Universidade Federal do Rio de Janeiro

Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais

Marcelo Chaves Silva

2009

UFRJ

Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais

Marcelo Chaves Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Victor Augusto Giraldo.

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2009

Chaves, Marcelo.

Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais/ Marcelo Chaves Silva. – Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.

xv, 172f.: il.; 29,7cm.

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Dissertação (mestrado) – UFRJ/ IM/ Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2009.

Referências Bibliográficas: f. 188–190.

1. Educação Matemática. 2. Tecnologias Educacionais I. Giraldo, Victor Augusto. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática. III. Título.

Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais

Marcelo Chaves Silva

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

Presidente, Prof. Victor Augusto Giraldo

Profª. Elizabeth Belfort da Silva Moren

Prof. Ivo Fernandez Lopez

Prof. Luiz Mariano Paes de Carvalho Filho

Profª. Márcia Maria Fusaro Pinto

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2009

Agradecimentos

A Deus, pois sem Ele nada seria possível.

À minha esposa Luciene, pelo amor e compreensão em todas as horas.

Ao Instituto de Matemática da UFRJ, por abrir suas portas para a minha formação matemática e ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática deste instituto, por possibilitar a realização desta pesquisa.

Ao professor Victor Giraldo, pela sua infinita paciência e por sua tamanha e inspiradora participação em minha formação como professor.

À professora Elizabeth Belfort, pela sua generosidade e por seu incentivo desde o início desta pesquisa.

Ao professor Ivo Lopez, pelo seu entusiasmo e dedicação ao ensinar matemática.

Ao professor Luiz Mariano, pelas observações perspicazes e relevantes.

À professora Márcia Fusaro, pela seriedade e pelas valiosas e enriquecedoras sugestões.

A Lucas, Alexandre, Ana e João, pela participação nas atividades apenas pela vontade de aprender.

A todos os meus colegas de turma de mestrado, pela força durante a caminhada.

O cientista não estuda a natureza por sua utilidade;
ele o faz porque se deleita com ela,
e esse deleite vem de sua beleza.
Henri Poincaré

Resumo

Um Estudo Qualitativo dos Efeitos de Descrições do Comportamento no Infinito de Funções Racionais

Marcelo Chaves Silva

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Resumo da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

A questão de investigação deste trabalho é avaliar os efeitos de algumas descrições de conceito de assíntotas sobre as imagens de conceito de alunos em fase inicial de estudo de cálculo. Para isto, propomos uma abordagem alternativa para o estudo do comportamento no infinito de funções racionais baseada na noção de polinomorfização global e estruturada a partir de descrições de conceito numéricas, algébricas e geométricas. Esta abordagem foi formulada por analogia à noção de retidão local proposta por David Tall e à abordagem para o conceito de derivada desenvolvida por Giraldo e Carvalho. A metodologia de pesquisa consistiu de um estudo empírico qualitativo a partir de testes escritos e entrevistas semi-estruturadas baseadas em tarefas. Após nossa análise, destacamos os aspectos negativos e positivos observados, tendo estes predominado sobre os primeiros.

Palavras-chave: imagem de conceito, raiz cognitiva, descrição de conceito, assíntota, função racional, infinito, pensamento matemático avançado.

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2009

Abstract

A Qualitative Study on the Effects of Descriptions of the Behavior at Infinity of Rational Functions

Marcelo Chaves Silva

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Abstract da Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

The main research question of this work is to assess the effects of some descriptions employed on the concept images of students on early calculus. For this, we propose an alternative approach for the study of the behavior at infinity of rational functions. The approach is grounded on the notion of *global polinorphization*, structured upon numerical, algebraic and geometric concept descriptions. It was designed as an analogy of the notion of local straightness proposed by David Tall and of the approach for the concept of derivative developed by Giraldo e Carvalho. The research methodology consisted of a qualitative empirical study based on written tests and semi-structured task-based interviews. The data revealed positive and negative aspects. However our analysis suggested that the positive aspects prevailed upon the negative ones.

Key-words: concept image, cognitive root, concept description, asymtopte, rational function, advanced mathematical thinking.

Rio de Janeiro

Fevereiro de 2009

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

A dificuldade que muitos alunos sentem na fase introdutória da disciplina cálculo não é um fato novo. O conceito de limite, base dos conceitos de derivada e integral estudados nesta disciplina, representa uma barreira a ser ultrapassada pelo estudante. A necessidade de pesquisas que contribuam para a busca de alternativas para o ensino deste conceito torna-se evidente.

Minha experiência desde a época de aluno até os dias de hoje como tutor de cálculo ou como professor do ensino médio me põe a par desta dificuldade na compreensão deste conceito tão sofisticado. Como aluno, lembro-me de minhas dúvidas ao pensar em retas tangentes a gráficos que os cortam em mais de um ponto. Para mim, retas tangentes só se relacionavam com circunferências e, com estas, só deveria haver um ponto em comum. Como tutor em turmas de cálculo, vejo muitas outras dificuldades dos estudantes relacionadas com o conceito de infinito e livros com uma linguagem pouco acessível a estes. Como professor de ensino médio, vejo o desafio que representa ensinar princípios de cálculo a turmas de terceiro ano *preocupadas em passar no vestibular* e que sabem não precisar da disciplina para passarem neste exame.

De qualquer forma, uma questão que preocupa todo professor é como tornar as aulas mais atraentes e ricas para o estudante. E sempre estive aberto às opiniões pertinentes de meus colegas e mestres, pois buscava respostas. Infelizmente, a maioria delas se referia a como *não* se deveria proceder em uma sala de aula, sendo poucas aquelas que realmente contribuíam com alguma idéia concreta.

Ao longo de minha trajetória, obtive algumas respostas. O uso do computador para ensinar Matemática surgiu como algo inovador e necessário. Ainda como aluno da UFRJ, tive experiência com a geometria dinâmica graças à professora Elizabeth Belfort e fiquei muito impressionado com as novas possibilidades de exploração da geometria, ramo da Matemática para mim fundamental.

Outra resposta às minhas indagações surgiu quando trabalhei como monitor de cálculo em uma turma de especialização para professores sob a orientação do professor Victor Giraldo. Desta vez, o uso do computador como um instrumento de visualização e exploração de exemplos para o ensino de derivada mostrava um caminho cheio de possibilidades, mas ainda com muitas perguntas a serem respondidas. Na época, através da visualização de gráficos de funções no computador, este professor me apresentou a propriedade de algumas funções racionais de se confundirem com suas assíntotas ou, de forma mais geral, com gráficos de polinômios como parábolas em determinadas janelas gráficas em intervalos grandes do domínio. Era um assunto novo, que não era abordado nas turmas de cálculo com as quais tive contato, seja como aluno ou como monitor até então. Fiquei muito surpreso com a propriedade e motivado a estudar mais sobre o assunto.

Resolvi, então, elaborar minha monografia final de curso sobre uma abordagem computacional baseada nas visualizações que simulassem o comportamento de gráficos das funções racionais no infinito. Durante a pesquisa, ao estudar a teoria de imagens de conceito e também a proposta de Tall para ensino de derivada baseada na noção de retidão local, percebi uma analogia importante entre a minha pesquisa e aquela sugerida por Tall. Enquanto este autor explorava a máquina para visualizar gráficos diferenciáveis na vizinhança de um ponto se tornando parecidos com retas, o meu objetivo era explorar a visualização global de gráficos das funções racionais tornando-se semelhantes não só a retas, mas a outros gráficos polinomiais. O primeiro servia como uma base para o ensino de derivada, enquanto o segundo serviria de base para o ensino de limites no infinito.

Mais tarde, após meu contato com os trabalhos de Giraldo e Carvalho (2003, 2004) e também com a tese de Giraldo (2004), comecei a vislumbrar a possibilidade de desenvolver mais a minha proposta anterior para o conceito de assíntotas. A utilização de múltiplas representações de um mesmo conceito e a consciência das limitações associadas a cada uma delas enriqueceriam a proposta inicial que consistia basicamente de uma etapa de visualização. A partir novamente de uma analogia, desta vez inspirada na estrutura de abordagem pensada por Giraldo e Carvalho (2003, 2004), poderíamos acrescentar novas etapas e fazer brotar a semente plantada em minha monografia. Poderíamos explorar representações numéricas e algébricas para aproximar o cálculo de assíntotas, explorar também uma representação capaz de discriminar o objeto estudado e, por fim, uma representação capaz de *tornar visível* a conceituação de assíntotas.

O presente trabalho representa a concretização da proposta elaborada a partir destas idéias. Esperamos que este desdobramento do trabalho inicial possa enriquecer a discussão sobre o ensino de funções e, em particular, do ensino de limite. Para isto, ele foi elaborado para ser testado em um estudo empírico qualitativo e semi-estruturado. Com isto, pretendemos inicialmente verificar como andam as imagens de conceito sobre o tema assíntota de estudantes de uma turma inicial de cálculo submetida a uma abordagem tradicional. Após a aplicação de nossa proposta, avaliamos os mesmos estudantes para analisar se houve mudanças positivas ou negativas nas imagens de conceito.

No capítulo 1, faremos um resumo do referencial teórico baseado na teoria de imagens de conceito iniciada por Tall e Vinner e descreveremos também a teoria de raízes cognitivas. Explicaremos a noção de retidão local para o ensino de derivada sugerida por Tall e, em seguida, apresentaremos a proposta de Giraldo e Carvalho inspirada nesta noção e que utiliza múltiplas descrições de conceito. Ainda no mesmo capítulo, discutiremos algumas pesquisas sobre o uso de tecnologia no ensino de Matemática e a dificuldade de compreensão do conceito de limite. No capítulo 2, faremos uma revisão da abordagem do ensino tradicional de assíntotas e vamos propor uma abordagem alternativa para este tema por analogia à proposta de Giraldo e Carvalho e baseada na noção de polinomorfização global sugerida por nós. Neste capítulo, também vamos levantar a questão de investigação desta pesquisa. No capítulo 3, vamos descrever a metodologia utilizada em nosso estudo empírico. No capítulo 4, relataremos os resultados obtidos, bem como as análises individuais e geral dos participantes. Logo após este capítulo, seguir-se-ão as considerações finais.

1 Referencial teórico

> *O que é uma definição boa? Para o filósofo ou o cientista, é uma definição que se aplica a todos os objetos a serem definidos, e só se aplica a eles; é aquela que satisfaz as regras de lógica. Mas em educação não é isso; é uma que pode ser entendida pelos alunos.* (POINCARÉ, 1908, p. 117, tradução nossa)

Em muitos casos, podemos observar que existem nítidas discrepâncias entre, por exemplo, o que está realmente escrito em uma definição e o que entendemos a respeito dela, ou ainda, entre o que explicamos em sala de aula e o que realmente os alunos entendem sobre aquilo. Poderíamos deduzir, então, que pode haver um problema em nossa linguagem de sala de aula ou, até mesmo, na linguagem matemática, mas pensar assim seria reduzir o problema a apenas uma questão e sabemos que provavelmente existem muitas outras questões envolvidas, dada a complexidade do ser humano. "O cérebro humano não é uma entidade puramente lógica. Ele funciona de um modo complexo que contrasta com a lógica matemática." (TALL; VINNER, 1981, p. 151, tradução nossa).

Cada indivíduo pensa de uma forma. É senso comum (ou mesmo podemos verificar isto em nosso cotidiano como professores) que uma mesma explicação pode ser rapidamente entendida por uns e considerada difícil por outros. Portanto, fica evidente a necessidade de entendermos melhor o processo ensino-aprendizagem da Matemática para podermos propor alternativas no sentido de enriquecer este processo ou ajudar a desenvolvê-lo.

Neste capítulo, iremos abordar a teoria de *imagens de conceito* desenvolvida inicialmente por Tall e Vinner (1981). Esta teoria nos ajuda a entender o que em geral ocorre durante a interação abordagem-indivíduo. Também serão apresentados alguns relatos de estudos empíricos com o uso do computador no ensino de Matemática e, em seguida, discutiremos a questão da dificuldade de compreensão do conceito de limite.

1.1 Imagens de conceito e unidades cognitivas

Com o intuito de descrever e explicar o funcionamento cognitivo da mente humana ao se deparar com questões matemáticas, Tall e Vinner formulam uma teoria fundamentada na noção de *imagem de conceito*, que é definida como se segue:

> Nós usaremos o termo *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais, processos e propriedades associados. Ela é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa)

Quase vinte anos depois, Tall (2000) retoma a definição acima, dizendo que a *imagem de conceito* se refere à estrutura cognitiva total interna à mente de um indivíduo e que está associada a um dado conceito, incluindo todos os quadros mentais, processos e propriedades associados. A partir desta definição, fica evidente que a *imagem de conceito* é o conjunto de todos e quaisquer pensamentos produzidos pela mente de um indivíduo com relação a um dado conceito. Portanto, não faz sentido falarmos sobre uma imagem de conceito puramente associada ao conceito em si; o que está em jogo aqui é a interação entre o indivíduo e o tópico matemático. O ser humano, ao interagir com as questões matemáticas, processa as idéias, produzindo em sua mente elementos que compõe, ainda segundo Tall e Vinner (1981), a estrutura cognitiva total referente ao dado conceito. Dentre tais elementos, podemos destacar o que os autores chamam de figuras (ou quadros) mentais e que entendemos como sendo imagens, diagramas, gráficos ou qualquer outro objeto matemático de natureza visual (ou não), desde que esteja relacionado de alguma forma com o conceito em questão para o indivíduo. Em Giraldo (2004), vemos que a imagem de conceito é composta por elementos, cujos atributos são de diferentes naturezas e graus de generalidade, e que podem ser, além das representações visuais já citadas, coleções de impressões ou mesmo experiências externas à Matemática. Por exemplo, a imagem de conceito de triângulo de um estudante pode conter diversos elementos como imagens de desenhos de vários tipos de triângulos, propriedades, etc, como também conter impressões do tipo: “estudar triângulo é chato”, “entender as propriedades é difícil” ou “adoro fazer exercícios de semelhança de triângulos”. Além disso, o estudante pode se lembrar de tarefas envolvendo o assunto triângulo e de como estas experiências anteriores o ajudaram (ou não) a gostar do tópico ou a entendê-lo melhor.

Além dos elementos já citados, não podemos esquecer outros aspectos fundamentais abordados na definição de Tall e Vinner, como propriedades e processos referentes a um dado assunto. Ainda na mesma situação-exemplo do parágrafo anterior, a imagem de conceito de triângulo de um estudante pode conter propriedades como "triângulos isósceles possuem ângulos da base congruentes" ou "em qualquer triângulo, as bissetrizes internas sempre se encontram em um mesmo ponto chamado incentro"; ela pode também conter processos como o de multiplicar a metade da medida da base pela altura de um triângulo para calcular a sua área ou a simples memorização da lei dos cossenos ou do teorema de Pitágoras. Enfim, uma infinidade de atributos (matemáticos ou não) podem pertencer à imagem de conceito, inclusive idéias incoerentes com a teoria matemática. Tudo isto dependerá do tipo de experiências que o indivíduo terá e de como ele irá interagir com dada abordagem de um assunto. Assim, podemos perceber que uma imagem de conceito é algo totalmente subjetivo, pois depende do sujeito em questão e existe exclusivamente no interior da mente deste.

Além disso, ainda de acordo com a definição de Tall e Vinner (1981), a imagem de conceito não é sempre a mesma, ela está sempre em transformação à medida que o indivíduo entra ou não em contato com novas situações, o que nos faz concluir que elementos pertencentes a ela possam ser modificados, incluídos ou, até mesmo, excluídos. Isto ocorre não só pelos diferentes tipos de situações pedagógicas experimentadas pelo sujeito, mas também porque o ser humano nem sempre reage da mesma maneira diante do mesmo estímulo. Podemos citar o exemplo de uma pessoa que escuta a mesma música várias vezes e, dependendo do momento, descobre sensações distintas ou percebe detalhes presentes na música que ele não havia percebido antes.

Tall e Vinner (1981) também introduzem o termo *imagem de conceito evocada* para descrever a parte da imagem de conceito ativada em um dado contexto, que não é necessariamente tudo o que o indivíduo sabe sobre dado assunto; ela é a porção da imagem de conceito que é ativada em certo momento. Segundo Vinner (1991), isto ocorre quando o nome do conceito é visto ou ouvido, se transformando em um estímulo para nossa memória. Em geral, a *imagem de conceito evocada* é algo não-verbal associado ao nome do conceito em nossa mente. Algumas vezes também podemos evocar representações que podem ser traduzidas em formas verbais, mas é importante lembrar que, em geral, estas não são as primeiras coisas a serem evocadas em nossa memória. Vejamos o seguinte exemplo dado ainda por Vinner (1991). Ao ouvir a palavra "mesa", uma figura de uma certa mesa pode ser evocada em sua mente. Experiências de sentar em uma mesa; comer em uma, etc; podem ser evocadas também. Você pode lembrar ainda que muitas delas são feitas de madeira; a maioria delas tem quatro pernas; normalmente você não deita sobre uma mesa, você pode sentar sobre uma, mas isto pode ser encarado por algumas pessoas como um comportamento indelicado. Da mesma forma, quando você ouve a palavra "função", você pode se lembrar da expressão "$f(x) = y$", pode visualizar um gráfico de uma função, pode pensar em funções específicas como $y = x^2$ ou $y = \operatorname{sen} x$, $y = \ln x$, etc. Além do mais, de acordo com Tall (2000), a mente humana é capaz de se concentrar em um número limitado de informações ao mesmo tempo, portanto, podemos dizer que é impossível para o indivíduo ter acesso à sua imagem de conceito por completo; a partir de diferentes estímulos, em diferentes momentos, ele poderá ativar partes distintas de sua imagem de conceito.

Outro termo introduzido por Tall e Vinner é *definição de conceito*. Os autores o definem: "*Definição de conceito* é uma sentença de palavras usada por um indivíduo para especificar um determinado conceito." (TALL; VINNER, 1981, p. 152, tradução nossa).

Tall e Vinner (1981) complementam, dizendo que uma *definição de conceito* pode ser simplesmente memorizada pelo estudante, mas pode ser aprendida de maneira mais significativa e relatada por ele com maior ou menor grau de coerência com o conceito matemático em questão. Barnard e Tall (1997), Vinner (1983), Tall (2000) ainda frisam que a *definição de conceito* pode ou não estar matematicamente correta. Além disso, a *definição de conceito*, assim como a *imagem de conceito*, pode se modificar com o passar do tempo e com o amadurecimento do indivíduo. Outra característica importante da definição de conceito é que ela, antes de ser externalizada por meio das palavras, naturalmente também é um tipo de pensamento criado pela mente do indivíduo e, como tal, faz parte da estrutura cognitiva associada ao conceito; logo, em concordância com o artigo de Tall e Vinner (1981) e com trabalhos subseqüentes de Tall (1986, 1989, 1992, 2000), a *imagem de conceito* inclui a *definição de conceito*. Neste ponto há uma distinção entre os trabalhos de Tall e de Vinner. Apesar da co-autoria do artigo *Concept image and concept definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity* (TALL; VINNER, 1981), posteriormente Vinner passa a considerar a definição de conceito como um elemento externo à imagem de conceito, enquanto Tall continua a considerar a definição de conceito como uma parte interna da imagem de conceito. Para o primeiro, a imagem de conceito incluiria todas as estruturas cognitivas associadas ao conceito, com exceção apenas da própria definição de conceito. Mas, de acordo com Giraldo (2004), através de comunicação pessoal ao autor, Tall e Vinner afirmam que esta distinção é de natureza meramente formal e ela não acarreta divergências importantes para a teoria como um todo. Em todo caso, deixamos claro que, para esta pesquisa, seguiremos a formulação de Tall, isto é, a imagem de conceito contém a definição de conceito.

Barnard e Tall (1997) desenvolvem outra noção importante que nos ajudará a entender a estrutura explicada até aqui. Eles definem o termo *unidade cognitiva* como sendo cada porção da estrutura cognitiva associada a um conceito em que um indivíduo é capaz de focar atenção conscientemente em um determinado momento. Em outras palavras, *unidades cognitivas* são partes da imagem de conceito que são ativadas pelo indivíduo quando este desenvolve idéias relacionadas ao conceito. Ainda segundo Barnard e Tall (1997), elas podem ser símbolos, teoremas, fórmulas, um resultado específico ou genérico, enfim, qualquer idéia que auxilie (ou não) na construção de um dado conceito ou na realização de uma tarefa ou exercício. Por exemplo, ao estudar o sinal de uma função racional, um estudante pode fazer um quadro de sinais e analisar os sinais do numerador e do denominador separadamente; durante esta tarefa, o fato do gráfico de uma função polinomial do 2º grau ser uma parábola ou o fato da multiplicação entre dois valores negativos resultar em um número positivo são *unidades cognitivas* que contribuem no processo de estudar o sinal da função. Os autores destacam habilidades como a de comprimir informação matemática, formando unidades cognitivas e a de construir conexões entre unidades cognitivas de tal forma que informações necessárias possam ser facilmente acessadas e afirmam que elas são essenciais no desenvolvimento do raciocínio matemático.

Tall (2000) acrescenta que, num período curto de tempo, um indivíduo é capaz de manter o foco de sua atenção em uma quantidade limitada de informações. Daí, o ser humano pode comprimir estruturas matemáticas maiores em outras menores no desenvolvimento de um raciocínio mais geral, formando unidades cognitivas. Da mesma forma, em outro momento dependendo da necessidade, estas podem ser reabertas e o indivíduo pode ter acesso novamente aos elementos primários da estrutura original, caracterizando, assim, a flexibilidade de pensamento que é fundamental para o raciocínio matemático.

Barnard (1999) observa que as unidades cognitivas são importantes porque, não só são pequenas o suficiente para poderem permanecer no foco consciente da atenção enquanto são usadas, como também atuam num nível operativo. Em resumo, elas têm o duplo papel de substituir uma coleção de informações, tornando-se mais acessíveis para a mente, e de carregar a estrutura original da coleção que a gerou, mantendo com esta uma conexão ativa. Barnard (1999) complementa, dizendo que o valor das unidades cognitivas em pensamento matemático está no fato de se constituírem em um todo que é ao mesmo tempo menor e maior que a soma de suas partes – menor no sentido de ser capaz de caber no foco da atenção em curto período, e maior no sentido de possuir características holísticas que são capazes de orientar a sua manipulação. Assim, ainda segundo Barnard, a consciência dos elementos específicos da estrutura interna de cada unidade cognitiva atua como um guia para a conseqüente manipulação de outras unidades cognitivas e é isto que queremos dizer quando nos referirmos no decorrer deste trabalho às conexões, não só entre as unidades cognitivas, como também dentro delas. Estas conexões têm um papel fundamental no modelo que apresentaremos a seguir.

Até este ponto do texto, enfatizamos a explicação dos conceitos importantes para o entendimento da teoria, mas todos eles nos motivam à compreensão de como é a relação entre eles e, ainda, como de fato eles contribuem para a compreensão do funcionamento do pensamento matemático do indivíduo. Pensando nisso e com o intuito de tornar mais clara a nossa exposição da teoria, construímos alguns diagramas fortemente inspirados naqueles propostos em Vinner (1991), nos quais a definição de conceito e a imagem de conceito de um indivíduo são representadas por duas células que interagem (ou não) entre si. Nos diagramas, esta interação é representada por setas e, segundo o autor, ela é responsável pela contribuição que uma célula faz à outra e, através dela, pode ocorrer o enriquecimento de ambas as células.

Nos diagramas apresentados a seguir há duas diferenças fundamentais daqueles propostos por Vinner, (1) incorporamos outros elementos oriundos da teoria, como as unidades cognitivas e, principalmente, (2) representamos a definição de conceito como uma célula contida no conjunto que simboliza a imagem de conceito, seguindo assim a formulação de David Tall conforme já foi dito. Além disso, representaremos as importantes conexões entre as unidades cognitivas por setas. Devemos lembrar que ficarão implícitas as conexões internas às unidades cognitivas. Portanto, fique claro que os diagramas representam um momento da imagem de conceito de um indivíduo e, pela própria natureza flexível desta estrutura, as unidades cognitivas podem ser reabertas ou reagrupadas dependendo da demanda de pensamento. Apesar destas diferenças, nos baseamos no mesmo processo de interação entre as células proposto por Vinner, o qual consideramos fundamental para a compreensão da estrutura e do funcionamento da imagem de conceito do indivíduo.

Antes de tudo, devemos lembrar que uma imagem de conceito pode estar vazia ou quase vazia, isto é, ela pode não conter nem a definição de conceito, nem qualquer outro atributo relacionado a ele. Segundo Vinner (1991), isto ocorre quando, por exemplo, nenhum significado é associado ao nome do conceito em questão, provavelmente porque o indivíduo não teve nenhum ou muito pouco contato com o mesmo.

Porém, em uma outra situação bastante comum, ilustrada pela figura 1, podemos observar o exemplo de estrutura de uma imagem de conceito que não contém nenhuma definição de conceito. O retângulo maior simboliza a imagem de conceito de um indivíduo. Dentro dele, existem todos os pensamentos associados àquele conceito e que, neste nível de pensamento, estão comprimidos em unidades cognitivas, aqui indicadas por círculos e as letras U.C.. Conforme já foi dito, nele também existem as setas que ligam as unidades cognitivas, representando as conexões existentes entre elas. Em cinza claro, podemos ainda observar a porção da imagem de conceito que não foi evocada, pelo menos neste momento a que se refere o diagrama. Portanto, a parte em negrito representa a imagem de conceito evocada.

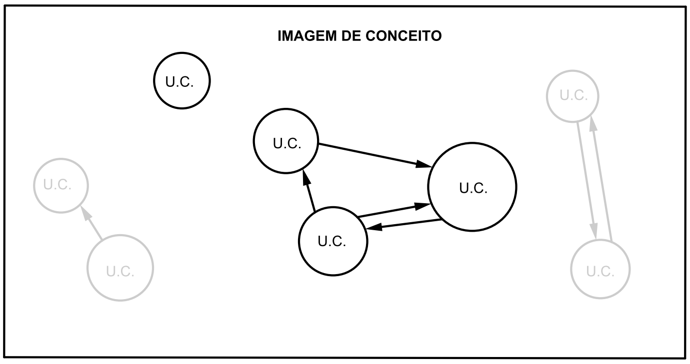


Figura 1: Imagem de conceito sem definição de conceito.

Na verdade, consideramos que as conexões sobre a qual falamos – aqui representadas simbolicamente pelas setas dos diagramas das figuras de 1 a 7 – dão sentido à palavra *compreender* em Matemática. Para Tall e Vinner, esta palavra não significa apenas *ter uma imagem de conceito* e simplesmente memorizar definições, teoremas, fórmulas ou qualquer outro resultado. Durante o processo de aprendizagem, segundo a teoria, deve ocorrer uma *construção de uma imagem de conceito*, onde o papel das conexões entre seus elementos é fundamental. De acordo com Barnard e Tall (1997), a habilidade para fazer conexões entre as diferentes unidades cognitivas, de tal forma que as informações relevantes possam ser acessadas quando necessário, é um fator importante no desenvolvimento de idéias matemáticas e, portanto, na construção da imagem de conceito. Além disso, Vinner (1991) nos alerta para o fato de que saber uma definição de conceito não garante a compreensão do mesmo, até porque, como já foi dito, ela pode não ser coerente com a definição formal[1] , ou ainda, mesmo que seja coerente, ela pode ter sido apenas memorizada pelo indivíduo.

Na figura 2, podemos observar uma imagem de conceito que contém uma definição de conceito, porém totalmente desconectada das unidades cognitivas. O retângulo em tracejado (dentro do conjunto que representa a imagem de conceito) simboliza a definição de conceito do indivíduo. Este esquema mostra o exemplo de uma pessoa que apenas memorizou uma sentença para servir de definição, mas que não consegue relacioná-la com os demais aspectos do conceito. Neste caso, uma tarefa ou exercício proposto pelo professor cria um estímulo na mente do indivíduo, que responde sem o auxílio de sua definição de conceito, mas sim recorrendo às demais partes de sua imagem de conceito resultantes de experiências em tarefas anteriores. Este tipo de processo de pensamento pautado em experiência anterior é bem comum entre alunos e é ilustrado através do diagrama da figura 3. Nesta figura, podemos observar uma seta com sentido "para dentro" que representa a identificação do problema para posterior internalização e construção das idéias; as setas internas novamente simbolizam as conexões entre as unidades cognitivas para elaboração da resposta àquele estímulo; os círculos em cinza claro representam as porções da imagem de conceito que não foram ativadas durante a tarefa; e, por fim, a seta com sentido "para fora" significa a resposta ao estímulo, isto é, a externalização das idéias construídas durante a tarefa proposta.

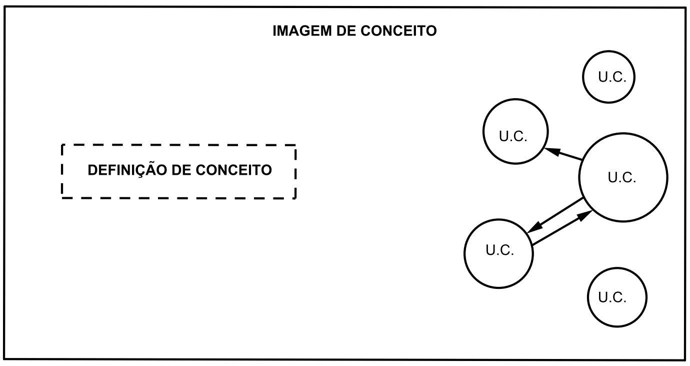


Figura 2: Imagem de conceito com definição de conceito apenas memorizada.

Por outro lado, um indivíduo pode se basear demasiadamente na definição de conceito sem relacioná-la com as outras porções da imagem de conceito, podendo ela ser coerente ou não com a definição formal. Na figura 4, podemos observar este tipo de processo de pensamento durante uma tarefa quando a definição de conceito não tem conexão com a

[1]Neste texto, consideramos definição formal aquela aceita pela comunidade matemática.

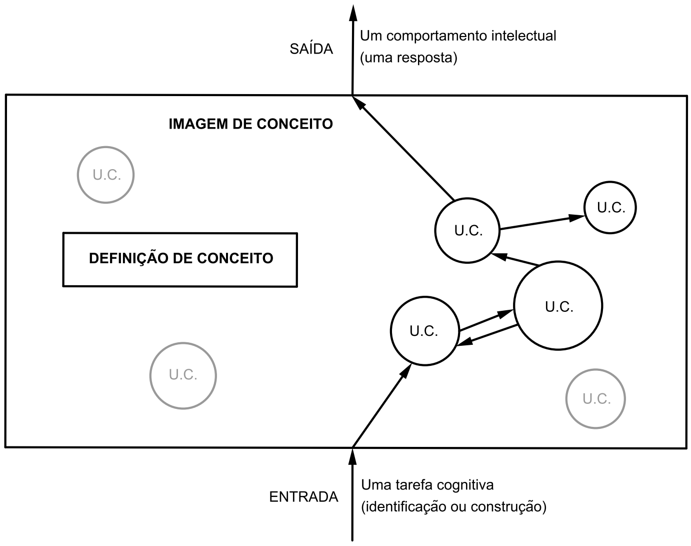


Figura 3: Pensamento intuitivo.

definição formal. O significado dos elementos deste diagrama é análogo aos do diagrama descrito anteriormente. Notemos que a única parte ativada da imagem de conceito é a definição de conceito. As outras partes são representadas por círculos em cinza claro e existe um retângulo externo à imagem de conceito (em tracejado) que representa a definição formal sem conexão relevante com a definição de conceito do indivíduo. Este tipo de pensamento – digamos *pseudo-formal* – também não é desejável porque ele, além de não usar os demais elementos da imagem de conceito, sequer é coerente com a definição formal. Por exemplo, se um estudante define limite de uma seqüência como um número para o qual os elementos de uma dada seqüência se aproximam cada vez mais, porém nunca o alcançam, ele pode, por este raciocínio, achar que qualquer seqüência constante não tem um limite. Vemos que, neste caso, este estudante possui uma definição de conceito para limite de seqüências, que é ativada na imagem de conceito quando se faz necessária, mas que não é consistente com a definição formal.

Vejamos agora na figura 5, um diagrama análogo ao anterior, mas desta vez onde a definição de conceito do estudante é coerente com a definição formal porque foi enriquecida por ela, daí o sentido "para dentro" da seta. Apesar disso, a definição de conceito não interage com as outras partes da imagem de conceito e o pensamento do indivíduo fica restrito à estrutura meramente formal, logo, nem as unidades cognitivas nem a própria definição de conceito têm oportunidade de se modificar e, assim, desenvolver a imagem de conceito.

