membro.

Divergências como essas, podem representar dificuldades no ensino e na aprendizagem de álgebra. Outro problema está nas muitas formas como este campo da matemática se configura nas diversas situações que alunos e professores vivenciam durante o processo educativo. É necessário que nós, professores, tenhamos consciência destas manifestações, ou formas de ver, da álgebra.

Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o ensino de álgebra vem sofrendo forte influência de três concepções sobre a educação algébrica. O autor as chama de "lingüístico-pragmática", "fundamentalista-estrutural" e fundamentalista-analógica". Estas concepções, as quais comentaremos a seguir, nos mostram tendências históricas de como enxergar a álgebra.

Concepção lingüístico-pragmática – Foi predominante do século XIX até a primeira metade XX. Esta concepção tem como característica uma abordagem mais instrumental da álgebra. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), o objetivo da educação algébrica nesta época era o domínio, mesmo que de forma

[10] O referido texto foi publicado originalmente em 1988 com o título Two different approaches among algebra learners no livro The ideas of algebra. Esta obra foi publicada pelo National Council of Mathematics Teachers. A sua tradução no Brasil foi publicada em 1995.

mecânica, das técnicas necessárias para as transformações algébricas. Isso era feito através de exercícios que visavam o treinamento do manejo preciso das expressões algébricas.

Concepção fundamentalista-estrutural – Predominante nas décadas de 1970 e 1980. Esta concepção tem como característica, como o nome já diz, uma abordagem mais estrutural da álgebra. Segundo Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) o objetivo nesta época era fornecer fundamentos lógicos para toda a matemática. Sendo assim, os alunos precisavam ser capazes não apenas de resolver problemas ou de reproduzir exercícios, mas também precisavam compreender as propriedades estruturais dos procedimentos que usavam em cada passagem das transformações algébricas.

Concepção fundamentalista–analógica – Esta é a concepção predominante dos dias de hoje. Sua principal característica é a busca por um meio termo entre as concepções: "*lingüístico-pragmática*" e "*fundamentalista-estrutural*". Faz isso através da tentativa de resgatar o valor instrumental da álgebra e da preservação do estudo das propriedades estruturais. Surgem aqui, uns números maiores de exercícios que aplicam a álgebra à realidade, ou a uma simulação do real como, por exemplo, abordar equações com se fosse uma balança, pensando no equilíbrio (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTÓVÃO, 2005).

Podemos dizer que as concepções apresentadas acima seguem uma tendência letrista de caracterização da atividade algébrica, no sentido do que descrevem Lins e Gimenez (1997), pois apresentam uma preocupação com as notações algébricas, o que de acordo com os próprios autores reflete uma visão um tanto simplista deste campo da matemática. Ainda nesta linha, podemos pensar na álgebra segundo a interpretação de seus símbolos.

Segundo Cury, Lannes, Brolezzi e Vianna (2002), é possível identificar duas correntes de interpretação dos símbolos algébricos. A corrente lingüístico-estilística: álgebra como uma linguagem específica e artificialmente criada para expressar procedimentos de resolução. E a corrente lingüístico-sintático-semântica: álgebra como uma linguagem específica e concisa, mas cujo poder instrumental não reside propriamente no domínio estilístico, mas sim numa dimensão sintática. Em outras palavras, podemos olhar para esta concepção sobre dois pontos de vista. Um que se preocupa com o significado dos símbolos algébricos de forma isolada. Outro que se preocupa com o significado das expressões como um todo.

Além disso, pode-se conceber a álgebra como um conjunto de técnicas, artifícios, processos e métodos para resolver certos tipos de problemas. Ou seja, a solução de um problema ou exercício de álgebra seria baseada em uma seqüência padronizada de passos (CURY et al., 2002). De acordo com estes mesmo autores, a álgebra ainda pode ser entendida como um tipo de linguagem que gera abstração aos símbolos lingüísticos.

Existem algumas características nas idéias de Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) e Cury et al. (2002) que merecem destaque. Apesar da mesma tendência letrista de ambas as descrições de educação algébrica e álgebra, respectivamente, nos parece que a diferença essencial nos dois artigos está na abordagem do assunto. Por um lado, Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005) descrevem as concepções presentes no texto de forma mais pratica, ou seja, pensando mais nas ações de professores e alunos. Por outro, Cury et al. (2002) apresentam suas idéias num sentido mais filosófico, ou seja, os autores se preocupam mais com o que as pessoas pensam sobre a álgebra do que com o modo como lidam com ela. Acreditamos que uma abordagem como a de Cury e colegas (2002) seja mais global, embora este artigo se limite apenas a comentar sobre a parte simbólica da álgebra.

Na busca por teorias que abordassem as crenças e concepções sobre álgebra de uma forma filosófica, mas que também nos permitissem discutir o assunto num sentido não apenas simbólico encontramos o texto de Zalman Usiskin (1988/1995). É importante esclarecer que não estamos dizendo que este autor não descreve as manifestações da álgebra em um sentido simbólico, mas é possível identificar em suas descrições, idéias não simbólicas de álgebra. Segundo Usiskin (1988/1995), pode-se entender a álgebra sobre quatro concepções, apresentadas a seguir.

Álgebra como aritmética generalizada – Como o nome já diz, essa concepção representa o entendimento da álgebra como generalização dos conhecimentos aritméticos. Em outras palavras, os objetos algébricos são resultado da ampliação das idéias da aritmética. De acordo com Santos (2005), os alunos utilizariam a álgebra para traduzir situações do cotidiano para a linguagem algébrica e generalizar. Exemplo: explicar a regra de sinais através da seqüência: 3.3=9, 3.2=6, 3.1=3, 3.0=0, 3.(-1)=-3. Estas operações seriam seguidas de argumentos indicando que a diminuição de uma unidade na segunda parcela significa uma diminuição de 3 unidades no resultado da operação e, por esse motivo, teríamos um número negativo como resultado para a multiplicação de um número positivo por um número negativo. Com esse argumento e imaginando que esse fenômeno acontece com todos os números, podemos concluir que a.(-b)= -(ab) com a e b reais.

<u>Álgebra como estudo de métodos para resolver certos tipos de problemas</u> – Talvez esta seja a manifestação de álgebra mais comum durante as aulas de matemática. Trata-se de compreender quais os procedimentos que se deve usar para resolver certos problemas relacionados à álgebra, sejam eles contextualizados ou não. Exemplo: Quando somamos 3 ao quíntuplo de um número, o resultado é 40. Que número é esse? Para resolver este problema, não basta reescrevê-lo como 3 + 5x = 40. É preciso aplicar as técnicas operatórias cabíveis para determinar o tal número, ou seja, resolver as outras equações equivalentes à equação inicial e assim resolver 5x = 37 => x = 37/5 => x = 7,4.

De acordo com Santos (2007), a expectativa é que o aluno seja capaz de reconhecer a incógnita de um problema e em seguida descrever o mesmo simbolicamente por meio de equações ou sistema de equações para aplicar as técnicas operatórias cabíveis para resolvê-las.

<u>Álgebra como relação entre grandezas</u> – O estudo das funções é, provavelmente, o maior representante desta concepção, a qual explora o estudo de como as grandezas se relacionam. Exemplo: Sabendo que precisamos de 8 colheres de fubá para fazer um bolo para 2 pessoas, qual será a expressão que representa a relação entre a quantidade de pessoas (P) e a quantidade de colheres (C)? Para resolver este tipo de problema é preciso perceber quais são as quantidades relacionadas *(neste caso, colheres de fubá com número de pessoas)*,

em seguida descobrir como essa relação acontece *(neste caso, para cada pessoa são necessárias quatro colheres de fubá)* e com isso é possível chegar à forma genérica C = 4P. Também é importante que se perceba que a quantidade de colheres e o número de pessoas são grandezas proporcionais e que C depende de P e não o contrário.

Freitas (2002) afirma que a noção de letra como variável é fortemente presente no professor com esta visão sobre álgebra. Além disso, a expectativa é que o aluno consiga conceber as incógnitas como representantes de um conjunto de números que podem satisfazer às relações estabelecidas em cada situação.

<u>*Álgebra como estudo de estruturas*</u> – Esta concepção trata de entender quais as atitudes matemáticas podem ser úteis ou não para resolver os problemas em álgebra. Uma idéia muito clara desta manifestação de álgebra, descrita por Lins e Gimenez (1997), é antecipar os acontecimentos para "facilitar" o processo. Exemplo: Fatorar a expressão: $3x^2 + 4ax - 132a^2 = 3x^2 + 22ax - 18ax - 132\,a^2 = x(3x + 22a) - 6a(3x + 22a) = (3x + 22a).(x - 6a)$. É importante notar que a percepção de $4ax = 22ax - 18ax$ é legítima e justamente envolve os termos que permitem a fatoração, portanto esta seria a idéia de antecipação.

Para Freitas (2002) esta concepção requer que as pessoas passem a reconhecer as expressões algébricas como um objeto arbitrário de uma estrutura com certas propriedades individuais. Cabe ainda lembrar que estruturas de grupos, anéis, corpos etc... são outros conteúdos presentes nesta concepção (USISKIN, 1988/1995).

Assim, podemos perceber o nível de complexidade de caracterizarmos a álgebra e o que seria ou não uma atividade algébrica. Da mesma forma, caracterizar o ensino de álgebra não é tarefa fácil. Pensando nestes problemas, decidimos que, para melhorar nosso entendimento sobre álgebra precisávamos ter uma idéia mais clara de como a matemática, num sentido mais geral, funciona. Desta forma, encontramos as idéias de Paul Ernest (1989).

Antes de comentarmos as idéias de Ernest (1989) sobre matemática, nós trazemos uma rápida discussão sobre alguns estilos de problemas de álgebra que podem ser usados em sala de aula. Essa discussão se concentra na natureza e nas possíveis dificuldades dos problemas, de modo que possamos ter, também, uma panorâmica do que é trabalhado em resolução de problemas. Destacamos três tipos de problemas: tradicionais, perspectiva funcional e generalizações (KIERAN, 1992).

Problemas tradicionais – Problemas que envolvem distâncias, idades, tempo etc. Este tipo de problema demanda que o aluno consiga produzir e resolver equações que representem a situação proposta. Segundo Kieran (1992) uma das dificuldades encontradas para resolver estes problemas está em tentar estabelecer relações entre as variáveis.

Problemas de perspectiva funcional – estes problemas lidam com grandezas, no mesmo sentido do que descreve Usiskin (1988/1995). Kieran (1992) afirma que, geralmente, se consideram as variáveis como etiquetas de objetos concretos. Esta categoria de problemas apresenta um baixo índice de entendimento por parte de alunos e professores. Segundo Lochhead e Mestre (1988/1995), existem muitos problemas de interpretação para problemas deste tipo.

Problemas de generalização – São problemas raros no contexto da álgebra escolar. Segundo Kieran (1992), estes problemas utilizam o simbolismo algébrico para apresentar os padrões ou estruturas de determinadas situações. A autora também destaca a natureza aberta das respostas encontradas nestes problemas.

Como destacam Alvarenga e Vale (2007), a matemática é conhecida por muitos como ciência dos padrões e seria muito útil levar o estudo destes para o ambiente escolar. De acordo com os autores, olhar a matemática desta forma pode levar a uma nova forma de pensar sobre ela. Como um processo onde se pode compreender e justificar os próprios pensamentos, e não como um corpo de conhecimento altamente abstrato e especializado (ALVARENGA; VALE, 2007).

O modo como as pessoas pensam sobre a matemática pode interferir diretamente no rendimento das mesmas quando lidam com o assunto como vimos anteriormente. Na próxima seção, apresentamos algumas das possíveis visões de matemática, como já havíamos acenado que faríamos.

2.4 As visões de matemática

Segundo Ernest (1989) a matemática pode ser concebida sob três diferentes visões: 1) matemática como um instrumento; 2) matemática como corpo estático e unificado do conhecimento; 3) matemática como campo da criação humana em grande e constante expansão. A seguir apresentamos uma descrição dessas visões.

Visão da matemática como um instrumento – Segundo Ernest (1989), a matemática torna-se acumulativa na medida em que existem objetivos externos que ela pode ajudar a conseguir. A criação do conhecimento matemático acontece de acordo com o desenvolvimento de outras ciências e técnicas. A matemática é pensada como um conjunto de fatos não relacionados. Visão também conhecida como utilitarista.

Thompson (1984/1997) observa que, neste caso, o conteúdo matemático é fixo, já que é resultado das idéias do mundo físico, ou seja, resultado das necessidades que o mundo nos impõe. Ex: “Se a reprodução de uma bactéria, em condições ideais, é dada pela equação: $n = x^2 + 2x + 2$, com n sendo o número de bactérias e x sendo a quantidade de dias. Quantos dias são necessários para que haja 122 bactérias?” Observe que nesta atividade não há preocupação com a origem da equação. A única preocupação é com os métodos para resolvê-la. Os conhecimentos matemáticos funcionam como instrumento para resolver a mesma, ou seja, nós usamos os conhecimentos matemáticos.

Visão da matemática como corpo estático e unificado de conhecimento – Ernest (1989) nos informa que, segundo esta visão, a matemática, somente se descobre, e não se cria. Também podemos nomear esta visão de matemática como visão platônica. Ex: “A soma de dois números tem o resultado 22. A diferença é 2. Que números são esses?” Neste caso, observamos uma situação puramente matemática, ou seja, sem conexões com outras áreas de conhecimento ou vínculos com necessidades dessas áreas. Segundo Thompson (1984/1997), este tipo de visão se caracteriza pelo entendimento dos objetos matemáticos como coisas prontas e acabadas, ou seja, a matemática tem um conteúdo imutável.

Visão da matemática como um campo de criação humana e em grande expansão – Nesta visão são gerados modelos e procedimentos que são aprimorados como conhecimentos. A matemática é algo aberto e seus resultados permanecem abertos à revisão. Esta visão é marcada por uma perspectiva de resolução de problemas (ERNEST, 1989). Ainda cabe destacar que este tipo de visão admite um desenvolvimento contínuo da matemática de acordo com dois focos: as necessidades do mundo e as necessidades da própria matemática. Ex: A tabela abaixo mostra o crescimento de uma colônia de bactérias (B) de acordo com os dias (D).

D	B
1	5
2	10
3	17
4	26

Quantos dias serão necessários para que existam 122 bactérias nesta colônia? Por que será que isto ocorre? Que fatores podem ter interferido? Podemos pensar em outras situações semelhantes a esta? O que aconteceria se mudássemos os dados da tabela? Este tipo de visão demonstra maior preocupação com os contextos envolvidos no processo de resolução de problemas.

Visto isso, elaboramos as atividades de campo com base nos objetivos e teorias que apresentamos até o momento. O próximo capítulo é destinado à descrição dos procedimentos metodológicos utilizados neste trabalho.

3. Metodologia

Como este trabalho visa descobrir as crenças sobre álgebra dos professores, ou seja, como procuramos investigar o que os professores pensam, as atividades e os procedimentos metodológicos precisam ser de natureza mais subjetiva. Assim, foi preciso colher dados com mais detalhes para que fosse possível compreender, da melhor forma, a realidade na qual o público da pesquisa vive. Segundo autores como Neves (1996) e Dias (2000), uma pesquisa com essas características recebe o nome de pesquisa qualitativa, ou pesquisa naturalista (FIORENTINI; LORENZATO, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008). Por esses motivos, realizamos um trabalho dessa natureza. E como trazemos em detalhes informações e explicações sobre um número restrito de professores, nós desenvolvemos um estudo de caso sobre as crenças de duas professoras.

Inicialmente realizamos a pesquisa de campo com cinco professores de matemática do ensino fundamental e médio da rede pública de ensino do estado do Rio de Janeiro. Os professores foram contatados através de telefonemas e selecionados de acordo com a compatibilidade de seus horários com os nossos. Além dos professores, entrevistamos três alunos de cada um dos professores com os quais realizamos todas as etapas da pesquisa de campo. Esses alunos foram escolhidos de acordo com o rendimento dos mesmos em sala de aula, ou seja, em concordância com o professor, escolhemos um aluno com alto desempenho, um com desempenho mediano e outro com baixo desempenho.

O trabalho de campo foi realizado em três etapas. Na primeira, entrevistamos os cinco professores sobre o modo como eles percebem a álgebra. Com base na nossa análise e impressões preliminares das respostas destas entrevistas, escolhemos dois dos professores entrevistados, de acordo, também, com a disponibilidade de horários destes e nossos para dar continuidade a investigação. Na segunda etapa, assistimos às aulas destes dois professores, analisamos seus planos de aulas e realizamos atividades diversas, tais como: conversas sobre as idéias de Ernest (1989) e Usiskin (1988/1995), apresentamos livros didáticos para que os professores escolhessem um de acordo com os exercícios de álgebra presentes nos livros e realizamos discussões sobre as aulas assistidas com os professores. Na terceira parte entrevistamos os alunos com o objetivo de compreender qual a ressonância das concepções dos professores em alguns de seus alunos. Ou seja, planejamos, implementamos, refletimos, organizamos e analisamos os dados coletados, e redigimos este texto final da investigação seguindo os procedimentos metodológicos sugeridos para desenvolver uma pesquisa acadêmica em educação matemática (FIORENTINI; LORENZATO, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008; SILVA; SANTOS-WAGNER, 2009).

3.1 Lições da pesquisa de campo inicial

O aprendizado, que obtive durante este trabalho inicial, foi sem dúvida nenhuma o maior dentre todos que já vivenciei. Em razão disso, esta seção é dedicada a apresentar os vários momentos e os problemas que aconteceram ao longo de todos os estudos que realizamos durante o desenvolvimento deste trabalho de investigação. Ressaltamos que esta seção se torna importante a partir do momento que ela apresenta a forma como as idéias da pesquisa foram se constituindo até chegar ao que investigamos concretamente neste estudo que agora relatamos.

Uma de nossas primeiras lições no trabalho de campo inicial foi com relação às entrevistas. Elaboramos um questionário com 21 perguntas sobre matemática e seu ensino e álgebra e seu ensino. Inicialmente, pensamos em algumas perguntas-chave, que funcionassem como pontes para outras perguntas que as complementassem. Desta forma, as primeiras perguntas que surgiram no questionário foram: "O que é matemática?" e "O que é álgebra?" (SANTOS-WAGNER, 2008). Logo em seguida pensamos que seria interessante, para complementar as primeiras perguntas, pedir para os entrevistados falarem um pouco sobre o que pensam a respeito do ensino de matemática e de álgebra. Para isso, pensamos em perguntas como: "O que é mais importante no aprendizado de matemática?"; "Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que seria prioridade?"; "O que os problemas de álgebra têm em comum com a vida cotidiana?"; "Que tipos de erros os alunos do ensino fundamental não podem cometer quando estão estudando álgebra?"; "Quais as dificuldades que você mais percebe, nos alunos, quando está ensinando álgebra?" e "Qual a abordagem mais efetiva[11] para o ensino de matemática e álgebra? Qual a mais atrativa? Qual a mais chata?".

Cabe ressaltar que algumas perguntas do questionário do estudo exploratório não foram criadas por pura inspiração, como por exemplo, com a leitura do livro de

[11] É importante lembrar que a palavra efetivo significa resolver um problema de forma definitiva, ou seja, sem atitudes temporárias ou paliativas.

Callejo e Vila (2006), surgiram perguntas do tipo: “Quais os conteúdos matemáticos você acredita serem referentes à álgebra?”; “Quais palavras te lembram álgebra?”; “Qual importância você daria para as seguintes atitudes dos alunos em resolução de problemas (responda numa escala de 0 a 10): Encontrar a resposta certa?; Seguir um caminho coerente?; Utilizar exatamente as técnicas que acabaram de serem ensinadas?; Justificar os passos da resolução?; Buscar novas soluções?”. Também tivemos inspirações a partir das conversas com minha orientadora sobre autores que ela tem usado quando desenvolve trabalhos investigativos com professores e alunos procurando investigar de forma indireta o que estes pensam sobre a matemática e diferentes conteúdos (CHAPMAN, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008). Com isso, surgiram questionamentos do tipo: “Se a álgebra fosse um animal, qual seria? Por quê?”; “Se álgebra fosse uma profissão, qual seria? Por quê?” e “Se tivesse que explicar para alguém, que nunca ouviu falar sobre álgebra, o que é um problema de álgebra. O que você diria?”.

A princípio acreditávamos que as entrevistas durariam em média, de 40 à 50 minutos. Porém, ao realizarmos as primeiras entrevistas, percebemos que deveríamos dar mais tempo para as respostas e que os encontros levariam em média de 1 hora e 20 minutos à 1 hora e 40 minutos, devido as muitas perguntas do questionário. Com isso, também percebemos que deveríamos realizar entrevistas um pouco menores, pois o tempo estimado era muito extenso. Foi neste momento que percebemos a necessidade de realizar as entrevistas em dois momentos diferentes.

Quando escrevemos uma prévia deste trabalho, para nosso exame de qualificação, nós cometemos um erro que vale ser destacado. O fato de conhecermos alguns professores que participaram da entrevista e a ansiedade por apresentar resultados, nos levaram a fazer interpretações e análises muito precipitadas sobre as crenças destes professores. Outra coisa que aprendemos foi que todas as conclusões que tirávamos com as atividades precisavam ser retornadas aos professores, de modo que esses pudessem complementar ou refutar as mesmas (SANTOS-WAGNER, 2008).

Outro contratempo deste trabalho foi com relação ao tempo tanto para realizar a pesquisa quanto para ir aprendendo a ser um pesquisador. As atividades que pensamos realizar com os professores exigiram um período muito maior do que imaginávamos e isso nos obrigou a escolher dois dentre os cinco professores com os quais fizemos entrevistas. Percebemos na pesquisa de campo inicial contactando os cinco professores, preparando e conduzindo as entrevistas, transcrevendo as mesmas e procurando interpretar as informações que o volume de atividades vai crescendo. Tínhamos que seguir lendo e estudando outros trabalhos de pesquisa e ir aprendendo a ser um pesquisador com os limites de tempo em um curso de mestrado. Por esses motivos também é que reduzimos bastante as atividades que pretendíamos realizar com os alunos para cumprir os prazos de entrega da dissertação.

3.2 Participantes da pesquisa

Todos os professores que participaram deste trabalho são professores da rede pública estadual do Rio de Janeiro. Esta seção traz para o leitor algumas informações sobre as pessoas com quem trabalhamos durante este período de estudos. Também apresentamos os motivos pela escolha das duas professoras juntamente com os motivos pelos quais não escolhemos os outros professores. É importante lembrar que escolhemos apenas dois professores por causa das limitações de tempo que tivemos tanto para desenvolver este trabalho quanto para lidar com a quantidade de aprendizados e desafios de um pesquisador. Nossa intenção preliminar era de realizar todas as atividades com os cinco professores.

Por questões de ética e sigilo optamos por nos referir aos professores, dos quais dois são homens e três são mulheres, pelos seguintes pseudônimos: Professor A, Professor B, Professora X, Professora Y e Professora Z (FIORENTINI; LORENZATO, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008). Ressaltamos que todos estes professores concordaram que suas opiniões e as informações presentes neste relato fossem divulgadas. Também apresentaremos algumas informações sobre os seis alunos, 3 de cada professora escolhida.

Professor A: Professor do ensino fundamental e médio da rede pública estadual do Rio de Janeiro desde 2008, já teve experiências atuando em escolas da rede privada. Licenciado em matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro em 2006, embora já trabalhe com educação de jovens e adultos desde 2002 e em pré-vestibulares comunitários desde 2001. Iniciou o curso de especialização em Ensino de Matemática na Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2008. O fato de conhecermos o professor desde a graduação, o que poderia nos levar a julgamentos precipitados sobre as crenças sobre álgebra do mesmo, foi um fator determinante para não escolhermos este professor.

