Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Vinicius Mendes Couto Pereira

Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade

Rio de Janeiro, RJ – Brasil
2009

VINICIUS MENDES COUTO PEREIRA

Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Prof[a] Dr[a] Ângela Rocha dos Santos

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
2009

Pereira, Vinicius Mendes Couto.
Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade/ Vinicius Mendes Couto Pereira – Rio de Janeiro, 2009.
182 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM, 2009.

Orientadora: Ângela Rocha dos Santos.

1. Ensino de Cálculo. 2. Cálculo no Ensino Médio. 3. Mathlets.
I. Santos, Ângela Rocha dos (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade

VINICIUS MENDES COUTO PEREIRA

Cálculo no Ensino Médio: Uma Proposta para o Problema da Variabilidade

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____
Professora Ângela Rocha dos Santos, Drª
Instituto de Matemática - UFRJ
Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

____
Professor Victor Augusto Giraldo, Dr
Instituto de Matemática - UFRJ

____
Professor Wanderley Moura Rezende, Dr
Instituto de Matemática - UFF

____
Professor Paulo Roberto Trales, Dr
Instituto de Matemática - UFF

Rio de Janeiro
25 de março de 2009

“A vocês eu deixo o sono.
O sonho não!
Este, eu mesmo carrego!”

Paulo Leminski

Dedicatória

À minha mãe Lise Agnes, seu amor e dedicação foram fundamentais para o sucesso da minha história de vida.

À minha amada esposa Ana Paula e a meus lindos filhos Raquel e Daniel, presentes de Deus pra minha vida.

Agradecimentos

Ao meu Deus, razão da minha existência, presente comigo em todos os instantes.

Aos meus pais, Clovis e Lise, pelo amor incondicional e por sempre acreditarem em mim.

À minha amada esposa, Professora Ana Paula, pelo amor, carinho e companheirismo, fundamentais em muitos momentos desta caminhada.

Aos meus maravilhosos filhos, Raquel e Daniel, seus sorrisos fortalecem-me a cada dia.

À minha orientadora, Professora Ângela Rocha, pela sugestão do tema, pelo exemplo, companheirismo e pelas tantas sugestões.

Aos membros da douta Banca de Qualificação, Professor Victor Giraldo, Professor Wanderley Rezende e Professor Paulo Trales, pelas valiosas sugestões e contribuições, que se tornaram muito importantes para a realização deste trabalho.

Ao Coordenador do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática, Professor Victor Giraldo, por acreditar que a força de vontade e o potencial podem superar as dificuldades impostas pela logística.

À Faculdade Salesiana Maria Auxiliadora (FSMA), na pessoa da Ir Maria Léa Ramos, pelo apoio financeiro, fundamental para os meus deslocamentos semanais ao Rio de Janeiro.

Às diretoras do Instituto Nossa Senhora da Glória (INSG), Ir Regina Maria Meireles e Ir Ana Tereza Pinto, pelo total apoio dado a esta pesquisa.

Aos Coordenadores Pedagógicos do INSG, Elma Bichara, Scheila Abreu, Balade Ayala e Júlio Boldrini, por tantas vezes viabilizarem meus deslocamentos.

Aos queridos alunos, Marcelo, Ênio, Lucas, Paula, Noêmia, Aloizio, Lígia, Elton, Rafael, Luiz Fernando, Lorena, Brenda, Johann, Marina, Fábio e Fernanda pela sua imensurável ajuda.

Ao meu irmão Clovis Júnior, pelo seu companheirismo.

Aos queridos padrinhos, Waldir Algemiro e Maria Helena Algemiro pelo exemplo, carinho e confiança no meu potencial.

Aos colegas do Mestrado da turma 2006, pela cumplicidade de nossa convivência, em especial, aos colegas Victor Paixão e Francisco.

Ao querido Pastor Paulo Rosa Marchon, pelas orações, pelo carinho e pela convivência de tantos anos.

Aos queridos irmãos da CBA pela convivência enquanto família.

Aos amados conselheiros, Izalmir e Edith, por estarem conosco em todos os momentos.

Aos amigos mais chegados que irmãos, Jorge e Carol, pela inestimável amizade.

Aos meus sogros, Nilton e Mirtes, pelo apoio dispensado em tantas oportunidades.

Aos professores Sérgio Fonseca, Ana Siária, Sandra Lucas, pela leitura crítica deste trabalho.

Resumo

As dificuldades existentes com o ensino de Cálculo nos cursos iniciais das universidades brasileiras constituíram-se como tema motivador deste trabalho.

Nessa mesma linha e tendo como pano de fundo as dualidades essenciais e os mapas conceituais do Cálculo, Rezende (2003) consubstanciou cinco macro-espaços de dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo e identificou, em essência, um único lugar matriz dessas dificuldades: **o da evitação/ausência das idéias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de Matemática.**

Considerando principalmente esta última constatação e os macro-espaços citados, concebemos uma proposta de inserção de algumas idéias do Cálculo no ensino médio, tendo como metodologia o conceito de Engenharia Didática, desenvolvida pela Escola Francesa de Didática da Matemática.

Esta proposta foi aplicada a dezesseis alunos do 1° e 2° anos do Instituto Nossa Senhora da Glória, utilizando pequenos aplicativos computacionais escritos em linguagem JAVA, os mathlets, como um organizador genérico, no sentido definido por Tall (1989).

A partir da análise do resultado dessa experiência, chegamos a algumas conclusões que corroboraram as hipóteses feitas no transcorrer do trabalho. Dentre estas conclusões, mostramos que é perfeitamente possível tratar das idéias e conceitos do Cálculo no Ensino Médio e que esta abordagem, tem o potencial não somente de diminuir os grandes índices de reprovação verificados hoje nas disciplinas de Cálculo, no nível superior de ensino, mas

também o de melhorar a qualidade do ensino de matemática do próprio Ensino Médio.

Abstract

The existing difficulties of teaching Calculus in the beginner's courses in the Brazilian Universities were the main motivation for this work.

Being on this way, and having as background the essential dualities and the conceptual maps of Calculus, Rezende (2003) consubstantiated five macro spaces of the difficulties in learning of an epistemological nature in the teaching of Calculus, and was identified, essentially, a single point of their origin: **the omission/absence of the basic ideas and the construction problems of Calculus in teaching of Math in elementary school.**

Considering, mainly, this last confirmation and the macro spaces, we conceive a proposal for include some of Calculus ideas in high school, having methodology the concept of didactic engineering, defined by the French School of the Mathematics Didactic.

This proposal was tested with sixteen students from first and second grades of Instituto Nossa Senhora da Glória, using a few computer applicatives in JAVA language, the mathlets, as a generic organizer, as Tall (1989) has defined before.

Since the analyses of the experimental results, we came up with conclusions which proved the hypothesis given during the work. Among these conclusions , we concluded that it is possible to make useful use of Calculus ideas and concepts in high school and this approach has potential not only in decreasing the University of failures observed today in Calculus, but also to improve the quality of the Mathematics teaching in high school.

SUMÁRIO

Capítulo 1. Introdução

1.1 O Problema

A Sociedade Brasileira de Matemática em um de seus boletins informativos de 1995, expressa, da seguinte forma, uma grande preocupação das universidades brasileiras nos últimos anos:

O ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento em diversos fóruns em função das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, bem como pela alta evasão dos estudantes dos primeiros períodos, matriculados nesta disciplina. (p. 4) (Barreto 2005 apud Reis 2001)

Em especial, nos últimos anos, vários trabalhos de pesquisa têm se dedicado a estudar esse fenômeno. De fato, os índices de evasão e reprovação revelados em algumas pesquisas tornam evidente o que Rezende (2003) chama de "fracasso no ensino de Cálculo". Por exemplo, Barufi (1999) nos revela em sua pesquisa que, no ano de 1995, no Instituto de Matemática e Estatística da USP, a taxa de não-aprovação (alunos reprovados por nota, falta ou desistência) na disciplina MAT 135 – (Cálculo para funções de uma variável real) foi de 66,9%. Já na disciplina MAT 131 - Cálculo Diferencial e Integral foi de 43,8%. No Instituto de Geociências da USP onde, segundo Barufi (1999), o curso de Cálculo é mais adaptado a realidade local, a taxa de aprovação foi de apenas 35%.

Rezende (2003) revela taxas ainda mais alarmantes na Universidade Federal Fluminense. Na UFF, no período de 1996 a 2000, a variação do índice de não-aprovação se encontrava na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o Curso de Matemática, essa não foi inferior a 65%, ou seja, nesse período não se aprovou mais que 45% em uma turma de Cálculo, no curso de Matemática.

Essas estatísticas, que consideramos extremamente alarmantes, nos motivaram a fazer uma observação da nossa própria realidade no que diz respeito ao número de não-aprovados nos cursos iniciais de Cálculo. A partir disso, coletamos alguns dados na Universidade Federal do Rio de Janeiro, relativos ao ano letivo de 2005.

Na UFRJ, os índices de não-aprovação, em 2005, são altos. Embora tenha existido uma turma com apenas 7% de não-aprovação, encontramos também turmas com esta taxa chegando a 73%. No curso de Matemática, 58% dos alunos que fizeram Cálculo I, no 1º semestre de 2005, não foram aprovados. De forma semelhante, os alunos dos cursos de Química, Geologia, Astronomia e Meteorologia que fizeram Cálculo I, neste período, tiveram um desempenho parecido com os alunos de Matemática: o índice de não-aprovação foi de 54%. Entretanto, observamos que o índice de não-aprovação diminui quando consideramos os alunos dos cursos de Engenharia. No primeiro semestre de 2005, o índice de não-aprovação nos cursos de Cálculo I, entre esses alunos, foi de 42%. Já no segundo semestre desse mesmo ano, tal índice subiu para 48%. Um outro fato interessante é que, considerando todas as turmas, a taxa de aprovação no primeiro semestre de 2005 é praticamente a mesma daquela observada no segundo semestre desse mesmo ano.

Poderíamos pensar que esses índices seriam menores nas turmas de Engenharia, já que, em geral, a relação candidato-vaga no vestibular para esta carreira é consideravelmente mais alta do que as outras carreiras que têm disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral em seu quadro de disciplinas. Contudo, observando os gráficos abaixo percebemos que as taxas de não-aprovação relacionadas aos cursos de Engenharia são praticamente idênticas às taxas quando são considerados todos os cursos de Cálculo da UFRJ.

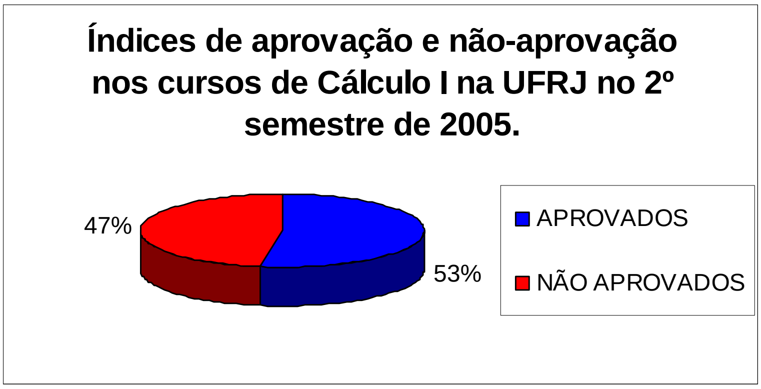


Figura 1

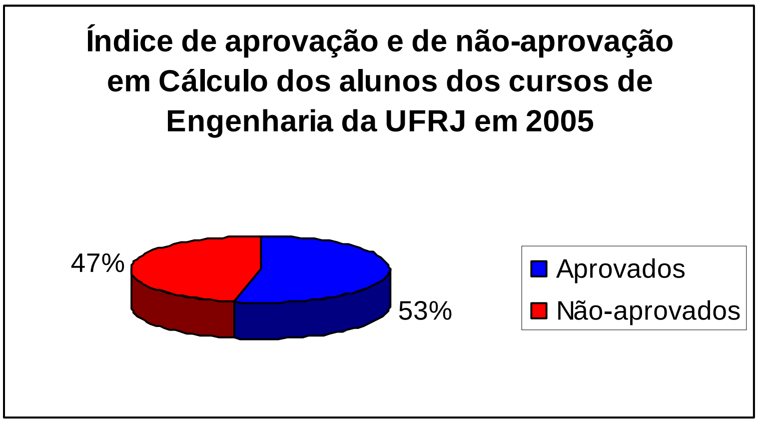


Figura 2

Dessa forma, podemos concluir que os índices de não-aprovação nas turmas de Cálculo na UFRJ são muito preocupantes, assim como os índices mostrados nas pesquisas mencionadas anteriormente.

O problema do ensino de Cálculo, porém, está longe de estar restrito apenas ao contexto brasileiro, visto que, em outros países, muitos trabalhos relacionados a esse assunto têm sido publicados e recebido atenção especial por parte da literatura especializada.

Podemos destacar, por exemplo, o trabalho do Professor David Tall, um dos criadores da área de pesquisa denominada Pensamento Matemático Avançado, o qual é um dos suportes teóricos para o nosso trabalho. Tall (1981), a partir deste seu clássico artigo, sugere que o ensino de Matemática não deve ter o foco apenas na construção formal de um dado conceito, mas que uma gama de idéias e relações devem estar presentes na abordagem pedagógica deste conceito.

Outro movimento internacional, que merece ser citado, é o chamado “Calculus Reform”, iniciado na década de 80. Uma das características básicas desse movimento é a inserção de programas educacionais no ensino de Cálculo, usados tanto para o aprendizado de conceitos quanto para resolução de problemas. Todas as atividades são baseadas na chamada “Regra dos Três”, isto é, todos os problemas devem ser abordados numérica, geométrica e analiticamente.

Reis (2001) descreve, em poucas palavras, 30 trabalhos relacionados ao Ensino de Cálculo apresentados no ICME 8 (Internacional Congress on Matematical Education) . Esse número é uma enorme evidência de que o ensino de Cálculo tem motivado diversas pesquisas em todo o mundo e que o “fracasso no ensino de Cálculo” está muito longe de ser exclusivo do Brasil.

Na tentativa de superar esse "fracasso", um procedimento que tem se tornado normal em nossas universidades é a criação de disciplinas especialmente voltadas para suprir deficiências apresentadas pelos alunos recém-egressos do Ensino Médio. Em algumas universidades, essas disciplinas são chamadas de

Cálculo Zero, em outras, de Pré-Cálculo e, ainda em outras, por nomes semelhantes. O objetivo das referidas disciplinas é o mesmo em quase todas as Universidades: preparar o aluno para o curso inicial de Cálculo.

Achamos bastante preocupante os indícios existentes de que a implantação nos currículos dessas disciplinas está longe de surtir o efeito desejado. Por exemplo, Rezende (2003) nos revela que, a partir do segundo semestre de 1997, foi introduzida uma disciplina obrigatória denominada Matemática Básica na grade curricular do curso de Matemática na UFF. Esperava-se, com a introdução desse curso, que fosse diminuído, consideravelmente, o índice de alunos não-aprovados em Cálculo I, mas o que aconteceu foi completamente diferente: os índices de não-aprovação em Cálculo I não se alteraram e os índices de não-aprovação em Matemática Básica se tornaram tão altos quantos os índices de Cálculo I. Estes índices permaneceram na faixa de 70% a 90%, chegando a ultrapassar a 90% no segundo semestre de 1998.

Diante desse problema, que se estende durante anos, e das tentativas de resolução, na maioria das vezes ineficientes, consideramos pertinente a comparação escrita por Reis (2001):

> *Comparando, ainda que de forma simplista, a situação com uma encenação teatral vemos, de um lado, os atores (professores) atuando em uma peça mal ensaiada e mal dirigida, fazendo com que o público (alunos), de outro lado, não capte sua mensagem e se retire antes do último ato. De quem é a culpa: do palco da sala de aula? Dos atores e sua má performance ou do público e sua insensibilidade? Ou seria do diretor?*

A partir dessa reflexão pode surgir o seguinte questionamento. De quem seria a culpa pelos enormes índices de não-aprovação nos cursos iniciais de Cálculo? Dos professores ou dos alunos?

Reis (2001) nos mostra que Barreto[1], quando questionada a respeito dos altos índices de reprovação nas disciplinas iniciais de Cálculo e dos motivos que levam os alunos a não apresentarem um bom desempenho nelas, afirma, categoricamente, que o aluno e a escola são os principais responsáveis:

As causas são muitas e já bem conhecidas, principalmente a má formação adquirida durante o 1º e 2º graus, de onde recebemos um grande contingente de alunos passivos, dependentes, sem domínio de conceitos básicos, com pouca capacidade crítica, sem hábitos de estudar e conseqüentemente, bastante inseguros.
(Barreto 2005 apud Reis 2001)

Entretanto, Cabral (1992), ao questionar alunos de um curso de Cálculo com respeito as suas próprias dificuldades, obteve as seguintes respostas:

- Já trabalham e nada do que é ensinado tem aplicação ou ligação.
- As aulas são monótonas.
- O professor não demonstra segurança na matéria.
- O professor se esforça mas não expõe bem.

Percebemos, então, que na visão dos estudantes entrevistados, o problema está relacionado à forma como o professor conduz sua prática pedagógica.

Independente do ângulo em que se enxerga a questão, o problema existe e muitas tentativas, em vários países, têm sido realizadas no âmbito de solucioná-lo.

1.2 O Ensino de Cálculo

Concordamos com Reis (2001) quando afirma:

A "tradição" dos limites é, indiscutivelmente, a tendência predominante no ensino atual de Cálculo.

[1] Barreto, A. Uma das coordenadoras do Projeto "Atendimento especial em Cálculo I" realizado no Instituto de Matemática da UFRJ.

Essa afirmação é sustentada em duas constatações feitas por Reis (2001):

1) tradicionalmente, o ensino de Cálculo é iniciado por meio da noção de limite de uma função, e todos os conceitos seguintes são fundamentados no conceito de limite, ou seja, a continuidade depende do limite (existir e ser igual ao valor da imagem da função no ponto); a derivada é um limite (do quociente incremental); a integral é um limite (das somas de Riemann);

2) foi verificado que, na maioria dos livros didáticos pesquisados, o desenvolvimento da teoria de derivadas e integrais é posterior à apresentação dos limites. Esses, em geral, são definidos a partir do par $\varepsilon - \delta$ e, em seguida, são destacadas as principais propriedades e alguns teoremas mais importantes relacionados aos limites.

Dessa forma, podemos perceber que as disciplinas de Cálculo, assim como as de Análise, estão fundamentadas na noção de limite. Segundo o historiador inglês Ivor Grattan-Guinness[2], uma das principais causas dessa tradição se deve ao movimento de Aritmetização da Análise, visto que, na busca pelo rigor, as redefinições de conceitos como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade utilizando a linguagem dos limites, representaram garantia inquestionável de obtenção de um nível de formalização bastante aceitável para os padrões acadêmicos da época e, porque não dizer, para as exigências acadêmicas atuais da sociedade matemática.

---

[2] Esta afirmação foi feita após uma palestra na Faculdade de Educação da Unicamp em uma conversa informal com Reis(2001).

Entretanto, cabe ressaltar que esta seqüência “Limite, Continuidade, Derivada e Integral” não se caracteriza segundo a ordem histórica, mas segundo a ordem formal. Contudo, o desenvolvimento histórico da idéias centrais do Cálculo se deu, segundo Reis (2001), na seguinte ordem: “Cálculo Integral, Cálculo Diferencial, cálculo de limites e noção de número real”. Logo, a partir destas constatações, consideramos pertinente a colocação das seguintes questões:

Porque devemos esperar que os alunos aprendam de forma significativa os conceitos do Cálculo se eles são apresentados em uma ordem totalmente diferente da qual eles foram concebidos? Não seria mais natural pensarmos que as dificuldades epistemológicas do Cálculo, encontradas historicamente, antecipariam em determinados momentos algumas dificuldades encontradas pelos estudantes? Dessa forma, a observação de como se deu a construção dos principais conceitos do Cálculo se torna, a nosso ver, imprescindível. Todavia, acreditamos que esta seqüência, tradicionalmente trabalhada nos cursos de Cálculo, seja muito mais adequada em um curso de Análise do que propriamente em um curso de Cálculo.

Um outro ponto comum em relação aos cursos de Cálculo se dá em relação à metodologia. Conforme já foi dito, os professores ministram os cursos de Cálculo com base na seqüência “Limite, Continuidade, Derivação e Integração”. Já, em sala de aula, alguns resultados que dão sustentação à teoria são demonstrados e outros são apenas postulados. Sendo assim, levantamos a seguinte questão:

Será que os alunos compreendem o sentido dos resultados demonstrados apesar de acompanharem a sua demonstração?

A fim de ilustrar o que pensamos a respeito da questão, achamos oportuno trazer uma ilustração muito interessante citada pelo Professor Roberto Baldino:

Um professor, ao terminar a demonstração de que "se uma função f possui derivada nula em todos os pontos de um intervalo aberto I então é constante em I", vê-se interpelado por um aluno que lhe faz a seguinte pergunta:

A_ "Professor, o que o senhor está querendo mostrar é que um objeto que tem velocidade nula, não se move e, portanto, sua posição permanece constante?"

O professor depois de meditar algum tempo, responde, meio desorientado:

P_ "Sim, é isto mesmo."

Então o aluno dá o golpe final:

A_ "E precisa?"
(Baldino, apud Rezende (2003))

Em relação a essa questão, pensamos que somente a demonstração do resultado não é suficiente. A nosso ver, a compreensão da essência do resultado também é extremamente necessária. Nesse pitoresco exemplo, o aluno deixou claro que compreendeu completamente o sentido do teorema. Acreditamos que a demonstração de um teorema é importante, pois justifica logicamente a veracidade deste, porém, sempre que possível deve-se levar seu sentido ao aluno.

Por outro lado, a demonstração de um teorema não explicita, necessariamente, como o problema em questão foi resolvido. Por isso, se torna muito importante observarmos, historicamente, como os conceitos do Cálculo foram evoluindo, a fim de compreendermos melhor quais foram as dificuldades encontradas durante o processo de construção dos seus conceitos. Percebemos, contudo, que na maioria dos cursos de Cálculo, a prioridade é de justificar os resultados logicamente, sem que haja uma preocupação maior com a essência dos resultados demonstrados. Assim, vemos uma característica bastante comum nos cursos de Cálculo: **prevalência do significado lógico sobre o sentido dos resultados do Cálculo.**

Apesar de considerarmos importante que o aluno entenda um resultado dentro da estrutura axiomática na qual a Matemática é formalizada, pensamos que o entendimento do sentido, da essência desses resultados é, pelo menos, tão importante quanto. Nosso pensamento é de que o significado lógico não deve prevalecer sobre o sentido dos resultados.

A construção dos significados por parte do aluno, entendida como um objetivo primordial do ensino de Matemática e, em particular, do ensino de Cálculo é, sem dúvida, uma das premissas desse trabalho.

Acreditamos que a demonstração não é a única forma de mostrar o sentido do resultado. Faz-se necessária a busca de alternativas, além da demonstração, para que o aluno compreenda de fato a essência do resultado matemático. Mais ainda, esperamos que o docente compreenda com clareza o papel das idéias básicas, não apenas dos procedimentos do Cálculo Diferencial na formação matemática dos seus alunos.

Por outro lado, de forma geral, as demonstrações não são feitas pelo aluno e sim pelos professores, que em suas aulas expositivas desenvolvem a teoria formal e demonstram alguns dos resultados. A tarefa devida ao aluno é a de resolver extensas listas de exercícios envolvendo, na maioria delas, apenas atitudes procedimentais, como cálculos de limites, derivadas e integrais envolvendo todas as técnicas de derivação e integração, exigindo do aluno somente a habilidade de trabalhar com cálculos algébricos utilizando, por exemplo, fatoração de polinômios e relações trigonométricas. Todavia, concordamos plenamente com Rezende (2003) quando afirma que:

O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de "infinito", de "infinitésimos" de "variáveis", do que com "fatoração de polinômios", "relações trigonométricas", "cálculos algébricos".

Dessa forma, fica clara outra característica comum nos cursos de Cálculo: **a prevalência da técnica sobre o significado**. Nessa perspectiva, algumas questões se tornam latentes: será que os estudantes de Cálculo conhecem o sentido matemático do limite ou apenas sabem calculá-los, utilizando técnicas elaboradas de fatoração de polinômios e identidades trigonométricas? Os alunos de Cálculo conhecem o significado da derivada ou sabem apenas aplicar as técnicas de derivação?

Conforme já foi dito, a maioria dos nossos cursos se baseia na seqüência "Limite, Continuidade, Derivação e Integração". Se, com relação ao conceito de limite de uma função, o que é exigido dos alunos, em geral, são cálculos de limites, muitas vezes bastante trabalhosos, nas quais o aluno deve ter uma grande habilidade algébrica para operar com fatoração de polinômios e identidades trigonométricas, então, definitivamente, não nos parece que o aluno compreenda de fato a essência do sentido de limite. Da mesma forma, se em relação à derivada, o que é pedido, prioritariamente, são cálculos de derivadas de diversas funções explorando as diversas técnicas de diferenciação, então dificilmente o estudante entenderá as idéias fundamentais relacionadas ao conceito de derivação.

Outra grande dificuldade se torna evidente quando se começa a trabalhar com as aplicações da derivada, ou seja, no momento em que se torna necessário identificar uma função que modela um determinado problema ou ainda verificar com que rapidez uma função cresce ou decresce com relação a uma variável, aparecem as maiores dificuldades dos alunos.

Desta maneira, surge, naturalmente, a reflexão a respeito do que deve ser imprescindível, com relação ao conhecimento dos alunos, para terem condições de obter sucesso nas disciplinas de Cálculo.

Por outro lado, com base nas pesquisas feitas por Cabral (2002) e Reis (2001), nos parece unânime que, entre os professores de Cálculo, a grande culpada pelos altíssimos índices de reprovação nesta disciplina é a falta de base dos alunos vindos do Ensino Médio. De fato, concordamos que a formação matemática dos alunos da escola básica é muito deficiente, conforme mostram avaliações como SAEB, ENEM, PROVA BRASIL entre outras.

Portanto, como os alunos conseguirão visualizar uma função que modela um determinado fenômeno se o que eles estudaram a respeito das funções, durante os três anos do Ensino Médio, resume-se a propriedades algébricas da função como, por exemplo, o cálculo de raízes de equações e os zeros da função? Como entenderão como se dá a variação de uma função se o que foi estudado restringe-se apenas ao fato de a função crescer ou decrescer? Pensamos que é indispensável não somente estudar se a função cresce ou decresce, mas de que forma ela cresce ou decresce.

Todavia, se a técnica tem prevalecido com relação ao significado, conforme pensamos, então a "base" esperada trata puramente dos procedimentos algébricos. Dessa forma, se o aluno tem habilidade algébrica, então, com um pouco de treinamento, ele consegue facilmente calcular os limites e as derivadas pedidas. Entretanto, acreditamos que apenas as habilidades algébricas estão longe de constituírem a "base" tão falada. Trataremos nesta dissertação, em momento oportuno, de uma proposta de inserção de algumas idéias básicas do Cálculo no Ensino Médio.

1.3 O Encaminhamento desta Pesquisa

Colocado o problema, podemos salientar que um dos objetivos desta dissertação é refletir, criticamente, sobre ele, e, a partir dessa reflexão, propor estratégias alternativas, visando, em última análise, à melhoria do aproveitamento nas primeiras disciplinas de cálculo.

As pesquisas relacionadas ao ensino de Cálculo seguem diversas vertentes. Algumas se voltam prioritariamente para o uso da tecnologia no ensino, outras priorizam a abordagem pedagógica.

Embora reconheçamos que estes aspectos, não-excludentes, sejam de vital importância em qualquer pesquisa que seja realizada a respeito do assunto, ressaltamos uma de nossas principais hipóteses nesta dissertação. A nosso ver, as dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo são essencialmente de natureza epistemológica.

Partindo-se desta hipótese e dos questionamentos relacionados ao problema em questão, utilizaremos como referencial teórico, o mapeamento das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, feito por Rezende (2003) em sua tese de doutorado, além da teoria das Imagens de conceito formulada inicialmente por Tall e Vinner (1981).

No Capítulo 3, faremos uma análise de como podemos trabalhar as idéias do Cálculo no Ensino Médio, além de observarmos historicamente, como sucederam as diversas tentativas de inserção de conteúdos do Cálculo no Ensino Médio.

Baseando-se em todas essas considerações, elaboraremos uma proposta com o objetivo de sugerir uma seqüência didática, a qual foi implantada com alunos do 1° e 2° anos do Ensino Médio do Instituto Nossa Senhora da Glória (INSG) em Macaé/RJ. Tal seqüência permite que o aluno do Ensino Médio tenha contato com algumas das principais idéias do Cálculo.

A metodologia da nossa pesquisa está fundamentada na Engenharia Didática desenvolvida pela Escola Francesa de Didática da Matemática.

No Capítulo 5, faremos a análise *a posteriori* das respostas dadas as questões da seqüência didática e validaremos, ou não, as hipóteses levantadas no Capítulo 4, com base no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Já no Capítulo 6 foram apresentadas as conclusões, além de sugestões de novos trabalhos que podem aprofundar a presente pesquisa.

Capítulo 2. Referencial Teórico

"Não há ensino sem pesquisa e pesquisa sem ensino"
Paulo Freire

Apresentaremos, neste capítulo, o referencial teórico que dá embasamento às questões levantadas e discutidas em nosso projeto de pesquisa.

2.1 Dificuldades de natureza epistemológica

Conforme já explicitado, parte de nosso referencial teórico será baseado em uma análise de natureza epistemológica.

2.1.1 Obstáculos Epistemológicos

A noção de obstáculo epistemológico foi criada por Gaston Bachelard em 1938, sendo definido da seguinte forma:

> *Quando se procuram as condições psicológicas do progresso da ciência, logo se chega a convicção de que é em termos de obstáculos que o problema do conhecimento científico deve ser colocado. E não se trata de considerar obstáculos externos, como a complexidade e a fugacidade dos fenômenos, nem de incriminar a fragilidade dos sentidos e do espírito humano: é no âmago do próprio ato de conhecer que aparecem, por uma espécie de imperativo funcional, lentidões e conflitos. E aí que mostraremos causas de estagnação e até de regressão, detectaremos causas de inércia às quais daremos o nome de obstáculos epistemológicos.* (Bachelard, 1996, p.17)

Porém, Bachelard conceituou essa noção se referindo à filosofia do desenvolvimento científico e deixou claro que essa noção não era aplicada à Matemática.

> *A nosso ver, essa divisão é possível porque o crescimento do espírito matemático é bem diferente do crescimento do espírito científico em seu esforço para compreender os fenômenos físicos. Com efeito, a história da matemática é maravilhosamente regular. Conhece períodos de pausa. Mas não conhece períodos de erro. Logo, nenhuma dessas*

teses que sustentamos neste livro se refere ao conhecimento matemático. Tratam apenas do conhecimento do mundo objetivo. *(Bachelard, 1996, p.28)*

Segundo Giraldo (2004), a extensão dessa noção à educação matemática foi proposta por Brousseau (1983) e, desde então, a literatura de educação matemática tem demonstrado que a noção formulada por Bachelard pode ser aplicada com sucesso para elucidar fenômenos importantes relacionados ao ensino da Matemática.

Refletindo sobre a noção de obstáculos epistemológicos proposta por Bachelard concordamos com Giraldo quando afirma que:

...obstáculos epistemológicos não estão associados a quaisquer fatores externos, mas à própria natureza do conhecimento científico – são inerentes ao próprio ato de saber, constituintes essenciais e inevitáveis do próprio conhecimento a ser construído ou adquirido. Desta forma, obstáculos epistemológicos se caracterizam por estarem presentes tanto na evolução histórica do pensamento científico quanto em sua prática educacional. (Giraldo,2004)

Salientamos, novamente, nosso pensamento, de que grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo é essencialmente de **natureza epistemológica**, que é, sem dúvida, uma premissa importantíssima deste trabalho. Os resultados obtidos em Rezende (2003) ratificam nosso pensamento.

Nessa tese, como resultado de um mapeamento feito das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, a partir do entrelaçamento dos fatos históricos e pedagógicos, foram elaborados o que o referido autor definiu como **macro-espaços de natureza epistemológica.** Esses macro-espaços foram identificados de acordo com cinco dualidades essenciais do

Cálculo e de seu ensino: *discreto/contínuo; variabilidade/permanência; finito/infinito; local/global; sistematização/construção.*

Faremos então uma resenha crítica desses macro-espaços elaborados por Rezende (2003).

2.1.2 Macro-Espaços de dificuldades de natureza epistemológica do ensino de Cálculo

2.1.2.1 Macro-espaço da dualidade discreto/contínuo

Essa dualidade se materializa originalmente nos paradoxos de Zenão e no problema da incomensurabilidade. Após séculos de esquecimento, alguns filósofos da Idade Média relacionaram os problemas pertinentes à dualidade discreto/contínuo associando-os a outras questões relacionadas ao problema da variabilidade de grandezas físicas. A partir desses estudos, surgem dois conceitos importantes: as séries infinitas e a noção de variável.

Porém a resolução deste problema só foi formalizada na construção dos números reais por cortes de Dedekind.

No processo pedagógico, essa dualidade é completamente ignorada desde os níveis mais elementares do ensino de Matemática. De acordo com Rezende (2003), a associação entre os estudos das dízimas periódicas e das progressões geométricas poderia ser uma excelente aproximação entre duas áreas que estão separadas no ensino da Matemática, embora estivessem separadas durante o processo histórico: a aritmética e a geometria.

O grande prejuízo causado pela ausência dessa dualidade no ensino da Matemática está relacionado com o conceito de número. Rezende (2003) observa que o conceito de número natural é construído a partir do problema histórico da contagem. Por outro lado, os números inteiros, racionais e irracionais estão associados à "construção da reta numérica". Dessa forma, a representação decimal dos números reais são finitas ou "aproximadas". Desse modo, π se torna 3,14 ou $\sqrt{3}$ se torna 1,73.

Rezende (2003) afirma que o cenário pedagógico que se apresenta em torno do número irracional não é diferente daquele desenvolvido pelos matemáticos do Renascimento, visto que nesta época os números irracionais eram caracterizados como números decimais sem fim cujos algarismos após a vírgula nunca se reproduzem na mesma ordem, sendo, por esta razão, chamados de números "nebulosos" ou "surdos".

Rezende (1994) constata que alguns alunos caracterizam o conjunto dos números irracionais como números que são reais, mas que não são racionais. Na verdade, esse parece ser o raciocínio da maioria de nossos alunos e professores no que diz respeito à conceituação de número irracional. Temos, então, no processo pedagógico, uma definição circular: os números irracionais são definidos como sendo números reais que não são racionais e, o conjunto dos números reais são definidos pela união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais. Em verdade, Rezende (2003) faz uma constatação deveras preocupante: **o universo numérico dos nossos estudantes se restringe**

apenas aos números racionais acrescido de um conjunto enumerável de números irracionais notáveis.

Todavia, cabe ressaltar que a noção de continuidade como o ingrediente fundamental na extensão do conjunto dos números racionais para o dos números reais é completamente ignorada.

Concordamos com Rezende (2003) quando sugere que:

> *Nesse sentido, seriam interessantes que se realizassem algumas antecipações do binômio séries/limites no ensino básico para que houvesse uma problematização inicial das dificuldades de representação e definição dos números irracionais. Não se pretende com isso antecipar a construção formal dos números reais para o ensino básico. O que se quer é oferecer ao estudante um cenário real das dificuldades de representação deste conceito, ao passo que, com essa apresentação, alguns elementos essenciais do "pensamento diferencial"- como a noção intuitiva de limites e as séries – já pudessem ser iniciadas. Além disso, o aluno poderia vislumbrar, com essa antecipação, outros processos de aproximações possíveis para alguns números irracionais notáveis. Assim, em vez de identificar π simplesmente com o valor racional 3,14, o aluno poderia desenvolver outros procedimentos de aproximação, percebendo, através destes, as dificuldades intrínsecas a problemática do número irracional.*

Dessa forma, achamos pertinente o desenvolvimento de atividades no Ensino Básico que possibilitem ao aluno ter contato com a noção de continuidade, para que o estudante tenha condições de entender o processo de extensão do conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais, além de perceber a dificuldade da caracterização dos números irracionais.

2.1.2.2 Macro-espaço da dualidade variabilidade/permanência

Os filósofos pré-socráticos já inferiam a respeito do problema da variabilidade. Seus estudos forneceram farto material para aqueles que viriam a discutir este problema posteriormente. O estudo da variabilidade, porém, só veio a ser desenvolvido no século XIV pelos escolásticos que desenvolveram a teoria que é considerada como a forma embrionária do conceito de derivada: a teoria das “latitudes das formas”.

Newton e Leibniz usando a cinemática desenvolvida por Galileu e Torricelli, o raciocínio algébrico de Viète, os métodos analíticos de Fermat e a geometria analítica de Descartes resolveram finalmente o problema da variabilidade desenvolvendo, respectivamente, as suas noções de “última razão” e “diferencial”.