Há ainda um outro tipo possível de estrutura de pensamento, rico em conexões, no qual

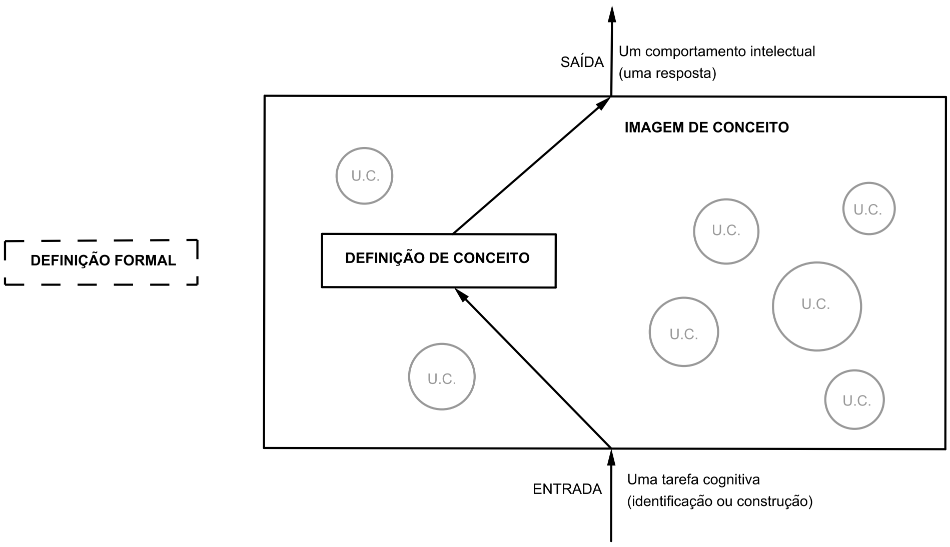


Figura 4: Pensamento *pseudo-formal*.

todos os elementos da imagem de conceito se associam, inclusive a definição de conceito, porém não sendo esta coerente com a definição formal. Este caso, ilustrado na figura 6, também não representa o ideal, pois, apesar de ser rico em conexões e ter características positivas do pensamento intuitivo e do formal, não é consistente matematicamente e, assim, certamente produz idéias equivocadas. Neste tipo de pensamento, o sujeito pode ter muitas elucubrações, mas muitas delas sem consistência.

Segundo Vinner (1991), principalmente em contextos mais avançados da Matemática, definições certamente ajudam na formação da imagem de conceito, cumprindo papéis extremamente importantes, sobretudo, durante a realização de alguma tarefa. Elas têm o potencial de nos salvar de muitas armadilhas criadas pela imagem de conceito, isto é, algumas vezes, as definições (coerentes com a definição formal) nos previnem de erros. Por exemplo, em um primeiro momento, um estudante pode achar que funções do 1º grau não possuem assíntotas, mas, após consultar a definição formal de assíntotas, ele poderá ver que o próprio gráfico da referida função é a assíntota procurada.

Neste caso, o estudante provavelmente recorre inicialmente ao repertório de exemplos de assíntotas contido em sua imagem de conceito e, não conseguindo encontrar um que se relacione com alguma função do 1º grau, pensa na inexistência delas, mesmo porque, normalmente não se estuda este tipo de caso tão simples. Porém, ao consultar a definição formal, ele é salvo de cometer o erro.

Podemos perceber que há alguns aspectos relacionados a um conceito que podem fugir à nossa intuição. Só a definição formal abrange todos os detalhes relacionados

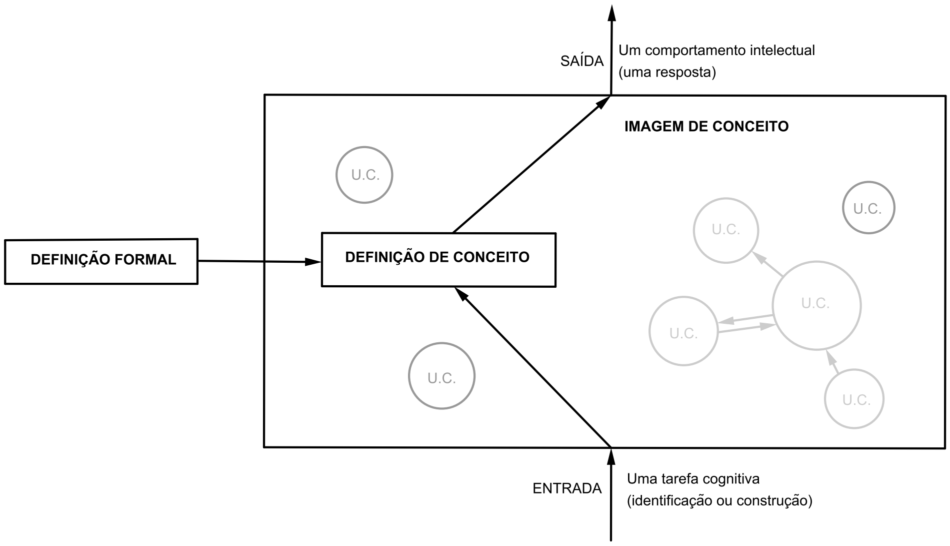


Figura 5: Pensamento meramente formal.

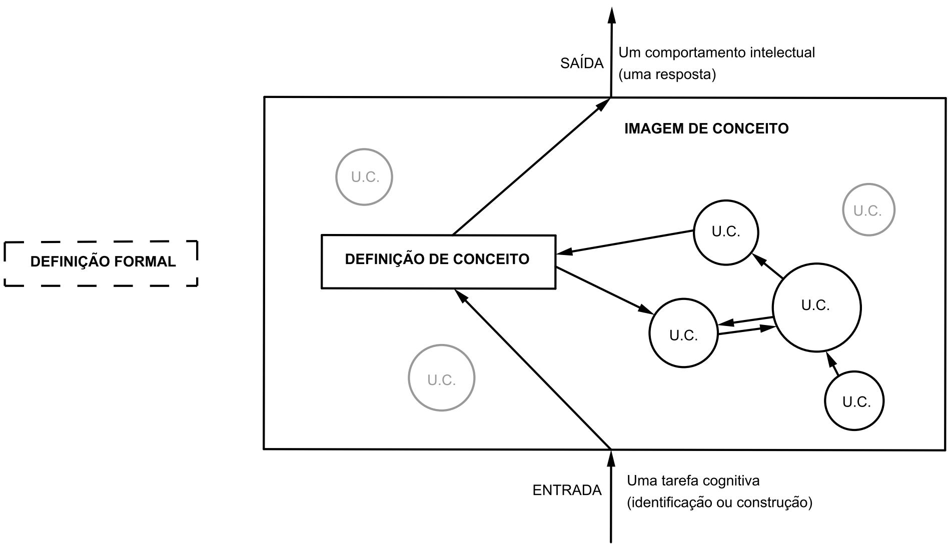


Figura 6: Pensamento intuitivo-pseudo-formal.

a ele, mas nossa mente, em geral, não consegue compreender tudo sem antes explorar exemplos ou realizar tarefas relacionadas com o conceito. Portanto, ao mesmo tempo que as definições formais são fundamentais para o desenvolvimento da Matemática, elas muitas vezes parecem representar um obstáculo para a aprendizagem se forem mal contextualizadas. Por isso, quando um indivíduo forma definições de conceito, na verdade ele está se aproximando aos poucos de compreender a definição formal. Assim, as definições de conceito, digamos "provisórias", o auxiliarão no desenvolvimento da imagem de conceito à medida que elas forem confrontadas tanto com o conjunto das demais unidades cognitivas (pensamento intuitivo) quanto com a própria definição formal. Entendemos este processo como uma espécie de retro-alimentação, pois não só a definição de conceito nos ajuda no enriquecimento da imagem de conceito, mas também porque ela própria é enriquecida pelo restante desta última. Assim, podemos caracterizar a importância de ter como objetivo uma definição de conceito cada vez mais consistente com a definição formal, uma vez que somente a sólida compreensão desta nos garante um pensamento mais abrangente e adequado sobre dado conceito, nos livrando de armadilhas.

Portanto, devemos desenvolver um tipo de pensamento que consiga reunir as características positivas de cada um dos apresentados até aqui, mas, é óbvio, que seja coerente com a Matemática. Na figura 7 podemos observar um diagrama representativo deste tipo de pensamento do qual falamos. Ele mostra as múltiplas conexões entre a definição de conceito e as outras unidades cognitivas frente à realização de uma tarefa seguida de uma resposta. A seta entre a definição de conceito e a definição formal (externa à imagem de conceito) representa a crescente consistência com o formalismo matemático.

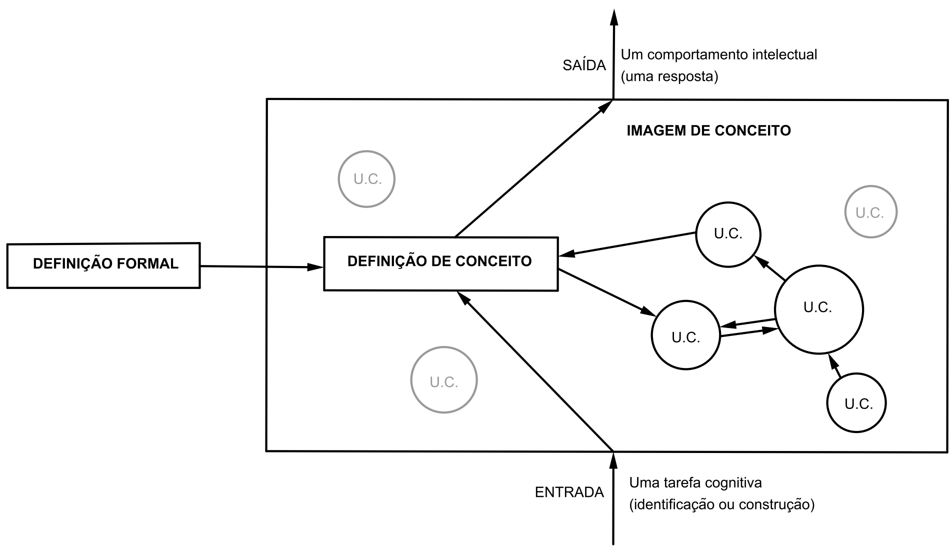


Figura 7: Tipo de pensamento desejável.

Para compreendermos melhor como ocorre este processo de enriquecimento da imagem de conceito, abordaremos os fatores de *conflito potencial* e fatores de *conflito cognitivo* e o papel fundamental das conexões entre as unidades cognitivas no confrontamento de idéias contraditórias presentes na imagem de conceito do indivíduo.

1.2 Conflitos potenciais e conflitos cognitivos

Como vimos, a definição de conceito nem sempre é coerente com a definição formal. Na verdade, segundo Tall e Vinner (1981), diversos outros atributos contidos na imagem de conceito não são sempre necessariamente coerentes entre si, isto é, a imagem de conceito não é necessariamente consistente em todas as fases de seu desenvolvimento, o que pode gerar conflitos. Originariamente, os autores definem *fator de conflito potencial* como uma parte da imagem de conceito (ou, em particular, da definição de conceito) que **pode** entrar em conflito com outras partes da imagem de conceito. Ainda segundo Tall e Vinner (1981), quando um *fator de conflito potencial* é evocado, isto é, quando as partes conflitantes da imagem de conceito são simultaneamente ativadas, dizemos se tratar de um *fator de conflito cognitivo*.

Por exemplo, uma noção muito comum observada por Tall (1989) entre os estudantes é a de que retas tangentes a gráficos cortam-nos somente uma vez. Sabemos que esta idéia é motivada pelos exemplos explorados por estes estudantes antes do estágio inicial de cálculo, quando, em geral, eles estudam retas tangentes a circunferências e esta afirmação é verdadeira, podendo ser generalizada apenas para curvas convexas.

Porém, quando o estudante se depara com situações mais gerais, como por exemplo, qualquer função polinomial do 1º grau, onde, na realidade, as retas tangentes são o próprio gráfico da função e, conseqüentemente, cortam-no em infinitos pontos. Dizemos que, neste momento, o *fator de conflito potencial* pode tornar-se um *fator de conflito cognitivo*, desde que o estudante perceba a contradição.

Tall e Vinner (1981) afirmam que a transformação de fatores de conflito potencial em fatores de conflito cognitivo pode ser um obstáculo para o desenvolvimento da imagem de conceito, mas eles também dizem que fatores de conflito potencial podem nunca ser evocados, permanecendo inativos dentro da imagem de conceito e, assim, nunca serem percebidos pelo indivíduo ou provocarem uma leve sensação de insegurança frente a algumas situações. Neste caso, o estudante tem a sensação de que algo está errado, mas não consegue identificar exatamente o quê. Isto pode causar sérios problemas na aprendizagem de Matemática.

Os autores também nos advertem para um tipo grave de fator de conflito cognitivo potencial, aquele diretamente ligado à definição de conceito. Neste caso, o estudante pode se tornar suficientemente seguro e, de acordo com o que já foi exposto neste texto, esquecer de ativar sua própria definição de conceito ou tê-la apenas memorizada. Isto com certeza impede o desenvolvimento formal do assunto, o que não é nada desejável nesta teoria, pois, como também vimos, não proporciona a construção de uma imagem de conceito consistente.

Vinner (1991) recomenda evitar conflitos cognitivos desnecessários, contudo, ele não os considera apenas nocivos à aprendizagem. Vinner também afirma que eles podem ser benéficos, mas devemos ter cuidado e somente iniciá-los aos estudantes quando forem necessários para motivar estes a alcançarem níveis de compreensão mais profundos ou, em particular, quando os estudantes forem candidatos a níveis mais avançados da Matemática.

Desta forma, podemos concluir que conflitos cognitivos podem ser aliados valiosos no processo ensino-aprendizagem de Matemática, bastando que saibamos o momento ou o contexto adequados de inserí-los na abordagem do tópico. Evitá-los deve ser apenas uma estratégia momentânea afim de não criar imagens de conceito distorcidas ou pobres no estudante. Evitá-los permanentemente significaria apenas facilitar o processo e não dar a oportunidade ao aluno de confrontar situações diversas, enriquecendo sua imagem de conceito.

Giraldo (2004) especifica ainda mais a noção descrita acima e define *conflito teórico-computacional* como qualquer situação onde uma representação computacional é contraditória, de alguma forma, ao modelo matemático correspondente. Por exemplo, na figura 8 podemos observar o gráfico da função de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ gerado pelo *software Geogebra* e verificamos que o *software* traça uma reta igual à reta correspondente ao gráfico da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + 1$, desconsiderando a ausência do ponto $(1, 2)$ no gráfico. Na figura 9, só conseguimos visualizar os eixos coordenados ao tentarmos observar o gráfico da função definida por $g(x) = \dfrac{1}{x}$ construído pelo mesmo *software* na janela $[-400, 400] \times [-400, 400]$. No primeiro exemplo, um estudante que analisasse somente a representação gráfica feita pelo computador poderia pensar que a função f é definida para todo número real e, ainda se observasse a fórmula, achar que a simplificação $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ é válida também para $x = 1$. No segundo exemplo, alguém poderia pensar que o *software* não traçou qualquer gráfico ou, se percebesse a sobreposição aos eixos, poderia achar que o gráfico possui bicos e dizer que a função não é derivável nestes pontos ou, ainda, dizer que tal relação não representa uma função devido à reta vertical formada sobreposta ao eixo y.

Giraldo (2004) diz que tais situações podem ser evidenciadas a partir do confronto de representações computacionais e não computacionais. No caso de funções, um tipo de confronto muito positivo está entre representações computacionais e algébricas. O autor

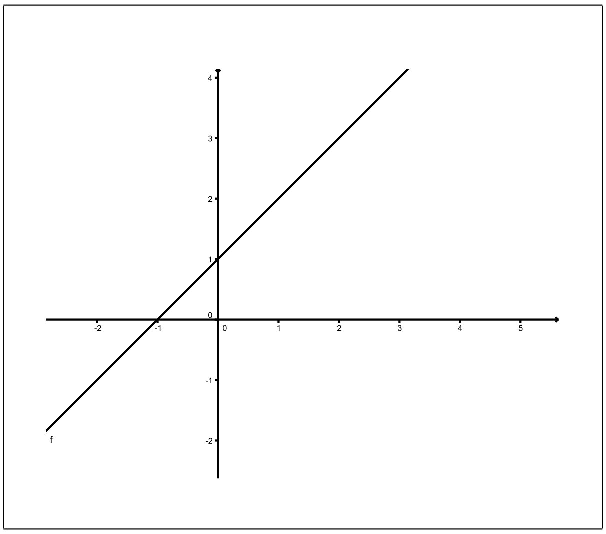


Figura 8: O gráfico de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ gerado pelo *Geogebra*.

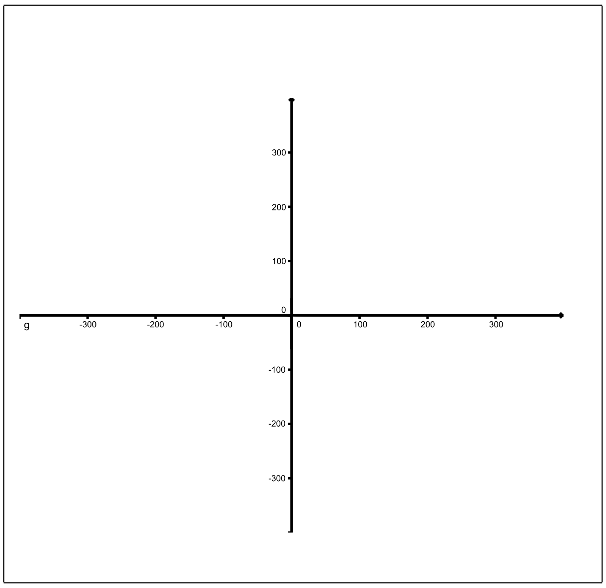


Figura 9: O gráfico de $g(x) = \dfrac{1}{x}$ na janela $[-400, 400] \times [-400, 400]$.

explora o conceito de conflito cognitivo como elemento enriquecedor no processo de aprendizagem de Matemática, a partir de diferentes tipos de representações do mesmo conceito, que possuem, cada uma delas, suas próprias limitações com relação à Matemática, mas que, ao serem confrontadas, se potencializam ajudando a construir imagens de conceito mais ricas. Este assunto será mais detalhadamente explicado na seção 1.5.

Até aqui percebemos dois impasses: (1) ao mesmo tempo que, em geral, o uso prematuro de definições em uma abordagem pode não ajudar na construção de imagens de conceito ricas, ignorá-las certamente também será nocivo para o processo ensino-aprendizagem; (2) da mesma forma, a aparição de conflitos cognitivos durante a abordagem pode ser prejudicial à aprendizagem, mas evitá-los permanentemente também não proporciona o desenvolvimento de uma imagem de conceito rica. Portanto, deveremos propor abordagens mais adequadas que consigam vencer estas dificuldades, isto é, em geral deveremos estudar estratégias de ensino, onde a compreensão das definições seja um objetivo da aprendizagem e não um ponto de partida e, também, onde conflitos cognitivos possam ser nossos aliados durante o processo de enriquecimento de imagens de conceito.

Na seção seguinte, estudaremos a teoria de raízes cognitivas proposta por David Tall, inicialmente criada como alternativa para o ensino de derivada. Ela se baseia em uma unidade cognitiva central que seja familiar ao estudante e que sirva como ponto de partida para o ensino de um conceito. No caso da abordagem para derivada, Tall utiliza a noção de *retidão local* como raiz cognitiva.

1.3 Raiz cognitiva e organizador genérico

Como vimos, segundo Vinner (1991), o uso prematuro de definições pode criar sérios problemas no aprendizado de Matemática e, ainda, elas representam, talvez, o principal conflito entre a estrutura da Matemática, pensada por matemáticos, e o processo cognitivo de aquisição de conceitos. A Matemática é baseada em uma teoria dedutiva e, como tal, começa com noções primárias e axiomas. A partir destes são construídas outras noções e todos os teoremas subseqüentes. Na verdade, isto não reflete necessariamente o processo a partir do qual a Matemática é criada, mas é a forma como ela é apresentada nos livros mais avançados e periódicos de Matemática. Embora o desenvolvimento do pensamento formal dedutivo seja um objetivo desejável do ensino de Matemática avançada, seguir meramente uma seqüência de axiomas, definições, teoremas e suas provas pode causar sérios problemas, pois não leva em conta os processos cognitivos comuns de aquisição de conceito e raciocínio lógico. Vinner (1991) afirma que a apresentação e a organização da Matemática em muitos textos e salas de aula são em parte baseadas nas seguintes hipóteses:

1. Conceitos são principalmente adquiridos a partir de suas definições.
2. Estudantes usarão definições para resolver problemas e provar teoremas quando necessário de um ponto de vista matemático.
3. Definições devem ser mínimas.

4. É desejado que definições sejam elegantes. Por exemplo, $|x| = \sqrt{x^2}$ é mais elegante que $|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$
5. Definições são arbitrárias. Definir em Matemática é *dar um nome.* (VINNER, 1991, p. 65, tradução nossa)

Em geral, isto não reflete o que realmente ocorre no contexto de sala de aula. Segundo Sierpinska (1992), é muito difícil alguém compreender um conceito matemático apenas através de sua definição. A autora afirma que é necessário ver exemplos e contra-exemplos do objeto definido, saber o que este objeto é ou não é, tomar consciência de suas relações com outros conceitos, perceber que tais relações são análogas às relações com que se é familiarizado, compreender a posição que o objeto definido tem dentro de uma teoria e quais são suas possíveis aplicações. Isto é, a compreensão adequada de uma definição formal muitas vezes demanda uma familiaridade prévia com o conceito e, ainda, uma imagem de conceito que contenha já algumas unidades cognitivas conectadas entre si.

Além disso, segundo Cornu (1991), quantificadores como $\forall$ ("para todo") e $\exists$ ("existe") muito comuns em definições com "epsilons e deltas" têm seus significados sutilmente diferentes das expressões usadas na linguagem do cotidiano e isto seria uma das causas das dificuldades encontradas pelos alunos em compreender a linguagem matemática formal. Portanto, devemos ter cuidado ao iniciar uma abordagem de qualquer tema da Matemática fortemente calcada na definição formal, principalmente com alunos ainda não habituados com esta linguagem. Vinner ratifica a necessidade deste cuidado que devemos ter na elaboração de uma abordagem pedagógica na seguinte frase:

> Quando decidirmos sobre a abordagem pedagógica do ensino de Matemática, teremos que levar em conta não somente a questão de como *esperamos* que os estudantes adquirem os conceitos matemáticos, mas também, e talvez principalmente, como os estudantes realmente adquirem estes conceitos. (VINNER, 1991, p. 67, tradução nossa)

Mais especificamente, no contexto do ensino de funções, Malik (1980) observa que, em muitos cursos de pré-cálculo, é apresentada a definição moderna de função, que usa linguagem de conjuntos. Apesar disto, os exemplos mostrados aos alunos são, em geral, de funções definidas por expressões algébricas e, conclui Malik, como a definição de função apresentada não é experimentada em toda a sua generalidade, ela perde o sentido para os estudantes, que passam a considerar a definição como algo sem significado e sem ligação com o conceito abordado.

Por outro lado, tentar simplificar a abordagem também pode ser prejudicial. Tall (1989) critica estratégias pedagógicas que, na tentativa de simplificar conteúdos, apresentam os conceitos matemáticos em contextos mais restritos do que aqueles nos quais os conceitos são inseridos de fato. Assim, o estudante pode reagir, desenvolvendo imagens de conceito restritas.

Em resposta aos problemas apontados até aqui, Tall (1989) pela primeira vez define o termo *raiz cognitiva* como um conceito âncora considerado de fácil compreensão pelo aluno e que ainda sirva como uma base sobre a qual uma teoria possa ser construída. Mais tarde, após a formulação da teoria de unidades cognitivas, a noção de raiz cognitiva é reformulada como um tipo especial de unidade cognitiva que, por ser familiar ao estudante, serve de ponte entre os conhecimentos anteriores e os iniciais do estudante e também entre estes e os conhecimentos a serem desenvolvidos.

Mais precisamente, Tall redefine:

> A noção de *raiz cognitiva* como uma unidade cognitiva que tem (potencialmente) significado para o estudante no estágio em questão, e ainda assim contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento teórico posterior. (TALL, 2000, p. 11, tradução nossa)

Portanto, esta reformulação da *raiz cognitiva* como uma unidade cognitiva especial implica o importante fato de ela própria ser parte interna da imagem de conceito, assim como qualquer outra unidade cognitiva. Em resumo, dizemos que a *raiz cognitiva* é uma unidade cognitiva central que possui as duas características específicas abaixo:

(I) A de ser familiar para os estudantes;

(II) Servir como base para o desenvolvimento teórico matemático posterior.

A partir destas idéias, podemos entender que, ao introduzirmos um conceito matemático novo baseados em uma raiz cognitiva, a imagem de conceito (nova) do estudante na verdade não está totalmente vazia. Na verdade, segundo Cornu (1991), o ensino da maioria dos conceitos matemáticos não se inicia em um território virgem. Evidentemente, então concebemos que o professor deve propor *a priori* uma idéia central para abordar um assunto, que neste momento é ainda externa à mente do sujeito, mas, caso ela lhe seja de fato *familiar*, ele a reconhece – neste momento sim a internaliza – e então, é ativada uma imagem (inicial) de conceito que possui interseções com imagens de conceito antigas. Este modelo pode ser ilustrado pelo diagrama da figura 10. Até este estágio, temos uma unidade cognitiva ativada e que é apenas, por enquanto, uma candidata à raiz cognitiva, pois não sabemos se ela vai servir como base para o desenvolvimento do conceito matemático. Por exemplo, quando geralmente abordamos funções polinomiais do 1º grau, esperamos que os estudantes achem familiar o gráfico desta função, já que o conceito de reta está presente na grade curricular de anos anteriores. Se o estudante, de fato, a reconhece como algo familiar, significa que o conceito de reta é uma unidade cognitiva presente tanto na imagem de conceito de função polinomial do 1º grau quanto em outras imagens de conceito antigas referentes a tópicos de Geometria.

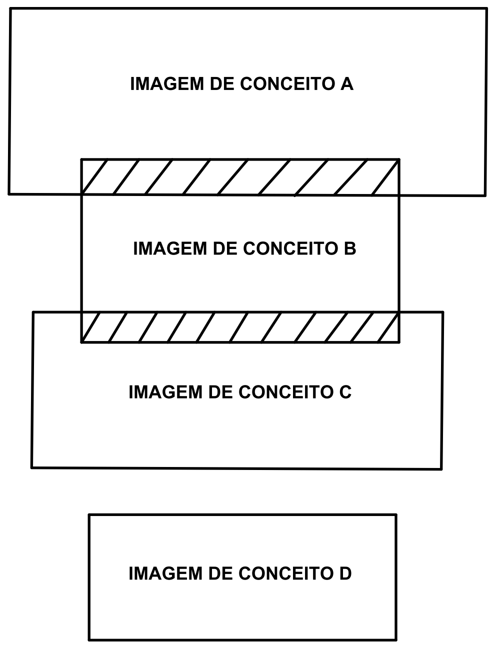


Figura 10: Interseções entre imagens de diferentes conceitos de um mesmo indivíduo.

Podemos caracterizar a candidata à raiz cognitiva como tal, se for confirmada a presença da segunda característica e, neste caso, em um primeiro momento teremos uma imagem (inicial) de conceito, onde a raiz cognitiva (em potencial) é a única unidade cognitiva ativada conforme o diagrama da figura 11. Em um segundo momento, após explorar o conceito tendo a raiz cognitiva como base, o indivíduo é capaz de tirar suas próprias conclusões a respeito do tópico, seja fazendo conexões com unidades cognitivas pertencentes a imagens de conceito anteriores seja, quem sabe, produzindo novas. Este modelo é ilustrado pelo diagrama da figura 12 e representa o enriquecimento da imagem de conceito a partir de uma raiz cognitiva.

Na verdade, antes mesmo da noção de *raiz cognitiva*, Tall desenvolve uma outra noção muito importante para sua teoria, a noção de *organizador genérico*, que é fortemente baseada na noção de *organizador avançado* desenvolvida por Ausubel, Novak e Hanesian (1968). Esta é definida como um conjunto de material introdutório para uma tarefa de aprendizagem, apresentado num nível de generalidade e abstração mais elevado que a

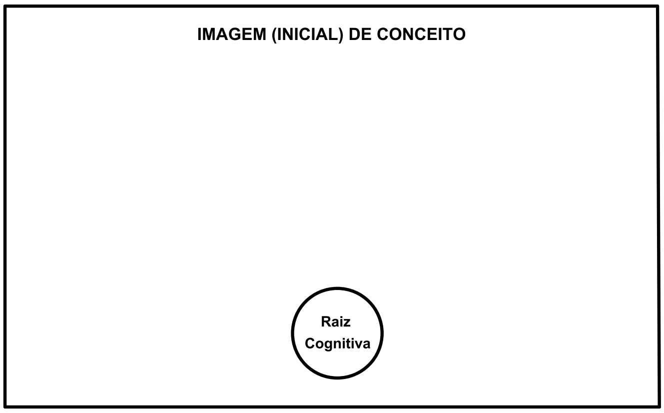


Figura 11: Momento de ativação de uma raiz cognitiva em potencial.

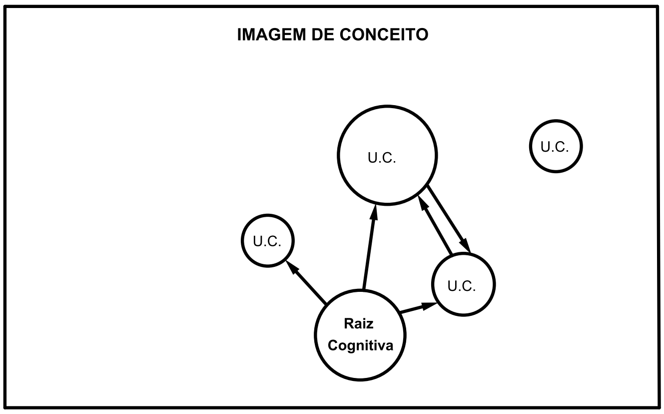


Figura 12: Crescimento cognitivo baseado em uma raiz cognitiva.

própria tarefa e explicitamente relacionado tanto com as idéias existentes na estrutura cognitiva do sujeito quanto com a tarefa; isto é, uma ligação entre o que o sujeito já sabe e o que ele precisa saber para compreender melhor o assunto. Então, inicialmente como um complemento para a noção de *organizador avançado*, Tall formula pela primeira vez em sua tese de doutorado (TALL, 1986) a noção de *organizador genérico* como um ambiente de aprendizagem (ou micromundo) que permita ao usuário manipular exemplos e (se possível) *não-exemplos* de um conceito matemático específico ou um sistema de conceitos relacionados. O autor justifica o termo *genérico*, dizendo que este significa o objetivo de direcionar a atenção do usuário para certos aspectos mais abstratos e gerais do conceito durante a exploração dos exemplos.

Organizadores genéricos podem ser materiais concretos usados no ensino da matemática para crianças, como também, programas ou ambientes computacionais que forneçam respostas às explorações do usuário. Neste caso, para o estudo de cálculo, há *softwares* capazes de ampliar curvas diferenciáveis, tornando-as localmente semelhantes a retas ou de calcular numericamente áreas de regiões limitadas por gráficos de funções.

No uso de organizadores genéricos, Tall também destaca o que ele chama de *não-exemplos*, isto é, exemplos de objetos matemáticos que não possuem os atributos pertencentes ao conceito estudado. Por exemplo, ao introduzirmos o conceito de função injetiva, é usual darmos exemplos de funções não-injetivas para esclarecer ao estudante que funções injetivas não podem admitir dois elementos distintos de seu domínio com mesma imagem. O autor afirma que *não-exemplos* são muito importantes no estudo de conceitos mais avançados da Matemática, como convergência, continuidade e diferenciabilidade, onde as definições são intrincadas a tal ponto que os estudantes acabam por ter dificuldade em lidar com situações nas quais elas não se aplicam, como por exemplo, saber quando uma função é descontínua ou quando não é diferenciável. Em contextos mais simples, não-exemplos são menos relevantes.

Tall considera que o uso de organizadores genéricos é mais eficiente quando os estudantes têm uma ajuda humana, como a de um tipo de tutor que pode ser, em geral, um professor ou um monitor, ou ainda uma ajuda não humana, como a de algum tipo de tutorial *multi-mídia*. O autor chama este tipo de auxílio de *agente organizador*. A combinação de um *organizador genérico* com um *agente organizador* é definida como um *sistema organizacional genérico*.

Em trabalhos posteriores (TALL, 1989, 2000), Tall reavalia a noção de organizador genérico e afirma que em toda abordagem pedagógica relacionada a algum conceito matemático, onde esta noção seja explorada, devem necessariamente estar presentes diferentes formas de representação, tendo como referência uma unidade cognitiva central, a *raiz cognitiva*. Tall cita as noções de *área sob a curva* (para o ensino do conceito de integral) e de *retidão local*[2] (para o ensino do conceito de derivada) como exemplos importantes de raízes cognitivas fruto de suas próprias pesquisas. Esta última tem grande importância neste trabalho e foi a base para o organizador genérico *Magnify* explorado pelo autor em sua tese de doutorado (TALL, 1986), e será explicada na próxima seção.

Tall (2000, p. 14, tradução nossa) ainda espera que: "todos os organizadores genéricos 'contenham as sementes de sua própria destruição' no sentido de que eles sejam suficientemente sofisticados para mostrar suas próprias limitações e a necessidade de uma abordagem teórica mais profunda". Isto é, o autor não espera que um organizador genérico (aliado à raiz cognitiva) responda a todas as perguntas e, assim, substitua a teoria ma-

[2]Do original em inglês, *local straightness*.

temática, sendo um mero facilitador da aprendizagem, mas sim que seja *a priori* um suporte (muitas vezes visual) para o desenvolvimento de uma raiz cognitiva e, posteriormente com um pouco de imaginação do estudante, sirva de estímulo para o aprofundamento teórico das idéias construídas.