Professor B: Professor do ensino fundamental e médio da rede pública municipal do Rio de Janeiro desde 2006, da rede pública estadual do Rio de Janeiro desde 2008 e da rede privada desde 2005. Licenciado em matemática pela Universidade Estácio de Sá desde 2004, se especializou no Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio de Janeiro em 2007. Também é professor de pré-vestibular comunitário desde 2004. Os muitos compromissos da vida profissional deste professor dificultaram, de forma decisiva, a realização das demais atividades com o mesmo.

Professora X: Professora da rede pública estadual do Rio de Janeiro desde 1991. É professora do ensino fundamental desde 1995, ano no qual fez curso de complementação adicional em ciências e matemática. Ela é professora atuante do ensino médio desde 2002, quando terminou seu curso de licenciatura em matemática pela Universidade Estácio de Sá. O fato de esta professora ter dado aula para vários níveis de ensino pesou muito em nossa escolha. Além disso, ela trabalha na mesma escola que a professora Y. Fato este que nos fez acreditar que poderia ajudar bastante trabalhar nesta investigação com duas professoras atuando na mesma escola para uma possível tomada de consciência como a que buscamos com este trabalho. É importante destacar que chamaremos os alunos desta professora de X1, X2 e X3.

Professora Y: Professora da rede pública estadual do Rio de Janeiro desde 1999 e da rede pública municipal de Mendes-RJ desde 2002. Foi professora de educação infantil da rede pública estadual do Rio de Janeiro de 1986 até 1998. Licenciada em Matemática pela Universidade de Nova Iguaçu – RJ desde 1998 e Pós Graduada em Educação Matemática também pela Universidade de Nova Iguaçu em 2002. Escolhemos esta professora por vários motivos: juntamente com a professora X, é a que tem mais tempo de magistério e o fato de ela ter trabalhado com educação infantil também influenciou na escolha. Além disso, a professora trabalha na mesma escola estadual que a professora X e isso nos deu uma facilidade maior para realizar as atividades com ambas. Da mesma forma que com a professora X, chamaremos os alunos desta de Y1, Y2 e Y3.

Professora Z: Professora da rede pública estadual do Rio de Janeiro desde 2008, da rede pública municipal do Rio de Janeiro desde 2009 e da rede privada desde 2006. Assim como o professor A, trabalhou com educação de jovens e adultos em 2002 e 2005. Graduada em matemática pela Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro em 2007, já realizou alguns cursos de extensão do CEDERJ no primeiro semestre de 2008. Não escolhemos esta professora também por incompatibilidade de horários. Além disso, trata-se de outra amiga da época da graduação.

3.3 Entrando em campo

Após a realização do estudo exploratório começamos a pensar em como faríamos a real pesquisa de campo. Como já dissemos anteriormente, continuamos as atividades com duas professoras da mesma escola. Esta seção está destinada a contar quais foram nossos passos para que tivéssemos acesso às professoras e à escola em si.

Nossa primeira ação, respeitando os princípios éticos, foi redigir documentos de autorização para que pudéssemos nos apresentar de maneira formal às pessoas e à instituição de ensino. Fizemos três documentos diferentes. Um documento solicitando a autorização (Anexo 5), onde os professores nos permitiram realizar as atividades com eles, bem como gravar as entrevistas e assistir suas aulas. Elaboramos também duas declarações para a diretora da escola e para os pais dos alunos, de modo que todos ficaram cientes do acontecimento da pesquisa (Anexo 6) (SANTOS-WAGNER, 2008; SILVA; SANTOS-WAGNER, 2009).

A escola localiza-se em um bairro da periferia de Nova Iguaçu – RJ, e oferece cursos de ensino fundamental e médio que funcionam nos três turnos. Um fato curioso que ocorre nesta escola é que muitos dos alunos do turno da noite, horário em que ocorre a modalidade de ensino para jovens e adultos, são parentes (pais, tios...) dos alunos dos outros dois turnos. Além disso, muitos dos funcionários da própria escola são ex-alunos da mesma. Essas características tornam a instituição quase que exclusiva da comunidade local. Recentemente houve um grande aumento no quadro de professores, saindo de mais ou menos de um total de 15 professores para mais de 30 professores. A escola conta com oito salas de aula, duas bibliotecas (uma para alunos e uma para professores), uma sala de professores, um laboratório de informática, além das salas da diretoria.

4. Pesquisa de Campo

Com a intenção de responder nossos questionamentos e alcançar os objetivos da pesquisa realizamos diversas atividades. Preparamos e conduzimos entrevistas semi-estruturadas. Solicitamos que as professoras realizassem uma breve análise de alguns livros didáticos do 8º ano do ensino fundamental. Implementamos com as professoras uma breve discussão sobre várias demonstrações da fórmula resolvente para equações do 2º grau. Realizamos algumas observações das aulas das professoras e uma breve conversa com alguns alunos destas professoras sobre suas crenças em relação à álgebra. Este capítulo é destinado a fazer uma descrição sobre como estas atividades foram propostas juntamente com a forma que as mesmas nos ajudaram a atingir nossos objetivos.

4.1 As entrevistas

As entrevistas realizadas com os professores foram semi-estruturadas. Segundo Boni e Quaresma (2005), entrevistas semi-estruturadas combinam perguntas abertas e fechadas, onde o informante tem a possibilidade de discorrer sobre o tema proposto. O pesquisador deve seguir um conjunto de questões previamente definidas, mas ele o faz em um contexto muito semelhante ao de uma conversa informal.

Sendo assim, embasados por esta definição e pelas conversas com minha orientadora (SANTOS-WAGNER, 2008), desenvolvemos quatro questionários distintos com a finalidade de verificar como as crenças e concepções sobre matemática, ensino de matemática, álgebra e ensino de álgebra dos professores entrevistados se relacionam com as concepções de álgebra definidas por Usiskin (1988/1995). É importante lembrar que as entrevistas foram realizadas em dois momentos, sendo o primeiro com perguntas sobre a matemática e seu ensino e o segundo com perguntas sobre álgebra e seu ensino. A seguir temos as perguntas do questionário juntamente com o que pretendíamos com cada uma delas.

4.1.1 Visão de Matemática

Nesta etapa estamos interessados em observar as atitudes e crenças do professor com relação à matemática num sentido geral. As análises das repostas fornecidas pelos entrevistados foram feitas à luz das teorias de Ernest (1989). A seguir as perguntas desta etapa.

1. O que é matemática?

Esta é uma pergunta direta. Esperávamos obter uma primeira idéia de como o professor percebe a matemática. Sabíamos que era e é provável que respostas prontas apareçam neste momento, mas o discurso por traz destas respostas são de muito valor para as perguntas seguintes.

2. Quais os motivos da tua escolha de graduação?

O objetivo desta pergunta era fazer com que o entrevistado retratasse as motivações que o levaram a estudar matemática. Além disso, a resposta apresentada pode, junto com a primeira, dar mais uma pista sobre sua visão de matemática, pois é difícil dizer porque se escolheu uma profissão sem dizer o que se pensa dela.

3. Qual a sua preferência, Matemática da graduação ou a Matemática do Escolar (fundamental e médio)? Por que?

Ao fazer, e justificar, sua escolha, o professor pode ser levado a dizer em quais campos de matemática ele se sente mais à vontade e conseqüentemente, onde vibra mais quando ministra suas aulas. Esta pergunta se faz relevante justamente por causa de nossa própria prática docente, onde as mudanças emocionais para certos temas são notáveis.

As possíveis respostas que já tínhamos pensado para esta pergunta são: “É mais fácil”, “abre a mente”, “é mais aplicável”, “mágica”, “contradições”. É importante lembrar que estas idéias são estimativas de respostas. Na verdade o professor que der respostas perto dessas esperadas pode nos dar a chance de perceber como o entrevistado se comporta com as diferentes manifestações de matemática.

4. Na sua opinião, por que matemática é tão importante no sistema educacional?

Esta pergunta é importante pelo fato de apresentar como o professor concebe a matemática enquanto disciplina escolar. Esperamos que o entrevistado também fale um pouco mais de crenças e concepções com relação ao que é matemática.

5. Se a matemática fosse um animal, qual seria? Por que? Qual animal ela nunca seria? Por que?

Mais uma oportunidade de observarmos como o professor sente a matemática, além de falar de suas próprias dificuldades com relação à disciplina. Acreditamos que a escolha de um animal para fazer alguma associação poderá nos dar uma idéia de como o educador entende o comportamento da matemática e como o associa com suas experiências e percepções sobre animais fazendo um paralelo entre o animal e a matemática (CHAPMAN, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008).

6. Se a matemática fosse outra profissão, qual seria? Por que? Qual profissão a matemática não seria? Por que?

Esta pergunta tem as mesmas intenções da anterior. Ela se torna importante a partir do momento em que nos permite perceber outras associações que o professor faz e de obter quem sabe uma confirmação do que foi ouvido anteriormente (CHAPMAN, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008).

4.1.2 Visão do ensino de matemática

1. Por que licenciatura?

Esperávamos ter uma primeira idéia de como o professor concebe sua prática pedagógica e quais são os fatos que o motivam na profissão. Com isso, acreditamos estar iniciando um diálogo com esta pergunta e algumas das próximas que nos auxilie a compreender como o professor pensa sobre a matemática, seu curso de formação, o ensino de matemática, etc. Ou seja, neste diálogo acreditamos que seja possível ter uma primeira noção de que tipo de professor o entrevistado é.

2. Na sua opinião, qual o objetivo do ensino da matemática?

Com a resposta a esta pergunta, pretendemos levar o educador a relatar, não apenas o que ele entende como objetivo para o ensino de matemática, mas também seus próprios objetivos enquanto estudante. Além disso, a resposta desta pergunta pode complementar e reforçar a impressão causada na pergunta anterior.

3. Quais os conteúdos matemáticos são mais importantes para o aprendizado da matemática? (para os alunos aprenderem melhor) e porque?

Da mesma forma que na pergunta anterior, pretendemos que o professor mostre, além de suas convicções sobre o ensino de matemática, os campos da matemática onde ele próprio tem dificuldades ou até onde sente maior afinidade. Nesta pergunta também esperamos ter uma primeira idéia a respeito do relacionamento do entrevistado com a álgebra.

4. Qual sua opinião sobre o currículo de matemática? E por que?

Nos parece que, sempre que o assunto é este, ou o entrevistado elogia loucamente, ou ele discorda. Mas de fato acreditamos que esse tipo de pergunta mexe muito com o professor, ou seja, ela o incomoda ou o exalta. Sendo assim, esperamos que, ao respondê-la, o professor exponha suas crenças, suas convicções e concepções sobre o ensino de matemática.

5. Se você fosse o ministro da educação, mudaria alguma coisa referente ao ensino da matemática? O que? Por que?

Mais uma vez, nossa intenção é levar o entrevistado a uma situação na qual ele não espera, de modo que ele exponha de forma mais intensa suas emoções, seus pensamentos e argumentos. Como já dissemos é neste diálogo que vamos conhecendo um pouco dos pensamentos e emoções do professor com respeito à matemática, sua formação em matemática, o ensino, as políticas públicas, etc.

6. O que você acha mais importante no aprendizado em Matemática?

Ao responder esta pergunta o professor poderá apresentar os fatos que ele acredita que são mais determinantes para o aprendizado. Mais do que isso, nós acreditamos que o entrevistado nos falará sobre os conceitos matemáticos que foram importantes para sua própria formação.

7. Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da matemática? Qual a mais atrativa? Qual a mais chata?

Observando as respostas dadas nesta questão, esperamos ter uma panorâmica de como as aulas dos professores são influenciadas por suas crenças sobre a matemática. É possível que, na tentativa de descrever as três formas de abordagem, os entrevistados apresentem os conteúdos matemáticos que mais gostam, quais não gostam e, também, os conteúdos que foram mais importantes para suas formações. Ou seja, acreditamos que estas perguntas nos podem nos mostrar como os professores pensam, vivenciam e percebem o ensino de matemática de modo geral.

4.1.3 Visão de Álgebra

Esta parte das entrevistas tem como objetivo traçar um paralelo das respostas com àquelas apresentadas nas perguntas que dizem respeito à visão de matemática no sentido mais geral. Sendo assim, as perguntas 1, 3 e 4 têm os mesmos objetivos das perguntas 1, 5 e 6 da seção visão de matemática só que voltadas para a álgebra.

1. O que é álgebra?

2. Diga conteúdos que você julgue referentes à álgebra. Diga também palavras.

Esta pergunta pode nos dizer diretamente ou pelo menos nos oferecer algumas pistas e indícios sobre o que o professor acredita ser álgebra e como ele concebe seus procedimentos ou conceitos. Acreditamos que esta reposta ao lado da resposta da pergunta anterior pode ir nos auxiliando a compreender como o professor pensa.

3. Se a álgebra fosse um animal, qual seria? Por que? Qual animal a álgebra nunca seria? Por que? E uma profissão?

Esta pergunta é uma tentativa de confirmar as impressões causadas até aqui. E de perceber de modo semelhante aos questionamentos que fizemos com matemática, que tipo de associações o professor faz quando pensa sobre álgebra e sobre animais. Que paralelos o professor vai nos oferecer de seus pensamentos, percepções, convicções podem surgir nestas respostas (CHAPMAN, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008). Além disso, esperamos ter uma pista de como o entrevistado poderia ou não se encaixar em alguma das concepções de Usiskin (1988/1995).

4. Álgebra ou geometria? Qual sua preferência? Por que?

Acreditamos que a esta altura do diálogo que poderemos ter uma boa aproximação das crenças e concepções dos professores. Além disso, sabemos que para muitos professores existe preferências e facilidades em um destes conteúdos. Conversarmos mais abertamente sobre isto pode auxiliar o nosso entendimento dos professores assim como também pode auxiliar o próprio professor entrevistado a pensar sobre questionamentos que normalmente nenhum de nós, professores, paramos para pensar ou refletir sozinhos.

4.1.4 Visão do Ensino de Álgebra

1. Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que você priorizaria?

Esperamos que o professor demonstre suas maiores preocupações com relação aos conteúdos e comente sobre suas prioridades neste ensino. Com isso, poderemos ter uma idéia sobre quais objetos foram mais decisivos para sua própria educação algébrica, ou seja, poderemos ter alguma noção de quais conteúdos ele trata ou trataria com maior carinho durante suas aulas.

2. Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da álgebra? Qual a mais divertida? Qual a mais chata?

As três perguntas acima têm o mesmo cunho da pergunta 7 da seção visão do ensino de matemática.

3. Se tivesse que explicar para alguém, que nunca ouviu falar sobre álgebra, o que é um problema de álgebra. O que você diria?

Observando a resposta do professor, poderemos perceber novamente como o mesmo concebe a álgebra enquanto campo da matemática. Também será possível buscar uma aproximação entre o que o professor diz neste diálogo e as concepções citadas na introdução.

4. O que os problemas da álgebra tem haver com o cotidiano? Quais erros um aluno de álgebra não pode cometer?

As duas últimas perguntas dizem respeito à prática docente do entrevistado. Assim, teremos uma idéia de quais são as prioridades para a aprendizagem da álgebra e, com isso, poderemos ter mais informações sobre suas crenças e concepções sobre álgebra.

5. Qual importância você daria para? (0 à 10)

1. *Obter a resposta certa.*
2. *Seguir um caminho coerente.*
3. *Usar o que você acabou de ensinar.*
4. *Justificar os passos da solução.*
5. *Procurar novas soluções para um problema resolvido.*

Esta é uma pergunta importante, já que ao respondê-la o professor mostrará suas preferências por resultados, procedimentos, relações ou entendimentos de estruturas. Desta forma nós podemos ter alguma chance de desvendar quais das quatro concepções sobre álgebra estão mais de acordo com as características do entrevistado.

6. Quais são os problemas mais comuns no aprendizado da álgebra? O que mais te preocupa? Já perguntou se sua aula esta boa?

As três últimas perguntas da entrevista têm a finalidade de permitir que o professor fale um pouco sobre suas angústias enquanto profissional de ensino. Aqui, também podemos tirar alguns indícios sobre as concepções sobre o ensino de matemática e de álgebra por parte do entrevistado.

4.2 Livros Didáticos

Juntamente com a seção de álgebra das entrevistas, realizamos atividade que foi desenvolvida para simular uma escolha de livros didáticos que os professores costumam fazer no início do ano letivo escolar. Pedimos para que as professoras escolhessem (Anexo 2) livros didáticos do 8º ano do ensino fundamental da própria biblioteca da escola, onde as duas professoras trabalham, ou mesmo dentre os que elas possuem em casa. A tarefa solicitada foi realizada entre a última semana de Maio e primeira de Junho e consistiu em escolher um dentre os livros como se elas estivessem adotando um livro para suas turmas. Ambas puderam escolher e analisar, durante duas semanas, os livros livremente, sem um roteiro de observação ou análise. Após a escolha, pedimos para que as professoras fizessem alguns comentários sobre os motivos pelos quais elas escolheram um dos livros e os motivos pelos quais, recusaram os outros. A seguir, uma breve descrição dos livros selecionados pela professora X e professora Y.

Jackson Ribeiro e Elizabeth Soares (Construindo consciências: matemática): Livro publicado pela Editora Scipione em 2006, 1ª edição. O livro conta com 336 páginas e está dividido em 8 módulos, nos quais são apresentados 15 capítulos. Os capítulos, 9 (46 pp.) intitulado “Cálculo algébrico”, e 10 (28 pp.) intitulado “Equações e inequações”, dão conta do ensino de álgebra do livro. Esta obra apresenta muitas figuras e um texto apenas com códigos necessários para a explanação do conteúdo. Ainda cabe ressaltar que o livro apresenta, em vários momentos exemplos ligados à geometria e à situações o dia-a-dia.

Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo (Educação matemática): Livro publicado pela Editora Atual em 2002, 1ª edição. Apresenta o selo do Plano Nacional do Livro Didático de 2005 na capa. O livro conta com 288 páginas e está dividido em 20 módulos. Os módulos 3 (13 pp.) intitulado “A linguagem da álgebra”, 5 (13 pp.) intitulado “Álgebra e padrões geométricos”, 7 (13 pp.) intitulado “Equilíbrio matemático” e 14 (11 pp.) intitulado “Falando em desigualdade”, são os que mais se referem ao ensino de álgebra, embora os outros módulos também toquem no assunto. O livro apresenta algumas figuras e tentar relacionar a linguagem corrente com a linguagem algébrica nos módulos que se referem ao assunto.

Edwaldo Bianchini (Matemática): Livro publicado pela Editora Moderna em 1991, 3ª edição. Conta com 210 páginas e está dividido em 16 unidades. As unidades de 3 até 11, em um total de 81 páginas, intituladas “Expressões literais ou algébricas”, “Polinômios”, “Produtos notáveis”, “Fatoração”, “Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum”, “Frações algébricas”, “Equações fracionárias”, “Equações literais” e “Sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis” se referem a álgebra. O livro tem uma abordagem técnica com poucas gravuras e dá grande ênfase ao entendimento das notações. Os exercícios são de reprodução.

<u>Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado (Matemática e realidade)</u>: Livro publicado pela Editora Atual em 2005, 5ª edição. Apresenta o selo do Plano Nacional do Livro Didático de 2008 na capa. O livro conta com 368 páginas e está dividido em 10 unidades, nas quais se desenvolvem 30 capítulos. Os capítulos 14 (9 pp.) intitulado “Expressões algébricas”, 15 (18 pp.) intitulado “Operações com polinômios”, 16 (7 pp.) intitulado “Produtos notáveis”, 17 (15 pp.) intitulado “Fatoração de polinômios”, 20 (8 pp.) intitulado “Equações do 1º grau”, 21 (23 pp.) intitulado “Sistemas de equações” e 22 (7 pp.) intitulado “Inequações do 1º grau” dão conta do ensino de álgebra. O livro apresenta muitas figuras geométricas na tentativa de colocar as situações algébricas em um contexto mais “palpável”. A linguagem é fortemente algébrica sendo reservado o inicio do capítulo 14 para a transição da linguagem corrente para a linguagem da álgebra.

<u>Ângela Vidigal, Carlos Afonso Rego, Maria das Graças G. Barbosa e Michel Spira (Matemática e Você)</u>: Livro publicado pela Editora Formato em 2002, 1ª edição. Apresenta o selo do Plano Nacional do Livro Didático de 2005 na capa. O livro conta com 310 páginas e está dividido em 11 capítulos. Os capítulos 3 (31 pp.) intitulado “Cálculo com letras”, 8 (28 pp.) intitulado “Equações, sistemas e inequações” e 11 (10 pp.) intitulado “Funções: um primeiro estudo” são referentes ao ensino de álgebra do livro. Esta obra apresenta muitas gravuras e, por várias vezes, mantém um diálogo com o leitor através das mesmas.

<u>José Roberto Bonjorno, Regina Azenha Bonjorno e Ayrton Olivares (Matemática: fazendo a diferença)</u>: Livro publicado pela Editora FTD em 2006, 1ª edição. Apresenta o selo do Plano Nacional do Livro Didático de 2008 na capa. O livro conta

com 304 páginas e está dividido em 8 unidades. As unidades 2 (26 pp.) intitulada “Polinômios”, 3 (29 pp.) intitulada “Equações e inequações” e 8 (34 pp.) intitulada “Fatoração” são referentes ao ensino de álgebra do livro. Esta obra apresenta muitas tabelas para que os alunos identifiquem padrões e a partir deles se iniciem na linguagem algébrica, além de algumas figuras geométricas.

Oscar Guelli (Matemática: uma aventura do pensamento): Livro publicado pela Editora Ática em 2001. 7ª edição. Apresenta o selo do Plano Nacional do Livro Didático de 2001 na capa. O livro conta com 288 páginas e está dividido em 7 capítulos. Os capítulos 2 (29 pp.) intitulado “Expressões algébricas”, 3 (25 pp.) intitulado “Fatoração” e 4 (48 pp.) intitulado “Equações, inequações e sistemas de equações” são referentes ao ensino de álgebra do livro. Tenta manter diálogo constante com o leitor. Os exercícios não apresentam muitas aplicações, são mais de fixação com linguagem técnica.

Álvaro Andrini (Praticando Matemática): Livro publicado pela Editora do Brasil em 1993. Apresenta o selo do Plano Nacional do Livro Didático na capa, embora não divulgue o ano. O livro conta com 222 páginas e está dividido em 19 capítulos. O conteúdo referente à álgebra está desenvolvido do capítulo 3 até 12. São 95 páginas com os títulos “Valor numérico de uma expressão algébrica”, “Expressões algébricas”, “Termos semelhantes”, “Operações com monômios”, “Operações com polinômios”, “Produtos notáveis”, “Fatoração”, “Frações algébricas”, “Equações fracionárias”, “Equações literais do 1º grau”. O livro não apresenta gravuras e mantém todo o tempo com uma linguagem algébrica.

Luiz Roberto Dante (Tudo é matemática): Livro publicado pela Editora Ática em 2002. 1ª edição. Apresenta o selo do Plano Nacional do Livro Didático de 2007 na capa. O livro conta com 328 páginas e está dividido em 12 capítulos. Os capítulos 5 (19 pp.) intitulado "Expressões algébricas, equações e inequações", 7 (25 pp.) intitulado "Cálculo algébrico" e 9 (22 pp.) intitulado "Sistemas de equações do 1º grau" são referentes ao ensino de álgebra do livro. Com muitas figuras, o livro apresenta uma linguagem acessível ao leitor. Os exercícios alternam entre reprodução e aplicação.

4.3 Equações do 2º grau

Esta atividade, realizada após o termino das entrevistas, foi inspirada no artigo "Equações do 2º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: uma análise de sete manuais escolares" de João Pedro da Ponte, publicado na revista Quadrante em 2007. A tarefa solicitada para as professoras foi a de analisar, durante uma semana, 7 demonstrações da fórmula resolvente para equações do 2º grau apresentadas em Ponte (2007). Acreditamos que esta atividade seja importante pelo fato de as equações do 2º grau constituírem um assunto muito valorizado no currículo da álgebra. Além disso, pelo fato de as demonstrações serem de épocas diferentes, esperamos que a diferença entre as linguagens, as abordagens, as técnicas utilizadas e as idéias de cada uma levem as professoras a fazer as críticas em cima destas características. Essa atividade pode nos ajudar muito a descobrir o que as professoras pensam sobre álgebra e principalmente sobre seu ensino.