Segundo Roque (2006):

Matematicamente, o estatuto do novo cálculo só irá se esclarecer com a introdução do conceito de função.

Nesse sentido, podemos considerar que o conceito de função foi um ingrediente indispensável para o estabelecimento do conceito de derivada.

Reiteramos que o conceito de função “nasce” no contexto da variabilidade. Nesse contexto uma função é uma relação funcional implícita entre as quantidades variáveis, mas, com o avançar da história, o conceito de função “migrou” do âmbito da relação entre quantidades variáveis para o âmbito da Teoria dos Conjuntos tal como temos nos dias de hoje. Uma função (de uma variável) é, em nossa atual definição formal, um conjunto de pares ordenados que satisfazem determinadas propriedades algébricas. Temos a mesma opinião de Rezende (2003), quando afirma que:

Em verdade, a definição formal de função é tão abstrata quanto estéril.

Note que a definição formal de função não carrega em si a idéia que motivou sua criação, a relação entre quantidades variáveis. Visto que função é definida e trabalhada em termos de uma correspondência estática entre os valores das variáveis “x” e “y”. No Ensino Básico, o enfoque maior, para não dizer total, se dá em termos das propriedades algébricas da função. Usa-se função para resolver inequações, discute-se a respeito dos zeros da função, fala-se sobre sobrejetividade e injetividade, fala-se até sobre crescimento e decrescimento de uma função, mas não se discute, qualitativamente, esse crescimento ou decrescimento em relação à sua variável independente e, na maioria desses exemplos, a expressão analítica da função é apresentada ao aluno, em vez de ser construída por meio de uma situação-problema.

No entanto, conforme apontam Cabral (1998) e Neto (1998), o que tem prevalecido na formação dos estudantes é exatamente a expressão analítica da função, ou seja, para alguns estudantes uma função é, simplesmente, uma expressão algébrica, tal como cos x ou x^2, por exemplo. Isso, a nosso ver, é catastrófico. Como um conceito tão importante, que tem uma malha de significações tão rica, pode ser caracterizado somente por meio de uma expressão algébrica?

Como conseqüência desses fatos, a idéia de função que é estabelecida pelos alunos, não está fundamentada no contexto da variabilidade, mas num contexto estático ou ainda num contexto algébrico. Essa interpretação é destacada por Rezende como um dos maiores obstáculos epistemológicos:

... tal interpretação, além de não ter participado historicamente da solução do problema da variabilidade dada pelo Cálculo, constitui efetivamente um dos maiores

obstáculos epistemológicos àquela noção de interdependência entre quantidades variáveis, tão essencial para o desenvolvimento do Cálculo. *Rezende (2003)*

Uma enorme evidência de que o conceito de função não é adequadamente trabalhado no Ensino Básico são as dificuldades dos estudantes quando se deparam com os problemas relacionados à aplicações da derivada. Como já dissemos, como os estudantes poderão obter a função que modela uma situação, se em todos os momentos esta função sempre lhes foi apresentada como um dado *"a priori"* ? Como construir conceitos sobre variação de uma função se funções sempre são trabalhadas de forma estática via expressão algébrica?

No entanto, acreditamos que o conceito de função pode e deve ser trabalhado dentro do contexto da variabilidade, a fim de que possamos evitar este grave desvio epistemológico. Construir uma proposta neste sentido é sem dúvida um dos principais objetivos deste trabalho.

2.1.2.3 Macro-espaço da dualidade finito/infinito

Podemos dizer que a história do infinito tem início com os paradoxos de Zenão e também com a descoberta das grandezas incomensuráveis. Esses dois fatos abalaram os alicerces de grande parte da Matemática grega produzida até então e, obrigaram os estudiosos a produzir Matemática de outra maneira. Grandes matemáticos que surgiram posteriormente usaram o infinito como um ingrediente indispensável à conclusão de seus resultados. Eudoxo e Arquimedes deram continuidade à idéia de infinito elaborada por Zenão. No livro V de Os Elementos de Euclides é descrita uma grande realização de Eudoxo: o método da exaustão, que foi criado com o objetivo de se calcular áreas e volumes. Eudoxo pressupôs a existência de quantidades “tão pequenas quanto desejarmos”.

Segundo Amadei (2005), esta foi a idéia que introduziu o conceito de infinito potencial que inspirou matemáticos do século XIX a introduzir o conceito de limite como fundamento para o Cálculo.

Arquimedes expandiu as idéias de Eudoxo e as utilizou em muitos de seus resultados, como, por exemplo, no cálculo do volume de uma esfera e de um cone.

Entretanto, após estes trabalhos, extremamente avançados para a sua época, muitos séculos se passaram e pouco se avançou a respeito do conceito de infinito. Segundo Rezende (2003):

... , a inserção definitiva do infinito no contexto matemático se dá na idade média, novamente com os escolásticos.

Procedimentos infinitesimais começaram a ser usados com bastante intensidade e já eram considerados usuais. Esses procedimentos participaram fortemente tanto do Cálculo de Newton quanto do Cálculo de Leibniz.

No entanto, é apenas no século passado que a noção de infinito é definitivamente formalizada, principalmente por meio dos trabalhos de Dedekind e Georg Cantor.

Certamente o conceito de infinito é altamente complexo e durante milênios foi sempre um desafio a ser superado por diversos matemáticos. Entretanto, Rezende (2003) observa que:

... diante dessa complexidade é, no mínimo curioso que nossos estudantes não tenham sequer consciência das dificuldades inerentes à noção de infinito, mesmo tendo eles já realizado um curso de Cálculo ou mesmo de Análise.

E a seguir Rezende (2003), conclui:

Isto nos leva a concluir que cursar ou não cursar as referidas disciplinas, tal como se encontram organizadas nos dias de hoje, não faz diferença alguma para a instrução do aluno nesse assunto.

De fato, é surpreendente que um conceito tão importante na construção das idéias matemáticas e, ao mesmo tempo, tão complexo, não seja sequer considerado pelos estudantes. Acreditamos que este fato é um forte indício de que a complexidade do infinito sequer seja citada entre os estudantes do Ensino Médio, talvez porque o professor desconheça esta complexidade ou, ainda, por “varrer as dificuldades e colocá-las debaixo do tapete”. O que é mais grave é o círculo vicioso formado. Muitos licenciandos saem dos cursos de Cálculo e de Análise com atitudes extremamente ingênuas em relação ao infinito e são exatamente estes licenciandos que irão formar outros estudantes mais tarde, possivelmente sem despertar a consciência destes em relação a complexidade do infinito.

Rezende (1994) em sua dissertação de mestrado relatou algumas atitudes de estudantes do Ensino Superior com relação ao infinito, vejamos:

Com relação à série de Girandi: $1-1+1-1+1-1+1-1+...$, os estudantes majoritariamente afirmaram que tal soma é nula, visto que:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+... = (1-1)+(1-1)+(1-1)+... = 0+0+0+0... = 0$$

Alguns outros estudantes afirmaram que tal soma seria 1, já que:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+... = 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)... = 1+0+0+0... = 1$$

Assim, podemos perceber que os estudantes em questão, fizeram uso da propriedade associativa, sequer questionando se esta propriedade é válida para somas infinitas ou se a série convergia.

Esses estudantes, segundo o relato de Rezende, ficaram completamente impotentes e passivos quando lhes foi mostrado que esta série pode "convergir" para qualquer número inteiro, se fosse utilizado o seguinte raciocínio:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+...=1+1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+...=2+0+0+0+0...=2$$

Ou ainda:

$$1-1+1-1+1-1+1-1+...=1+1+1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+...=3+0+0+0+0...=3$$

Já com relação as indeterminações matemáticas, Rezende relata os seguintes procedimentos bastante comuns por parte dos estudantes em relação ao cálculo de limites:

- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} = 1^{\infty} = 1$
- $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right) = \infty-\infty = 0$
- $\lim\limits_{x\to\infty} x sen\left(\dfrac{1}{x}\right) = \infty.0 = 0$

Fica clara a ingenuidade dos estudantes com relação a infinito. Muitos deles criam uma "álgebra do infinito", deixando evidente que não têm clareza a respeito desta noção tão importante.

Dessa forma, percebemos que o infinito é um elemento estranho ao aluno do Ensino Superior, mesmo após ter concluído o curso de Análise. Observemos que se o infinito é estranho ao aluno do Ensino Superior, com maior razão, o será, para o aluno de Cálculo.

Sendo assim, concordamos com Rezende:

> *Isto posto, fica evidente que a idéia de infinito não participa nem contribui de forma significativa na construção das redes de significações estabelecidas num curso inicial de Cálculo.* *Rezende (2003)*

Todavia, acreditamos que novas atividades direcionadas ao aluno do Ensino Médio devem ser pensadas e construídas, para que este tenha contato com a idéia de infinito.

2.1.2.4 Macro-espaço da dualidade local/global

Essa dualidade é a mais recente em relação às que já foram apresentadas. Segundo Petitot (1985, p.11) esta dualidade pode ser datada de meados do século XIX.

A oposição local/global pode ser caracterizada, inicialmente, como um produto de nossa percepção do espaço, porém não se esgotando nela. Néri (2006) descreve muito oportunamente um exemplo dessa oposição:

> *Consideremos a Terra. Durante muitos milhares de anos, pensou-se que a superfície terrestre era plana. A razão é que o planeta era visto de muito perto. Só quando nos afastamos dele, vemos que na realidade a sua superfície é mais parecida com uma esfera do que com um plano. Diz-se que Aristóteles reparou isto vendo a sombra da Terra sobre a Lua durante um eclipse. De certa forma, Aristóteles precisou recorrer à imagem da Terra vista da Lua para poder perceber que a Terra não era plana. Ora, se a Terra parece (ou parecia) plana significa que existe um plano que se parece muito com a Terra, certo? Na verdade, sabemos que não é um plano, mas sim vários planos. Para um habitante de Tóquio, o plano que se parece com a Terra não é o mesmo que para nós. Isto nos indica que esta noção de aproximação é local, isto é, dependendo do ponto onde nos colocamos percebemos de modo diferente o objeto simples (reta, plano, etc) que mais parece com o objeto original (curva, esfera, etc).* *Néri (2006,p.91)*

Rezende (2003) ressalta que a simulação euclidiana do espaço, aprendida pela percepção humana, é tão somente uma aproximação local do que efetivamente é, visto que podemos aproximar localmente uma superfície esférica pelo seu plano tangente.

Alguns autores, percebendo a oposição local/global, têm utilizado esta dualidade para formularem novos conceitos a serem aplicados no ensino da Matemática. Baseado no fato de que a percepção humana de um objeto curvo é reto quando olhado muito de perto, Tall (1989) formulou a noção de retidão local[3]. Giraldo explica como a noção de derivada pode ser introduzida através da noção de retidão local :

> *Numa abordagem baseada na noção de retidão local, a derivada é introduzida a partir do processo computacional de magnificação local, em que uma porção de uma curva é altamente ampliada numa tela de computador. A derivada de uma função é apresentada como a inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido a um processo de magnificação local. Assim, a derivada pode ser aprendida a partir da variação do próprio gráfico.* Giraldo (2004)

Rezende (2003) chama atenção para o fato de que alguns conceitos do Cálculo são definidos localmente; *continuidade num ponto, diferenciabilidade num ponto*, para que então sejam estendidos de forma “natural” para o seu estado global, *a função é contínua se ela o for em cada ponto de seu domínio*. Sem dúvida, esse fato exige do aluno uma habilidade de ir e vir entre essas duas extremidades, local e global. Habilidade essa que deveria ser trabalhada, a nosso ver, desde o Ensino Médio, trabalhando alguns temas sob a luz desta dualidade.

[3] Local straightness, no original em inglês.

2.1.2.5 Macro-espaço da dualidade sistematização/construção

De forma geral, a relação entre "sistematização" e "construção" não constitui necessariamente uma dualidade. Restringindo-nos, porém, ao caso do ensino de Cálculo, "sistematização" não é oposição de "construção", ao contrário, é parte integrante do processo de construção do conhecimento em geral. Sendo assim, essa dualidade se constitui dentro da escala pedagógica.

Rezende (2003) faz ponderações a respeito de algumas práticas "normais" em um curso inicial de Cálculo, sob a luz da dualidade sistematização/construção.

Geralmente, os conceitos do Cálculo são apresentados segundo a sua definição formal e alguns resultados são demonstrados. Após as apresentações e demonstrações, os alunos são levados ao treinamento através dos exercícios de fixação. Dentro desse contexto, a significação dos conceitos é realizada dentro da lógica formal das definições e da estrutura axiomática.

Rezende ratifica este pensamento e enxerga um grande obstáculo de natureza epistemológica:

> *Primeiro define-se o conceito, depois, apresentam-se os exemplos, como se estes nada tivessem a ver com a origem histórica do conceito definido. Assim, com essa sistematização exacerbada, surge um dos grandes obstáculos de natureza epistemológica do ensino normal de Cálculo: a "**desmaterialização**" dos seus resultados e conceitos básicos.* Rezende (2003)

De fato, achamos muito mais oportuno que o aluno entenda o sentido dos resultados do Cálculo e não apenas saiba suas demonstrações. Desta forma, podemos perceber claramente que a rede de significações dos alunos está relacionada ao conceito já sistematizado dentro da estrutura axiomática. Rezende sugere que se inverta a polaridade da dualidade sistematização/construção a fim de que os estudantes passem a ter um bom nível de significação dos conceitos.

> *Assim, para recuperar o "real" nível de significação dos conceitos e resultados do Cálculo é preciso que se inverta a polaridade da dualidade sistematização/construção; isto é, ao invés de se construir as significações no nível do conhecimento já sistematizado, deveríamos é construir os campos de significações dos resultados e idéias básicas do Cálculo para, num momento posterior, buscar a sistematização desses elementos.*
>
> *Rezende (2003)*

Isto posto, trabalharemos nesta dissertação no sentido de contribuir com uma proposta que contemple da melhor forma possível os aspectos supracitados.

2.2 Imagens de Conceito e Ambientes Corporificados

2.2.1 Imagens de Conceito, Definições de Conceito e Fatores de Conflito

A teoria de imagens de conceito, hoje, bastante difundida, surgiu a partir do artigo escrito por David Tall e Sholomo Vinner (Tall e Vinner, 1981).

Nesse célebre artigo, Tall e Vinner lembram-nos, de que muitos conceitos, os quais usamos, não estão formalmente definidos, mas aprendemos a reconhecê-los pela experiência e uso nos contextos apropriados. Mais tarde, porém, esses conceitos podem ser refinados em seus significados e interpretados cada vez com mais sutileza, dando-se ou não ao luxo de uma definição precisa.

A partir dessas reflexões e, considerando que durante o processo mental de retomada e manipulação de um conceito, muitos processos serão trazidos à cena, afetando consciente ou inconsciente o seu significado e uso, a *imagem de* *conceito* de um indivíduo relacionado a um determinado conceito foi definido como:

... a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (Tall e Vinner 1981, apud Giraldo 2004)

E ainda, *imagem de conceito evocada* é definida como:

...a porção da imagem conceitual que é ativada em um dado momento.
Tall e Vinner (1981)

Segundo Giraldo (2004), este artigo:

... sugere que o ensino de matemática deve visar a compreensão pelo estudante não apenas na construção formal dos conceitos, mas o enriquecimento, como um todo, da estrutura cognitiva individual associada a estes. Com este propósito, uma gama ampla de representações e idéias relacionadas de todo tipo deve figurar na abordagem pedagógica de um dado conceito.

A respeito da imagem de conceito, Giraldo (2004) esclarece que:

A imagem de conceito compõe-se de atributos de diferentes naturezas e graus de generalidade, e que podem ser representações visuais, bem como coleções de impressões ou experiências. A imagem de conceito de função real de um indivíduo, por exemplo, pode incluir elementos, tais como formas de apresentação (gráficos, fórmulas, tabelas, diagramas); elementos da definição (como domínio, contradomínio) propriedades específicas (como bijetividade, linearidade, monotonicidade); exemplos particulares (como operações, inversão); e assim por diante.

Dessa forma, acreditamos, em consonância com esta teoria, que a abordagem matemática para um determinado conteúdo deve objetivar o enriquecimento da imagem de conceito desenvolvida pelos estudantes, considerando que esta não é uma estrutura estática, mas que está sempre sujeita a transformações, podendo ter atributos acrescentados, excluídos ou modificados.

Alguns alunos são capazes de especificar um determinado conteúdo matemático através de palavras. Assim, uma definição de conceito é o arranjo de palavras usado para especificar o conteúdo em questão, ou ainda, o arranjo de palavras que o aluno usa para explicação própria de sua imagem conceitual evocada. Essa definição pode ser decorada pelo indivíduo ou significativamente aprendida e relacionada ao conceito em maior ou menor grau, sendo que uma definição de conceito pode diferir ou não da definição formal deste conceito, usualmente aceita pela comunidade matemática. (Tall e Vinner, 1981)

Inicialmente, a definição de conceito é tratada como parte da imagem de conceito. Em trabalhos posteriores, entretanto, Vinner considera a imagem de conceito como uma estrutura excludente à definição de conceito. Todavia, ambos os autores, concordam que esta diferença é de natureza puramente formal, não acarretando em quaisquer diferenças relevantes para a teoria em si. Por outro lado, é ressaltado que tanto uma definição de conceito que corresponda à definição formal sem uma imagem de conceito rica quanto uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada podem ter conseqüências catastróficas. (Giraldo, 2004)

Muitos conteúdos em Matemática são abordados inicialmente por meio de definições, tanto em livros quanto em aulas nos Ensinos Médio e Superior. Ao observarmos a estrutura formal da Matemática, como concebida pelos matemáticos, podemos entender porque esse fato acontece, visto que, por esse viés, a Matemática é uma teoria dedutiva e como tal, começa com definições primitivas e axiomas, sendo que todos os outros resultados devem ser deduzidos a partir destas definições e axiomas. Desta maneira, Tall e Vinner (1981) lembram que o cérebro humano não é uma entidade puramente lógica e, como seu funcionamento se dá de maneira bastante complexa, ele está, muitas vezes, em descompasso com a lógica da Matemática, fazendo-se necessário então estabelecer uma distinção entre os conceitos matemáticos como os definimos formalmente e os processos cognitivos pelos quais são concebidos.

Vinner (1991) salienta que com esta abordagem é esperado pelos professores, que a definição de conceito dos estudantes seja consistente com a definição formal do conceito e a imagem de conceito seja completamente concebida e controlada pela definição de conceito. Conforme ilustrado na figura abaixo:

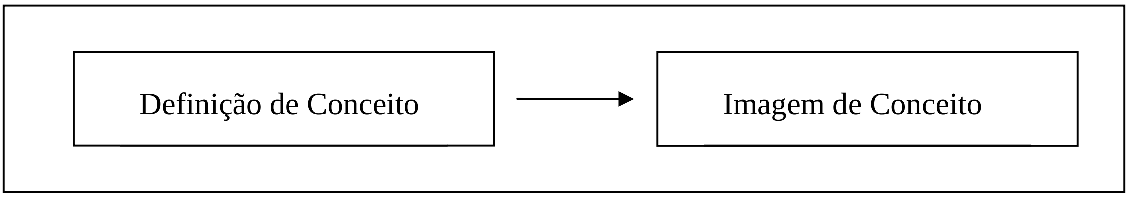


Figura 3

Porém, “é difícil treinar um sistema cognitivo para agir contra a natureza e forçá-lo a consultar definições, seja em um processo de formação de uma imagem conceitual ou de execução de uma tarefa cognitiva” [4] (VINNER, 1991), tradução nossa.

Na execução de uma tarefa cognitiva, o sistema cognitivo desejável de acordo com Vinner (1991) está representado na Figura 4:

[4] It is hard to train a cognitive system to act against its nature and force it to consult definitions either when forming a concept image or when working on a cognitive task

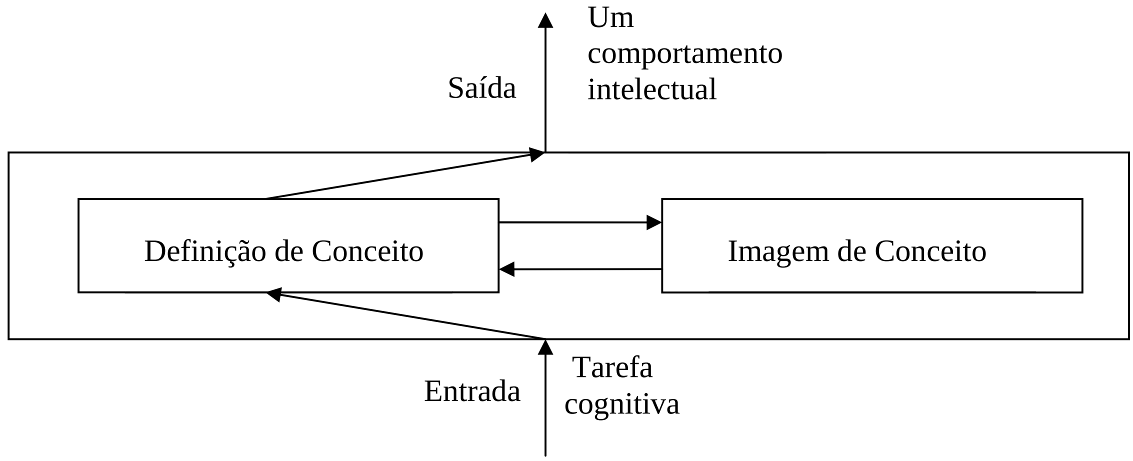


Figura 4

Tall e Vinner (1981) chamam-nos a atenção para o fato de que as imagens de conceito de limite e continuidade provavelmente contêm fatores que conflitam com a definição conceitual formal, sendo que alguns desses fatores podem não ser conscientemente percebidos pelo indivíduo, mas podem causar confusão quando confrontados com a teoria formal. Dessa forma, uma parte da imagem de conceito ou da definição de conceito que pode conflitar com outra parte da imagem de conceito ou da definição de conceito é definida como *fator de conflito potencial*. Por outro lado, um *fator de conflito cognitivo* acontece quando fatores conflitantes da imagem de conceito ou da definição de conceito são evocadas simultaneamente.

Vinner (1991) recomenda que esses conflitos devem ser evitados e só estimulados quando existir a necessidade de conduzir os estudantes a alcançar um nível de compreensão mais significativo. Alguns autores como Giraldo (2004), utilizam esses fatores de conflito de forma a fazer com que a atualização desses fatores tenham um papel pedagógico importante no processo de aquisição de um conceito matemático.

Giraldo (2002) define *conflito teórico-computacional* como a situação na qual uma representação computacional é aparentemente contraditória com a formulação teórica associada. Esse autor defende que se os conflitos teórico-computacionais são enfatizados, em lugar de evitados, o papel pedagógico das características inerentes a cada forma de representação podem sofrer uma reversão positiva: elas podem contribuir não para o estreitamento, mas para o enriquecimento das imagens de conceito.

2.2.2 Raiz Cognitiva

Tall e Barnard (1997) definem *unidade cognitiva* como a parte da estrutura cognitiva que pode ser mantida no foco da atenção durante um determinado período de tempo. Sendo assim, essa unidade cognitiva pode ser um símbolo, um fato específico como “4 + 5 = 9”, um fato geral como “a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°”, uma relação, um passo de u ma argumentação, um teorema etc.

Todavia, em alguns casos, o conceito matemático é abordado inicialmente com o aluno de forma insatisfatória. Vários autores, por exemplo, como Rezende (2003), Vinner (1991) e Sierpinska (1988), ressaltam que introduzir o conceito de função através da sua definição formal é completamente inadequado, uma vez que todos os exemplos de função trabalhados com os alunos carregam fortemente a idéia de relação entre quantidades variáveis, de maneira que a definição formal se torna infrutífera. Nesse contexto, Tall coloca a questão de como introduzir e motivar novos conceitos matemáticos sem pecar pela simplificação excessiva nem pelo formalismo excessivo. Como uma primeira tentativa para resolver esta questão, Tall (1989) define *raiz cognitiva* como:

... *um conceito-âncora que o estudante acha fácil de compreender, e que, ainda sim, forma uma base a partir da qual a teoria pode ser construída*.

Em um outro trabalho Tall (2000) este conceito é redefinido através das unidades cognitivas da seguinte forma:

... uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior *(Tall 2000, apud Giraldo 2004)*

Fica claro, após essa nova definição, que a raiz cognitiva passa a ser considerada como uma unidade cognitiva especial, ou seja, deve ser um atributo de sua imagem de conceito, uma idéia familiar ao estudante.

Giraldo (2004) ressalta duas características especiais que uma raiz cognitiva deve atender:

i) fazer sentido (ao menos potencialmente) para o estudante no estágio em questão;

ii) permitir expansões cognitivas para desenvolvimentos teóricos posteriores.

Com relação ao conceito de derivada, a raiz cognitiva proposta por Tall (1989) é a noção de retidão local, que se baseia no fato de que à percepção humana um objeto curvo parece reto quando olhada de muito perto.

Acreditamos fortemente que essa raiz cognitiva pode fazer parte da imagem de conceito dos estudantes desde o Ensino Médio.

2.2.3 Ambientes Corporificados

Nas últimas duas décadas tem sido desenvolvida a teoria de cognição corporificada[5] no âmbito da ciência cognitiva. No contexto do ensino de Matemática, as principais contribuições têm sido feitas por meio dos trabalhos de Lakoff (Lakoff e Johnson, 1999, Lakoff e Nunez, 2000, Nunez et al 1999). Nesse sentido, segundo a teoria da cognição corporificada, a aprendizagem e a prática da Matemática não são apenas atividades intelectuais, mas devem levar em consideração as experiências corpóreas e sensoriais dos seres humanos, além dos fatores socioculturais e o contexto onde a prática é desenvolvida.

Tall (2003) usa o termo “corporificado” em um sentido mais restrito, referindo-se ao pensamento construído fundamentalmente por meio da percepção sensorial em oposição à operação simbólica e a dedução lógica. Nesse mesmo trabalho, Tall sugere uma abordagem corporificada para o ensino de Cálculo tendo como idéia central a interação com a imagem física do gráfico de uma função.

Para ilustrar um dos exemplos dessa abordagem, é enfatizado que as funções (trabalhadas usualmente com os alunos) envolvem variáveis numéricas e

[5] embodied cognition

as declividades[6] dessas funções também são funções com variáveis numéricas. Pode se então levar o aluno a perceber que os aspectos gráficos de $f(x)=2^x$ e $f(x)=3^x$ são semelhantes aos gráficos das funções obtidas quando as variáveis são as declividades dessas funções. Desta forma, procura-se o número k tal que o gráfico de $f(x)=k^x$ é o mesmo gráfico da função declividade.

Concordamos com Paixão (2008), quando acrescenta:

> *... uma abordagem corporificada com uso da tecnologia é, em geral, uma abordagem visual/gráfica que leva o aluno, de algum modo, a construir uma intuição a cerca de um determinado tópico.*

Um organizador genérico é definido por Tall (1989) como um ambiente (ou micromundo) que possibilita ao aluno manipular exemplos e contra exemplos (se possível) de um determinado conceito matemático ou de conceitos matemáticos relacionados.

Segundo Tall (2003) os conceitos de *organizador genérico* e *raiz cognitiva são* muito importantes em abordagens corporificadas no ensino de Matemática. Um organizador genérico pode ser formado por materiais concretos ou ainda por softwares computacionais. Sendo assim, a abordagem inicial de um conteúdo matemático deve levar em consideração uma idéia que seja familiar ao estudante e que dê possibilidades para que ele evolua para conceitos mais complexos, ou seja, é desejável que a abordagem inicial em um organizador genérico deve ser uma raiz cognitiva.

---

[6] Neste sentido, a declividade de um ponto do gráfico é a declividade da reta tangente ao gráfico neste ponto.

Dessa forma, Tall (2003) propõe que a tecnologia seja utilizada como suporte para uma abordagem corporificada, através do que Paixão (2008) denomina “Ambiente Corporificado”.

Nesse sentido, um Ambiente Corporificado é um organizador genérico onde uma abordagem corporificada seja implementada tendo como ferramenta o uso do computador.

Cabe ressaltar que não utilizamos o termo “Corporificado” no sentido inicialmente proposto pela teoria da cognição corporificada, pois não compartilhamos a opinião de que “tudo é corporificado” conforme acreditam seus autores. Contudo, acreditamos que ao estar em um ambiente corporificado, manipulando exemplos e contra exemplos, o aluno terá condições de construir uma imagem mental que será o ponto de partida para uma conjectura e posterior formalização e/ou abstração do conceito matemático explorado.

Concordamos com Paixão (2008), quando afirma que:

> *Este modo muito peculiar de interatividade professor-aluno, onde o professor pode disponibilizar aplicativos (mathlets) que explorem determinadas características do conteúdo proposto, para que o aluno possa, através da experimentação, elaborar conjecturas e inferir propriedades relacionadas aos entes matemáticos envolvidos na aplicação, simboliza a utilização do que chamamos de ambientes corporificados.*

Dessa forma, o trabalho em um ambiente corporificado permite migrar da abordagem tradicionalmente utilizada no ensino de Matemática, baseada na cadeia:

“definição $\rightarrow$ teorema $\rightarrow$ demonstração $\rightarrow$ corolário (aplicações)”

Para uma outra abordagem baseada em uma nova cadeia:

“exploração $\rightarrow$ conjectura $\rightarrow$ tentativa de demonstração $\rightarrow$ conclusão e aplicação”

Contudo, Paixão (2008) alerta que este tipo de abordagem deve ter o complemento de outras representações simbólicas e/ou formais, a fim de evitar conflitos cognitivos por conta da incorreta abstração de um dado conceito. Por exemplo: quando um aluno tem contato com as noções primitivas da Geometria Euclidiana Plana: ponto, reta e plano, em um ambiente corporificado. Neste contexto, pode ter dificuldades para perceber, que uma linha reta, em geometrias não-euclidianas, não é exatamente o que imagina por meio de seu sentido físico-corpóreo.

Em nossa pesquisa, utilizaremos, como organizador genérico, os aplicativos denominados *Mathlets*, definidos pelo JOMA[7] como uma “pequena plataforma independente e interativa para o ensino de matemática”.

Existem diversos aplicativos disponíveis no mercado, que podem ser úteis no ensino de Matemática, como por exemplo, Cabri, Maple, Graphmatica. Porém, uma desvantagem destes programas é a impossibilidade de que um professor ministre suas aulas à distância.

Contudo, segundo Paixão (2008), uma grande vantagem atribuída aos *Mathlets* é a possibilidade real de interatividade, aliada ao fato de que um *mathlet* não está atrelado a nada mais que um navegador web. Além do fato de que os alunos podem participar de verdadeiros “laboratórios” de Matemática onde, a partir de experiências interativas, é possível fortalecer sua imagem de conceito.

[7] Journal of On Line Mathematics and Applications

Existem, na Web, diversos *mathlets* independentes e conjuntos de *mathlets* para o ensino de determinados conceitos matemáticos. A maior parte, contudo, dessas bibliotecas não podem ser reescritas. Portanto, o professor terá dificuldades ao adaptar os *mathlets* existentes à sua realidade.

Por este motivo, fazemos uso dos "Construtores de *Mathlets*". Um construtor de *Mathlets* é, segundo Paixão (2008):

> *Uma biblioteca de mathets configuráveis, onde a alteração de alguns parâmetros é capaz de produzir uma nova aplicação, completamente diferente da anterior.*

Dessa forma, um professor que nunca teve contato com programação de computadores será capaz de construir novos *mathlets*, apenas conhecendo propriedades de conceitos matemáticos e modificando convenientemente alguns parâmetros.

Partindo de um *mathlet* pronto, o professor pode alterar suas configurações, gerando automaticamente um código em linguagem HTML e, dessa maneira, construindo um novo *mathlet*.

Em outras palavras, o Construtor de *Mathlet* possibilita a construção de novos aplicativos que serão usados conforme a realidade e a conveniência do professor.

Observe a seguir, um *mathlet*, sua janela de configuração e seu código HTML.

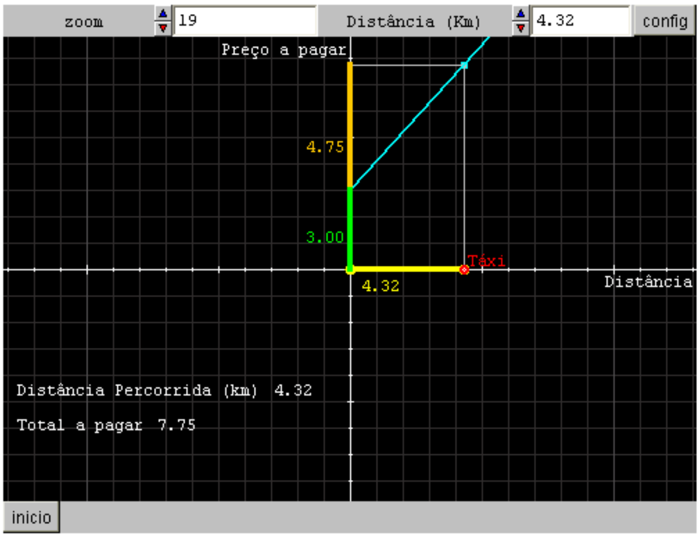


Figura 5: Exemplo de Mathlet

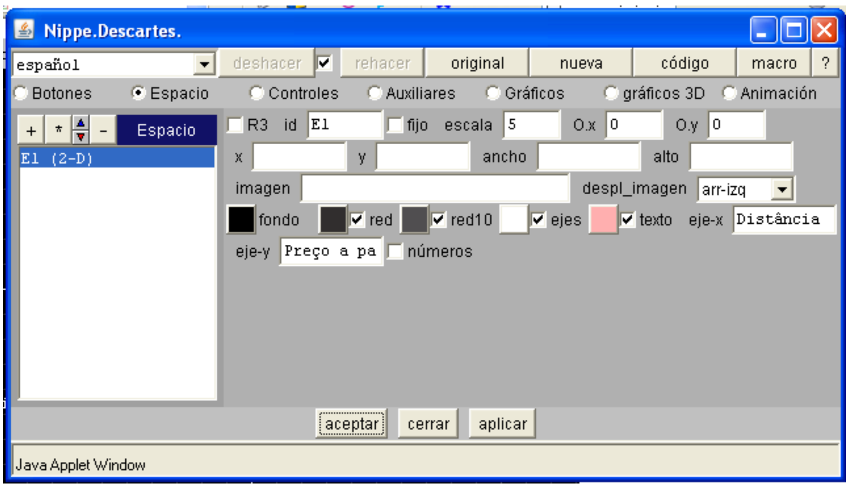


Figura 6: Janela de Configuração do Mathlet

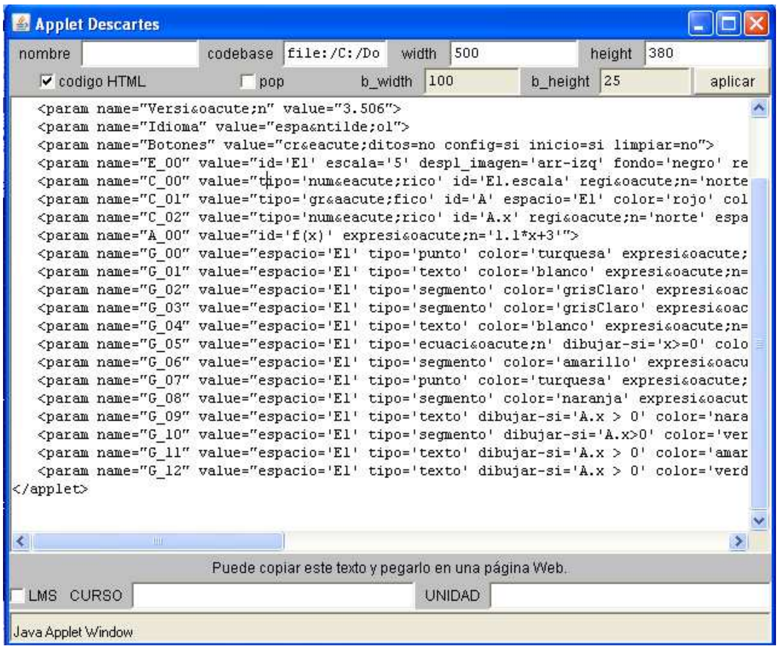


Figura 7: Janela com código gerado pelo construtor

Capítulo 3. Nossa Proposta

> *“Finalmente, julgo eu, seria capaz de olhar para o Sol e de o contemplar,não já a sua imagem na água ou em qualquer sítio, mas a ele mesmo, no seu lugar”*
>
> *Platão*

Considerando essas reflexões com respeito à problemática em torno do Ensino de Cálculo, nossa proposta se baseia na hipótese de que os problemas no ensino desta matéria são de natureza essencialmente epistemológica. Por outro lado, além deste ponto de vista, nossas ações também estarão baseadas em algumas das teorias da área de pesquisa denominada “Pensamento Matemático Avançado” a fim de analisarmos de que forma algumas abordagens, com respeito a determinados conceitos, ajudam no desenvolvimento cognitivo dos alunos.