1.4 Retidão Local

Em geral, na abordagem do conceito de derivada, encontramos a seguinte definição: *a derivada de uma função f em um ponto x_0 é o limite da razão* $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *quando h tende a zero.* Todavia, de acordo com o que já foi discutido em seções anteriores, de forma geral, não é adequado iniciarmos uma abordagem de um conceito fortemente baseada em sua definição formal.

Além disso, mais especificamente, a definição de derivada depende da definição de limite e diversos autores (MALIK, 1980; TALL; VINNER, 1981; TALL, 1986; CORNU, 1991; SIERPINSKA; LERMAN, 1996) argumentam que esta noção, em toda a sua profundidade formal, é de assimilação consideravelmente difícil para estudantes principiantes em cálculo, pois se revela profundamente contrária à intuição humana, como evidencia sua própria evolução histórica (ver seção 1.7). Em resultado, estudantes podem formar uma imagem distorcida da noção de limite, que se constitui em um fator de conflito potencial para a aprendizagem de diversos conceitos do cálculo, entre eles, o conceito de derivada. Logo, em muitos casos, principalmente durante o estágio definido por Tall (1992) como *a transição para o pensamento matemático avançado*, a definição de derivada não constitui uma raiz cognitiva, pois não satisfaz a característica (I) explicada na seção 1.3, embora com certeza ela satisfaça a segunda característica.

Outra característica da abordagem tradicional de derivada é a interpretação geométrica que geralmente acompanha a definição: *derivada é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f em x_0*. A partir daí, o conceito é ilustrado por retas secantes que tendem a uma reta tangente à medida em que h tende a zero. Giraldo (2004) acrescenta que, embora encontrar retas tangentes seja, do ponto de vista matemático, um problema de derivada, portanto de natureza puramente local, sua representação geométrica chama atenção para aspectos não locais. Uma reta tangente pode seccionar a curva uma segunda vez, sendo neste caso, também secante à curva. Assim, retas tangentes e secantes não se distinguem geometricamente e a propriedade essencial de aproximação na vizinhança do ponto de tangência fica pouco evidenciada. Uma outra dificuldade deste tipo de interpretação geométrica reside no fato de que a própria definição de reta tangente[3] depende da definição de derivada. Logo, neste caso, estaríamos tentando explicar um conceito novo a partir de outro conceito na verdade desconhecido do estudante, ou pelo menos, conhecido apenas no contexto de curvas convexas.

Por estas razões, podemos concluir que a abordagem usual do conceito de derivada não tem sido adequada, seja por estar fortemente baseada na definição formal, que depende do conceito de limite (também mal construído nas imagens de conceito dos estudantes), seja pela sua interpretação geométrica carregada de fatores de conflito em potencial desnecessários.

Portanto, com o intuito de mudar este quadro, colocando a conceituação formal como um objetivo no desenvolvimento cognitivo dos estudantes – e não como um ponto de partida conforme o encadeamento formal da teoria matemática – e sugerindo uma interpretação geométrica mais adequada para o estágio em questão, Tall (1986) desenvolve uma nova proposta para a abordagem inicial do conceito de derivada, baseada no processo de magnificação local e na idéia de retidão local como raiz cognitiva. Com o auxílio de um organizador genérico, o processo de *magnificação local* consiste em dar *zooms* gradativos na vizinhança de um determinado ponto do gráfico. O organizador genérico pode ser qualquer ambiente computacional capaz de construir gráficos de funções em diversas janelas diferentes. Em sua tese de doutorado, Tall (1986) usa o *software Magnify* de construção de gráficos para o estudo de cálculo. Para ilustrar este método, vemos na figura 13 o processo de magnificação local da função $f(x) = x^2$ em torno de $x_0 = 2$ (aqui gerados pelo Maple V).

À medida em que as curvas diferenciáveis são magnificadas em torno de um ponto do gráfico, o estudante pode observar a curvatura da representação gráfica diminuir e perceber cada vez mais a sua semelhança com uma reta. Esta noção, Tall (1986) denomina de *retidão local*. Segundo o autor (TALL, 1989, 1992, 2000), é preciso ressaltar que a noção de *retidão local* é uma percepção humana primitiva de aspectos visuais do gráfico, pois o usuário pode *sentir* e *ver* a mudança do gradiente ao longo do gráfico. Afinal, o ser humano tem a capacidade de perceber certas curvas como retas quando vistas de grande distâncias. Por exemplo, quando observamos o horizonte, vemos uma linha reta, ao passo que, de fato, sabemos ser esta linha uma curva. É óbvio que há outra questão: o computador traça um número finito de pontos do gráfico e, então, o que visualizamos

[3]**Definição de reta tangente:** Sejam I um intervalo não trivial e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua em $x \in I$. A reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$ é: a reta que passa por $(x_0, f(x_0))$ cuja inclinação é $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, caso este limite exista, ou a reta vertical $x = x_0$, caso $\lim_{x \to x_0} \left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| = +\infty$.

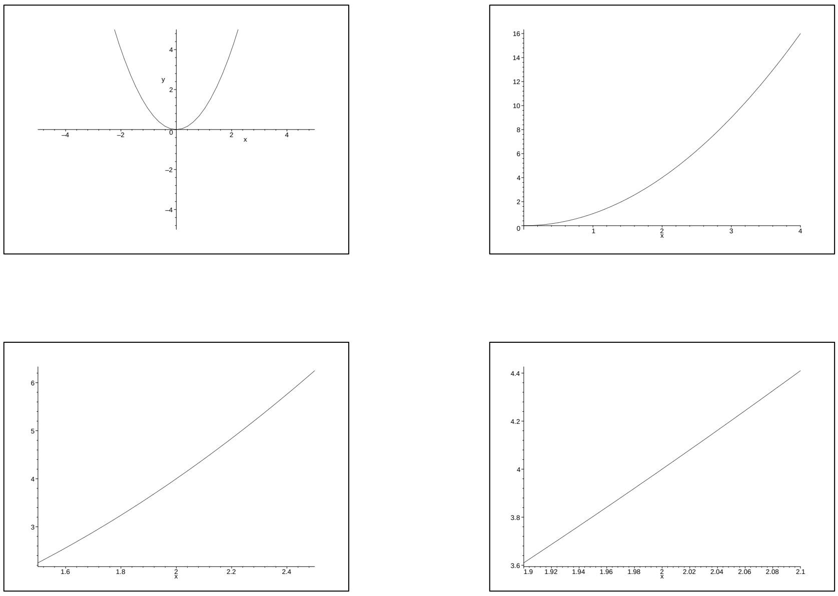


Figura 13: Processo de magnificação local da função $f(x) = x^2$ na vizinhança do ponto $x_0 = 2$.

na tela não necessariamente reflete a representação exata do gráfico da função, mas sim uma aproximação dele. Mas, sem perda de rigor, podemos supor que, mesmo se exitisse uma máquina capaz de construir gráficos com todos os seus infinitos pontos, o ser humano continuaria a observar curvas diferenciáveis tornarem-se parecidas com retas após sucessivas magnificações, o que caracterizaria a noção de *retidão local* como uma percepção humana.

Na abordagem sugerida por Tall, após experimentar o processo de magnificação local e ver as curvas ficarem semelhantes a retas, o estudante é apresentado ao conceito de derivada como sendo a inclinação da reta com a qual o gráfico da função ficou parecido. Assim, a interpretação geométrica para derivada é mostrada como um atributo do próprio gráfico analisado e não como uma propriedade de um objeto externo a ele. Desta forma, tem-se um enfoque maior nos aspectos locais do gráfico, sem chamar a atenção do indivíduo para aspectos não locais conforme usualmente ocorre na abordagem tradicional. Além deste aspecto, não é mais necessário recorrer ao conceito de reta tangente, que é ainda conhecido em um contexto restrito pelo estudante e que não se generaliza. Aliás, após o processo reverso de magnificação local, isto é, após sucessivas reduções das janelas, é possível usar o organizador genérico para auxiliar na compreensão do conceito de reta tangente como será explicado mais adiante.

Além disso, neste tipo de abordagem não tomamos mais a definição formal como ponto de partida para o desenvolvimento do conceito de derivada. Já discutimos ser o uso de definições formais em geral inadequado em abordagens iniciais, sobretudo neste caso em que a definição é tão dependente do conceito de limite, que é considerado bastante difícil de ser assimilado pelos estudantes. Inicialmente em contra-partida, a noção de retidão local poderia inclusive ajudar na compreensão deste conceito.

Há outro fator importante da proposta. De acordo com a definição de organizador genérico, no contexto de Matemática mais avançada, devemos usá-lo para também apresentar ao estudante os *não exemplos*, isto é, no caso deste organizador genérico devemos explorar os exemplos de funções não diferenciáveis, sejam elas mais simples como aquelas cujos gráficos possuem um número finito de "bicos"(funções do tipo $f(x) = |x|$), sejam funções cujos gráficos seriam impossíveis de serem esboçados sem um auxílio tecnológico, como a função *blancmange*[4]. A figura 14 mostra o processo de magnificação local desta função realizado pelo *Magnify* na vizinhança do ponto $x_0 = 1/3$ – o mesmo *software* usado por Tall (1986) – e podemos observar que neste exemplo, ao contrário do que ocorre com funções diferenciáveis, a curva nunca fica semelhante a uma reta, mas ela parece estar sempre "enrugada". Desta forma, o organizador genérico cumpre também o papel de mostrar o que pode ocorrer quando uma função não é diferenciável. Para casos como este, segundo Tall, é fundamental a presença de um agente organizador, como um tutor ou professor, que auxilie o estudante na percepção e reflexão de muitas das poderosas e refinadas idéias que podem surgir como conseqüência do conceito.

Enfim, Tall (2000) afirma que a noção de retidão local se caracteriza como uma raiz cognitiva para o ensino de derivada, pois ela se revela familiar para os estudantes no estágio inicial de cálculo e possibilita expansões cognitivas do conceito de derivada, que deverão conduzir à aquisição de sua definição formal e à construção de conexões com diferentes tópicos relacionados.

A seguir, discutiremos a importância da exploração da raiz cognitiva como base para

---

[4]A função *blancmange* pode ser definida para $x \in [-1, 1]$ pela soma da série $b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(x)$, onde $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de funções modulares definidas pela recorrência:

$$b_1(x) = 1 - |x|$$

$$b_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} - \left| b_n(x) - \frac{1}{2^n} \right|$$

Esta função é contínua, pois é o limite de uma série de funções contínuas, mas não é derivável em nenhum ponto. A demonstração deste fato pode ser examinada em Tall (1982).

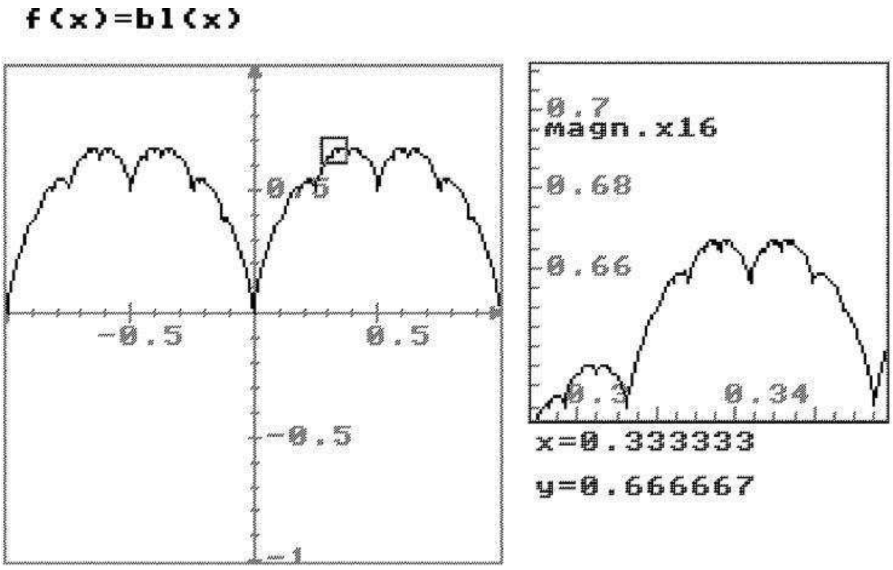


Figura 14: Processo de magnificação local da função *blancmange* – a função não é diferenciável em nenhum ponto.

uma abordagem, mas também de desenvolver um tipo de abordagem onde múltiplas representações de um mesmo objeto matemático possam ser exploradas ao mesmo tempo para que as limitações de cada uma possam ser confrontadas e, assim, serem revertidas em ganhos para a aprendizagem. Particularmente, Hillel (1995) acredita que a combinação de experiências tecnológicas com outras atividades, não computacionais, se completam e formam um contexto apropriado para a construção dos conceitos matemáticos. Na próxima seção, estas questões serão discutidas, pois elas terão um papel relevante dentro da proposta desta pesquisa.

1.5 Descrições de conceito e uma proposta para o ensino do conceito de derivada baseada na noção de retidão local

Giraldo (2004) define *descrição de conceito* como qualquer referência a um conceito matemático, feita em um contexto pedagógico, que não esgote o conceito a que se refere, ou seja, que guarde limitações em relação a este, no sentido em que evidencie certos aspectos e omita outros. Portanto, descrições podem ser referências orais ou escritas, sob a forma de linguagem corrente, simbologia, notação matemática, esboços, diagramas, esquemas, e outros.

As limitações presentes em toda *descrição de conceito* são, no sentido de Giraldo

(2004), todo o conjunto de características ou propriedades do conceito descrito que são evidenciadas ou omitidas no ato de descrever, bem como eventuais diferenças em relação a outras descrições ou à própria definição formal. O autor ressalta que uma *descrição de conceito* é uma situação pedagógica e, sendo assim, suas limitações não são atributos inerentes à forma de representação utilizada, mas dependem do próprio contexto pedagógico em questão. O autor ainda exemplifica que, ao enunciarmos a frase "a função x^2", temos um caso de descrição da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada x real associa seu quadrado. Note que a mesma frase serve para descrever outra função com a mesma lei de formação, por exemplo, a função $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$, o que nos leva a perceber a limitação desta descrição. Neste caso, evidenciamos o aspecto algébrico da função, mas omitimos outros, como o aspecto gráfico.

Em resumo, podemos dizer que a *descrição de conceito* é a exteriorização de uma parte da imagem de conceito, seja por meio de palavras, seja por meio de algum desenho ou seja por meio de qualquer outra forma de comunicação (ou representação).

No caso do ensino de funções, usualmente empregam-se representações (escritas) de três naturezas principais: numéricas (tabelas), algébricas (fórmulas) e geométricas (gráficos) (GIRALDO, 2004; SIERPINSKA, 1992). Cada uma destas formas de representar funções é, de acordo com Giraldo (2004), uma descrição do conceito de função e isoladamente é limitada na medida em que evidencia certos aspectos, mas omite outros. Contudo, estas limitações não são necessariamente negativas, na verdade, se exploradas devidamente, podem ser fortes aliadas da aprendizagem. Segundo Sierpinska (1992), a consciência das limitações de cada uma das representações e do fato que todas representam o mesmo conceito geral único são certamente condições fundamentais para se compreender funções.

De forma geral, as limitações de cada descrição podem gerar conflitos cognitivos, que, por sua vez, podem causar diferentes tipos de reações ao indivíduo, positivas ou negativas. O sujeito pode ficar confuso e não esclarecer sua questão, como também pode se sentir estimulado a buscar uma resposta e isto ajudá-lo a desenvolver sua imagem de conceito. Acreditamos que é possível transformar as limitações de cada representação em ganhos para a aprendizagem, desde que elas sejam exploradas em conjunto.

Vários autores chamam atenção para a importância da multiplicidade de representações para a aprendizagem de um conceito. Duval (1999) afirma que um componente essencial da aprendizagem de matemática é a coordenação de diferentes representações de uma idéia ou conceito. Goldenberg (1987) comenta que, embora a multiplicidade de representações possa propiciar uma compreensão mais ampla do conceito, o estabelecimento das condições sob as quais tal objetivo pode ser atingido demanda pesquisa cuidadosa. Como vimos, Tall (2000), ao definir imagem de conceito, também nos diz que em toda abordagem pedagógica relacionada a qualquer conceito matemático devem necessariamente estar presentes diferentes formas de representação. Assim, acreditamos que, apesar de existirem limitações em qualquer tipo de representação, as descrições quando exploradas simultaneamente em uma abordagem bem estruturada se potencializam, enriquecendo o conceito.

Baseados nestas idéias, Giraldo e Carvalho (2003, 2004) desenvolvem uma proposta para o ensino do conceito de derivada, estruturada em cinco etapas, que foi aplicada em turmas de cálculo I. Em cada etapa, uma forma particular de descrição é usada e as respectivas limitações associadas são exploradas como motivação para a etapa seguinte. O conceito de derivada é abordado a partir da noção de retidão local proposta por Tall como uma raiz cognitiva para este conceito (já descrita na seção 1.4) e, portanto, adequada em estágios iniciais de cálculo por ser familiar ao estudante. Esta proposta será descrita abaixo:

Etapa I: aproximação numérica

Nesta primeira etapa, é pedido aos estudantes que utilizem o computador para construírem gráficos de funções diferenciáveis dadas e, em seguida, utilizem pela primeira vez o processo de magnificação local para observarem o comportamento dessas funções na vizinhança de pontos fixos sobre os gráficos. Os alunos, então, observam que as curvas se tornam muito semelhantes a retas. Logo em seguida, é pedido que os alunos substituam valores para o cálculo aproximado da inclinação das retas observadas através da fórmula usual $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Apesar dos valores encontrados serem aproximações, algumas vezes ocorre destes valores coincidirem com os valores exatos da derivada devido a erros de visualização e arredondamento. Todos estes fatos são destacados durante as aulas, e, principalmente, o fato de que a curva não se transforma na reta, mas que se trata apenas de uma *aproximação*. Esta experiência é repetida com a mesma curva em vários pontos diferentes e também com outras curvas. A observação de que os resultados obtidos nesta etapa se tratam de aproximações causadas por erros de arredondamento do programa utilizado para visualização gráfica é usada como motivação para a próxima etapa.

Etapa II: aproximação algébrica

Vamos considerar a equação da reta sendo $y = ax + b$, onde a e b são constantes reais e representam respectivamente a inclinação e o coeficiente linear da reta. O aluno no início desta etapa tem como referência a visualização da curva $y = f(x)$ magnificada na tela. Depois é pedido ao estudante que encontre algebricamente o valor de a da equação da reta que melhor aproxima a curva na vizinhança de um ponto x_0 fixado. Isto é, aqui outro tipo de aproximação é pedida por meio de manipulações algébricas, algo na forma: $f(x_0 + h) \approx ah + f(x_0)$.

O valor a é apresentado como o valor da derivada de f no ponto x_0. Para ilustrar, podemos dizer que para encontrar a derivada da função $f(x) = x^2$ em $x_0 = 3$ podemos calcular:

$$f(3 + h) = (3 + h)^2 = 9 + 6h + h^2 \approx 9 + 6h$$

Portanto, o valor procurado é $a = 6$. Como h é um valor positivo muito pequeno, isto é, próximo de zero, o seu quadrado é muito menor. Nesta etapa, então, são desprezadas todas as potências de h de grau igual ou superior a 2. Cabe aqui a discussão do por quê deste tipo de aproximação. A primeira justificativa apresentada é o fato de estarmos procurando uma aproximação por meio de uma reta, o que, segundo Giraldo, abre caminho para o aprofundamento da compreensão do significado matemático preciso do tipo de aproximação que está sendo feita.

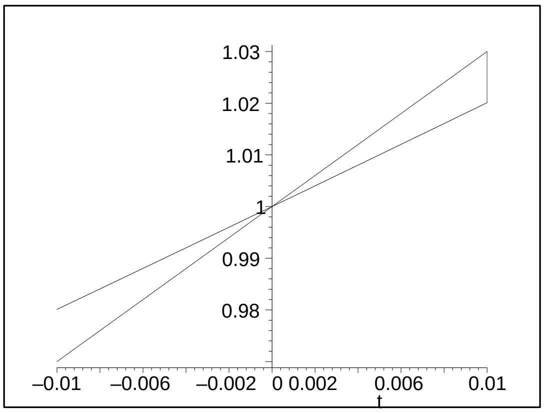
De forma análoga à etapa anterior, a experiência é repetida várias vezes em diversos pontos e curvas diferentes. Neste ponto, são introduzidas as expressões para a inclinação da reta procurada em um ponto x_0 e, assim, são apresentadas as primeiras fórmulas de derivação para polinômios.

Etapa III: discriminação geométrica

Depois de calculado o valor a da fórmula da reta que melhor aproxima a curva localmente, é solicitado que os alunos tracem o gráfico da reta na mesma janela gráfica magnificada da função estudada. Em princípio, nesta janela a curva e a reta se confundem visualmente, mas posteriormente é pedido que ampliem gradativamente a janela gráfica até observarem a distinção entre a curva e a reta.

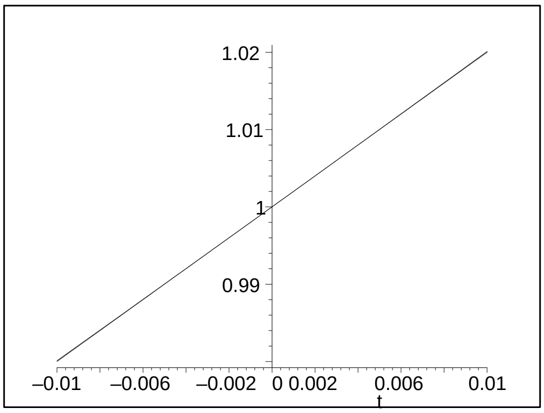
Nas etapas anteriores, era sugerida a existência de uma reta que melhor aproximava a curva localmente e cuja fórmula foi calculada por aproximações algébrica e numérica. Nesta etapa, pela primeira vez tal reta é apresentada como um objeto matemático distinto da curva em questão e cuja existência é verificada geometricamente.

Etapa IV: conceituação



$$h = 0.01 \qquad \rho(h) = 0.0099 \qquad \frac{\rho(h)}{h} = 0.99$$

Figura 15: O Melhor Reta para $f(x) = x^2$ aproximada pela reta com $a = 3$ em $x_0 = 1$.



$$h = 0.01 \qquad \rho(h) = 0.0001 \qquad \frac{\rho(h)}{h} = 0.01$$

Figura 16: O Melhor Reta para $f(x) = x^2$ aproximada pela reta com $a = 2$ em $x_0 = 1$.

O objetivo principal desta etapa é conceituar matematicamente a idéia de *aproximação* introduzida nas etapas anteriores de diversos pontos de vista (numérico, algébrico e geométrico) através do organizador genérico *Melhor reta* desenvolvido por Giraldo e Carvalho. Ele consiste de uma rotina do *Maple*, com os seguintes dados de entrada: uma função f, um ponto x_0 no domínio de f, um valor numérico para a inclinação de uma reta passando pelo ponto $(x_0, f(x_0))$, e um valor numérico para $h = \Delta x$; e dados de saída: os gráficos de $y = f(x)$ e da reta $r(x) = ah + f(x_0)$ traçados no intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, os valores numéricos da variação $\rho(h) = |f(x+h) - r(x)|$ e da razão incremental $\dfrac{\rho(h)}{h}$, e um segmento vertical ligando a curva à reta no ponto $x_0 + h$ representando a diferença $\rho(h)$. Aqui, a idéia central é comparar gráfica e algebricamente o comportamento local da reta r em relação à curva para valores $a = f'(x_0)$ e $a \neq f'(x_0)$, isto é, para retas tangentes e não tangentes. Na figura 15, observemos a função $f(x) = x^2$ na vizinhança do ponto $x_0 = 1$ sendo aproximada pela reta onde $a = 3$. Na figura 16 temos a mesma função aproximada pela reta onde $a = 2$.

Assim, podemos dizer que a reta cuja fórmula $r(x)$ zera a razão $\dfrac{\rho(h)}{h}$ quando h tende a zero, dentre todas as retas que cortam a curva dada em $(x_0, f(x_0))$, é *aquela que melhor aproxima a curva na vizinhança do ponto.* Neste momento, o aluno pode verificar a unicidade de tal reta por um argumento algébrico simples.

Etapa V: formalização

Devemos observar que esta etapa é posterior ao curso de Cálculo. Nela, a definição de derivada em linguagem formal de epsilons e deltas é introduzida. As aproximações exploradas nas etapas anteriores servem para discutir que a idéia de *se aproximar indefinidamente* como se refere o conceito de limite escapa de qualquer precisão finita.

Neste momento, é dito que *a é a derivada de f em* x_0 se, dada uma precisão $\varepsilon > 0$ arbitrária, conseguimos escolher uma variação $\delta > 0$ tal que $\left|\dfrac{\rho(h)}{h}\right| < \varepsilon$, $\forall h \in [-\delta, \delta]$, com $h \neq 0$. Ou, de outra forma:

$$\left|\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - a\right| < \varepsilon,\ \forall h \in [-h, h]\ ,\ h \neq 0$$

Giraldo ressalta que o objetivo desta etapa é dar uma introdução para a linguagem formal de limites para uma primeira familiarização. Não se espera neste estágio que os alunos operem simbólica e logicamente com a definição formal, nem compreendam-na em toda sua profundidade.

1.6 O uso de computadores no ensino de Matemática

Muitos autores (ABRAHÃO, 1998; DUBINSKY; TALL, 1991; GIRALDO, 2004; HODGSON, 1987; TALL, 2000; YERUSHALMY, 1997) supõem que o sucesso do uso da máquina no ensino de Matemática está relacionado com a utilização de propostas conceituais explícitas apoiadas em pesquisas empíricas sobre o assunto. Acrescentar o seu uso no currículo simplesmente sem um objetivo específico evidentemente pode fazer a proposta fracassar.

Dubinsky e Tall (1991) concluem que computadores são muito importantes para complementar o processo de pensamento criativo do ser humano, seja possibilitando ambientes para exploração de possíveis novos teoremas, seja para realizar trabalhosos cálculos algorítmicos e contribuir na prova matemática. Pensando nisso, os autores fazem uma forte analogia entre a pesquisa matemática e as atividades de estudantes universitários. Eles acreditam que, assim como ocorre com pesquisadores, a Matemática para os estudantes também é nova, porém para estes a Matemática já é parte de um sistema organizado de conhecimento, o que os deixaria com a vantagem de poder usufruir de *softwares* computacionais previamente desenvolvidos para a exploração de conceitos matemáticos.

Dubinsky e Tall acreditam no papel importante do computador, pois, segundo eles, quando uma idéia abstrata é implementada ou representada na máquina, ela torna-se concreta na mente do indivíduo. Além disso, uma vez que várias construções possam ser exploradas na máquina, é possível estimular o estudante a refletir sobre o que elas são e de que processos elas podem se ocupar.

Alguns autores, como Minton (1995), afirmam que, como a máquina faz os cálculos rotineiros e difíceis pelo aluno, a tecnologia acaba por liberar mais tempo da sala de aula, que pode ser aproveitado para discussões e reflexões mais profundas sobre o assunto, portanto, isto requer mudanças no currículo do ensino de Matemática de vários níveis.

De acordo com Demana e Waits (1990), a máquina se ocuparia de cálculos operacionais, enquanto o estudante ficaria mais livre para pensar, por exemplo, em descobrir quais as operações apropriadas para resolver um dado problema, mais do que literalmente efetuar as operações. Portanto, o objetivo do ensino atual de Matemática ao utilizar a tecnologia deveria se transformar para quais procedimentos e técnicas usar para resolver um problema e interpretar soluções encontradas. Neste sentido, um grande ganho seria o de enfatizar o pensamento analítico, e não o operacional.

Particularmente, a análise de gráficos com ajuda de tecnologia pode gerar uma dinâmica de sala de aula que desafia o aluno constantemente, o encoraja à investigação e, assim pode aumentar sua participação no processo de aprendizagem, pois, segundo Dugdale et al. (1995), o estudante pode explorar problemas, estabelecer conexões entre diversos tópicos, discutir resultados, apresentar conjecturas baseadas nas observações feitas, testar e verificar hipóteses, expor idéias e conclusões. Enfim, ele pode participar de um processo muito semelhante ao do cientista conforme descrito acima por Dubinsky e Tall.

Williams (1993) afirma que o estudante, por si só, não consegue confrontar a resolução algébrica com a resolução gráfica. Portanto, especificamente em cursos iniciais de cálculo, consideramos que a tecnologia pode ajudar os estudantes a conectarem funções a seus respectivos gráficos.

Contudo, alguns autores relatam algumas dificuldades dos usuários de tecnologia no ensino. Abrahão (1998) discute o comportamento de quatro professores do ensino médio frente à questão da escala em gráficos (não usuais) de funções reais construídos com auxílio tecnológico e algumas observações são surpreendentes. Em muitos casos, os professores não conseguem fazer conexão entre o conhecimento teórico deles e o que é observado na tela. A seguir, vamos descrever algumas destas observações.

A autora pede para os professores resolverem um problema de modelagem com o auxílio de uma calculadora gráfica. A atividade consiste em: "Se quiséssemos construir uma caixa aberta a partir de uma folha de metal retangular de tamanho 30 cm por 45 cm, retirando-se quadrados iguais de cada canto do retângulo e dobrando-se seus lados para cima, qual deveria ser a medida aproximada dos lados dos quadrados para que o volume da caixa fosse máximo?" Os professores conseguem montar a fórmula $f(x) = x(45 - 2x)(30 - 2x)$, mas, ao construir seu gráfico na calculadora, alguns deles não percebem a importância de delimitar os intervalos da janela gráfica que interessam ao problema. Em conseqüência, um professor, ao observar o gráfico de f em uma janela como a da esquerda da figura 17 e ver a semelhança entre este e uma parábola, tenta aplicar resultados algébricos relativos à função quadrática. Na verdade, mesmo após este professor ser alertado para o fato da função estudada se tratar de uma função polinomial do 3º grau, ele insiste em aplicar as fórmulas $x_v = -\dfrac{b}{2a}$ e $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ referentes às coordenadas do vértice de uma parábola.

Na segunda atividade, os professores visualizam o gráfico da função real g definida por $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ em quatro janelas distintas conforme mostrado na figura 18. Um dos professores diz que três dos quatro gráficos observados estariam "malucos" por não se parecerem com a tradicional curva senóide. Um outro professor fica chocado ao ver em duas das janelas um gráfico semelhante ao de uma reta representando a função seno.

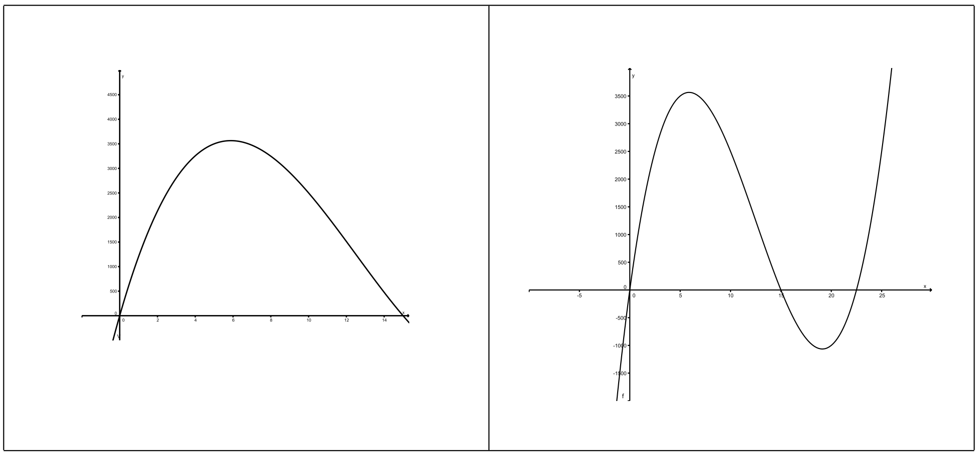


Figura 17: Gráfico de $f(x) = x(45 - 2x)(30 - 2x)$ nas janelas $[-2, 16] \times [-500, 5000]$ à esquerda e $[-10, 30] \times [-2000, 4000]$, à direita.

Também é difícil para eles relacionarem cada gráfico parcial da função com os aspectos globais da função. Este tipo de reação é esperada por Dugdale et al. (1995), que relata ser difícil para alguns aceitarem um gráfico onde somente algumas características da função estão presentes como um gráfico da função.