Neste caso, as professoras também tiveram que escolher a demonstração que mais lhes agradava e justificar a escolha e a não escolha das outras 6 demonstrações da fórmula. Pedimos para que as características observadas por elas fossem: linguagem usada na demonstração, objetividade e clareza. A seguir trazemos as 7 demonstrações encontradas em Ponte (2007), junto com uma breve descrição dos livros onde elas se encontram.

Augusto José da Cunha (Elementos de álgebra)[12]*:* Manual publicado em 1887, 5ª edição. Apresentado como "Lente da Escola Politechinica". O volume tem 338 páginas, destinado aos 8° e 9° ano. A parte que fala de equação do 2° grau é destinada aos alunos do 9° ano. Está dividido em cinco livros, sendo o livro 3 dedicado ao tema "Equações de segundo grau", com 52 pp. É organizado em quatro capítulos: "I. Radicais do segundo grau" (16 pp); "II. Equação do segundo grau a uma incógnita" (26 pp); "III. Equações que se reduzem ao 2° ou ao 1º grau" (14 pp); e "IV. Problemas do segundo grau" (10 pp). No fim deste capítulo, surgem exercícios e respectivas soluções. O manual tem tamanho reduzido (12,3 x 19,2 cm), o texto é escrito de forma densa, com as letras pequenas e o espaçamento apertado. Não são apresentadas tabelas ou diagramas. Existe um único esquema sobre a divisão de polinômios e duas figuras muito simples no capítulo dos problemas, ambas para ilustrar questões geométricas. O tipo de letra é o mesmo em todo o corpo do trabalho, mudando apenas de tamanho nos títulos e subtítulos. Contém uma linguagem de combinação natural e algébrica. Está redigido num tom formal e faz o tratamento em paralelo de equações com coeficientes numéricos e literais. O livro III começa informando que a resolução de equações do 2° grau conduz a extração da raiz quadrada de expressões literais e daí a necessidade de incluir o capítulo I,

[12] CUNHA, A. J. **Elementos de álgebra**. 5ª ed. Lisboa: Livraria António Maria Pereira, 1887.

sobre radicais do 2° grau. Agora vamos mostrar a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau como apresentada neste livro.

Resolução de uma equação completa

A equação completa pode, como sabemos reduzir-se sempre a forma:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (2)$$

Transpondo para o segundo membro o termo conhecido, teremos a equação equivalente.

$$x^2 + px = -q.$$

Reconhece-se facilmente que o primeiro membro se compõe dos dois primeiros termos do quadrado do binômio ($x + \frac{1}{2}p$), e que falta $\frac{1}{4}p^2$ para completar este quadrado. Juntando, pois, aos dois membros $\frac{1}{4}p^2$, o que é permitido (n° 89) resulta:

$$x^2 + px + \tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q$$

E visto que $X^2 + px + \frac{1}{4}p^2$ é o quadrado de $(x + 1/2p)$ como é fácil verificar, a equação se poderá escrever do seguinte modo:

$$(x + \tfrac{1}{2}p)^2 = \tfrac{1}{4}p^2 - q \quad (6)$$

$1/4p^2 - q$ é portanto o quadrado de $(x + 1/2p)$. Logo $(x + 1/2p)$ será a raiz quadrada de $(1/4p^2 - q)$. E como a raiz desta quantidade tanto pode ser:

$+\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$ como $-\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}$, será

$$x + \tfrac{1}{2}p = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}; \quad (7)$$

logo, $x = -\tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$ (8)

são por conseguinte, dois os valores de x que satisfazem a equação (2); designando-se por x'e x'', teremos:

$$x' = -\tfrac{1}{2}p + \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q},\quad x'' = -\tfrac{1}{2}p - \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 - q}.$$

<u>Eduardo Ismael dos Santos Andrea (Compêndio de álgebra)</u>[13]*:* Este manual tem 173 páginas, foi publicado em 1924 e foi destinado para alunos do 10º e 11° anos da escolaridade. O autor diz na capa que é “professor da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa e do Liceu de Pedro Nunes”. A folha de rosto diz que o manual foi “aprovado oficialmente” e está “conforme os novos programas liceais”.A parte que fala sobre as equações numéricas e problemas do 2º grau a uma incógnita estão nos capítulos VIII e IX (26 pp). O capítulo VIII é composto por nove parágrafos numerados, de 100 a 108, é dividido em duas seções: a primeira designada por “Função $y = ax^2 - bx + c = 0$. Equações do 2º grau a uma incógnita” (6 pp) e a segunda por “propriedades do trinômio do 2º grau” (13 pp). O Capítulo IX tem o título “Problemas do 2° grau. Discussão” (3 pp) e é composto por quatro parágrafos (109-112). Este capítulo termina com “exercícios”, termo usado pelo manual, que se refere ao próprio capítulo e ao anterior e indica as respectivas soluções. Vale dizer, também, que o capítulo X estuda equações “cuja resolução se reduz a uma equação do 2° grau” (p. 117), as equações biquadradas e irracionais. O livro tem dimensões reduzidas (12,6 x 19,5cm), não possui esquemas ou tabelas e a letra é pequena e condensada. Os exemplos apresentados são quase todos de equações com coeficientes numéricos, muito mais simples que o manual de Augusto José da Cunha. Agora vamos mostrar a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau trazida neste livro.

100 - Função $y = ax^2 + bx + c$, - O polinômio inteiro em x do 2° grau, $ax^2 + bx + c$ toma o nome particular de trinômio do 2° grau e igualando-o teremos a equação:

(1) $ax^2 + bx + c = 0$

onde a, b, e c serão números finitos quaisquer....

[13] ANDREA, E. I. S. **Compêndio de álgebra**. Lisboa: Imprensa Nacional de Lisboa, 1924.

Para resolver (1) façamos $x = y – m$ sendo m uma quantidade indeterminada que será escolhida oportunamente segundo as conveniências do cálculo. Substituindo em (1), virá:

$a(y-m)^2 + b(y-m) + c = 0$

ou, desenvolvendo e ordenando,

(2) $ay^2+ (b-2am)y +(am^2 - bm + c) = 0$

equação em y da forma (1).

Escolhamos agora a indeterminada m de modo que seja $b-2am = 0$, donde resulta, sendo a diferente de zero[14],

Substituindo este valor em (2), virá

$ay^2 + a \,.\, b^2/4a^2 - b \,.b/2a + c = 0$

ou, efetuando e reduzindo,

$ay^2 - b^2/4a +c = 0$

ou

$ay^2 = b^2 - 4ac/4a$

e finalmente

$$y = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{4a^2} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e como $x = y – m$ vem, por ser $m = -\frac{b}{2a}$

$$(3)\ x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Concluímos, pois, que há dois valores:

$$(4)\ x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ;\ x'' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que são raízes da equação proposta.

[14] Aqui faz-se necessário explicitar que m = b/2a, apesar de o texto original não ter feito esta observação no desenvolvimento desta fórmula resolvente.

Francisco Dias Agudo (Álgebra e Trigonometria)[15]*:* É um manual publicado em 1938, para os alunos dos IV, V e VI anos liceais. Possui 256 páginas numeradas e dez páginas não numeradas e uma página de errata. Surgindo as equações do 2° grau na parte destinada ao V ano. As informações sobre o autor não são colocadas na folha de rosto, somente no verso da folha de rosto possui sua rubrica, apresentada como condição da autenticidade do livro. A página seguinte informa que o manual foi "aprovado oficialmente". No V ano, o capítulo I fala sobre as "Equações e problemas do 2° grau" (24 pp) e está dividido em duas seções. A primeira entitula-se "Equações" (16 pp) e está subdividida em "A. nota histórica"; "B. Resolução gráfica" (2 pp); "C. Resolução algébrica" (14 pp). A segunda seção, "problemas do 2° grau" (4 pp), apresenta exemplos de resolução de problemas envolvendo equações do 2° grau. O capítulo termina com um quadro resumindo as principais idéias que o aluno deve ter presente na resolução de uma equação, sequido por exercícios (94 pp). O manual tem um formato pequeno, mas aida maior que os anteriores (14,7 x 20,8cm). A letra é usual, com entrelinhamento reduzido e o texto organizado por parágrafos numerados. Contém figuras que são resoluções gráficas das equações e apresenta no "plano de eixos" a representação geométrica dos números complexos. Começa a aparecer termos como "porquê?" "porque razão...", como se descobriu essa parcela?". Agora vamos mostrar a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0;$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a};$$

[15] AGUDO, F. D. **Álgebra e trigonometria**. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco, 1938.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{(b)^2}{(2a)^2} = \frac{(b)^2}{(2a)^2} - \frac{c}{a} ;$$

$$(x + b/2a)^2 = b^2/4a^2 - c/a ;$$

$$= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} ;$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

<u>J. Jorge G. Calado (Compêndio de Álgebra)</u>[16]*:* Este manual foi publicado em 1960, sendo que a edição não foi informada. É um único livro, destinado aos alunos do 2° ciclo do liceu e tem 419 páginas. A parte que fala sobre Equação do 2° grau é falada no 9° ano. Neste livro, existem dois capítulos referentes às equações do 2º grau e sua aplicação e resolução de problemas (cap XX e XXI). O capítulo XX traz "Equações Numéricas" (3 pp), "Resolução Algébrica" (16 pp) e "Equações Literais" (2 pp) e termina com exercícios e soluções (5 pp). O capítulo XXI dedica-se aos problemas do 2° grau (8 pp). Contém uma seção chamada "problemas literais – condições de possibilidade" (4 pp) e um conjunto de exercícios e soluções (3 pp). Suas dimensões são (16,8 x 23,7 cm) bem maiores que os livros anteriores. A letra é maior, mas o entrelinhamento continua a ser apertado. Não aparece em nenhum

[16] CALADO, J. J. G. **Compêndio de álgebra**. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco, 1960.

capítulo alguma figura ou tabela. Agora vamos mostrar a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau.

309 – Fórmula resolvente – Consideremos agora a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

na qual supomos $a \neq 0$.
Para resolvermos esta equação, podemos proceder como foi indicado no número anterior e, para isso:
(1) comecemos por dividir ambos os seus membros por a – coeficiente de x^2.
Obteremos então a equação equivalente

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

(2) ou $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

(3) Adicionamos agora a ambos os membros da equação a expressão $\frac{b^2}{4a^2}$ quadrado de metade do coeficiente de x.

Deste modo se obterá a equação

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ou ainda, $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

(4) Ora o 1° membro desta equação é o desenvolvimento do quadrado do binômio $x + \frac{b}{2a}$

donde resulta que a equação anterior se pode escrever sob a forma:

$$(x + b/2a)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

(5) Se $b^2 - 4ac$ for positivo ou nulo, a equação anterior é equivalente a equação:

$$(x + b/2a)^2 - [\sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}\,]^2 = 0$$

ou $\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$

donde resulta $x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$ e portanto $x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Vemos assim que a equação: $ax^2 + bx + c = 0$, admite duas raízes: x' e x" dadas pelas fórmulas:

$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Que podem ser reunidas na única fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Antonio de Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e Antonio Augusto Lopes (Compêndio de Matemática)[17]*:* Este livro contém 280 páginas, foi publicado em 1970, é considerado o único livro existente na altura para os alunos do 9º ano da escolaridade, contendo no verso do rosto a informação: “Todos os exemplares são numerados e autenticados pelo Ministério da Educação Nacional”. Não é dada informação sobre os autores. O tópico das equações do 2º grau é apresentado no capítulo I, com o título “Questões de linguagem, Inequações do 1° grau, Equações do 2° grau” (47 pp). Também se incluem assuntos sobre álgebra e lógica. O capítulo é composto por 12 seções numeradas, com subtítulos. Este manual tem um formato um pouco mais reduzido que o anterior (16,3x22,9cm). Está escrito em linguagem natural muito sintética e fortemente impregnada de linguagem algébrica, com elementos da simbologia lógica e da teoria dos conjuntos. O corpo de letra é o usual e o entrelinhamento reduzido. Não possui figuras, tabelas e diagramas, mas começa a existir, quanto à grafia, embora sóbrio, algum cuidado, surgindo a vermelho forte certos subtítulos como “Problemas”, “Exercícios”, “Soluções”, bem como uma caixa

[17] COSTA, A. A.; ANJOS, A. O.; LOPES, A. A. **Compêndio de matemática**. Porto: Porto Editora, 1970.

envolvendo a fórmula resolvente. Agora vamos mostrar a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau.

(4) Se b e c são diferentes de 0 (zero), o processo de resolução pode ser o que observamos nos exemplos apresentados.

$ax^2 + bx + c = 0 <> x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ porque?

$$<> x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$<> (x + b/2a)^2 - (b^2/4a^2 – c/a) = 0$$

$$<> (x + b/2a)^2 - (b^2 - 4ac)/4a^2 = 0$$

$$<> (x + b/2a)^2 - [\sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}]^2 = 0$$

$$<>\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$<> x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0 \vee x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 0$$

$$<> x = - \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$<> x = - b - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \vee x = - b + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Obviamente, a equação só é possível quando $b^2 - 4ac > 0$... Porque?
(5) Agrupando as duas igualdades anteriores, pode escrever-se:

$$X = \frac{- b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Antonio de Almeida Costa, Alfredo Osório dos Anjos e Antonio Augusto Lopes (Matemática Jovem)[18]: Este manual possui 327 páginas, foi publicado em 1987, destina-se aos alunos do 9° ano de escolaridade e foi na sua época muito usado. As equações do 2° grau são mostradas no capítulo 5, com o título "Problemas e

[18] COSTA, A. A.; ANJOS, A. O.; LOPES, A. A. **Matemática jovem**. Porto: Porto Editora, 1987.

Equações do 2° Grau” (15 pp). O capítulo é dividido em quatro partes: Equações do 2° Grau em IR” (8 pp), “Problemas do 2º Grau” (2 pp), a que se segue um conjunto de tarefa designadas por “Atividades complementares” (3 pp) e um novo conjunto intitulado “Atividades de revisão “ (2 pp) e as respectivas soluções. Este livro tem o mesmo formato que o anterior (16,3 x 22,9cm). Não existem parágrafos numerados, mas há identificação por pontos, de 1 a 12. O texto tem a linguagem algébrica mais dominante que a usual, que é, muitas vezes, abreviada. Usam-se, com muita freqüência, os símbolos ↔, e V. A letra é usual e o entrelinhamento é reduzido. O grafismo continua sóbrio, mas denota maior atenção, surgindo a azul forte certos subtítulos e a azul fraco diversas frases e enunciados e a caixa que enquadra a fórmula resolvente. Apresenta uma tabela em que estão compiladas sete equações de 1° e 2° grau, indicando os coeficientes do polinômio do 1° membro e um quadro sem cor de fundo, onde se indica a definição de equação do 2° grau. Agora vamos mostrar a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau.

Este caso pode reduzir-se ao anterior:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$(6)\ x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(b/4a^2)^2 - c/a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{b^2/4a^2 - c/a}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}$$

$$(7)\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Vamos reter esta fórmula

$$X = -\frac{\text{Coeficiente de } x \pm \sqrt{\text{quadrado do coeficiente de } x - \text{quatro vezes o produto do coeficiente de } x \text{ pelo termo independente}}}{2 \text{ vezes o coeficiente de } x^2}$$

Maria Augusta E. Neves, Luis Guerreiro e Armando Neves (Matemática 9)[19]*:* Este livro foi publicado em 2004, destina-se aos alunos do 9° ano de escolaridade e é constituído por dois volumes. O primeiro volume, com 128 páginas, contém quatro capítulos (probabilidade e estatística; Números reais e Inequações; Sistemas de equações; Equações do 2° grau) e o segundo volume, com 144 páginas contém outros quatro capítulos (proporcionalidade inversa e representações gráficas; Trigonometria; Circunferência, polígonos e rotações, Sólidos geométricos). É um dos livros mais usados nesta época, se não o mais usado. Não é feita nenhuma apresentação dos autores. Este manual tem um formato maior que os anteriores (20,3 x 28,6 cm), sem pontos ou parágrafos numerados. As frases são, na sua maioria, curtas e diretas. O texto está escrito numa mistura de linguagem natural e linguagem algébrica, com predomínio da linguagem algébrica. O corpo de letra é o usual e o entrelinhamento é reduzido. apresenta muitas figuras e um grafismo bastante trabalhado, com espaços diferenciados dentro da página, usa bastante cores, marcas especiais, etc. Todos os tópicos são montados iguais, com duas páginas com exposição e exemplos e duas páginas com exercícios. No fim de cada seção aparece um resumo de 7 a 10 linhas sobre o assunto abordado. Agora vamos mostrar a demonstração da fórmula de resolução de uma equação do 2° grau.

Nota: Será difícil deduzir a fórmula resolvente?
Acompanhe esta dedução.

$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Dividem-se por a os termos da equação

[19] NEVES, M. A. F.; GUERREIRO, L.; NEVES, A. **Matemática 9**. 1ª ed. Porto: Porto Editora, 2004.

$$x^2 + \frac{b\,x}{a} + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b\,x}{a} = -\,\frac{c}{a}$$

Adiciona-se a cada membro $\frac{b^2}{4a^2}$ de modo a formar o quadrado de um binômio

$$x^2 + \frac{b\,x}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \qquad <>$$

$$<> (x + b/2a)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Aplica-se a definição de raiz quadrada.

$$X + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{(b^2 - 4ac)/4a^2}$$

Simplifica-se a expressão

$$X = -\,\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = -\,\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula resolvente de qualquer equação do 2º grau

4.4 Aulas Assistidas

Realizamos esta atividade para confirmar as impressões que tivemos sobre as professoras com a ajuda das outras três atividades já mencionadas. Além disso, também tentamos observar como os alunos reagiam ao discurso das duas professoras, o que já nos serviu para começar a responder nossa segunda pergunta dos questionamentos do estudo. Assistimos às aulas das professoras em três dias diferentes. Estas aulas foram assistidas em turmas do ensino fundamental e médio. Todas as aulas foram registradas em nosso caderno de pesquisa. Ao fim das aulas conversávamos com as professoras sobre as referidas aulas e sobre quais tipos de concepções pensamos que as mesmas abordaram. As descrições das aulas estarão no próximo capítulo junto com a análise das mesmas.

4.5 Conversa com os alunos

A ultima atividade desta pesquisa de campo foi uma pequena entrevista com três alunos de cada professora. Esta conversa informal teve como objetivos entender qual a ressonância das crenças e concepções das professoras sobre álgebra em alguns de seus alunos e para ter mais um acesso a outras aulas que não assistimos através das respostas dos alunos. Os três alunos foram selecionados, em concordância com as professoras, de acordo com os seguintes critérios: escolhemos um aluno, considerado muito bom, outro, considerado mediano e um considerado ruim. Essa divisão foi pensada de forma que fosse possível ter opiniões diferenciadas, mas levando em conta que um aluno muito bom pode perceber coisas que outros não percebem e um aluno ruim pode distorcer os fatos de forma a truncar informações ou pode simplesmente perceber as situações de aula por outros olhares. Pensamos que tendo pelo menos um aluno considerado muito bom, um aluno considerado regular e um aluno considerado ruim que poderíamos ter uma idéia geral dos alunos que estejam na sala em um destes grupos. Assim quem sabe podemos obter alguns indícios e pistas do que alguns alunos perceberam nas aulas e pensam sobre álgebra para confrontar com as informações e dados coletados com as professoras nas outras atividades já descritas (SANTOS-WAGNER, 2008).

Dê dois exemplos de problemas de álgebra. (não precisa resolvê-los)

Dê dois exemplos de exercícios de álgebra. (não precisa resolvê-los)

Acreditamos ao pensar nestes itens que estes dois pedidos nos dão a possibilidade de perceber até que ponto os alunos escolhidos têm comportamentos parecidos com o professor e o que pensam que sejam atividades de álgebra ou que caracterizam as mesmas. Ao apresentar problemas e exercícios de álgebra pudemos observar o estilo de linguagem usada por eles e comparar com a do professor. É importante destacar que foi necessário explicar, com uma breve apresentação de conteúdos, o que é álgebra para os alunos, pois alguns não conheciam o termo. Portanto, dissemos aos mesmos quais dos conteúdos por eles estudados fazem parte deste campo da matemática, segundo nossas próprias crenças. Esse acontecimento nos revelou um fato preocupante sobre a formação desses alunos, já que os mesmos não estão em séries iniciais da Educação Básica e, por isso, esperávamos que tivessem alguma noção sobre o que é álgebra ou pelo menos o que já tinham estudado sobre o assunto. A seguir, o roteiro da conversa com esses alunos.

O que você geralmente procura nos exercícios de álgebra?

Expressões e nomes de objetos matemáticos. ( )
Pistas sobre o que deve fazer para resolvê-los ( )
Se há todos os dados necessários para resolvê-los ( )

Nesta pergunta os alunos poderiam responder até mais do que uma das opções. Também foi possível observar um pouco de como esses estudantes pensam no momento em que estão resolvendo exercícios de álgebra. Além disso, a escolha juntamente com a justificativa da mesma nos deu uma pista de como as crenças da professora influenciam as concepções dos estudantes.

Quais dessas palavras você acha que têm relação com álgebra: Regras, exatidão, métodos, raciocínio, imaginação, senso comum? Pode escolher mais de uma.

Quais das palavras da pergunta anterior você acha que seu professor escolheria?

E dessas palavras (praticar, explicação, memorização, investigar, pensar, discussão). Quais delas você mais relaciona com álgebra? Quais o seu professor escolheria?

Esta série de perguntas nos serviu para iniciar a comparação das crenças das professoras e dos alunos a partir da perspectiva dos alunos. Ao evidenciarem as palavras que eles pensam estarem relacionadas à álgebra com palavras, as quais eles pensam que suas respectivas professoras relacionam com álgebra, os alunos estavam nos apresentando uma visão indireta do modo como eles percebem os discursos presentes na aula da professora e o que se tornou uma verdade para eles. Ou seja, tivemos a oportunidade de observar mais uma vez qual a ressonância das crenças da professora nesses alunos. Claro que precisamos ter ciência de que temos, com estas respostas, um primeiro olhar sobre a fala dos alunos do que percebem e pensam sobre estes questionamentos e que precisaríamos ouvir mais alunos e de ter assistido a mais aulas observando estes alunos e provavelmente conversar com eles sobre atividades algébricas que eles resolveram e procurar compreender como eles pensam sobre os conceitos usados em álgebra.

O que você acha que seu professor espera de você? O que você mais sabe sobre álgebra? Você gostaria de saber tudo sobre álgebra?

Estas perguntas têm o objetivo de nos ajudar a entender um pouco mais sobre o que os alunos pensam sobre álgebra. Achamos que essa idéia nos permitiria fazer um paralelo com as crenças que, a esta altura, já suspeitamos que a professora tenha. Além disso, temos a chance de interpretar o que os alunos falam e contrapor isto com as informações coletadas com as professoras. Isso pode nos permitir cruzar informações e estar triangulando se nossos dados têm evidência e respondem a alguns de nossos questionamentos, como indicam Fiorentini e Lorenzato (2006). Por outro lado temos oportunidades de tomada de consciência dos professores e nossa na hora em que compartilhamos com as professoras as nossas análises preliminares junto com falas dos alunos e nossas interpretações dessas.

Na sua opinião, para que serve álgebra?

Também é possível observar, de forma indireta, qual é o discurso das professoras sobre a álgebra em si. Dependendo do que os alunos responderem nesta pergunta poderemos chegar mais perto da realidade sobre o modo de pensar das professoras.

Acreditamos que estas atividades podem ser capazes de nos fornecer uma aproximação bastante precisa do que os professores pensam sobre álgebra e seu ensino. No próximo capítulo trazemos as análises juntamente com as impressões que tivemos durante a realização das atividades que descrevemos aqui.