As conclusões obtidas por Rezende (2003) em sua tese de doutorado também formam uma premissa crucial em nosso trabalho. Após mapear as dificuldades de aprendizagem dos estudantes e relacioná-las com os mapas históricos e conceituais do Cálculo, e também com o ensino de Matemática em um sentido amplo, o referido autor conclui que existe um único **lugar-matriz** das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo:

- o da omissão/evitação das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.

E ainda mais, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo é função:

- Da evitação/ausência das idéias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de Matemática.

Considerando especialmente esta última constatação, elaboramos uma proposta que permite abordar determinadas idéias do Cálculo, nos Ensinos Fundamental e Médio.

Conforme já dissemos, uma das principais premissas de nosso trabalho é a nossa convicção de que as idéias do Cálculo podem e devem ser trabalhadas, pelo menos, desde o Ensino Médio, uma vez que dentro do seu conteúdo programático encontram-se alguns resultados do Cálculo. Desta forma, achamos pertinente entendermos com maior propriedade, como se desenvolveu o ensino de Cálculo no Brasil, em particular o ensino de Cálculo no Ensino Médio.

3.1 Breve Histórico do Ensino de Cálculo no Ensino Médio

No final do século XIX, existiu uma grande preocupação em alguns países europeus com relação ao ensino da matemática em nível secundário. Esta preocupação estava baseada no fato de que a matemática ministrada nos cursos secundários estava em completo descompasso com as novas exigências do novo contexto sócio-político-econômico e também com a matemática estudada nas universidades. A culminância dessa insatisfação geral foi o primeiro grande movimento de modernização do ensino da matemática, tendo como marco inicial a criação da Comissão Internacional de Ensino da Matemática,[8] em 1908, em Roma, liderada pelo ilustre matemático Félix Klein no IV Congresso Internacional de Matemática. Os trabalhos do CIEM mostraram a muitos países, inclusive ao Brasil, a necessidade da reformulação tanto do currículo, quanto da abordagem de determinados conteúdos.

O ensino secundário no Brasil no início do século XIX era caótico. Na verdade, existiam poucas aulas avulsas, sem nenhum incentivo ou orientação, onde os professores escolhiam os horários que melhor lhe conviessem, bem como o conteúdo a ser ensinado, e os alunos matriculavam-se e retiravam-se quando bem entendessem.

A criação da primeira escola pública secundária da cidade do Rio de Janeiro em 1837, o Colégio Pedro II, foi uma das tentativas de mudança desta triste realidade. A partir daí, foi proposto um plano, a partir do qual, os alunos seriam promovidos por série e não mais por disciplina.

Com a Reforma Benjamim Constant no ano de 1890 o sistema educacional brasileiro passou por uma profunda mudança. Esta reforma, elaborada segundo as idéias de Augusto Comte, intentava, entre outras coisas, introduzir uma formação científica em substituição à formação literária existente. Nesta proposta, que reservava sete anos para o ensino secundário, foram contempladas, nos tópicos relativos à matemática, tanto a matemática aplicada, quanto a matemática discreta, tendo no 3° ano a cadeira de Cálculo Dife rencial e Integral. Porém, conforme relata Euclides Roxo:

---

[8] CIEM – Commission Internationale de L'Enseignement Mathématique
IMUK – Internationalen Mathematische Unterrichts Kommission

"o estudo do Cálculo não tinha ligação com o resto do curso, onde não era desenvolvida a idéia de função, e foi feito de um ponto de vista excessivamente formalístico, tornou-se inútil e contraproducente" *(apud Spina 2002)*

Tal postura culminaria em 1900 com a retirada dos programas oficiais do Cálculo Diferencial e Integral. Nos anos que se seguiram, até 1930, nenhuma das reformas propostas chegou a produzir mudanças significativas no ensino secundário brasileiro.

O professor Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II de 1925 a 1935, inspirado nas idéias de Félix Klein e do CIEM, propôs uma mudança curricular no programa de matemática do Colégio Pedro II, que foi efetivada através do Decreto nº18569 de 1929. Apesar da mudança estar restrita ao Colégio Pedro II, esperava-se que as outras instituições fossem atingidas, visto que este deveria ser o modelo para as outras escolas secundárias.

Este fato só se deu com a Reforma Francisco Campos, em 1931, a qual foi a primeira tentativa de estruturar todo o curso secundário nacional, e de introduzir nele os princípios modernizadores da educação. Por meio desta reforma ficaram estabelecidos definitivamente o currículo seriado, a freqüência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar. As disciplinas matemáticas agora estavam unificadas sob o título de Matemática. No programa de Matemática, foi proposta a fragmentação das várias áreas da Matemática, tendo sido enfatizadas a importância de suas aplicações, a introdução do conceito de função e noções do Cálculo Infinitesimal. Este fato fica claro após observarmos alguns trechos da Reforma:

... como um desenvolvimento natural do conceito de função, será incluído na 5ª série o ensino das noções fundamentais e iniciais do cálculo das derivadas, tendo-se não

só em vista a sua aplicação a certas questões, geralmente tratadas em matemática elementar por processos artificiais, como ainda aos problemas elementares da mecânica e da física ...

... a noção de função constituirá a idéia coordenadora do ensino. Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato.

(Decreto n° 19890, 1931, apud Miorim, 1998)

Porém, esta proposta inovadora encontrou muitas resistências para ser implantada, principalmente a partir dos professores que, em geral, não se sentiam seguros para trabalhar a Matemática de uma maneira tão diferente daquela a que estavam habituados. O fato certamente foi agravado pela inexistência, quase que total, de livros didáticos que contemplassem as idéias modernizadoras. Estes fatores contribuíram fortemente para que a implementação da Reforma não tivesse o efeito desejado, visto que, segundo Spina (2002):

"...*os professores, em sua maioria, continuavam a trabalhar os conteúdos de forma desconectada e excessivamente rigorosa".*

Em 1942, com a Reforma Capanema, praticamente encerraram-se as discussões sobre o ensino de matemática. Nesta reforma o ensino secundário foi reformulado e dividido em dois ciclos: ginasial e clássico ou científico. Os conteúdos referentes ao Cálculo continuaram, de forma mais sintética, nos programas regulares do científico. Contudo, Spina (2002), após análise de vários livros didáticos da época, relata que:

... apesar de todas as discussões a respeito do assunto, prevalece a abordagem rigorosa, linear e formal dos conteúdos, assim como a total desarticulação destes com os demais conteúdos.

Em 1951, através da Portaria Ministerial n° 1045, o Ministério da Educação oferece uma abertura para que os governos estaduais e territoriais elaborassem seus programas de ensino, obedecendo a um programa mínimo de conteúdos e às respectivas instruções metodológicas.

Com a Lei de Diretrizes e Bases em 1961, a estrutura da escola brasileira foi dividida em quatro graus escolares: primário, ginasial, colegial e superior. Com a flexibilização do currículo escolar, desaparece o ensino do Cálculo na escola secundária, salvo em algumas escolas isoladas, situação que perdura até hoje.

Após esta análise, se torna evidente que as experiências com o ensino de Cálculo, em nossa escola secundária, não são positivas.

Entretanto, cabe ressaltar que nossa proposta não pretende enfatizar, no Ensino Médio, tópicos tradicionais do Cálculo, como limites, derivadas e integrais. Mas, ao contrário, pretendemos que as idéias do Cálculo que permeiam os conteúdos no Ensino Médio, sejam evocadas e trabalhadas devidamente, de forma a incluir novos atributos, relacionados a estas idéias, na imagem de conceito dos estudantes.

Ressaltamos, todavia, nosso pensamento de que trabalhar os conceitos do Cálculo no Ensino Médio, tal como se encontram organizados no Ensino Superior, não resolveria o problema, mas, ao contrário, faria somente com que este fosse antecipado.

Neste ponto, reafirmamos que nossa proposta não se baseia em uma antecipação do problema, mas na preparação, a nosso ver, imprescindível, para uma resolução deste.

3.2 Algumas Idéias do Cálculo no Ensino Médio

Quando olhamos para o programa de matemática a ser trabalhado nos Ensinos Fundamental e Médio, podemos perceber de forma imediata a presença de alguns elementos e resultados do Cálculo Diferencial. Podemos citar, por exemplo, a área do círculo. O resultado quase sempre é levado ao aluno como uma fórmula, sem que o aluno perceba como se chegou a ela ou, pelo menos, tenha idéia da dificuldade que existe para que se alcance tal resultado. A nosso ver, seria pertinente, neste caso específico, levar o aluno a fazer cálculos de áreas de polígonos regulares inscritos e circunscritos, com o número de lados cada vez maior, em uma circunferência de raio r, a fim de que ele perceba, ao menos, que a área do círculo é menor que a área de qualquer polígono regular circunscrito e que é maior do que a área de qualquer polígono inscrito. Desta forma, achamos também importante fazer o aluno perceber que quando temos um polígono regular, com um número de lados relativamente grande, o aspecto deste polígono se torna parecido com uma circunferência. Isto pode ser feito facilmente com a ajuda de algum "software" de geometria dinâmica, como, por exemplo, Régua e Compasso. Pensamos que estes atributos devam fazer parte da imagem de conceito dos estudantes, ainda que, neste exemplo, não tenhamos utilizado nenhum recurso específico do Cálculo.

A soma dos termos de uma progressão geométrica infinita é um outro exemplo notório dos resultados do Cálculo que aparecem no Ensino Médio. Contudo, apesar dos obstáculos que a noção de infinito sempre trouxe à

Matemática, estes dificilmente são notados pelos alunos, o que é um sinal claro da não utilização de uma das idéias fundamentais do Cálculo, que é a idéia de série.

Em geral, os alunos apenas aplicam a fórmula em casos que “dão certo” e sequer têm condições de questionar sobre a convergência ou não de uma soma com infinitos termos. Neste ponto, cabe ressaltar que, a nosso ver, este fato é completamente inadequado.

Por outro lado, Rezende (2003) nos alerta que, ao relegarmos as séries a um segundo plano, no Ensino Básico de matemática, torna-se inevitável no campo pedagógico o hiato entre a representação decimal de um número irracional (discreto) e sua representação geométrica (contínua). Além disso, Rezende (1994) constata que a atitude de um grupo de estudantes de Ensino Superior, frente ao conceito de infinito, é completamente ingênua e, como conseqüência, a dualidade discreto/contínuo passa longe do campo de significações dos estudantes.

Dessa forma, o trabalho adequado com a idéia de série no Ensino Médio não só possibilita uma problematização inicial das dificuldades de representação e definição dos números irracionais, no seio da dualidade discreto/contínuo, quanto permite que o estudante tenha uma atitude mais adequada, frente à noção de infinito, associando, desta maneira, as dualidades discreto/contínuo e finito/infinito.

3.3 Problema da Variabilidade

É observado por Rezende (2003) a existência de um consenso com relação ao fato de que o Ensino Básico de matemática deve ser processado em três vias: a via da aritmética, a via da geometria e a via da álgebra. O referido autor completa esta análise, com muita propriedade, observando que não existe necessariamente uma via para o Cálculo, mas o Cálculo deve exercer no Ensino Básico o mesmo papel epistemológico que ele realizou no processo de construção do conhecimento matemático no âmbito científico, ou seja, estas vias, acrescidas da via da mecânica, devem ser articuladas e tecidas a partir das idéias e problemas construtores do Cálculo. O Cálculo deve ser um elemento essencial de articulação entre essas vias ou, em outras palavras, será responsável por tecê-las, conforme descrito abaixo:

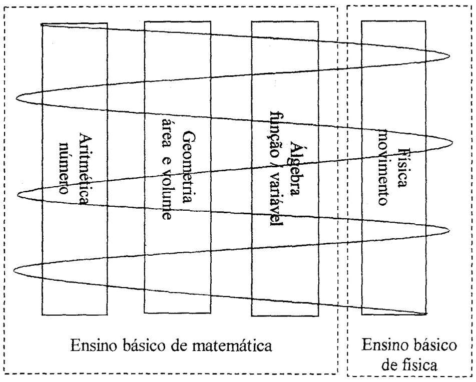


Figura 5

Desta forma, Rezende apresenta duas linhas diretrizes para a emersão do Cálculo no Ensino Básico: o problema da medida e o problema da variabilidade que são, por sinal, questões fundamentais do Cálculo. Neste sentido, o problema da medida se divide basicamente entre o problema geométrico da medida (procedimento de cálculo de áreas e volumes) e o processo aritmético da medida (o valor numérico da medida, número real).

Contudo, em nossa pesquisa, trataremos primordialmente do problema da variabilidade.

Caracterizaremos o problema da variabilidade, segundo Machado (1998), como:

... o problema que trata das questões relacionadas com a medida da rapidez com que as grandezas aumentam ou diminuem, como os objetos se movem ou como as coisas se transformam.

Este foi, certamente, um dos problemas motivadores da construção do Cálculo, e afligiu muitos matemáticos durante séculos, até ser definitivamente resolvido por meio do conceito de derivada. Devemos observar, ainda, que o conceito de função teve um papel primordial na resolução do problema da variabilidade e também na fundamentação das idéias básicas do Cálculo.

Por outro lado, conforme já mencionado, existe, no Ensino Básico, um monopólio da representação algébrica quando se trabalha com o conceito de função.

Desta forma, concordamos com Rezende (2003):

Assim, para que se possa romper com essa caracterização algébrica do conceito de função e devolver este conceito ao Cálculo, será preciso construir suas significações a partir do problema fundamental da variabilidade.

Portanto, a partir desta análise, acreditamos ser bastante natural, trabalhar alguns conceitos matemáticos relacionados ao Cálculo, principalmente o conceito de função, do ponto de vista da variabilidade, no âmago da dualidade variabilidade/permanência, observando que tanto o problema da variabilidade, quanto o conceito de função, tiveram participação fundamental na concepção do Cálculo.

Isto posto, nossa proposta de inserção das idéias do Cálculo no Ensino Médio consiste inicialmente em caracterizar as funções reais usualmente estudadas no Ensino Básico, neste caso, especificamente, as funções polinomiais do 1° e 2° graus, a partir do estudo de suas variaç ões.

Desta forma, a função afim será caracterizada segundo o que consideramos ser, a sua propriedade fundamental, a saber: acréscimos iguais na variável independente ocasionam acréscimos iguais na variável dependente, ou ainda, o acréscimo $f(x+h)-f(x)$ depende apenas de h.

Já a função quadrática será a função em que a taxa de variação da taxa de variação da quantidade y com relação à quantidade x será constante.

Contudo, a física oferece condições apropriadas para a emersão das idéias do Cálculo. Sobre isto, Rezende (2003) nos lembra que:

> *... através do entrelaçamento das idéias físicas, do infinitésimo e da geometria analítica, que Newton construiu o seu Cálculo.*

Sendo assim, também trabalharemos as funções afim e quadrática, no cenário cinemático dos movimentos uniforme e uniformemente variado.

Ainda neste cenário dado pela física, pensamos que uma das significações mais relevantes do conceito de derivada, neste contexto da variabilidade, é a noção de taxa de variação instantânea. Neste sentido, nossa proposta também estará baseada no pensamento de Rezende (2003), quando afirma que:

> *Calcular exaustivamente derivadas de funções através das regras usuais de derivação não leva o aluno a construir efetivamente o significado desta operação. Interpreta-la tão somente como "coeficiente angular da reta tangente" significa ignorar o problema histórico essencial da "medida" instantânea da variabilidade de uma grandeza – esse foi inclusive, o grande problema perseguido inicialmente pelos filósofos escolásticos.*
>
> *Com efeito, derivada, é sobretudo, taxa de variação instantânea. A interpretação geométrica não esgota completamente a idéia essencial de derivada; existe todo um campo de significações importante para a tecedura da noção de derivada: pensar velocidade instantânea como coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $s=s(t)$ é conseqüência, e não causa, da ação de interpretá-la como limite de velocidades médias, quando fazemos Δt cada vez mais próximo de zero. Na verdade ambas as interpretações se complementam e contribuem para a significação do conceito de derivada. Eximir a*

interpretação dinâmica do conceito de derivada é, além de um contra-senso histórico, um atentado ao seu próprio significado.

Desta maneira, achamos bastante salutar a associação entre os aspectos geométrico e físico relacionados ao conceito de derivada. Acreditamos que a imagem de conceito dos estudantes se tornará enriquecida com o entrelaçamento entre o problema do cálculo da reta tangente e o problema do cálculo da taxa de variação instantânea.

Partindo da noção de retidão local, esperamos que os alunos visualizem a reta tangente em um determinado ponto, como a reta que melhor aproxima a função nas proximidades deste ponto. Em contrapartida, trabalharemos para que o estudante seja capaz de, ao visualizar o gráfico de uma função globalmente, traçar a reta tangente em um determinado ponto. Percebamos que estamos trabalhando as duas extremidades da dualidade local/global.

Por fim, trabalharemos no sentido de que o aluno perceba a velocidade instantânea como aproximação de velocidades médias com $\Delta t \to 0$, da mesma forma que esperamos a visualização, por parte do aluno, da reta tangente como aproximação das retas secantes.

A nosso ver, todas essas idéias, além de perfeitamente viáveis para serem trabalhadas no Ensino Médio, possibilitam uma ampla gama de unidades cognitivas, relacionadas aos conceitos do Cálculo, que ajudarão o aluno tanto num futuro curso de Cálculo, quanto no enriquecimento da imagem de conceito de outros conteúdos matemáticos.

Desta forma, a partir de todas as considerações feitas até aqui, estabeleceremos seis objetivos em nossa seqüência didática. Estes objetivos, que chamaremos doravante de hipóteses, resumem as metas que pretendemos atingir em nossa proposta.

Assim, ao lembrarmos os pilares sobre os quais nossa proposta foi concebida, pensamos que, ao atingirem estas metas, os estudantes terão um ganho extremamente valioso em sua formação matemática, que certamente se refletirá tanto no Ensino Médio, quanto no Ensino Superior.

Esperamos que, ao realizarem as atividades da seqüência didática, os alunos atinjam estes objetivos, validando, desta maneira, nossas hipóteses.

Explicitaremos agora nossas hipóteses, pois acreditamos que os alunos do Ensino Médio sejam capazes de:

H1 – Compreender a propriedade fundamental da função afim;

H2 – Compreender a caracterização das funções polinomiais de 1° e 2° graus de acordo com a sua variação;

H3 – Associar a taxa de variação média de uma função com o coeficiente angular da reta secante a dois pontos do gráfico da função;

H4 – Compreender o comportamento local da reta tangente e ser capaz de traçá-la;

H5 – Compreender a taxa de variação instantânea como aproximações da taxa de variação média calculada em intervalos cada vez menores;

H6 – Associar a reta tangente com aproximações das retas secantes traçadas em intervalos cada vez menores.

3.4 Relevância da nossa proposta no Ensino Médio

Partindo da necessidade de se construir uma referência curricular nacional para o Ensino Básico, que pudesse ser discutida e traduzida em propostas regionais nos estados e municípios brasileiros, foram criados pelo Ministério da Educação, com a ajuda de muitos educadores brasileiros, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Estes Parâmetros, além de difundir os princípios da reforma curricular, também objetivavam orientar o professor na busca de novas abordagens e metodologias.

Foram publicados, em 1998, os PCN direcionados aos quatro ciclos do Ensino Fundamental. Já no ano de 1999, foram divulgados os PCN que continham os princípios norteadores e a reforma curricular do Ensino Médio.

A reforma curricular do Ensino Médio estabelece a divisão do conhecimento escolar em três áreas.

- Linguagens, Códigos e suas Tecnologias
- Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias
- Ciências Humanas e suas Tecnologias

Cabe ressaltar que esta divisão por áreas:

... tem como base a reunião daqueles conhecimentos que compartilham objetos de estudo e, portanto, mais facilmente se comunicam, criando condições para que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade.

(Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio)

Por outro lado, as orientações educacionais complementares aos PCN esclarecem que dentro da área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, existem três grandes metas a serem perseguidas durante o Ensino Médio para todos os brasileiros:

• representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;

• investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;

• contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico.

Foram estabelecidos temas que permitissem ao aluno desenvolver as competências descritas acima, avançando a partir do ponto em que se encontra.

Os temas são:

1 - Álgebra: Números e Funções

2 – Geometria e Medidas

3 - Análise de Dados

Para o desenvolvimento do tema “Álgebra: Números e Funções” são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria.

Observemos, agora, que estas recomendações estão em conformidade com o que já discorremos a respeito do ensino tradicional do conceito de função.

Tradicionalmente o ensino de funções estabelece como pré-requisito o estudo dos números reais e de conjuntos e suas operações, para depois definir relações e a partir daí identificar as funções como particulares relações. Todo esse percurso é, então, abandonado assim que a definição de função é estabelecida, pois para a análise dos diferentes tipos de funções todo o estudo relativo a conjuntos e relações é desnecessário.

(PCN+,2002)

E mais ainda, as orientações relativas ao conceito de função estão em completa consonância com a nossa proposta.

Assim, o ensino pode ser iniciado diretamente pela noção de função para descrever situações de dependência entre duas grandezas, o que permite o estudo a partir de situações contextualizadas, descritas algébrica e graficamente.
... os problemas de aplicação não devem ser deixados para o final desse estudo, mas devem ser motivo e contextos para o aluno aprender funções. A riqueza de situações envolvendo funções permite que o ensino se estruture permeado de exemplos do cotidiano, das formas gráficas que a mídia e outras áreas do conhecimento utilizam para descrever fenômenos de dependência entre grandezas. *(PCN+,2002)*

Notemos que tanto a proposta advinda do ministério da educação, quanto a nossa proposta, situam o conceito de função dentro do contexto da variabilidade, partindo da resolução de problemas, para que em um momento posterior sejam aprofundados diferentes aspectos das funções, enriquecendo, desta forma, a imagem de conceito dos estudantes.

Por outro lado, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio (PCNEM), as finalidades do ensino de Matemática no Ensino Médio indicam como objetivos levar o aluno a:

1 - compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;

2 - aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

3 - analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;

4 - desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;

5 - expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;

6 - estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;

7 - reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;

8 - promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.

Explicitamos, no item 3.3, seis hipóteses que pretendemos validar após a aplicação da seqüência didática. Essas hipóteses sintetizam metas, que ao serem atingidas, representarão tanto o sucesso do trabalho efetivo de algumas idéias relacionadas ao Cálculo no Ensino Médio, quanto o enriquecimento da imagem de conceito dos estudantes.

Contudo, poderíamos pensar que este enriquecimento trará benefícios apenas aos alunos que cursarão alguma cadeira de Cálculo no Ensino Superior, mas, ao contrário, pensamos que a implementação da nossa proposta beneficiará o próprio Ensino Médio, uma vez que nossas metas, sendo atingidas, satisfazem completamente os objetivos do Ensino Médio, traçados pelo Ministério da Educação.

De fato, quando o estudante compreende a propriedade fundamental da função afim e caracteriza as funções polinomiais do 1° e 2° graus segundo a sua variação, ou seja, as hipóteses 1 e 2 são satisfeitas, além de dar um passo significativo para o entendimento do conceito de função, rompendo com a sua caracterização algébrica e construindo suas significações a partir do problema fundamental da variabilidade, ele passa a ter em sua imagem de conceito um atributo que lhe permitirá desenvolver posteriormente outros atributos relativos ao próprio conceito de função e também a conceitos do Cálculo, atingindo, desta forma, o objetivo 1, listado pelos PCNEM. Por outro lado, ao lembrarmos que nossa estratégia, para que os alunos atinjam as hipóteses 1 e 2, se baseia na resolução de problemas e que diversos destes problemas são de outras áreas do currículo, podemos concluir que os objetivos 2,4 e 7 também são satisfeitos.

Todavia, quando as hipóteses 3,4,5 e 6 são satisfeitas, os estudantes detêm em sua imagem de conceito, uma ampla rede de significações, relacionadas ao conceito de função, fundamentada dentro do contexto da variabilidade. Uma aplicação natural destas conexões evidencia-se na associação entre o conceito de taxa de variação instantânea e cálculos de sucessivas aproximações da taxa de variação média, calculada em intervalos cada vez menores. Esta associação permite vincularmos diferentes áreas do currículo por meio da resolução de problemas como, por exemplo, introduzindo o conceito de velocidade por meio da noção intuitiva de limite. Cabe lembrar ainda que, em nossa proposta, abordamos tanto a interpretação geométrica do conceito de derivada, quanto sua interpretação física, ou seja, o estudante tem em sua imagem de conceito pelo menos duas representações para este conceito tão importante.

Portanto, por estes motivos, atingimos os objetivos 1,2,4,6 e 7. Contudo, ao recordarmos a forma como foi concebida nossa seqüência didática, permitindo que o estudante seja sujeito ativo no processo educativo e que se expresse escrita e graficamente em situações matemáticas, podemos concluir que atingimos o objetivo 5, quando o aluno responde com sucesso as questões da seqüência didática. E ainda, se o estudante compreende tudo aquilo que esperávamos, então o objetivo 8 é claramente atingido.

Vejamos a seguinte tabela, que relaciona as metas da nossa pesquisa com os objetivos do Ensino Médio, segundo o Ministério da Educação:

Metas que deverão ser atingidas	Objetivos Atingidos
Hipótese 1	1,2,4,5,7,8
Hipótese 2	1,5,7,8
Hipótese 3	1,2,5,6,7,8
Hipótese 4	1,5,6,7,8
Hipótese 5	1,2,5,6,7,8
Hipótese 6	1,5,7,8

Tabela 1

Desta forma, além da nossa proposta estar em consonância com as diretrizes estabelecidas, ela também satisfaz plenamente os objetivos traçados para o Ensino Médio. Nesse sentido, pensamos que a implementação desta proposta trará um ganho efetivo, no que diz respeito ao ensino de Matemática, tanto para o Ensino Básico quanto para o Ensino Superior.

Capítulo 4. Metodologia

"Não é propósito meu ensinar aqui o método que cada um deveria seguir para bem orientar a sua razão, porém somente demonstrar de que modo procurei descobrir a minha"
René Descartes

A metodologia de nossa pesquisa será baseada na Engenharia Didática desenvolvida pela escola francesa de Didática da Matemática.

A idéia da Engenharia Didática traz implícita uma relação entre o trabalho do pesquisador e o trabalho do engenheiro, no que se refere à concepção, planejamento e execução de um projeto.

Segundo Artigue (1988), apud Ferreira (2006), a Engenharia Didática se caracteriza como um esquema experimental baseado sobre realizações didáticas em sala de aula, isto é, sobre a concepção, a realização, a observação e a análise de seqüências de atividades de ensino.

A Engenharia Didática, enquanto procedimento metodológico, fundamenta-se em registros de estudos de casos, cuja validade é interna, circunscrita ao contexto da experiência realizada. Assim, a validação da pesquisa é realizada, sobretudo internamente, de forma diferente da que se orienta por métodos estatísticos e cuja validação se baseia em comparação estatística entre os desempenhos dos grupos de controle e grupos experimentais. Na Engenharia Didática, a validação é baseada na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (PAIS,2002)

Segundo Ferreira (2006), a Engenharia Didática se constitui como uma forma de organizar a pesquisa em didática da Matemática, a partir da criação de uma seqüência de aulas planejadas com a finalidade de obter informações que permitam interpretar processos de ensino-aprendizagem da Matemática, esclarecendo o fenômeno investigado.

Justifica-se essa escolha, pela concepção da Engenharia Didática, que contempla tanto a dimensão teórica, como experimental da pesquisa, tendo como principal vantagem exatamente esta dupla ancoragem, que interliga o plano teórico da racionalidade ao território experimental da prática educativa.

A investigação, nessa concepção, se desenvolverá em quatro fases: a) fase 1: Análises Preliminares; b) fase 2: Concepção da situação didática e análise *a priori*; c) fase 3: Aplicação de uma seqüência didática; d) fase 4: Análise *a posteriori* e validação.

O detalhamento dessas fases está descrito no item 4.1

4.1 Detalhamento e Implementação da Engenharia Didática

Nesse item, são descritas as suas quatro fases de uma forma geral e de uma forma específica relacionada a essa investigação.

4.1.1 Análises Preliminares

Segundo Pais (2002), neste primeiro momento o pesquisador deve fundamentar a seqüência de ensino e suas ações sob um determinado referencial teórico. Recomenda-se, proceder a uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemológica, cognitiva, pedagógica, entre outras.

Desta forma, o problema motivador da pesquisa e o quadro teórico sob os quais foram fundamentadas nossas escolhas e ações, estão descritos nos capítulos 1,2 e 3.

4.1.2 Concepção da Situação Didática e Análise *a Priori*

Nesta fase, atua-se sobre um determinado número de variáveis pertinentes ao assunto a ser pesquisado, com o objetivo de determinar de que forma as escolhas das variáveis permitem controlar o comportamento dos alunos. Ela compreende aspectos descritivos e previsões a respeito do comportamento dos estudantes.

A partir do problema motivador da nossa pesquisa e de todas as considerações assumidas até aqui, foram traçados, no item 3.3, seis hipóteses. Essas hipóteses são atributos que, a nosso ver, devem fazer parte da imagem de conceito do educando do Ensino Médio.

A seqüência didática foi elaborada, de forma a ser dividida em seis fichas. Cada uma dessas fichas foi concebida com o objetivo de levar o aluno a compreender uma hipótese.

Desta forma, neste caso particular, a concepção da situação didática leva fortemente em consideração as hipóteses a serem validadas. Em suma, nosso objetivo é que cada uma das fichas leve à compreensão de cada uma das hipóteses, tornando-as validadas por ocasião do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Segundo Pais (2002), o objetivo da análise a priori é determinar quais são as variáveis escolhidas sobre as quais se torna possível exercer algum tipo de controle, relacionando o conteúdo estudado com as atividades que os alunos podem desenvolver para a apreensão dos conceitos em questão.

A análise *a priori* de cada uma das fichas da seqüência didática encontra-se no item 5.1.

4.1.3 Aplicação de uma seqüência didática

Uma seqüência didática é formada por certo número de aulas (sessões) planejadas previamente, as quais devem ser fundamentadas sob o que foi levantado nas análises preliminares e na análise *a priori*.

Nesta fase, então, é aplicada a seqüência didática concebida pelo pesquisador a uma determinada população de alunos. O tipo de registro desta seqüência deve ser escolhido de acordo com as variáveis levantadas na análise *a priori*.

Implementamos nossa seqüência didática, com dezesseis alunos do Instituto Nossa Senhora da Glória (INSG), entre os dias 11/08/2008 e 29/09/2008, em um total de seis encontros.

Estes encontros se deram no laboratório de informática do INSG. Criamos um curso, denominado Projeto Idéias do Cálculo no Ensino Médio, na plataforma de ensino à distância,[9] da Faculdade Salesiana Maria Auxiliadora (FSMA), instituição que está associada ao INSG. Neste curso, foram apresentados os

[9] Esta plataforma que é usada em alguns cursos da FSMA utiliza o software livre moodle.

“mathlets” que os estudantes deveriam manipular, para que pudessem responder as questões propostas.

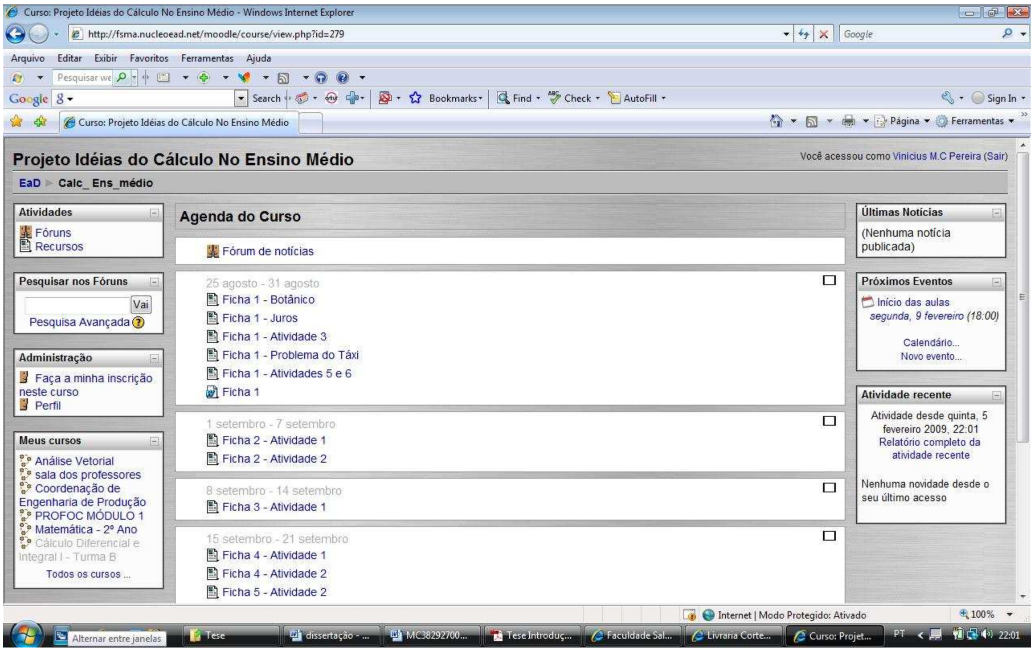


Figura 6 - Interface da página inicial do Projeto

Nas sessões, cada aluno sentou-se junto a um computador e recebeu uma ficha de atividades. As atividades, então, foram respondidas nestas fichas, à medida que os alunos manipulavam os “mathlets”.

Foto 1 – Realização de uma das atividades da Seqüencia Didática

Uma descrição detalhada acerca da aplicação da seqüência didática encontra-se no item 5.2.

4.1.4 Análise *a Posteriori* e Validação

Corresponde à análise do conjunto dos dados obtidos na fase de experimentação e às observações realizadas durante a fase de aplicação da seqüência.

A validação ocorre através do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Conforme descrito no item 3.3, elaboramos seis hipóteses que sintetizam nossos objetivos na pesquisa. Uma das premissas mais importantes de nossa proposta considera que o aluno de Ensino Médio seja plenamente capaz de trabalhar com os conceitos sintetizados nas hipóteses. Nosso intuito é que todas as hipóteses sejam validadas, mostrando, desta forma, que as premissas são verdadeiras, dentro do contexto em que a pesquisa foi realizada.

Em todas as fichas, analisaremos o desempenho dos estudantes individualmente, a partir das respostas e considerações feitas. Com base nesta análise, constataremos se o aluno atingiu o objetivo, atingiu parcialmente o objetivo ou não atingiu o objetivo.

Desta forma, consideraremos as hipóteses validadas, à medida que uma parte substancial dos alunos demonstre ter atingido os objetivos.

Capítulo 5. Estudo de Campo

“Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender”
Paulo Freire

Neste capítulo é descrito o estudo de campo realizado, englobando a apresentação da seqüência didática, a análise *a priori* das atividades, o experimento, a aplicação da seqüência didática, a análise *a posteriori* e a validação das hipóteses de nossa proposta.

5.1 Seqüência Didática e Análise *a Priori*

Nessa seção, apresentaremos a seqüência didática acompanhada da respectiva análise *a priori* e um teste diagnóstico que os alunos responderão no primeiro encontro. Essa seqüência é formada por seis Fichas, onde cada ficha é composta de algumas atividades.

O teste diagnóstico foi concebido com o objetivo de ser um instrumento que nos ajudará a descobrir o que os estudantes sabem a respeito do conceito de função e, assim, também será um instrumento levado em consideração na fase da validação.

As duas primeiras questões do teste diagnóstico nos revelarão se os estudantes confundem o gráfico que representa o movimento de um móvel, em função do tempo, com o seu trajeto.

Na terceira questão, pretendemos saber se os estudantes relacionam corretamente a expressão algébrica da função afim com o seu gráfico, levando em consideração o crescimento e decrescimento da função.

A quarta questão nos mostrará se os alunos sabem calcular o coeficiente angular do gráfico de uma função afim e se, partindo do gráfico da função, serão capazes de determinar a expressão algébrica.

Com a análise da quinta questão, saberemos se os estudantes conseguem interpretar o gráfico que representa a posição de um móvel em função do tempo.

Já na sexta questão, saberemos se os alunos compreendem que o crescimento de uma função, cujo gráfico representa a posição de um móvel que se desloca com velocidade constante, é linear.

Nas últimas quatro questões do teste, pretendemos saber se os estudantes, tendo somente a expressão algébrica da função, trabalham corretamente com a sua variação.

Em suma, esse teste nos permitirá estimar o que está presente na imagem de conceito dos alunos. Sem dúvida, esse instrumento será de suma importância em nossa análise, visto que poderemos avaliar, com maior propriedade, o que o estudante aprendeu, já que temos, em mãos, uma aproximação do que estava em sua imagem de conceito.

Com relação à seqüência didática, na primeira ficha, propomos uma abordagem corporificada relacionada à resolução de problemas e à interação com o gráfico da função afim que modela os respectivos problemas.