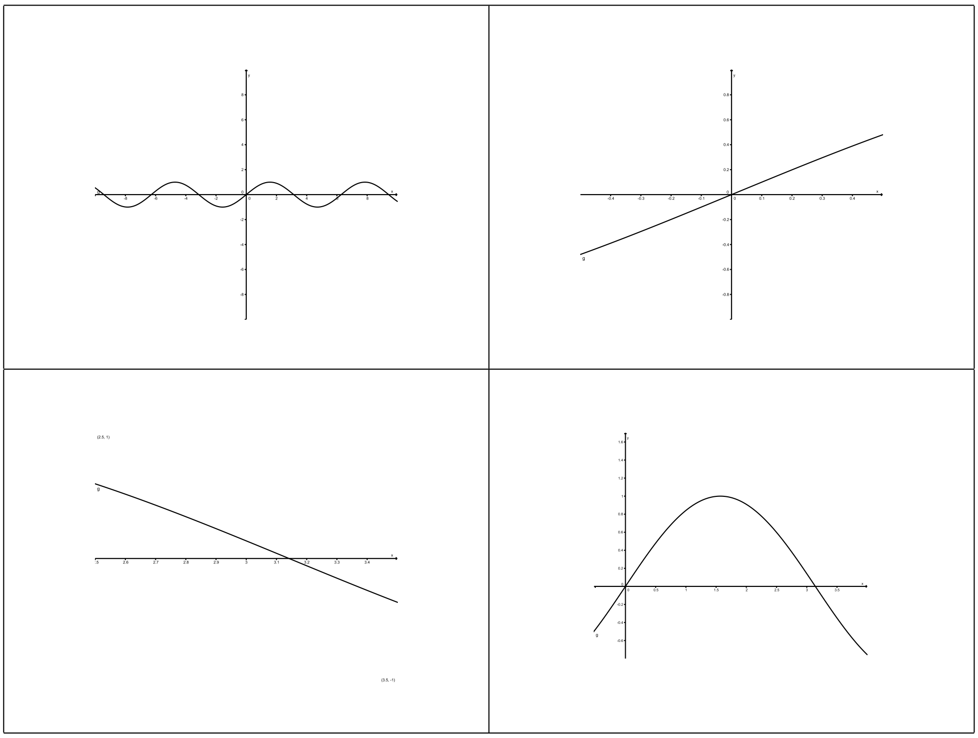


Figura 18: O gráfico de $g(x) = \operatorname{sen}(x)$ em diferentes janelas.

Na terceira atividade, os professores visualizam o gráfico da função $h(x) = x^4 - 25x^3 - 2x^2 + 80x - 3$ na janela $[-10, 40] \times [-50000, 10000]$ como mostra a figura 19. Este é um exemplo de função onde é difícil encontrar uma única janela que represente todo o comportamento global da função. Inicialmente nenhum dos quatro professores percebe a diferença entre as unidades dos eixos x e y. Apenas depois de serem orientados para uma análise algébrica da função, alguns deles percebem esta diferença. Um dos professores acha que toda a região próxima da origem, onde a curva parece tangenciar o eixo x, seria de zeros da função. Ao pensar neste intervalo contínuo de zeros, o professor não considera que um polinômio do 4º grau só pode ter no máximo quatro raízes reais. Além disso, ele não percebe que, na verdade, $x = 0$ não é uma raiz da função, pois é fácil verificar que $h(0) = -3$. Este caso mostra que o professor não relaciona os resultados algébricos com a análise gráfica, assim como acontece com alguns estudantes conforme é descrito por Williams (1993).

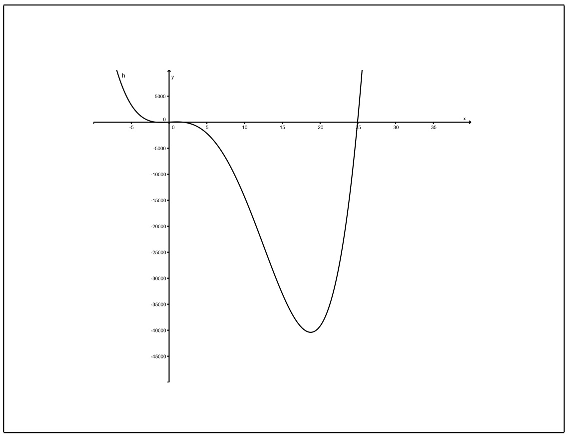


Figura 19: Gráfico de $h(x) = x^4 - 25x^3 - 2x^2 + 80x - 3$ na janela $[-10, 40] \times [-50000, 10000]$.

Enfim, Abrahão (1998) observa dificuldades importantes relativas ao uso de tecnologia, sobretudo aquelas surgidas a partir da visualização de gráficos em escalas não usuais para os eixos x e y. Por exemplo, a autora também observa que o fato da mudança de escala não preservar os ângulos entre retas causa muitos mal entendidos entre os professores. Logo, esta questão é um assunto muito delicado e merece uma atenção especial em uma estratégia de ensino focada no uso de recurso gráfico tecnológico. Contudo, apesar das dificuldades, todos os professores entrevistados por Abrahão concordam que a visualização do comportamento gráfico da função por meio da máquina pode favorecer a aprendizagem de funções no ensino médio. Eles também afirmam que o tempo de sala de aula poderia ser redirecionado para atividades mais complexas e variadas, já que o computador se encarregaria de fazer os cálculos mais trabalhosos e de construir os gráficos para o estudante. Um professor apenas faz uma ressalva: é necessário esclarecer e alertar o aluno para possíveis situações problemáticas quanto ao uso do recurso tecnológico. Em contra-partida, um professor acredita que apresentar gráficos de interpretação problemática ao aluno poderia dificultar a compreensão deste sobre o conceito de função.

De fato, também são encontrados alguns pontos negativos do uso de tecnologia no ensino. Há o caso, que se tornou muito conhecido, descrito por Hunter, Monaghan e Roper (1993) de um grupo de estudantes de um curso de pré-cálculo que foram submetidos a uma abordagem exclusivamente estruturada para ser ministrada em um laboratório de informática. O *software Derive* foi utilizado e os estudantes não tiveram auxílio de nenhum outro tipo de recurso ou sequer assistiram aulas sobre o tópico abordado durante o período da pesquisa. Antes e depois do curso, Hunter, Monaghan e Roper (1993) fizeram a seguinte pergunta aos participantes: *O que você pode dizer sobre u se* $u = v + 3$ *e* $v = 1$*?* O resultado foi espantoso: nenhum dos participantes acertou esta questão no pós teste, inclusive aqueles que haviam acertado no pré teste. Os autores da pesquisa atribuem este péssimo resultado ao fato de que os alunos em nenhum momento da pesquisa precisavam substituir valores de variáveis ou fazer cálculos. Eles apenas digitavam no computador e observavam os gráficos aparecerem na tela.

Hodgson (1987) também observa em sua pesquisa que em estágios iniciais do uso de manipuladores de símbolos, mesmo quando estes programas estão amplamente disponíveis, eles parecem ter pouco efeito real no ensino de Matemática em sala de aula. Char et al. (1986), ao usar o *software Maple* em um curso de graduação no qual os estudantes têm livre acesso a ele, nota uma aceitação limitada pelos estudantes. Apesar disto, o autor acredita que algumas questões mereçam ser discutidas, como interface e recursos disponíveis do *software*, ou necessidade de integração da máquina no currículo escolar, pois, segundo ele, um manipulador simbólico é, sem dúvida, um instrumento poderoso, mas que, como todo instrumento, só terá suas possibilidades plenamente exploradas se soubermos como usá-lo.

Yerushalmy (1997) afirma que o uso do computador para visualização gráfica, em particular para a aprendizagem de assíntotas, realmente amplifica complexidades que são parcialmente omitidas quando são estudadas apenas com o auxílio de artifícios algébricos, isto é, ao mesmo tempo que a tecnologia pode facilitar uma abordagem, ela também pode aumentar as complexidades, que eram escondidas ou, pelo menos, eram pouco enfatizadas em outras representações. Porém, não encaramos isto como um ponto negativo, as complexidades podem ter um papel fundamental no processo de aprendizagem no sentido de fazer o aluno se sentir estimulado para explorar o conceito e também confrontar idéias enriquecendo sua imagem de conceito.

Portanto, atualmente não faz mais sentido um questionamento do tipo: *o uso de tecnologia no ensino de Matemática é benéfico para o estudante?* Pois, no decorrer deste texto percebemos que o fato de seu uso ter pontos positivos ou negativos depende das estratégias escolhidas para a abordagem do assunto. Portanto, agora é necessário formularmos outro tipo de questão mais relevante: *Que tipo de estratégia precisa ser pensada para explorarmos ao máximo as potencialidades da máquina no ensino de Matemática?*

1.7 Dificuldades na compreensão do conceito de limite

> *A única alternativa para o aprendizado doloroso parece ser não se aprender nada.* (SIERPINSKA, 1992, p. 58)

Como foi citado na seção 1.4, o conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil para alunos iniciantes no estudo de cálculo. Acredita-se que há muitas razões importantes para este fato, razões estas que chegam a transcender a mera abordagem do assunto. Isto é, alguns autores afirmam que a dificuldade deste conceito é inerente a ele próprio e seria inevitável. Segundo Sierpinska (1992), existem dificuldades que não são apenas resultados de formas particulares de ensinar um conceito, também não são idiossincráticas, não são algo que ocorre a uma pessoa ou duas. Elas são comuns na estrutura de alguma cultura, seja presente ou passada e assim parecem ser os obstáculos mais objetivos para uma nova forma de conhecimento.

Cornu (1991) afirma que, antes do ensino de qualquer assunto, muitas vezes o estudante já possui uma série de idéias, intuições, imagens, conhecimentos, proveniente de experiências do dia-a-dia, como o significado coloquial de alguns termos usados. O autor descreve estas idéias concebidas antes do ensino formal como *concepções espontâneas* e diz que, em geral, elas não desaparecem da mente do indivíduo quando ele está em sala de aula e podem interferir na aprendizagem. Sierpinska (1992) afirma que no exato momento em que o senso lógico de um conceito é aplicado a um contexto, matemático ou matematizado, a linguagem informal está sendo utilizada, e esta linguagem informal traz consigo significados que transcendem a mera lógica da definição.

Com relação ao conceito de limite, Cornu dá o exemplo da expressão “tender a” e afirma que ela pode ter as seguintes conotações dependendo do indivíduo constatadas em pesquisas:

- Aproximar-se, mas mantendo uma certa distância;
- Aproximar-se, mas sem nunca alcançar;
- Aproximar-se, podendo alcançar eventualmente;
- Assemelhar-se (sem nenhuma idéia de variação presente).

(CORNU, 1983, apud idem, 1991, p. 154, tradução nossa)

E, ainda segundo Cornu, especificamente o termo "limite" pode também receber as seguintes interpretações abaixo:

- Um limite impassível que é alcançável;
- Um limite impassível que é impossível de alcançar;
- Um ponto do qual alguém se aproxima sem alcançá-lo;
- Um ponto do qual alguém se aproxima e o alcança;
- Uma limitação inferior ou superior;
- Um máximo ou mínimo;
- Um intervalo;
- Algo que vem logo após do que pode ser atingido;
- Uma restrição ou regra;
- O fim.

(CORNU, 1983, apud idem, 1991, p. 154–155, tradução nossa)

Cornu explica que estes significados, além de mudarem de um estudante para outro, mudam para um mesmo indivíduo, dependendo da situação.

Da mesma forma, Robert (1982) fez uma pesquisa com um grupo de estudantes que estudaram a noção de limite de seqüência. Apesar de eles terem estudado as definições formais de limite, ao serem perguntados sobre o tema, acabaram por evocar concepções espontâneas classificadas pela autora como segue:

- *Estacionária*: "Os termos finais sempre têm o mesmo valor";
- *Barreira*: "Os valores não podem passar l";
- *Monotônica e dinâmico-monotônica*: "Uma seqüência convergente é uma seqüência crescente limitada superiormente (ou decrescente limitada inferiormente)" ou " uma seqüência convergente é uma seqüência crescente (ou decrescente) que se aproxima de um limite";
- *Dinâmica*: "Os termos da seqüência tendem a l" ou "a distância entre os termos da seqüência e l fica pequena";

- *Estática*: "Os termos da seqüência estão em um intervalo perto de l" ou "os elementos de uma seqüência são encontrados numa vizinhança de l";
- *Mesclado*: Uma combinação dos modelos citados acima.

(ROBERT, 1982, apud CORNU, 1991, p. 155, tradução nossa)

Robert concluiu que estes modelos de pensamento influenciavam na maneira dos estudantes de resolverem os problemas relacionados a limite. Desta forma, durante a resolução o aluno evoca, além dos conceitos matemáticos, noções intuitivas de outras naturezas que acabam interferindo na exatidão da tarefa. Neste caso, é possível a formação de imagens de conceito restritas.

Historicamente, o lento desenvolvimento da noção de limite sugere a grande dificuldade sentida pelos pesquisadores ao longo do tempo para desenvolvê-la. Cornu (1991) corrobora este fato, afirmando que a noção de limite nasceu da necessidade de resolver três tipos de problemas descritos pelo autor: (1) problemas geométricos (como cálculo de áreas, problemas resolvidos "por exaustão"), (2) problemas de soma e razão de convergência de séries, e (3) problemas de diferenciação (que vêm da relação entre duas grandezas que tendem simultaneamente a zero). O autor destaca quatro tipos de dificuldades surgidas a partir dos problemas descritos: a falha em relacionar números com áreas, as noções de infinitamente pequeno e infinitamente grande, o aspecto metafísico da noção de limite e a questão se o limite é atingido ou não. Esta última inclusive é observada em estudantes conforme citado anteriormente.

Enfim, fica evidente o cuidado que deve ser tomado ao elaborar qualquer abordagem baseada nesta noção tão pouco intuitiva para o ser humano. Como vimos, a dificuldade com o conceito está presente na maioria dos estudantes que entram em contato com ele, como também é histórica. Apesar disto, não pensamos que se trate de algo negativo e que deva ser evitado. De acordo com Cornu (1991), devemos pensar ao contrário, devemos conduzir os estudantes a encarar e ultrapassar as dificuldades, vendo os obstáculos como partes constituintes dos conceitos matemáticos que estão sendo adquiridos.

2 Assíntotas: Uma Proposta Alternativa e as Descrições Associadas

O estudo do comportamento no infinito de funções racionais é um tópico padrão da grade curricular inicial da disciplina cálculo. Este tópico depende diretamente do conceito de limite e, particularmente, serve como motivação para o estudo de limites infinitos e limites no infinito. Já discutimos no referencial teórico que tais tópicos são de assimilação difícil para alunos em estágios iniciais de cálculo, o que traz conseqüências desagradáveis para o ensino de assíntotas. Além disso, a abordagem tradicional destes conceitos não tem se mostrado satisfatória em muitos casos (YERUSHALMY, 1997; CHAVES, 2001), o que nos leva à busca de estratégias alternativas, que possam estimular o estudante a formar imagens de conceito mais ricas. Para isto, *a priori* precisamos compreender de que maneira está estruturada a abordagem tradicional do conceito de assíntotas para identificarmos possíveis problemas e também para traçarmos o perfil do conteúdo que foi ensinado para o aluno pesquisado.

2.1 A abordagem tradicional de assíntota

A seguir, iremos descrever como este assunto é tratado no livro *O Cálculo com Geometria Analítica* de Leithold (1986). Escolhemos este livro porque ele representa uma boa amostra da abordagem tradicional do ensino de cálculo, sendo ainda bastante usado em diversos cursos, e, além disso, principalmente porque este foi o livro adotado pelo professor do curso de cálculo freqüentado pelos participantes voluntários desta pesquisa.

Os conteúdos relacionados com o foco deste trabalho são tratados no capítulo 2 intitulado *Funções, Limites e Continuidade*. O autor inicia o capítulo com uma revisão do conceito de função e de seus gráficos, incluindo definições formais e exemplos. Apresenta também a notação funcional e define operações de funções.

Na seção *Tipos de funções e algumas funções especiais*, o autor define formalmente vários tipos de funções, dentre as quais, função polinomial e função racional, esta última definida da seguinte forma:

> Se uma função pode ser expressa como o quociente de funções polinomiais, a função é chamada racional. (LEITHOLD, 1986, p. 60)

A função f definida por $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 5}{x^2 - 9}$ é apresentada como um exemplo de função racional, cujo domínio é o conjunto de todos os números reais, exceto 3 e -3.

Em seções seguintes, o conceito de limite de função é apresentado, com sua definição formal e teoremas básicos relacionados com as operações de limites. Até que, logo em seguida, o autor define limites unilaterais. Enfim, na seção *Limites no infinito* este tema é abordado como segue.

O autor começa explorando o exemplo:

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$$

Ele apresenta um esboço do gráfico e faz uma tabela de valores de x de 0 a 1000 com suas respectivas imagens $f(x)$. De acordo com a tabela, nota-se que à medida que x cresce, $f(x)$ se aproxima de 2. Portanto, as diferenças entre os valores de $f(x)$ e o número real 2 se aproximam de zero conforme mostrado abaixo:

$$2 - f(4) = \frac{2}{17}$$

$$2 - f(100) = \frac{2}{10001}$$

Primeiro, o autor aborda o conceito de uma maneira intuitiva, dizendo que o valor de $f(x)$ pode estar tão próximo de 2 quanto desejarmos, tomando x suficientemente grande.

Logo em seguida, define formalmente:

> **2.7.1 Definição** Seja f uma função definida em $(a, +\infty)$ e se $\forall \epsilon > 0$, ainda que pequeno, $\exists$ um nº $N > 0$ tal que $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x > N$, então $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$. (LEITHOLD, 1986, p. 77)

O tratamento no livro é análogo para o caso $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Também são apresentados teoremas, bem como suas demonstrações. Um exemplo deles está a seguir:

Teorema 11: Se r é um inteiro positivo qualquer, então:

(i) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^r} = 0$;

(ii) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^r} = 0$.

(LEITHOLD, 1986, p. 79)

O teorema 11 é a base para a resolução de exercícios que se seguem, mas antes são apresentados alguns exercícios resolvidos como este:

Encontre o $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{4x-3}{2x+5}$ *e, conforme o caso, indique os teoremas de limite usados.*

Resolução:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x-3}{2x+5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(4 - \dfrac{3}{x}\right)}{\left(2 + \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(4 - \dfrac{3}{x}\right)}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(2 + \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 4 - \lim_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x}}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x}} =$$

$$= \frac{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 4 - \lim_{x \to +\infty} 3 \cdot \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}}{\displaystyle\lim_{x \to +\infty} 2 + \lim_{x \to +\infty} 5 \cdot \lim_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}} = \frac{4 - 3 \cdot 0}{2 + 5 \cdot 0} = 2$$

No livro, em cada etapa desta solução, são indicados os teoremas de limites aplicados.

Também são propostos outros tipos de exercícios dedicados ao uso da definição formal de limite, isto é, são pedidas demonstrações de limites com o uso de ϵ's e N's.

Na seção *Limites infinitos*, o autor introduz o tema a partir da função f definida por $f(x) = \dfrac{3}{(x-2)^2}$ e, da mesma forma que na seção anterior, faz o esboço do gráfico da função e uma tabela de valores de x próximos de 2 pela direita (e também pela esquerda) com suas respectivas imagens y. Com o uso da tabela, pretende-se mostrar que $f(x)$ cresce ilimitadamente, ou seja, $f(x)$ é tão grande quanto desejarmos, desde que se tome valores de x cada vez mais próximos de 2.

Então, é dada a seguinte definição de limite infinito:

> **2.8.1 Definição** Seja f uma função definida em todo nº de um intervalo aberto I contendo a, exceto possivelmente, no próprio nº a. Quando x se aproxima de a, $f(x)$ cresce ilimitadamente, o que é escrito como $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, se $\forall N > 0$, existir $\delta > 0$, tal que $f(x) > N$ sempre que $0 < |x-a| < \delta$. (LEITHOLD, 1986, p. 82)

Alguns teoremas sobre limites infinitos, seguidos de suas demonstrações, são apresentados. Podemos destacar os teoremas 12 e 13 descritos a seguir:

Teorema 12: Se r é qualquer n$^{\text{o}}$ inteiro positivo, então:

(i) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x^r} = +\infty$;

(ii) $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x^r} = \begin{cases} -\infty, \text{ se } r \text{ é ímpar;} \\ +\infty, \text{ se } r \text{ é par.} \end{cases}$

(LEITHOLD, 1986, p. 84)

Teorema 13: Se a é um n$^{\text{o}}$ real qualquer, e se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, onde c é uma constante diferente de 0, então:

(i) Se $c > 0$ e se $f(x) \to 0$, através de valores positivos de f, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$;

(ii) Se $c > 0$ e $f(x) \to 0$, através de valores negativos de f, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$;

(iii) Se $c < 0$ e $f(x) \to 0$, através de valores positivos de f, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = -\infty$;

(iv) Se $c < 0$ e $f(x) \to 0$, através de valores negativos de f, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty$.

(LEITHOLD, 1986, p. 85)

Mais uma vez, alguns exercícios resolvidos que exploram o cálculo de limites de funções racionais são apresentados. Alguns dos limites explorados são, por exemplo, $\lim\limits_{x \to 3+} \left(\dfrac{x^2 + x + 2}{x^2 - 2x - 3} \right)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2}{x + 1} \right)$.

Em seguida, são propostas demonstrações de teoremas de limite da soma de funções com constantes e de limite do produto de funções com constantes, deixados como exercícios, além de mais cálculos de limite, como $\lim\limits_{x \to 4} \left(\dfrac{x}{x - 4} \right)$, $\lim\limits_{x \to 3} \left(\dfrac{4x^2}{9 - x^2} \right)$ e $\lim\limits_{y \to +\infty} \left(\dfrac{2y^3 - 4}{5y + 3} \right)$.

Na seção *Limites infinitos no infinito*, são mencionados limites do tipo $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ e definições formais são apresentadas, como segue:

> Dizemos que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, se a função f for definida num intervalo $(a, +\infty)$ e se $\forall N > 0$, $\exists M > 0$ tal que $f(x) > N$ sempre que $x > M$. (LEITHOLD, 1986, p. 83)

Outras definições análogas são deixadas como exercícios e, enfim, na seção *Assíntotas horizontais e verticais*, o autor introduz o assunto, explorando o seguinte exemplo:

$$f(x) = \frac{1}{(x - a)^2}$$

O esboço do gráfico é mostrado. O autor apresenta intuitivamente o conceito de assíntota vertical: *Dada uma reta $y = k$, esta intercepta o gráfico em dois pontos ($k > 0$), a distância destes dois pontos à reta $x = a$ diminui gradativamente à medida que k se torna maior.* Logo após, a definição formal é apresentada:

> **2.9.1 Definição** A reta $x = a$ é assíntota vertical do gráfico de f, se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:
>
> (i) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$;
>
> (ii) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $-\infty$.
>
> (LEITHOLD, 1986, p. 88)

Da mesma forma, é dada a definição formal de assíntota horizontal:

> **2.9.2 Definição** A reta $y = b$ é assíntota horizontal do gráfico de uma função f, se pelo menos uma das afirmações seguintes for verdadeira:
>
> (i) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$;
>
> (ii) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.
>
> (LEITHOLD, 1986, p. 88)

Não há qualquer referência sobre assíntotas inclinadas. Alguns exercícios sobre assíntotas são resolvidos e, em seguida, como é feito em todo o capítulo, são propostos exercícios para encontrar assíntotas horizontais e verticais e traçar o esboço do gráfico de funções definidas como $f(x) = \dfrac{4}{x-5}$, $g(x) = \dfrac{4x^2}{x^2-9}$, $h(x) = \dfrac{x^2}{4-x^2}$ e $i(x) = \dfrac{-3}{(x+2)^2}$.

Na continuação deste capítulo do livro, são citados mais alguns teoremas sobre limites, é introduzido o conceito de continuidade e são demonstrados mais teoremas relacionados a este tópico.

O tratamento tradicional dos tópicos limite infinito, limite no infinito e assíntotas descrito acima também pode ser encontrado em livros como *Cálculo com Geometria Analítica* de Simmons (1987), *Cálculo e Geometria Analítica* de Shenk (1991) e outros mais, havendo pouca variação entre as abordagens. Uma análise geral destes livros nos permite verificar que a abordagem destes assuntos pode ser resumida pela seqüência:

1. **Etapa intuitiva** – Inicialmente é apresentado um exemplo de uma função racional e, a partir dele, é feito o seguinte:

(a) Caso **assíntota horizontal**: É construída uma tabela com valores absolutos de x cada vez maiores e suas respectivas imagens y. Procura mostrar-se que a diferença entre estas imagens e um dado valor fixo torna-se cada vez mais próxima de zero.

Caso **assíntota vertical**: É construída uma tabela com valores que tornam o denominador da função cada vez mais próximo de zero e suas respectivas imagens y. Mostra-se que quanto mais próximo de zero é o denominador, maior se torna o valor absoluto da imagem da função.

(b) É mostrado o gráfico da função estudada com as assíntotas quando elas existem.

2. **Etapa formal** – Logo após os exemplos, em alguns livros são apresentadas as definições formais com epsilons e deltas, em outros, são apresentadas definições mais informais na tentativa de simplificar o conceito, mas contendo termos pouco precisos conforme visto na seção 1.7 e que têm significados distintos no cotidiano. Muitas vezes são abordados teoremas sobre limites infinitos e limites no infinito, em alguns casos, com as demonstrações, em outros, as demonstrações são colocadas como opcionais em apêndices.

3. **Exercícios** – Alguns exercícios resolvidos são mostrados. Os execícios propostos são em grande parte focados no processo operacional e, em alguns casos também, focados no uso da definição formal, chegando até a serem exigidas demonstrações.

Podemos analisar que a etapa classificada aqui como intuitiva é uma tentativa de familiarizar o estudante com o conceito a partir de representações visuais como tabelas e gráficos. A etapa seguinte, a formal, é prematura nos casos em que põe o aluno em contato cedo demais com as definições formais e, já vimos na seção 1.3, que isto em geral é inadequado. Nos casos em que há tentativa de simplificar a linguagem das definições formais com o uso de termos imprecisos do dia-a-dia, também já discutimos na seção 1.7, o aluno acaba por trazer os significados do cotidiano para o contexto matemático, não enriquecendo suas imagens de conceito como deveria. Quanto aos exercícios, eles muitas vezes enfatizam os aspectos operacionais do conceito ou, em alguns casos, os aspectos formais. Com relação ao primeiro aspecto, Yerushalmy (1997) diz que, em muitos casos, a abordagem sobre assíntotas se resumiria em “receitas” que “facilitariam” o processo de compreensão do mesmo. São elas:

1.1 Assíntota vertical:

(a) Fatoram-se ambos numerador e denominador;

(b) Cancelam-se fatores quando possível;

(c) Iguala-se o denominador a zero e resolve-se esta equação;

(d) A não existência dos zeros da equação significa a não existência de assíntotas verticais.

(YERUSHALMY, 1997, p. 2, tradução nossa)

Podemos exemplificar o uso desta regra a partir da função definida por $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-4}$. A reta $x = 2$ é assíntota vertical da função f, pois

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{(x-2)}$$

$$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

1.2 Assíntota horizontal:

(a) Verifica-se se os graus do numerador e do denominador são iguais;

(b) Se os graus não são iguais, então não existe assíntota horizontal. Caso eles sejam iguais, considere n o grau do numerador e do denominador;

(c) Divide-se cada termo por x^n;

(d) Calcula-se $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

(YERUSHALMY, 1997, p. 2, tradução nossa)

Podemos exemplificar o uso desta regra da seguinte forma: Seja $f(x) = \dfrac{5x^3+x}{x^3-x^2+1}$, a reta $y = 5$ é assíntota horizontal da função f, pois

$$f(x) = \frac{5x^3+x}{x^3-x^2+1} \Rightarrow n = 3$$

$$f(x) = \frac{\dfrac{5x^3}{x^3} + \dfrac{x}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3} - \dfrac{x^2}{x^3} + \dfrac{1}{x^3}}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{5+0}{1-0+0} = 5$$

1.3 Assíntota inclinada[1]**:**

(a) Calcula-se $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$;

(b) Se o limite m existir, então m é a inclinação da assíntota;

(c) Se a equação da assíntota é $y = mx+b$, para encontrar a constante b, basta calcular $b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$.

(YERUSHALMY, 1997, p. 2, tradução nossa)

Um exemplo do uso deste procedimento é: seja $f(x) = \frac{2x^2 - x}{x-3}$, a reta $y = 2x + 5$ é a assíntota inclinada de f, pois

$$m = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x-3}\right) = 2$$
$$b = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2 - x}{x-3} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x}{x-3}\right) = 5$$

Segundo Yerushalmy (1997), esta ênfase em aspectos operacionais não é suficiente para facilitar a argumentação e a compreensão da análise de funções racionais, pois isto envolve a compreensão de outros conceitos complicados como descontinuidade e limite. Ainda segundo a autora, a complexidade de tais conceitos não reside apenas em suas riquezas, mas justamente na discrepância entre as noções intuitivas (as confusões com terminologias do dia-a-dia) e a habilidade de operar formalmente e alcançar o real significado do conceito.

Sendo assim, a abordagem tradicional sobre assíntota enfatiza um tipo de compreensão chamada *sintática*, que é definida por Gafni (1996) como uma habilidade para executar corretamente procedimentos conhecidos. Por exemplo, saber usar qualquer uma das "receitas" descritas acima é um tipo de compreensão *sintática* segundo Gafni. Por outro lado, outro tipo de compreensão, chamada *semântica* pelo mesmo autor, é definida como a habilidade para entender símbolos, expressões e operações como objetos e de tratá-los em várias representações, ao mesmo tempo, reconhecendo as equivalências e as identidades estruturais e ignorando os detalhes específicos de uma expressão ou símbolo. Neste tipo de compreensão, o indivíduo não concentra sua atenção apenas em um processo isolado de alguma operação, mas ele consegue relacionar diferentes processos e entender o papel de cada um deles dentro de uma estrutura cognitiva.

Tendo em vista a busca por uma abordagem que pudesse estimular no estudante uma *compreensão semântica* sobre assíntotas, ao contrário do observado em abordagens

[1]Este caso não costuma ser abordado em muitos cursos de cálculo brasileiros.

tradicionais, Yerushalmy (1997) desenvolveu uma pesquisa apoiada em tecnologia gráfica e que será descrita a seguir.

A autora desenvolveu o experimento para explorar e estudar a aprendizagem de funções racionais. Aproximadamente 30 estudantes secundários de pré-cálculo participaram de atividades em pequenos grupos que alternavam entre o uso de computador e o uso de lápis e papel, seguidas de discussões sobre o que foi observado. Os alunos utilizaram o *software Function Supposer*, cuja interface se assemelha a uma calculadora gráfica que trata funções como variáveis, sendo possível aplicar operações binárias como soma, produto, divisão e operações gráficas como translação, rotação e reflexão. Este *software* permite ao usuário manipular simultaneamente representações gráficas, algébricas e numéricas.

Foram registradas três sessões: duas delas a partir da observação do comportamento dos alunos em sala de aula e a outra, a partir de um resumo escrito feito por eles após a terceira sessão. A primeira registra o esforço dos participantes em formular uma definição para o conceito de assíntota vertical. As atividades eram seguidas da descrição dos dilemas dos estudantes sobre as propriedades de assíntotas oriundas das expressões. A segunda explora o tipo de procedimento usado pelos estudantes para analisar uma situação envolvendo assíntotas horizontais e as suas respectivas explicações. A terceira explora assíntotas inclinadas, enquanto os participantes operam a divisão polinomial manualmente ou com o auxílio do *software*.

A autora relata que, durante a primeira sessão, há uma extensa discussão entre os alunos ao tentarem chegar a uma definição de assíntota vertical. Apesar da professora fazer uma pergunta direta, os alunos inicialmente respondem apenas citando algumas características genéricas como "é perpendicular ao eixo x" ou "ela aparece no ponto onde a função não está definida". Aos poucos, conforme a professora escreve as falas dos alunos no quadro, estes conseguem costurar as diferentes características e transformá-las em uma definição do tipo: *Assíntota vertical é uma reta perpendicular que existe somente em um ponto onde a função não é definida e os valores da função aproximam-se de menos ou mais infinito.* Uma das alunas, Nira, não concorda com a expressão *em um ponto*, já que uma reta não possui apenas um ponto, mas sim, infinitos pontos. Em discussão posterior, os colegas decidem substituir o termo *ponto* por *valor* (do ponto no domínio).

Outro aluno, Adi, também questiona a definição obtida: ele tem dúvidas se, de fato, assíntotas só poderiam existir em pontos não definidos pela função e cita a função real definida por $f(x) = x^2$. O aluno imagina uma parábola e com os braços indica a existência de duas retas verticais ao lado (e bem próximas) da parábola, sem interceptá-la. Uri refuta o argumento de Adi, usando a definição de assíntota vertical obtida pelo grupo e dizendo que, como a função está definida em qualquer ponto, a linha imaginada por Adi deve cortar seu gráfico.

Uri sugere o exemplo da função definida por $f(x) = \dfrac{10^{12} - x^2}{10^6 - x}$ para explicar que o computador pode levar alguém a cometer um erro. Ele explica que a função não está definida em $x = 10^6$ e que seus valores próximos a este ponto (de ambos os lados) são "muito muito grandes", o que poderia levar alguém a pensar na existência de uma assíntota vertical neste ponto após a observação do gráfico no computador, apesar da função não tender a infinito para $x \to 10^6$. Segundo Uri, o *software* poderia induzir ao erro, seja no caso de uma descontinuidade sem assíntota, seja no caso citado de uma descontinuidade com assíntota.