5. Análise dos Dados

Este capítulo tem como objetivo apresentar nossas interpretações e conclusões a respeito das conversas e atividades que realizamos com os professores e os alunos de alguns deles. Apesar da não realização de todas as atividades com os cinco professores que iniciaram a pesquisa de campo, acreditamos que será de bom proveito apresentar uma análise, mesmo que preliminar, das entrevistas dos três professores que, por motivos já esclarecidos anteriormente, não participaram das demais atividades.

Dividimos as análises em seis seções de acordo com as atividades, sendo as cinco primeiras destinadas a uma discussão individual das respostas e informações fornecidas pelos professores em cada uma destas atividades e pelos alunos, no caso da última atividade. Destacamos as frases que julgamos importantes nas falas dos participantes. Na sexta seção fazemos uma análise geral das discussões apresentadas nas outras seções.

5.1 As entrevistas

Como já dissemos anteriormente estas entrevistas contam têm como objetivo descobrir as crenças e concepções dos professores com relação à matemática e ao ensino de matemática, à álgebra e ao ensino de álgebra. Portanto, procuramos fazer nossas análises de acordo com cada um destes objetivos. As análises são feitas através de destaques (grifamos palavras importantes) nas falas das professoras.

Professor A

Com relação à visão que este professor tem sobre a matemática e o ensino de matemática podemos destacar os seguintes trechos das entrevistas:

> **Entrevistador:** O que é matemática?
> **Professor A:** *Ponte para a realidade*[20]: Entendo a matemática como uma espécie de *simulador do real*. Um *facilitador* para o entendimento da mesma. (Dez/2008)

As primeiras impressões que tivemos foi que, de acordo com as palavras grifadas, o professor percebe a matemática mais como uma ferramenta para compreender a realidade. O trecho: "*simulador do real*", presente na fala do professor, nos deu a sensação de que ele entende a matemática de um modo próximo à resolução de problemas, no sentido de Ernest (1989), justamente pelo fato de a palavra real nos lembrar algo dinâmico que sempre se modifica. Outros momentos da entrevista nos ajudaram a compreender um pouco mais de como o professor pensa o que é a matemática.

> **E:** Quais conteúdos matemáticos são mais importantes para o aprendizado de matemática? Por que?
> **PA:** Matemática financeira: É importante pela *aplicabilidade* que tem. (Dez/2008)
>
> **E:** Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da matemática? Qual a mais Atrativa? Qual a mais Chata?
> **PA:** Contextos (*real*): quanto mais se aproxima da *realidade do aluno*, melhor é o desenvolvimento deste.
> Mais atrativa - diversão – lúdico: Jogos matemáticos são muito atraentes.
> Mais chata - formal – teoria demais: aulas monótonas, cuspe e giz. (Dez/2008)

As respostas do professor nos mostram o quanto ele se preocupa com a aplicabilidade das coisas que ensina parecendo confirmar a impressão que tivemos com trechos da primeira resposta. No entanto, acreditamos que é importante

[20] Grifo nosso.

ressaltar que a expressão, “realidade do aluno” pode representar um indício de uma visão mais utilitarista do que de resolução de problemas (ERNEST, 1989), pois existe a possibilidade de o professor acreditar que a matemática é um modelo pronto do real. Sendo assim, aproximar a matemática da realidade do aluno seria apenas adequar o pronto às coisas que o aluno vive. Acreditamos que isso é bem diferente de pegar o real e construir um modelo dele. Percebemos também como precisamos de mais informações para sabermos de fato o que o professor pensa sobre matemática e como concebe a mesma.

Quanto às crenças e concepções que o professor tem sobre a álgebra e ao ensino de álgebra, podemos destacar os seguintes trechos da entrevista:

> **E:** O que é álgebra?
> **PA:** *Generalizar, simplificar, linguagem*: É como a *matemática se comunica*. Permeia toda a matemática. Facilitador para a resolução de problemas. (Dez/2008)
>
> **E:** Diga quantas palavras relacionadas à álgebra você conseguir.
> **PA:** Matemática, *sistemas, função, fórmula*,... , propagandas.(Dez/2008)

Nos parece que, com estas palavras, o professor entende a álgebra como uma forma de expressão da matemática. Há indícios presentes em sua fala que nos levam a crer numa mistura de tendências letristas com pensamento formal (LINS; GIMENEZ, 1997) para tentar caracterizar a álgebra. As duas informações presentes neste trecho da entrevista nos causaram a sensação de que o professor percebe a álgebra como generalização, porém de maneira um pouco diferente do que descreve Usiskin (1988/1995). Ao que parece o professor enxerga mais a álgebra como uma estrutura de linguagem matemática que respeita algumas regras. A seqüência da entrevista nos elucidou algumas dúvidas.

E: Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que seria prioridade?
PA: _Interpretação_: Mostra interesse em fazer com que os alunos compreendam o processo de criação da linguagem matemática. (Dez/2008).

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da álgebra? Qual a mais atrativa? Qual a mais Chata?
PA: Não sabe: Não se julga experiente o suficiente para responder.
- faz dinâmica com entendimento: tenta apresentar a _linguagem algébrica_ através de dinâmicas de grupo.
- formal: Acredita que o _formalismo excessivo_ da álgebra interfere negativamente na motivação dos alunos. (Dez/2008).

O depoimento acima nos ajuda a confirmar algumas impressões já causadas anteriormente. Nos parece que, de fato o professor entende a álgebra como uma estrutura de linguagem. Pode-se notar grande preocupação em desenvolver isso em seus alunos em sua fala. Esse comportamento nos causa a impressão de uma tendência letrista de caracterização da atividade algébrica no sentido que Lins e Gimenez (1997) descrevem. Entretanto o fato de o professor dizer que muito formalismo interfere negativamente na aprendizagem o afasta um pouco dessa linha.

Com base nestas entrevistas, tivemos a impressão de que este é um professor cujas crenças e concepções sobre matemática apresentam algumas características das visões utilitarista e de resolução de problemas de acordo com Ernest (1989). E parece que ele tem as concepções de álgebra como aritmética generalizada e álgebra como estudo de estruturas descritas por Usiskin (1988/1995). Cabe ressaltar que o professor não se encaixa perfeitamente em nenhuma das visões, concepções ou tendências que discutimos neste trabalho, existem apenas alguns indícios e algumas aproximações em seu comportamento.

Professor B

Com relação às crenças e concepções sobre a matemática e seu ensino podemos destacar algumas evidências na fala do professor B que nos trazem informações importantes.

> **Entrevistador:** O que é matemática?
> **Professor B:** É a ciência que *trabalha com fórmulas*, com números, com figuras. Numa visão mais informal. Gosto *muito de números, das fórmulas, expressões*. Conta é o mínimo. (Fev/2009).
>
> **E:** Por que escolheu essa graduação?
> **PB:** desde garoto eu gostava de matemática. No início eu gostava continhas e probleminhas, depois dos jogos raciocínio. *Acho que química e física é uma aplicação da matemática*. Fiz apenas licenciatura. (Fev/2009).
>
> **E:** Por que a matemática é tão importante na escola?
> **PB:** Eu acho que *a matemática rege tudo*. Por exemplo, a televisão funciona por causa da matemática. Nós não percebemos isso porque, no geral, as pessoas não se importam com os motivos das coisas acontecerem, mas se isso acontecesse à matemática teria mais valor para as pessoas. Acho que o aluno precisa de base, ele precisa *aprender matemática de uma forma que possa escolher qualquer profissão*. Além disso, *desperta o raciocínio, isso não só na matemática*. (Fev/2009).

Essas três perguntas nos causaram a impressão de que o professor tende a se expressar segundo uma visão utilitarista da matemática, no sentido do que Ernest (1989) descreve. Podemos confirmar essas sensações nos grifos apresentados nas duas primeiras perguntas, principalmente quando afirma que outras ciências são aplicações de matemática.

Ainda com este trecho das entrevistas já foi possível observar algumas informações sobre as crenças sobre álgebra do professor. Nos pareceu, durante a conversa, que a afirmação feita sobre o gosto pelas fórmulas e pela presença das fórmulas na matemática, tinha uma influência de uma tendência letrista da álgebra, ou até mesmo uma tendência de perceber a álgebra como um catálogo de fórmulas. Outros trechos das entrevistas parecem confirmar nossas impressões.

E: Por que licenciatura?
PB: Eu queria ter contato com pessoas, gosto de ensinar, de formar opiniões, as coisas que aprendi têm que ir para frente. (Fev/2009).

E: Qual o objetivo do ensino de matemática?
PB: Na minha opinião é *mudança de vida*, pois com matemática você se torna capaz de *aprender outras coisas, de outras áreas*. (Fev/2009).

E: Quais conteúdos de matemática que você acredita serem mais importantes para o aprendizado da mesma?
PB: *Funções*. Dominando isso está ótimo. Exemplo: *geometria é cheia de funções*. (Fev/2009).

Achamos que seria interessante destacar a primeira destas três perguntas, pois, de fato, ela representa parte da motivação do professor. Além disso, a opinião presente na resposta da segunda pergunta, sobre o objetivo do ensino de matemática, completa a motivação do próprio professor e acreditamos que este possa ser um ponto importante na influência que o próprio tenha em seus alunos. Entre outras coisas, quando responde que o estudo das funções acaba sendo o conteúdo mais importante para o aprendizado de matemática nos deu a impressão de uma concepção mais voltada para a álgebra como relação entre grandezas. Em outros momentos das entrevistas, podemos observar mais evidências sobre o que esse professor pensa sobre álgebra e o ensino de álgebra.

E: O que é álgebra?
PB: É a parte da matemática que trabalha, *com fórmulas, com letras e números, com as relações entre essas coisas*. Serve para generalizar. Exemplo: *um raciocínio numérico pode ser expresso com álgebra*. (Fev/2009).

E: Diga coisas que você julga álgebra.
PB: Seqüências, *Polinômios até pode ser, só acho muito mecânico*, sistemas. *Tudo que equacionamos é álgebra*. *Não acho que a álgebra seja algo mecânico*, acho que vai mais do raciocínio, uma *forma de pensar*. (Fev/2009).

E: Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que você priorizaria?
PB: *Equações e sistemas*. Acho que essas coisas são importantes para o futuro. (Fev/2009).

PB: *Existem momentos que as letras assumem papéis diferentes*: incógnitas, variáveis... (Fev/2009).

Esta parte da entrevista do professor nos pareceu muito esclarecedora quanto às crenças e concepções que o mesmo tem sobre álgebra. De acordo com o discurso apresentado neste recorte, nos parece que este professor entende a álgebra como uma espécie de representação matemática de nosso raciocínio. Isso poderia ser interpretado como uma extensão do pensamento formal na forma apresentada por Lins e Gimenez (1997), embora também existam evidências de uma tendência letrista no entendimento da atividade algébrica.

Diferentemente dos outros professores, o professor B parece ter uma noção mais ampla das possibilidades, ou das manifestações da álgebra. É possível perceber isso ao observarmos a declaração sobre a importância de os alunos terem consciência de que as letras da álgebra têm papéis diferentes em momentos diferentes. Outro ponto que nos chamou a atenção foi o momento no qual o professor nos fala sobre o que é fazer álgebra: "*Não acho que seja algo mecânico*"; Nesta fala, ficamos com a impressão de que o professor entende o ensino de álgebra como algo em desenvolvimento e não completamente pronto.

Estas impressões que tivemos ao longo das entrevistas com o professor nos confirmaram a idéia de que seriam necessárias outras atividades em torno do assunto para que pudéssemos ter uma noção mais fiel à realidade sobre as crenças dos professores. Percebemos que muitas vezes eles oscilam entre as tendências e as concepções, como nas duas próximas declarações deste professor.

> **E:** Se você tivesse que explicar o que é um problema de álgebra, para alguém que nunca ouviu falar sobre o assunto, o que você diria?
> **PB:** Primeira, mostrar que *letras representam números*. E depois daria uns exemplos, como: *densidade, que relaciona volume e massa*. (Fev/2009).

> **E:** Quais os erros mais preocupantes na álgebra?
> **PB:** Tem um problema: Quando dizemos assim, *"2 = x" as pessoas não acreditam que "x = 2"*, eles só percebem a ida e não a volta. Isso é um erro muito grave. Outro exemplo: *x + 2 = 6 ai passo o dois para outro lado ai vai x + 2 = 6 = x = 6 – 2, veja essas coisas não tem relação* e só acontecem por que os alunos não entendem a igualdade. (Fev/2009).

Ao afirmar que as pessoas não conseguem compreender o sentido de igualdade, o professor demonstra sua preocupação com a linguagem da álgebra mais uma vez. Também pudemos perceber outra evidência do entendimento da álgebra como um estudo das relações entre grandezas, no sentido do que Usiskin (1988/1995) comenta. Entretanto essa fala pode nos levar também a uma interpretação de que professor B tenha duas concepções diferentes de álgebra, já que a expressão "*passo o dois para outro lado*" nos lembra muito o estudo de técnicas para resolver certos problemas. Outro ponto importante a destacar aqui é a preocupação dele do uso inadequado e sem compreensão de alguns alunos do sinal de igualdade.

Por fim, pareceu-nos que o professor B se aproxima de uma caracterização que não é baseada em conteúdos algébricos, ou seja, não apresenta conteúdos que julga serem algébricos. Na verdade, o professor faz algo parecido com o pensamento formal indicado por Lins e Gimenez (1997) ao caracterizar a atividade algébrica. Também terminamos a entrevista sobre álgebra com a impressão de que o professor B tem uma concepção que pode ser interpretada como o estudo de relação entre grandezas. Quanto ao modo de entender a matemática, num sentido mais geral, acreditamos que o professor tenha uma visão que mistura a utilitarista e resolução de problemas, descritas por Ernest (1989).

Professora X

Faremos aqui apenas alguns comentários preliminares, ou seja, vamos apresentar as interpretações de modo um pouco diferente do que fizemos com os professores A e B e do que faremos com a professora Z. Isso se deve ao fato de a professora X ter realizado as outras atividades da pesquisa conosco. Portanto, não tentamos tirar considerações conclusivas sobre as crenças e concepções desta professora nesta seção que relata nossas interpretações a partir das entrevistas sobre matemática e álgebra. Deixamos para a sexta seção deste capítulo para comentarmos em mais detalhes sobre a professora X. Com relação às crenças que esta professora tem sobre álgebra podemos destacar os seguintes trechos das entrevistas.

> **Entrevistador:** O que é álgebra?
> **Professora X:** Para resolvermos determinada situação, lançamos mão da álgebra, ou seja, do *uso de letras para representar valores*. Assim, quando você está frente a uma situação-problema *usa-se a álgebra para resolvê-la*. É uma ferramenta da matemática usada para *simbolizar*. O problema dos alunos é o monte de letras misturadas com números e eles têm dificuldade, até então, para compreender isso. *Eles não entendem o que expressões representam*.
> (*Perguntei o que é importante, entender o significado ou resolver exercícios)*. Os dois, *resolver significa que ele entendeu o significado de cada peça ou símbolo*. (Mar/2009).
>
> **E:** E uma profissão que podemos associar com álgebra?
> **PX:** Pedreiro, engenheiro, na verdade a álgebra está presente em todas as profissões, mas de formas diferentes. A álgebra nunca seria medicina (dúvidas). Tem coisas que a gente *ensina que não sabemos onde aplicar*. Não consigo ter certeza, *a medicina pode até ter algum código*. (Mar/2009).
>
> **E:** Álgebra ou geometria?
> **PX:** Ensino muito pouco geometria, pois não tenho tempo de cumprir esse conteúdo. *Acredito que seria bom se estivesse separado*, mas por causa do tempo. Prefiro, álgebra até por causa do contato maior que tenho com esse assunto, mas só por isso gosto das duas coisas igualmente. A geometria mexe com formas, ângulos e a *álgebra é uma ferramenta*, portanto a diferença está nas abordagens. (Mar/2009).

Nos parece que a professora entende a álgebra como uma forma de simbolizar situações, o que é um pouco diferente de simbolizar ou simular a realidade. Uma noção muito presente na fala da professora é a idéia de códigos ou simbolismo o que nos parece indicar uma forte tendência a caracterizar a álgebra como um estudo das notações. É possível encontrar indícios dessas impressões nas duas primeiras perguntas da citação. Na primeira pergunta, a afirmação: "usa-se a álgebra para resolver uma situação-problema", se aproxima muito do discurso de Usiskin (1988/1995) sobre a álgebra como o estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, o que pode ser reforçado por certa tendência letrista que, aparentemente, se nota durante a fala da professora.

É interessante notar que, para comparar a álgebra com outra profissão, a professora recorre a analisar profissões e tentar entender como a álgebra se aplica a elas. Na verdade esta não seria a única maneira de comparar, é possível fazer essa comparação através dos comportamentos que as pessoas exercem em determinada profissão e os comportamentos aparentes quando se lida com álgebra, mas não foi isso que aconteceu. Essa busca por aplicações, que já foi demonstrada pelos outros professores, pode representar algo próximo do que Ernest (1989) diz quando descreve sua visão utilitarista da matemática.

Por fim, a frase: "Acredito que seria bom se estivesse separado", grifada na terceira pergunta, aparentemente expressa a idéia de uma caracterização da atividade algébrica a partir de determinados conteúdos, o que se aproxima de uma das tendências descritas por Lins e Gimenez (1997). Podemos ainda, observar outros indícios sobre como a professora pensa a respeito da álgebra no trecho:

> **E:** Quais conteúdos matemáticos você julga como conteúdos algébricos?
> **PX:** *Polinômios, equações, expressões*. São coisas da álgebra porque, são *letras com valores*. Quando se fala em álgebra lembramos direto das letras. Funções também é álgebra. (Mar/2009).

Nesta fala, podem-se notar algumas confirmações sobre os indícios encontrados nos trechos anteriores. Ao declarar que polinômios, equações e expressões são coisas da álgebra porque se remetem a letras com valores, a professora X reforça nossa sensação de que ela segue uma tendência letrista no sentido de Lins e Gimenez (1997). Além disso, observamos também em outros trechos da entrevista mais um indício da concepção de álgebra como estudo de técnicas para resolver alguns problemas. Como já mencionamos antes vamos concluir as interpretações das crenças e concepções da professora X posteriormente. Vamos fazer isso após trazermos nossas interpretações e análises do que ela nos trouxe de informações nas outras atividades.

Professora Y

Como também conseguimos realizar todas as atividades com esta professora, nós colocaremos nossas impressões dela de forma preliminar como nós fizemos no caso da professora X. Iniciamos com as impressões que tivemos com as entrevistas que realizamos com esta professora, porém não tiramos conclusões definitivas com base apenas nestas impressões. Começamos pela visão de matemática da professora. Neste caso, podemos destacar os seguintes trechos das entrevistas:

> **Entrevistador:** O que é matemática?
> **Professora Y:** Nunca tive essa preocupação. Na verdade, não sinto uma adoração, tão grande como algumas pessoas, pela disciplina. O que eu queria era uma graduação, no começo fiz fisioterapia, mas não gostei. *Fiz matemática para seguir minha carreira no magistério*. Quando fui para a graduação vi muita coisa especifica. Aliás, vi muitas coisas que não tinha estudado, por exemplo: *análise, não gostei*. Eu preferia as matérias mais pedagógicas, foi mais fácil por causa do normal. (Dez/2008)

> **E:** Quais os motivos da tua escolha de graduação?
> **PY:** Sinto-me professora, mas não me vejo dando aula de história, por que acho que é muita palestra. *Matemática é mais calculo*, veja só as vezes me pego pensando no motivo pelo qual ensino as coisas que ensino, *várias coisas não sei como se aplicam*. (Dez/2008)

Estas duas respostas não nos mostram muita coisa sobre o que ela pensa que seja matemática. Entretanto, ao afirmar que não gostou do curso de análise na graduação nos revela alguns indícios de dificuldades com alguns pontos da estrutura da matemática. Se observarmos a resposta da segunda pergunta, temos a sensação de que a professora tem uma visão, de certa forma, limitada aos cálculos. Da mesma forma que os outros professores, a professora Y busca aplicabilidade nas coisas que ensina. Isso pode ser uma evidência de uma visão utilitarista. Em outros trechos podemos verificar novos indícios.

> **E:** O que você acha mais importante no aprendizado da matemática?
> **PY:** Acredito que os alunos precisam aprender são as coisas que eles usam no *dia-a-dia*. (...) preocupo-me muito com o *sentido prático das coisas.* (...) *no 7º ano o aluno tem que saber equações*. (Dez/2008).

Nos parece que a professora Y mantém sua visão de aplicabilidade da matemática com esse trecho. Cabe ressaltar a última frase, que aparentemente nos leva a crer numa caracterização de álgebra através de conteúdos específicos. Ainda sobre esse trecho, a sensação que tivemos foi que a professora tem grande preocupação com que seus alunos do 7º ano aprendam a resolver equações, o que nos causou a impressão de uma memorização de técnicas.

Apesar das poucas informações sobre matemática, acreditamos que a professora deu algumas respostas mais significativas com respeito às suas crenças e concepções sobre álgebra.

> **E:** O que é álgebra?
> **PY:** Sempre que penso em álgebra me lembro das *letrinhas e dos métodos para encontrar seus valores*. (*Perguntei se a álgebra era um espaço nebuloso)* Acho que sim, mas só no começo. (Dez/2008).
>
> **E:** Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que seria prioridade?
> **PY:** Esse seria um problema gigante. Acho que *me preocuparia com as operações com polinômios*, sem me preocupar muito com os monômios e por ai vai. Acho que isso o aluno vai precisar muito deste conhecimento. Preocupo-me muito com isso, o aluno precisa aprender o que ele vai usar no futuro. (Dez/2008).
>
> **E:** Diga conteúdos de matemática que acredita que sejam referentes à álgebra?
> **PY:** *Polinômios, Frações Algébricas, Equações Literais*. É o que lembro agora. Na minha cabeça *tudo que envolve incógnitas ou letras é álgebra*, mas tenho algumas dúvidas. Se eu fosse descrever a geometria, me lembraria das figuras, mas mesmo na geometria tem coisas que precisam da álgebra. Por exemplo, *quadrados perfeitos* têm aplicações geométricas. Para mim todas as coisas que relacionam *variáveis é álgebra*. (Dez/2008).

Nessa parte das entrevistas podemos notar algumas evidências interessantes. A afirmação: “álgebra me lembra letras e métodos para encontrar seus valores”, nos dá fortes indícios de uma visão de álgebra como estudo de técnicas para resolver certos tipos de problemas como descreve Usiskin (1988/1995). Além disso, nos parece que a professora tende mais a conceber as variáveis como incógnitas. Isso reforça a idéia que estamos tendo sobre sua concepção de álgebra. Apesar disso, a professora mostra preocupação com um estudo das estruturas quando se vê obrigada a reduzir os conteúdos por causa da situação apresentada na segunda pergunta. Mesmo assim, a impressão que tivemos neste inicio de diálogo com a professora Y nas entrevistas foi de uma preocupação com técnicas para manipular os símbolos. Nossa idéia sobre a concepção de álgebra da professora se reforça com a seguinte resposta:

> **E:** Se você tivesse que explicar para alguém que nunca ouviu falar de álgebra, como explicaria para que este entendesse facilmente?
> **PY:** É resolver um *problema com letrinhas*. (Dez/2008).

Professora Z

Esta professora também participou apenas na fase inicial da pesquisa. Trazemos nossas impressões sobre a visão que esta professora tem sobre matemática. Dos trechos da entrevista podemos destacar:

> **Entrevistador:** O que é matemática?
> **Professora Z:** Eu acho que é uma *ciência*. Ela tenta *modelar os comportamentos naturais*, do ser humano, das coisas que acontecem (sei lá). *Também se usa como linguagem* para o entendimento de outras ciências. Exemplo: na natureza, podemos modelar o crescimento de uma arvore é um modelo matemático (Mar/2009).
>
> **E:** Por que a matemática é tão importante no sistema educacional?
> **PZ:** A *matemática é uma ferramenta* que todos usam, independentemente das pessoas pensarem que sabem ou não (Mar/2009).
>
> **E:** Se a matemática fosse um animal, qual seria? Qual nunca seria?
> **PZ:** Não diria formiga, mas elas têm *comportamentos inteligentes*. Por outro lado, as formigas têm meio obediente demais e me da a impressão de que elas *não avançam*. Também poderia ser o bicho preguiça pelas *simplificações*. Acho que a formiga... (Mar/2009).