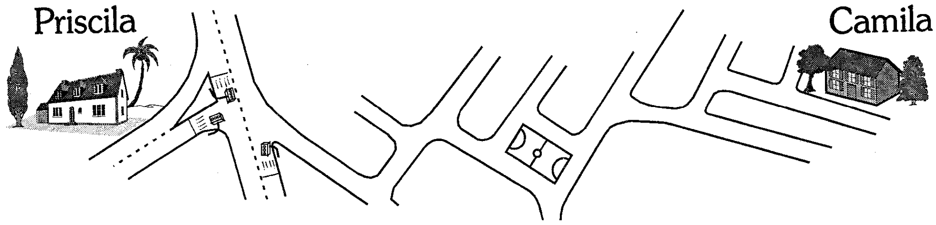
Na segunda ficha procuramos caracterizar as funções afim e quadrática quanto as suas variações e não quanto as suas propriedades algébricas.

Nas últimas duas últimas fichas, vislumbramos que o aluno tenha acrescentado, em sua imagem de conceito, alguns atributos relativos à reta secante, reta tangente, taxa de variação média e taxa de variação instantânea.

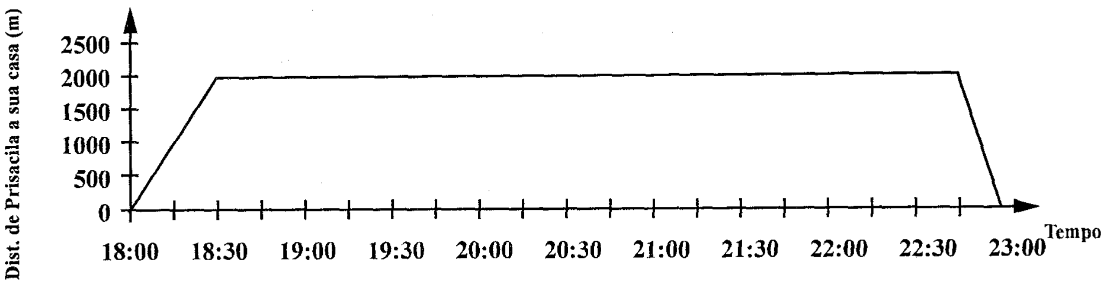
Utilizaremos, como raiz cognitiva para o conceito de reta tangente, a noção de retidão local. Pretendemos que o aluno perceba a taxa de variação instantânea enquanto aproximações sucessivas da taxa de variação média com intervalos cada vez menores e, como conseqüência disso, a reta tangente enquanto aproximação das retas secantes.

TESTE DIAGNÓSTICO

Priscila sai de casa para ir à festa de Camila.
Camila dá um mapa do caminho para que Priscila possa chegar em sua casa.
Priscila vai a pé e volta de ônibus.



1) Observe o gráfico abaixo:

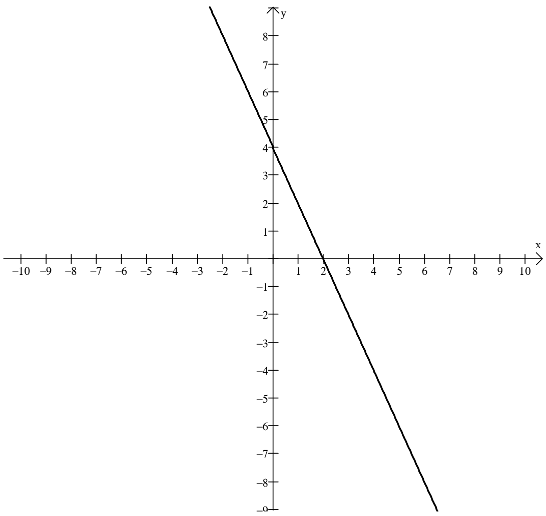


a) A que horas Priscila saiu de casa?
b) A que horas Priscila chegou em casa?
c) A que horas Priscila chegou a festa?
d) A que distância fica a casa da Camila da casa de Priscila?
e) Quanto tempo Priscila demorou para chegar à festa?
f) Quanto tempo ela ficou na festa?
g) Quanto tempo Priscila demorou para chegar em casa?
h) O mapa mostra que o caminho da casa de Priscila até a casa de Camila é cheio de curvas. Como pode o gráfico ser composto por segmentos de reta?
i) Por que no trecho entre 18h e 18h30 min o gráfico sobe?

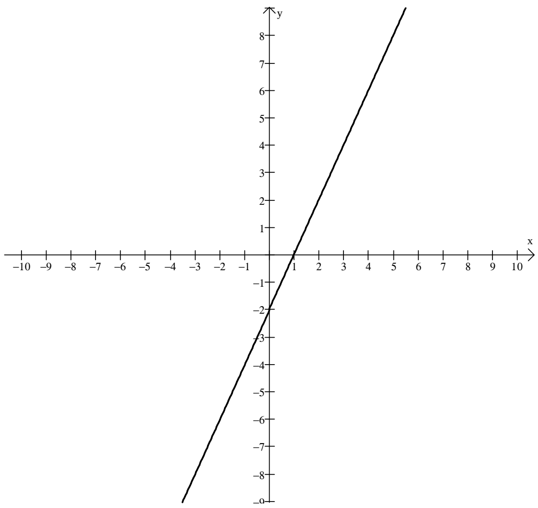
2) Suponha que Priscila já tenha andado 15 minutos em direção à festa, quando descobriu que tinha esquecido o presente de Camila. Teve portanto de voltar a sua casa e depois ir à festa de Camila. Esboce o gráfico que melhor representa este percurso?

3) Qual dos gráficos representa a função $y = -2x + 4$ Explique a razão pela qual você fez a sua escolha.

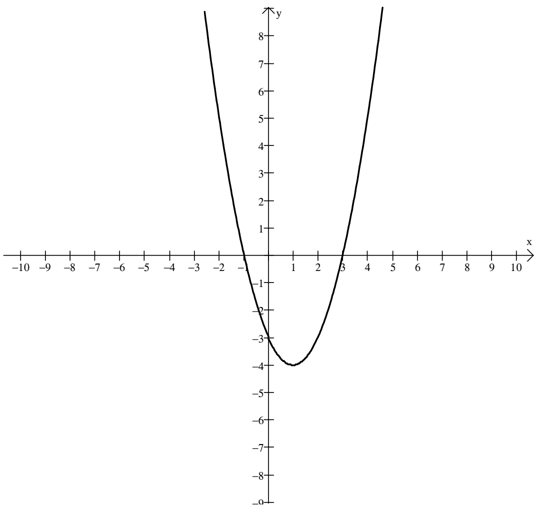
a)



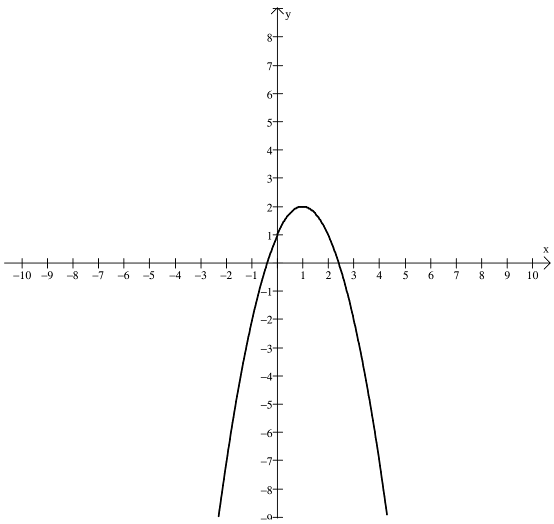
c)



b)

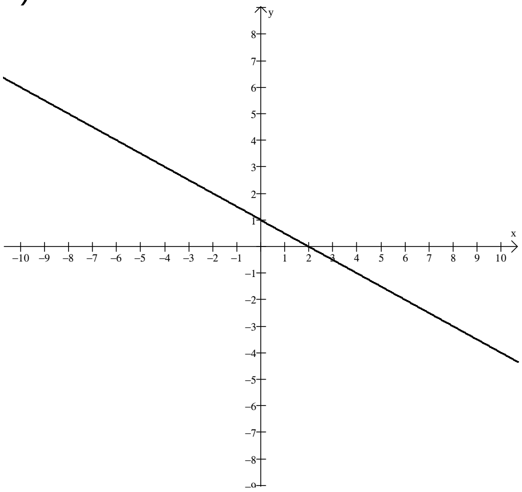


d)

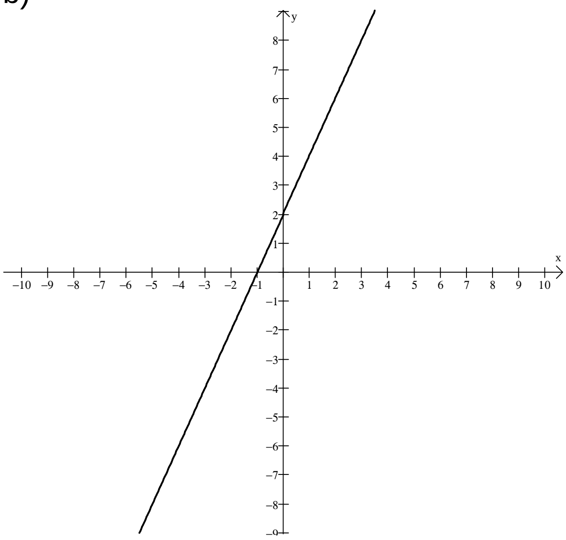


4) Determine o coeficiente angular de cada uma das retas abaixo e escreva a expressão que relaciona y com x.

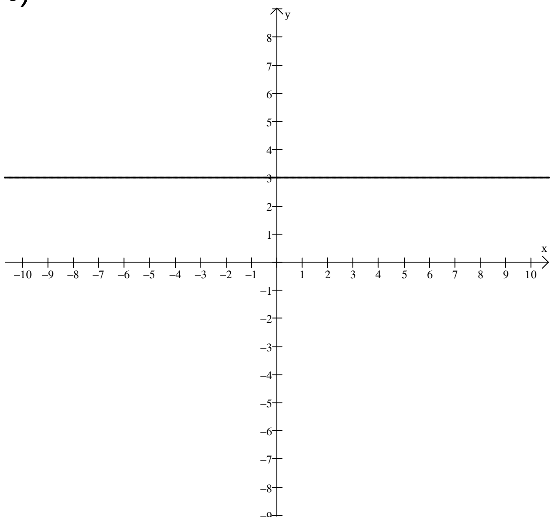
a)



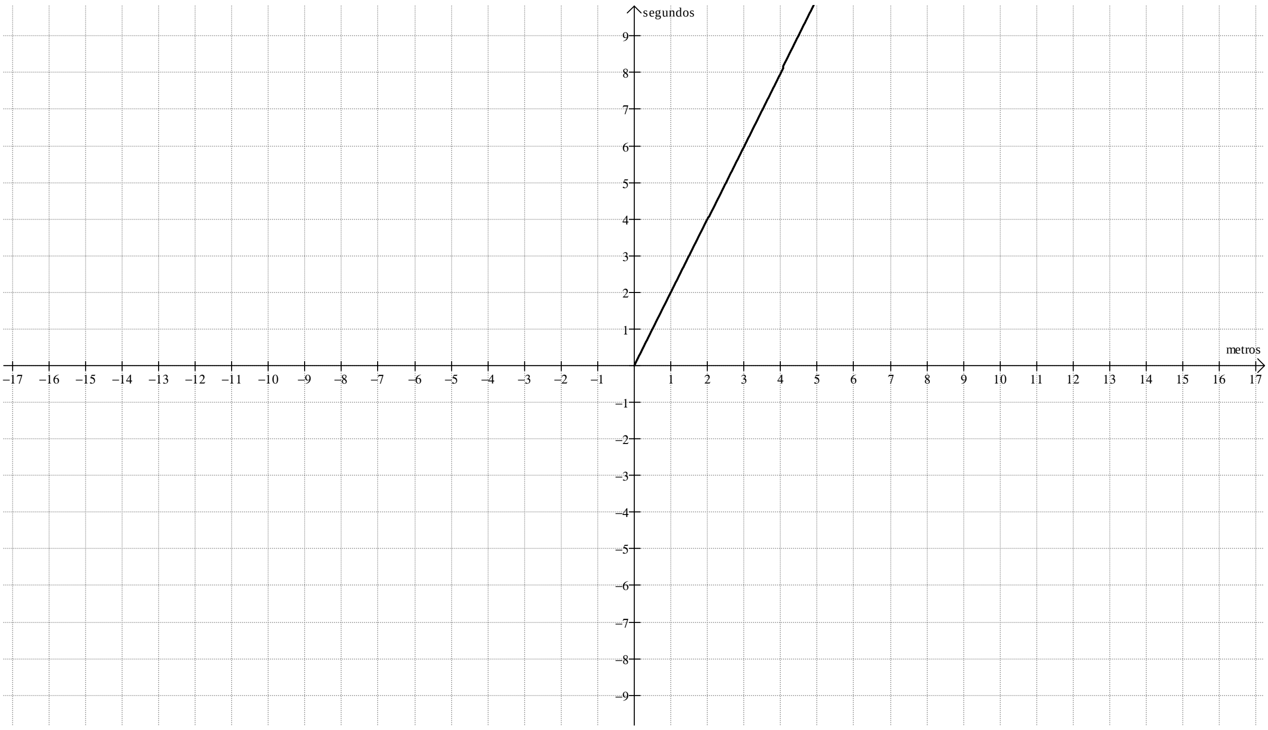
b)



c)

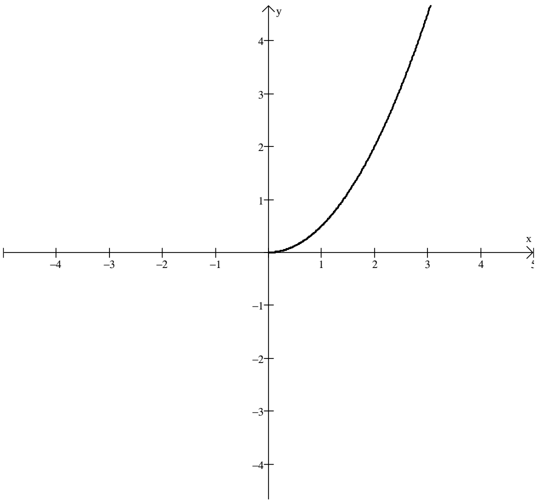


5) A posição de um carro em função do tempo é descrito no gráfico abaixo. Qual é a velocidade do carro?

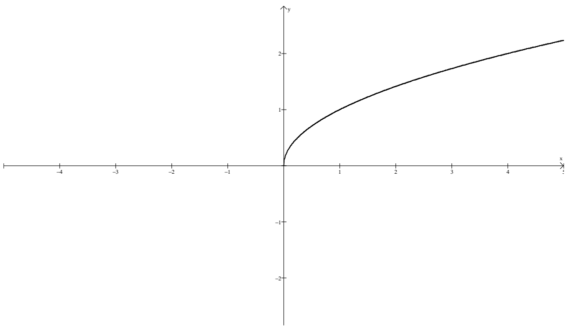


6) Um ciclista percorre uma pista circular com velocidade constante. Assinale o gráfico que melhor representa a variação da posição do ciclista em função do tempo.
Justifique sua resposta.

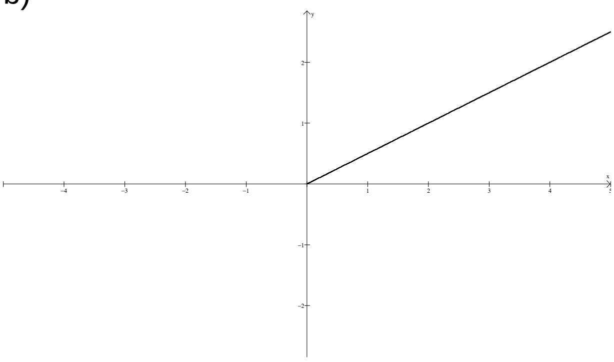
a)



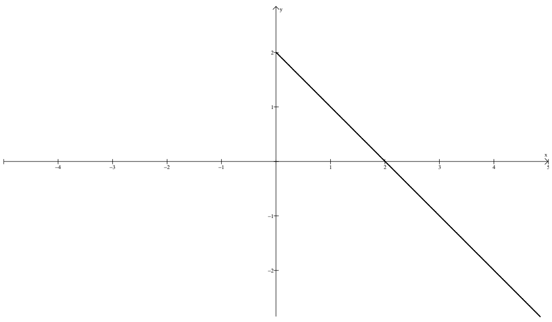
c)



b)



d)



7) A distância percorrida por um móvel é dada pela lei $s(t) = 2t^2 + 2$, onde a distância s é dada em metros e o tempo t é medido em segundos. Por exemplo, no instante 1 segundo a posição do móvel é $s(1) = 2.1^2 + 2$ metros. Qual é a velocidade média do móvel nos 5 primeiros segundos?

8) Dada a função $y = 3x + 4$, determine:

a) Qual é a variação de y quando x passa de 10 para 11?

b) A variação de y é maior quando x passa de 3 para 4 ou quando passa de 5 para 6?

c) Qual é a variação de y quando x passa de 251 para 252?

d) Considerando y em função de x, o que você entende por taxa de variação de y em relação a x?

9) Qual é a taxa de variação da função $y = 4x - 5$? Justifique a sua resposta.

10) Considerando a função $y = 3x^2 + 2$, responda:

a) a variação de y é maior quando x passa de 3 para 4 ou quando passa de 5 para 6?

b) Qual é a taxa de variação média quando x passa de 2 para 6?

FICHA 1

ANÁLISE *A PRIORI*

O objetivo dessa ficha é levar o aluno a compreender a propriedade fundamental das funções afim, ou seja, que acréscimos iguais na variável independente correspondem a acréscimos iguais na variável dependente. Nesse caso, nossa metodologia se dá por meio da resolução de problemas, pois acreditamos que por meio da resolução dos diversos tipos de problemas que podem ser modelados por funções afim, o estudante tenha reais condições não só de observar esta propriedade fundamental mas também compreender de fato o que significa a taxa de variação de uma função afim, sem que tenhamos definido formalmente este conceito.

Nas atividades 1 e 2, esperamos que o aluno, interagindo com a cena, conclua corretamente qual é a lei de formação da função, observando que a altura da planta e valor a pagar aumentam da mesma forma a cada dia.

Na atividade 3, esperamos que o estudante perceba que, quando representamos por meio de uma função um móvel que se move a uma velocidade constante, a função que modela essa situação é uma função afim ou uma função linear (se considerarmos que a posição inicial do móvel é zero) e que o coeficiente angular da reta é igual ao valor da velocidade.

Na atividade 4, esperamos que o aluno identifique o valor do quilômetro rodado como a taxa de variação da função e o valor da bandeirada como o coeficiente linear, para que então possa chegar à lei de formação da função.

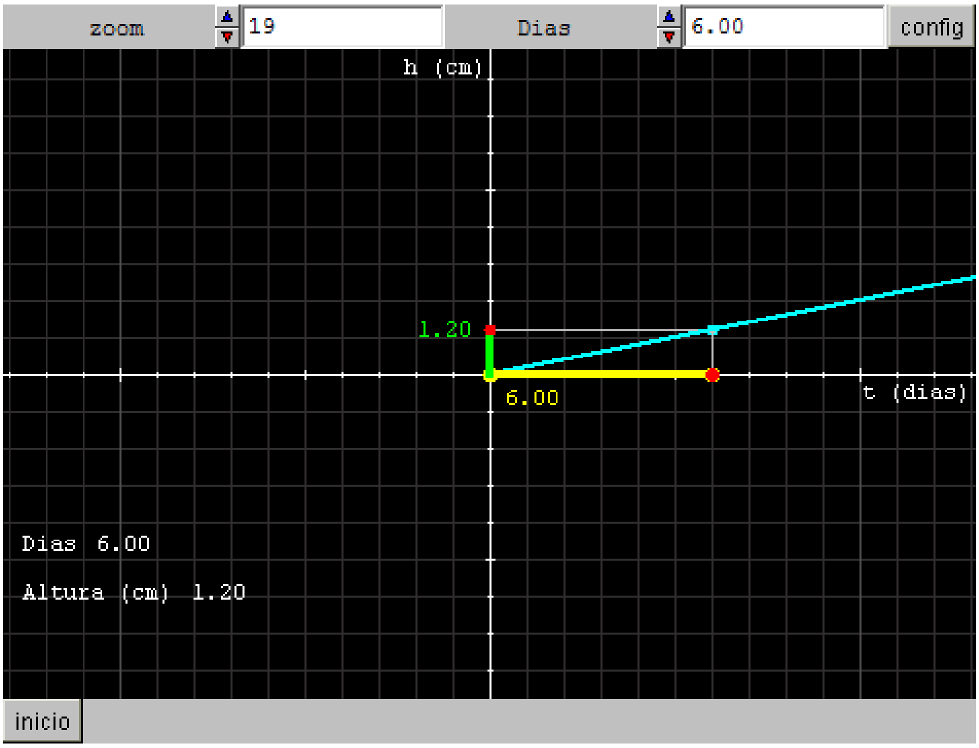
Na atividade 5, nosso objetivo é que o aluno perceba que o comprimento do segmento horizontal representa o valor de $x_2 - x_1$ e, analogamente, o comprimento do segmento vertical representa $f(x_2) - f(x_1)$.

Na atividade 6, esperamos levar o aluno a concluir que, quando variamos o valor de x em uma unidade, o valor de y varia sempre da mesma forma.

Finalmente, nas atividades de conclusão, esperamos que os alunos resolvam os problemas propostos utilizando a propriedade fundamental das funções afim. E, dessa forma, verificar se as atividades propostas nessa ficha influem nas respostas dos alunos. Essa verificação se dará por uma comparação das respostas obtidas no Teste Diagnóstico e nas atividades de conclusão da Ficha 1.

ATIVIDADE 1

Diariamente, um botânico mede, em centímetros, o crescimento de uma planta, registrando os dados obtidos, conforme a seguinte cena.



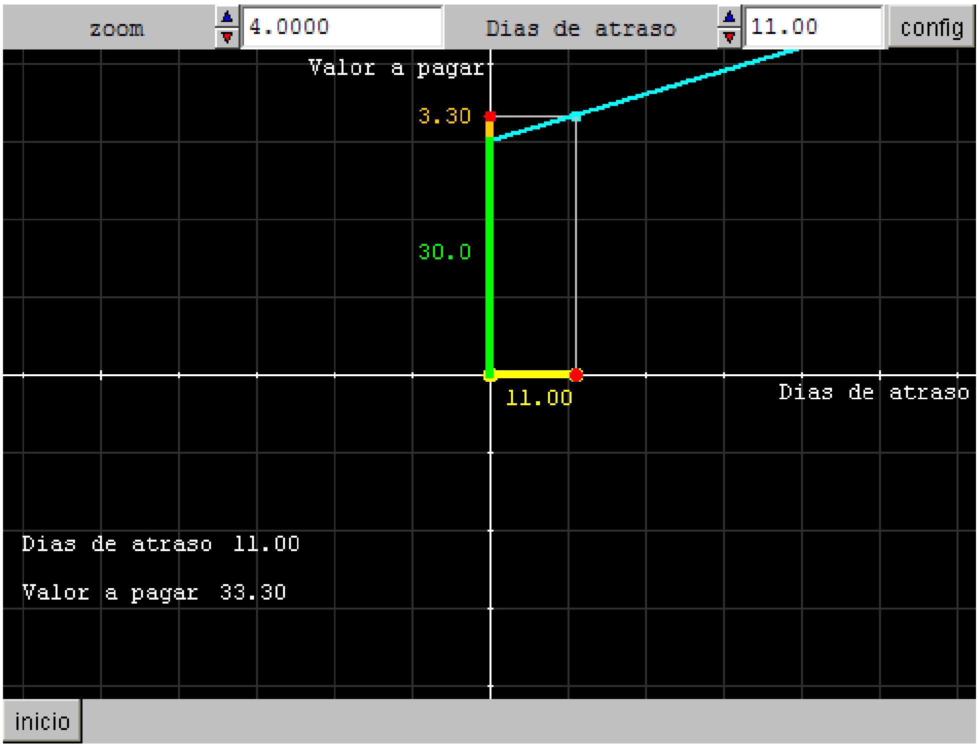
a) Qual é a altura da planta após 3 dias?

b) A cada dia a planta sempre cresce a mesma medida? Qual é esta medida? Justifique a sua resposta.

c) Se h é altura da planta em centímetros e t é o número de dias, relacione h e t através de uma fórmula matemática.

ATIVIDADE 2

João precisa pagar um título no valor de R$ 30,00 com vencimento no dia 26/05/07 e com taxa de juros de 30% ao mês. Porém, no dia do vencimento, João não dispõe desta quantia e pagará este título com alguns dias de atraso. Sabemos que, quando o atraso é inferior a um mês, os bancos cobram os juros simples. A cena abaixo mostra o gráfico que modela este problema, ou seja, mostra o valor a pagar em função do número de dias de atraso.



a) Quanto João deverá pagar por este título com um dia de atraso?

b) Quanto João deverá pagar por este título com dois dias de atraso?

c) Qual é a variação do valor a pagar pelo título com dois dias de atraso em relação ao valor a pagar pelo título com um dia de atraso?

d) Quanto João deverá pagar por este título com dez dias de atraso?

e) Quanto João deverá pagar por este título com onze dias de atraso?

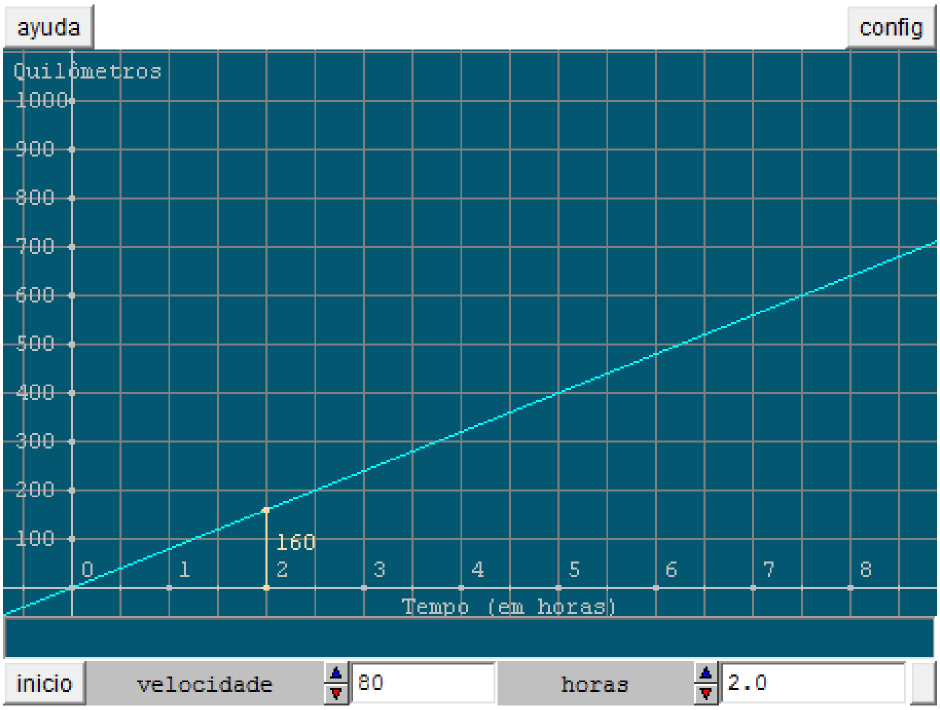
f) Qual é a variação do valor a pagar pelo título com onze dias de atraso em relação ao valor a pagar pelo título com dez dias de atraso?

g) Para cada dia de atraso, qual é o valor fixo a ser acrescido?

h) Se t é o valor a pagar pelo título com d dias de atraso ($0 \leq d \leq 30$); escreva uma fórmula matemática que relacione d e t.

ATIVIDADE 3

Moro em Curitiba e neste verão pretendo passar as férias com a minha família na região dos lagos, na costa fluminense. Faremos a viagem de automóvel percorrendo um total de 800 km. Na cena abaixo, traçamos um gráfico que relaciona o tempo de viagem (eixo horizontal) com a distância percorrida (eixo vertical). Você pode observar a distância percorrida em função do tempo transcorrido, alterando o parâmetro *horas*. Para isso, pressione as setinhas correspondentes a este campo. Da mesma forma, você também pode alterar a velocidade do automóvel.



a) Atribua à variável *horas* os valores 1, 2, 4 e 8. Anote, em cada caso, a distância percorrida e calcule o valor da razão distância/tempo. O que é possível concluir?

b) Como se alteraria o gráfico da função ao modificarmos o valor da velocidade para 100 km/h? Modifique o valor da velocidade para comprovar sua conclusão.

c) Para velocidade igual a 100 km, repita a atividade proposta no item (a). O que é possível concluir?

d) Atribua à velocidade diferentes valores. Observe como varia o gráfico da função e a razão distância/tempo.

e) Em relação a uma velocidade constante de 80km/h, associe por meio de uma fórmula matemática d e t, onde d é a distância percorrida após t horas.

Conclua: Qual é a relação entre a velocidade e o valor de a, na qual a é um número real que aparece em $y = ax + b$?

ATIVIDADE 4

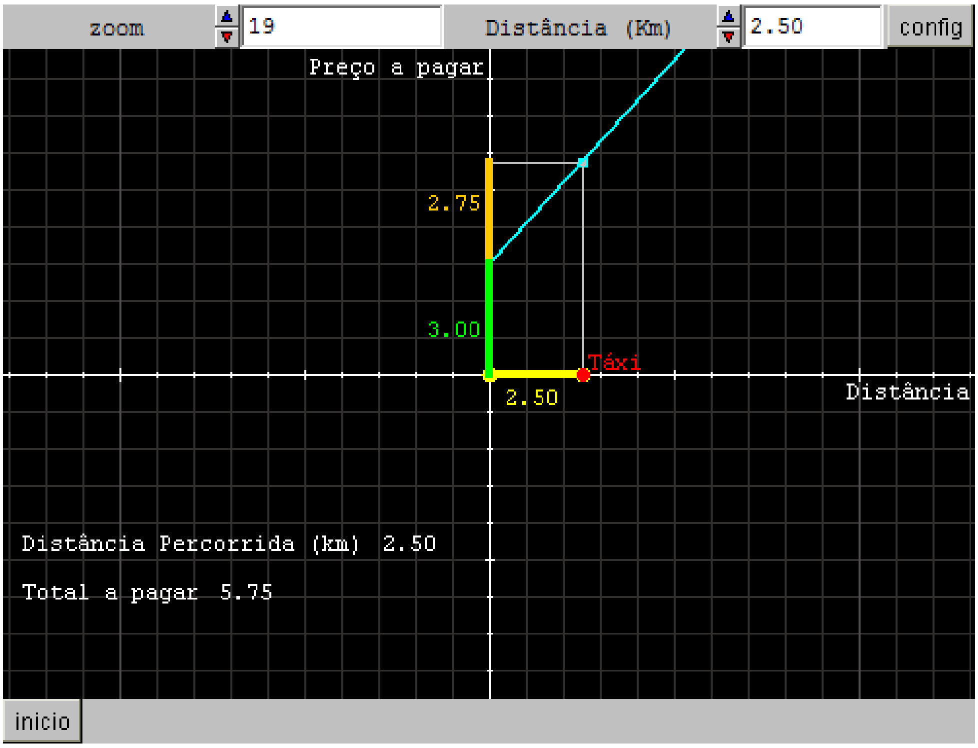
Em uma certa cidade, os taxistas cobram R$ 3,00 a bandeirada mais R$ 1,50 por quilômetro rodado. Como é possível para um passageiro determinar, de forma correta, o valor da corrida?

Nesse problema é fácil verificar que o valor da corrida depende do número de quilômetros rodados. Para resolvê-lo, é necessário determinar, a partir dos dados apresentados, a relação existente entre o preço (P) e o número x de quilômetros rodados que são as variáveis do problema.

Complete a seguinte tabela que relaciona estas duas variáveis

x	P (Preço a pagar)
0	
1	
2	
3	
3,5	
4	
5	

A cena abaixo mostra o gráfico que modela esse problema. Varie os valores da distância percorrida no controle numérico e confirme os valores que você preencheu na tabela anterior.



a) Você preencheu todos os valores pedidos na tabela de forma correta? Quais foram os que você errou?

b) Qual o valor mínimo que deverá ser pago pelo passageiro? Como esse valor se relaciona com os dados do problema?

c) De quanto foi a variação do preço da corrida de 0 km para 1 km?

d) Quanto foi a variação entre o preço da corrida de 1 km e a corrida de 2 km?

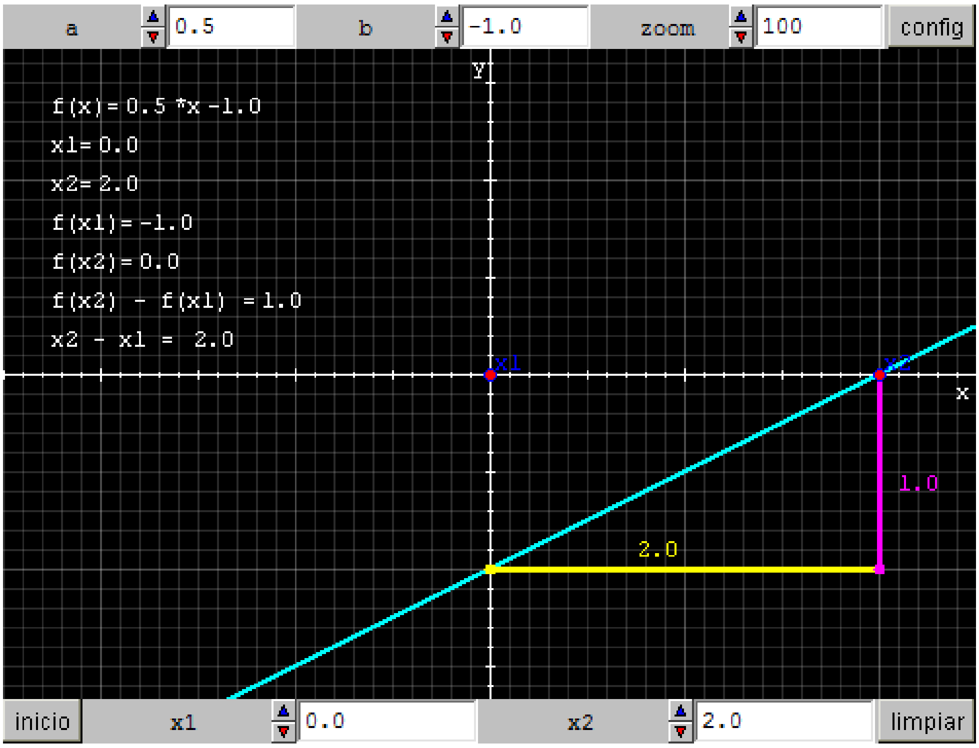
e) Quanto foi a variação entre o preço da corrida de 2 km e a corrida de 3 km?

f) O preço total da corrida de táxi é dado pelo valor da bandeirada adicionado a um valor fixo a ser pago por quilômetro rodado. Nesse caso, qual é o valor pago para cada quilômetro rodado?

g) Se P é o preço total a ser pago e x é o número de quilômetros rodados, relacione P com x por meio de uma fórmula matemática.

ATIVIDADE 5

Na cena abaixo, manipule os controles *a* e *b* de forma que tenhamos a função $f(x) = 0{,}5x - 1$.



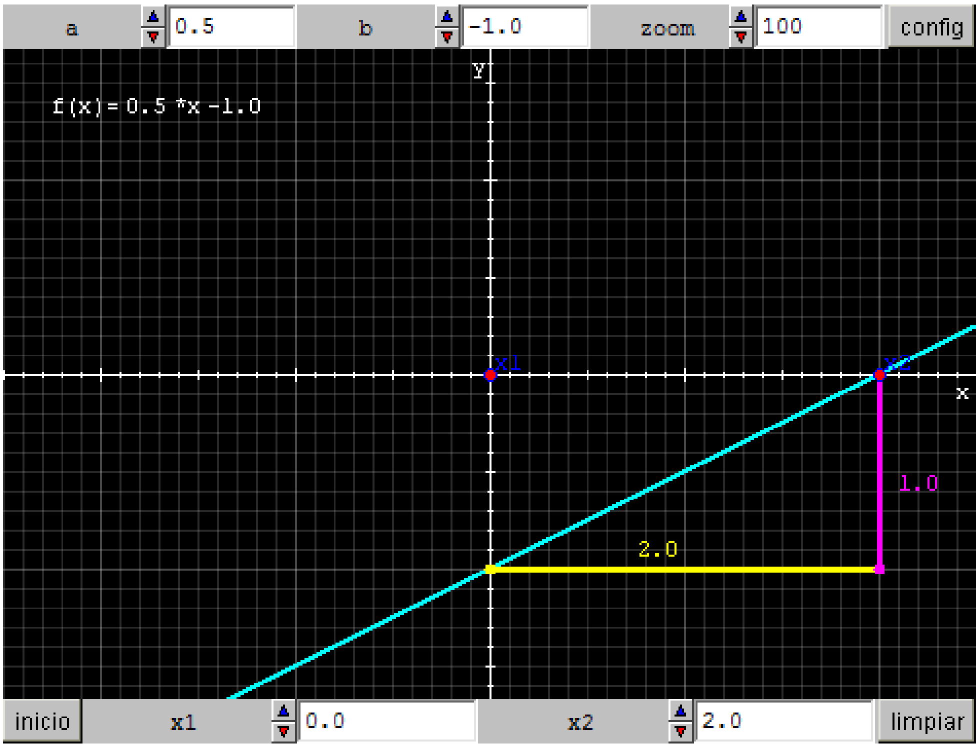
a) Faça $x_1 = 0$ e movimente livremente x_2. Qual é a relação que você percebe entre o comprimento do segmento amarelo e o valor de $x_2 - x_1$, ou seja, qual é a relação percebida entre o comprimento do segmento amarelo e a variação dos valores de x?

b) Qual é a relação que você percebe entre o comprimento do segmento roxo e o valor de $f(x_2) - f(x_1)$, ou seja, qual é a relação percebida entre o comprimento do segmento roxo e a variação dos valores de $f(x)$?

c) Agora movimente livremente os valores e confirme as conclusões obtidas nos itens anteriores.