Yerushalmy (1997) conclui que o trabalho desenvolvido na primeira sessão é um exemplo de como uma definição pode ser desenvolvida a partir da manipulação de exemplos genéricos com o auxílio tecnológico. A autora explica que o aspecto concreto dos objetos representados pela máquina não limitou o pensamento dos estudantes, pelo contrário, motivou a exploração. Yerushalmy complementa que a abordagem da professora, que valorizava ciclos de construções dos estudantes e dilemas motivados pelo programa de computador, ajudou a tornar os estudantes explicitamente conscientes de dificuldades e complexidades epistemológicas do conceito de infinito.

Durante a segunda sessão, após exploração e discussão similares à primeira, os alunos também levantam algumas conjecturas e argumentos como: "A assíntota horizontal é uma reta paralela ao eixo x e torna-se cada vez mais próxima da curva no infinito", "É uma reta com inclinação zero" ou "Uma função que tem uma assíntota horizontal é uma função racional cujo limite tende a um número k quando x tende a infinito". Nesta sessão, é proposta a seguinte atividade sobre assíntotas horizontais a ser realizada sem o auxílio do computador:

(a) Encontre uma assíntota horizontal para $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

(b) Encontre uma função cujo gráfico esteja entre $f(x)$ e sua assíntota horizontal encontrada em (a).

É relatado que todos os alunos responderam corretamente ao primeiro item, sendo que a maioria deles usou o procedimento ensinado conforme mostra o item 2.1 da página 64. Apesar disto, cerca de metade dos alunos caíram na armadilha de supor que uma função cujos valores estão entre os de uma dada função e sua assíntota ou não pode existir ou é definida somente em um domínio parcial, como próximo da origem. Este resultado sugere que os estudantes construíram um conhecimento para assíntotas operacionalmente efetivo, mas conceitualmente equivocado. A outra metade do grupo deu respostas satisfatórias, utilizando-se de variadas estratégias. Yerushalmy diz que tais estratégias foram muito influenciadas pelas experiências com o computador, apesar da máquina não ter sido utilizada nesta tarefa. Segundo a autora, os estudantes que acertaram o item (b) desenvolveram uma habilidade para observar e analisar expressões simbólicas, ao invés de encará-las como meras citações decoradas de procedimentos conhecidos.

Por fim, durante a terceira sessão, os alunos exploraram a noção de assíntotas inclinadas por intermédio do *software*. A autora considera que, diferente das assíntotas horizontais, a discussão sobre assíntotas inclinadas não deveria elucidar apenas para *onde* a função caminha quando x tende a infinito, mas deveria responder *como* ela se comporta no infinito. Então, a questão *onde* seria um caso especial do *como*, pois assíntotas horizontais são um caso especial de assíntotas inclinadas.

Yerushlamy relata que, após longa discussão em sala de aula, os alunos conseguem desenvolver uma estratégia com base na divisão polinomial. Segundo esta estratégia, assíntotas inclinadas ocorrem quando o quociente da divisão entre o numerador e o denominador é um polinômio de grau 1 e o resto é diferente de zero[2]. Em outras palavras, a assíntota existe se $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}$, onde o grau de r é menor do que o grau de g. Este critério é bem mais simples daquele explicado no item 2.1 da página 65 e, segundo interpretação da autora, os estudantes chegaram a esta dedução graças à abordagem computacional sugerida, na qual era enfatizado o tratamento de funções como variáveis de operações.

Em resumo, algumas diferenças relevantes entre a proposta de Yerushalmy e a abordagem tradicional foram identificadas pela autora:

> 1. A exploração de propriedades a partir de exemplos e tecnologia gráfica precedeu qualquer uso de procedimento ou técnica.
> 2. Cada procedimento foi apresentado, ou às vezes solicitado por estudantes, para auxiliar na solução de problemas identificados durante a exploração.
> 3. Cada tarefa foi planejada de tal forma que o desempenho e o sucesso dos estudantes não dependessem simplesmente da habilidade para desempenhar um certo procedimento.

[2]Evidentemente os estudantes consideraram em suas análises apenas funções racionais, pois estas eram o foco do estudo proposto.

4. O tempo utilizado para o treinamento de técnicas e procedimentos foi relativamente curto.

(YERUSHALMY, 1997, p. 21–22, tradução nossa)

A autora conclui que a tecnologia gráfica ajudou, de fato, os estudantes a ultrapassarem a simples compreensão sintática, contribuindo para que eles dominassem a compreensão semântica da manipulação de funções racionais.

2.2 Uma proposta alternativa

Com base no que foi exposto até aqui, elaboramos uma proposta para o ensino do comportamento no infinito de funções racionais para ser aplicada em turmas iniciais de cálculo. Cremos que ela poderia ser expandida para o estudo do comportamento assintótico de outros tipos de funções mais complexas e variadas. Na verdade, esta é uma meta para trabalhos futuros, onde poderemos ampliar e aprofundar a pesquisa sobre este tema. Por enquanto, pretendemos aplicar esta proposta a estudantes que possuem imagens de conceito sobre limite ainda recentes e, assim, ainda possivelmente mal formadas.

Portanto, nosso objetivo com a abordagem é poder não só contribuir para a compreensão de assíntotas, como também para a compreensão de uma noção mais fundamental, a de limite. Desta forma, pensamos que funções de outro tipo poderiam chamar a atenção do estudante deste estágio para aspectos específicos de cada função que, por sua vez, poderiam desviar o sujeito do objetivo principal. Assim, a escolha por limitar a exploração do estudante às funções racionais se deve ao fato de intencionalmente evitarmos conflitos cognitivos desnecessários que poderiam ser prejudiciais em fases introdutórias. Além disso, a proposta nasceu como uma alternativa para a abordagem do tema funções racionais que é parte do programa de cálculo das universidades.

A inspiração para este trabalho surgiu da proposta de David Tall para derivada e sua teoria de raízes cognitivas descritas no capítulo 1. Faremos uma analogia com o processo de *magnificação local* e a raiz cognitiva *retidão local* associada. Além disso, também faremos uma analogia com o trabalho de Giraldo e Carvalho (2003, 2004), que concebe o organizador genérico *melhor reta* para aplicar a abordagem de Tall para o ensino de derivada conforme descrito na seção 1.5.

Experiências computacionais, como afirma Tall (2000), podem ser usadas para complementar a atividade da mente humana no sentido de contribuir para a formação de imagens conceituais ricas. Por outro lado, o autor também afirma que uma abordagem onde certos aspectos e representações de um conceito matemático são destacadas, enquanto outros têm pouca evidência, pode levar à atrofia dos aspectos omitidos. Por isso, na nossa proposta exploraremos: descrições geométricas nas etapas I, IV e V (visualização gráfica, discriminação gráfica e reconceituação, respectivamente); descrições numéricas na etapa II (aproximação numérica); descrições algébricas na etapa III (aproximação algébrica); e por fim, a descrição da definição de conceito na etapa V (conceituação ou reconceituação).

Como foi visto na seção 1.5, as representações mais usuais para funções são justamente as numéricas (tabelas), algébricas (fórmulas) e geométricas (gráficos), por isso escolhemos explorá-las. A exploração da definição de conceito é necessária por razões já explicadas no referencial teórico, isto é, por ela ser essencial para o desenvolvimento formal da matemática. Escolhemos explorá-las nesta ordem devido a razões que vamos expor a seguir. Consideramos que o estudante, ao observar o comportamento dos gráficos das funções racionais em janelas gráficas que representam intervalos cada vez maiores do domínio e identificar a possibilidade dos gráficos serem modelados por um outro tipo de lei familiar a eles (Etapa I), sentir-se-á motivado a encontrar as fórmulas. Como a observação parte de um gráfico, é natural calculá-las a partir de informações oriundas deste gráfico (Etapa II). Após a obtenção de alguns resultados referentes à mesma função e à observação que eles parecem se aproximar de uma fórmula em particular, também é natural que o aluno se sinta motivado a calculá-la (Etapa III). Até este momento, em uma mesma janela, os gráficos das fórmulas calculadas e a curva estudada são traçados e eles se confudem, não sendo possível identificar os objetos distintos, portanto. Daí vem a necessidade de magnificar a janela para discriminá-los (Etapa IV). Enfim, depois de reconhecida a existência de objetos com naturezas distintas, surge a necessidade de verificar qual é o melhor polinômio que aproxima a curva globalmente para poder defini-lo (Etapa V). Além disso, ao invés de partirmos da definição de assíntota, como é feito na abordagem tradicional, trataremos a definição como um objetivo a ser alcançado ao final da atividade conforme visto em nosso referencial teórico. O diagrama da figura 20 mostra a proposta estruturada em etapas.

Vamos definir alguns conceitos importantes na elaboração desta proposta. Em analogia ao processo de *magnificação local* descrito anteriormente, chamamos de *redução global*[3] ao processo computacional de buscar janelas gráficas com valores de x e de y cada vez mais altos de tal forma a permitir a visualização do comportamento assintótico global

[3]Este processo foi definido pela primeira vez por nós em Chaves (2001) com o nome de *magnificação global*. Ele foi utilizado em trabalhos subseqüentes, como em Chaves (2004). Pesquisas posteriores indicaram a necessidade da mudança para a denominação presente, mais adequada ao conceito ao qual se refere.

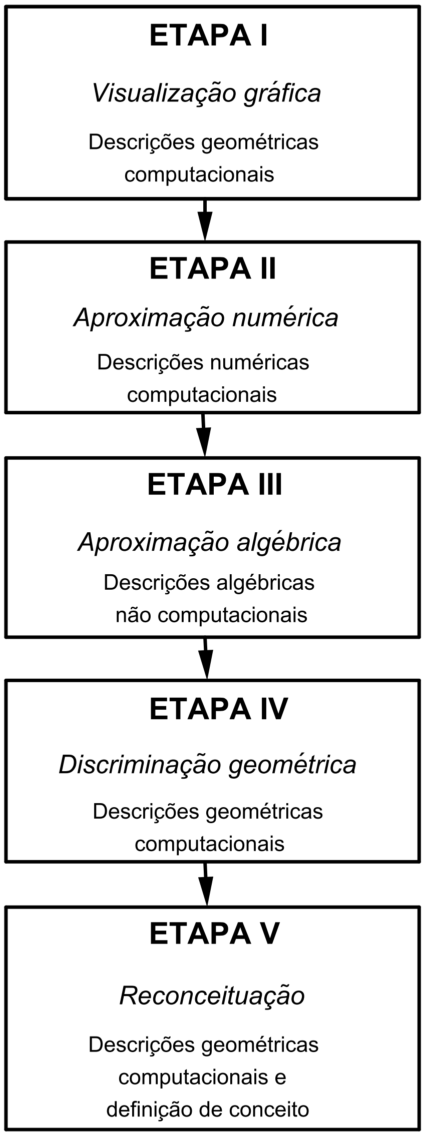


Figura 20: Diagrama das etapas da proposta.

da função. Enquanto o processo de *magnificação local* consiste na ampliação de janelas gráficas para auxiliar no estudo do comportamento de uma função na vizinhança de um dado ponto, o processo de *redução global* consiste na redução do gráfico da função de maneira a permitir o estudo qualitativo de seu comportamento em intervalos do domínio cada vez mais amplos. Além disso, este processo é análogo ao primeiro, porque ele permite, assim como na proposta de Tall, a exploração da noção que chamaremos de *polinomorfização global*[4], também análoga à noção de *retidão local*. Definimos *polinomorfização global* como a percepção humana de considerar gráficos de certas funções semelhantes aos gráficos de funções polinomiais após o processo de *redução global*, isto é, durante este

[4]Este termo também sofreu alteração. Em Chaves (2001, 2004), a mesma noção foi chamada de *aproximação global*.

processo, o indivíduo tem a capacidade de perceber os gráficos de certas funções tomando a forma de gráficos de funções polinomiais. Eles podem ser retas, parábolas, gráficos de funções de grau 3 ou de qualquer outro grau, dependendo da função a ser analisada.

A analogia da noção de *polinomorfização global* com a noção de *retidão local* reside em alguns aspectos: enquanto esta noção é a sensação de semelhança com retas, a primeira é a sensação de semelhança, não só com retas, mas com gráficos de funções polinomiais; a segunda vem da observação de comportamentos locais, enquanto a primeira, de comportamentos globais; e, por fim, supomos ser a primeira uma raiz cognitiva para o ensino de assíntotas, assim como o é a segunda para o ensino de derivada.

Além disso, é importante frisar que, assim como na abordagem de Tall, na nossa proposta *polinomorfização global* é a raiz cognitiva, enquanto *redução global* é o processo que possibilita a exploração desta noção. Como vimos na seção 1.3, uma raiz cognitiva é uma unidade cognitiva e, portanto, é algo interno à mente do indivíduo, enquanto um processo computacional de visualização é externo ao sujeito. O processo, a *redução global*, possibilita ao indivíduo visualizar os gráficos e, após a observação, ele identifica (ou não) o que está sendo visto. Em caso positivo, o sujeito reconhece o gráfico como algo familiar, semelhante a gráficos já observados por ele, isto é, há uma clara conexão entre a percepção presente e outras unidades cognitivas pertencentes a imagens de conceito antigas. Neste momento sim, o indivíduo internaliza a imagem e o que ela representa, tornando-a uma unidade cognitiva, que é a noção de *polinomorfização global*. Além disso, de acordo com a definição, se esta noção servir de base para o desenvolvimento do conceito de assíntota – e conseqüentemente do conceito de limite – ela será considerada uma raiz cognitiva. Os quadros comparativos das figuras 21 e 22 nos ajudam a compreender a analogia com as noções definidas por Tall e também a analogia entre as etapas da proposta de Giraldo e Carvalho (2003, 2004) e as etapas da proposta atual para o ensino de assíntotas de funções racionais. A etapa V da proposta de Giraldo e Carvalho foi omitida neste quadro por ela não ter sido alvo de analogia e pelo fato de os próprios autores a considerarem uma etapa para uma abordagem posterior.

Analogias	**Proposta de Tall**	**Proposta alternativa para o ensino de assíntotas em funções racionais**
Processo computacional	*Magnificação local*	*Redução global*
Raiz cognitiva	*Retidão local*	*Polinomorfização global*

Figura 21: Quadro comparativo das noções fundamentais de cada proposta.

Analogias	**Proposta de Giraldo e Carvalho para o ensino de derivada**	**Proposta alternativa para o ensino de assíntotas em funções racionais**
Visualização gráfica	**ETAPA I** Visualização do comportamento local de gráficos.	**ETAPA I** Visualização do comportamento global de gráficos.
Aproximação numérica	**ETAPA I** Método *numérico* para o cálculo das fórmulas das retas que aproximam a curva localmente.	**ETAPA II** Método *numérico* para o cálculo das fórmulas dos polinômios que aproximam a curva globalmente.
Aproximação algébrica	**ETAPA II** Método *algébrico* para o cálculo das fórmulas das retas que aproximam a curva localmente.	**ETAPA III** Método *algébrico* para o cálculo das fórmulas dos polinômios que aproximam a curva globalmente.
Discriminação geométrica	**ETAPA III** Visualização da curva e da reta como dois objetos distintos.	**ETAPA IV** Visualização da curva e do gráfico polinomial como dois objetos distintos.
Conceituação	**ETAPA IV** Busca pela *melhor reta* que aproxima a curva localmente.	**ETAPA V** Busca pelo *melhor gráfico polinomial* que aproxima a curva globalmente.

Figura 22: Quadro comparativo das etapas de cada proposta.

De maneira análoga à proposta de Tall, também utilizaremos um organizador genérico, que será o *software Graphmatica* por ser um ambiente de computador que:

- Permite a construção de gráficos em diferentes tipos de janelas a partir de suas leis de formação;
- Constrói gráficos de polinômios a partir de pontos dados, fornecendo suas fórmulas com boa aproximação;
- É de fácil manuseio, exigindo pouco tempo para a aprendizagem de seu uso.

Pela definição, uma das funções de um organizador genérico é a possibilidade de explorar não-exemplos de um dado conceito. Tall (1989) fala sobre a importância da exploração deste aspecto em contextos mais avançados, onde definições são intrincadas. Porém, o próprio Tall (1989) também afirma que em contextos mais simples eles são pouco relevantes. Em nossa proposta, por se tratar de funções racionais, podemos dizer que não existem exemplos de funções que não possam ser aproximadas por funções polinomiais no infinito, simplesmente porque todas as funções racionais se comportam no infinito como funções polinomiais[5]. Portanto, a exploração de não-exemplos não cabe neste caso. A exploração destes será deixada para pesquisas futuras, onde funções não racionais poderão ser estudadas.

Há outra questão com relação aos aspectos computacionais. É preciso não nos esquecermos de que computadores, na verdade, não traçam todos os pontos de uma função em um dado intervalo e sim uma quantidade finita deles. Este caráter finito da máquina pode nos levar a questionar a eficácia de seu uso em uma abordagem cujo objetivo é contribuir para a compreensão da noção de infinito, mas Yerushalmy nos esclarece esta questão quando afirma:

> A discrepância entre a tecnologia como um auxílio para a percepção visual e manipulações de objetos mentais, mas um instrumento numérico que não pode ajudar na concepção de "aproximação no infinito", torna o estudo de assíntotas um domínio intrigante para a investigação de aspectos semânticos da determinação do comportamento de funções racionais. (YERUSHALMY, 1997, p. 3, tradução nossa)

Portanto, esperamos que a máquina possa ser um suporte visual na construção de imagens de conceito mais ricas, possibilitando que o usuário ultrapasse a mera compreensão

[5] A justificativa matemática para esta afirmação será descrita com mais detalhes na seção 2.4 na etapa de aproximação algébrica.

sintática e alcance a compreensão semântica de assíntotas e, por que não dizer, do conceito de limite como conseqüência. Além disso, da mesma forma que no estudo empírico de Yerushalmy (1997) – quando a autora discute sobre o fato da noção de assíntotas inclinadas ajudar a entender *como* uma função se comporta no infinito, ao invés de ajudar a responder simplesmente para *onde* a função tende – acreditamos que não restringir o estudo a assíntotas (no sentido tradicional), mas expandi-lo a outras funções polinomiais como funções de aproximação no infinito, pode sem dúvida levantar um dado qualitativo importante e mais rico do que apenas determinar se uma função tende ou não a infinito, mas de que *forma* a função tende a infinito e, neste caso, em um sentido mais amplo do que no caso de assíntotas inclinadas e aprofundar a idéia de tender a infinito, separando-a em classes.

2.3 Questão de investigação

Como pudemos detectar, existem desvantagens importantes na abordagem tradicional de assíntotas. Por isso, com base nas idéias descritas, elaboramos a presente proposta que acreditamos ter vantagens sobre a primeira. Nossa questão de pesquisa é avaliar os efeitos das descrições de conceito abordadas sobre as imagens de conceito de alunos em fase inicial de estudo de cálculo. Isto é, pretendemos com isto *a priori* identificar as possíveis idéias conflitantes com a teoria matemática que estejam contidas nas imagens de conceito de indivíduos que tiveram contato com a abordagem tradicional. Em seguida, vamos colocá-los em interação com as etapas de nossa proposta e investigar quais das idéias conflitantes permaneceram, quais delas foram reestruturadas para entrar em coerência com a teoria, ou ainda, se novas idéias em concordância (ou não) com a matemática foram construídas nas imagens de conceito dos participantes.

Neste trabalho não temos a intenção de verificar se a noção de *polinomorfização global* é de fato uma raiz cognitiva para o conceito de assíntota. Mesmo porque, pelo que já foi discutido aqui, raízes cognitivas são unidades cognitivas centrais, isto é, são idéias internas à imagem de conceito do indivíduo e, portanto, elas são subjetivas. Assim, esta verificação envolve questões delicadas e a deixaremos para um outro trabalho. Contudo, em particular, podemos discutir como a noção de *polinomorfização global* interage com as imagens de conceito não vazias, ou até bem formadas, dos participantes.

Acreditamos que este estudo empírico possa contribuir com importantes informações dentro do campo de pesquisa de ensino de matemática, afim de ajudar na elaboração de abordagens alternativas futuras para o ensino de funções e, principalmente, as racionais e seu comportamento assintótico.

2.4 As etapas da proposta e as descrições associadas

A seguir todas as etapas da proposta serão explicadas, bem como serão indicados os tipos de descrições associadas a cada uma delas. Os exemplos explorados na etapa I servirão também de apoio na compreensão das outras etapas. Os gráficos correspondentes serão mostrados nas figuras indicadas. Lembramos que a estruturação das etapas são análogas àquelas sugeridas por Giraldo e Carvalho (2003, 2004).

Etapa I – Visualização Gráfica

Nesta fase, o aluno tem contato com diversos gráficos de funções racionais construídos em um ambiente computacional em diferentes janelas gráficas. Mais precisamente, o objetivo aqui é fazer com que o aluno tenha um primeiro contato com o *software* e se familiarize com seu uso. Desta forma, ele poderá utilizar o processo de redução global a partir do qual a noção de polinomorfização global poderá ser explorada.

A seguir, serão mostrados alguns exemplos, aos quais iremos recorrer durante a descrição de todas as etapas da proposta.

Na figura 23, vemos o processo de redução global da função $f : \mathbb{R} \setminus \{5\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x - 5}$.

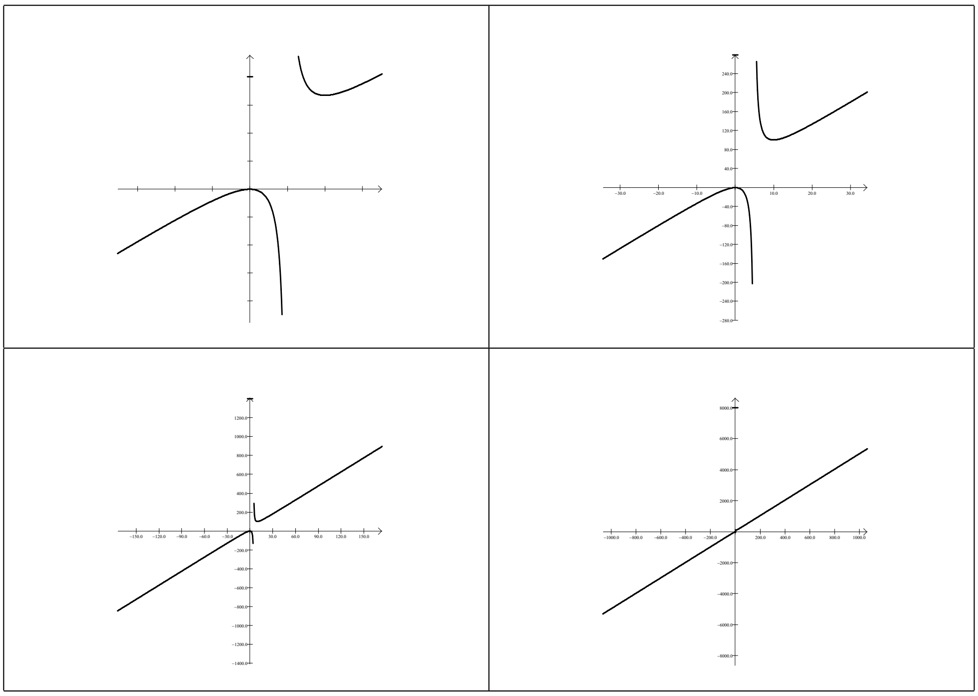


Figura 23: Processo de redução global da função $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-5}$.

Observemos na figura 24 o processo de redução global para a função $g : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x^3+5x^2-x+10}{x-1}$.

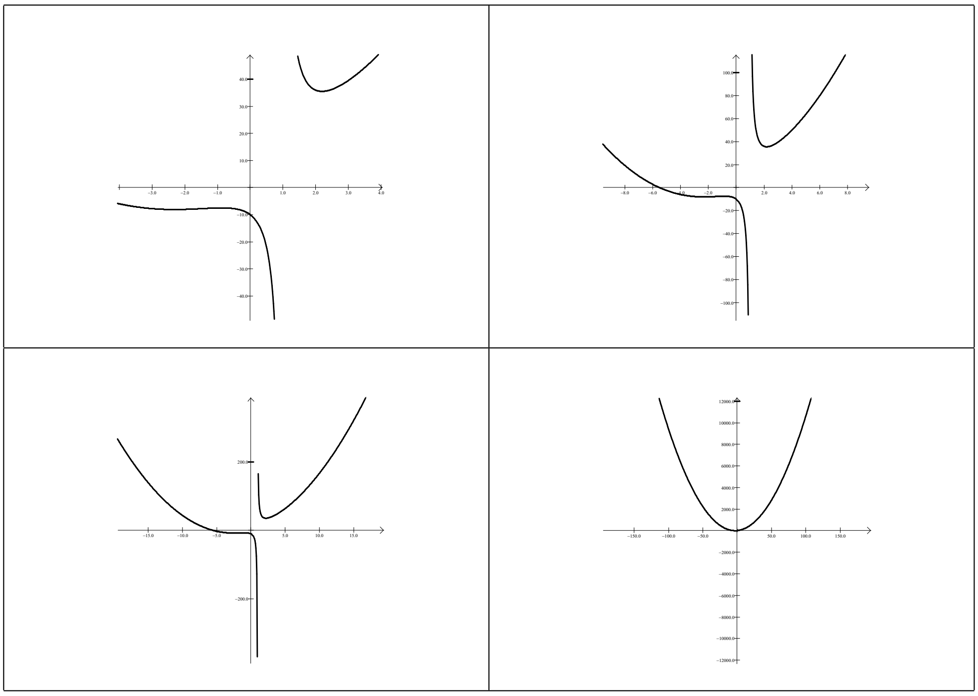


Figura 24: Processo de redução global da função $g(x) = \dfrac{x^3+5x^2-x+10}{x-1}$.

Na figura 25, vemos o processo de redução global da função $h : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 1}{x - 1}$.

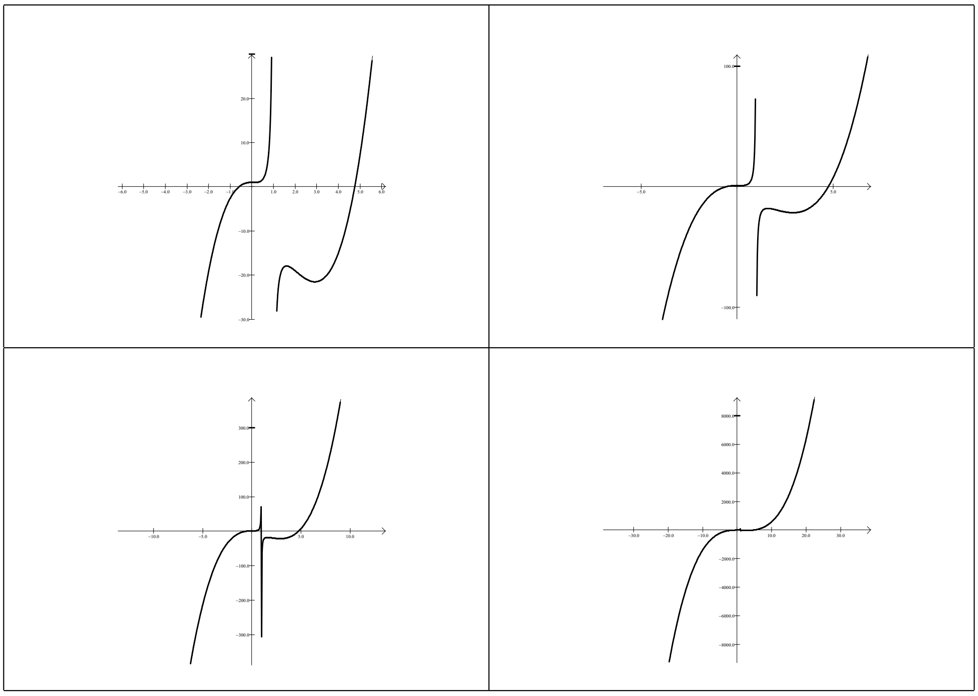


Figura 25: Processo de redução global da função $h(x) = \dfrac{x^4 - 5x^3 + x^2 + x - 1}{x - 1}$.

Essencialmente esta etapa explora descrições geométricas computacionais. Os exemplos acima citados nos motivam a buscar uma fórmula para as curvas polinomiais com as quais os gráficos das funções racionais se confundem no processo de redução global. Serão feitas aproximações numéricas na próxima fase para encontrarmos tais fórmulas. Isto será explicado a seguir.

Etapa II – Aproximação Numérica

Nesta etapa, são exploradas principalmente descrições numéricas de funções. Após a primeira fase, quando o estudante detecta intuitivamente de que tipo de curva polinomial a função racional se aproxima com o processo de redução global, ele precisa saber quantos pontos são necessários para determinar o polinômio, isto é, no caso de retas, precisará de dois pontos; parábolas, três pontos; gráficos de funções cúbicas, quatro pontos e assim sucessivamente. Cada estudante escolhe os valores de x e y pertencentes ao gráfico da função original na janela resultante do processo de redução global e constrói uma tabela com eles para obter os pontos que determinarão a nova curva polinomial. O *software*

Graphmatica permite traçar esta curva polinomial, para isto, basta que o usuário digite os pontos em questão e peça para o programa traçar a curva, que o faz automaticamente. O tipo de curva polinomial a ser traçada dependerá do número de pontos digitados. O usuário então, ao observar as duas curvas na mesma janela, terá a sensação de que elas se confundem, isto é, que elas são muito semelhantes naquela janela e que o polinômio escolhido é uma boa aproximação para a função estudada. O *software* também fornece a fórmula da curva traçada. Devido à livre escolha dos pontos, diferentes fórmulas serão calculadas pelo programa. Se o aluno comparar seu resultado obtido com algum colega, ou ainda, se ele comparar seus próprios resultados calculados a partir de pontos cuja coordenada x aumenta gradativamente, ele poderá perceber que os coeficientes dos polinômios encontrados se aproximam de certos valores. Isto poderá motivá-lo a calcular mais precisamente (isto é, *analiticamente*) a curva polinomial que representa o comportamento no infinito da função. Para isto, ele terá que recorrer à próxima etapa.

O exemplo da figura 23, ilustra uma possível escolha de pontos organizados na seguinte tabela da função $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-5}$ para os valores -20, 20, -100 e 100 de x:

x	-20	20	-100	100
y	-80	133.4	-476	526

O usuário digita os pontos $(-20, -80)$ e $(20, 133.4)$ no computador e a máquina traça a reta e ainda fornece a sua fórmula que é a seguinte:

$$y = 5.33x + 26.7$$

O aluno procede da mesma forma com os pontos $(-100, -476)$ e $(100, 526)$ e, novamente, a máquina traça outra reta e fornece sua fórmula:

$$y = 5.01x + 25$$

Se o estudante realizar o mesmo procedimento para o exemplo da figura 24, terá as seguintes tabelas para a função $g(x) = \dfrac{x^3+5x^2-x+10}{x-1}$. Neste caso, deve-se lembrar que são necessários três pontos, pois o gráfico do qual a função g se aproxima é uma parábola. Abaixo estão as possíveis tabelas de valores com as respectivas fórmulas calculadas pelo *Graphmatica*.

x	-50	50	80
y	2204.7	2805	6885
$y = 0.99997x^2 + 6.003x + 4.90769$			

x	-100	100	200
y	9404.8	10605	41205
$y = 0.99999x^2 + 6.000x + 4.9333$			

No primeiro exemplo, a experiência poderá levar o estudante a concluir que as distintas fórmulas das retas encontradas se aproximam da fórmula $y = 5x + 25$ à medida que se tome valores de x cada vez maiores. Da mesma maneira, no segundo exemplo ele poderá concluir que as diferentes fórmulas das parábolas calculadas numericamente se aproximam da fórmula $y = x^2 + 6x + 5$. Assim, o estudante poderá ser motivado a buscar um outro método capaz de calcular com maior precisão cada uma das fórmulas, ratificando suas conjecturas. Isto será descrito na próxima etapa.

Etapa III – Aproximação Algébrica

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função racional. Então, ela pode ser escrita como uma razão entre funções polinomiais, isto é, $f(x) = \dfrac{p(x)}{d(x)}$, onde $d(x) \neq 0$ para todo $x \in D$. Logo, podemos recorrer ao algoritmo da divisão e escrever a função $p(x)$ da seguinte forma:

$$p(x) = d(x) \cdot q(x) + r(x)$$

em que $d(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ são polinômios, sendo $r(x)$ de grau menor do que o grau de $d(x)$. Portanto, exceto possivelmente para um conjunto finito de valores de x, teremos:

$$f(x) = \frac{p(x)}{d(x)} = \frac{d(x) \cdot q(x) + r(x)}{d(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

Se calcularmos a diferença entre $f(x)$ e $q(x)$, teremos:

$$f(x) - q(x) = \frac{r(x)}{d(x)}$$

Logo, se passarmos o limite e fizermos $|x|$ tender a infinito, teremos ainda:

$$\lim_{|x| \to \infty} (f(x) - q(x)) = \lim_{|x| \to \infty} \frac{r(x)}{d(x)} = 0$$

Pois o grau de $r(x)$ é menor do que o grau de $d(x)$.

Portanto, q é uma função definida como *função limitante*. Particularmente, se q tiver grau 1, grau zero ou for o polinômio nulo, q será uma assíntota inclinada ou horizontal, respectivamente.