As declarações da professora foram muito seguras. Ela demonstrou, neste trecho, enxergar a matemática de modo um pouco diferente das últimas duas professoras. Nos parece que esta professora enxerga a matemática como um campo de criação da mente humana, no sentido do que fala Ernest (1989). Pode-se perceber este fato na primeira pergunta. Mesmo com isso, a professora Z também apresenta evidências de uma visão utilitarista da matemática na sua segunda resposta.

É interessante observar que, diferentemente dos outros professores, a caracterização da matemática não aconteceu de acordo com sua aplicabilidade, mas sim através de comportamentos que as pessoas têm quando lidam com matemática. Ainda podemos notar algumas outras evidências nos trechos:

> **E:** O que você acha mais importante no aprendizado da matemática?
> **PZ:** O importante no aprendizado da matemática é *questionar*, duvidar, não ter plena confiança no professor, que *faça experiências* com o ensinamento recebido, etc. (Jan/2009).
>
> **E:** Na sua opinião, qual o objetivo do ensino de matemática?
> **PZ:** Não é, formar matemáticos. Não quero que eles façam matemática. O ensino de matemática tem que servir a todos, embora ensinemos coisas que não façam parte da vida cotidiana mesmo das pessoas, temos que preparar as pessoas para que elas tenham uma *base matemática para qualquer profissão que eles escolham*. Tem o problema do dia-a-dia, essa palavra não quer dizer que é a matemática do super mercado (como muita gente acha), o dia-a-dia varia de profissão para profissão. (Jan/2009).

Observamos neste trecho que a professora mantém uma visão mais aberta sobre matemática, num sentido de investigação e criação. Parece-nos que a visão dela de matemática se aproxima do que Ernest (1989) chama de visão de matemática como resolução de problemas, onde estes são criados, inventados, formulados e resolvidos pelos seres humanos. Além disso, as situações matemáticas, as experiências com a matemática, os problemas e conceitos matemáticos podem e devem estar sempre abertos a questionamentos. Quanto ao ensino da disciplina, a idéia fixa da professora é a busca pela informação de um conhecimento geral sobre matemática para seus alunos.

5.2 Livros didáticos

Esta seção destina-se a apresentar algumas análises das opiniões expressas pelas professoras X e Y sobre alguns livros didáticos, que elas mesmas escolheram. As caracterizações que faremos aqui trazem consigo uma forte influência das impressões que tivemos das professoras nas entrevistas. Portanto, utilizamos esta atividade tanto para confirmar, ou refutar, algumas considerações e conclusões expostas na seção anterior como para nos aproximar mais de uma compreensão correta sobre as crenças das professoras. Ou seja, estávamos procurando triangular as informações obtidas nas respostas das entrevistas com os motivos delas e interpretações para a escolha dos livros (SANTOS-WAGNER, 2008). De forma semelhante à seção anterior, fazemos as análises das professoras separadamente.

Professora X

O primeiro livro escolhido pela professora foi o “Praticando matemática” de Álvaro Andrini (1993). A respeito deste livro, a professora fez bons comentários e uma ressalva. A ressalva se resumiu a não apresentação de exercícios que aplicam as teorias discutidas à vida prática. Nas palavras dela:

> acho muito boa a maneira como o autor coloca as frases que interessam, bastante exercícios. Tem coisas que ele define numa frase, acho que assim fica mais *prático* e fácil. Na verdade, acho que a *matemática poderia ser, pelo menos para os alunos, de um jeito mais prático* que não assustassem eles, sem esticar muito o assunto. (Sobre o livro: Praticando matemática de Álvaro Andrini (1993)). (Jun/2009)

Essas idéias, a princípio, nos causaram a impressão de um discurso, em alguns aspectos, platônico no sentido do que Ernest (1989) descreve. Essa impressão foi gerada a partir da declaração de que a matemática poderia ser ensinada de forma mais prática, o que nos lembra um entendimento da matemática como algo pronto. Por outro lado, a escolha deste livro reforça nossa idéia de que a professora segue uma linha letrista de caracterização da atividade algébrica, já que o referido livro adota uma abordagem unicamente simbólica da álgebra. Além disso, podemos identificar alguns indícios de um entendimento de álgebra como um estudo de métodos para resolver certos tipos de problemas. Ainda sobre este mesmo livro podemos observar algumas outras evidências na fala da professora sobre a abordagem da álgebra.

> <u>*os livros de hoje em dia, costumam colocar texto para introduzir o assunto, acho que poderiam ser mais diretos*</u>. Uma coisa que não gosto em alguns livros de hoje em dia é o fato de eles trazerem exercícios muito misturados, não seguem um aumento gradativo de dificuldades, vejo que o livro do Andrini tem essa preocupação, gosto disso. (Jun/2009)

Esta declaração nos leva, quase que diretamente, à idéia de que a professora X utiliza uma abordagem puramente letrista, o que pode representar uma má influência para a constituição das crenças sobre álgebra de seus alunos. Junto com isso, podemos entender que a professora de fato tende a uma visão platônica da matemática. Essas conclusões são baseadas em um livro que a professora X "elegeu" como o melhor dentre os 4 selecionados por ela. A seguir apresentamos alguns comentários sobre as afirmações que a professora fez a respeito dos outros livros.

> Gostei muito desse justamente pelo estilo. Veja, ele é bem direto, mostra um assunto de forma simples e já traz exercícios. (Sobre o livro: Matemática de Edwaldo Bianchini (1991)). (Jun/2009)

> Não gosto desse porque ele enrola muito. (Sobre o livro: Matemática – uma aventura do pensamento de Oscar Guelli (2001)). (Jun/2009)

> Esse é muito bom porque mescla álgebra com geometria, mas não tem muito bla bla bla, está vendo? (Sobre o livro: Tudo é matemática de Luiz Roberto Dante (2002)). (Jun/2009)

Um fato interessante pode ser destacado a partir destas falas da professora sobre esses livros. Segundo ela, é importante que um livro traga exercícios que apliquem as teorias abordadas pelo mesmo. Durante este momento da conversa, tivemos a sensação de que a professora tem um discurso muito parecido com o da concepção lingüístico-pragmática descrita por Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005). Acreditamos que estamos nos aproximando um pouco mais da maneira de pensar desta professora. Entretanto, acreditamos que seja melhor esperarmos pelas evidências que, possivelmente, surjam nas próximas três atividades, que nos ajudem a compreendê-la um pouco mais. Observemos agora os comentários que a professora Y fez sobre os livros escolhidos por ela.

Professora Y

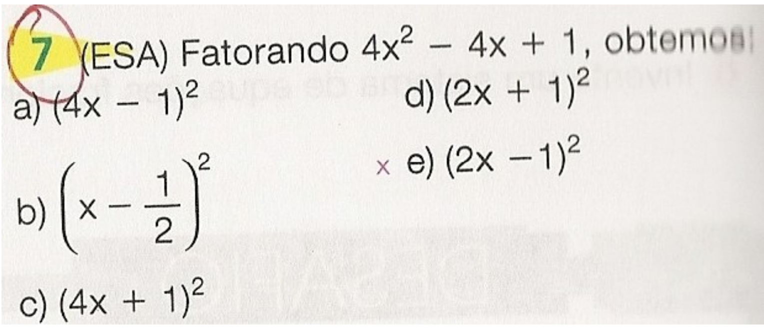
Esta professora não “elegeu” um dos livros que escolheu. Ao invés disso, fez várias considerações sobre os referidos livros além de destacar algumas questões que nos ajudaram muito a entender melhor sua forma de pensar. Coincidentemente, a professora Y também colocou o livro de Álvaro Andrini (1993) na sua seleção. Sobre este livro, ela fez as seguintes considerações.

> Gosto desse porque ... não que seja passo a passo, as explicações são simples e diretas. *Ele explica um determinado assunto, ai vem os exercícios para praticar*, os outros livros são mais detalhistas. Também tem muitos exercícios. (Sobre o livro: Praticando matemática de Álvaro Andrini (1993)). (Jun/2009)

De uma forma, até certo ponto, surpreendente a professora Y fez comentários muito parecidos com os da professora X no momento em que falou sobre este livro. A idéia sobre a importância de o livro trazer exercícios sobre uma parte pequena de uma teoria, nos lembra a concepção lingüístico-pragmática (FIORENTINI; FERNANDES; CRITÓVÃO, 2005), já que também se fala em praticar. Além disso, o livro citado apresenta uma série de exercícios de mesma natureza que, segundo a professora, ajudam a memorizar a teoria. Outros comentários ilustrativos são explicitados nas considerações feitas sobre os outros livros. Por exemplo, no livro Matemática e você (VIDIGAL; REGO; BARBOSA; SPIRA, 2002), a professora faz o seguinte comentário:

> Acho que *este livro leva o aluno a tirar suas próprias conclusões*. Olha, *nunca trabalhei dessa forma*, mas tem o problema do tempo. Nossa realidade não nos dá tanto tempo assim, *gostei do livro porque tem muitos exercícios*. (Sobre o livro: Matemática e você (VIDIGAL; REGO; BARBOSA; SPIRA, 2002)) (Jun/2009)

Observe que mais uma vez a professora Y destaca o fato de o livro ter vários exercícios, mas não parece que os exercícios que chamam a atenção dela sejam diferentes daqueles que lidam apenas com uma técnica de resolução. Estamos dizendo isso, pelo fato de a professora afirmar que nunca trabalhou de modo a levar os alunos até suas próprias conclusões. Acreditamos que seja difícil que um estudante tenha uma visão diferente da matemática se tiver acesso apenas aos exercícios de reprodução. Essa impressão que tivemos da professora se justifica nos exercícios que ela destaca em outros livros.



7 (ESA) Fatorando $4x^2 - 4x + 1$, obtemos

a) $(4x - 1)^2$

b) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$

c) $(4x + 1)^2$

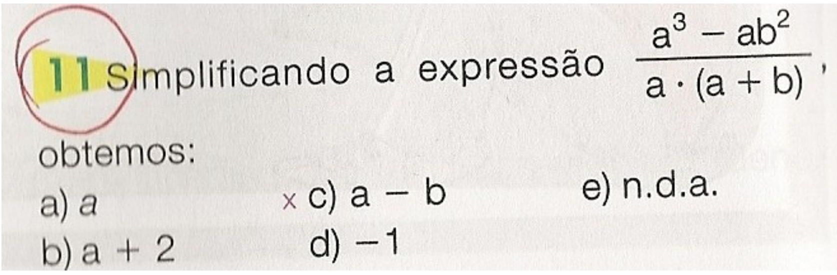
d) $(2x + 1)^2$

e) $(2x - 1)^2$

Figura 1: Exercício 7 do livro “Matemática: fazendo a diferença” (BONJORNO; BONJORNO; OLIVARES, 2006).

> Gosto de colocar questões de concurso para os alunos perceberem que o que fazemos aparece fora da escola. Eu acho que seria comum para meus alunos é uma questão como essa (7 p. 276), essa (11), seria uma questão difícil mais seria ótima para os alunos perceberem algumas *regras*. (Jun/2009).

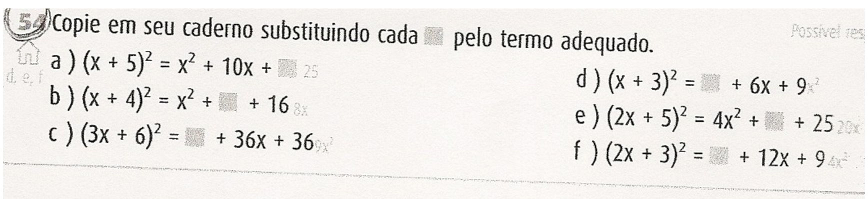
Para fazer sua análise dos livros didáticos a professora decidiu, por conta própria, observar como os mesmos tratavam o assunto produtos notáveis. Essa escolha nos dá a impressão de um pensamento voltado para o estudo da álgebra como estruturas, devido ao fato de este assunto nos lembrar o estudo da estrutura dos polinômios. Desta forma, se confrontarmos essa impressão com a que tivemos nas entrevistas, podemos perceber uma mudança no modo de pensar da professora Y com relação à álgebra. Nos parece ainda, que a professora tende a uma concepção de álgebra como um estudo de técnicas para resolver certos problemas, porém não podemos negar o fato de a preocupação da professora com exercícios do tipo posto acima nos remeter a outros tipos de concepção. A seguir, observamos outros exercícios destacados por ela neste livro:


11 Simplificando a expressão $\frac{a^3 - ab^2}{a \cdot (a + b)}$, obtemos:

a) a
b) $a + 2$
x c) $a - b$
d) -1
e) n.d.a.

Figura 2: Exercício 11 do livro "Matemática: fazendo a diferença" (BONJORNO; BONJORNO; OLIVARES, 2006).

Talvez este exercício seja capaz de desequilibrar a tal mudança que citamos anteriormente. Enquanto o primeiro nos parece ser um exercício de pura aplicação da teoria, este até aplica a teoria também, mas a presença dele junto com o fato de a professora identificá-lo como um exercício importante, que ajudaria a perceber regras, nos leva a pensar na idéia de a concepção de álgebra como estudo de métodos para resolver certos problemas (USISKIN, 1988/1995). Uma informação importante é encontrada no seguinte recorte:


54 Copie em seu caderno substituindo cada ▒ pelo termo adequado.

a) $(x + 5)^2 = x^2 + 10x +$ ▒ 25
b) $(x + 4)^2 = x^2 +$ ▒ $+ 16$ 8x
c) $(3x + 6)^2 =$ ▒ $+ 36x + 36$ 9x²
d) $(x + 3)^2 =$ ▒ $+ 6x + 9$ x²
e) $(2x + 5)^2 = 4x^2 +$ ▒ $+ 25$ 20x
f) $(2x + 3)^2 =$ ▒ $+ 12x + 9$ 4x²

Figura 3: Exercício 54 do livro "Construindo consciências: matemática" (RIBEIRO; SOARES, 2006)

> Não gosto muito deste tipo de exercícios (54 p. 151), além de ter muito pouco. Essa coisa de completar o que tá faltando para produtos notáveis. Não gostei muito desse livro. (Jun/2009)

Podemos pensar da seguinte maneira: se a preocupação fosse com estrutura, esse tipo de exercício seria um dos mais importantes na lista da professora, devido a ajuda que ele pode trazer para o desenvolvimento de habilidades como, por exemplo, perceber o momento propício para fazer uma fatoração. Sendo assim, não nos parece que álgebra como estudo de estruturas seja uma concepção muito presente nos pensamentos da professora. Não estamos dizendo com isso, que esse tipo de exercício seja bom ou ruim, não é esse o propósito deste trabalho, apenas estamos ressaltando que o referido exercício ilustra bem as sensações que temos sobre a professora Y.

5.3 Aulas assistidas

Infelizmente os vários problemas, já citados, acabaram por fazer com que assistíssemos um número reduzido de aulas em relação ao que pretendíamos realizar nestes dois meses de trabalho de campo. Isso fez com que o foco desta atividade mudasse um pouco. As análises feitas aqui tentam compreender qual a tendência de caracterização da atividade algébrica e do ensino de álgebra as professoras trazem ou nos permitem perceber, de maneira mais presente, em suas aulas (FIORENTINI; LORENZATO, 2006; SANTOS-WAGNER, 2008).

Professora X

As três aulas que assistimos desta professora (Anexo 3) foram marcadas por exercícios, como a mesma disse nas entrevistas e nos comentários que fez sobre os livros didáticos. Observando as aulas pudemos notar uma grande preocupação com as notações algébricas, o que pode nos levar a uma caracterização letrista da álgebra no sentido descrito por Lins e Gimenez (1997). Observamos essa tendência letrista da professora pelo fato de as aulas que assistimos, sobre funções, terem sido abordadas a partir das notações presentes no estudo das funções. Além disso, nos parece que, a esta altura, esteja ficando claro o nível de importância que a professora dá aos exercícios de fixação. Essa idéia nos dá a impressão de uma concepção lingüístico-pragmática do modo como descreve Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Entretanto, é preciso destacar que as conclusões tiradas aqui dizem respeito apenas às impressões que tivemos durante o período que assistimos às aulas da professora X. Portanto, para uma conclusão mais completa e próxima da realidade precisaremos das conclusões alcançadas nas outras atividades, ou seja, precisamos de novos indícios.

Professora Y

Apesar de termos assistido as três aulas (Anexo 3) da professora Y em uma série mais avançada, foi possível perceber alguns aspectos e confirmar algumas impressões que tivemos da professora quando realizando as outras atividades. O tema das aulas que assistimos foi análise combinatória e, mesmo com um conteúdo que consideramos pouco mecânico, a professora apresentou exercícios que se remetiam à álgebra elementar logo após a aplicação de um conceito do tema. É importante destacar que as aulas se desviavam muito para discussões a respeito das técnicas de resolução de problemas referentes a equações, hora por vontade da professora, hora por vontade dos alunos. Durante essas discussões o discurso apresentado lembrava muito um discurso marcado por uma concepção letrista, devido à ênfase dada pela professora à notação combinatória, como na citação abaixo:

> 7! = 7.6.5.4.3.2.1, observem que se diminuímos 1 para achar o número anterior. 6 é anterior a 7, pois 6 = 7 – 1. Desta forma se quisermos descobrir o antecessor de x temos que tirar um do número x, lembrem-se que x é um número desconhecido. Sendo assim, o anterior de x é x – 1 (Abr/2009).

Na terceira aula que assistimos, sobre progressões geométricas, surgiu uma evidência de um comportamento mais fundamentalista-estrutural (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005) do que pragmático. Ao introduzir o conceito da soma dos n primeiros termos de uma PA, a professora apresentou uma demonstração algébrica da fórmula que ajuda a calcular esta soma, embora a própria professora tenha declarado que não discutiria a demonstração com a turma. Esta aula também manifestou a álgebra como um estudo de estruturas descrito por Usiskin (1988/1995). Desta forma, ficamos, até este momento com a sensação de que a professora Y se preocupa com o entendimento das estruturas dos conceitos matemáticos apresentados aos alunos, apesar das dificuldades, as quais ela mesma acredita que ela tenha com o entendimento dessas mesmas estruturas.

5.4 Equações do 2º grau

As professoras fizeram alguns comentários diferentes sobre as demonstrações. Dentre estes podemos destacar alguns aspectos que relatamos a seguir, trazendo os comentários referentes a cada uma das professoras.

Por um lado, a professora X, entre outras coisas, faz uma crítica sobre as demonstrações por estas não apresentarem todas as etapas (nas palavras dela) do desenvolvimento. Em alguns momentos, a professora afirma que a linguagem poderia ser mais explícita. Cabe ainda ressaltar que a professora acredita que essas demonstrações deveriam ser usadas apenas no caso de serem colocadas em algum tipo de avaliação e ela diz que não as usa e não faria uso delas.

Já a professora Y escolheu a demonstração feita no livro "Matemática Jovem" (COSTA; ANJOS; LOPES, 1987) apresentado no artigo de Ponte (2007), acreditando que as passagens são compreensíveis para os alunos. Cabe destacar que, ao contrário da professora X, essa professora costuma passar (nas palavras dela) a demonstração quando introduz o assunto. Além disso, a professora já usou a demonstração do livro escolhido por ela nesta atividade. Quanto às outras demonstrações, a única crítica da professora foi a respeito de algumas passagens que ela julgou desnecessárias.

Mesmo com as poucas evidências presentes nesta atividade, acreditamos ter encontrado uma informação importante. As professoras divergiram em dois aspectos. Primeiramente, uma observou que as demonstrações são muito telegráficas e a outra que são, com exceção da escolhida, longas demais. Em segundo lugar, uma delas não acha interessante levar a demonstração para a sala de aula e a outra acha importante que os alunos tenham isso registrado.

Esses comportamentos nos deram as seguintes impressões: a professora X acredita que é importante justificar os fatos apresentados aos alunos em sala, apesar de não achar a demonstração desta fórmula necessária; a professora Y acredita que o mais importante é saber que as coisas têm alguma origem.

5.5 Conversa com os alunos

Nesta última parte do trabalho de campo, nossas intenções eram verificar se nossas impressões a respeito das professoras estavam sendo uma boa aproximação da realidade, além de procurar observar mais uma vez, como os alunos estariam refletindo ou não as crenças e concepções das mesmas. Tivemos respostas que pensamos nos aproximaram um pouco mais do modo de pensar das duas professoras.

Professora X

Apesar de pequena, a conversa que tivemos com estes estudantes (Anexo 4) nos forneceu alguns indícios. Nós pudemos perceber que, aparentemente, as respostas estavam embasadas em pensamento utilitarista (ERNEST, 1989). Essa impressão se constituiu a partir do momento que respostas começaram a tender para argumentos do tipo:

> **Você gostaria de saber tudo sobre álgebra?**
> (X1) não, só as coisas que eu usaria no dia-a-dia. (X2) acho que tudo é usado no dia-a-dia, por exemplo: num concurso. (X3) as outras coisas só confundem nossa cabeça. (X2) é necessário para concursos. (Jun/2009).

Nesta fala pode-se perceber que a tendência seria mesmo de uma visão utilitarista da matemática. Outra informação importante diz respeito a confirmações sobre o que já vínhamos pensando em relação à professora X até o momento.

Ao serem perguntados sobre quais palavras achavam que sua professora relacionava com álgebra, os alunos responderam o seguinte: (X2) raciocínio, (X1) e (X3) regras e métodos. Estas afirmações nos ajudaram a perceber as impressões que tínhamos sobre a professora.

Professora Y

Os alunos desta professora foram um pouco mais tímidos, porém deram evidências fortes da influência, ou pelo menos obediência, que a professora inspira neles. Observe os exercícios que eles destacam como sendo de álgebra:

> (Y1) Resolva: C5,x = 6
> (Y2) Resolva a equação: $x^2 + 7x - 14 = 0$
> (Y3) Em uma classe com 40 alunos. Qual a probabilidade de serem escolhidos 2 representantes e 1 assistente?

O fato de dois alunos relacionarem os exercícios de combinatória da professora com álgebra, e esses exercícios se tornarem exemplo de álgebra, pode até ser produto de uma memória recente, mas não podemos negar a possibilidade de uma forte influência exercida pela professora nestes alunos.

Além disso, ao serem perguntados sobre quais palavras a professora relaciona com álgebra, os estudantes escolheram as seguintes respostas: (Y1) raciocínio, (Y2) métodos, (Y3) regras, além de terem concordado em incluir nesta lista a palavra prática. Da mesma forma que com a outra professora, estas respostas nos ajudaram a confirmar nossas impressões sobre as concepções da professora Y, pois podemos notar comportamento nas respostadas da professora nas entrevistas, como no trecho.

> Sempre que penso em álgebra me lembro das ***letrinhas e dos métodos para encontrar seus valores***. (*Perguntei se a álgebra era um espaço nebuloso)* Acho que sim, mas só no começo. (Dez/2008).

5.6 O que podemos dizer das professoras?

Ao fim deste estudo, acreditamos que agora temos idéias iniciais a respeito de como as professoras pensam sobre matemática, álgebra, ensino de matemática e ensino de álgebra. Para que pudéssemos fazer uma síntese de todas as nossas impressões montamos uma tabela procurando fazer um resumo das conclusões parciais que tivemos em cada uma das atividades de campo. Todas as afirmações presentes nesta tabela foram feitas com base nas idéias de Usiskin (1988/1995), Ernest (1989), Lins e Gimenez (1997) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), as quais descrevemos em nosso referencial teórico.