ATIVIDADE 6

Na cena abaixo, manipule os controles *a* e *b* de forma que tenhamos a função $f(x) = 0{,}5x - 1$.



a) Qual é a variação inicial entre os valores de x?

b) Para essa variação dos valores de x, qual é a variação correspondente dos valores de y?

c) Quando os valores de x variam em três unidades, os valores de y variam em quantas unidades? Confirme sua resposta explorando o gráfico.

d) Quando os valores de x variam em duas unidades, os valores de y variam em quantas unidades? Confirme sua resposta explorando o gráfico.

e) Quando os valores de x variam em uma unidade, os valores de y variam em quantas unidades? Confirme sua resposta explorando o gráfico.

f) Você percebeu alguma relação entre a lei de definição da função e a variação da função?

Agora, manipule os controles a e b de forma que tenhamos a função $f(x) = -0{,}4x + 1$.

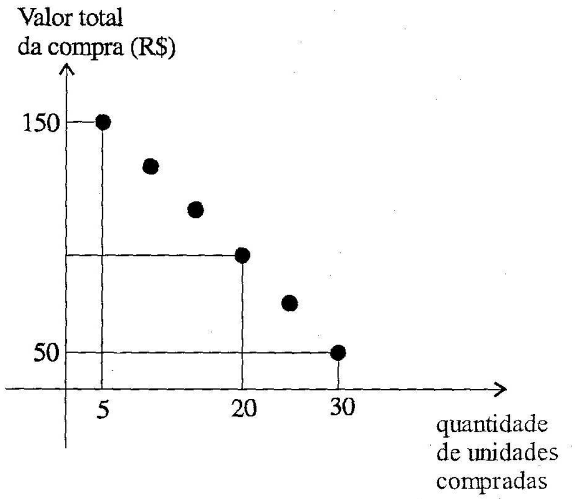
g) Quando os valores de x variam em três unidades, os valores de y variam em quantas unidades? Confirme sua resposta explorando o gráfico.

h) Quando os valores de x variam em duas unidades, os valores de y variam em quantas unidades? Confirme sua resposta explorando o gráfico.

i) Quando os valores de x variam em uma unidade, os valores de y variam em quantas unidades? Confirme sua resposta explorando o gráfico.

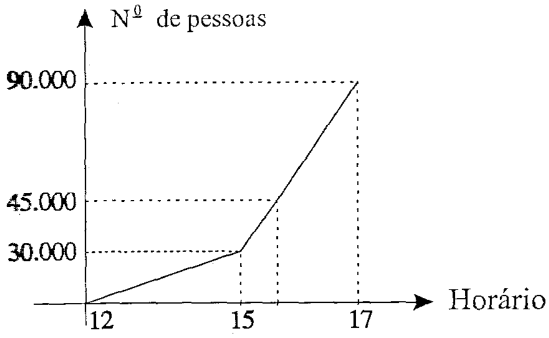
ATIVIDADES DE CONCLUSÃO

(UERJ) A promoção de uma mercadoria em um supermercado está representada, no gráfico a seguir, por 6 pontos de uma mesma reta.



Quem comprar 20 unidades dessa mercadoria, na promoção, quanto pagará, em reais?

(UFRJ) Em uma partida, Vasco e Flamengo levaram ao Maracanã 90.000 torcedores. Três portões foram abertos às 12 horas e até as 15 horas entrou um número constante de pessoas por minuto. A partir deste horário, abrem-se mais três portões e o fluxo constante de pessoas aumentou. Os pontos que definem o número de pessoas dentro do estádio em função do horário de entrada estão contidos no gráfico a seguir. Quando o número de torcedores atingiu 45.000, qual era o horário que o relógio estava marcando?



FICHA 2

ANÁLISE *A PRIORI*: No Ensino Básico, a caracterização do conceito de função se dá de forma puramente algébrica. As atividades dessa ficha foram planejadas com o objetivo de caracterizar as funções polinomiais de 1° e 2° grau de acordo com a sua variação, ou seja, a função polinomial do 1° grau é a função cuja variação da função é constante, quando a variável dependente varia em uma unidade e, conseqüentemente, a variação da variação da função é nula. Já a função polinomial do 2° grau é a função cuja variaç ão é uma progressão aritmética e, conseqüentemente, a variação da variação é constante.

Na atividade 1, esperamos que o aluno compreenda que o móvel tem velocidade constante e, por meio do preenchimento da tabela, perceba que a variação da função é constante. E, finalmente, através do aspecto gráfico, ele perceba que o móvel percorre espaços iguais para intervalos de tempo iguais.

Nas atividades 2 e 3, temos situações diferentes, mas esperamos levar o aluno, inicialmente analisando os dados da tabela e depois interagindo com o gráfico, a compreender que a variação da função em questão segue um padrão e como conseqüência, a variação da variação da função é constante.

Na atividade 4, verificaremos se o nosso objetivo nessa ficha foi ou não atingido.

ATIVIDADE 1

Um móvel está em movimento em uma pista com velocidade constante. A tabela abaixo informa a posição do móvel em um dado instante de tempo. Por exemplo, decorridos 3 segundos o móvel está na posição 6,6 metros.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Posição (m)	0	2,2	4,4	6,6	8,8	11	13,2	15,4	17,6

a) Qual foi a variação da posição do móvel nos 3 primeiros segundos?

b) Qual foi a velocidade média do móvel nos dois primeiros segundos?

c) Qual foi a velocidade média do móvel nos 8 primeiros segundos?

d) A velocidade média do móvel foi maior nos 4 primeiros segundos ou nos 4 últimos segundos de sua queda?

e) A velocidade média do móvel, segundo a segundo, sempre aumentou?

f) No instante $t = 3$ s, o velocímetro do móvel estava marcando quantos m/s?

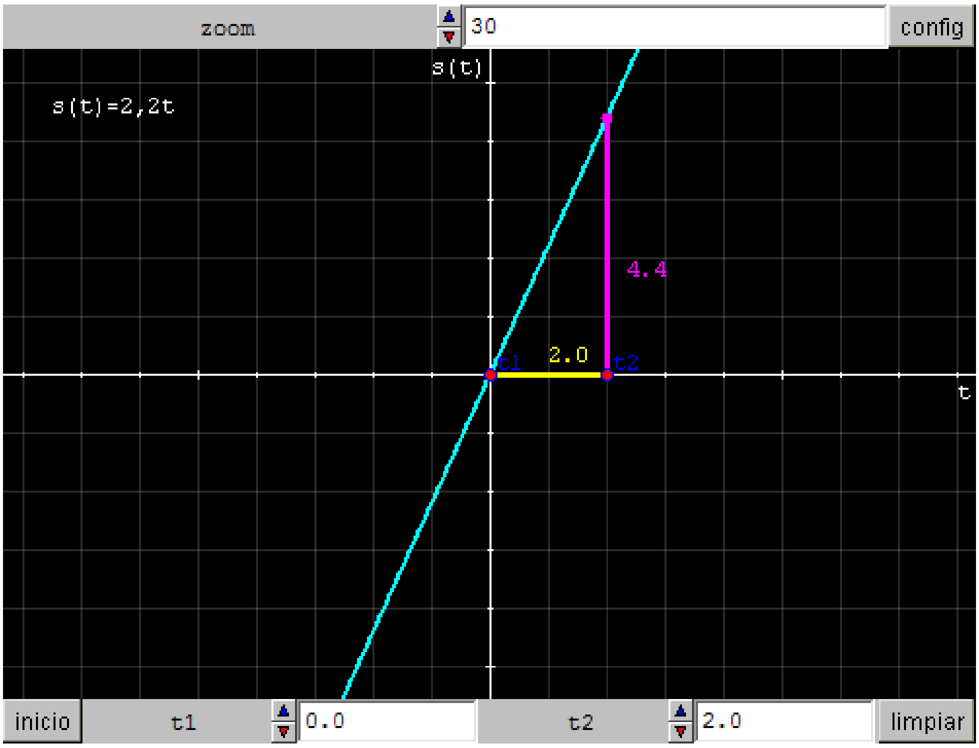
g) O que podemos afirmar sobre a velocidade do carro durante todo o trajeto?

h) Para observarmos qual é a variação da posição a cada segundo, complete a tabela abaixo:

Instantes	Variação da Posição entre os instantes	Variação da variação da posição entre os instantes
t = 0 e t =1		--------------------------------
t = 1 e t =2		
t = 2 e t =3		
t = 3 e t = 4		
t = 4 e t = 5		
t = 5 e t = 6		
t = 6 e t = 7		
t = 7 e t = 8		

i) O que você pode concluir em relação aos dados da tabela?

j) A cena, a seguir mostra o gráfico da função $s(t) = 2{,}2t$ que modela este problema. Varie os valores de t_1 e t_2 e comprove os valores que você preencheu.



Agora, modificando os valores de t_1 e t_2 e observando o gráfico responda:

l) Quando a variação do tempo é de um segundo, a variação do tempo é sempre a mesma? De quanto é esta variação? Justifique suas respostas.

m) Quando a variação do tempo é de dois segundos, de quantos metros é a variação do espaço percorrido? Justifique sua resposta.

n) Quando a variação do tempo é de 4 segundos, de quantos metros é a variação do espaço percorrido? Justifique sua resposta.

o) O que significa fisicamente o comprimento do segmento amarelo?

p) O que significa fisicamente o comprimento do segmento roxo?

q) O que significa fisicamente a divisão entre o comprimento do segmento roxo pelo comprimento do segmento amarelo?

ATIVIDADE 2

Um móvel se locomove com aceleração constante. A tabela abaixo informa a posição do móvel em um dado instante.

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Posição (m)	0	0,1	0,4	0,9	1,6	2,5	3,6	4,9	6,4

a) Qual foi a velocidade média do móvel nos dois primeiros segundos?

b) Qual foi a velocidade média do móvel nos 8 primeiros segundos?

c) A velocidade média do móvel foi maior nos 4 primeiros segundos ou nos 4 últimos segundos de seu movimento?

d) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes $t = 1$s e $t = 2$s?

e) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes $t = 2$s e $t = 3$ s?

f) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes $t = 3$s e $t = 4$ s?

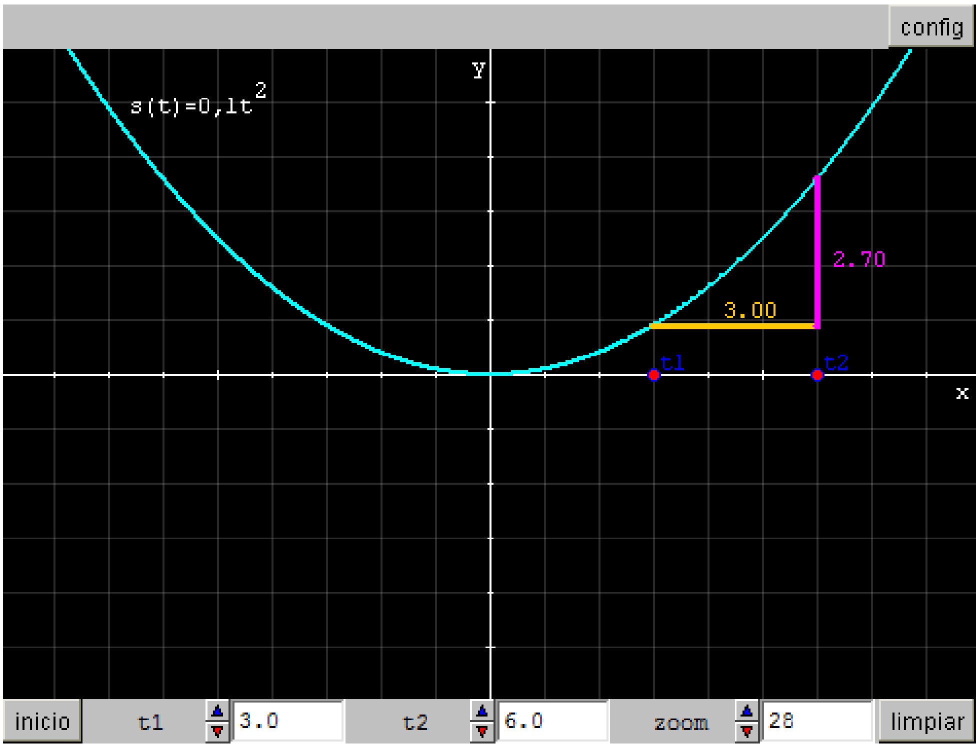
g) Complete a seguinte tabela, para observarmos como são as variações a cada segundo :

Variação dos Instantes	Variação da posição entre os instantes (Velocidade Média)	Variação da Variação da Posição entre os instantes
Entre t = 0 e t =1		-
Entre t = 1 e t =2		
Entre t = 2 e t =3		
Entre t = 3 e t = 4		
Entre t = 4 e t = 5		
Entre t = 5 e t = 6		
Entre t = 6 e t = 7		
Entre t = 7 e t = 8		

h) Observando a tabela que você preencheu, o que você percebe em relação à seqüência das velocidades médias registradas?

i) Observando a tabela que você preencheu, o que você percebe em relação à aceleração?

j) A cena abaixo, mostra o gráfico da função $s(t) = 0{,}1t^2$ que modela este problema. Varie os valores de t_1 e t_2 e comprove os valores que você preencheu.



Agora, modificando os valores de t_1 e t_2 e observando o gráfico responda:

l) Quando a variação do tempo é de um segundo a variação da distância é sempre a mesma? Justifique sua resposta.

m) Qual foi a distância percorrida no período de tempo compreendido entre 2 segundos e 3 segundos?

n) Qual foi a distância percorrida no período de tempo compreendido entre 3 segundos e 4 segundos?

o) Qual foi a velocidade média do móvel nos dez primeiros segundos? Justifique sua resposta.

p) O que significa fisicamente a divisão entre o comprimento do segmento roxo pelo comprimento do segmento amarelo?

ATIVIDADE 3

Complete a tabela abaixo que relaciona a medida do lado de um quadrado em centímetro com sua área em centímetros quadrados.

Medida do lado do quadrado (cm)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área (cm^2)									

a) Se um quadrado tem medida x cm qual será a medida da sua área?

b) Complete:

A função A(x) = _____ , informa o valor da área de um quadrado cuja medida do lado é x, onde $x \geq 0$.

c) Quanto variou a área do quadrado quando a medida do lado variou de 0 para 1?

d) Quanto variou a área do quadrado quando a medida do lado variou de 1 para 2?

e) Quanto variou a área do quadrado quando a medida do lado variou de 2 para 3?

f) Quanto variou a área do quadrado quando a medida do lado variou de 3 para 4?

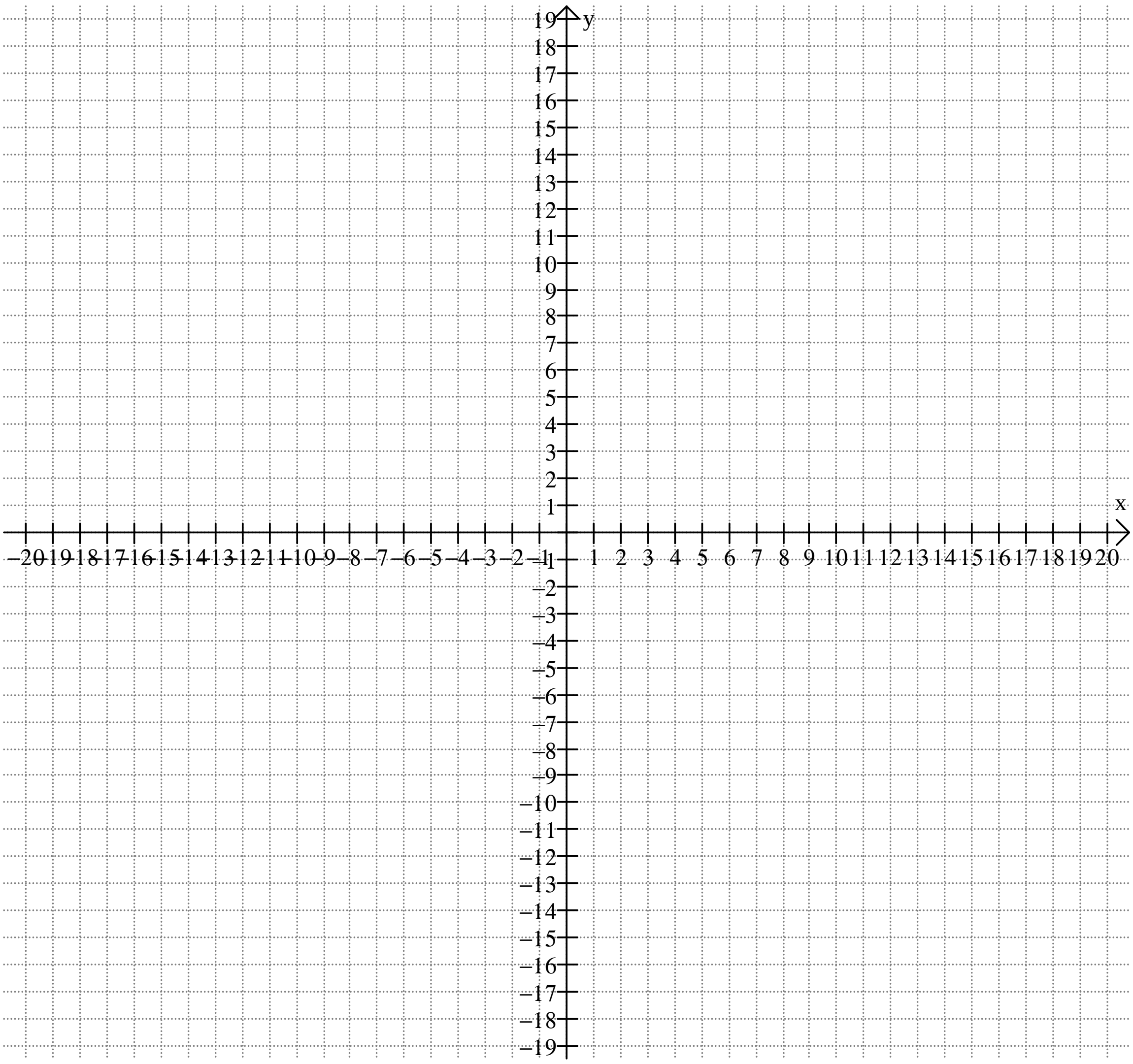
g) Utilizando o que já foi respondido, complete a seguinte tabela:

Variação da medida do lado do quadrado	Variação da área do quadrado com relação à variação entre as medidas dos lados	Variação da Variação da área do quadrado com relação à variação entre as medidas dos lados
De 0 cm a 1 cm		-
De 1 cm a 2 cm		
De 2 cm a 3 cm		
De 3 cm a 4 cm		
De 4 cm a 5 cm		
De 5 cm a 6 cm		
De 6 cm a 7 cm		
De 7 cm a 8 cm		

h) Você percebeu algum padrão em relação à variação da área do quadrado à medida que seu lado aumenta em uma unidade?

i) O que você observou em relação a variação da variação da área do quadrado?

j) Represente no plano cartesiano abaixo, o gráfico da área de um quadrado em função do seu lado



ATIVIDADE 4

a) O que você percebeu em relação à variação de funções polinomiais do 1° grau?

b) O que você percebeu em relação à variação da variação de funções polinomiais do 1º grau?

c) O que você percebeu em relação à variação de funções polinomiais do 2º grau?

d) O que você percebeu em relação a variação da variação de funções polinomiais do 2º grau?

e) Quando a variação de uma função é constante, como é o seu gráfico?

f) Quando a variação da variação de uma função é zero, como é o seu gráfico?

g) Quando a variação de uma função é uma progressão aritmética, como é o seu gráfico?

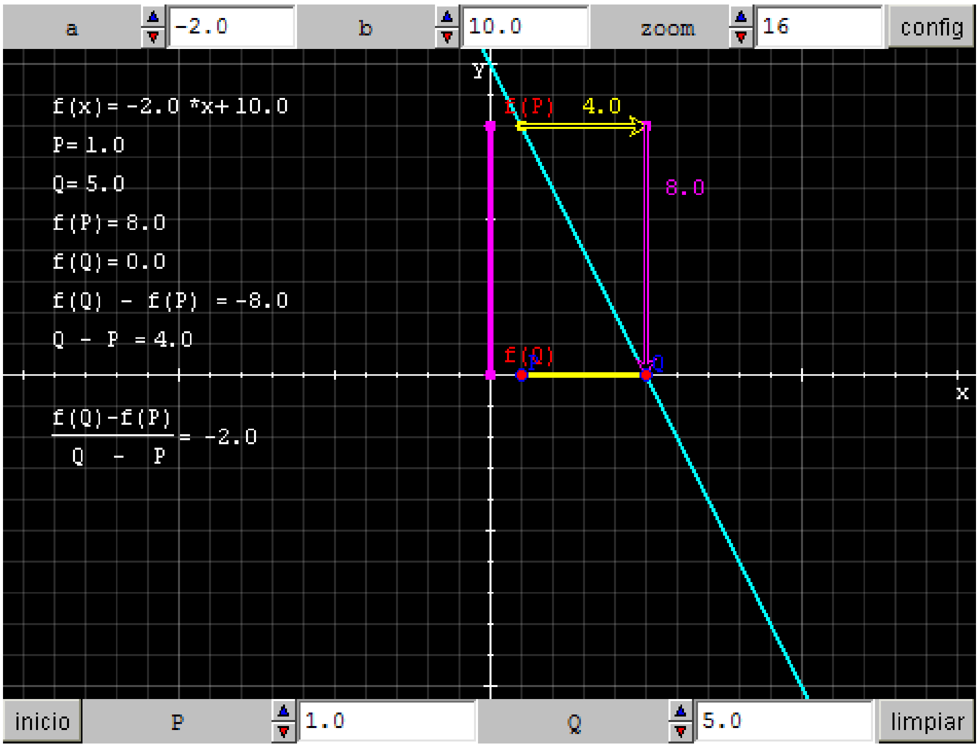
h) Quando a variação da variação de uma função é constante, como é o seu gráfico?

FICHA 3

ANÁLISE *A PRIORI*: Nessa ficha, procuramos levar o aluno a definir o coeficiente angular da reta, fazendo-o perceber que o valor da tangente do ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas, o quociente $\frac{f(Q)-f(P)}{Q-P}$ e a taxa de variação da função são iguais. Uma vez que esta noção tenha sido definida, achamos que se pode fazer necessário a realização com os alunos de alguns exercícios tradicionais de forma a familiarizá-lo com os conceitos que foram construídos.

ATIVIDADE 1

Na seguinte cena, movimente livremente os controles numéricos *a*, *b*, *P* e *Q*. Aperte o botão *início* e depois responda as questões abaixo:



a) Qual é a função que aparece inicialmente na tela?

b) Qual é a variação inicial entre os pontos P e Q ?

c) Qual a variação inicial entre f(P) e f(Q) ?

d) Varie livremente os pontos P e Q. Qual a relação que você percebe em relação ao comprimento do segmento amarelo e o valor de Q – P?

e) Qual a relação que você percebe em relação ao comprimento do segmento roxo e o valor de f(Q) – f(P) ?

f) Volte a variar livremente os pontos P e Q. O que você percebe com relação à razão $\frac{f(Q)-f(P)}{Q-P}$?

g) Lembrando que no triângulo retângulo, a tangente de um ângulo é dada pela razão entre o **cateto oposto e o cateto adjacente,** qual é a tangente do ângulo formado pela reta com o segmento amarelo?

h) Modifique os valores de *a* e de *b* de forma a termos a função $f(x) = 3x - 2$. Modifique o ponto P de forma que sua abscissa seja 1 e faça a abscissa do ponto Q ser 3. Qual é a tangente do ângulo formado pela reta com o segmento amarelo?

i) Varie livremente os pontos P e Q. O que você percebe em relação à razão $\frac{f(Q) - f(P)}{Q - P}$?

j) Qual a relação entre a tangente do ângulo formado pela reta com o segmento amarelo e a razão $\frac{f(Q) - f(P)}{Q - P}$?

l) Varie livremente o controle numérico **a**. Qual é a relação entre o valor de **a** e a razão $\frac{f(Q) - f(P)}{Q - P}$?

m) O que podemos concluir acerca da razão $\frac{f(Q) - f(P)}{Q - P}$, o valor de **a** e a tangente do ângulo formado pelo segmento amarelo e a reta?

Já sabemos que o gráfico de uma função polinomial do 1º grau $f(x) = ax + b$ é uma reta. Você deve ter percebido que o valor da tangente do ângulo formado pela reta com o eixo das abscissas é a. Podemos chamar de a o coeficiente angular da reta. Escreva uma definição matemática para o coeficiente angular da reta.

Normalmente os livros de matemática definem o coeficiente da reta como:

Definição: Seja f função polinomial do 1º grau. Sejam (x_1, y_1) e (x_2, y_2) pontos da reta que do gráfico de $f(x)$, onde $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Definimos o coeficiente angular da reta que representa o gráfico de $f(x)$ como:

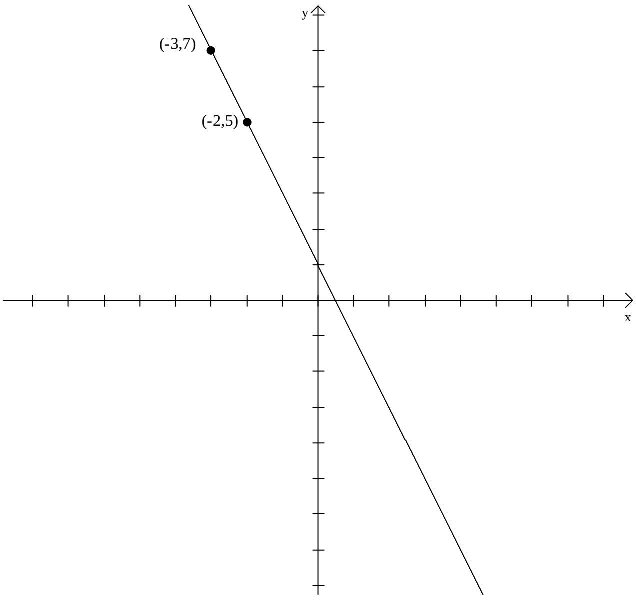
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Compare essa definição com a sua. A sua definição coincide com a dos livros? Em que elas são diferentes. Essas diferenças são importantes? Por quê?

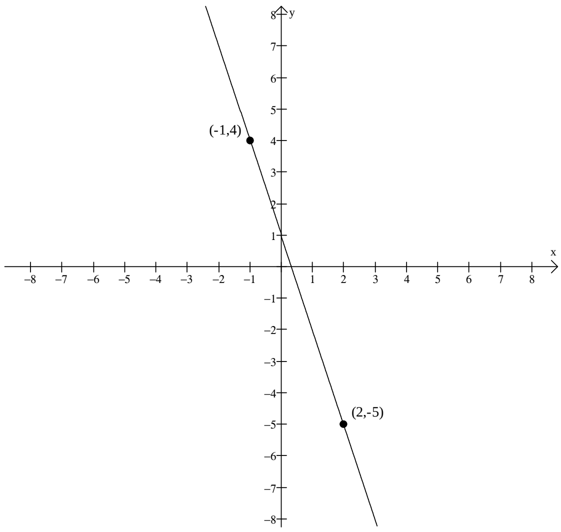
Esta definição pode ser aplicada nos seguintes exemplos:

Exemplos:

1) Determinar a função polinomial do 1º grau cuja reta, que representa o seu gráfico, contenha os pontos $(-3,7)$ e $(-2,5)$.



2) Determinar a função polinomial do 1º grau cujo gráfico está representado abaixo:



FICHA 4

ANÁLISE *A PRIORI*:

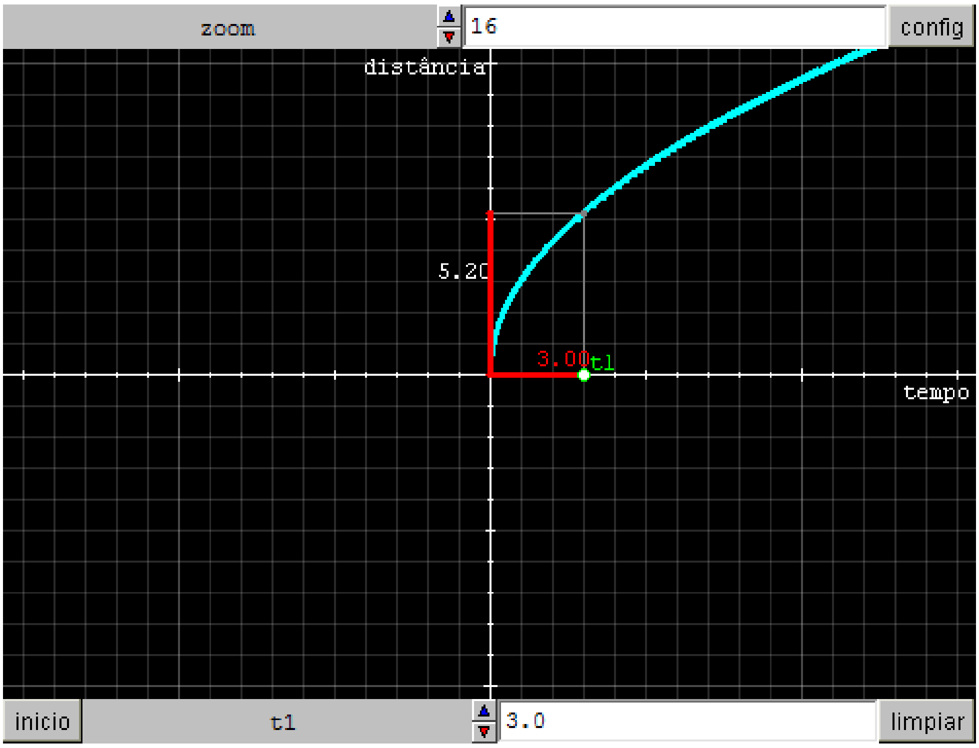
Temos como objetivo primordial, nessa Ficha, que o aluno associe, dada uma função $f(t)$ que expressa a distância percorrida por um móvel em um tempo t, o coeficiente angular da reta secante aos pontos (t_1,f(t_1)) e (t_2,f(t_2)) e a taxa de variação média da função f entre os instantes t_1 e t_2.

Na Atividade 1, esperamos, com a ajuda do *applet*, que o aluno consiga interpretar o gráfico de uma função que relacione a distância e o tempo, além de calcular corretamente a velocidade média entre os instantes pedidos. A nosso ver, essa habilidade é fundamental para que o estudante possa ter condições reais de realizar as associações que vislumbramos nessa ficha.

Na Atividade 2, os itens a), b) e c) são relativos às habilidades trabalhadas na Atividade 1. Já nos itens d) e e), esperamos que os alunos percebam o tamanho do segmento vermelho sendo igual à distância percorrida entre os instantes pedidos (variação da distância). Esperamos também a percepção de que o tamanho do segmento verde é igual variação do tempo. Feita esta percepção, esperamos que o aluno perceba, respondendo aos itens f), g), h) e i), que a razão entre o tamanho do segmento vermelho e o tamanho do segmento verde é igual tanto a velocidade média do móvel entre os instantes t_1 e t_2 quanto ao coeficiente angular da reta secante aos pontos (t_1,f(t_1)) e (t_2,f(t_2)), para que, então, finalmente, no item j), por meio da resposta do aluno, percebamos se o nosso objetivo foi satisfeito.

ATIVIDADE 1

A cena seguinte mostra um gráfico que relaciona a distância percorrida por um móvel em função do tempo. Mova livremente o ponto t_1. Depois responda as seguintes questões:



a) Após 4 segundos, quantos metros foram percorridos pelo móvel?

b) Após 8 segundos, quantos metros foram percorridos pelo móvel?

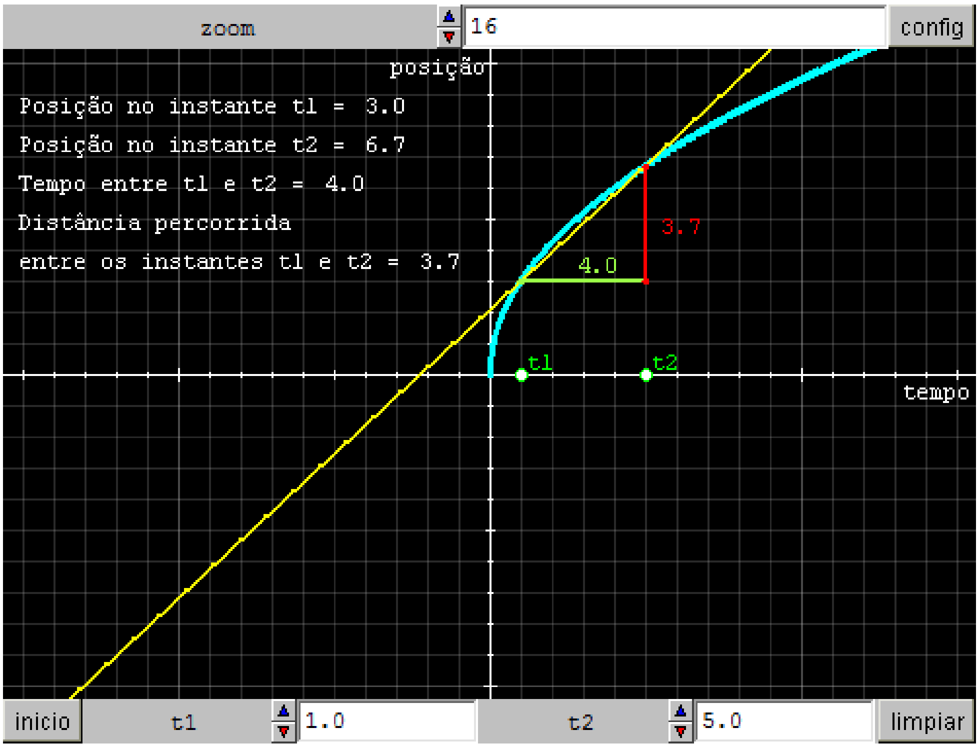
c) Qual foi a velocidade média do móvel nos 8 primeiros segundos?

d) Qual foi a velocidade média do móvel no trecho entre os instantes 4 segundos e 8 segundos?

e) Quanto tempo será necessário para que o móvel percorra 6 metros?

ATIVIDADE 2

O gráfico azul da função s(t) na cena abaixo representa a posição de um móvel em função do tempo. Note que a posição do móvel no instante $t_1 = 1$ é 3, ou seja, $s(1) = 3$, perceba também que a posição do móvel no instante $t_2 = 5$ é 6,7, ou seja, $s(5) = 6,7$. Observando esses fatos, responda as seguintes questões:



a) Qual era a posição do móvel no instante 2 s ?

b) Qual era a posição do móvel no instante 5 s ?

c) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes 2 s e 5 s ?

d) Qual é o significado físico da medida do segmento verde?

e) Qual é o significado físico da medida do segmento vermelho?

f) Qual é o coeficiente angular da reta amarela secante ao gráfico azul que passa pelos pontos (2,s(2)) e (5,s(5)) ?

g) Qual era a posição do móvel no instante 7 s ?

h) Qual foi a velocidade média entre os instantes 2 s e 7 s ?

i) Qual é o coeficiente angular da reta amarela secante ao gráfico azul que passa pelos pontos (2,s(2)) e (7,s(7)) ?

j) Qual é a relação que você percebe entre o coeficiente angular da reta secante pelos pontos $(t_1, s(t_1)), (t_2, s(t_2))$ e a velocidade média do móvel entre os instantes t_1 e t_2 ?