A partir desta justificativa, podemos descrever esta etapa. O estudante deve basicamente explorar o algoritmo da divisão polinomial. Calcular o limite da função estudada e saber que o limite do quociente entre o resto e o divisor é zero quando x tende a infinito (este fato pode ser visualizado pelo usuário com o uso do computador). Assim, o estudante pode entender que ambas as funções, racional e limitante, se confundem no infinito, isto é, que elas têm comportamentos similares para valores próximos do infinito. Em outras palavras, podemos afirmar que sempre existe uma função limitante para toda função racional. Este fato começa a estabelecer o significado preciso da definição de assíntota, faltando apenas verificar a unicidade.

Após calcular o quociente da divisão, o aluno compara o resultado com aqueles obtidos na etapa anterior, confirmando suas conjecturas a respeito daquelas fórmulas estarem se aproximando de uma fórmula específica. Em resumo, o estudante verifica que o quociente da divisão polinomial é a fórmula procurada, da qual as outras fórmulas calculadas numericamente na etapa anterior se aproximavam.

Isto esclarece o que ocorre com as funções citadas nos exemplos anteriores, sendo que, no exemplo da figura 23, há uma assíntota inclinada como podemos observar a seguir. Pelo algoritmo da divisão, o estudante pode verificar que:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 1 &= (5x+25)(x-5) + 126 \\ \frac{5x^2+1}{x-5} &= (5x+25) + \frac{126}{x-5} \\ \frac{5x^2+1}{x-5} - (5x+25) &= \frac{126}{x-5} \end{aligned}$$

Logo, o estudante calcula o limite e faz $|x|$ tender a infinito, obtendo:

$$\lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{5x^2+1}{x-5} - (5x+25) \right] = \lim_{|x|\to\infty} \left[\frac{126}{x-5} \right] = 0$$

Portanto, ele verifica a existência de uma função polinomial, cujos valores se aproximam indefinidamente da função racional em questão quando x tende a mais ou menos infinito. Neste caso, o gráfico da função polinomial $y = 5x + 25$ é uma reta. Fica evidente a proximidade dos coeficientes desta reta com os coeficientes encontrados da outra reta da etapa numérica: $y = 5.01x + 25$.

Mais uma vez, se o estudante recorrer ao algoritmo da divisão, ele terá o seguinte cálculo para o exemplo da figura 24:

$$g(x) = \frac{x^3 + 5x^2 - x + 10}{x - 1} = (x^2 + 6x + 5) + \frac{15}{x - 1}$$

$$g(x) - (x^2 + 6x + 5) = \frac{15}{x - 1}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} \left[g(x) - (x^2 + 6x + 5) \right] = \lim_{|x| \to \infty} \frac{15}{x - 1} = 0$$

Logo, $g(x) - (x^2 + 6x + 5) \cong 0$, quando x tende a infinito.

Lembremos que a fórmula encontrada na etapa numérica foi $y = 0.99999x^2 + 6.000x + 4.9333$. Novamente os coeficientes deste polinômio são muito próximos dos coeficientes do polinômio encontrado nesta etapa. Nesta etapa, foram exploradas basicamente descrições algébricas e não foi necessário o uso do computador, mas apenas lápis e papel para o cálculo da divisão polinomial.

Na próxima etapa, o estudante poderá verificar que as curvas polinomiais encontradas, apesar de se confundirem com os gráficos das funções racionais quando reduzidas adequadamente, têm natureza distinta das funções racionais estudadas.

Etapa IV. Discriminação Geométrica

Após calculada a fórmula da melhor curva que representa o comportamento no infinito da função racional estudada, pedimos que o aluno trace a curva encontrada na mesma janela gráfica (após o processo de redução global) que a função original e onde elas se confundem visualmente. Logo em seguida, pedimos que o aluno faça o processo inverso daquele realizado na primeira etapa, isto é, que ele faça gradativas magnificações até chegar a uma janela gráfica que possibilite a visualização dos dois gráficos distintamente, o da função estudada e da função limitante. Os exemplos deste tipo de visualização são mostrados abaixo nas figuras 26 e 27 para os casos das duas primeiras funções apresentadas.

Nesta etapa, são exploradas basicamente descrições geométricas computacionais. Há a caracterização de dois objetos totalmente distintos: a curva da função racional estu-

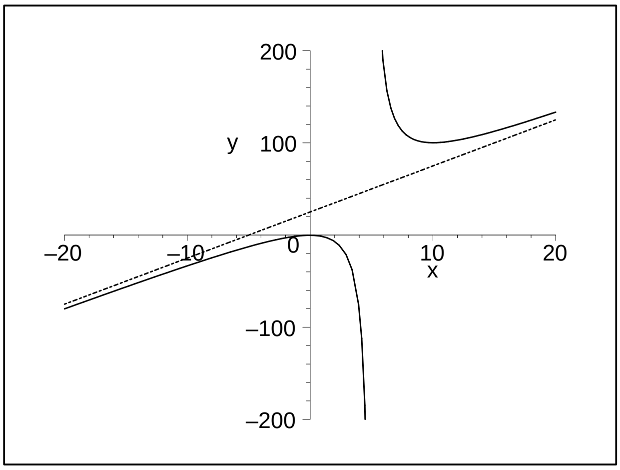


Figura 26: Discriminação geométrica entre $f(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-5}$ e $y = 5x+25$ (linha tracejada)

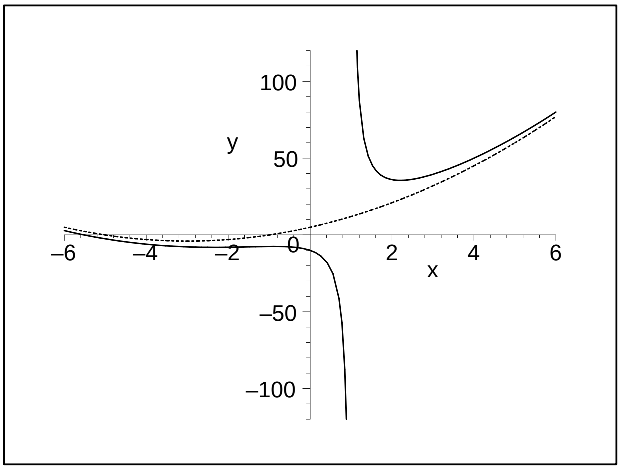


Figura 27: Discriminação geométrica entre $g(x) = \dfrac{x^3+5x^2-x+10}{x-1}$ e $y = x^2+6x+5$ (linha tracejada)

dada e a curva polinomial da qual a função racional se aproxima. Isto é, dois objetos de naturezas distintas, mas que, no infinito, se confundem visualmente em um só. Acreditamos que isto nos motive a conceituar este objeto encontrado após sucessivas reduções e aproximações. Isto será feito a seguir.

Etapa V. Conceituação ou Reconceituação

A partir do que foi observado até o momento, esperamos que o aluno tenha enriquecido a sua imagem de conceito o suficiente a ponto de motivar uma definição de conceito do tipo: assíntota é uma reta da qual o gráfico de uma função se aproxima indefinidamente a medida que os valores de x são cada vez maiores.

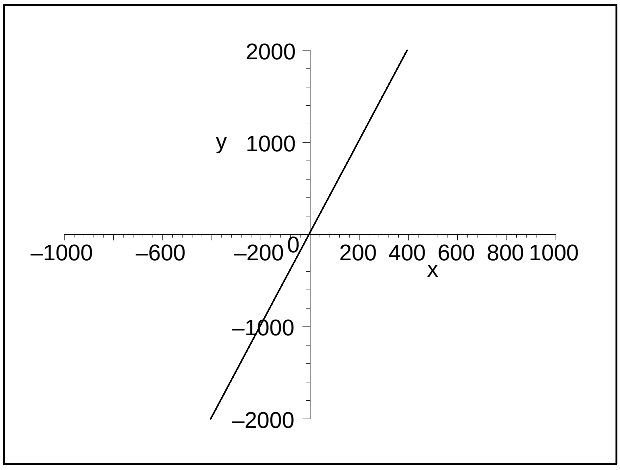


Figura 28: As retas $y = 5x + 25$ e $y = 5.01x + 25$ após a redução global.

Por outro lado, precisamos atentar para outro fato com relação às assíntotas horizontais e inclinadas. Ao observarmos, por exemplo, a redução global das retas $y = 5x+25$ e $y = 5.01x+25$ na figura 28 em uma mesma janela, ambas calculadas nas etapas algébrica e numérica respectivamente, não podemos distinguir uma da outra. Portanto, elas também se confundem com o gráfico de f neste mesmo tipo de janela. Desta forma, baseados apenas na experiência visual, um aluno poderia dizer que as duas retas são assíntotas[6] de f, já que, após o processo de redução global, a diferença entre elas é imperceptível, dando a impressão de que as duas cumprem o mesmo papel. De fato, sabemos que isto não é verdade, pois sejam $y = ax+b$ e $y = a'x+b'$ duas assíntotas de uma função f, logo, $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (ax + b)] = 0$ e $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - (a'x + b')] = 0$. Teremos:

$$\lim_{x\to\infty}\{[f(x) - (ax + b)] - [f(x) - (a'x + b')]\} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty}[(a' - a)x + (b' - b)] = 0$$

E, portanto, segue que $a = a'$ e $b = b'$, o que mostra a unicidade da assíntota[7]. Isto nos mostra também o sentido matemático preciso de aproximação ao qual estamos nos referindo.

[6]Evidentemente uma função pode ter mais de uma assíntota, inclusive do mesmo tipo. Por exemplo, podem existir duas assíntotas horizontais distintas, desde que os limites no infinito (quando $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$) sejam valores reais distintos. Portanto, nesta seção quando falarmos sobre unicidade de assíntotas, estaremos nos referindo a assíntotas correspondentes a valores de x tendendo a infinito em um mesmo sentido, isto é, ou a $+\infty$ ou a $-\infty$.

[7]A demonstração da unicidade para os casos de funções polinomiais limitantes de graus superiores é análoga a esta e, portanto, será omitida aqui. A unicidade é garantida porque estamos considerando o estudo do comportamento de funções racionais dominado por funções polinomiais no infinito.

Neste ponto, a questão é mostrar para o estudante que, em algumas escalas, certos comportamentos de algumas funções são mascarados. Precisamos, então, de um tipo de visualização que amplie os aspectos omitidos em janelas convencionais. Poderíamos utilizar alguma escala não-uniforme, como por exemplo, a escala logarítmica, porém acreditamos que a observação deste tipo de escala não seja familiar ao aluno de estágios iniciais de cálculo, dificultando a exploração do assunto. Por isso, desenvolvemos um artifício visual para "amplificar" as diferenças que descreveremos em seguida.

Sejam f a função racional estudada, $\hat{f}$ uma das funções calculadas na segunda etapa pelo método numérico, $\bar{f}$ uma das funções calculadas na terceira etapa pelo método algébrico. Esta etapa consiste em traçar no computador as funções definidas pelas seguintes leis de formação:

$$\hat{d}(x) = |(f - \hat{f})(x) \cdot x|$$

$$\bar{d}(x) = |(f - \bar{f})(x) \cdot x|$$

O aluno traça os gráficos de $\hat{d}$ e $\bar{d}$ na mesma janela gráfica e, após reduções sucessivas do gráfico, ele visualiza duas curvas distintas. O segundo gráfico se confunde com o eixo dos x, indicando a aproximação de $\bar{d}(x)$ com o polinômio nulo, enquanto o primeiro se distancia deste. A razão de multiplicarmos a diferença das funções por x é que desejamos aumentar o grau do polinômio diferença para que ele se torne perceptível (se for o caso) na escala utilizada. Com isso, o estudante pode perceber que apenas a função $\bar{f}$ realmente representa a função limitante procurada, pois é a única que, mesmo após o aumento de grau, continua bem próxima da f, enquanto a diferença entre f e $\hat{f}$ (antes mascarada) é amplificada, tornando-se visível na escala escolhida.

Para ilustrar, consideremos ainda o exemplo da função f da figura 23. Na mesma janela, o estudante traça os gráficos das funções obtidas pelo módulo da diferença entre a função estudada e as candidatas à assíntota multiplicada por x. Isto é, sejam $\bar{f}(x) = 5x + 25$ a fórmula calculada algebricamente, $\hat{f}(x) = 5.01x + 25$ a fórmula calculada pelo método numérico e o aluno traça na mesma janela os gráficos das funções definidas por $\bar{d}(x) = |(f - \bar{f})(x) \cdot x|$ e $\hat{d}(x) = |(f - \hat{f})(x) \cdot x|$. Por exemplo, vejamos como estes gráficos aparecem na figura 29.

De forma análoga, retomemos a função $g(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2 - x + 10}{x - 1}$, sejam $\bar{g}(x) = x^2 + 6x + 5$ e $\hat{g}(x) = 0.99997x^2 + 6.003x + 4.90769$, traçamos os gráficos das funções obtidas por $\bar{s}(x) = |(g - \bar{g})(x) \cdot x|$ e $\hat{s}(x) = |(g - \hat{g})(x) \cdot x|$ conforme mostra a figura 30.

Em ambas as situações, mesmo quando aumentamos o grau do polinômio, vemos que

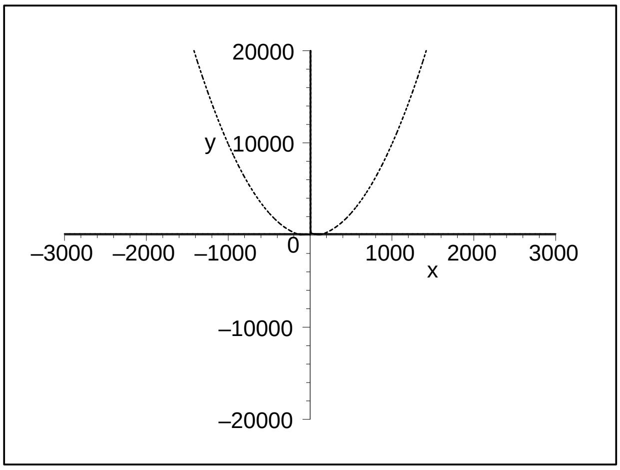


Figura 29: Os gráficos das funções $\bar{d}$ e $\hat{d}$ (linha tracejada) após a redução global.

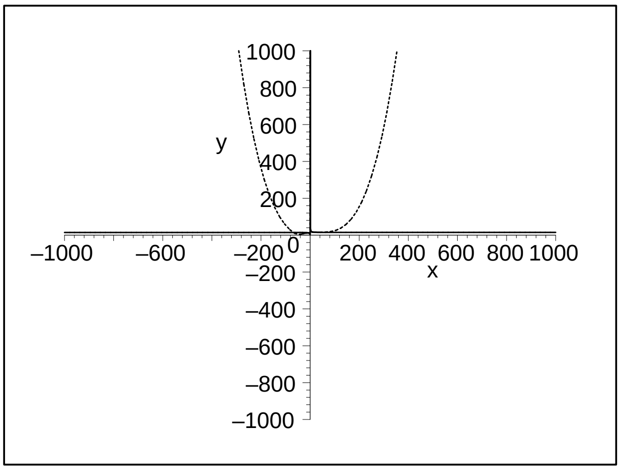


Figura 30: Os gráficos das funções $\bar{s}$ e $\hat{s}$ (linha tracejada) após a redução global.

a diferença entre os gráficos continua se aproximando do polinômio nulo apenas para um dos candidatos à função limitante. No primeiro exemplo, apenas a função $\bar{f}$ e, no segundo caso, apenas a função $\bar{g}$ se aproximam do polinômio nulo. Nos casos das funções $\hat{f}$ e $\hat{g}$, cujos gráficos aparentemente se confundiam com as curvas após a redução global, ao multiplicarmos a diferença por x, a diferença que antes era imperceptível, agora salta aos olhos, o que nos leva a perceber neste exemplo particular a existência de apenas uma função limitante da função.

Lembramos que, apesar de apresentarmos apenas dois exemplos com mais detalhes, o objetivo é fazer o aluno ter contato com muitos outros exemplos nas etapas anteriores.

Temos também que fazer algumas considerações a respeito desta etapa. Como o leitor pôde perceber e como havíamos explicado, todas as etapas desta proposta foram estruturadas por analogia aos trabalhos de Tall (1986), Giraldo e Carvalho (2003, 2004). Na etapa de conceituação de Giraldo e Carvalho, a divisão de $\rho(h)$ por h tem um sentido matemático preciso e nos ajuda a visualizar qual reta é, de fato, a que melhor aproxima a curva na vizinhança de um ponto dado; da mesma forma, na nossa proposta, a multiplicação por x nos ajuda na visualização da melhor função polinomial que aproxima a curva no infinito.

Outro fato importante a ser comentado é: esta proposta, da forma que está descrita aqui, poderia muito bem ser aplicada a alunos que nunca estudaram assíntotas. Porém nesta pesquisa, como já explicamos, propositalmente ela foi aplicada a alunos que já tinham estudado este tema apesar de estarem em fase inicial no cálculo. Por isso, chamamos esta etapa de *conceituação* ou *reconceituação.* Acreditamos que este tipo de abordagem é relevante, já que mesmo os alunos não iniciantes no assunto mostram dificuldades e algumas discrepâncias em suas imagens de conceito como pudemos verificar a partir da revisão da literatura.

Enfim, ao chegarmos nesta etapa da proposta, o aluno possivelmente já explorou suficientemente vários aspectos do conceito a ponto de ter condições de conceituar (ou *reconceituar*) assíntota e, portanto, não ver (ou rever) com estranheza – ou até mesmo ser capaz de criar (ou recriar) ele próprio – uma definição de conceito como dada a seguir: *assíntota é uma reta da qual o gráfico de certas funções se aproxima indefinidamente.* E ainda, poder enriquecer o conceito de assíntota e extrapolar para a noção de função limitante e definí-la como: *função limitante é aquela cujo gráfico se confunde com uma dada curva no infinito.* Além disso, como foi verificado no estudo de Yerushalmy (1997), mais do que determinar se uma função tende ou não a infinito, os alunos podem ser levados a perceber a *qualidade do comportamento assintótico da função*, isto é, *de que forma a função tende a infinito.*

3 Metodologia

Neste capítulo vamos descrever a metodologia utilizada nesta pesquisa. Optamos em realizar um estudo empírico qualitativo por meio de entrevistas semi-estruturadas. Consideramos que não poderia ser de outra forma, já que pretendemos discutir os efeitos da abordagem sobre a imagem de conceito dos participantes como foi dito na seção 2.3. Conforme a definição, imagens de conceito são individuais, subjetivas e nelas estão contidas não só informações isoladas, como também conexões ou relações entre idéias. Acontece que não poderíamos prever quais direções seriam tomadas por cada participante, cada um se relaciona com cada assunto de forma particular e pessoal, daí as sessões serem semi-estruturadas, com exceção das primeira e última. Além disso, precisávamos estar bem próximos dos participantes, isto é, realizar sessões individuais para aprofundarmos as observações. No caso de um estudo quantitativo poderíamos perder muitos dados importantes, simplesmente porque teríamos pré-fixados os assuntos a serem discutidos em um teste escrito, não dando possibilidade ao participante de relacionar com idéias externas ao seu conteúdo (mas não menos interessantes). Além disso, supomos não ser a escrita a única forma de comunicação entre aluno e professor. Aliás, muitos têm dificuldade em expor suas idéias meramente pela escrita, logo, a fala ou até mesmo expressões faciais seriam recursos importantes para tornar mais rica a análise do trabalho. A metodologia para a realização das entrevistas foi baseada em Goldin (2000).

3.1 Estrutura geral

O estudo empírico consistiu de testes escritos e entrevistas, cujo áudio foi gravado e posteriormente cuidadosamente transcrito com a ciência do participante. Este estudo foi dividido em seis sessões que serão descritas a seguir. As entrevistas foram realizadas durante as atividades computacionais nas sessões de II a V com o auxílio de um computador e tiveram duração de aproximadamente 45 minutos. Utilizamos o *software* *Graphmatica* para a construção dos gráficos e exploração do processo de redução global de funções racionais. Apesar destas atividades terem sido elaboradas com ênfase em representações computacionais, em vários momentos, como nas etapas numérica e algébrica sobretudo, disponibilizamos aos participantes também os tradicionais papel e caneta para as anotações e alguns cálculos simples como divisão de polinômios.

Como já dissemos, as atividades computacionais foram semi-estruturadas e montamos um roteiro básico que não foi entregue aos participantes, mas serviu para norteá-las. Durante as entrevistas, procuramos estar abertos a novas direções que dependeriam da interação do entrevistado com o entrevistador. O roteiro destas entrevistas está disponível no apêndice C.

Sessão I: Pré-atividades

Nesta primeira sessão, os alunos preenchem um teste dividido em duas partes que está no apêndice B ao final desta dissertação. A segunda parte do teste só era entregue ao participante após a devolução da primeira. Isto foi pensado para evitar que certas perguntas pudessem influenciar nas respostas de outros itens, como por exemplo, a resposta da questão 3 poderia ser influenciada pelas funções da questão 6.

A primeira parte consiste de três questões:

1. Pedimos ao participante que explicasse com as suas palavras o conceito de limite;
2. Algumas questões de verdadeiro ou falso sobre assíntotas e;
3. São pedidos alguns exemplos de algumas funções que possuam assíntotas.

Na segunda parte, temos novamente três questões:

1. Sobre a definição de assíntota;
2. Sobre critérios de identificação de assíntotas e;
3. Por fim, alguns esboços de funções racionais são pedidos.

Este teste foi planejado desta forma para fazermos uma análise diagnóstica da imagem de conceito do estudante com relação ao tema assíntota.

Sessão II: Atividade computacional 1 – Visualização gráfica

Nesta primeira atividade computacional, temos como objetivo, um primeiro contato do estudante com o *software* para familiarizá-lo com seu uso. Também, colocamos em prática a etapa I de visualização gráfica descrita na seção 2.4, buscando janelas e escalas mais adequadas para esta observação. Utilizamos o processo de redução global para explorar a noção de polinomorfização global. As funções e as respectivas janelas gráficas para visualização foram sugeridas aos participantes por nós e serão justificadas e descritas com detalhes na seção 3.2.

Durante esta sessão e principalmente ao final dela, perguntamos ao estudante como poderíamos determinar uma expressão algébrica para os gráficos observados para estimulá-lo em direção à sessão seguinte.

Sessão III: Atividade computacional 2 – Aproximação numérica

Nesta sessão, aplicamos a etapa II (aproximação numérica) descrita na seção 2.4 e tivemos como objetivo encontrar os coeficientes dos polinômios, cujos gráficos no infinito se assemelham aos gráficos das funções estudadas na atividade anterior por um método de aproximação numérica. Ao final da atividade fizemos o participante refletir sobre a possibilidade de um outro tipo de aproximação: a algébrica.

Sessão IV: Atividade computacional 3 – Aproximação algébrica e discriminação geométrica

Nesta atividade, aplicamos as etapas III (aproximação algébrica) e IV (discriminação geométrica) descritas na seção 2.4 para encontrar os coeficientes dos polinômios, cujos gráficos no infinito se assemelham aos gráficos das funções estudadas na atividade anterior utilizando artifícios algébricos. Depois construímos o gráfico da função encontrada em uma janela gráfica para valores de x pequenos e discriminamos o objeto matemático estudado. Ao final, aplicamos uma seqüência de perguntas com o objetivo de levar o estudante a refletir sobre a unicidade das assíntotas.

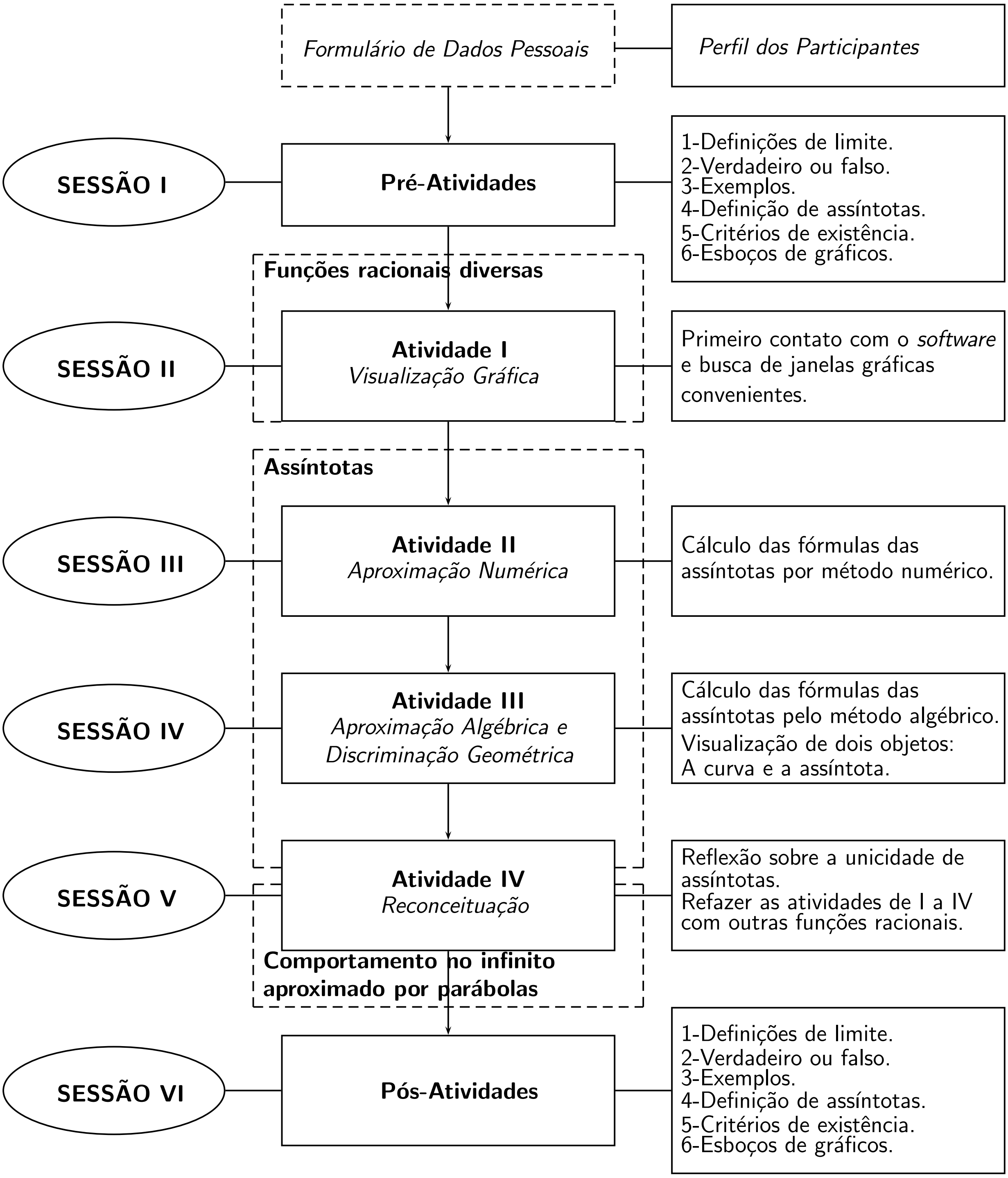


Figura 31: Quadro Geral das Sessões

Sessão V: Atividade computacional 4 – Reconceituação

Neste encontro, aplicamos a etapa V (reconceituação) descrita na seção 2.4 para o estudo das funções da atividade anterior, pensando em determinar qual é a melhor reta que se aproxima do gráfico da função no infinito. Até aqui, abordamos todas as etapas da proposta com funções racionais cujos comportamentos no infinito são representados por assíntotas. Em seguida, também aplicamos todas as etapas anteriores para funções racionais cujo comportamento no infinito é representado por parábolas.

Sessão VI: Pós-atividades

Finalmente, esta sessão consiste em aplicar novamente o mesmo teste aplicado no primeiro encontro. Queremos com isso verificar possíveis ganhos ou limitações nas imagens de conceito dos estudantes em relação ao momento anterior à atividade.

No diagrama da figura 31, procuramos resumir a estrutura geral do conjunto das sessões descritas até aqui.

3.2 As funções escolhidas e a visualização de seus gráficos

Para as atividades decidimos escolher as seguintes funções, porque pretendíamos iniciar a exploração pelos aspectos mais simples e, em seguida, através da exploração gradativa, direcionar as atividades para aspectos mais sofisticados. Isto significa, para nós, começar por funções com assíntotas horizontais e verticais, depois explorar as inclinadas e, por fim, explorar parábolas para aproximar funções no infinito.

Por sugestão nossa, cada um deles observou, para cada item, janelas gráficas muito similares com diferenças pouco significativas entre elas e as quais classificaremos a seguir.

Chamaremos de visualização **tipo A** a primeira janela gráfica (na maioria dos casos) que mostra com mais detalhes características da função como: concavidades, raízes, intervalos de crescimento ou decrescimento, sinal, pontos de descontinuidade, etc. Este tipo é o mais usual em sala de aula quando se estuda esboços de gráficos e, em geral, tomaremos intervalos de x e y pequenos. O **tipo A'** será também uma primeira visualização em apenas dois casos (os itens (IV) e (VII)), na qual alguma das características descritas do tipo A seja omitida ou entre em conflito com outras representações da função, por exemplo, uma janela onde um gráfico conexo pareça desconexo ou onde um gráfico pareça ser decrescente em todo o domínio, quando, na verdade, ainda existe um intervalo no qual a função seja crescente, ou ainda, uma janela que omita pontos de máximo ou de mínimo. O **tipo B** será uma janela intermediária do processo de redução global, na qual o gráfico começa a tomar forma de algum outro gráfico polinomial, mas ainda conserva alguns aspectos perceptíveis do tipo A. Em geral, alguns conflitos teórico-computacionais aparecem neste estágio, como por exemplo, o fato da máquina ligar pontos do gráfico fazendo-o parecer conexo, quando na verdade é desconexo. O **tipo C** é aquele em que podemos dizer que o gráfico já está reduzido a ponto do indivíduo poder experimentar a noção de polinomorfização global, isto é, o gráfico toma a forma de uma reta ou de algum outro gráfico de função polinomial. A visualização do **tipo D**, assim como a anterior, mostra gráficos amplamente reduzidos, porém com intervalos de x e y com escalas bem diferentes de forma a adequar a visualização ao grau do polinômio limitante. Por exemplo, um gráfico em uma janela do tipo C pode parecer coincidir com o eixo x, mas o tipo D pode mostrar que na verdade isto não ocorre.

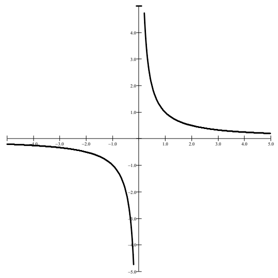
A seguir iremos detalhar mais a descrição de cada tipo de visualização especificamente para cada função proposta e, ainda, mostraremos os gráficos em suas respectivas janelas. Todos os tipos de visualização explicados acima foram explorados pelos estudantes durante as atividades (a única exceção é o tipo A'), porém, para evitarmos repetitivas explicações, o que seria desnecessário, alguns tipos referentes a certas funções serão omitidos nesta seção.

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

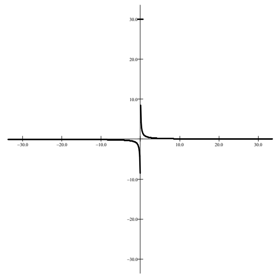
A visualização tipo A desta função mostra um gráfico desconexo. Uma parte dele é totalmente contida no terceiro quadrante e uma outra parte contida no primeiro. A visualização tipo B consiste em uma janela intermediária entre as visualizações tipo A e C, isto é, o gráfico começa a se parecer com uma reta (neste caso, o próprio eixo x), mas ainda se vêem algumas variações próximas à assíntota vertical. A visualização tipo C representa a total semelhança da curva com sua assíntota horizontal após o processo de redução global, ficando imperceptíveis quaisquer outros detalhes. Todos estes tipos podem ser observados na figura 32.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

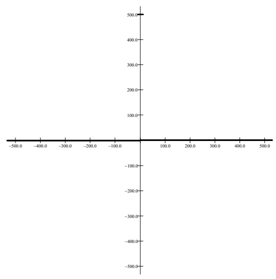
A visualização tipo A desta função exibe um gráfico análogo ao tipo A do item anterior. A diferença é que as assíntotas horizontal e vertical deste não são os eixos



Visualização **tipo A**



Visualização **tipo B**



Visualização **tipo C**

Figura 32: Processo de *redução global* da função $f(x) = \dfrac{1}{x}$

coordenados e sim as retas $x = 1$ e $y = 1$. A visualização tipo B consiste novamente em uma janela intermediária entre o tipo A e o tipo reduzido C, porém ainda é possível observar algumas variações na região próxima à assíntota vertical e um conflito teórico-computacional: o *software* traça pontos da função que não existem, fazendo parecer conexo o seu gráfico. No tipo C observa-se a semelhança grande da curva com uma reta horizontal após a redução global, mas não identificamos com precisão qual o valor de y que determina esta reta. Ela se confunde com o eixo x. No tipo D, utilizamos escalas diferentes para os eixos x e y, deixando um intervalo pequeno para y e um intervalo grande para o x; com isso, é possível observar o valor exato de y que determina a reta com a qual a curva se assemelha. Todos os gráficos de todos os tipos podem ser observados na figura 33.