	Impressões	
Atividade	Professora X	Professora Y
Entrevistas	Visão utilitarista. Caracterização por notações. Álgebra como procedimentos	Visão utilitarista, limitada a cálculos. Álgebra como procedimentos e estruturas.
Livros didáticos	Visão platônica. Caracterização por notações Concepção pragmática	Álgebra como procedimentos. Concepção pragmática
Aulas assistidas	Caracterização por notações Concepção pragmática	Álgebra como procedimentos e estruturas.
Equações do 2º grau	Concepção fundamentalista-estrutural	Nem fundamentalista nem pragmática
Conversa com alunos	Visão utilitarista Álgebra como procedimentos	Álgebra como procedimentos Concepção pragmática

Apesar de, durante as análises parciais, termos procurado interpretar as falas e as informações obtidas com as professoras e tentado relacioná-las com as teorias e manifestações que estudamos, não tivemos a intenção de “encaixá-las” numa teoria pronta. O que faremos é expor nossas impressões sobre o modo de pensar das professoras à luz dessas teorias.

Observando a tabela acima, podemos perceber que o discurso da professora Y se aproxima bastante de uma visão utilitarista da matemática. Esta professora nos deu a sensação de que esta visão influencia constantemente suas atitudes com relação a sua prática docente. Já as falas da professora X não parecem concordar com suas ações, já que sua visão de matemática muda de utilitarista para platônica quando passa a lidar com os livros didáticos. Esse fato nos fez perceber que as visões sobre a matemática não são únicas e que um mesmo professor pode enxergá-la de formas diferentes dependendo da situação.

Outro aprendizado importante que tivemos veio através do fato de, durante a atividade das equações do 2º grau, a professora Y não se aproximar de nenhuma das concepções de educação algébrica descritas por Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005), apesar de apresentar uma tendência a conceber educação algébrica no sentido mais pragmático. A seguir trazemos algumas falas das professoras que ajudam a perceber como os dados da tabela foram constituídos. Podemos dizer que percebemos a professora X compreendendo a matemática como uma ciência onde se cria a partir das demandas do mundo e onde podemos usá-la, como na citação:

> **E:** Álgebra ou geometria?
> **PX:** Ensino muito pouco geometria, pois não tenho tempo de cumprir esse conteúdo. *Acredito que seria bom se estivesse separado*, mas por causa do tempo. Prefiro, álgebra até por causa do contato maior que tenho com esse assunto, mas só por isso gosto das duas coisas igualmente. A geometria mexe com formas, ângulos e a *álgebra é uma ferramenta*, portanto a diferença está nas abordagens. (Mar/2009)

Existem muitas semelhanças entre o discurso da professora e a visão utilitarista descrita por Ernest (1989), porém uma distinção da professora para essa teoria é que, apesar da busca por aplicações, não nos pareceu que ela olhe a matemática por esse lado, como por exemplo: ao escolher livros, seus critérios foram outros.

> *os livros de hoje em dia, costumam colocar texto para introduzir o assunto, acho que poderiam ser mais diretos*. Uma coisa que não gosto em alguns livros de hoje em dia é o fato de eles trazerem exercícios muito misturados,

> não seguem um aumento gradativo de dificuldades, vejo que o livro do Andrini tem essa preocupação, gosto disso. (Jun/2009)

Este trecho da conversa sobre os livros didáticos escolhidos pela professora X nos mostra uma visão da matemática mais como um corpo estático como descreve Ernest (1989). Com isso, podemos imaginar que existe uma variação nas visões expostas pela professora. Isso pode representar um conflito durante suas aulas, já que por um lado ela pensa na matemática como uma ferramenta e por outro, escolhe livros que falam puramente das técnicas necessárias à disciplina sem aplicá-las em situação alguma.

No caso da professora Y, sua visão sobre a matemática é um pouco parecida com a da professora X. Entretanto, nos parece que esta professora, em certos momentos, nos causa a impressão de ser mais metódica, ou seja, pensa muito mais no "passo-a-passo" (nas palavras dela).

> Gosto desse porque ... não que seja passo a passo, as explicações são simples e diretas. *Ele explica um determinado assunto, ai vem os exercícios para praticar*, os outros livros são mais detalhistas. Também tem muitos exercícios. (Sobre o livro: Praticando matemática de Álvaro Andrini (1993)). (Jun/2009)

Nesta fala percebemos mais um indício de uma aproximação com uma concepção lingüístico-pragmática como descrevem Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005). Também notamos que o discurso da professora se aproxima muito de uma visão utilitarista da matemática (ERNEST, 1989), embora a própria professora tenha consciência de que não conhece a utilidade de alguns conteúdos que ensina.

Quanto ao modo como compreendem a álgebra, as professoras se assemelham em alguns pontos. Ambas acreditam que a melhor forma de se aprender álgebra é através de muitos exercícios. Cabe ressaltar neste ponto o fato de a professora X ter manifestado sua vontade de conhecer uma maneira mais agradável. Também para as duas professoras a álgebra se caracteriza pela presença de uma notação especial para certos objetos matemática e do cotidiano.

Essas semelhanças garantem uma visão muito próxima da álgebra como estudo de procedimentos e técnicas para resolver certos problemas como descreve Usiskin (1988/1995). Porém, podemos identificar diferenças desse comportamento em ambas as professoras. Tanto a professora X quanto a Y buscam, cada uma a seu modo, maneiras matemáticas de fundamentar as tais técnicas que ensinam em suas aulas, o que pode significar que, apesar de tenderem a uma concepção lingüístico-pragmática do ensino da álgebra, as professoras também se aproximam de uma idéia parecida com a concepção fundamentalista-estrutural (FIORENTINI; FERNANDES; CRISTOVÃO, 2005).

6. Considerações finais

Este estudo de caso teve como objetivo responder a três diferentes inquietações: O que os professores de matemática de ensino fundamental e médio pensam sobre álgebra, ou seja, quais são suas crenças e concepções a respeito deste campo da matemática?; Qual a ressonância que essas crenças podem ter sobre o aprendizado dos alunos?; O que os professores percebem, ou não, de suas próprias crenças sobre álgebra, como elas influenciam suas aulas e como a pesquisa de campo pode contribuir para esta tomada de consciência sobre o assunto? Para responder estes questionamentos elaboramos as atividades que foram descritas nos capítulos anteriores.

Este capítulo final destina-se a sistematizar o que pudemos responder das perguntas da pesquisa. Nós nos limitaremos às conclusões alcançadas nos casos das professoras X e Y, já que não tivemos tempo de realizar todas as atividades com os cinco professores, com os quais realizamos as entrevistas na fase inicial da pesquisa. Além disso, apresentamos os novos caminhos que se abriram juntamente com o aprendizado que conseguimos durante este período. Por fim, mostramos algumas das limitações deste trabalho e quais foram às contribuições que o mesmo obteve.

Quanto ao nosso primeiro questionamento de pesquisa, pudemos perceber indícios de que as professoras pensam na álgebra muito ligada a suas notações, ou seja, nos pareceu que elas não desvinculam, em nenhum momento, a álgebra das “letrinhas” (como disse a professora Y). Na 6.1 trazemos mais detalhes sobre as crenças das professoras. Além disso, ambas têm o estudo de técnicas de resolução de exercícios como uma das prioridades quando pensam sobre o ensino de álgebra. Podemos confirmar essas afirmações nas frases abaixo:

> **E:** Diga conteúdos de matemática que acredita que sejam referentes à álgebra?
> **PY:** *Polinômios, Frações Algébricas, Equações Literais*. É o que lembro agora. Na minha cabeça *tudo que envolve incógnitas ou letras é álgebra*, mas tenho algumas dúvidas. Se eu fosse descrever a geometria, me lembraria das figuras, mas mesmo na geometria tem coisas que precisam da álgebra. Por exemplo, *quadrados perfeitos* têm aplicações geométricas. Para mim todas as coisas que relacionam *variáveis é álgebra*. (Dez/2008).
> **PX:** *Polinômios, equações, expressões*. São coisas da álgebra porque, são *letras com valores*. Quando se fala em álgebra lembramos direto das letras. Funções também é álgebra. (Mar/2009).

Dos três questionamentos da pesquisa, o segundo foi o que tivemos menos indícios que nos ajudassem na investigação. Nesse caso, podemos apenas destacar o fato de os alunos apresentarem discursos que lembram os de suas respectivas professoras. Na seção 6.2, apresentamos mais alguns detalhes sobre a relação dos alunos com as professoras.

Pensando no terceiro questionamento nós podemos dizer que acreditamos que esta investigação contribuiu, mesmo que indiretamente, para uma tomada de consciência das professoras com relação ao que elas pensavam sobre álgebra e o ensino de álgebra. Afirmações como “sempre achei esse tipo de reflexão importante, mas os professores não têm tempo para pensar nessas coisas” (PROFESSORA X, Jun/2009), nos dão a impressão de que as professoras também aproveitaram bastante esse período de pesquisa. Na seção 6.3, trazemos mais informações sobre estas contribuições para as professoras.

6.1 Considerações sobre as crenças das professoras

Observamos que ambas as professoras tendem a caracterizar a atividade algébrica segundo uma tendência letrista no sentido do que Lins e Gimenez (1997) apresentam, apesar de explicitarem algumas diferenças com relação a esta tendência, como podemos notar em falas apresentadas no capítulo anterior, tais como:

> **Professora X:** Para resolvermos determinada situação, laçamos mão da álgebra, ou seja, do *uso de letras para representar valores*. Assim, quando você está frente a uma situação problema *usa-se a álgebra para resolvê-la*. É uma ferramenta da matemática usada para *simbolizar*. O problema dos alunos é o monte de letras misturadas com números e eles têm dificuldade, até então, para compreender isso. *Eles não entendem o que expressões representam*.
> (*Perguntei o que é importante, entender o significado ou resolver exercícios)*. Os dois, *resolver significa que ele entendeu o significado de cada peça ou símbolo*. (Mar/2009)
> **Professora Y:** Sempre que penso em álgebra me lembro das *letrinhas e dos métodos para encontrar seus valores*. (*perguntei se a álgebra era um espaço nebuloso)* Acho que sim, mas só no começo (Mar/2009)

Podemos observar, nestas falas, a tendência de caracterização com base na presença de uma notação especial para representar informações que ajudam a resolver determinada situação problema. A professora Y também destaca sua preocupação com as notações algébricas quando fala sobre as letras e da dificuldade inicial no entendimento da álgebra. A professora X apresentou alguns comportamentos que lembram a concepção de álgebra como estudo de técnicas para resolver certos tipos de problemas. Um pensamento muito parecido com o da professora Y que também apresenta uma leve tendência para um entendimento da álgebra como estudo de estruturas no sentido do que Usiskin (1988/1995) descreve. Sendo assim, podemos concluir que ambas as professoras têm visões muito parecidas do que seria álgebra e o ensino de álgebra.

Cabe ainda ressaltar que as professoras demonstraram, em alguns momentos, certa dificuldade em explicitar suas próprias crenças e concepções com relação ao que pensam sobre álgebra. Além disso, a honestidade de ambas no momento de responder as perguntas foi uma grata surpresa durante toda a atividade.

6.2 Considerações sobre o que fica para os alunos

Logicamente, este trabalho está longe de encerrar o assunto sobre o modo como as crenças dos professores determinam e/ou influenciam as crenças dos alunos. No entanto, pudemos observar que procuram se espelhar no exemplo mais próximo deles no que diz respeito ao ambiente escolar. As impressões que tivemos, durante as aulas que assistimos e na conversa com os estudantes, foram que as preocupações dos alunos são muito próximas das que as professoras apresentaram ao longo desses 4 meses de estudos no campo. De fato existe a possibilidade de as crenças dos alunos se aproximarem das do professor por um motivo meramente sistêmico, ou seja, o aluno procura pensar como o professor, porque isso garante a ele uma chance grande de passar na prova. Mas não podemos negar que, até mesmo por esse motivo as convicções do estudante têm forte influência dos professores que passam por sua vida acadêmica.

No caso dos estudantes, que observamos e entrevistamos, foi possível notar algumas semelhanças no modo de pensar dos mesmos com os professores no momento em que relacionaram palavras com a álgebra e escolheram palavras que as professoras escolheriam (Anexo 4). Também é importante ressaltar que este trabalho foi apenas mais uma contribuição para a difícil busca pela compreensão de como os estudantes pensam. Sendo assim, ainda nos restam caminhos para seguir e missão de levar esta pesquisa adiante para que possamos ter uma idéia, cada vez mais precisa, sobre como funciona a aprendizagem de nossos alunos.

É importante ainda ressaltar um fato interessante que notamos durante a pesquisa de campo. Os alunos não tinham exata noção do que significa álgebra ou quais os conteúdos matemáticos são relacionados à álgebra. Esse comportamento nos trouxe mais um indício a respeito da influência que os professores podem exercer sobre seus alunos, já que os próprios professores apresentaram dificuldade parecida.

6.3 Considerações sobre o comportamento das professoras: antes e depois

Neste estudo de caso pudemos perceber que as professoras nunca tinham parado para pensar em suas próprias concepções sobre aquilo que ensinam. A partir das entrevistas ambas já afirmaram que foram levadas a reflexões importantes, não apenas de sua prática docente, mas também sobre o modo como pensam essa prática e sobre os conceitos matemáticos que estudaram em suas vidas acadêmicas. Durante o momento em que retornávamos nossas impressões para as professoras, pudemos notar um fato que merece destaque: ambas nos pediram uma cópia deste trabalho para que pudessem ler um pouco mais sobre as teorias, de modo que pudessem pensar um pouco mais e tentar elas próprias compreenderem suas crenças.

Uma outra sensação que tivemos foi de que, no inicio, ambas as professoras sentiam alguma dificuldade em expressar suas próprias convicções sobre álgebra e sobre como o ensino da mesma deveria se desenvolver. Esse fato, como já destacamos anteriormente, pode ser relacionado com o fato de os alunos não demonstrarem ter conhecimento sobre o que vem a ser álgebra. Além disso, todos os cinco professores que iniciaram a pesquisa de campo conosco demonstraram grande surpresa ao conhecerem outras manifestações de álgebra. É importante ressaltar nossa satisfação com os resultados obtidos neste trabalho, pois acreditamos que este tenha contribuído com algumas melhorias nas concepções de ambas as professoras, como pudemos perceber durante as conversas posteriores.

6.4 Limitações e Futuras Pesquisas

Infelizmente o tempo para realização do trabalho de campo inviabilizou parte de nossas intenções de que todos os cinco professores participassem de todas as atividades. Tivemos muitos contratempos nestes meses de trabalho de campo e por esse motivo, algumas atividades, como a das equações do 2º grau, poderiam ter sido melhor aproveitadas. Também entendemos que observamos poucas aulas e por isso demos maior ênfase às outras atividades. Acreditamos que esta pesquisa ainda possa ser continuada, procurando responder a algumas perguntas que surgiram durante nossos estudos, tais como: Quais as conexões didáticas entre as diferentes concepções e manifestações de álgebra? Será que as visões de matemática descritas por Ernest (1989) são as únicas possíveis, ou seja, será que essas visões esgotam as possibilidades de percepção da matemática? Quais seriam os motivos para os alunos não conhecerem álgebra? Por fim, ressaltamos que este estudo ampliou nossas próprias concepções sobre álgebra, a partir do ponto que conhecemos muitas, das várias “caras” deste campo da matemática que discutimos aqui.

Além dessas inquietações, geradas ao longo da pesquisa, fica a missão de levá-la adiante. O fato de os participantes da pesquisa não demonstrarem a consciência que acreditamos ser necessária para uma exploração cada vez mais completa dos assuntos relacionados à álgebra, nos mostra o quanto é necessário um momento de reflexão sobre o que se está ensinando.

6.5 Considerações sobre meu aprendizado

Não posso negar o aprendizado e as mudanças de conceitos que tive durante todo o tempo em que trabalhei neste projeto. Minhas aulas se aprimoraram de uma forma que sinceramente não esperava. Quando cheguei ao curso de mestrado tinha uma visão, embora melhor que na época da graduação, ainda muito simples do significado do termo ensino de matemática. Os contatos com as leituras oferecidas pelo curso, com livros de divulgação de matemática, com professores de uma nova universidade e principalmente o convívio com meus colegas de curso me fizeram abrir a mente para uma nova forma de pensar. Essas leituras me levaram de uma visão platônica a uma visão mais de criação de matemática. As aulas, mesmo não sendo todas como gostaria, mudaram de puramente expositivas para investigativas. Além disso, também preciso destacar os aprendizados a respeito do campo da Educação Matemática. Durante o período de contatos com minha orientadora, tive a oportunidade de conhecer algumas das teorias que norteiam a investigação em

Educação Matemática, bem como um pouco da evolução histórica desta área científica.

Quanto aos aprendizados com a pesquisa, posso dizer que também não tinha noção da existência de tantas visões, concepções e crenças sobre álgebra. Isso também fez com que minha prática docente fosse modificada em alguns aspectos. Percebi a importância de considerar as manifestações da matemática no planejamento de minhas aulas e o quanto faz diferença ter consciência das diferentes concepções, apresentadas aqui, nesse planejamento. Não que eu tenha escolhido alguma das teorias apresentadas aqui, mas hoje tenho consciência que algumas manifestações dos alunos são legítimas e afirmações deles que eu acreditava estarem erradas, na verdade só não estavam de acordo com minhas crenças e com a tendência, também letrista, a qual seguia. Além disso, os aprendizados sobre como redigir um trabalho dessa natureza, também foram significativos. Posso dizer que todo o rigor desta produção acadêmica é da maior importância para que leitores que não me conhecem possam compreender os passos que segui durante esses meses de investigação, de maneira que estes futuros leitores possam continuar de onde parei e iniciem outras investigações, caso assim o desejem. Pude ver o quanto foi decisiva a realização do estudo exploratório no fim de 2008. Além de perceber que, com toda essa pesquisa, posso ajudar outros professores que estejam, como eu, interessados em fazer do ensino de matemática o melhor. Acredito que esta seja a maior contribuição de meu trabalho, um anúncio de que precisamos parar um pouco para pensar no que estamos ensinando. E não apenas olhar para os conteúdos e ver qual seria a maneira mais fácil de ensiná-los.

Referências Bibliográficas

1. ALVARENGA, D.; VALE, I. A exploração de problemas de padrão: um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Quadrante**, Lisboa, Associação dos professores de matemática, v. 16, n. 1, p. 111-145. 2007.

2. ANDRINI, A. **Praticando matemática**: 7ª série. São Paulo: Editora do Brasil, 1993. 222p.

3. BIANCHINI, E. **Matemática**: 7ª série. 2ª ed. São Paulo: Moderna, 1991. 210p.

4. BONI, V.; QUARESMA, S. J. Aprendendo a entrevistar: Como fazer entrevistas em ciências sociais. **EM TESE**: Revista Eletrônica dos Pós-Graduandos em Sociologia Política da UFSC. Santa Catarina, v. 2, n. 1, p.68-80, Jan-Jul/2005. Disponível em <http://www.emtese.ufsc.br/3_art5.pdf>. Acessado em: 6 Jan 2009.

5. BONJORNO, J. R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. **Matemática**: fazendo a diferença: 7ª série. São Paulo: FTD, 2006. 304p.

6. BOOTH, L. R. Dificuldade das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P (org.). **As idéias da álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1995, p. 23-37.

7. BOYER, C. B. **História da matemática**. Tradução de Elza F. Gomide. 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. 496p.

8. BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC, 1998.

9. CALLEJO M. L.; VILA A. **Matemática para aprender a pensar**: o papel das crenças na resolução de problemas. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006. 212p.

10. CARVALHO, C; NEVES, M. C. A importância da afectividade na aprendizagem da matemática em contexto escolar**. Análise psicológica**, Lisboa, v.24, n.2, p. 201-215, abr. 2006.

11. CASTRO, M. R. Educação algébrica e resolução de problemas. Campos, 2003. Disponível em:<http://www.tvebrasil.com.br/salto/boletins2003/eda/pgm1.htm>. Acessado em: 18 jun. 2009.

12. CELESTE, L. B. **A produção escrita de alunos do ensino fundamental em questões de matemática do Pisa**. 2008. 88f. Dissertação (Mestrado em

Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

13. CHAPMAN, O. Researching teaching: qualitative techniques. **Caderno de Pesquisa em Educação PPGE-UFES**, Vitória, v. 12, n. 23, p. 105-135, jan/jun. 2006.

14. CURY, H. N.; LANNES, W.; BROLEZZI, A. C.; VIANNA, C. R. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de matemática. **Educação Matemática em Revista**, Rio Grande do Sul, PUCRS, v. 4, n. 4, p. 9-15, dez. 2002.

15. DANTE, L. R. **Tudo é matemática**: 7ª série. São Paulo: Ática, 2002. 328p.

16. DEWDNEY, A. K. **20000 léguas matemáticas**: um passeio pelo misterioso mundo dos números. Tradução de Vera Ribeiro; Revisão de Vitor Tinoco. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2000. 235p.

17. DIAS, C. **Pesquisa qualitativa – características gerais e referências**. São Paulo, mai/2000. Disponível em <*www.geocities.com/claudiaad/qualitativa.pdf*>. Acessado em: 09 jun. 2009.

18. ERNEST, P. The impact of beliefs on the teaching of mathematics. In: Ernest P. (ed.). **Mathematics Teaching**: The State of the Art. Londres: Falmer Press, 1989, p. 249-254. Também Disponível em:<http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/impact.htm>. Acessado em: 24 set. 2006.

19. FERREIRA, A. B. H. **Novo dicionário da língua portuguesa**. Rio de Janeiro, RJ: Nova Froteira, 1986. 1838p.

20. FIORENTINI, D.; FERNANDES, F. L. P.; CRISTOVÃO, E. M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, 5, 2005, Porto. **Anais.** CIBEM, 2005. p. 1-22.

21. FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados (coleção formação de professores), 2006. 226p.

22. FREITAS, M. A. **Equação do 1º grau**: métodos de resolução e análise de erros no Ensino Médio. 2002. 146f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

23. GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**. 2ª ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 240p.

24. GIL, K. H.; PORTANOVA, R. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra**. Belo Horizonte, Junho 2007. Disponível em: <www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/Trabalhos/PO53964543004T.doc>. Acessado em 6 jan 2009.

25. GÓMEZ CHACÓN, I. M. **Matemática Emocional**: os afetos na aprendizagem matemática. Tradução de Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2003. 255p.

26. GUEDJ, D. **O teorema do papagaio**. Tradução de Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 1999. 501p.

27. GUELLI, O. **Matemática**: uma aventura do pensamento: 7ª série. 7ª ed. São Paulo: Ática, 2001. 288p.

28. IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**: 7ª série. 5ª ed. São Paulo: Atual, 2005. 368p.

29. KEPPKE, C. L. **Álgebra nos currículos do ensino fundamental**. 2007. 181f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

30. KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P (org.). **As idéias da álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, 1995, p. 104-110.

31. KIERAN, C. The Learning and teaching of school algebra. In: Grouws, D. (ed.), **Handbook on mathematics teaching and learning**. New York: MacMillan, 1992, p. 390-419.

32. LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997. 176p (SBEM: Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

33. LOCHHEAD, J.; MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P (org.). **As idéias da álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, 1995, p. 144-154.

34. MOURA, A. R. L.; SOUSA, M. C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica e da álgebra simbólica: dois olhares diferentes. **ZETETIKÉ**, Campinas, FE/Unicamp, v. 13, n. 24, p. 11-45, jul/dez. 2005.

35. NEVES, J. L. Pesquisa qualitativa – características, usos e possibilidades. **Caderno de pesquisas em administração**, São Paulo, v. 1, n. 3, p. 1-5 , 2º sem. 1996.