FICHA 5

ANÁLISE *A PRIORI*:

Tradicionalmente, o conceito de reta tangente é trabalhado no Ensino Médio somente no âmbito da geometria plana. Sendo assim, o único contato do aluno com a reta tangente se restringe à reta tangente a uma circunferência. Dessa forma, ao falarmos de reta tangente a uma função, a imagem de conceito do aluno evocará que a reta tangente é a reta que intercepta a função em um único ponto.

Por outro lado, o conceito de reta tangente é um dos mais importantes do Cálculo e acreditamos que é extremamente viável que este conceito seja trabalhado desde o Ensino Médio.

O objetivo das primeiras atividades dessa ficha é que o aluno remova da sua imagem de conceito o fato de que a reta tangente intercepta a curva em um único ponto e percebendo a reta tangente à curva como a reta que melhor aproxima o comportamento da curva nas proximidades desse ponto. E, finalmente, visualize a reta tangente enquanto aproximações da reta secante.

Na atividade 1, esperamos que o aluno responda corretamente qual é a representação da função e da sua reta tangente em um ponto específico e desde já tenha contato com funções em que a reta tangente não intercepta a função em um único ponto, como é o caso da reta tangente a $f(x) = x^3$ no ponto (1,1).

Na atividade 2, utilizamos o processo de magnificação local em 4 funções, a fim de que o aluno perceba que a aparência dessas funções (diferenciáveis), quando olhadas de muito perto, se assemelha a uma reta. Essa visualização é exatamente a raiz cognitiva para a noção de derivada. Já na atividade 3, verificaremos se, após vivenciarem as atividades anteriores, os alunos sabem traçar a reta tangente a uma função num ponto dado.

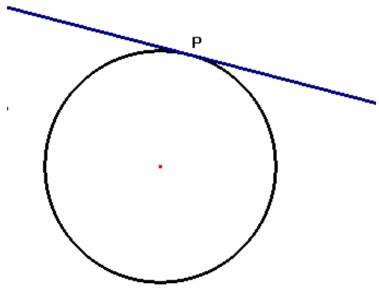
Por fim, na atividade 4, queremos levar o aluno a compreender a respeito do comportamento local da reta tangente no entorno do ponto de tangência e, neste momento verificaremos se o aluno ainda mantém, em sua imagem de conceito, a figura da reta tangente como a reta que só toca o gráfico da função em um único ponto.

ATIVIDADE 1

Desde a Grécia Antiga existem problemas que motivaram a criação de vários conceitos que contribuíram muito para o desenvolvimento da Matemática. O problema de determinar a reta tangente a uma curva foi fundamental para o surgimento de uma nova área de estudo, o Cálculo Diferencial e Integral.

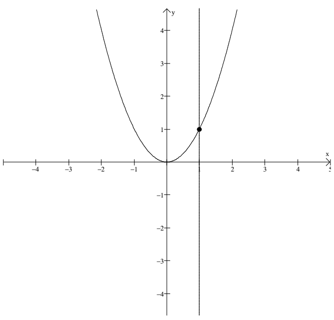
Sabemos que a reta tangente a uma circunferência é definida da seguinte forma:

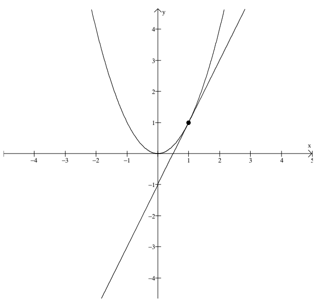
Def: Dada uma circunferência C e um ponto P pertencente a circunferência definimos a reta tangente à circunferência C no ponto P como a reta que intercepta a circunferência C **somente** no ponto P.

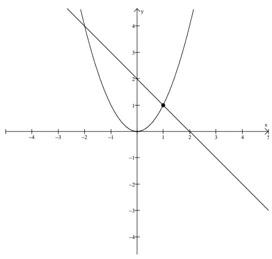


a) Você acha que a definição de reta tangente a uma circunferência é a mesma para qualquer curva, ou seja, dada uma determinada curva e um ponto P pertencente a curva, a reta tangente a curva deverá interceptar a curva somente no ponto P? Justifique sua resposta.

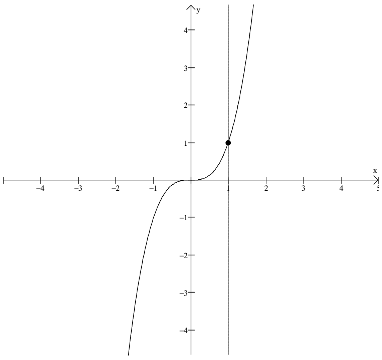
b) Em todas as figuras abaixo, temos a função $f(x) = x^2$ e uma reta interceptando a curva no ponto (1,1). Em qual figura temos a representação da função $f(x)$ e da reta tangente a $f(x)$ no ponto (1,1)?

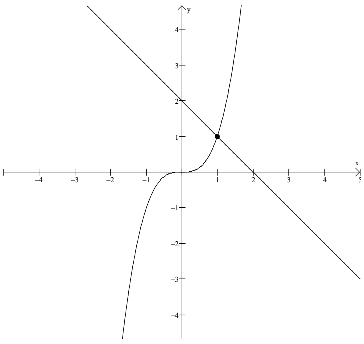


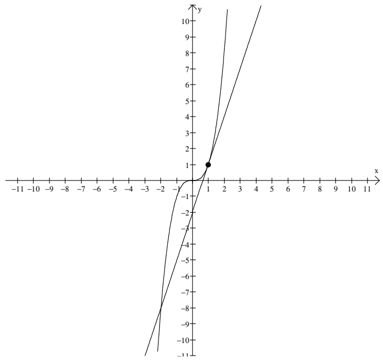




c) Em todas as figuras abaixo, temos a função $f(x) = x^3$ e uma reta interceptando a curva no ponto (1,1). Em qual figura temos a representação da função $f(x)$ e da reta tangente a $f(x)$ no ponto (1,1)?

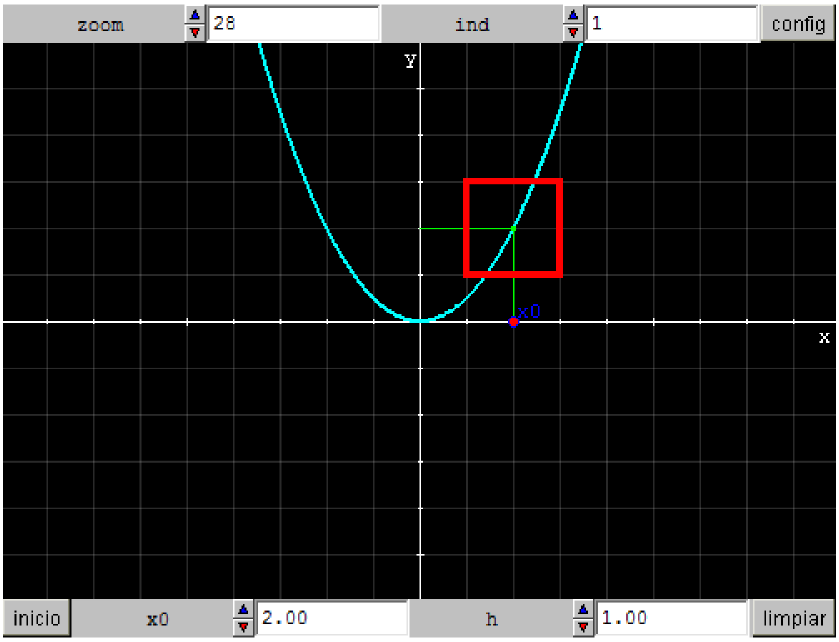




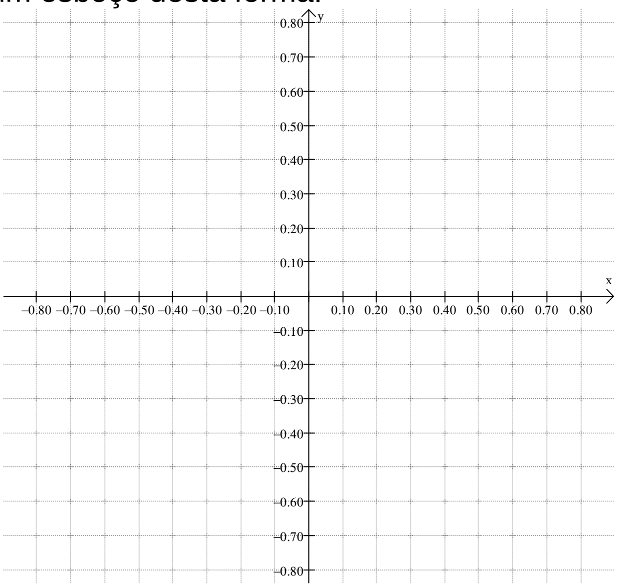


d) Como você definiria a reta tangente a uma curva em um ponto P pertencente a curva?

ATIVIDADE 2 – Na cena abaixo, selecionando valores no controle numérico *ind,* obtemos funções diferentes e temos uma janela quadrada de raio h em torno do ponto $(x_0, f(x_0))$. Note que variando os valores no controle numérico *h*, a janela quadrada aumenta ou diminui.

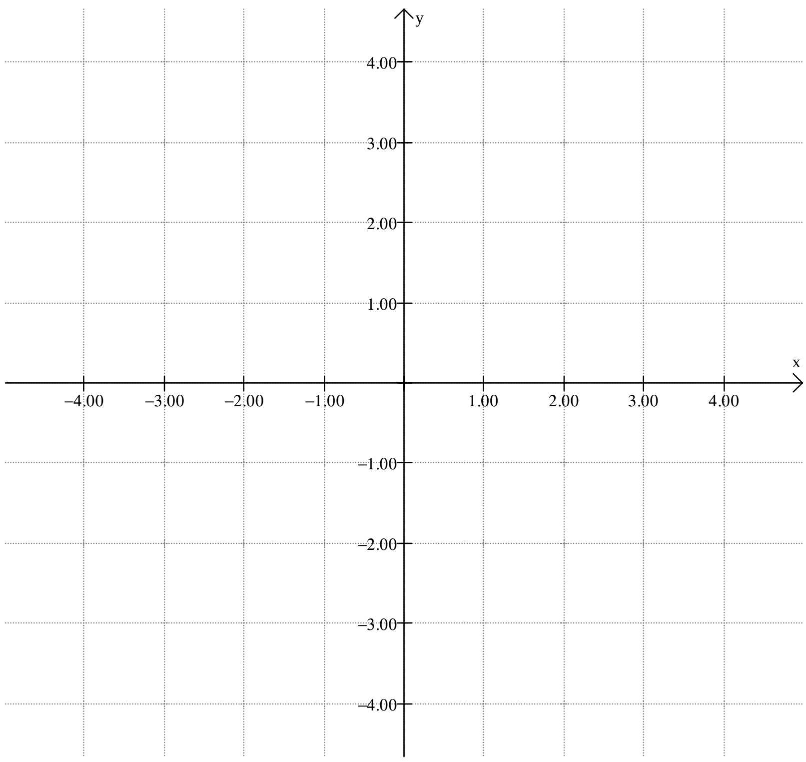


a) Posicione o controle numérico *ind* no valor 1 obtendo a função $f(x) = 0{,}5x^2$. Posicione também o controle x_0 no valor 1 e diminua a janela quadrada, modificando os valores de h até chegar ao valor 0,1. Ao olharmos de perto o que está dentro da janela, qual forma você acha que enxergaria? Faça no plano cartesiano abaixo um esboço desta forma.



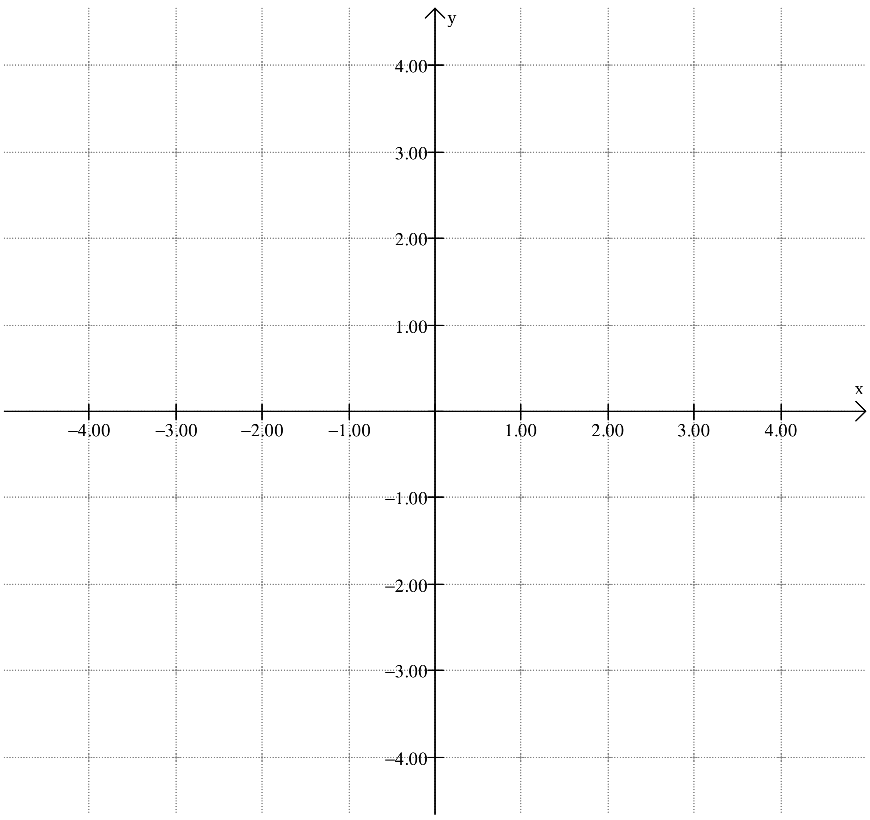
b) Agora, aumente gradativamente o zoom (sugerimos que o controle seja aumentado até 960) de maneira a visualizarmos qual é a forma que está dentro da janela vermelha. Qual foi a forma que você viu? Coincidiu com a forma que você imaginou inicialmente?

c) Posicione o controle numérico *ind* no valor 2 obtendo a função $f(x) = sen(x)$. Posicione também o controle x_0 no valor 2,56 e diminua a janela quadrada modificando os valores de h até chegar ao valor 0,1. Se olharmos de perto o que está dentro da janela qual forma você acha que enxergaria? Faça no plano cartesiano abaixo um esboço desta forma.



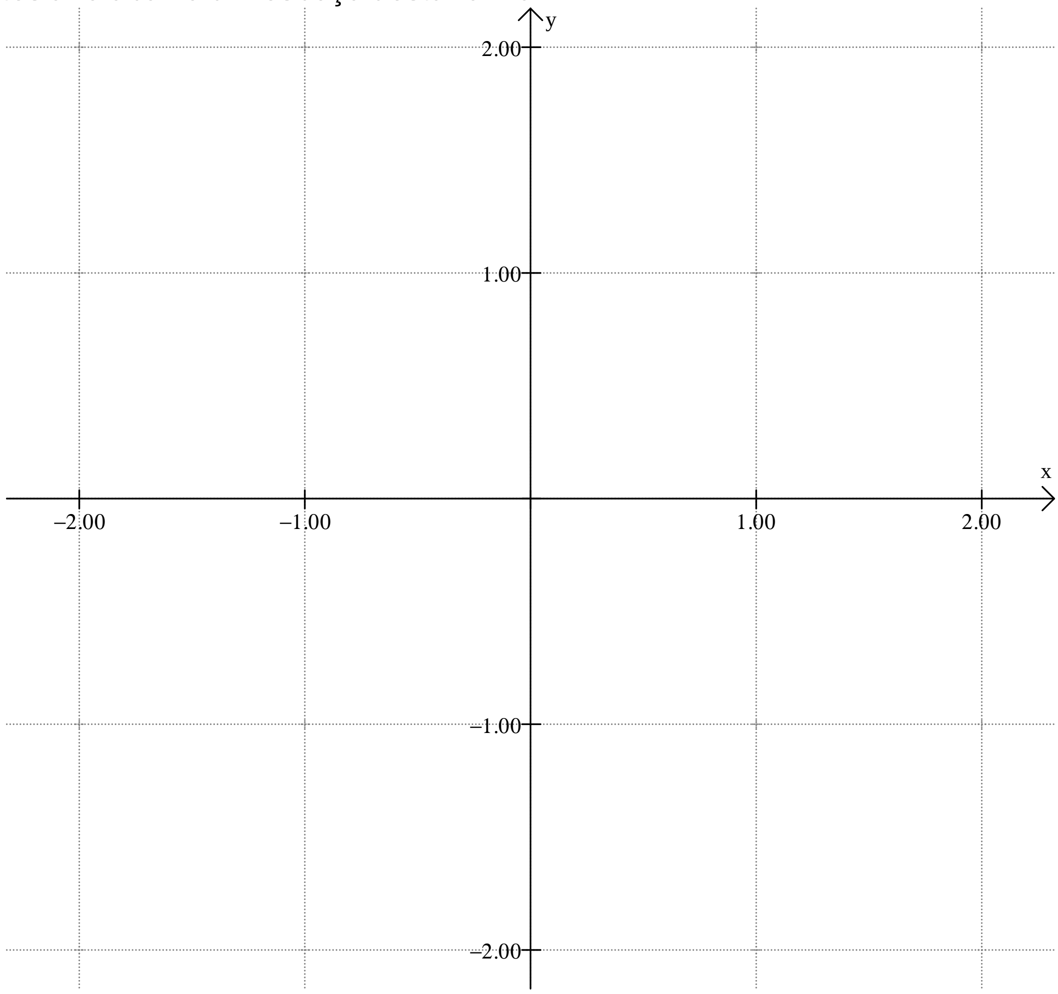
d) Agora, aumente gradativamente o zoom (sugerimos que o controle seja aumentado até 960) de maneira a visualizarmos qual é a forma que está dentro da janela vermelha. Qual foi a forma que você viu? Coincidiu com a forma que você imaginou inicialmente?

e) Posicione o controle numérico *ind* no valor 3 obtendo a função $f(x)=\sqrt{x}$. Posicione também o controle x_0 no valor 2 e diminua a janela quadrada modificando os valores de h até chegar ao valor 0,1. Ao olharmos de perto o que está dentro da janela, qual forma você acha que enxergaria? Faça no plano cartesiano abaixo um esboço desta forma.



f) Agora, aumente gradativamente o zoom (sugerimos que o controle seja aumentado até 1060) de forma a visualizar qual é a forma que está dentro da janela vermelha. Qual foi a forma que você viu? Coincidiu com a forma que você imaginou inicialmente?

g) Posicione o controle numérico *ind* no valor 4 obtendo a função $f(x) = 0{,}1x^3$. Posicione também o controle x_0 no valor 1,5 e diminua a janela quadrada, modificando os valores de h até chegar ao valor 0,1. Ao olharmos de perto o que está dentro da janela, qual forma você acha que enxergaria? Faça no plano cartesiano abaixo um esboço desta forma.



h) Agora, aumente gradativamente o zoom (sugerimos que o controle seja aumentado até 1060) de maneira a visualizar qual é a forma que está dentro da janela vermelha. Qual foi a forma que você viu? Coincidiu com a forma que você imaginou inicialmente?

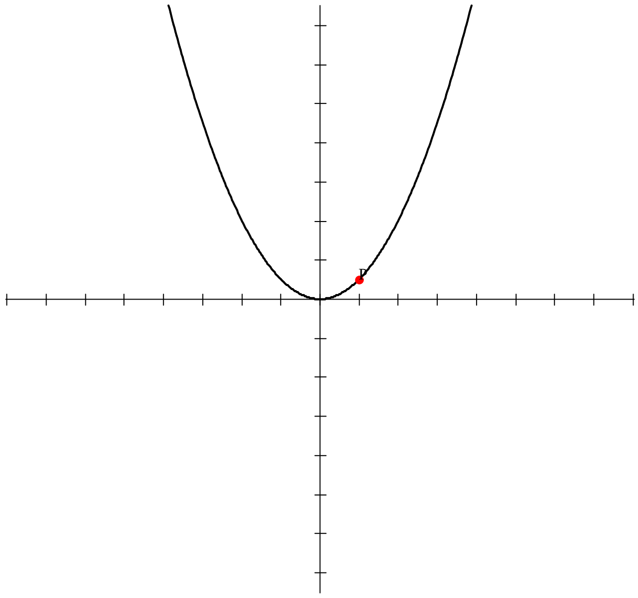
Você deve ter percebido que o aspecto de muitas curvas parece com uma reta quando olhamos muito de perto.

Dada uma curva C e um ponto P pertencente a esta curva podemos definir a reta tangente a esta curva como a reta que melhor se aproxima da curva nas proximidades do ponto P.

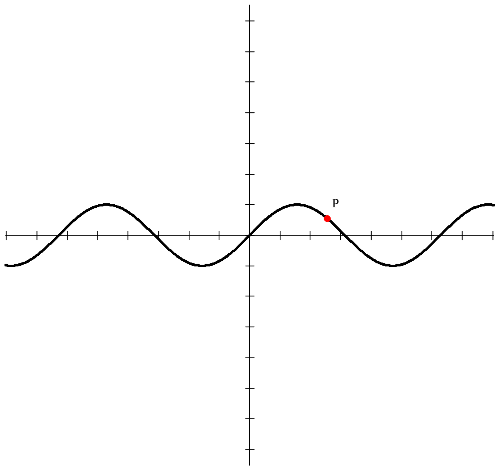
ATIVIDADE 3

Em cada um dos itens abaixo trace a reta tangente em cada uma das funções nos pontos indicados.

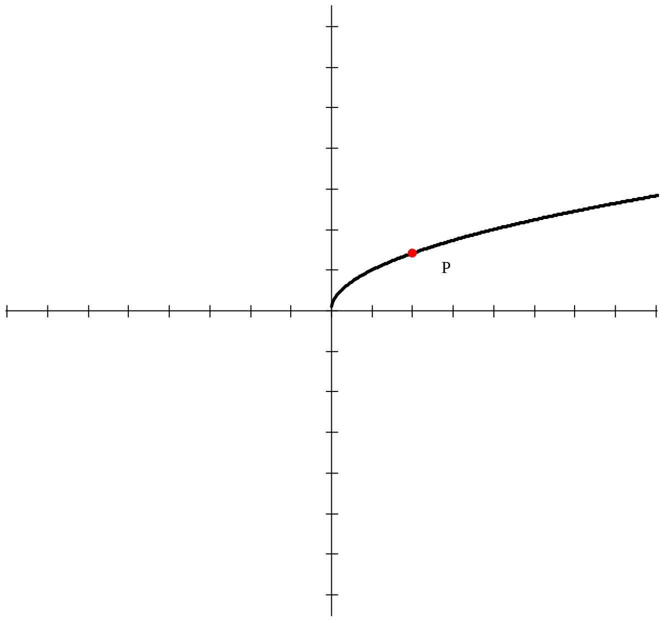
a) $\begin{cases} f(x) = 0{,}5x^2 \\ P = (1;0{,}5) \end{cases}$



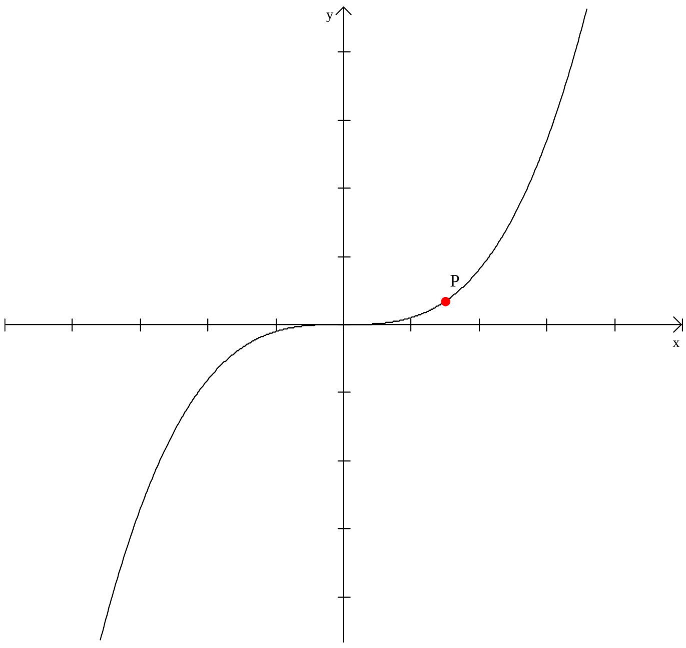
b) $\begin{cases} f(x) = sen(x) \\ P = (2{,}56; sen(2{,}56)) \end{cases}$



c) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \\ P = (2, \sqrt{2}) \end{cases}$

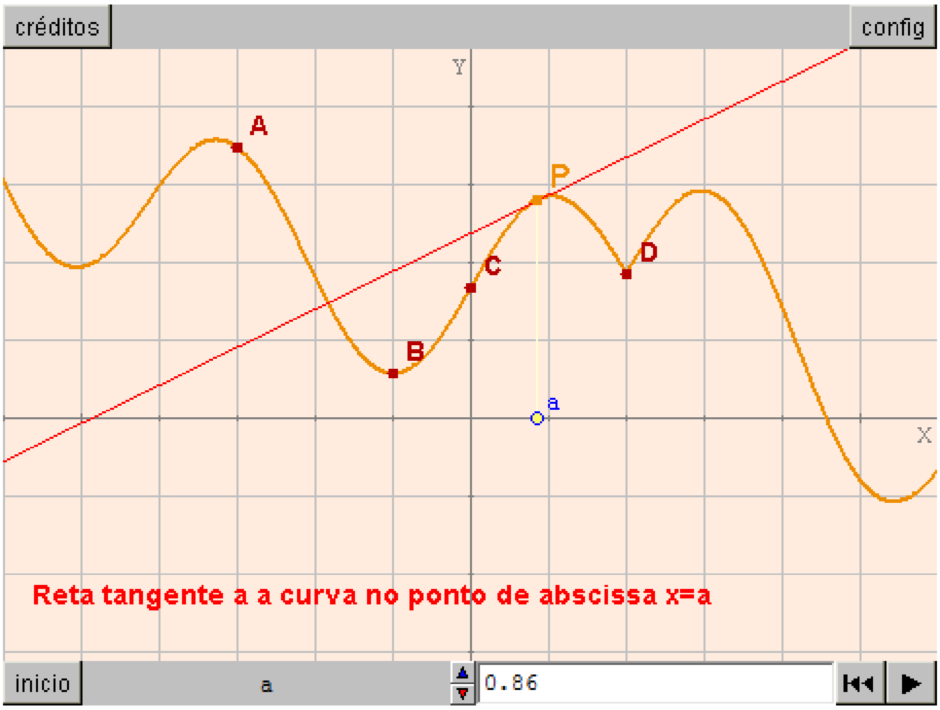


d) $\begin{cases} f(x) = 0{,}1x^3 \\ P = (1{,}5;0{,}3375) \end{cases}$



ATIVIDADE 4

Na seguinte cena, podemos visualizar o gráfico de uma função e o gráfico da reta tangente a esta função por meio do ponto P. Varie os valores do controle numérico *a* e classifique as afirmações abaixo como verdadeiro ou falso justificando a sua resposta.



a) Para que uma reta seja tangente ao ponto P basta que essa reta passe por esse ponto.

b) A reta tangente à curva no ponto P só pode ter um ponto de contato com ela, que é o próprio ponto P.

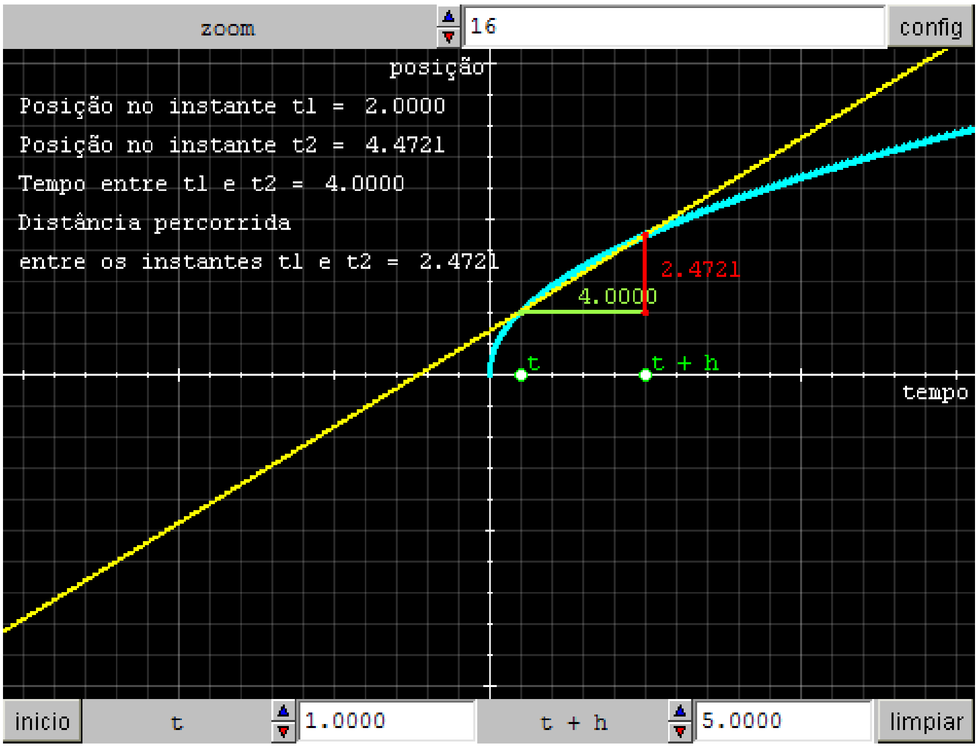
FICHA 6

ANÁLISE *A PRIORI*:

Nesta última ficha, desejamos que o aluno visualize o coeficiente angular da reta tangente a partir do problema de se calcular a velocidade instantânea de um móvel como aproximações de suas velocidades médias. Por fim, achamos que seria por demais oportuno que o aluno inclua em sua imagem de conceito a reta tangente como aproximações das retas secantes.

ATIVIDADE 1

Nessa atividade, nosso objetivo é descobrir a velocidade instantânea no instante $t = 4$ s de um móvel que, após t segundos, percorreu $s(t)$ metros. Na cena abaixo, temos o gráfico (azul) da função $s(t)$. Temos também representada a reta secante a $s(t)$ nos pontos $(t, s(t))$ e $(t + h, s(t + h))$.



a) Qual é a posição do móvel no instante $t = 4$ s?

b) Fazendo $t + h = 5$, determine a posição do móvel no instante $t = 5$ s?

c) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes $t = 4$ s e $t = 5$ s?

d) Fazendo $t + h = 4{,}5$, determine a posição do móvel no instante $t = 4{,}5$ s?

e) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes $t = 4$ s e $t = 4{,}5$ s?

f) Fazendo $t + h = 4{,}1$ determine a posição do móvel no instante $t = 4{,}1$ s?

g) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes $t = 4$ s e $t = 4{,}1$ s?

h) Fazendo $t + h = 4{,}01$, determine a posição do móvel no instante $t = 4{,}01$s?

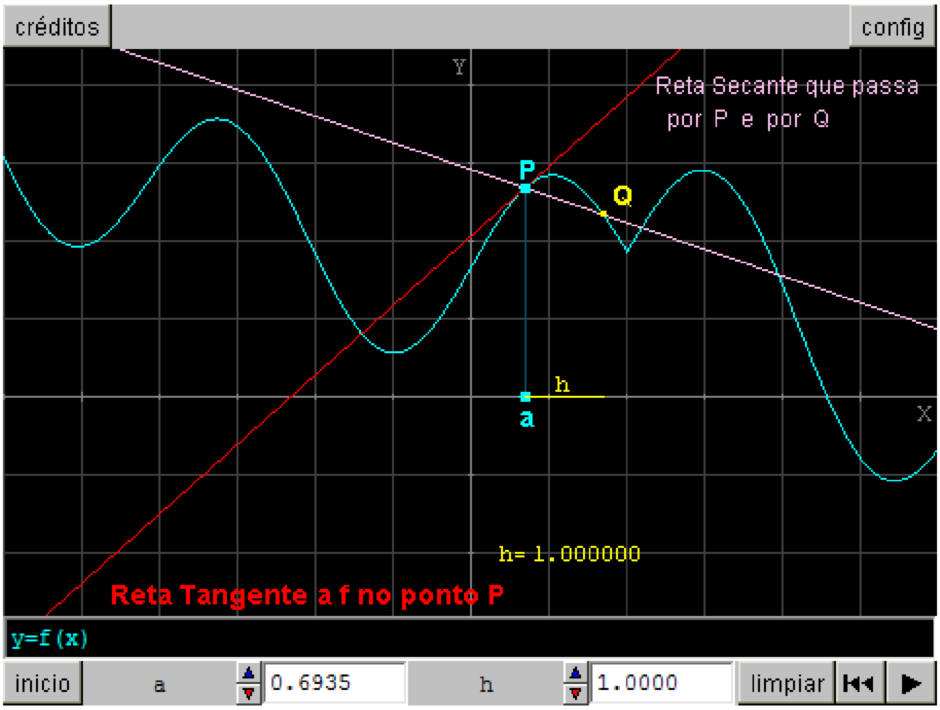
i) Qual foi a velocidade média do móvel entre os instantes $t = 4$s e $t = 4{,}01$s?

j) Você saberia informar qual é a velocidade instantânea do móvel no instante $t = 4$? Justifique sua resposta.

l) O que você percebe com relação a reta secante (amarela) à medida que $t + h$ se aproxima de t?

ATIVIDADE 2

Na cena abaixo, a curva azul é o gráfico de uma função. Perceba que a reta vermelha é a reta tangente à curva no ponto P. Note ainda que *h* é a distância entre as abscissas dos pontos P e Q.



a) O que representa o coeficiente angular da reta que passa por P e Q?

b) Faça o ponto Q se deslocar sobre a curva de maneira a fazê-lo se aproximar do ponto P. O que você observa à medida que *h* se aproxima de zero, isto é, à medida que o ponto Q se aproxima de P?

c) Fazendo *h* se aproximar de zero, o que você percebe em relação à reta secante que passa por P e Q?

5.2 Aplicação da Seqüência Didática e Análise *a Posteriori*

Com o objetivo de selecionarmos alunos para participarem da pesquisa, nos primeiros dias de agosto fizemos o convite a três turmas do 1° ano e três turmas do 2° ano do Ensino Médio. Dezesseis alunos se disponibilizaram a participar da pesquisa, sendo dez do 1° ano e seis do 2° ano. Nossa dificuldade na seleção dos alunos consistiu no fato de que muitos alunos estudavam todas as manhãs e todas as tardes, as manhãs ocupadas pelo Ensino Médio regular e as tardes pelo ensino técnico. Três alunos participantes da pesquisa fazem parte desse grupo que estudam em tempo integral, porém se disponibilizaram com entusiasmo a participarem do projeto, mesmo tendo que estar ausentes em alguns momentos das suas aulas do curso técnico. Combinamos que os encontros se dariam às segundas feiras das 14h às 15h, num total de seis encontros.

Primeira sessão

O primeiro encontro com os alunos aconteceu em 11 de agosto de 2008.

Proposta da Sessão

1) Apresentação da proposta de trabalho, envolvendo:
   - Informações a respeito da pesquisa, seu tema, seus objetivos e sua justificativa;
   - Importância, papel, responsabilidade e assiduidade dos estudantes participantes;
2) Aplicação do Teste Diagnóstico.

Relato:

No primeiro encontro, estiveram presentes todos os dezesseis alunos. Inicialmente, expliquei quais eram as hipóteses nas quais nossa pesquisa estava baseada e ressaltamos a importância da assiduidade para a validação dessas hipóteses. Após essa fala inicial, foi feito o teste diagnóstico, conforme previsto em nosso cronograma.

Os resultados obtidos com a aplicação do pré-teste, acompanhados de sua devida análise *a posteriori,* são aqui relatados.

<u>Questão 1:</u>

Item a): Todos os alunos acertaram-no.

Item b): Todos os alunos acertaram-no.

Item c): Todos os alunos acertaram-no.

Item d): Quinze alunos acertaram-no.

Apenas um aluno errou o item d. Ele fez equivocadamente a multiplicação de 2000 metros, que seria a resposta correta, por 4 horas, concluindo que a resposta seria de 8000 metros.

Item e): Todos os alunos acertaram-no.

Item f): Onze alunos acertaram-no.

No item f, cinco alunos responderam-no erradamente, porém suas respostas foram próximas da resposta correta, o que nos leva a crer que os erros foram relacionados a contagem dos 17 intervalos.

Item g): Quatorze alunos acertaram-no.

Dois erraram a questão. Um respondeu “10 minutos” e outro “30 minutos”.

Item h): Quinze alunos acertaram-no.