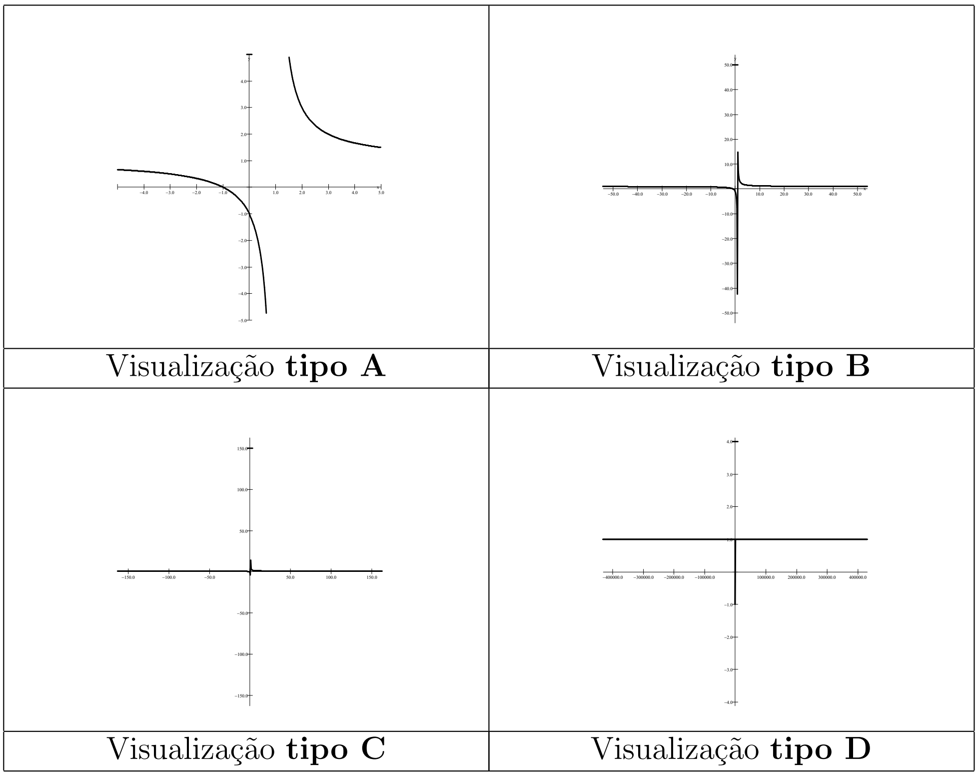


Figura 33: Processo de *redução global* da função $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

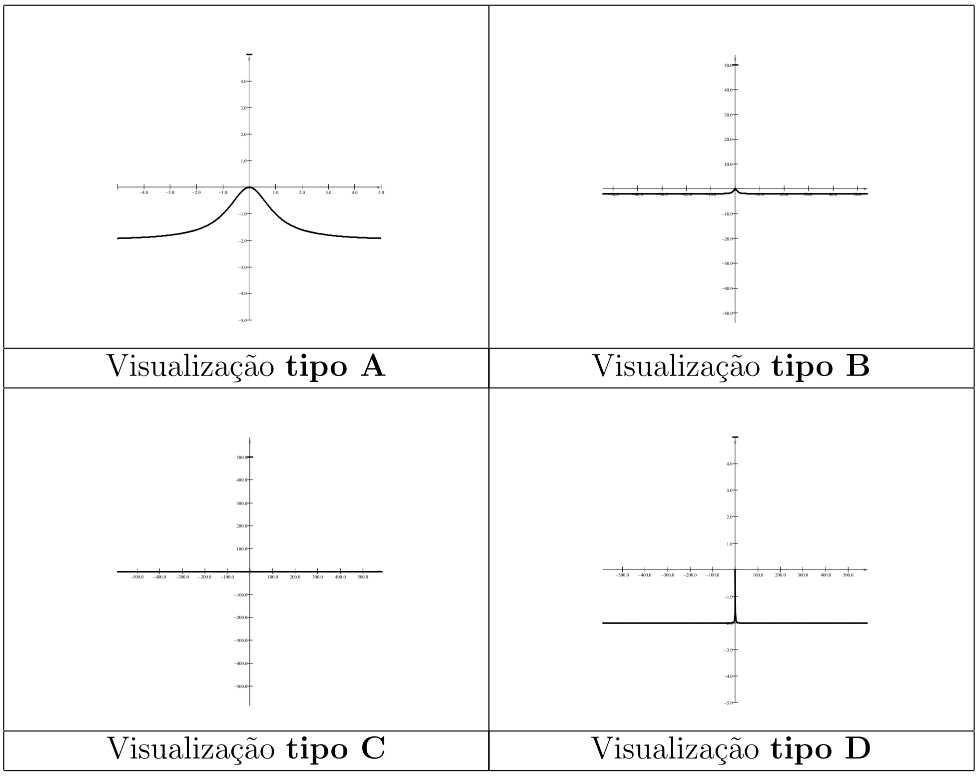


Figura 34: Processo de *redução global* da função $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

A visualização tipo A da função h mostra um gráfico conexo contido na região abaixo do eixo x, crescente para $x \leq 0$ e decrescente para $x \geq 0$. Ela mostra o ponto de máximo da função. No tipo B, o gráfico começa a se parecer com uma reta e a se confundir com o eixo x. Ainda aparece uma pequena oscilação próximo da origem. No tipo C, o gráfico já se confunde totalmente com o eixo x. Mas, a visualização tipo D permite verificar a distância entre a reta e este eixo. Todos estes tipos de visualizações podem ser observados na figura 34.

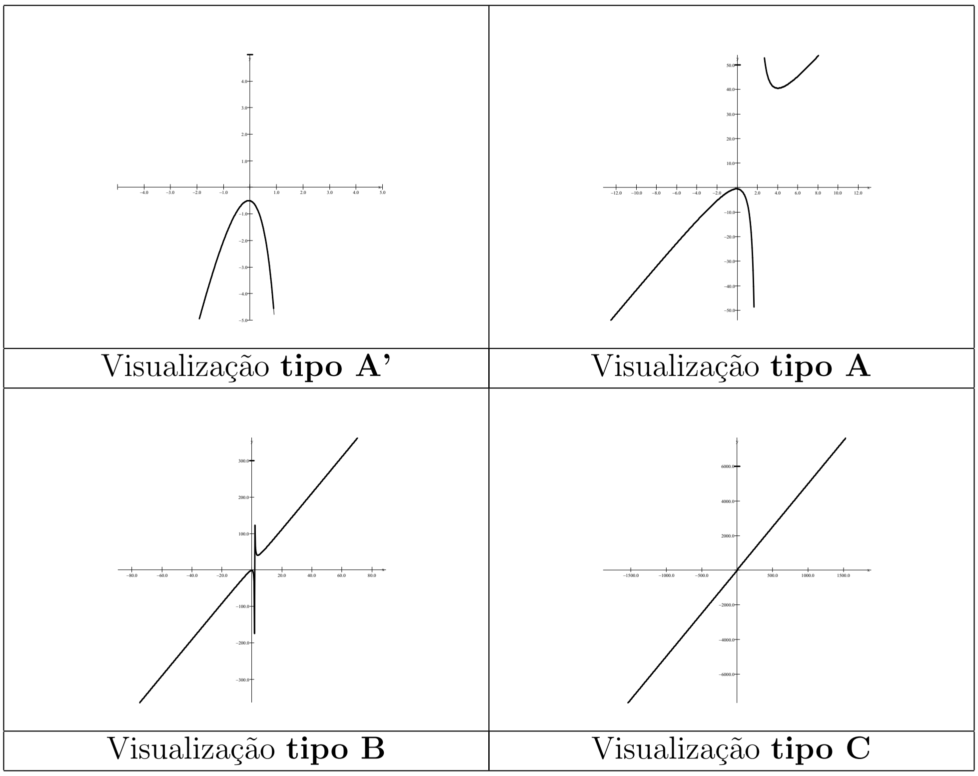


Figura 35: Processo de *redução global* da função $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

A visualização tipo A' desta função mostra um gráfico com concavidade para baixo e com um ponto (aparentemente absoluto) de máximo da função. Através do tipo A, é possível verificar uma segunda parte do gráfico com concavidade para cima e desconexo da parte observada no tipo anterior. Também pode-se verificar que o ponto de máximo observado na verdade é apenas local. Decidimos iniciar pela visualização tipo A' justamente para avaliarmos se o estudante teria a iniciativa de questionar, perceber, ou até mesmo explicar, a ausência destes aspectos qualitativos.

No tipo B, o gráfico começa a se parecer com uma reta inclinada, porém surge outro conflito teórico-computacional: a máquina traça uma espécie de “pico” na região da assíntota vertical. O tipo C representa a redução global completa, onde a curva se assemelha totalmente a uma reta inclinada. Todas as visualizações podem ser observadas na figura 35.

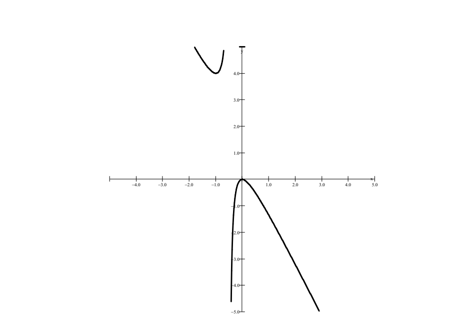
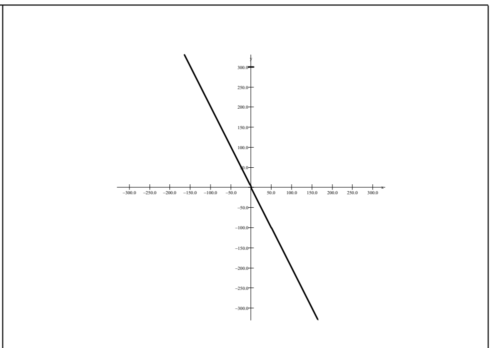
	
Visualização **tipo A**	Visualização **tipo C**

Figura 36: Processo de *redução global* da função $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2 + x}$

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2 + x}$

A visualização tipo A desta função mostra um gráfico semelhante ao do tipo A da figura 35. O tipo C mostra a janela gráfica após o processo de redução global, onde a curva se assemelha a sua assíntota inclinada. As visualizações deste gráfico são mostradas na figura 36.

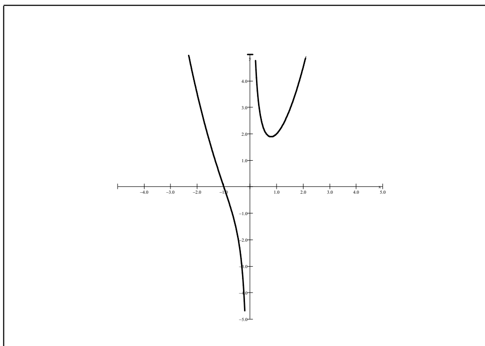
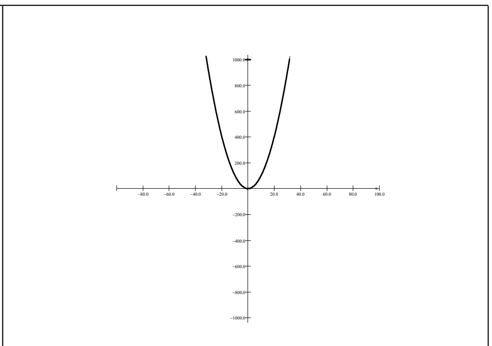
	
Visualização **tipo A**	Visualização **tipo C**

Figura 37: Processo de *redução global* da função $k(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

(VI) $k(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

A visualização tipo A desta função mostra um gráfico decrescente e com um ponto de inflexão para $x < 0$. Também mostra uma parte desconexa a esta com concavidade para cima. A visualização tipo C resulta do processo final de redução global, onde a curva se assemelha a uma parábola, que é o gráfico da função limitante de k. As visualizações desta função estão na figura 37.

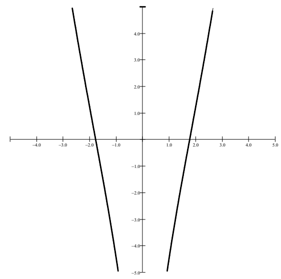
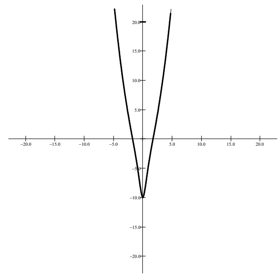
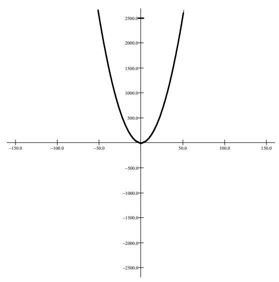
<table>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Visualização tipo A’</td><td>Visualização tipo A</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Visualização tipo C</td></tr>
</table>

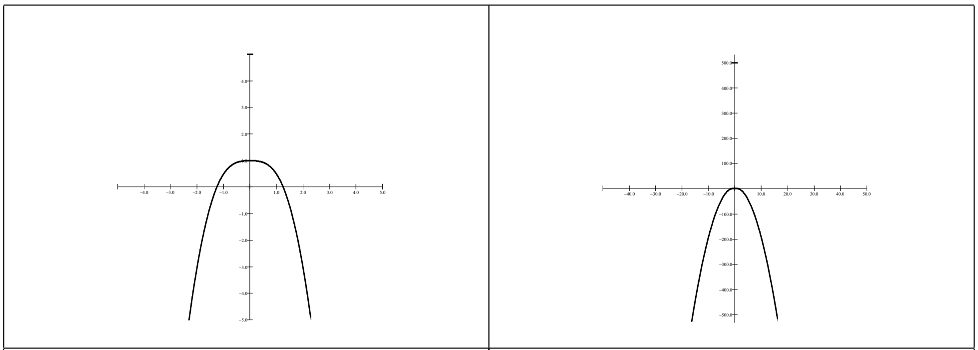
Figura 38: Processo de *redução global* da função $l(x) = \dfrac{x^4 - 10}{x^2 + 1}$

(VII) $l(x) = \dfrac{x^4 - 10}{x^2 + 1}$

A visualização tipo A’ desta função mostra duas partes desconexas muito semelhantes a retas. O tipo A esclarece a existência de uma outra parte ligando as partes visualizadas no tipo anterior e também a existência de um ponto de mínimo da função. Escolhemos a primeira visualização para investigar se o estudante estava consciente de todas as características da função, não se tornando dependente do computador para a construção do gráfico, mas sendo capaz de analisar a função por outros tipos de representações como a algébrica e identificar a presença de mais detalhes além dos traçados pela máquina. O tipo C representa o processo final de redução global da função, onde a curva se aproxima de uma parábola. Todos os tipos de visualizações estão na figura 38.

(VIII) $m(x) = \dfrac{5 - 2x^4}{x^2 + 5}$

O tipo A de visualização desta função mostra um gráfico com concavidade para baixo e duas raízes. O tipo C representa o gráfico após um processo de redução global, no qual há a semelhança com uma parábola de concavidade para baixo. Nesta janela a curva parece tangenciar o eixo x. Os dois tipos estão ilustrados na figura 39.



Visualização **tipo A**	Visualização **tipo C**

Figura 39: Processo de *redução global* da função $m(x) = \dfrac{5 - 2x^4}{x^2 + 5}$

3.3 Perfil dos Participantes

Para esta investigação, inicialmente foram convocados onze voluntários. Eles eram estudantes de uma turma de Cálculo de uma Variável I do curso noturno de licenciatura em Matemática da UFRJ. Nesta disciplina, os alunos têm o primeiro contato com o conceito de limite e também com o estudo de assíntotas a partir de funções racionais. Escolhemos tal instituição, porque o autor deste trabalho já está inserido neste espaço como mestrando. Além disso, houve apoio e abertura por partes de professores do Instituto de Matemática da instituição, possibilitando o acesso aos participantes voluntários e também ao local das atividades.

Nesta seção iremos descrever o perfil de cada um destes participantes. As informações descritas foram obtidas a partir de um formulário de dados pessoais que se encontra no apêndice A e que foi preenchido pelos onze voluntários antes da primeira sessão para que pudéssemos selecionar quatro deles. Esta escolha ocorreu com base nos seguintes critérios que foram analisados com base no formulário: todos deveriam ter alguma experiência (básica) em informática[1] (para facilitar o manuseio com a máquina), um deles deveria

[1]Não que isto seja um pré-requisito para alguém participar das atividades, pois não são necessários

já ter estudado cálculo, pelo menos um deveria ter vindo de uma escola pública e todos deveriam mostrar seriedade e compromisso com a pesquisa apenas pelo espírito de colaboração, pois não seriam remunerados pela participação. Dentro dos parâmetros estipulados, selecionamos Lucas, Alexandre, Ana e João. Lembramos que todos estes nomes são fictícios.

3.3.1 Lucas

Lucas tem 21 anos e cursou o ensino médio em um colégio particular, concluindo-o em 2003. Ele não estudou cálculo no ensino médio, mas já teve contato com esta disciplina no outro curso superior na área de tecnologia, em que estuda. Ele acha cálculo uma disciplina que exige uma intensa dedicação, estudos diários e a resolução de uma grande quantidade de exercícios a fim de fixar o conteúdo. Apesar disto, ele diz gostar desta disciplina porque ela induz a raciocinar acerca de suas questões. Ele também enfatiza que o cálculo não é uma disciplina difícil, desde que haja estudo e dedicação.

Ele costuma usar o computador basicamente na preparação de relatórios e seminários, graças ao curso superior de tecnólogo. Ele também usa em pesquisas na internet e está se iniciando em programação por causa de uma disciplina do curso de Matemática. Ele possui computador em sua casa. Ao ser perguntado se já usou a máquina para estudar Matemática, diz que a única relação é com os conteúdos dos quais precisa em programação. Apesar disto, considera que o computador pode ser uma importante ajuda no ensino de Matemática. Segundo ele, o mundo atual está girando basicamente em torno de computadores, que podem ajudar, pois proporcionariam aos alunos uma nova visão da Matemática. Esta visão ultrapassaria a visão teórica proporcionada pelo livro, alcançando uma visão prática, como por exemplo, a de como calcular a área de uma figura.

3.3.2 Alexandre

Alexandre tem 18 anos e cursou o ensino médio em um colégio particular, concluindo-o em 2006. Ele não estudou cálculo no ensino médio. Seu primeiro contato com o cálculo foi no primeiro período do curso de licenciatura em Matemática, justamente na época da realização desta pesquisa. Ele considera o cálculo, dentre as matérias que tem visto na graduação, a disciplina que mais se aproxima do que um professor de ensino médio leciona, apesar de ser bem mais profundo. Ele diz gostar de cálculo, apesar de achar

grandes conhecimentos de informática, mas não teríamos tantas sessões a serem realizadas e pouparíamos tempo.

difícil, pois, segundo ele, exige muita lógica e pensamento do aluno.

Ele fez curso de introdução à computação e também fez o curso de técnico em informática concomitantemente ao ensino médio. Ele diz ter bastante experiência com a máquina e gosta muito de usá-la, principalmente para pesquisa ou outros assuntos. Ele possui computador em casa. Quanto ao estudo de Matemática, o uso do computador se resume a pesquisas na Internet e sua iniciação em programação, graças à disciplina de seu curso de graduação. Ele não acredita que o computador possa ajudar sempre no ensino de Matemática, mas diz que, pode ajudar sim se utilizado de forma a interagir com o aluno, aplicando conteúdos, fora isto, não. Ele enfatiza não ser contra a utilização do computador para ensinar Matemática, mas desde que isto seja feito com critério.

3.3.3 Ana

Ana tem 20 anos e fez o ensino médio em colégio particular, que concluiu em 2004. Não estudou cálculo no ensino médio. Seu primeiro contato com o cálculo foi na época desta pesquisa, no primeiro período de seu curso de licenciatura em Matemática. Ela acha o cálculo uma disciplina que necessita ser praticada através de exercícios para ser compreendida. Ela também acha essencial saber interpretar os exercícios. Ela gosta de cálculo, apesar de achá-lo difícil em princípio, mas diz que, com o decorrer do estudo se torna de boa compreensão.

Concomitantemente ao ensino médio, fez o curso de técnico em informática, por isso, considera ter grande conhecimento sobre computadores. Ela possui computador em casa e ele faz parte de seu dia-a-dia. Sua experiência ao usar o computador para aprender Matemática se resume em pesquisas na Internet sobre exercícios, livros e outros. Ela acha que o computador pode ajudar no ensino de Matemática, pois ele oferece um grande número de informações, sendo assim, seria mais uma ferramenta em prol da Matemática.

3.3.4 João

João tem 18 anos e cursou os dois primeiros anos do ensino médio em uma escola estadual, o último ano cursou em uma escola particular, concluindo-o no ano de 2006. Ele não estudou cálculo no ensino médio. Seu primeiro contato com esta disciplina foi na época desta pesquisa, quando estava no primeiro período do curso de licenciatura em Matemática. Ele gosta de cálculo, considera-o muito interessante, apesar de difícil.

Na época da pesquisa, João não possuía computador em casa, mas no passado, sim.

Mas mesmo assim ele tem contato com a máquina na faculdade, em casas de amigos e em casas de internet. Nunca usou o computador para estudar Matemática. Apesar disto, ele acredita que o computador possa ajudar no ensino de Matemática, pois, segundo ele, facilitaria na visualização de gráficos e problemas envolvendo gráficos em 3D, por exemplo.

3.4 Análise de Dados

> *Pesquisas recentes mostram a consistente complexidade da imagem mental de um indivíduo: estudantes podem dar respostas 'certas' por razões erradas, enquanto respostas 'erradas' podem ter uma origem racional.* (DUBINSKY; TALL, 1991, p. 234, tradução nossa)

Inicialmente faremos a correção dos testes escritos aplicados na primeira sessão. Faremos a seguinte discriminação das respostas dos alunos para cada item com o intuito de compreendermos melhor as razões do estudante para determinada resposta, indicando por:

C Resposta correta com justificativa correta;

CI Resposta correta, porém incompleta;

CE Resposta correta, porém com justificativa errada;

E Resposta errada;

D Que o estudante escreveu afirmações corretas, mas que não têm relação com o que foi perguntado, isto é, o estudante desviou do que foi pedido na questão;

B Resposta em branco.

A partir da análise do primeiro teste escrito e das observações realizadas na primeira atividade computacional, traçaremos um esboço da imagem de conceito anterior às atividades para cada participante. Com isso, pretendemos fazer uma análise diagnóstica do estado de desenvolvimento dos participantes com relação ao tema proposto. Dizemos "esboço" para frisar que achamos ser impossível mapear com extrema precisão qualquer imagem de conceito, pois há vários fatores a serem considerados: o estado emocional das pessoas analisadas, o nível de atenção do participante, o nível de comunicação que está sendo desenvolvida entre entrevistador e entrevistado e diversas outras possíveis razões. Imagens de conceito são extremamente mutáveis, principalmente no estágio dos participantes desta pesquisa, ou seja, iniciando no cálculo. A cada dia em seus cursos aprendiam tópicos novos e podemos dizer que suas imagens de conceito estavam bastante instáveis.

As observações relativas à reação dos estudantes durante as sessões III (atividade computacional 2) e IV (atividade computacional 3) servirão para acompanharmos a evolução deles durante a experiência proposta. Chamaremos esta fase de *processo de interação entre a abordagem e as imagens de conceito de cada participante*.

Em seguida, para a sessão V (atividade computacional 4) e a sessão VI (teste escrito posterior) procederemos de forma análoga ao procedimento descrito para as sessões I e II. Isto é, neste caso faremos um esboço da imagem de conceito posterior às atividades de cada participante a partir da análise do último teste escrito e da observação da última atividade computacional. A correção do teste será realizada da mesma maneira daquela descrita para o primeiro teste.

Feitos os dois esboços, o anterior e o posterior, faremos a comparação entre eles para verificarmos as possíveis mudanças. Podemos observar nossa metodologia de análise para cada participante no diagrama da figura 40.

Para analisarmos de forma clara e objetiva, classificaremos as reações dos estudantes em certas categorias de caráter relevante. Elas serão explicadas abaixo:

1. **Definição de conceito:** Neste tópico, avaliaremos a capacidade do estudante de definir os objetos matemáticos com suas próprias palavras ou através da linguagem matemática, bem como a sua capacidade de entender definições formais.

2. **Critérios:** Será avaliada a capacidade de usar ou criar critérios para determinar ou calcular os objetos em questão. Por exemplo, verificar se o estudante sabe utilizar algum critério de existência de assíntota ou se, até mesmo, ele é capaz de formular um.

3. **Exemplos:** Será avaliada a capacidade do participante de criar exemplos corretos sobre o assunto abordado. Isto é importante, pois, para conseguir dar um exemplo, o estudante deve acessar diversas partes de sua imagem de conceito e realizar conexões entre idéias. Portanto, este item revela uma característica importante da imagem de conceito.

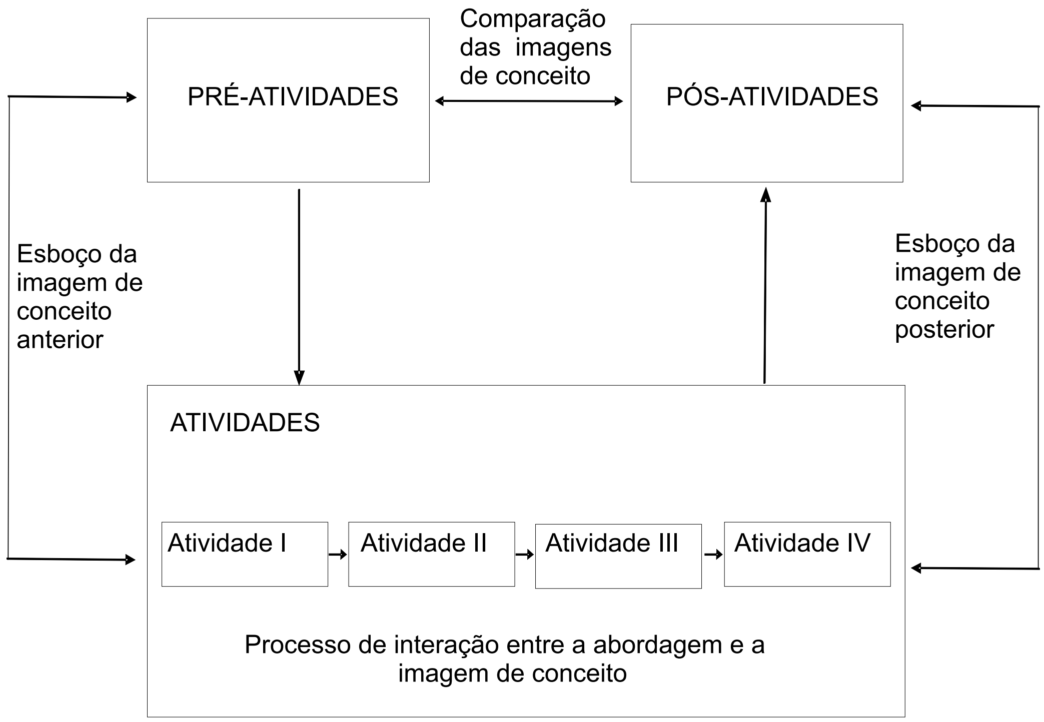


Figura 40: Análise da experiência para cada participante

4. **Idéias equivocadas:** São afirmações que não estão em coerência com a teoria matemática relacionada aos tópicos aqui propostos.

5. **Idéias corretas:** São as afirmações corretas sobre os tópicos abordados evocadas durante as sessões pelos estudantes ou possivelmente também sobre outros aspectos indiretamente relacionados às atividades.

6. **Conexões:** É a capacidade (ou a falta dela) do estudante de relacionar as diferentes idéias presentes em sua imagem de conceito para resolver os problemas. Consideramos esta parte muito importante, pois ela permite o desenvolvimento (ou criação) de novas idéias.

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Conforme já foi explicado, Giraldo (2004) define *conflitos teórico-computacionais* como quaisquer situações em que uma representação computacional entra em contradição com sua respectiva formulação matemática. Neste item, procuraremos identificá-los quando surgirem e, principalmente, avaliarmos as reações do estudante em tais situações de conflito.

8. **Incoerências momentâneas:** São afirmações equivocadas ditas em alguns momentos pelo participante, mas que, posteriormente, pudemos comprovar não refletirem a verdade sobre a imagem de conceito do estudante, isto é, são pequenos

enganos momentâneos causados por algum fator, tais como: falta de atenção, falta de compreensão de alguma palavra ou expressão dita ou outros. Em geral, são aquelas afirmações ditas sem muita reflexão, mas que logo em seguida, ao pensar melhor, o estudante percebe o erro.

9. **Impressões:** São sentimentos ou crenças expressos pelos participantes e que foram provocados pelas atividades. Por exemplo, se o estudante gosta ou não das atividades, se as acha relevantes ou não, se as acha ricas, enfim, qualquer opinião relacionada à abordagem. Estas impressões são importantes, pois sabemos que aspectos emocionais podem influenciar no desempenho do estudante durante as atividades. Por exemplo, um indivíduo que não gosta de usar computadores poderia formar um bloqueio e não interagir de forma positiva com a abordagem. Esta será a única categoria a ser avaliada somente ao final das atividades.

Ao final, verificaremos quais aspectos, tanto positivos quanto negativos, se repetirão com alguma freqüência nos quatro participantes para analisarmos os efeitos das descrições em um contexto mais geral.

4 Resultados da experiência

... quando a gente começa a experimentar, ainda mais quando funções parecem parábolas ou quando tem as assíntotas oblíquas, abre mais a mente para a gente entender o que é ... tenho certeza que tem muito mais coisa ... Gostei pra caramba! (João, durante as atividades)

Neste capítulo, inicialmente vamos relatar o que foi observado de mais relevante em cada uma das sessões descritas no capítulo anterior. Cada seção seguinte se referirá ao relato de todas as etapas da pesquisa para cada participante. A exceção está reservada para a última delas, na qual faremos uma análise geral do que foi observado em todos os casos.

A seguir vamos detalhar um pouco mais como organizaremos cada uma das quatro primeiras seções deste capítulo. Em cada uma delas, iniciaremos por relatar as respostas de cada participante ao teste realizado antes das atividades propostas. A referência aos exercícios será feita pelas numerações conforme consta no apêndice B.

Também iremos relatar os trechos mais significativos das atividades realizadas com o auxílio do computador, cujo áudio foi gravado e devidamente transcrito. Para facilitar a compreensão, em cada atividade nos referiremos às funções por suas numerações conforme o apêndice C. Durante nosso relato, precisaremos citar os gráficos observados pelos participantes durante o processo de redução global e que estão representados nas figuras da seção 3.2.

O relato das atividades de I a IV constará de citações literais das falas dos participantes quando as julgarmos relevantes para a compreensão da reação deles à abordagem. Durante estas citações, tentaremos apresentar da forma mais detalhada possível, o símbolo: ... (três pontos) significará uma pausa prolongada; quaisquer informações adicionais observadas durante as atividades serão colocadas entre parênteses, tais como: o participante apontou para a tela, para um trecho específico do gráfico ou fez qualquer outro movimento que possa ajudar no entendimento da comunicação, ou ainda, qualquer outro dado observado durante a experiência.

Após o relato das atividades, descreveremos o desempenho do estudante no teste escrito realizado depois das atividades, que, conforme descrito no capítulo de metodologia, é idêntico ao aplicado durante a primeira sessão. Em seguida ao relato, faremos uma análise individual comparativa entre o que foi observado antes e após as atividades.

Por fim, faremos uma análise geral da reação dos quatro participantes, observando características positivas (ou negativas) comuns e incomuns deles.

4.1 Lucas

4.1.1 Pré-atividade

1. Em todos os itens, deste exercício, Lucas apenas escreve por extenso o significado do símbolo de limite. Por exemplo, no item (a) Lucas escreve:

   > Significa que o $\lim_{x \to a} f(x) = b$, com x tendendo a um número a pertencente ao conjunto dos números reais, irá ter como resultado um número b que também pertencerá ao conjunto dos números reais.

2. (a) Ele acerta, isto é, diz que é falso, mas por razões erradas. Afirma que $q(x_0) = 0$ implica $f(x_0) = 0$.

   (b) Ele erra. Afirma que é verdadeiro. Ele acha que a função pode se aproximar muito da assíntota, mas nunca cortá-la.

   (c) Ele acerta, isto é, diz que é falso, mas por razões erradas. Assim como no item (a), ele afirma que se $q(x) = 0$, então $f(x) = 0$.

3. (a) Ele erra. Dá o exemplo da função $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e calcula o seguinte limite: $\lim_{x \to 1} \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1}(x+1) = 2$. Ao invés de calcular o limite quando $x \to \infty$, ele possivelmente confunde com o cálculo de assíntotas verticais e calcula o limite em pontos de descontinuidade.

   (b) Ele erra. Dá o exemplo $y = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ e diz que esta função possui a assíntota vertical $x = 1$, o que é um erro, pois neste caso, como podemos observar, $x^2 - 1$ também é zero.

(c) Em branco. Ele não estudou assíntotas inclinadas em seu curso de cálculo.

(d) Também erra. Cita a mesma função dos itens anteriores.

4. (a) Lucas erra. Novamente mostra que confunde assíntotas horizontais com verticais. Diz que é relacionada com o eixo y e que é obtida a partir de limites laterais.