36. NEVES, R. C. **Os quatérnios de Hamilton e o espaço**. 2008. 112f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

37. OLIVEIRA, S. **Design de um ambiente computadorizado para a introdução à aprendizagem de álgebra**. 2001. 98f. Dissertação (Mestrado em Ciências da Computação) – Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

38. PINTO, R. A.; FIORENTINI, D. Cenas de uma aulas de álgebra: produzindo e negociando significado para "a coisa". **ZETETIKÉ**. Campinas, FE/Unicamp, v. 5, n. 8, p. 45-71, jul/dez. 1997.

39. PIRES, C. C.; CURI, E.; PIETROPAOLO, R. **Educação matemática**: 7ª série. São Paulo: Atual, 2002. 288p.

40. PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: BROWN, M.; FERNANDES, D.; MATOS, J. F.; PONTE, J. P. . **Educação Matemática**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1992, p. 185-239.

41. PONTE, J. P. Números e álgebra no currículo escolar. In: PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, P. **Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores**. Lisboa: SEM-SPCE, p. 5-27, 2006.

42. PONTE, J. P. Equações do 2º grau do fim do século XIX ao início do século XXI: Uma análise de sete manuais escolares. **Quadrante**, Lisboa, Associação dos professores de matemática, v. 16, n. 1, p. 111-145, 2007.

43. RIBEIRO, A. J. **Equação e seus multisignificados no ensino de matemática**: contribuições de um estudo epistemológico. 2007. 141f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Potifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

44. RIBEIRO, J.; SOARES, E. **Construindo consciências**: matemática: 7ª série. São Paulo: Scipione, 2006. 336p.

45. SANTOS, L. G. **Introdução do pensamento algébrico**: um olhar sobre professores e livros didáticos de matemática. 2007. 231f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Educação, Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

46. SANTOS, L. M. **Concepções do professor de matemática sobre o ensino de álgebra**. 2005. 121f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

47. SANTOS-WAGNER, V. M. P. Mensagens de email da orientadora sobre como elaborar um projeto de pesquisa, implementar, coletar, analisar dados e elaborar o relato final da pesquisa, 2008.

48. SILVA, C. M. S; SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. O que um iniciante deve saber sobre a pesquisa em educação matemática? **Caderno de Pesquisa do programa de Pós-Graduação em Educação da UFES**, Vitória, n. 10, p. 10-23. Educação para o campo, 1999.

49. SILVA, C. M. S.; SANTOS-WAGNER, V. M. Considerações para os iniciantes em pesquisas em educação matemática e educação do campo. In: SILVA, C. M. S. da et al., **Metodologia da pesquisa em educação do campo**: Povos, territórios, movimentos sociais, saberes da terra, sustentabilidade. Vitória, ES: UFES, Programa de Pós-Graduação em Educação, 2009, p. 53-64.

50. THOMPSON, A. G. A relação entre concepções de matemática e de ensino de matemática de professores na prática pedagógica. Tradução de Gilberto F. A. de Melo e Tadeu Oliver Gonçalves. **ZETETIKÉ**. Campinas, FE/Unicamp, v. 5, n. 8, p. 11-44, jul/dez. 1997.

51. TINOCO, L. A. A. **Álgebra**: pensar, calcular, comunicar... Rio de Janeiro, RJ: UFRJ (Projeto Fundão), 2008. 107p.

52. USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P (org.). **As idéias da álgebra.** Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo, 1995, p. 9-22.

53. VIDIGAL, A.; REGO, C. A.; BARBOSA, M. G. G.; SPIRA, M. **Matemática e você**: 7ª série. Belo Horizonte: Formato, 2002. 310p.

Anexos

Anexo 1: Entrevistas dos professores

Professor A (15 de Dezembro de 2008).

Entrevistador: O que é matemática?
Professor A: Ponte para a realidade: Entendo a matemática como uma espécie de simulador do real. Um facilitador para o entendimento da mesma.

E: Quais conteúdos matemáticos são mais importantes para o aprendizado de matemática? Por que?
PA: Matemática financeira: É importante pela aplicabilidade que tem.

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da matemática? Qual a mais Atrativa? Qual a mais Chata?
PA: Contextos (real): quanto mais se aproxima da realidade do aluno, melhor é o desenvolvimento deste.
Mais atrativa - diversão – lúdico: Jogos matemáticos são muito atraentes.
Mais chata - formal – teoria demais: aulas monótonas, cuspe e giz.

Professor A (18 de Dezembro de 2008)

E: O que é álgebra?
PA: Generalizar, simplificar, linguagem: É como a matemática se comunica. Permeia toda a matemática. Facilitador para a resolução de problemas.

E: Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que seria prioridade?
PA: Interpretação: Mostra interesse em fazer com que os alunos compreendam o processo de criação da linguagem matemática.

E: Diga conteúdos de matemática que acredita que sejam referentes à álgebra?
PA: Tudo: tudo mesmo.

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da álgebra? Qual a mais atrativa? Qual a mais Chata?
PA: Não sabe: Não se julga experiente o suficiente para responder.
- faz dinâmica com entendimento: tenta apresentar a linguagem algébrica através de dinâmicas de grupo.
- formal: Acredita que o formalismo excessivo da álgebra interfere negativamente na motivação dos alunos.
E: Se a álgebra fosse um animal, qual seria? Porquê?
PA: Leão, pela noção de comando, controle: Apresenta uma faceta de domínio e soberania sobre as outras áreas da matemática.

E: Se a álgebra tivesse que ser outra profissão. Qual seria? Por que?
PA: Guarda, controle: Idem a questão 8.

E: Se você tivesse que explicar para alguém que nunca ouviu falar de álgebra, como explicaria para que este entendesse facilmente?

PA: X+Y=10, noção de variável: Não consegue fugir do formalismo da álgebra.

E: O que os problemas de álgebra têm em comum com a vida cotidiana?
PA: Não conseguiu.

E: Diga quantas palavras relacionadas à álgebra você conseguir.
PA: Matemática, sistemas, função, formula,... , propagandas.

E: Que tipo de erro um estudante de álgebra, no ensino fundamental, não pode cometer?
PA: Não pode ir contra definições.

E: Numa escala de 0 até 10, qual importância você daria para: (e por que)
Obter um resultado correto?
PA: 8 O professor explicou que apesar de não ser o mais importante, não posso deixar de lado.

Seguir um caminho coerente?
PA: 5

Utilizar aquilo que você acabou de ensinar?
PA: 5 O professor disse que o fato de o aluno não fazer as coisas como ele quer, não significa que realmente aprendeu.

Justificar seus passos na resolução?
PA: 10 Foi dito que essa é a atitude que ele mais espera de seus alunos. Segundo o professor, quando o aluno faz isso é uma prova de seu aprendizado

Procurar outras formas para a resolução de um problema já solucionado?
PA: 7 O professor demonstrou preocupação com a não fixação de uma única técnica de resolução.

E: Quando você está dando aula de álgebra, quais as dificuldades que você mais nota? Dessas, quais mais te preocupam? Por quê?
PA: Regra de sinais: Regras

Professor B (2 de Fevereiro 2009)

Entrevistador: O que é matemática?
Professor B: É a ciência que trabalha com fórmulas com números com figuras. Numa visão mais informal. Gosto muito de números, das fórmulas, expressões. Conta é o mínimo.

E: Por que escolheu essa graduação?
PB: desde garoto eu gostava de matemática. No início eu gostava continhas e probleminhas, depois dos jogos raciocínio. Acho que química e física é uma aplicação da matemática. Fiz apenas licenciatura.

E: Qual sua preferência? A matemática da graduação ou do Ensino Médio?
PB: A do ensino médio. A da graduação é muito formal, não da pra ensinar aquilo para os alunos. O meu gosto mesmo é por cálculo da graduação. Vejo que os alunos têm medo de matemática e por isso temos que reduzir o nível.

E: Por que a matemática é tão importante na escola?
PB: Eu acho que a matemática rege tudo. Por exemplo, a televisão funciona por causa da matemática. Nós não percebemos isso porque, no geral, as pessoas não se importam com os motivos das coisas acontecerem, mas se isso acontecesse à matemática teria mais valor para as pessoas. Acho que o aluno precisa de base, ele precisa aprender matemática de uma forma que possa escolher qualquer profissão. Além disso, desperta o raciocínio, isso não só na matemática.

E: Se a matemática fosse um animal, qual seria? Por que? Qual animal nunca seria? Por que?
PB: Nunca pensei nisso. Cachorro, para quem não conhece é difícil de lidar e entender. Mas, a partir do momento que conhecemos, que nos tornamos íntimos, as coisas ficam bem. Qual nunca seria? Preguiça, por que precisamos de empenho, até quem gosta de matemática, se não praticar não aprende.

E: Se a matemática fosse outra profissão, qual seria? Por que? Qual profissão nunca seria? Por que?
PB: Português, pois trabalha com muitas regras, muito raciocínio. Não penso em nada, acho que matemática pode ser qualquer coisa.

E: Por que licenciatura?
PB: Eu queria ter contato com pessoas, gosto de ensinar, de formar opiniões, as coisas que aprendi têm que ir para frente.

E: Qual o objetivo do ensino de matemática?
PB: Na minha opinião é mudança de vida, pois com matemática você se torna capaz de aprender outras coisas, de outras áreas.

E: Quais conteúdos de matemática que você acredita serem mais importantes para o aprendizado da mesma?

PB: Funções. Dominando isso está ótimo. Exemplo: geometria é cheia de funções.

E: Qual sua opinião sobre o currículo de matemática?
PB: Acho que estão cortando muita coisa e isso não é bom. Bem, coisas como números complexos até poderia ser retirado, mas estão tirando coisa demais. O ideal seria desenvolver as coisas com os alunos.

E: Você mudaria alguma coisa no ensino da matemática?
PB: Não vou me lembrar agora, mas gostaria de mudar alguns conteúdos de lugar. Coisas que acho que deveriam ser ensinadas mais tarde e outras que acho que poderiam ser mostradas mais cedo.

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino de matemática?
PB: Jogos. Acho que brincar é uma forma ótima para aprender. Deve se tomar o cuidado de formalizar as coisas. Precisa praticar. É importante lembrar que aprendemos trocando idéias.

E: Que é mais importante no aprendizado de matemática?
PB: Concentração.

Professor B (9 de Fevereiro de 2009)

E: O que é álgebra?
PB: A parte da matemática que trabalha com fórmulas com letras e números, com as relações entre essas coisas. Serve para generalizar. Exemplo: um raciocínio numérico pode ser expresso com álgebra.

E: Diga coisas que você julga álgebra.
PB: Seqüências, Polinômios até pode ser, só acho muito mecânico, sistemas. Tudo que equacionamos é álgebra. Não acho que a álgebra seja algo mecânico, acho que vai mais do raciocínio, uma forma de pensar.

E: Animal: o mesmo da matemática.

E: Álgebra ou geometria?
PB: álgebra. Gosto de geometria, mas acho a álgebra mais fácil de ensinar.

E: Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que você priorizaria?
PB: Equações e sistemas. Acho que essas coisas são importantes para o futuro.

PB: Existem momentos que as letras assumem papéis diferentes: incógnitas, variáveis...

E: Se você tivesse que explicar o que é um problema de álgebra, para alguém que nunca ouviu falar sobre o assunto, o que você diria?
PB: Primeira, mostrar que letras representam números. E depois daria uns exemplos, como: densidade, que relaciona volume e massa.

E: O que os problemas de álgebra tem em comum com o cotidiano?
PB: É preciso generalizar.

E: Quais os erros mais preocupantes na álgebra?
PB: Tem um problema: Quando dizemos assim, "2 = x" as pessoas não acreditam que x = 2, eles só percebem a ida e não a volta. Isso é um erro muito grave. Outro exemplo: x + 2 = 6 ai passo o dois para outro lado ai vai x + 2 = 6 = x = 6 – 2, veja essas coisas não tem relação e só acontecem por que os alunos não entendem a igualdade.

E: Quais os erros mais comuns em álgebra?
PB: Quatro operações, não aceitam operações do tipo 3x, erros de procedimentos em equações. O que mais me preocupa é a igualdade.

Professora X (30 de Março de 2009)

Entrevistador: O que é álgebra?
Professora X: Para resolvermos determinada situação, laçamos mão da álgebra, ou seja, do uso de letras para representar valores. Assim, quando você está frente a uma situação problema usa-se a álgebra para resolvê-la. É uma ferramenta da matemática usada para simbolizar. O problema dos alunos é o monte de letras misturadas com números e eles têm dificuldade, até então, para compreender isso. Eles não entendem o que expressões representam. É importante lembrar que nós, professores, também temos problemas de transmitir isso para eles.

Acredito que sempre tem alguns alunos que compreendem esses assuntos. Eu acho legal, pois quando eles mostram isso é sinal do nosso trabalho bem feito. (*Perguntei o que é importante, entender o significado ou resolver exercícios)*. Os dois, resolver significa que ele entendeu o significado de cada peça ou símbolo. Acho que a álgebra é um pouco maçante para os alunos e gostaria de conhecer um outro método de ensino mais agradável para eles.

E: Quais conteúdos matemáticos você julga como conteúdos algébricos?
PX: Polinômios, equações, expressões. São coisas da álgebra porque, são letras com valores. Quando se fala em álgebra lembramos direto das letras. Funções também é álgebra.

E: Se a álgebra fosse um animal, qual seria? Por que?
PX: Para mim, seria um animal muito feio, falando em relação ao ensino, a dificuldade que eu tenho para transmitir, seria um sapo. Também é chato, pois os alunos não compreendem.

E: Qual animal ela nunca seria? Por que?
PX: Se for para inverter o pensamento, seria um cachorro que é um animal que gosto muito.

E: E uma profissão?
PX: Pedreiro, engenheiro, na verdade a álgebra esta presente em todas as profissões, mas de formas diferentes. A álgebra nunca seria medicina (duvidas). Tem coisas que agente ensina que não sabemos onde aplicar. Não consigo ter certeza, a medicina pode até ter algum código.

E: Álgebra ou geometria?
PX: Ensino muito pouco geometria, pois não tenho tempo de cumprir esse conteúdo. Acredito que seria bom estivesse separado, mas por causa do tempo. Prefiro, álgebra até por causa do contato maior que tenho com esse assunto, mas só por isso gosto das duas coisas igualmente. A geometria mexe com formas ângulos e a álgebra é uma ferramenta, portanto a diferença está nas abordagens.

Professora X (10 de Abril)

E: Se você tivesse pouco tempo para ensinar álgebra. O que você priorizaria?
PX: Por que ensinamos soma de polinômios? Os problemas que vejo nos livros, em sua maioria, são problemas que lançam mão de equações para resolvê-los. Mas não sei te dizer o que eliminar. Acho que seria mais fácil juntar alguns assuntos. Acho que qualquer coisa que eu eliminasse já seria prejudicial. Por exemplo, eu poderia ensinar equações junto com os problemas que envolvem esse assunto.

E: Se tivesse que explicar para alguém que nunca ouviu falar de álgebra, o que é um problema de álgebra? O que você diria?
PB: São problemas que usam códigos, usam letras para expressar valores desconhecidos para serem descobertos.

E: Quais os erros que seus alunos não podem cometer?
PX: Quando o aluno precisa definir os coeficientes e as variáveis. Exemplo: x tem coeficiente 1, mas alguns alunos pensam que x é que é igual a 1.

Professora Y (22 de Dezembro de 2008)

Entrevistador: O que é matemática?
Professora Y: Nunca tive essa preocupação. Na verdade, não sinto uma adoração, tão grande como algumas pessoas, pela disciplina. O que eu queria era uma graduação, no começo fiz fisioterapia mas não gostei. Fiz matemática para seguir minha carreira no magistério. Quando fui para a graduação vi muita coisa especifica, aliás vi muitas coisas que não tinha estudado, por exemplo: análise, não gostei. Eu preferia as matérias mais pedagógicas, foi mais fácil por causa do normal.

E: Quais os motivos da tua escolha de graduação?
PY: Sinto-me professora, mas não me vejo dando aula de história, por que acho que é muita palestra. Matemática é mais calculo, veja só as vezes me pego pensando no motivo pelo qual ensino as coisas que ensino, varias coisas não sei como se aplicam. Para ensinar, prefiro matemática. Participei de alguns encontros de professores e gostei muito, pois eram muito voltados para a sala de aula. Também posso falar de generalizações. Por exemplo: As formulas da geometria

E: O que você acha mais importante no aprendizado da matemática?
PY: Hoje, eu vejo uma disputa entre qualidade e quantidade, apesar do “pra que?” o sistema quer tudo. Acredito que os alunos precisam aprender são as coisas que eles usam no dia-a-dia. Eles dizem que nos temos que fazer o que o mundo não quer, teve um caso de um aluno de um amigo meu que me mostrou uma prova de um aluno que não sabia nem ler, ou seja, ele é analfabeto, mas tínhamos que aprovar, isso é muito ruim. Não faz nenhum sentido dar aulas para pessoas que só querem o diploma. Falo do caso do EJA. Já no curso regular, preparo melhor meus alunos.

No caso do EJA, montei o curso, dando ênfase em funções e matemática financeira. Na verdade mais coisas do dia-a-dia. Também teve estatística e matrizes. Preocupo-me muito com o sentido prático das coisas, não os conheço. No fundamental olho mais para a vida acadêmica do aluno, os preparo para a escola técnica, etc... as vezes uma faculdade. Um bom exemplo é: no 7º ano o aluno tem que saber equações.

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da matemática?
PY: Eu gostaria muito de fazer, mas nunca tive coragem de trabalhar com jogos. Acho que seria muito bom, mas nunca parei para tentar, ate por causa do tempo. Geralmente consigo fazer trabalhos em grupo, acredito que funciona bem. Só tem o problema daquelas pessoas que não fazem nada, mas acho que é bom porque o discurso dos alunos é melhor do que o nosso. Quando aplico testes em dupla preciso forçá-los a entregar folhas individuais.

E: Qual a mais Atrativa?
PY: Eu nunca consegui isso, tem algumas aulas que os alunos participam mais, mas não conheço.

E: Qual a mais Chata?
PY: Não minha opinião os alunos não gostam do nome matemática. Certa vez, eu tive um aluno que precisava estudar para um concurso e pediu minha ajuda. Depois

de um tempo ele resolveu estudar tudo desde a 5ª série (atual 6º ano). A evolução deste aluno foi enorme. Por isso, eu acho que o aluno não gosta porque não compreende o que faz, é uma coisa que vem de longa data...

E: Qual o objetivo do ensino de matemática?
PY: Na verdade eu penso, nem tanto no dia-a-dia. Minha maior preocupação é preparar os alunos para um concurso público e também para um acesso ao ensino médio. Por exemplo: uma escola técnica.

Professora Y (4 de Janeiro de 2009)

E: O que é álgebra?
PY: Sempre que penso em álgebra me lembro das letrinhas e dos métodos para encontrar seus valores. (*perguntei se a álgebra era um espaço nebuloso)* Acho que sim, mas só no começo.

E: Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que seria prioridade?
PY: Esse seria um problema gigante. Acho que me preocuparia com as operações com polinômios, sem me preocupar muito com os monômios e por ai vai. Acho que isso o aluno vai precisar muito deste conhecimento. Preocupo-me muito com isso, o aluno precisa aprender o que ele vai usar no futuro.

E: Se a álgebra fosse um animal, qual seria? Por que?
PY: (*Após demonstrar espanto com a pergunta*) Não julgo a álgebra nem como um animal muito bravo ou muito manso, pois as dificuldades são relativas. Tudo depende da forma como apresentamos, como à aceitamos. Acho que pode ser qualquer animal, depende da forma como a criamos. Ela se transforma sempre.

E: Quais erros os alunos não podem cometer em álgebra?
PY: Regra de sinais. Na verdade o aluno não pode errar nada, qualquer coisa compromete o trabalho, tudo é importante a letra o sinal tudo. Mesmo relevando alguns erros, não deveríamos.

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino de álgebra?
PY: O que faço é praticar os exercícios com eles. Costumo explicar como o aluno deve fazer. Pesquiso alguns livros para ver qual tem uma linguagem mais accessível. Sempre resolvo os exemplos junto com eles tento ver se eles tentam resolver. Lembrou-se dos jogos matemáticos.

E: Qual a abordagem mais atrativa?
PY: Os jogos matemáticos. Nunca trabalhei com eles, mas acredito que seria mais atrativo para os alunos. Certa vez, tentei trabalhar com um jogo, mas não o utilizei em sala.

E: Qual a abordagem mais chata?
PY: Quando comecei a dar aulas, eu não me preocupava muito com definições ou textos. Para mim isso não funciona.

E: Diga conteúdos de matemática que acredita que sejam referentes à álgebra?
PY: Polinômios, Frações Algébricas, Equações Literais. É o que lembro agora. Na minha cabeça tudo que envolve incógnitas ou letras é álgebra, mas tenho algumas dúvidas. Se eu fosse descrever a geometria, me lembraria das figuras, mas mesmo na geometria tem coisas que precisam da álgebra. Por exemplo, quadrados perfeitos têm aplicações geométricas. Para mim todas as coisas que relacionam variáveis é álgebra.

E: Diga quantas palavras relacionadas à álgebra você conseguir.
PY: Letras. Acho que minha cabeça não é muito matemática. Figuras, quadrados, livros.

E: Se você tivesse que explicar para alguém que nunca ouviu falar de álgebra, como explicaria para que este entendesse facilmente?
PY: É resolver um problema com letrinhas.

E: Se a álgebra tivesse que ser outra profissão. Qual seria? Por que?
PY: Acho que não tem comparação.

E: Álgebra ou Geometria? Qual sua preferência? Por que?
PY: Acho que gosto mais de... (dúvida). Prefiro a álgebra para trabalhar, pois acho que a geometria demanda muito material. Além disso, não tenho muito costume de mexer com coisas de geometria por causa da divisão do colégio. Na verdade, não consigo separar, para mim não tem diferença.

E: O que os problemas de álgebra têm em comum com a vida cotidiana?
PY: Ai é que ta o problema. O começo da álgebra até tem alguma relação. Nunca fiz ligações desse tipo.

E: Quando você está dando aula de álgebra, quais as dificuldades que você mais nota? Dessas, quais mais te preocupam? Por quê?
PY: Potencia algébricas, frações. Ambas.

E: Numa escala de 0 até 10, qual importância você daria para: (e por que?)
Obter um resultado correto?
PY: 0, complicado isso. Quando passo exercícios de múltipla escolha peço os cálculos. Porque para mim o importante são os cálculos. Só a resposta em si para mim não vale nada.

Seguir um caminho coerente?
PY: 8, as tem coisas que pode alcançar o resultado por vários caminhos. Se meu aluno esta tendo um raciocínio bom, só não dou 10 porque há o risco de o aluno mudar de caminho e errar a resposta.

Utilizar aquilo que você acabou de ensinar?
PY: 9, neste caso não pode ser 10. para mim 10 é aquele aprende o que ensinei e também percebe outras possibilidades.

Justificar seus passos na resolução?
PY: 10, ele ta mostrando que ele sabe o que faz.

Procurar outras formas para a resolução de um problema já solucionado?
PY: 10, com certeza.

Professora Z (16 de Janeiro de 2009)

Entrevistador: O que é matemática?
Professora Z: Eu acho que é uma ciência. Ela tenta modelar os comportamentos naturais, do ser humano, das coisas que acontecem (sei lá). Também se usa como linguagem para o entendimento de outras ciências. Exemplo: na natureza, podemos modelar o crescimento de uma arvore é um modelo matemático.

E: Por que essa graduação?
PZ: Escolha de infância. Quando esta na graduação ate pensei em outras coisas mas não tanto. Na infância queria ser professora. Eu sempre tive melhor visão sobre matemática do que meus colegas de infância, mas não sabia que ia estudar o que estudei na graduação, eu sempre pensei na matemática do ensino médio.

Tudo que estudei na graduação, mesmo as vezes pensando que não era o que eu queria, encarei como algo que eu usarei para ensinar. Não que eu teria de ensinar aquilo, mas as informações da graduação me serviam como base para minhas afirmações futuras, para as coisas que ia ensinar.