No item h, um aluno deixou a questão em branco. Esse fato deixa claro que os estudantes não confundiram o gráfico da distância em função do tempo com a trajetória. Observemos algumas respostas dadas a esses dois itens:

Antônio: "*Porque o gráfico representa apenas a distância que Priscila se encontra em relação a sua casa*"
Maurício: *"Pois a relação de tempo e distância é proporcional"*
Fátima: *"O gráfico é composto por segmentos de retas pois não é um mapa, e sim o tempo e a distância que a Priscila percorreu"*

Item i): Quinze alunos acertaram-no.

A mesma aluna que não respondeu o item anterior também deixou em branco esse item. Todavia, o índice de acertos nesse item foi altíssimo e, além disso, obtivemos respostas muito interessantes, o que mostra que os alunos associam o crescimento do gráfico com a distância percorrida em função do tempo. Vejamos algumas respostas:

Maurício: *"Porque enquanto o tempo de caminhada vai passando, a distância percorrida vai aumentando"*
Luíza: *"Pois, neste intervalo de tempo, ela andou 2000 metros"*
Míriam: *"Porque é o momento em que Priscila sai de* $S = 0$ *a* $S = 2000$*, há movimento"*

<u>Questão 2:</u>

Doze alunos acertaram-na. Um aluno se equivocou na resposta, pois não atentou para o fato de que às 19h Priscila deveria estar a uma distância de 2000 metros de sua casa. Os outros três alunos construíram um gráfico completamente equivocado.

<u>Questão 3:</u>

Quatorze alunos acertaram-na.

Um aluno deixou a questão em branco e o outro não marcou a opção correta. Com o objetivo de visualizarmos melhor qual é a imagem de conceito relacionado ao gráfico das funções polinomiais do 1° e 2° graus, observemos as seguintes respostas:

Maurício: *“Indica onde irá cortar o eixo “y”.*
Antônio: *“ Se x = 0 , y = 4, se y = 0 , x = 2. E a função é decrescente”*
Alan: *“A função é uma reta, pois não é função do segundo grau. Ela é decrescente, pois o número que multiplica x é negativo. Além de que y é aonde a reta corta, portanto marquei a letra a”*

A maioria das respostas dadas utilizam um argumento parecido com estes que acabamos de mencionar. Parece-nos evidente que a imagem de conceito desses alunos relacionado com o gráfico de uma função afim, é formada pela união dos seguintes fatos:

- O gráfico de uma função afim é uma reta.
- O gráfico de uma função quadrática é uma curva chamada parábola.
- Se o número que multiplica x é positivo então a função é crescente; e se esse número for negativo, então a função será decrescente.
- A função afim tem a forma algébrica $y = ax + b$, onde b é a altura onde o gráfico corta o eixo y.

Ao observarmos que esses fatos são exatamente os mais enfatizados nos livros didáticos e, talvez como conseqüência, são os aspectos mais abordados pelos professores de Ensino Médio, percebemos que a imagem de conceito dos alunos está relacionada com este tipo de abordagem. Ainda com relação a terceira questão, observe a resposta da aluna Fátima:

“O gráfico é uma reta decrescente pois o “x” é negativo”

Percebemos, claramente, nessa resposta, que a aluna não percebe o “*x*” enquanto uma variável, mas o percebe como algo estático, fixo, algo que é “negativo”. Essa constatação reforça uma das hipóteses da nossa pesquisa, ou seja, nosso pensamento de que seria muito mais adequado trabalhar o conceito de função enquanto relação entre quantidades variáveis.

Questão 4

Item a): Quatro alunos acertaram-no.

Item b): Três alunos acertaram-no.

Item c): Seis alunos acertaram-no.

Conforme observado, o índice de acertos relacionados a essa questão foi baixíssimo. Os comentários abaixo nos mostram que a imagem de conceito de alguns estudantes com relação ao coeficiente angular de uma reta é praticamente inexistente.

- “O que é coeficiente angular mesmo?”
- “Eu não me lembro mais disso. Faz um ano que vimos esta matéria”

Entretanto, analisando as respostas dadas, percebemos que a imagem de conceito dos estudantes que acertaram a questão contém o seguinte atributo:

➢ *O coeficiente angular da reta é o número que multiplica x.*

Todavia, através de uma conversa informal com a professora de Matemática que acompanhou esses alunos durante o primeiro ano do Ensino Médio, fui informado que este conceito foi abordado dando ênfase ao fato de que o coeficiente angular da reta é igual ao valor da tangente do ângulo formado entre o gráfico da função e o eixo das abscissas. Num segundo passo, os estudantes foram levados a visualizar que o valor da tangente do ângulo é igual ao valor de a na expressão $y = ax + b$.

Porém, em momento nenhum os estudantes relacionaram o coeficiente angular ao valor da tangente do ângulo em questão.

Em última análise, podemos concluir que a imagem de conceito desses estudantes relacionada ao coeficiente angular da reta é bastante empobrecida. Isso talvez se deva, em consonância com o nosso pensamento, ao fato de que ao construirmos o conceito de função, devemos fazê-lo no contexto da variabilidade, para que, em um momento posterior, já com esse conceito consolidado, levemos o educando ao questionamento a respeito das propriedades geométricas da função e de seu gráfico.

<u>Questão 5</u>

Quinze alunos acertaram-na.

Nessa questão tivemos um índice de acerto de quase 100%. Isso deixa claro que, em um gráfico da distância percorrida por um móvel em função do tempo, os alunos identificam facilmente o valor da velocidade do móvel. Fica evidente a forte presença da relação $v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ em sua imagem de conceito.

<u>Questão 6</u>

Dez alunos acertaram-na.

Esse índice deixa evidente que, apesar de quase todos os alunos determinarem a velocidade quando é dado o gráfico da distância em função do tempo, nem todos os alunos associam o gráfico que modela a distância percorrida por um móvel com velocidade constante em função do tempo. Cabe ressaltar, que dois alunos apesar de errarem a questão, associaram o movimento uniforme com o gráfico da função afim, mas marcaram o gráfico cuja função é decrescente.

Todavia, alguns estudantes expressaram o seu raciocínio de uma forma muito interessante, vejamos:

Kátia: *"Pois a velocidade é constante; ele sai de 0 e chega ao seu destino com a mesma velocidade porém com percurso cada vez maior"*
Míriam: *"Espaço cresce a mesma proporção do tempo; velocidade constante"*
Fátima: "A velocidade do ciclista é CONSTANTE"

Essas respostas mostram que os alunos têm uma imagem de conceito madura no que diz respeito ao movimento uniforme. Acreditamos que podemos usar estas idéias para solidificarmos o conceito de função no contexto da variabilidade.

Questão 7

Nenhum aluno acertou.

Ao analisarmos as respostas, percebemos que os erros foram muito parecidos. Quatro alunos deixaram a questão em branco. Sete alunos fizeram $v = \frac{s(5)}{5}$, ou seja, consideraram implicitamente que $s(0) = 0$ e cinco alunos fizeram $\frac{s(0)+s(1)+s(2)+s(3)+s(4)+s(5)}{5}$. Esses erros talvez tenham sido cometidos basicamente por dois motivos. Os alunos não estão acostumados a trabalharem função no contexto da variabilidade e, por outro lado, também não têm tanto contato com situações em que a variação da velocidade é constante (não nula).

Questão 8

Treze alunos acertaram-na.

Através das respostas dadas na oitava questão percebemos que os alunos conseguiram entender muito bem o conceito de variabilidade na função afim. Este entendimento pode ser observado nas seguintes respostas dadas, quando foram indagados sobre o que entendiam por taxa de variação de y em relação a x:

Kátia: *“Que quando (neste caso) x varia de um em um, y varia de três em três”*
Luíza: *“O valor de y quando x é um número qualquer menos o valor de y quando x é o antecessor do primeiro. É o número que é multiplicado por x na função”*
Antônio: *“É o quanto y varia quando x aumenta 1 unidade”*

<u>Questão 9</u>

Treze alunos acertaram-na.

Observemos que, nessa questão, tivemos o mesmo índice de acertos da questão anterior. As justificativas para essa questão foram basicamente duas. Os alunos simplesmente diziam que a taxa de variação era 4, pois esse é o número que está multiplicado pela variável x ou calculavam o valor da função para dois valores consecutivos e concluíam que a diferença entre esses valores era 4.

<u>Questão 10</u>

Item a) Treze alunos acertaram-no.

Item b) Três alunos acertaram-no.

Nessa última questão, o índice de acertos foi baixo, o que nos mostra, mais uma vez, que os alunos não estão acostumados a pensar acerca da variação da função, principalmente, se a função não é afim.

Resumo da Análise:

> Analisando as respostas dessas duas primeiras questões observamos que os alunos têm uma boa leitura do gráfico que relaciona a posição do móvel em função do tempo.
>
> Percebemos que a maioria dos estudantes consegue trabalhar, com certa tranqüilidade, a variação das funções afim, porém tem muitas dificuldades com relação a variação das outras funções.
>
> Foi observado um desempenho muito satisfatório na visualização dos gráficos da distância em função do tempo, talvez porque esse aspecto já tenha sido trabalhado nas aulas de física. Contudo, nem todos os alunos associam o movimento de um móvel com velocidade constante ao gráfico da função afim.
>
> Um outro aspecto que nos chamou bastante atenção, foi o fato de que quando temos apenas a lei de definição da função, os alunos não conseguem associar essa lei ao movimento que essa pode representar e, conseqüentemente, as suas respectivas imagens de conceito não contém esse atributo, que consideramos como um dos atributos fundamentais que deve estar contidos na imagem de conceito dos alunos acerca do conceito de função.
>
> Em última análise, percebemos claramente que nossos estudantes não estão habituados a pensar a respeito de como e de que forma as funções variam.

Segunda Sessão

A segunda sessão aconteceu em 25 de agosto de 2008.

Proposta da Sessão

> 1) Aplicação da Ficha 1 da seqüência didática.

Relato:

Relataremos os resultados obtidos com a aplicação da Ficha 1 da seqüência didática, acompanhados de sua devida análise *a posteriori.*

No segundo encontro estiveram presentes quatorze alunos. Como as quatro primeiras atividades praticamente contribuem para o mesmo objetivo, faremos as suas respectivas análises *a posteriori* após observarmos seus resultados.

Atividade 1

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Todos os alunos acertaram-no.

Atividade 2

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Treze alunos acertaram-no.

Item d) Todos os alunos acertaram-no.

Item e) Todos os alunos acertaram-no.

Item f) Todos os alunos acertaram-no.

Item g) Todos os alunos acertaram-no.

Item h) Treze alunos acertaram-no.

Atividade 3

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Doze alunos acertaram-no.

Item d) Treze alunos acertaram-no.

Item e) Quatorze alunos acertaram-no.

Conclusão: Treze alunos acertaram-na.

<u>Atividade 4</u>

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Todos alunos acertaram-no.

Item d) Todos os alunos acertaram-no.

Item e) Treze alunos acertaram-no.

Item f) Treze alunos acertaram-no.

Item g) Doze os alunos acertaram-no.

Conforme constatado, o índice de acertos nas quatro primeiras atividades, que tratavam de problemas os quais podem ser modelados por funções afim, foi extremamente satisfatório. Obtivemos respostas que nos revelaram alguns aspectos interessantes. Ao observarmos o comentário da aluna Míriam, percebemos que, em sua imagem de conceito, a noção de função linear está oportunamente associada com a noção de proporcionalidade.

“a planta cresce 0,20 cm a cada dia. Ela cresce proporcionalmente com o tempo”

Na terceira atividade, quando os estudantes aumentavam o valor da velocidade no *mathlet*, esperávamos que eles percebessem que o ângulo formado entre a reta e o eixo das abscissas também aumentava. De fato, essa resposta foi dada por alguns:

Antônio*: “O ângulo do gráfico e o eixo “x” aumenta.”*
João: *“O gráfico fica mais íngreme”*

Contudo, nos chamou atenção o fato de que alguns estudantes responderam a essa questão de uma forma que não havíamos previsto. Em suas visualizações não foi o fato do ângulo em questão aumentar que chamou atenção, conforme evidenciado nas seguintes falas:

Fátima: *“Quanto maior a velocidade, maior a distância em menos tempo.”*
Felipe: *“O carro vai andar mais em menos tempo”*

Esses alunos, mesmo em contato com o aspecto gráfico do problema, interpretaram o problema fisicamente. Esse fato evidencia, a nosso ver, o quanto uma abordagem do conceito de função ligado a cinemática é vantajosa no sentido de construir uma imagem de conceito rica e, mais do que isto, possibilita a ligação entre partes dessa imagem de conceito.

Todavia o desempenho dos alunos nas atividades 5 e 6 não se manteve tão elevado em comparação com as atividades anteriores.

<u>Atividade 5</u>

Item a) Dez alunos acertaram-no.

Item b) Dez alunos acertaram-no.

Na sexta atividade, os alunos encontraram muitas dificuldades para interpretarem e responderem corretamente a questão.

<u>Atividade 6</u>

Item a) Doze alunos acertaram-no.

Item b) Onze alunos acertaram-no.

Item c) Doze alunos acertaram-no.

Item d) Todos os alunos acertaram-no.

Item e) Onze alunos acertaram-no.

Item f) Treze alunos acertaram-no.

Item g) Nove alunos acertaram-no.

Item h) Nove alunos acertaram-no.

Item i) Oito alunos acertaram-no.

Na realização das atividades 5 e 6 os alunos demonstraram grandes dificuldades para interpretarem o gráfico exibido no *mathlet*. A pergunta comum de muitos alunos, foi:

"Professor, quem é x? E quem é y?"

Foi preciso uma intervenção intensa, de nossa parte, para que os alunos conseguissem entender melhor a questão e o aplicativo relacionado a ela. E ainda assim, obtivemos, por parte de alguns estudantes, respostas completamente equivocadas. Por outro lado, podemos destacar a resposta do aluno Antônio ao item f) da atividade 6:

"A função varia de acordo com o x. Como x está multiplicado por 0,5 a cada unidade de x, y varia metade"

Podemos perceber que o aluno compreendeu a propriedade fundamental da função afim.

Após essas seis atividades, nosso propósito era que, nas atividades de conclusão dessa ficha, as respostas fossem baseadas no que chamamos, nessa dissertação, de propriedade fundamental da função afim, ou seja, acréscimos iguais na variável independente ocasionam acréscimos iguais na variável dependente, ou ainda, o acréscimo $f(x+h)-f(x)$ depende apenas de h. Fomos surpreendidos quando constatamos que o índice de acertos da primeira questão relativa às atividades de conclusão dessa ficha foi bastante menor do que os acertos relativos à segunda questão, conforme discriminado abaixo.

<u>Atividades de Conclusão</u>

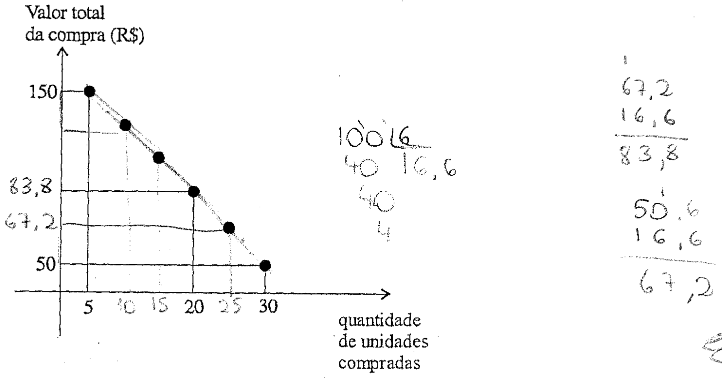
Primeira Questão: Cinco alunos acertaram-na.

Segunda Questão: Dez alunos acertaram-na.

Na primeira questão, a maioria dos alunos que não a acertou, teve como única estratégia resolver o problema por meio da regra de três, alguns também deixaram-na em branco, e outros começaram o raciocínio de forma correta, mas posteriormente, cometeram algum equívoco.

Ao observarmos a resposta abaixo, percebemos que um aluno analisou as variações das grandezas envolvidas, porém cometeu erros em um momento posterior:

Resposta do aluno Ricardo

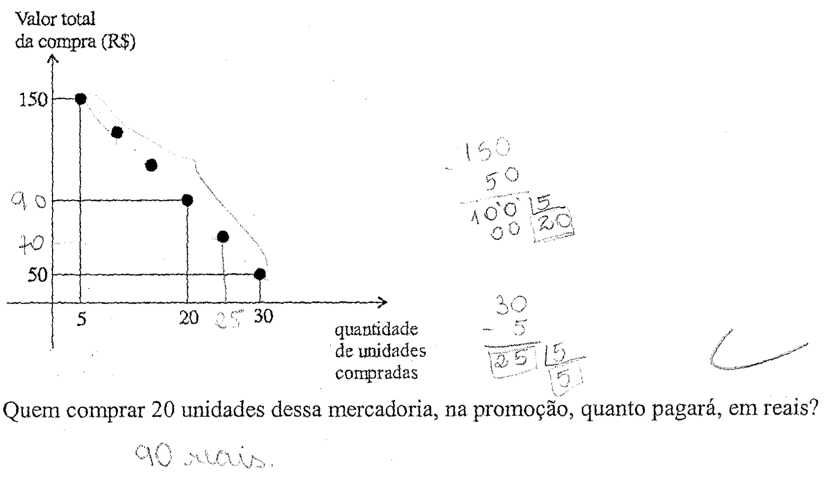


O aluno Ricardo demonstrou que atingiu nosso objetivo nessa ficha, visto que resolveu essa questão usando a propriedade fundamental da função afim. Porém, confundiu os seis pontos dados com os cinco intervalos definidos por estes pontos fazendo a divisão $100 \div 6$, quando deveria ter feito $100 \div 5$. Entretanto, alguns estudantes expressaram seu raciocínio exatamente como esperávamos, por exemplo:

Antônio: *"Quando x variou 25, y variou 100. Quando x variar 15, y vai variar 60. Ele pagará 90 reais"*

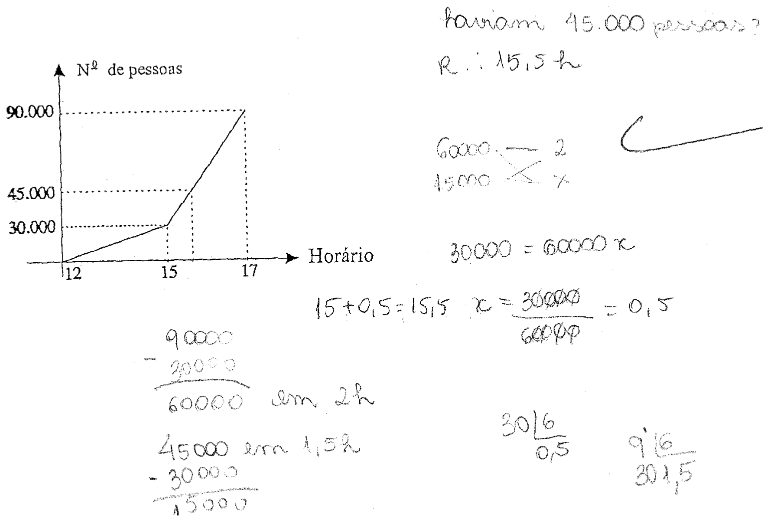
Note que, na verdade, quando a variação da variável independente é 15 a variação da variável dependente é -60. Embora o aluno não tenha expressado dessa forma, sua resposta mostra que ele tem bem definido, em sua imagem de conceito, a propriedade fundamental da função afim.

A aluna Luíza também expressou corretamente sua resposta da seguinte forma:



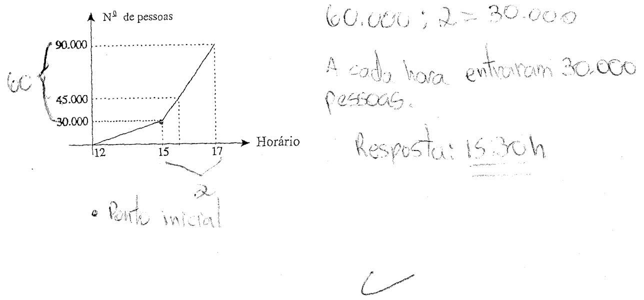
Na segunda questão, os alunos não manifestaram dificuldades para resolverem o que foi proposto. A estratégia prioritariamente usada foi também a regra de três, mas desta vez usada corretamente. O raciocínio comumente usado foi basicamente o seguinte:

Resposta da aluna Luíza



Outros estudantes perceberam claramente que, a cada hora, entrava o mesmo número de pessoas, conforme evidenciado na resposta abaixo:

Resposta do aluno João



O índice de acertos nas atividades de conclusão foi certamente bem abaixo do esperado. Apesar desses baixos índices, nossa análise leva-nos a concluir que seis alunos demonstraram atingir plenamente nosso objetivo, sendo que os demais também tiveram um bom desempenho, atingindo, assim, parcialmente o objetivo.

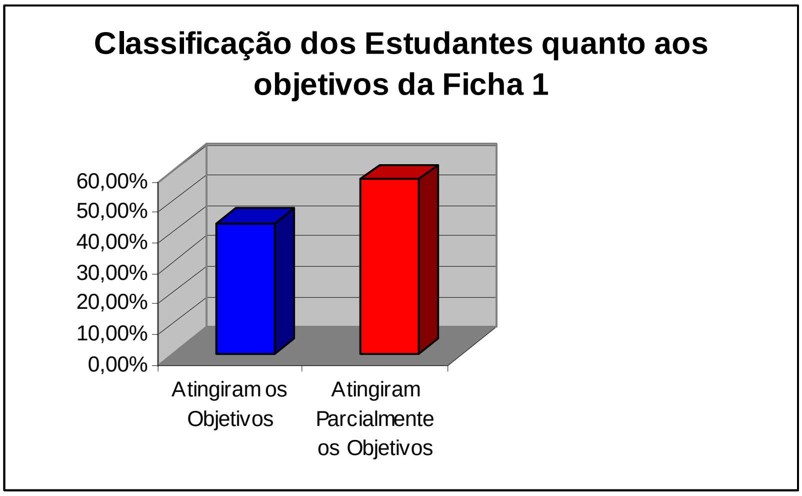


Figura 7

Resumo da Análise:

Nosso objetivo nas quatro primeiras atividades foi nitidamente satisfeito. Em cada uma dessas atividades, os estudantes não demonstraram dificuldades ao responderem os itens pedidos, concluindo-as também de forma correta. Isso mostra que em cada uma das situações modeladas, os alunos conseguiram associar o problema com a lei de formação da função que o modela.

A dificuldade evidenciada pelos estudantes na realização das atividades 5 e 6 nos deixaram bastante surpresos. Alguns alunos olhavam para o *mathlet* e não conseguiam associar a cena vista no aplicativo com o que a questão pedia. No nosso entendimento, essas dificuldades são também de origem epistemológica. A relação entre um ponto qualquer de coordenadas (x, y) do plano cartesiano com o ponto $(x, f(x))$ que representa dois valores vinculados por meio da função f, definitivamente, não se apresenta de forma natural.

Nossa análise mostra que 42% dos estudantes atingiram o objetivo nessa Ficha e os outros 68% usaram, em algumas situações, a propriedade fundamental da função afim, porém não a souberam usar na primeira questão de conclusão.

Terceira Sessão

A terceira sessão aconteceu em 1° de setembro de 2008.

Proposta da Sessão

1) Breve revisão sobre os tópicos estudados na sessão anterior. 2) Aplicação da Ficha 2 da seqüência didática.

Relato:

Inicialmente, fizemos uma rápida exposição a respeito dos conceitos vistos na sessão anterior. Nesse encontro estiveram presentes onze alunos. Relataremos, agora, os resultados obtidos com a aplicação da Ficha 2 da seqüência didática, acompanhados de sua devida análise *a posteriori.*

Atividade 1

Item a) Dez alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Todos os alunos acertaram-no.

Item d) Todos os alunos acertaram-no.

Item e) Todos os alunos acertaram-no.

Item f) Todos os alunos acertaram-no.

Item g) Todos os alunos acertaram-no.

Item h) Todos os alunos acertaram-no.

Item i) Todos os alunos acertaram-no.

Item l) Todos os alunos acertaram-no.

Item m) Oito alunos acertaram-no.

Item n) Oito alunos acertaram-no.

Item o) Nove alunos acertaram-no.

Item p) Nove alunos acertaram-no.

Item q) Oito alunos acertaram-no.

No item a) desta atividade apenas uma aluna equivocou-se efetuando a subtração $6{,}6 - 2{,}2$ quando deveria ter feito $6{,}6 - 0$. Nos nove itens seguintes todos os alunos acertaram as questões propostas. Nos primeiros dez itens, obtivemos respostas as quais tornaram evidente que a idéia de variabilidade está presente na imagem de conceito dos estudantes. Vejamos algumas respostas dadas aos itens i), l) e m) respectivamente:

Ricardo: *“A velocidade é constante, então, a variação será sempre a mesma”*
João: *“Sim. A cada 1 segundo varia-se 2,2 metros”*
Antônio: *“4,4. Que é igual a 2 . 2,2”*

Apesar de obtermos algumas respostas erradas, nos últimos itens, podemos concluir que a maioria dos estudantes compreendeu a idéia de variabilidade nesta situação em que o movimento do móvel é uniforme.

<u>Atividade 2</u>

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Todos os alunos acertaram-no.

Item d) Onze alunos acertaram-no.

Item e) Dez alunos acertaram-no.

Item f) Dez alunos acertaram-no.

Item g) Onze alunos acertaram-no.

Item h) Todos os alunos acertaram-no.

Item i) Onze alunos acertaram-no.

Item j) Todos os alunos acertaram-no.

Item l) Dez alunos acertaram-no.

Item m) Onze alunos acertaram-no.

Item n) Onze alunos acertaram-no.

Item o) Nove alunos acertaram-no.

Item p) Onze alunos acertaram-no.

Assim, como na atividade anterior, os índices de acertos nessa atividade também foram satisfatórios. Os alunos responderam as questões sem maiores dificuldades. Apenas no momento em que foram preencher a terceira coluna da tabela, mostraram-se inseguros. Quase todos perguntaram?

"- Professor, como vou saber qual é a variação da variação entre os instantes?"

E, neste momento, a orientação era:

"-Primeiro preencham a coluna referente a variação da posição entre os instantes"

Depois que foram seguidas estas orientações, não existiram mais dúvidas relacionadas a esta tabela.

Porém, alguns estudantes cometeram equívocos em algumas de suas respostas. Por exemplo, o aluno João, ao calcular a velocidade média do móvel entre os instantes $t=1$ e $t=2$, considerou que decorreram 2 segundos neste intervalo de tempo, concluindo, erroneamente, que a velocidade média no período considerado era de $\frac{0,5}{2} = 0,25 m/s$. Neste ponto, cabe salientar que outros estudantes também cometeram este tipo de erro durante a realização da seqüência didática.

Erro semelhante foi cometido pelo aluno Maurício. Quando foi pedido para calcular a velocidade média do móvel durante os dez primeiros segundos, o aluno calculou a velocidade média entre os instantes $t = 9s$ e $t = 10s$.

Já a aluna Míriam mostrou que em sua imagem de conceito está presente o fato de que a aceleração é a variação da velocidade. No item l) quando indagada sobre a variação do espaço quando a variação do tempo é sempre a mesma, a aluna respondeu:

"Não. Pois existe a aceleração"

Com exceção dos erros já apresentados, os alunos responderam essa atividade com total sucesso.

<u>Atividade 3</u>

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Todos os alunos acertaram-no.

Item d) Todos os alunos acertaram-no.

Item e) Todos os alunos acertaram-no.

Item f) Todos os alunos acertaram-no.

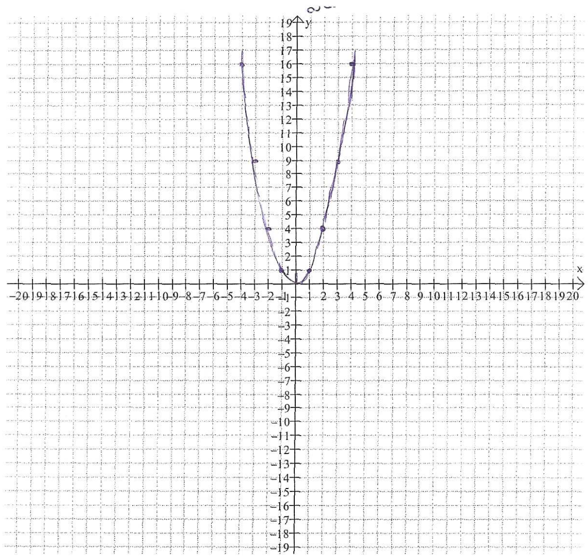
Item g) Todos os alunos acertaram-no.

Item h) Todos os alunos acertaram-no.

Item i) Onze alunos acertaram-no.

Item j) Dez alunos acertaram-no.

Nessa atividade tivemos apenas dois erros. O aluno Ricardo fez o gráfico da área do quadrado em função do lado da seguinte forma:



Nesse caso, o aluno não atentou para o fato de que o domínio da função pedida não incluía os números do intervalo $(-\infty, 0)$. Isso talvez tenha ocorrido porque em sua imagem de conceito a função $f(x) = x^2$ esta associada a este gráfico feito independentemente do domínio da função. Os resultados dessa atividade nos mostram imperativamente que os estudantes concluíram-na com êxito.

<u>Atividade 4</u>

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Nove alunos acertaram-no.

Item d) Dez alunos acertaram-no.

Item e) Nove alunos acertaram-no.

Item f) Dez alunos acertaram-no.

Item g) Dez alunos acertaram-no.

Item h) Nove alunos acertaram-no.

Conforme já explicitado, na análise *a priori*, essa atividade é uma atividade conclusiva dessa ficha. Sete alunos responderam a todas as questões de forma correta. Dois alunos responderam a maioria das questões corretamente. Cabe destacar, que alguns deles, em suas respostas, não explicitaram de que forma se dava a variação da função, respondendo apenas:

Antônio: *"É sempre a mesma"*
Kátia: *"Mantém-se crescente"*
Luíza: *"Ela aumenta com o tempo"*

Todavia, outros alunos fizeram suas respectivas observações, de forma brilhante:

Fátima: *"É crescente, aumenta sempre o mesmo, uma progressão aritmética"*
João: "*Varia numa mesma proporção"*
Felipe: *"Vai aumentando um valor constante"*
Ricardo: *"Aumenta de forma constante"*
Míriam: *"Não é constante, variação aritmética"*

Contudo, os outros dois alunos não conseguiram associar as perguntas dessa atividade com os conceitos trabalhados nas atividades anteriores, respondendo erradamente quase todas as questões.

Dessa maneira, podemos concluir que sete alunos (63,64%) atingiram completamente todos os objetivos traçados nessa ficha. Dois alunos (18,18%) atingiram parcialmente os objetivos, pois não responderam corretamente todas as atividades de conclusão. Classificaremos os dois alunos restantes (18,18%), como alunos que não atingiram os objetivos, embora tenham respondido corretamente as primeiras atividades desta ficha.

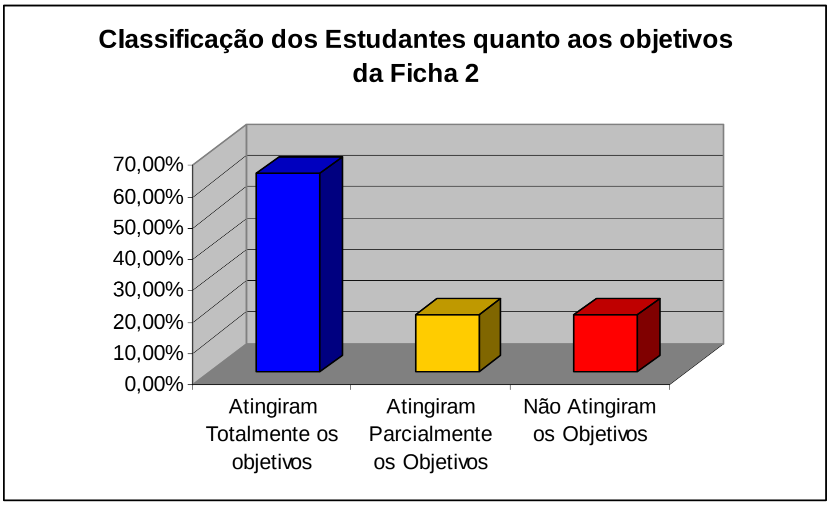


Figura 8

<u>Resumo da Análise</u>:

Em todas as atividades dessa Ficha, obtivemos um número bastante expressivo de respostas corretas. Nas três primeiras atividades, este índice se mostrou ainda mais elevado. Apesar de terem existido algumas respostas equivocadas, cujos motivos podem ser fatores de conflito potenciais, podemos dizer que todos os alunos responderam as questões sem maiores dificuldades, mostrando que atingiram os objetivos das respectivas atividades. Contudo, nem todos os alunos foram capazes de fazer a ligação entre os conceitos trabalhados nas atividades anteriores e as perguntas feitas nas atividades de conclusão. Segundo nossa análise, aproximadamente 81% dos alunos atingiu, total ou parcialmente, os objetivos dessa Ficha.

Quarta Sessão

A quarta sessão aconteceu em 8 de setembro de 2008.

Proposta da Sessão

1) Breve revisão sobre os tópicos estudados na sessão anterior. 2) Aplicação da Ficha 3 da seqüência didática.

Relato:

Inicialmente, fizemos uma rápida explanação a respeito dos conceitos vistos na sessão anterior. Nesse encontro, estiveram presentes quatorze alunos. Relataremos agora os resultados obtidos com a aplicação da Ficha 3 da seqüência didática, acompanhados de sua devida análise *a posteriori.*

Atividade 1

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Treze alunos acertaram-no.

Item c) Treze alunos acertaram-no.

Item d) Onze alunos acertaram-no.

Item e) Onze alunos acertaram-no.

Item f) Todos os alunos acertaram-no.

Item g) Todos os alunos acertaram-no.

Item h) Todos os alunos acertaram-no.

Item i) Todos os alunos acertaram-no.

Item j) Onze alunos acertaram-no.

Item l) Doze alunos acertaram-no.

Item m) Onze alunos acertaram-no.

Nessa única atividade da Ficha 3, o índice de acertos foi alto. Porém, nos itens d) e e), alguns estudantes mostraram basicamente as mesmas dificuldades relatadas na análise feita das atividades 5 e 6 da Ficha 1, relativas ao aspecto gráfico da função. Por exemplo, a aluna Kátia associou o tamanho do segmento ao valor de $f(Q)$ não percebendo que essa grandeza é igual ao valor de $f(Q) - f(P)$.

"Que o valor de f(Q) é equivalente ao comprimento do segmento roxo, independente de f(P)"

Apesar dessas dificuldades, os alunos, em sua maioria, concluíram bem a atividade. Apenas dois alunos não conseguiram concluí-la corretamente, atingindo, assim, parcialmente os objetivos dessa Ficha.

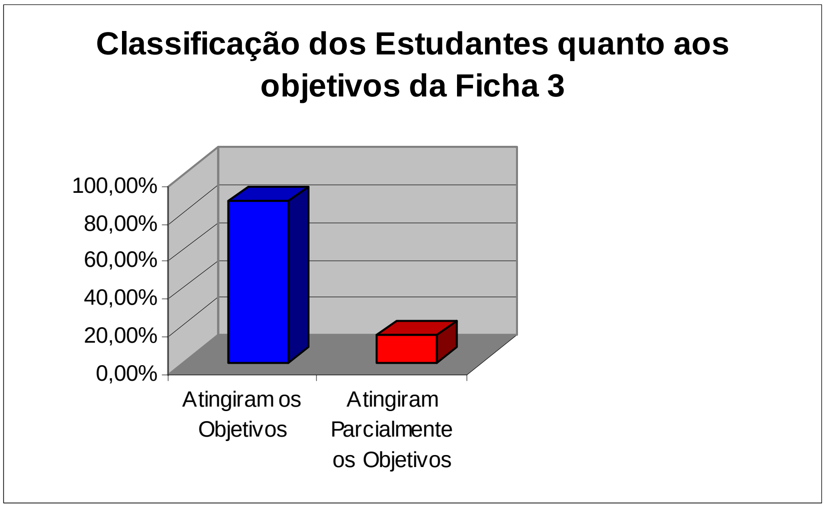


Figura 9

<u>Resumo da Análise</u>:

De forma geral, os estudantes responderam essa Ficha sem maiores dificuldades. Contudo, alguns alunos mostraram dificuldades no que diz respeito ao aspecto gráfico da função, dificuldades essas já demonstradas em outras atividades. Apesar disso, doze alunos (85,71%) concluíram corretamente a atividade atingindo, dessa forma, os objetivos dessa Ficha. Apenas dois alunos (14,29%) equivocaram-se ao concluírem a atividade, atingindo, desta maneira, parcialmente os objetivos almejados.

Quinta Sessão

A quinta sessão aconteceu em 15 de setembro de 2008.

<u>Proposta da Sessão</u>

1) Breve revisão sobre os tópicos estudados na sessão anterior. 2) Aplicação das Fichas 4 e 5 da seqüência didática.