E: O que vc prefere, matemática da graduação ou do ensino médio?
PZ: Acho a matemática da graduação muito interessante. No caso da matemática do ensino médio, pelo menos para o nosso nível, depois de um tempo se torna meio banal. Por isso prefiro a da graduação, porque gosto do que é novo, das descobertas. Sempre tem uma coisa nova para aprender, gosto disso.

E: Por que a matemática é tão importante no sistema educacional?
PZ: A matemática é uma ferramenta que todos usam, independentemente das pessoas pensarem que sabem ou não. Acho que ela desenvolve muito o intelecto, gera sentido. Se pensarmos no ensino ideal de matemática as pessoas pensaria melhor. Acho que quem é bom de matemática é admirado porque é difícil chegar num nível de entendimento bom. As pessoas vêem a matemática como uma grande decoreba, mas nós sabemos que não é assim. Acho que podemos ensinar matemática a qualquer um, mas tem o problema da vida acadêmica dos alunos. As vezes as pessoas já chegam em nós com vários conceitos que não conseguimos mudar facilmente. No meu caso, acho que o significado das coisas é muito importante, as descobertas, a resolução de problemas. Por exemplo: mmc e mdc, se você coloca essas coisas em problemas onde a criança tem que perceber qual dos dois ela vai usar ela aprenderá o sentido. Ela vai ter que interpretar.

E: Se a matemática fosse um animal, qual seria? Qual nunca seria?
PZ: Não diria formiga, mas elas tem comportamentos inteligentes. Por outro lado as formigas tem meio obediente demais e me da a impressão de que elas não avançam. Também poderia ser o bicho preguiça pelas simplificações.
Acho que a formiga...

E: E outra profissão? Qual nunca seria?
PZ: Medicina? Eles estão sempre atrás de uma coisa nova, de uma descoberta e porque a medicina observa comportamentos.
Operadora de Telemarketing... risos...

E: Por que licenciatura?
PZ: Escolha de infância, gosto. Professor é a profissão que nós temos mais contato. Quando comecei a trabalhar tive algumas dúvidas sobre essa escolha. Quando comecei a trabalhar vi que as pessoas tinham obstáculos muito grandes. Eu trabalhava mais com o resgate do que não foi ensinado. Isso gera um desgaste muito grande em nós, mas resolvi encarar. Prefiro as crianças. Hoje eu sou feliz como professora. Ainda não me sinto a professora que eu idealizei quando entrei na faculdade.

E: Na sua opinião, qual o objetivo do ensino de matemática?
PZ: Não é formar matemáticos. Não quero que eles façam matemáticos. O ensino de matemática tem que servir a todos, embora ensinemos coisas que não façam parte da vida cotidiana mesmo das pessoas, temos que preparar as pessoas para que elas tenham uma base matemática para qualquer profissão que eles escolham. Tem o problema do dia-a-dia, essa palavra não quer dizer que é a matemática do super mercado (como muita gente acha), o dia-a-dia varia de profissão para profissão.

E: Que conteúdos matemáticos são mais importantes para a aprendizagem em matemática?
PZ: Operações numéricas, ele também precisa ter a abstração da álgebra. Para aprender as operações algébricas.

E: Qual sua opinião sobre o currículo de matemática?
PZ: O currículo de matemática é formal, extenso, poderia ser melhor dividido, e não sei qual conteúdo a ser retirado, acho tudo o que está lá importante.

E: Se você fosse Ministro da Educação, mudaria alguma coisa referente ao ensino da matemática? Porque?
PZ: Modificaria a estrutura da escola. Ter mais tempo de aula, mais espaço de abordagem diferente do que a sala de aula. A abordagem poderia ser diferente, os livros didáticos.

E: O que você acha mais importante no aprendizado da matemática?
PZ: O importante no aprendizado da matemática é questionar, duvidar, não ter plena confiança no professor, que faça experiências com o ensinamento recebido, etc.

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da matemática?
PZ: construtivista.

E: Qual a mais atrativa?
PZ: Construtivista – (mais atrativa) jogos, competições, interação.

E: Qual a mais chata?
PZ: Exposição sem interação.

(18 de Janeiro de 2009)
E: O que é álgebra?
PZ: Abstração – modo de operar com coisas que não são concretas.

E: Diga conteúdos que você julgue referentes à álgebra. Diga também palavras.
PZ: Funções, Geometria Analítica (álgebra geométrica), Equações, Polinômios, Abordagem geométrica. Letras, abstração, modelagem, filósofo (porque abstrai).

E: Se a álgebra fosse um animal, qual seria, Porque? Qual animal a álgebra nunca seria? Porque?
PZ: sem resposta

E: E uma profissão?
PZ: sem resposta

E: Álgebra ou Geometria? Qual sua preferência? Porque?
PZ: Álgebra, pela abstração.

E: Se tivesse pouco tempo para ensinar álgebra, o que você priorizaria?
PZ: Operações algébricas (manipulação de expressões).

E: Qual a abordagem mais efetiva para o ensino da álgebra?
PZ: Relacionar a álgebra sempre com alguma coisa concreta.

E: Qual a mais divertida (atrativa)?
PZ: sem resposta

E: Qual a mais chata?
PZ: sem resposta

E: Se tivesse que explicar para alguém que nunca ouviu falar sobre álgebra, o que é um problema de álgebra, o que você diria?
PZ: Falta de informação que se quer encontrar.

E: O que os problemas de álgebra tem a ver com o cotidiano?
PZ: Ferramentas de álgebra – permite descobrir valores desconhecidos, modelar situações.

E: Quais erros um aluno de álgebra não pode cometer?
PZ: Quando não entende, por exemplo, que 3X é 3 vezes X. Ou: 3X+5 =8?

E: Qual importância você daria (0 a 10) para?

Obter a resposta certa – 7.
Seguir um caminho coerente – 10
Usar o que acabou de ensinar – 6
Justificar os passos da solução – 10
Procurar novas soluções para o problema resolvido – 10

E: Quais são os problemas mais comuns no aprendizado da álgebra?
PZ: Operações (monômios de graus diferentes, distributiva).

E: Já perguntou se sua aula está boa?
PZ: Não

Anexo 2: Livros escolhidos pelas professoras e os comentários feitos por elas.

PROFESSORA X (7 de Junho de 2009)

Praticando matemática: Não sei se é um defeito, deve até ser, mas gosto muito desse livro porque acho muito boa a maneira como o autor coloca as frases que interessam, bastantes exercícios. Tem coisas que ele define numa frase, acho que assim fica mais prático e fácil. Na verdade, acho que a matemática poderia ser, pelo menos para os alunos, de um jeito mais prático que assustassem eles, sem esticar muito o assunto. Por exemplo, os livros de hoje em dia, costumam colocar texto para introduzir o assunto, acho que poderiam ser mais diretos. Uma coisa que não gosto em alguns livros de hoje em dia é o fato de eles trazerem exercícios muito misturados, não seguem um aumento gradativo de dificuldades, vejo que o livro do Andrini tem essa preocupação, gosto disso. Uma crítica que posso fazer deste livro é que ele não apresenta muitas questões práticas.

Matemática: Gostei muito desse justamente pelo estilo. Veja, ele é bem direto, mostra um assunto de forma simples e já traz exercícios.

Matemática: Uma aventura do pensamento: Não gosto desse porque ele enrola muito.

Tudo é matemática: Esse é muito bom porque mescla álgebra com geometria, mas não tem muito bla bla bla, está vendo?. Acho que levaria até os dois livros para a sala de aulas (Dante e Bianchini).

PROFESSORA Y (14 de Junho de 2009)

Praticando matemática: Gosto desse porque ... não que seja passo a passo, as explicações são simples e diretas. Ele explica um determinado assunto, ai vem os exercícios para praticar, os outros livros são mais detalhistas. Também tem muitos exercícios. Por exemplo, os produtos notáveis, veja como ele desenvolve (p. 68). Aí nos exercícios ele separa os grupos de exercícios.

Fazendo a diferença: Eu penso muito mesmo nos exercícios. Este livro já envolve a geometria com a álgebra. Aqui tem um problema, ele coloca os produtos notáveis muito depois das equações, separado dos polinômios, eu acho que isso deve estar sempre junto. Gosto muito de usar os testes (p. 276). Gosto de colocar questões de concurso para os alunos perceberem que o que fazemos aparece fora da escola. Eu acho que seria comum para meus alunos é uma questão como essa (7 p. 276), essa (11), seria uma questão difícil mais seria ótima para os alunos perceberem algumas regras.

Matemática e realidade: Este tem uma parte histórica que acho legal. Ele tem uma ordem que não costumo usar. Na verdade esse trabalha mesclando geometria e álgebra. Gostei desse livro porque ele explica a teoria e da vários exemplos, porque posso praticar com eles. Acho que exercício (p. 193) é muito complicado para meus alunos. Olha só, gosto muito de questões assim (7 p. 194) .

Construindo consciências – matemática: Não gosto muito deste tipo de exercícios (54 p. 151), além de ter muito pouco. Essa coisa de completar o que ta faltando para produtos notáveis. Não gostei muito desse livro. Costumo primeiro ensinar isso fazendo a distributiva e no fim mostro que existe uma fórmula. Costumo fazer os exercícios das duas maneiras. Não costumo usar essa demonstração geométrica dos produtos notáveis, prefiro a algébrica. Eu até poderia usar questões com áreas, mas não ensinaria a partir disso.

Educação Matemática: Acho esse livro muito complicado. Não consigo nem achar o conteúdo. Esse livro está bem misturado, as idéias estão muito juntas. Acho ruim usar a abordagem desse livro por causa do tempo. Eu não usaria esse livro. Para não dizer que o livro é simplesmente ruim, ele tem muita aplicação e acho isso útil.

Matemática e Você: Acho que este livro leva o aluno a tirar suas próprias conclusões. Olha, nunca trabalhei dessa forma, mas tem o problema do tempo. Nossa realidade não nos dá tanto tempo assim, gostei do livro porque tem muitos exercícios. Veja esse exemplo é legal porque tem umas idéias legais, mas não acho que seria viável desenvolver isso tudo. Apesar de poucos exercícios, eles estão bons.

Anexo 3: Aulas

Professora X

1ª aula (18/05)

A professora trouxe alguns exercícios sobre relações entre conjuntos. As definições de domínio (a professora disse que é o conjunto “de quem se liga”), imagem (a professora disse que é o conjunto a quem se liga) e contra-domínio (união da imagem com outros elementos) foram relembradas. Todos os conjuntos utilizados na aula eram de natureza discreta.

A aula prosseguiu com a do seguinte exercício.

Dados os conjuntos A = {1,2,3} e B = {0,2,3,6,7} construa o gráfico das relações

R1 = {(x,y) Є AxB / y = 3x – 1}
R2 = {(x,y) Є AxB / y = x + 1}
R3 = {(x,y) Є AxB / y = 2x}

Na resolução deste exercício, a professora ressaltou a necessidade descobrir os valores de x e y. x, usa-se os valores do domínio e y é o valor numérico da expressão em x.

2ª aula (19/05)

Visando uma espécie de provão que seria aplicado na escola, a professora apresentou uma revisão sobre radicais. Os alunos tiveram algumas dificuldades com esse assunto. Os exercícios foram todos semelhantes ao seguinte:

$\sqrt{27} + \sqrt{3}$

A resolução destes exercícios usou os seguintes procedimentos: Decompunha-se o maior número em fatores primos e em seguida utilizava-se propriedades dos radicais e das potências para simplificar as expressões, como:

$\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, assim
$\sqrt{27} + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

A professora, durante a resolução destes exercícios, afirmava que a simplificação dos radicais sempre levaria à raízes com o mesmo radicando.

3ª aula (25/05)

De volta as funções, a professora apresentou uma rápida explicação sobre a igualdade f(x) = y nas funções. Logo após, a professora continuou a aula falando sobre determinar domínios para funções. Os exemplos apresentados foram:

$f(x) = 2x + 1$; $f(x) = \frac{5}{(x - 3)}$; $f(x) = \sqrt{2x + 8}$

A professora, ao tentar determinar (palavras dela) o domínio das funções acima, afirmou que era necessário observar as expressões e perceber o que precisava acontecer para que a função pudesse existir, em outras palavras, quais os valores que x pode assumir para que a função possa existir.

No primeiro exemplo: x pode ser qualquer valor
No segundo exemplo: $x - 3 \neq 0$ e assim, $x \neq 3$
No terceiro exemplo: $2x - 8 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 8$ e assim, $x \geq 4$

É importante destacar o fato de os alunos terem apresentado certa facilidade em lidar com as inquações apresentadas nesta aula.

Professora Y

1ª aula (14/04)

Esta aula foi para fixar as teorias, sobre análise combinatória, apresentadas na aula anterior. Sendo assim a professora começou com um exercício de aplicação da fórmula de combinação:
Exercício: $C_{x,2} = 10$ (*Será que os alunos percebem facilmente a ligação entre $C_{n,p}$ e $C_{x,2}$?*)
Com este exemplo a professora relembrou a fórmula de combinação e escreveu a seguinte equação:

$x!/2!(x-2)! = 10$
Para que fosse o possível o entendimento sobre como a expressão acima funciona ela fez uma discussão sobre o significado da palavra anterior no contexto no qual a questão estava envolvida. *Comparação feita pela professora*:
"7! = 7.6.5.4.3.2.1, observem que se diminuímos 1 para achar o número anterior. 6 é anterior a 7, pois 6 = 7 – 1. Desta forma se quisermos descobrir o antecessor de x temos que tirar um do número x, lembrem-se que x é um número desconhecido. Sendo assim, o anterior de x é x – 1. (*Aqui existe uma evidência de uso da álgebra como aritmética generalizada. É importante lembrar que a professora pode concebê-la assim ou ter apenas recorrido ao que ela acha ser mais fácil de os alunos compreenderem*).
Após essa discussão, a professora com a seguinte implicação:
$x!/2!(x-2)! = 10 \Rightarrow x(x-1)(x-2)!/2!(x-2)! = 10 \Rightarrow x(x-1)/2 = 10$
Neste ponto a professora explicou que não havia necessidade de continuar a expandir x! além de (x-2), pois seria possível "cortar" as partes iguais do numerador e denominador (*É interessante notar que desta vez a professora não realizou uma nova discussão sobre o fato de multiplicação e divisão serem operações inversas ou então alguma alusão a aritmética que garanta que (x-2)! Funciona da mesma forma que x!*). Podemos destacar aqui o caráter procedimental da abordagem da professora na qual algumas regras têm motivações e outras não.
Para concluir o exemplo a professora faz uso de uma regra para proporções e afirma que:
$x(x-1) = 10.2 \Rightarrow x^2 - x = 20 \Rightarrow x^2 - x - 20 = 0$

2ª aula (16/04)
Esta aula deu continuidade aos temas discutidos na aula anterior. A professora apresentou novos exercícios, de uma maneira geral (nas palavras dela misturando permutações, arranjos e combinações). Todos os exercícios foram de aplicação direta das fórmulas, entre os quais podemos destacar o seguinte exercício.
Calcule o valor da expressão: $y = P_3 + 2A_{6,4} - C_{6,2}$

A argumentação utilizada durante a resolução desse exercício foi uma tentativa de explicitar as características da notação combinatória para que fosse possível lembrar das fórmulas, que segundo ela deveriam ser usadas separadamente. Nestas argumentações, a professora apresenta considerações sobre as limitações das fórmulas, como por exemplo:
Em $C_{n,p}$ é necessário que $n > 1$ e $n > p$

A professora ainda apresentou mais dois exercícios de mesma natureza.

3ª aula (12/05)
Esta foi uma das aulas sobre progressões geométricas. A abordagem utilizada foi a mesma das aulas de combinatória. A professora começa com o seguinte exercício. Quantos termos existem na PA (-6, -9, -12, ..., -66)?

A resolução deste problema partiu diretamente da fórmula $a_n = a_1 + (n - 1)r$. A professora identificou os valores conhecidos e ressaltou: "falta o n". A partir daí, segue a resolução com a substituição dos valores:

$$
\begin{aligned}
-66 &= -6 + (n - 1)(-3) \\
-66 &= -6 - 3n + 3 \\
-69 &= -3n \\
3n &= 69 \\
n &= 23
\end{aligned}
$$

A aula termina com uma demonstração da fórmula para a soma dos n primeiros termos de uma PA. Após a aula a professora declarou que a demonstração não seria discutida na aula seguinte. Segundo ela, é importante os alunos terem isso registrado, mas no fim das contas o que vale é a fórmula.

Anexo 4: Conversa com alunos das professoras

Alunos da professora X

<u>*Dê um exemplo de um problema de álgebra. (não precisa resolvê-lo)*</u>
(X1) Sabendo que a soma de 2 números naturais é 8, e a diferença entre esses números ´4, calcule esses dois números.
(X2) Sabe – se que x vale 13 e y vale 9. Qual é a soma de x e y?
(X3) Sabendo que x vale 2 e y vale 10. Calcule a expressão x + y.4 – 10

<u>*Dê um exemplos de um exercício de álgebra. (não precisa resolvê-lo)*</u>
(X1) Resolva a seguinte expressão algébrica: 3 – (+5 – 3) – (4.5 + 3) + (10 + 3.2)
(X2) Resolva a expressão algébrica: 4(10 – 15)20.3 =
(X3) Ache o valor de x: x + 20 – 4 = 26

<u>*O que você geralmente procura nos exercícios de álgebra?*</u>

Expressões e nomes de objetos matemáticos.	*( )*
Pistas sobre o que deve fazer para resolvê-los	*(2)*
Se há todos os dados necessários para resolvê-los	*(1)*

(X2) acho que muitas contas podem ter pegadinhas ... precisamos ver isso.
<u>*Quais dessas palavras você acha que têm relação com álgebra: Regras, exatidão, métodos, raciocínio, imaginação, senso comum? Pode escolher mais de uma.*</u>

Regras: Tem relação
(X1) Para fazermos algumas contas, precisamos regras, (X2) por que tem fórmula e isso precisa de *regra. Tudo em matemática tem conta e fórmula*? (X1) Nem tudo na matemática tem fórmula, mas não consigo lembrar agora.

Exatidão: Tem relação
(X1) as contas tem que dá o mesmo número de todas as formas.

Método: Tem relação
(X1) São as formas de fazer os exercícios de álgebra, alguma conta também.

Raciocínio: Tem relação
(X2) é importante raciocinar para lembrar as formulas. (mas não precisamos de fórmulas?) (X2) o raciocínio é preciso, pois no caso de esquecermos as fórmulas...

Imaginação: Mais ou menos
(X1) para criar exercícios precisam de imaginação.
(X2) acho que é mais quando não sabemos o que fazer, porque ai fica viajando...

Senso comum: Não tem relação
(X3) por que cada um tem o seu conceito de uma matéria. Álgebra é mais preciso que isso.

Quais das palavras da pergunta anterior você acha que seu professor escolheria?

Regras, métodos, esse tem que ter, pois cada um tem que ter um método de fazer...: (X2), Raciocínio (X1), (X3) regras e métodos.

E dessas palavras (praticar, memória, investigar, pensar, discussão). Quais delas você mais relaciona com álgebra? Quais o seu professor escolheria?

Pratica: Mais para o professor
(X2) Lembra mais para professor. (X3) precisa praticar

Memória: Tem relação (X2) precisamos da fórmula.

Investigar: Tem relação (X1) porque agente sempre tem que investigar uma forma de fazer. (X3), na prática precisamos verificar nossas respostas, isso é investigar.

Pensar: Tem relação (X1) funciona como raciocínio.

Discussão: Mais ou menos (X3) a professora discute conosco, acho que é mais para tirar dúvidas. (X1) também serve para descobrir novas formas de fazer alguma coisa.

Escolha da professora.
(X2) ela usa muita discussão. Ela também pratica muitos exercícios.

O que você acha que seu professor espera de você?

(X2) força de vontade. Precisamos praticar bastante.
(X3) desempenho

O que você mais sabe sobre álgebra?

(X1) sistemas. Porque ... acho mais fácil
(X2) gosto de achar o valor de x
(X3) sistemas também

Gostamos mais de geometria, pois é mais fácil, já que álgebra tem muitas fórmulas.
(X1) a álgebra tem muitos desvios

Você gostaria de saber tudo sobre álgebra?

(X1) não, só as coisas que eu usaria no dia-a-dia. (X2) acho que tudo é usado no dia-a-dia, por exemplo num concurso. (X3) as outras coisas só confundem nossa cabeça. (X2) é necessário para concursos.

Na sua opinião, para que serve álgebra?
(X2) para concursos, provas. (X1) não serve para muita coisa

Alunos da Professora Y

Dê dois exemplos de problemas de álgebra. (não precisa resolvê-los) – Não fizeram
Dê dois exemplos de exercícios de álgebra. (não precisa resolvê-los)

(Y1) Resolva: $C_{5,x} = 6$
(Y2) Resolva a equação: $x^2 + 7x - 14 = 0$
(Y3) Em uma classe com 40 alunos. Qual a probabilidade de serem escolhidos 2 representantes e 1 assistente?

O que você geralmente procura nos exercícios de álgebra?

Expressões e nomes de objetos matemáticos. (3)
Pistas sobre o que deve fazer para resolvê-los (2)
Se há todos os dados necessários para resolvê-los (1)

Quais dessas palavras você acha que têm relação com álgebra: Regras, exatidão, métodos, raciocínio, imaginação, senso comum? Pode escolher mais de uma.

(Y1) raciocínio, (Y2) métodos, (Y3) regras.

Quais das palavras da pergunta anterior você acha que seu professor escolheria?

Os três...

E dessas palavras (praticar, explicação, memória, investigar, pensar, discussão). Quais delas você mais relaciona com álgebra? Quais o seu professor escolheria?

Acreditamos que todas essas palavras têm relação com álgebra. A professora escolheria a prática.

O que você acha que seu professor espera de você? – Esforço.

O que você mais sabe sobre álgebra?

(Y1) análise combinatória
(Y2) probabilidade
(Y3) equações.

Você gostaria de saber tudo sobre álgebra?

(Y1) não, acho coisa demais.
(Y2) sim, gosto muito de números.
(Y3) gostaria de aprender o suficiente para me virar.

Na sua opinião, para que serve álgebra? – Não respondido

Anexo 5: Autorização

AUTORIZAÇÃO

Eu,____,brasileiro/a,

residente a rua____ n° ________em

__________________,_____________________-RJ, Professor/a de Matemática

(bairro) (cidade)

, graduado/a na ___________________________________em _____/_____/_____

(Universidade onde concluiu o Curso de Licenciatura em Matemática)

Lotado na ____,

(estabelecimento de ensino onde leciona)

_____________________,Identidade_________________,CPF.________________
____________________, com a certeza que o sucesso de cada um depende do aprendizado coletivo, autorizo o Professor de Matemática, Magno Luiz Ferreira a gravar a entrevista concedida por mim a ele em ____/____/200__, acessar meus planos de aulas, assistir e gravar minhas aulas, bem como, entrevistar meus alunos e divulgar, *sem usar minha identificação e dos referidos alunos*, em todos os meios que lhe sejam necessários para auxiliar em sua formação no Curso de Mestrado no Ensino da Matemática da UFRJ.

____________________,_____/_____/2009.

(Local e data).

____

(assinatura)

Anexo 6: Declaração

Declaração

Eu, ____, ________________
(Nacionalidade)

residente à rua ____, nº ____ em

______________________, _________________________ - _________________,
(Bairro) (cidade) (estado)

CPF.___________________________, Identidade __________________________,

Diretor do/a ____,

sito à ____,

declaro estar ciente que o professor de Matemática, Magno Luiz Ferreira se fará presente em nosso estabelecimento, na sala de aula do professor ____, nos dias ______________________, do mês de _________________________ de 2009, a fim de fazer pesquisa para a conclusão de seu curso de Mestrado no Ensino da Matemática da UFRJ.

________________________________, ____/_____/2009.
(local e data)

____
(assinatura)