Relato:

Iniciamos com uma rápida exposição a respeito dos conceitos vistos na sessão anterior. Nesse encontro, estiveram presentes quatorze alunos. Relataremos agora os resultados obtidos com a aplicação da Ficha 4 da seqüência didática, acompanhados de sua devida análise *a posteriori.*

<u>Atividade 1</u>

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Todos os alunos acertaram-no.

Item c) Todos os alunos acertaram-no.

Item d) Doze alunos acertaram-no.

Item e) Todos os alunos acertaram-no.

Os estudantes responderam as questões dessa atividade sem maiores dificuldades. Somente dois alunos não responderam corretamente o item d). Um deles deixou-a em branco e o outro respondeu equivocadamente $\frac{6}{8} m/s$, quando na verdade a resposta correta era $\frac{2,44}{4} m/s$.

Atividade 2

Item a) Treze alunos acertaram-no.

Item b) Treze alunos acertaram-no.

Item c) Treze alunos acertaram-no.

Item d) Treze alunos acertaram-no.

Item e) Treze alunos acertaram-no.

Item f) Treze alunos acertaram-no.

Item g) Treze alunos acertaram-no.

Item h) Treze alunos acertaram-no.

Item i) Treze alunos acertaram-no.

Item j) Treze alunos acertaram-no.

Curiosamente, em todos os itens dessa atividade, obtivemos apenas um erro. Um aluno deixou os três últimos itens em branco, justamente os itens que estavam na parte de trás da folha. Não sabemos se ele não percebeu que existiam mais questões para serem respondidas ou se de fato não sabia respondê-las. Já a aluna Carolina, no item f), antecipou a conclusão da atividade respondendo:

“Será igual a velocidade média, ou seja, a tangente do ângulo”

Percebemos que a imagem de conceito da aluna já associa algumas idéias extremamente importantes. A idéia de que o coeficiente angular de uma reta é a tangente do ângulo definido pela reta e o eixo das abscissas. E no caso da função representar a posição de um móvel em um determinado instante de tempo, o coeficiente angular da reta secante por dois pontos desta função é igual ao valor da velocidade média entre os instantes definidos pelas abscissas destes pontos.

Todos os alunos, com exceção do aluno que deixou os três últimos itens em branco, concluíram corretamente a atividade, atingindo, dessa maneira, os objetivos desta Ficha.

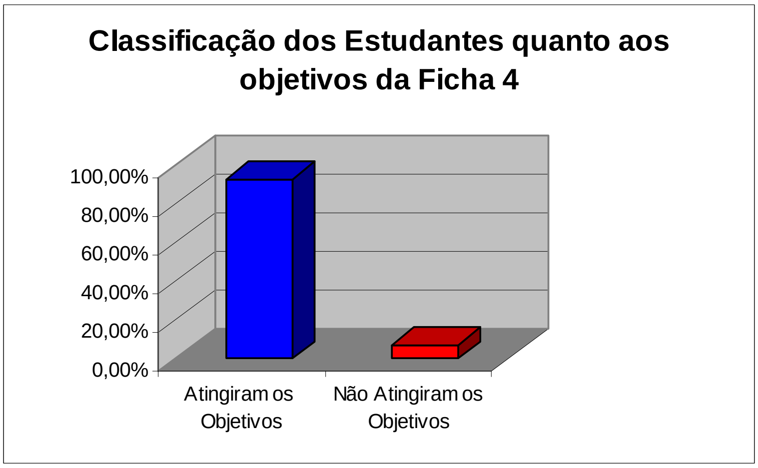


Figura 10

Resumo da Análise da Ficha 4:

Apenas um aluno (7,14%) não conseguiu atingir os objetivos dessa Ficha. Todos os outros alunos (92,86%) concluíram as atividades com sucesso, cometendo apenas erros esporádicos. Cabe ressaltar a percepção da aluna Carolina que expressou a conclusão da atividade antes de responder os itens referentes as questões conclusivas da Ficha.

Análise da aplicação da Ficha 5

Relataremos agora os resultados obtidos com a aplicação da Ficha 5 da seqüência didática, acompanhados de sua devida análise *a posteriori.*

Atividade 1

Item a) Cinco alunos pensam que a definição de reta tangente a uma curva qualquer é a mesma definição para o caso da circunferência. Contudo, nove alunos acham que a definição para uma curva qualquer é diferente da definição para o caso da circunferência.

Item b) Onze alunos acertaram-no.

Item c) Sete alunos acertaram-no.

Item d) Treze alunos definiram, de alguma forma, o que foi pedido.

No primeiro item dessa atividade, procuramos investigar qual seria o posicionamento dos estudantes com relação a definição de reta tangente para uma curva qualquer. Percebemos que a maioria dos alunos não conhecia o conceito de reta tangente, nem mesmo no caso da circunferência. Isso justifica a insegurança com a qual os estudantes responderam todos os itens da Atividade 1. Entretanto, esse fato nos ajuda a visualizar, de forma mais clara, alguns atributos presentes na imagem de conceito dos alunos.

Observando uma resposta dada ao primeiro item, constatamos um equívoco, já demonstrado em outras atividades, a não associação do par ordenado (x, y) com um ponto do plano cartesiano.

Carolina: *"Não. Pois esta reta deve interceptar ao menos 2 pontos (x,y)"*

Por outro lado, alguns alunos julgam que a reta tangente a uma curva em um dado ponto não interceptará necessariamente a curva somente neste ponto:

Kátia: *"Não. Porque pode interceptar dois ou mais pontos, já numa circunferência em apenas um ponto"*
Jorge: *"Não, pois dependendo da curva pode passar por dois pontos"*
João: "Não. Porque em outras curvas pode passar por 2 ou mais pontos"
Míriam: *"Dependendo da curva a reta tangente interceptará mais de um ponto na curva, e até mais de uma vez"*

Interessante notar que apesar de não termos definido o conceito de reta tangente a uma curva em um determinado ponto, apenas três alunos não reconheceram corretamente a função e a sua respectiva reta tangente no ponto $(1,1)$ respondendo, dessa forma, erradamente o item c). Entretanto, no item seguinte, esse índice aumentou consideravelmente. Sete alunos não responderam corretamente a essa questão que é similar a questão anterior. Esse fato evidencia que, neste momento da pesquisa, os estudantes não compreendiam o conceito de reta tangente a uma curva em um dado ponto.

No último item dessa atividade, gostaríamos de saber como o aluno definiria reta tangente a uma curva em um ponto desta curva. As respostas foram variadas, mas conseguimos agrupá-las da seguinte forma:

Seis alunos associaram a definição pedida com a definição de uma reta tangente a um dado ponto da circunferência.

João: *"Reta que toca apenas em um ponto da curva"*
Felipe: *"Uma reta que corta um ponto do gráfico apenas uma vez"*
Luíza: *"Uma reta que intercepte a curva em apenas um ponto"*
Maurício: *"É uma reta que só passa pelo ponto P"*
Fátima: *"É o único ponto que a reta encontra a curva"*
Luis Alberto: *"É a reta que encontra a curva só neste ponto"*

Um outro aspecto relevante é a distinção feita por alguns alunos entre "tocar a curva" e "interceptar a curva". Três alunos explicitaram essa distinção.

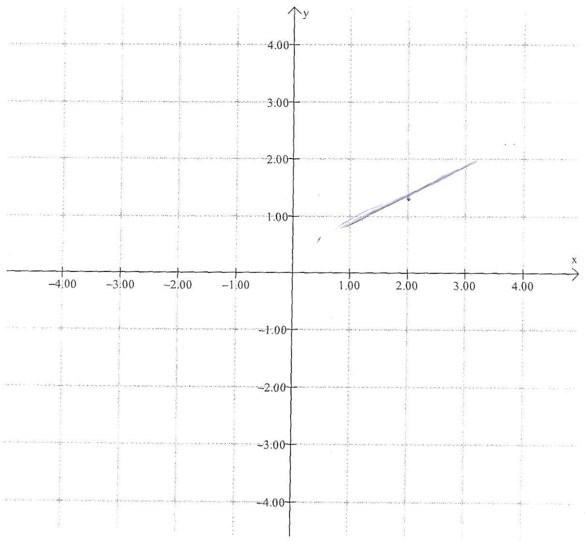
Adalberto: "*É o ponto onde toca mais não intercepta a circunferência*"
Antônio: "*É a reta que passa pelo ponto P da curva sem atravessar a curva*"
Míriam: "*Reta tangente de uma curva é aquela que a toca em algum ponto, não podendo interceptá-la. A reta pode ser tangente em uma área e não ser tangente na outra, como na área 1 e área 2 (A aluna circulou as regiões onde a curva e a reta tangente interceptam-se). Na área 1 a reta tocou a curva, portanto naquela área a reta é tangente a curva*"

Consideramos a resposta da aluna Míriam brilhante. Ela já demonstra perceber o que almejamos, ou seja, que a reta tangente à função, num dado ponto, é a reta que melhor aproxima o comportamento da função nas proximidades desse ponto. Em tempo, observemos que a aluna transita facilmente entre a dualidade local/global. Ela percebe que a noção de reta tangente caracteriza-se localmente, mesmo observando, de forma global, que a reta tangente tem, nesse caso, dois pontos de interseção com a função.

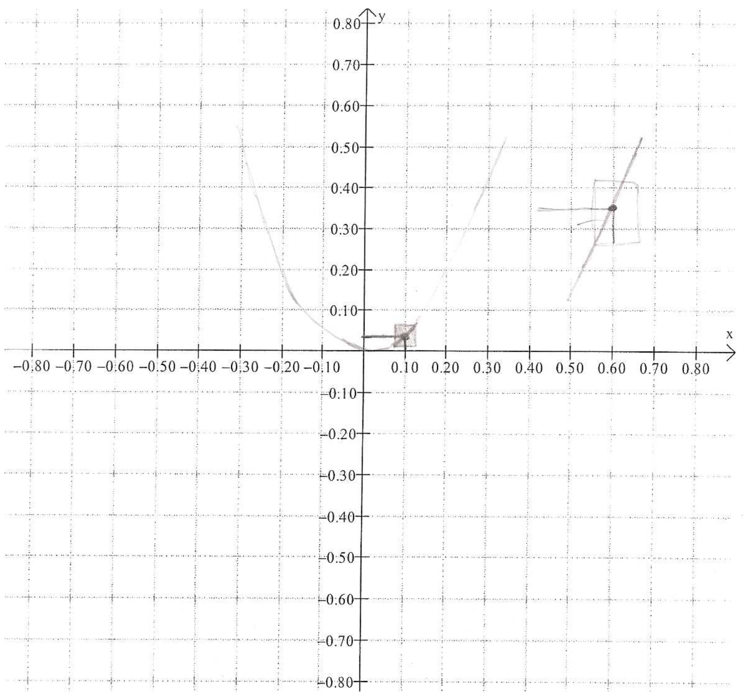
Um aluno não respondeu esse item. Dois alunos desenharam uma circunferência com uma reta tangente em um de seus pontos. E um aluno respondeu, de forma equivocada: *"Formam um triângulo retângulo".*

Na atividade 2, os estudantes demonstraram dificuldades para fazerem a previsão de como ficaria o aspecto gráfico da função depois que fosse dado o zoom.

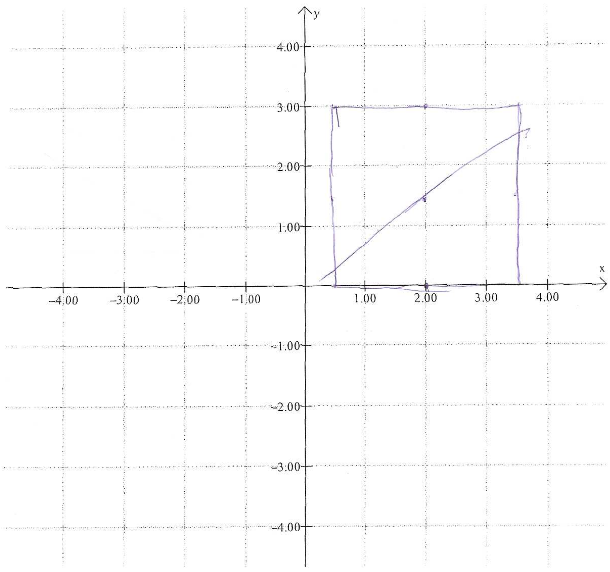
Alguns alunos desenharam simplesmente segmentos de reta.



Outros alunos fizeram um recorte da cena original.



E, ainda, outros desenharam a janela com o aspecto que apareceria na cena depois da ampliação.



Atividade 3

Item a) Treze alunos acertaram-no.

Item b) Doze alunos acertaram-no.

Item c) Treze alunos acertaram-no.

Item d) Treze alunos acertaram-no.

Nessa atividade de conclusão, quase todos os alunos traçaram a reta tangente de forma correta, atingindo, dessa forma, os objetivos da atividade. Apenas um aluno respondeu todas as questões erradas deixando claro que não atingiu os objetivos da Ficha.

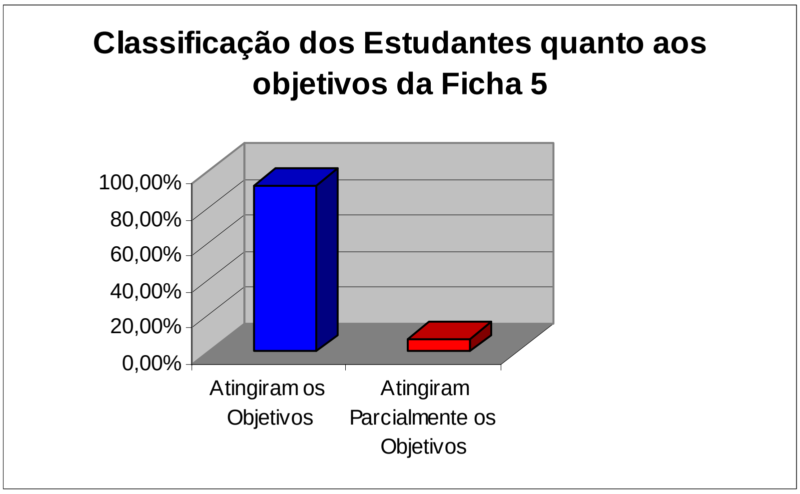


Figura 11

<u>Resumo da Análise da Ficha 5</u>:

Percebemos, inicialmente, que a maioria dos estudantes haviam tido pouco contato com a noção de reta tangente a um ponto da circunferência, apesar de que a clássica figura da circunferência com a reta tangente em um de seus pontos está presente na imagem de conceito da maioria deles. Na primeira atividade, metade dos alunos não soube identificar corretamente o gráfico com a sua respectiva reta tangente em um de seus pontos. Porém, depois da atividade relacionada com a noção de retidão local, quase todos os alunos traçaram corretamente a reta tangente. Apenas um aluno (7,14%) não conseguiu atingir os objetivos da Ficha. Todos os outros (92,86%) concluíram as atividades com sucesso, cometendo apenas erros esporádicos.

No dia 22 de setembro, encontramo-nos para realizar a sexta sessão. Porém, demo-nos conta de que a página onde estavam as atividades encontrava-se indisponível por conta de um problema no servidor. Por esse motivo, a sessão foi adiada pelo prazo de uma semana.

Sexta Sessão

A sexta sessão aconteceu em 29 de setembro de 2008.

Proposta da Sessão

1) Breve revisão sobre os tópicos estudados na sessão anterior. 2) Aplicação da Ficha 6 da seqüência didática.

Relato:

Inicialmente, foi feita uma rápida exposição a respeito dos conceitos vistos na sessão anterior. Nesse encontro, estiveram presentes onze alunos. Relataremos, agora, os resultados obtidos com a aplicação da Ficha 6 da seqüência didática, acompanhados de sua devida análise *a posteriori.*

Atividade 1

Item a) Dez alunos acertaram-na.

Item b) Nove alunos acertaram-na.

Os resultados obtidos nessa atividade confirmam o que havíamos concluído na Ficha anterior. A maioria dos estudantes percebeu que a interseção entre a curva e a reta tangente em um de seus pontos não é necessariamente em um conjunto unitário. Pudemos observar que as imagens de conceito de alguns alunos já incluíam aspectos trabalhados nas Fichas anteriores.

Luíza: *“Falso. Ela deve passar pelo ponto, assemelhando-se à curva se olhada de perto e paralela a ela”*
Fátima: *“Ela precisa tangenciar este ponto, chegando o mais próximo possível”*
Alan: *“A reta tangente é a reta que melhor aproxima do ponto”*
Míriam: *“Falso. Para que uma reta seja tangente ao ponto P, basta que ao se aproximar da curva a tangente se assemelhe ao máximo com o ponto de aproximação da curva”*

Observemos agora a resposta dada pelo aluno Maurício:

"Falso. Ela não passa, ela tangencia"

Interessante percebermos que alguns alunos não visualizam o ponto de tangência como um ponto de interseção entre a reta e a curva. A partir dessa constatação, salientamos que, a nosso ver, o professor ao abordar o conceito de reta tangente, deve fazer uso dos termos adequados e, alem disso, explorar seus significados em sala de aula.

<u>Atividade 2</u>

Item a) Todos os alunos acertaram-no.

Item b) Dez alunos acertaram-no.

Item c) Todos os alunos acertaram-no.

Item d) Todos os alunos acertaram-no.

Item e) Dez alunos acertaram-no.

Item f) Todos os alunos acertaram-no.

Item g) Nove alunos acertaram-no.

Item h) Todos os alunos acertaram-no.

Item i) Dez alunos acertaram-no.

Item j) Dez alunos acertaram-no.

Item l) Dez alunos acertaram-no.

Nessa atividade, quase todos os estudantes acertaram as questões. Concluíram corretamente o valor da velocidade instantânea, observando as velocidades médias em intervalos de tempo cada vez menores e perceberam que a reta secante "aproxima-se" da reta tangente quando $x+h$ "tende a" x. Apenas um aluno não conseguiu chegar a essas conclusões, deixando a questão em branco.

Atividade 3

Item a) Dez alunos acertaram-no.

Item b) Oito alunos acertaram-no.

Item c) Oito alunos acertaram-no.

Nesta última atividade, apenas três alunos não conseguiram concluí-la corretamente. Dessa forma, todos os demais conseguiram atingir os objetivos da Ficha. Observemos algumas respostas que ratificam nossa conclusão:

Adalberto: *"A secante se aproxima da tangente"*
Fátima: *"A reta secante fica cada vez mais perto da tangente"*
Antônio: *"Ela deixa de ser uma reta secante e passa a ser tangente ao ponto P"*
Alan: *"Os pontos vão se unindo, e a reta vai ficando unido com a reta tangente"*
Luíza: *"Ela se aproxima da reta tangente do ponto P"*

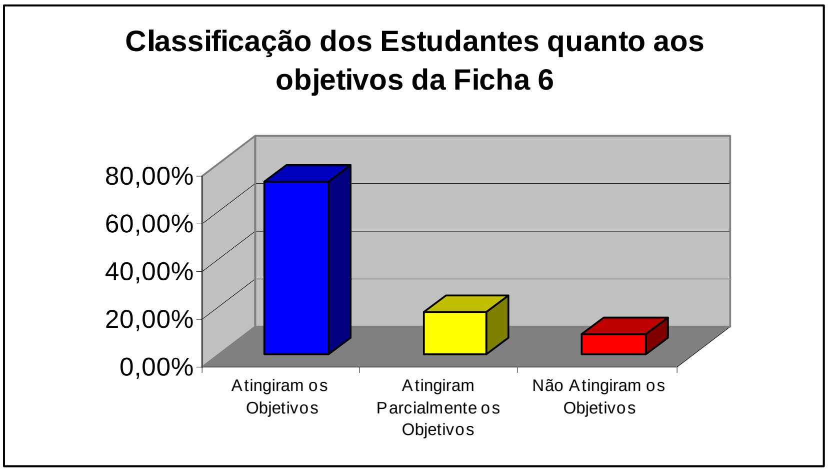


Figura 12

<u>Resumo da Análise da Ficha 6</u>:

Na primeira atividade os estudantes mostraram, em sua maioria, que não mais identificavam a reta tangente à curva em um ponto, como a reta que intercepta a curva somente neste ponto. Percebemos também que a noção de retidão local já faz parte da imagem de conceito de alguns alunos. Nesse ponto, cabe ressaltar a distinção feita pelo estudante Maurício que atribui sentido diferente aos termos “tangenciar” e “passar”. Nas duas últimas atividades, apenas um aluno (9,1%) não conseguiu atingir os objetivos dessas atividades. Dois outros alunos (18,18%), não concluíram corretamente alguns itens dessas atividades, atingindo, desta forma, parcialmente os objetivos da Ficha. Todos os demais estudantes (72,72%) atingiram os objetivos dessa Ficha, tendo cometido apenas poucos erros.

5.3 Validação

Retomam-se, nesse momento, as hipóteses da pesquisa cuja validação será obtida por meio do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori.*

Nas quatro primeiras atividades da Ficha 1, esperávamos que os estudantes vivenciassem situações, por meio da resolução de problemas e de sua respectiva visualização gráfica, em que as grandezas envolvidas fossem tais que, aumentos iguais em uma delas, acarretem aumentos iguais na outra. A nosso ver, esta vivência possibilita ao aluno um contato natural com a propriedade fundamental da função afim, sem que o tenhamos definido formalmente.

Quase todos os estudantes, além de interpretarem corretamente os problemas, foram capazes de expressar simbolicamente a função que os modela. Esse fato mostra que os alunos são capazes de modelar uma determinada situação por meio de uma função, desde que trabalhado de forma oportuna. Ressaltamos nosso pensamento de que este tipo de abordagem deve ser efetivamente trabalhado com os alunos que cursam o Ensino Médio. Pensamos que esse seja um dos caminhos, para se contornar a clássica dificuldade do entendimento de problemas relacionados a taxas relacionadas e otimização.

Fomos surpreendidos quando, nas atividades 5 e 6, os estudantes evidenciaram várias dificuldades na interpretação da questão e, principalmente, no entendimento gráfico da cena relacionada.

Nesse ponto, nossa conclusão é que essas dificuldades, as quais não haviam sido previstas na análise *a priori*, devem ser levadas em consideração em aplicações posteriores dessa seqüência didática, ou seja, novas atividades devem ser concebidas com o objetivo de levar o aluno a compreender os aspectos gráficos de uma função.

Nas atividades de conclusão dessa Ficha não foram todos os alunos que utilizaram a propriedade fundamental das funções afim. Apesar disso, a análise *a posteriori* nos mostra que os estudantes, em sua maioria, compreenderam a propriedade.

Todavia, sugerimos que seja considerado um maior número de atividades relacionadas à, situações-problema, que possam ser modeladas por meio de funções afim, com o objetivo de que os estudantes compreendam com mais facilidade a propriedade fundamental em questão. Cabe ressaltar que todos os alunos atingiram total ou parcialmente os objetivos da Ficha 1.

Todos os estudantes responderam as três primeiras atividades da Ficha 2 com enorme sucesso. Dois alunos não concluíram a Ficha adequadamente. O alto índice de acertos nas atividades de conclusão e a análise *a posteriori* nos levam a concluir que os alunos caracterizaram com êxito as funções polinomiais do 1° e 2 grau de acordo com a sua variação.

Na Ficha 3, aproximadamente 85% dos alunos associaram corretamente a taxa de variação da função com o valor da tangente do ângulo formado entre o gráfico da função afim e o eixo das abscissas.

Já na Ficha 4, aproximadamente 92% dos estudantes associaram com êxito o coeficiente angular da reta secante aos pontos $(t_1, f(t_1))$ e $(t_2, f(t_2))$ com a taxa de variação média da função f entre os instantes t_1 e t_2.

No início da Ficha 5, foi definido reta tangente a uma circunferência em um ponto P. Após isso, apesar de os alunos não terem tido contato com a reta tangente em outros contextos, foi pedido para que se definisse reta tangente a uma curva em um determinado ponto P. A insegurança com a qual foi respondida a questão, deixou claro que, a maioria dos estudantes, nunca tinha tido contato com o conceito de reta tangente, mesmo no caso da circunferência. Nas primeiras atividades dessa Ficha, essa incerteza se tornou ainda mais evidente, visto que sete alunos (50%) não indicaram corretamente, entre as opções dadas, o gráfico de uma função com a sua respectiva reta tangente em um de seus pontos.

Entretanto, a análise *a posteriori*, evidencia que, após o contato dos alunos com a noção de retidão local, treze alunos (92,85%) traçaram corretamente a reta tangente a uma função em um determinado ponto.

Esse excelente desempenho deixa claro o desenvolvimento dos alunos durante a realização dessa Ficha, já que antes estavam inseguros, mas, nesse momento, já traçavam corretamente a reta tangente em um dos pontos de uma curva dada.

A análise *a posteriori* da primeira atividade da Ficha 6 confirma as conclusões obtidas na análise da Ficha 5. Os estudantes não mais identificam a reta tangente a uma curva em um dado ponto como a reta que intercepta a curva somente nesse ponto. Ao contrário, evidenciam que a noção de retidão local já faz parte da sua imagem de conceito. Aproximadamente 72% dos estudantes concluíram corretamente a Ficha 6.

O Teste Diagnóstico nos mostrou, conforme esperávamos, que os estudantes não estavam habituados a pensar como e de que forma variam as funções. Apesar disso, em todas as Fichas, a maioria dos estudantes atingiu os objetivos. Vejamos a tabela que sintetiza os resultados obtidos na implementação da seqüência didática.

Hipóteses	**Atingiram os Objetivos**	**Atingiram Parcialmente os Objetivos**	**Não Atingiram os Objetivos**
H1 - Compreender a propriedade fundamental da função afim;	42,00%	58,00%	0,00%
H2 - Compreender a caracterização das funções polinomiais de 1° e 2° graus de acordo com a sua variação;	63,64%	18,18%	18,18%
H3 - Associar a taxa de variação média de uma função com o coeficiente angular da reta secante a dois pontos do gráfico da função;	92,86%	0,00%	7,14%
H4 – Compreender o comportamento local da reta tangente e ser capaz de traçá-la;	92,86%	0,00%	7,14%
H5 – Compreender taxa de variação instantânea como aproximações da taxa de variação média calculadas em intervalos cada vez menores;	72,72%	18,18%	9,10%
H6 – Associar a reta tangente com aproximações das retas secantes traçadas em intervalos cada vez menores.	72,72%	18,18%	9,10%

Tabela 2

Observemos que, em todas as fichas, um número expressivo de estudantes alcançou os objetivos almejados. Ao fazermos esta constatação e, considerando a forma como os alunos progrediram durante a realização da seqüência didática, consideraremos todas as hipóteses validadas.

Capítulo 6. Conclusões e Propostas Futuras

Podemos dizer que o problema relacionado aos altos índices de evasão e reprovação nos cursos de Cálculo foi o marco inicial do nosso trabalho. Constatamos que algumas das pesquisas relacionadas a esse assunto seguem por diversas vertentes. Contudo, uma de nossas principais premissas refere-se ao nosso pensamento de que as dificuldades encontradas no ensino de Cálculo são de natureza epistemológica.

Por outro lado, encontramos na tese de doutorado de Rezende (2003) outra premissa crucial em nossa pesquisa. O referido autor, após fazer um mapeamento das dificuldades encontradas pelos estudantes observou, em essência, um único lugar-matriz das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo: **o da omissão/evitação das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.**

Considerando fortemente esta constatação, os macro-espaços das dificuldades de natureza epistemológica traçados por Rezende (2003) e o problema da variabilidade, elaboramos uma proposta para inserção das idéias do Cálculo no Ensino Médio.

Além dos aspectos supracitados temos como princípios norteadores para nossa proposta seis hipóteses que sintetizam nossos principais objetivos nesta investigação.

A metodologia do presente trabalho foi baseada na Engenharia Didática, objeto de estudo da Didática da Matemática. Após cumpridas as três fases iniciais da Engenharia Didática, todas as hipóteses foram validadas por ocasião do confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Embora essa validação seja restrita ao contexto onde a investigação foi realizada, esse excelente resultado nos fornece indícios de que os estudantes de Ensino Médio são plenamente capazes de apropriarem-se desses conceitos tão importantes, tanto na Matemática quanto no Cálculo. Por outro lado, pensamos que, se em sete encontros, este grupo de estudantes mostrou um avanço considerável no que diz respeito às idéias contidas em suas respectivas imagens de conceito, com maior razão os alunos das nossas escolas terão plenas condições de também lograrem êxito visto que os professores terão um tempo consideravelmente maior para cumprirem esse papel.

Por outro lado, como enfatizamos no decorrer desse trabalho, em geral, no ensino de Cálculo, existe a prevalência da técnica sobre o significado. Essa prevalência pode levar a conclusão que a alegada “falta de base” para o aprendizado de Cálculo, a qual é a justificativa preferida para os altos índices de não-aprovação que ocorrem nesta disciplina, está na pequena habilidade apresentada pela maioria de nossos alunos em procedimentos algébricos, tais como, desenvolvimento de produtos notáveis, fatoração de polinômios, completamento de quadrados e a manipulação de identidades trigonométricas. Seguindo esta linha de raciocínio, o domínio por parte dos alunos desses procedimentos algébricos seria, não somente necessário, mas imprescindível para o sucesso no ensino de Cálculo e, de modo geral, para uma sólida formação matemática dos estudantes.

Muitas disciplinas no Ensino Médio e no Ensino Superior de Introdução ao Cálculo, denominadas, Cálculo Zero, Pré-Cálculo, entre outras, são baseadas, exclusivamente, no desenvolvimento de habilidades que envolvam o perfeito domínio destes procedimentos. Segundo Rezende (2003), os índices de não-aprovação nessas disciplinas de preparação para o Cálculo são tão grandes ou maiores que os respectivos índices das disciplinas de Cálculo. Portanto, ao adotarmos essa solução simplista, conseguimos, apenas, antecipar o problema.

Nesse sentido, os resultados obtidos em nossa pesquisa se tornam sobremaneira importantes, visto que, sinalizam a possibilidade efetiva de uma nova abordagem a conceitos que fundamentam todo o desenvolvimento do Cálculo e, como vimos neste trabalho, essa abordagem é adequada tanto no Ensino Médio, quanto nas disciplinas de Introdução ao Cálculo e de Cálculo.

Contudo, cabe ressaltar que o INSG é uma escola particular bastante tradicional no município de Macaé. Talvez, o fato de termos trabalhado com alunos de uma excelente escola, tenha sido um fator decisivo para bom andamento desse trabalho. Podemos observar que, de fato, o INSG é uma escola que se diferencia das demais, quando olhamos para os indicadores do ENEM[10]. No ano de 2007, enquanto a média nacional foi de 51,26, a média do Estado do Rio foi de 52,81, a média do INSG foi 67,29.

Porém, infelizmente, não são todas as escolas que oferecem um ensino de qualidade. Uma pergunta que poderia surgir é: será que esse resultado seria tão satisfatório se a seqüência didática fosse aplicada em uma escola com baixo

---

[10] Exame Nacional do Ensino Médio

índice no ENEM? A resposta a essa pergunta, pode ser um possível desdobramento deste trabalho.

Contudo, segundo Machado (1995):

A toda prática didática subjaz uma concepção epistemológica

Dessa forma, para que essa proposta tenha condições de estar presente nas salas de aulas brasileiras, faz-se necessário que os professores estejam imbuídos dos pilares que norteiam este trabalho. Certamente, em muitos casos, será necessária uma mudança de paradigma por partes dos docentes. Logo, propostas que tenham o objetivo de difundir os princípios fundamentais contidos neste trabalho são imprescindíveis para que essa proposta seja realmente efetivada em nossas escolas.

Isto posto, destaca-se que o presente trabalho pretende constituir-se como uma parcela de contribuição dentro do que é necessário para que as idéias essenciais do Cálculo possam ser parte integrante do processo de construção do pensamento matemático, melhorando, assim, a qualidade do processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Referências Bibliográficas

AMADEI, F.L. O infinito um obstáculo no estudo da matemática. Dissertação de Mestrado. São Paulo: PUC/SP,2005.

ARTIGUE,M. Épistemologie ET Didatique. RDM, vol 10, n.23,1990.

BACHELARD, G. A formação do espírito científico: contribuição para uma psicanálise do conhecimento. Tradução: Estela dos Santos Abreu – Rio de Janeiro: Contraponto, 1996. [Título Original:*La Formation de l'Esprit Scientifique: Contribution `a une Psychanalyse de la Connaissance*, Librarie Philosophique J. Vrin, Paris, 1938.]

BALDINO, R.R. Desenvolvimento de essências de Cálculo Infinitesimal. Rio de Janeiro: MEM/USU, 1998.

BARNARD, A.D e TALL, D. Cognitive Units, Connections, and Mathematical Proof. Proceedings of the 21st Annual Conference for the Psichology of Matematics Education, Lahti, Finland, 1997. Vol 2, p 41-48.

BARNARD, A.D. 1999. Compressed units of mathematical thought. *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (4), pp. 401-404. 1.

BARRETO, A (1995). O Ensino de Cálculo I nas Universidades. Informativo da Sociedade Brasileira de Matemática – SBM (6) 4-5.

BARUFI, M. C. B. A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. – Brasília: Ministério da Educação, 1999.

BROUSSEAU, G. 1983. Les obstacles ´epist´emologiques et les probl`emes en Math´ematiques. *Recherches en Didactique des Math´ematiques*, 4 (2), pp. 165-198.

CABRAL, T.C.B. Vicissitudes da Aprendizagem em um Curso de Cálculo. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 1992.

CABRAL, T.C.B. Contribuições da Psicanálise à Educação Matemática: A lógica da intervenção nos Processos de Aprendizagem. Tese de Doutorado. São Paulo: USP, 1998.

ENEM. Arquivos relativos ao resultado do Exame Nacional do Ensino Médio, 2007. Disponível em http://mediasenem.inep.gov.br/resultado.php. Acesso em: 15/02/2009.

FERREIRA, E.B. As demonstrações e a formação do professor de Matemática: um estudo sobre as contribuições dos ambientes de geometria dinâmica. UFRJ – IM – NCE: Dissertação de Mestrado em Informática 2006.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L.M e TALL, D. Conflitos Teórico-Computacionais e a Formação da Imagem Conceitual de Derivada. In CARVALHO, L.M e GUIMARÃES, L.C (eds), História e Tecnologia no Ensino de Matemática, 1, pp. 153-163. Rio de Janeiro, 2002.

GIRALDO, V. Descrições e conflitos computacionais: O caso da Derivada. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro: COPPE-UFRJ, 2004.
LAKOFF, G e Johnson, M. Philosophy in the Flesh. New York, 1999: Basic Books.

LAKOFF, G e Núñes, R. E. Where mathematics comes from. New York, 2000: Basic Books.

MACHADO, N.J. Epistemologia e Didática. As Concepções de Conhecimento, Inteligência e a Prática Docente. São Paulo: Editora Cortez, 1995.

MIORIM, M.A. Introdução à História da Educação Matemática. São Paulo: Atual, 1998.

NERI, C. Curso de Análise Real. Rio de Janeiro: IM/UFRJ,2006.

NETO, T.A de Q.F. e REZENDE, W.M. Interpretações do conceito de função. Caderno de Licenciatura/ PADCT-UFF, v.1, p. 31-38, Rio de Janeiro: IMUFF,1998.

NÚÑES, R.E.,EDWARDS, L.D e MATOS, J.F. Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. Educational Studies in Mathematics 39, 45-65, 1999.

PAIS, L.C. Didática da Matemática; uma análise da influência francesa. Belo Horizonte, Editora Autêntica, 2002

PAIXÃO,V. Mathlets: Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: UFRJ, 2008.

PETITOT, J. Local/Global. Enciclopédia Einaudi, volume 4, Local/Global, p.11-75. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1985a

PETITOT, J. Infinitesimal. Enciclopédia Einaudi, volume 4, Local/Global. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda, 1985b

PCN+, Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, 2002.

REIS, F. da S. A Tensão entre o Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. Tese de Doutorado em Educação. Campinas: UNICAMP, 2001.

REZENDE, W.M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

REZENDE, W.M. Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: IEM-USU, 1994.

ROQUE, T. A Matemática através da história. Notas de aula do curso de Historia da Matemática. Modulo 7. 2006.

SIERPINSKA, A. Epistemological remarks on functions. *Proceedings of the 12th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vesprem, Hungary, 1988.

SPINA, C.O.C. Modelagem Matemática no Processo de Ensino-Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral para o Ensino Médio. Dissertação de Mestrado. Rio Claro: UNESP, 2002.

TALL, David & VINNER, Schlomo (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity.

TALL, D. 1989. Concept images, generic organizers, computers and curriculum change. F*or the Learning of Mathematics*, 9 (3), pp. 37-42.

TALL, D. Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L.M Carvalho e L.C Guimarães, História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol 1 , pp 1-28, Rio de Janeiro 2003.

TINOCO, L.A.A. Construindo o conceito de função. Instituto de Matemática – UFRJ – Projeto Fundão. Rio de Janeiro, 2001.

VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. Tall (Ed), Advanced Mathematical Thinking, (pp. 65-81). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.