   (b) Errada. Apenas diz que é relacionada com o eixo x e é encontrada a partir do número que zera o denominador.

   (c) Em branco.

5. (a) Lucas erra. Ele acha que basta a função ser polinomial.

   (b) Também erra. Assim como no item anterior, ele diz que basta a função ser polinomial.

   (c) Não responde.

6. (a) Esboço do gráfico correto. Também indica as assíntotas corretamente. Já vimos que Lucas tem uma tendência a confundir os critérios para encontrar assíntotas verticais com os critérios para horizontais, como neste caso, em ambos os cálculos, obtém-se o mesmo valor, Lucas acaba traçando o gráfico correto. Também faz o seguinte cálculo:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})}=1$$

   (b) Gráfico incorreto. Ele encontra a assíntota vertical corretamente ($x=2$), mas erra ao encontrar duas assíntotas horizontais ($y=-1$ e $y=1$), que, na verdade, não existem. Provavelmente não considera que os graus dos polinômios do numerador e do denominador são diferentes.

   (c) Gráfico incorreto. Encontra assíntotas horizontais e verticais que não existem. Quanto à vertical, novamente ele não percebe a indeterminação do tipo $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, quando $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, e que este caso não gera uma assíntota vertical. Quanto à horizontal, comete o mesmo erro do item anterior.

4.1.2 Atividade I

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Lucas observa o gráfico tipo A desta função (veja a figura 32) e inicialmente não identifica nenhuma assíntota. Ao pedirmos a mudança da janela gráfica para os tipos B e C, perguntamos o que ocorreu e ele responde:

> **L:** Basicamente ela se tornou uma reta. Chegou tão próximo de ... uma reta ... que é o próprio eixo x. O x está indo, estipulando assim, do valor $-\infty$ ao $+\infty$. E o y é zero.

Neste ponto, perguntamos se y é mesmo zero e ele responde:

> **L:** ... Eu acho que ele (o y) é zero mesmo.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Lucas ainda não parece identificar a existência de nenhuma assíntota ao observar o gráfico do tipo A desta função (veja a figura 33). Pedimos então para reduzí-lo até ficar do tipo B e perguntamos se, neste caso, o y continua indo para zero e ele diz:

> **L:** O valor é bem próximo de zero, mas ele não é zero ... Se você perceber bem aqui ela não vai formar uma única reta. Se o y fosse zero aqui ela estaria formando uma única reta. Então, ela tem uma divisão como se fosse um ponto aqui ... bem próximo de ...

Ele continua a mudar a janela até ficar do tipo C e continua:

> **L:** É ... ela não chega a zero, pode ver aqui ... tem uma concavidade ... um valor bem próximo ... Ela está indo de infinito a ... como se tivesse tendendo a zero assim.

Lucas se refere ao pico que se forma no centro do gráfico sobre o eixo y e o denomina de concavidade. Ele parece só perceber a existência de assíntota quando este tipo de erro computacional ocorre. Então, ele completa:

> **L:** Isto aqui seria uma assíntota, né? É a assíntota do eixo y, a assíntota vertical.

Sugerimos que ele mantenha o intervalo de y entre -5 e 5 e aumente o de x, tornando o gráfico do tipo D, e perguntamos se ele acha que a função vai para zero. Ele responde:

> **L:** Esta função, com estes valores, está se aproximando de 1, pela direita e pela esquerda, porque a assíntota também continua valendo 1.

Pudemos verificar, ao observar o Lucas apontando para a tela do computador, que as expressões "pela direita"e "pela esquerda" se referem, respectivamente, a "$x \to +\infty$" e "$x \to -\infty$". Perguntamos se ele considera o último gráfico correto e ele diz:

> **L:** Eu acho que sim, porque este gráfico assim ... assíntotas ... de acordo como se tivesse tendendo a valores infinitos, valores bem grandes, ela deveria ter tipo esta variação que teve. Entendeu? Porque naqueles valores que a gente digitou, valores relativamente altos assim deveria ser a mesma para qualquer valor.

Lembramos a questão da escala e quais eram os comprimentos dos intervalos. Por exemplo, que em um gráfico com grande redução global, 1cm pode equivaler a um intervalo de comprimento 600. Ele não havia se dado conta disto. Então, perguntamos qual a localização da reta $x = 1$ e ele diz:

> **L:** Mais ou menos aqui assim (aponta para muito próximo do eixo y) com a escala diminui bastante ... ela encolhe ... seria ... assíntota está relacionada com a escala que eu vejo o gráfico.

Perguntamos então, se a existência de assíntota depende da escala e ele responde:

> **L:** ... não, independe da escala porque a forma assim, eu acho que ... ela existe ali, né, mas com a variação grande nas escalas, né, ela ... não seria tão fácil de perceber como na escala comum que a gente vê.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Construímos o gráfico de h no computador na janela do tipo A conforme a figura 34 e Lucas não aponta a existência de nenhuma assíntota. Afastamos a janela gráfica, passando pelo tipo B e chegamos ao tipo C e ele diz:

> **L:** Parece formar uma reta. É uma reta ... y valendo zero, né ... eixo x.

Ao mudarmos a escala, tornando a janela gráfica do tipo D, ele pergunta:

> **L:** Tem uma assíntota, né?

Perguntamos qual é a assíntota e ele responde:

> **L:** Vertical.

Perguntamos novamente que tipo de assíntota e ele reafirma:

> **L:** Vertical.

Neste momento, pensamos que ele pudesse estar confundindo os significados das palavras vertical e horizontal, mas rapidamente pedimos uma explicação dele sobre o significado destes termos e nos certificamos de que ele estava correto quanto a isto. Ele realmente estava observando a existência de uma assíntota vertical, então ratificamos a suspeita que tivemos no item (II) desta atividade: até agora, ele só identifica as assíntotas quando, por um erro da máquina, o computador liga pontos formando um segmento de reta como nas janelas dos tipos B e D da figura 33 ou na janela do tipo D da figura 34, porém neste último, a assíntota vertical não existe de fato, causando um conflito cognitivo potencial. Até este momento, ele não se deu conta da inconsistência.

Em seguida, perguntamos se existe uma assíntota horizontal. Lembramos que Lucas está observando uma janela do tipo D da figura 34. Ele responde:

> **L:** Nesta escala, eu não consigo visualizar a horizontal, mas pela equação existe essa assíntota horizontal, mas nessa escala eu não consigo perceber.

Perguntamos o que o leva a crer na existência de uma assíntota horizontal. Ele responde:

> **L:** Pela fórmula.

Perguntamos, então, qual seria esta assíntota e ele pensa bastante, mas não responde. Neste ponto, a reação de Lucas é muito estranha, pois o gráfico em questão é análogo ao do item (II) e, neste item, ele havia percebido a existência da assíntota horizontal.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x - 2}$

Visualizamos o gráfico desta função como na figura 35, inicialmente o observamos em uma janela do tipo A' e perguntamos se o que ele vê representa bem o gráfico daquela função e ele diz:

> **L:** Não, não representa. Porque faltam as assíntotas.

Esta resposta nos faz pensar se ele de fato tinha conhecimento da existência das assíntotas, por exemplo, pela análise da fórmula, ou simplesmente se as atividades estavam o induzindo a achar que todos os gráficos de funções racionais devem possuir assíntotas. Por suas reações durante as atividades e, já antecipando, pelos resultados dos testes das pré e pós-atividades, garantimos que a segunda alternativa traduz melhor o que ocorreu.

Sugerimos uma outra janela, do tipo A, e ele ainda não identifica a existência de nenhuma assíntota. Devemos lembrar que, nesta janela, já podemos visualizar a descontinuidade em $x = 2$. Quando modificamos mais um pouco a janela até ficar do tipo B, ele diz existir a assíntota vertical e ainda não percebe a inclinada. Mais uma vez, Lucas só aponta a assíntota vertical após um erro do computador, isto é, quando é traçado uma espécie de pico. Consideramos que estes fatos sugerem que Lucas entende a assíntota como parte do gráfico e não algo externo a ele.

Alteramos a janela ainda mais até ficar do tipo C e só então ele afirma:

> **L:** A assíntota inclinada é esta aqui (aponta para a tela). Ela parece com uma função $y = ax + b$, onde o b é zero porque ela está tocando o eixo y no ponto $y = 0$, né. Então, dá para saber que o b é zero porque o b é o ponto que a reta corta o eixo y.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2 + x}$

Procedemos de forma análoga e a reação de Lucas é semelhante ao que já foi descrito.

(VI) $k(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

Lucas observa o gráfico desta função inicialmente numa janela do tipo A conforme a figura 37 e agora ele detecta a presença da assíntota vertical. Ao modificarmos a janela, ficando do tipo C, ele diz:

> **L:** O comportamento dela agora é de uma função do 2º grau. Uma parábola.

Perguntamos se a função possui alguma outra assíntota e ele responde:

> **L:** Ela tem uma assíntota horizontal. Dessa função no caso, seria ... $y = \pm 1$.

Perguntamos então como isto ocorre e o que se segue é uma série de frases desconexas e confusas. Perguntamos também se ele poderia apontar para o gráfico e mostrar o que ele está dizendo, mas Lucas pensa durante algum tempo e não consegue. Pelo que pudemos observar durante este item, Lucas acabou se confundindo com a distinção entre as variáveis x e y.

A reação de Lucas à visualização das funções dos itens (VII) e (VIII) não levantou nenhuma questão relevante.

4.1.3 Atividade II

(I) $y = \dfrac{1}{x}$

Traçamos novamente no computador o gráfico desta função em uma janela conforme o tipo A da figura 32, onde a descontinuidade no ponto em que $x = 0$ é bem visível. Ao ser perguntado se a função possui uma assíntota vertical (ele havia dito no encontro anterior que não havia, mesmo tendo visto este mesmo gráfico na mesma janela), Lucas diz que sim sem muita certeza e após uma longa pausa. Podemos dizer que Lucas na verdade não sabe, ou pelo menos não sabia, o que caracteriza a existência de uma assíntota ao visualizar um dado gráfico, pois ele só a identificava quando o que ele achava ser a assíntota era desenhada pelo computador (ver atividade I). Notemos que neste caso o computador não ligou os pontos dando a impressão de ter desenhado a assíntota como na visualização tipo B da figura 33.

Após alterarmos a janela anterior até ficar do tipo C (ver figura 32), Lucas identifica a semelhança com a reta e ainda cita a fórmula genérica:

L: A função $y = ax + b$, uma reta.

É interessante que ele veja uma reta horizontal e mesmo assim cite a fórmula completa da reta. Poderia simplesmente ter dito $y = k$ por exemplo.

Durante a etapa numérica, quando buscava aproximações por retas para a função $y = \frac{1}{x}$ após o processo de redução global, Lucas obtém duas retas a partir dos pontos da função cujos valores absolutos de x são cada vez maiores. Os valores de x escolhidos por Lucas, os respectivos valores de y e as fórmulas calculadas pelo *software* estão relacionados abaixo:

x	y	Fórmula
80	0.0125	$y = 0.00014x + 0.0016$
-92	-0.01087	
-120	-0.008333	$y = 0.000056x - 0.0017$
150	0.006667	

Lucas percebe que os coeficientes das fórmulas dadas pelo *software* se aproximam de certos valores e comenta:

> **L:** Eu acho que a equação... ela variou. O a, comparando a primeira com a segunda (reta), quanto maior é o valor de x que eu determinei aqui, mais o a fica próximo de zero. O b ... não dá para dizer muita coisa, mas acho que ele se afasta de zero.

Após mais uma iteração, cujos valores encontrados foram:

x	y	Fórmula
-360	-0.002778	$y = 0.0000058x - 0.00069$
480	0.002083	

Lucas completa:

> **L:** O a está cada vez mais próximo de zero e o b está ficando próximo de zero também. É, deu para ver... a função está se aproximando da função... $y = 0$.

Lucas também traça todas as retas encontradas na mesma janela gráfica tipo C da função f e vê todas as curvas se confundirem.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Lucas procede de forma análoga neste item.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Retomamos esta função e a visualizamos em uma janela do tipo D, conforme mostrado na figura 34 para fazermos a aproximação. Ele reconhece a semelhança do gráfico da função com uma reta horizontal. Ao contrário da atividade I, aqui ele já diz existir uma assíntota horizontal pela observação do gráfico. Perguntamos então, se existe algo na fórmula que indique a assíntota horizontal. Ele diz:

L: Este valor aqui, o -2. Acho que ele indicaria esta assíntota sim. Pelo limite ... limite $-\infty$ e $+\infty$. Se eu calculasse este limite ... x^2 em evidência ... daria $-\infty$, quer dizer, ... -2.

Aqui ele se refere ao artifício já conhecido por ele das aulas de cálculo:

$$\frac{-2x^2}{x^2+1} = \frac{-2x^2}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} \tag{4.1}$$

Como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, segue que:

$$\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{1+\frac{1}{x^2}} = -2 \tag{4.2}$$

Neste momento, lembramos-lhe que ele havia dito na atividade anterior que esta função possuía uma assíntota vertical e ele diz:

L: ... Vou voltar aqui para a outra janela ... parece que ela sobrepôs nessa ... ela ficou bem pequena de acordo com a escala ... imperceptível.

Ele ainda continua achando que a função h possui uma assíntota vertical.

Partimos para a aproximação numérica e ele escolhe os seguintes valores de x abaixo, os respectivos valores de y e a fórmula encontrada pelo *software* também estão mostrados abaixo:

x	y	Fórmula
9000	-2.0	$y = -2$
5000	-2.0	

Notamos que, para a precisão do *software*, as imagens calculadas são arredondadas para -2. Então, perguntamos se ele acha que o gráfico da função fica exatamente igual à reta $y = -2$ no infinito e ele responde:

L: É uma aproximação.

Lucas também traça a reta encontrada na mesma janela gráfica tipo D da função h e vê todas as curvas se confundirem.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Lucas agora volta a observar o gráfico desta função em uma janela do tipo A' como mostra a figura 35 e faz as mesmas observações expostas anteriormente com relação a assíntotas. Então, reduzimos o gráfico até ficar do tipo C para calcularmos a aproximação. Os valores escolhidos e encontrados por ele foram:

x	y	Fórmula
25	135.913	$y = 4.93x + 12.67$
15	86.6154	
100	510.2143	$y = 5x + 10.27$
400	2010.0528	

Após comparar as duas fórmulas encontradas, Lucas fica pensativo e depois diz que, provavelmente, os coeficientes a e b da reta se aproximarão respectivamente de 5 e 10. Isto será verificado na próxima atividade, durante a etapa algébrica. Lucas também traça as retas encontradas na mesma janela gráfica tipo C da função i e vê todas as curvas se confundirem.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2+x}$

Inicialmente observamos novamente o gráfico tipo A desta função como mostra a figura 36, mas desta vez Lucas já identifica a existência das assíntotas vertical e inclinada. Lembramos que isto não ocorreu na outra atividade. Depois reduzimos o gráfico até ficar do tipo C e ele vê todo o gráfico ficar parecido com a assíntota inclinada. Então, perguntamos o que ele refletiu sobre o que vem observando e ele diz:

> **L:** Eu vejo que as coisas estão batendo ... O gráfico fica parecido com uma reta, né ... a função como um todo, né ...porque ela não seria uma reta ... Estes cálculos aqui fornecem a equação da assíntota.

Partimos então para a escolha dos pontos e a aproximação numérica, cujos valores encontrados estão abaixo:

x	y	Fórmula
100	-199.005	$y = -2x + 1$
500	-999.001	

Notemos que o *software* já arredonda os coeficientes da reta, ficando exatamente igual à fórmula da assíntota inclinada da função j. Explicamos ao Lucas que isto ocorreu por causa da precisão do *software* e ele apenas balança a cabeça concordando. Ele traça a reta encontrada na mesma janela gráfica tipo C da função j e vê a semelhança desta com a reta. Na próxima atividade, na etapa algébrica, iremos comparar os resultados.

4.1.4 Atividade III

Ao final da atividade anterior havíamos pedido para Lucas refletir sobre um método alternativo para o cálculo da fórmula da assíntota a partir apenas da lei da função, um método algébrico, mas ele não retorna com nenhuma resposta. Sugerimos, então, a divisão polinomial. Os cálculos do participante serão descritos a seguir.

Lucas faz os cálculos com as funções dos itens (I) e (II), mas como estes casos são mais simples e diretos preferimos iniciar o relato pelo item mais interessante.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Neste item, Lucas faz o seguinte cálculo após nossa sugestão:

$$\frac{-2x^2}{x^2+1} = -2 + \frac{2}{x^2+1} \tag{4.3}$$

Perguntamos qual o valor de $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^2+1}$, ele pensa bastante e responde com outra pergunta:

L: Seria $+\infty$, $-\infty$?

Pedimos então, para que ele construa no computador o gráfico de $y = \dfrac{2}{x^2+1}$ e refaço a pergunta anterior. Desta vez, ele responde bastante surpreso:

L: ... É zero aqui?

Neste momento, ele retoma o cálculo (4.3) e entende que, como $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2}{x^2+1} = 0$, temos $\lim\limits_{x\to\pm\infty} h(x) = -2$. Lucas compara este resultado com aquele encontrado na etapa numérica e observa a coerência. Além disso, também observa a reta encontrada nesta etapa na mesma janela gráfica tipo D da h e das outras retas encontradas na etapa numérica e vê todas se confundirem.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

De forma análoga ao item anterior, Lucas efetua a divisão conforme sugerido e acha:

$$\frac{5x^2+1}{x-2} = (5x+10) + \frac{21}{x-2} \tag{4.4}$$

Pedimos para que Lucas traçasse o gráfico de $y = 5x + 10$ na mesma janela gráfica tipo D da função i e ele vê a semelhança do gráfico desta função com a reta em questão, sendo esta reta uma aproximação ainda melhor do que as encontradas na etapa numérica. Ele também identifica a reta $y = 5x+10$ como a assíntota inclinada da função i. Ao final desta sessão, levantamos a seguinte questão: Será que todas as retas encontradas até agora, tanto na etapa numérica quanto na etapa algébrica, podem ser chamadas de assíntotas? E Lucas, sem pensar muito, diz que sim e justifica dizendo que todas as retas nas janelas gráficas após a redução global são muito semelhantes e se confundem com o gráfico da função estudada.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2+x}$

Lucas faz a divisão e encontra:

$$\frac{-4x^3}{2x^2+x} = (-2x+1) + \frac{x}{2x^2+x} \tag{4.5}$$

Agora ele já percebe que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{2x^2+x} = 0$, justificando que ambos denominador e numerador vão para infinito, mas o primeiro é “mais forte”que o segundo, determinando assim o resultado deste limite. Ele compara o resultado obtido nesta etapa com o resultado obtido na etapa anterior e vê a coerência dos valores.

Em todas os itens, Lucas observou a discriminação geométrica entre todas as curvas estudadas e as respectivas aproximações das assíntotas.

Ao fim desta atividade pedimos para o participante pensar se poderíamos chamar todas as retas encontradas até aqui de assíntotas, já que todas elas após o processo de redução global eram muito semelhantes aos gráficos das funções originais. A resposta para esta reflexão viria na próxima sessão.

4.1.5 Atividade IV

Com intuito de poupar o leitor, vamos omitir o relato dos itens de (I) a (III) por serem mais simples e iniciaremos nossa narrativa pelo item (IV).

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Após traçarmos os gráficos de $y = [i(x) - \bar{i}(x)]x$ e $y = [i(x) - \hat{i}(x)]x$ conforme explicado na seção 3.1 e conforme o roteiro do apêndice C, Lucas observa e não acha mais que todas as retas são consideradas assíntotas, mas existe uma reta que melhor se aproxima do gráfico da função e esta reta é a calculada na etapa algébrica. Lucas se mostra bastante entusiasmado com o que vê e perguntamos por que ele acha que isto acontece e ele responde:

> **L:** Porque a diferença ... a diferença delas, da $i(x)$ e essa reta que a gente calculou algebricamente ficou bem próxima de zero, mas você agora multiplicando por um x grande (como se fosse infinito) já mostrou que houve um desvio ... considerável entre a $y = 5x + 10$ e a $y = 5x + 10.27$ que a gente calculou.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2+x}$

Lucas procede de forma análoga ao item anterior.

(VI) $k(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$

Retomamos esta função em uma janela gráfica do tipo A como mostra a figura 37 e Lucas já fala que a forma do gráfico depois de reduzido se parecerá com uma parábola e também fala da existência da assíntota vertical $x = 0$. Devemos lembrar que em etapas anteriores Lucas só identificava assíntotas verticais quando, por um erro, a máquina ligava os pontos, fazendo parecer que as estava traçando. Realizamos, então, de forma análoga às atividades anteriores, todas as outras etapas. Em alguns momentos, pedimos que ele definisse o significado de assíntota e ele diz:

> **L:** A assíntota vertical é aquela que corta o eixo x em algum ponto e a horizontal é aquela que corta o eixo y em algum ponto ...

Ele dá características de retas verticais e horizontais quaisquer, mas não fala o que caracteriza uma assíntota. Então, insistimos e perguntamos quando uma reta pode ser definida como uma assíntota horizontal e ele responde:

L: Quando x tende a infinito, assim, ... no caso da horizontal o y também, não? ... (pensa bastante) o y tenderia a zero?

Lucas se mostra confuso e lhe explicamos que, para existir uma assíntota horizontal, uma função pode não tender a zero necessariamente, ela pode tender a um valor fixo qualquer e ele insiste em dizer que a assíntota horizontal cortará o eixo y.

Inicialmente Lucas achava que todas as fórmulas encontradas nas aproximações numérica e algébrica poderiam ser classificadas como fórmulas de funções limitantes para a função k, mas após a etapa de reconceituação ele percebeu a unicidade.

Nos itens (VII) e (VIII), Lucas procede de forma análoga.

Ao final da última atividade, Lucas fala sobre o que observou:

L: No caso, elas confundem muito a gente para achar qual é a melhor função, no caso seria qual a função limitante de uma função ... um gráfico no computador pode ser traiçoeiro, confundir muito a gente ... e a gente só conseguiria ver qual seria a função limitante mesmo é ... seria a função que você tem, subtraindo da função que você calculou algebricamente e ... mesmo assim o y, traçado no computador, né, este y sendo igual a zero ... não seria ... concreta ao multiplicar por um valor x qualquer ... olhando assim no gráfico, a princípio, só na subtração pode parecer que y é igual a zero, mas se eu multiplicar por x pode ver que o y não seria zero, seria alguma coisa.

Perguntamos como ele definiria uma assíntota horizontal agora e ele responde:

L: No meu modo de ver, seria obtida através da subtração da função dada com esta função que a gente calculou algebricamente e para valores grandes de x isso (a diferença) tem que tender a zero.

Perguntamos se ele gosta do computador, se acha que ele pode ajudar na aprendizagem de matemática e ele responde:

L: Eu acho que o computador tem os pontos bons como os pontos ruins. Ele pode ajudar, assim como pode confundir também. Ele pode fazer "pegadinhas"com a gente.

Perguntamos, então, o que ele acha que deveríamos fazer para não caírmos nestas "pegadinhas"e ele diz:

> **L:** Seria mais o cálculo algébrico... O computador seria mais uma ferramenta de visualização, uma comparação.

Também perguntamos se ele considera que uma abordagem para o ensino de matemática utilizando o computador seria rica ou não (lembramos que Lucas, até hoje não tinha usado o computador para aprender matemática) e ele diz:

> **L:** Seria riquíssima. Por exemplo, para valores muito grandes, na sala de aula meu professor chega no quadro, desenha o gráfico, desenha uma reta, uma parábola lá e diz assim: "olha isso aqui está indo para infinito"... Você tem que imaginar. Além disso, aqui é tudo mais rápido.

Em alguns momentos durante as atividades, por não estar tão habituado com o *software*, Lucas às vezes não digitava corretamente alguma fórmula ou valor e isto acabava dificultando bastante o andamento da tarefa, uma vez que o tutor nem sempre conseguia detectar o problema de imediato e, então, Lucas se sentia confuso.

4.1.6 Pós-atividade

1. Neste exercício em todos os itens, as respostas dadas são basicamente muito similares às dadas no pré-teste, isto é, apenas escreve por extenso o significado do símbolo de limite.

2. (a) Ele erra. Diz que a afirmação é verdadeira. Justifica dizendo que a assíntota vertical estaria sobre o eixo y. Provavelmente ele esteja confundindo o fato de $q(x_0) = 0$ com x_0 também ser zero, gerando uma assíntota vertical $x = 0$ (exatamente sobre o eixo y), caso $p(x_0) \neq 0$.

   (b) Ele acerta, a afirmação é falsa. Dá o exemplo de uma função que possui uma assíntota horizontal coincidindo com o eixo x ($y = 0$) e que assume o valor zero em algum ponto.

   (c) Ele erra. Diz que a afirmação é verdadeira. Na verdade, ele não justifica, apenas diz que toda função polinomial possui pelo menos uma assíntota. Aqui vemos que ele realmente confunde a palavra racional com polinomial.

3. (a) Ele acerta. Cita a função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ e determina corretamente a fórmula da assíntota horizontal.
   (b) Ele acerta. Cita a função $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ e também determina corretamente a fórmula da assíntota vertical.
   (c) Ele acerta. Cita a função $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-5}$ e determina a fórmula correta da assíntota inclinada.
   (d) Também acerta. Cita a mesma função do item anterior.
4. (a) Ele erra. Apenas diz que é uma reta que intercepta o eixo y em um ponto qualquer.
   (b) Também erra. Análogo ao item anterior.
   (c) Também erra. Diz que é uma reta que intercepta a origem e forma com o eixo x um ângulo inferior a 90^0 e que é a união de uma assíntota vertical com uma horizontal.
5. (a) Ele acerta. Ele cita o cálculo do limite da função quando x tende a infinito.
   (b) Ele acerta, mas sua explicação é incompleta. Ele diz que a assíntota vertical ocorre quando o denominador zera, mas esquece de dizer que o numerador não pode zerar.
   (c) Não responde.
6. (a) Ele faz o esboço do gráfico em uma janela afastada, ficando explícitas as duas assíntotas.
   (b) Ele continua errando. Acha assíntotas horizontais que não existem como no pré-teste, mas continua encontrando corretamente a assíntota vertical.
   (c) Continua incorreto. Ele continua encontrando a assíntota vertical $x = -3$ que não existe, pois não considera o fato do numerador zerar também neste ponto.

4.1.7 Esboço da imagem de conceito de Lucas

Agora iremos fazer um resumo das principais idéias observadas durante a pré-atividade, as atividades e a pós-atividade de Lucas, a fim de ajudar em nosso esboço de sua imagem de conceito.

Esboço da imagem de conceito anterior

1. **Definições de conceito:** Lucas tem muita dificuldade de definir os objetos matemáticos. Em particular, ele não define limite, apenas traduz o significado dos símbolos utilizados para representá-lo. Ele também muitas vezes não faz distinção entre *definir* e *encontrar*.

2. **Critérios:** Ele conhece o critério de colocar em evidência o termo de maior grau do denominador e do numerador para calcular limites no infinito, por exemplo, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(1+\frac{1}{x})}{x(1-\frac{1}{x})} = 1$, pois $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

3. **Exemplos:** Todos os exemplos mencionados durante o primeiro teste estavam incorretos, com exceção de um sobre assíntotas inclinadas que ele deixou em branco.

4. **Idéias equivocadas:** Ele acha que o gráfico da função nunca corta a sua assíntota. Ele também acha que, se o denominador zera, então há necessariamente uma assíntota vertical, não considerando a possibilidade do numerador também ser zero. Ele também diz que toda função polinomial[1] possui assíntota horizontal ou vertical. Além disso, pelo que foi observado, ele considera a assíntota uma parte do gráfico da função e não um objeto externo a ele.

5. **Idéias corretas:** Ele consegue identificar a presença de algumas assíntotas por análise algébrica. Ele conhece a representação algébrica de funções do 1º grau.

6. **Conexões:** Apesar de mostrar conhecer o critério descrito no segundo item acima, não o cita quando isto é pedido. Simplesmente ele pode não ter feito a conexão do significado da palavra critério e o procedimento por ele conhecido. Ele também não relaciona a reta com a qual a função se assemelha após o processo de redução global com a assíntota, mesmo quando ele reconhece a existência delas por análise algébrica.

7. **Conflitos teórico-computacionais:** Ele só identifica a assíntota vertical quando, por um erro do *software*, o computador liga os pontos próximos da descontinuidade. Em alguns casos, mesmo não havendo descontinuidade, nem sequer assíntota vertical, o computador traça algo muito semelhante ao que ocorre quando há assíntotas, isto é, em trechos de máximo ou mínimo local por exemplo, após a redução global, o computador também liga pontos formando um segmento de reta e ele equivocadamente acusa ser uma assíntota.

[1]Ele com certeza estava querendo dizer racionais. Este termo não era familiar a ele, polinomial sim.

8. **Incoerências momentâneas:** Ele afirma que numa função racional, se o denominador é zero, então a função é zero. Ele calcula limites laterais em pontos de descontinuidade para encontrar assíntotas horizontais, quando deveria fazer isto para encontrar as assíntotas verticais. Ele também é incoerente em poucos momentos ao identificar (olhando para a tela) a existência de algumas assíntotas horizontais, por exemplo, mesmo quando é visível que a função tende a infinito quando x também tende a infinito.

Lembramos que, até antes de nossas atividades, Lucas não havia estudado assíntotas inclinadas; nem mesmo em seu primeiro curso de cálculo. Apesar de seu desempenho inicial frente ao conflito teórico-computacional descrito acima, ao final da primeira atividade ele começa a identificar as assíntotas verticais mesmo quando o computador não liga os pontos.

Processo de interação entre abordagem e a imagem de conceito

Aqui vamos citar algumas características importantes observadas durante o processo de interação entre as atividades e a imagem de conceito do participante, com isso, queremos mostrar a evolução deste processo.

Atividade II

- Continua tendo dúvidas na caracterização das assíntotas em janelas com intervalos para x e y pequenos.
- Na etapa numérica percebe para qual reta a função está tendendo quando tomamos valores maiores de x.
- Mostra que conhece um critério para existência de assíntotas horizontais.
- Continua achando assíntotas verticais que não existem por influência do que vê na tela como na atividade anterior.
- Tem consciência de que as fórmulas calculadas na etapa numérica são apenas aproximações.
- No decorrer desta atividade, ele já começa a identificar corretamente a existência de assíntotas verticais e horizontais ao visualizar os gráficos do computador.
- Após a redução global, começa a relacionar as retas observadas com as assíntotas das respectivas funções.

Atividade III

- Ele não retorna com nenhum critério algébrico alternativo para encontrar assíntotas em resposta à pergunta feita ao final da atividade anterior.
- Inicialmente ele não sabia que um limite do tipo $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2}{x^2+1}$ é zero. A visualização no computador o ajuda a verificar o comportamento da função.
- Compreende com facilidade o critério proposto para calcular assíntotas através do algoritmo da divisão e de limite.
- Ele acha que todas as retas calculadas na etapa algébrica e numérica podem ser chamadas de assíntotas por se confundirem com a curva após a redução global.

Esboço da imagem de conceito posterior

1. **Definição de conceito:** De início, ele dá uma definição pobre de assíntota. Descreve apenas algumas características comuns a qualquer reta. Mas ao final da atividade, dá a definição: para valores grandes de x a diferença entre a função estudada e a fórmula da assíntota tem que tender a zero. Porém, ele continua não definindo limite, apenas escreve por extenso o significado do símbolo de limite como havia escrito no primeiro teste. Enfim, ele continua tendo dificuldades em definir objetos matemáticos, muitas vezes cita algumas propriedades do objeto em questão, mas que não são exclusivas deste.
2. **Critérios:** Lucas aumenta sua capacidade de calcular fórmulas de assíntotas e determinar a existência delas. Verificamos isto não só no resultado do teste posterior, mas também durante as atividades.
3. **Exemplos:** Maior capacidade de dar exemplos corretos pertinentes a funções que possuem assíntotas. Todos os exemplos dados por Lucas no último teste estavam corretos.
4. **Idéias equivocadas:** Continua achando que, se o denominador zera, então há assíntota vertical; não considera a possibilidade da indeterminação quando o numerador também é zero. Ele também continua achando que toda função racional possui alguma assíntota.

5. **Idéias corretas:** (Unicidade) Durante a etapa de reconceituação, ele percebe que em cada caso só existe uma assíntota, isto é, as outras são apenas aproximações e existe a melhor reta que aproxima o gráfico da função quando x tende a infinito. Desta vez, ele admite que o gráfico de uma função possa cortar sua assíntota horizontal.

6. **Conexões:** Mesmo em janelas com intervalos de x e y pequenos, ele consegue identificar assíntotas verticais, diferente do que ocorria antes das atividades.

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Não foi identificada nenhuma reação importante.

8. **Incoerências momentâneas:** Também não foi identificada nenhuma incoerência importante.

9. **Impressões:** Ele acha que gráficos traçados pelo computador possam confundir. Na verdade, ele admite que o computador tenha pontos positivos e negativos, isto é, que ele possa ajudar ou atrapalhar. Ele complementa dizendo que o computador é uma ferramenta de visualização, mas para se ter certeza do que se está estudando são necessários cálculos algébricos. Além disso, ele considera que a abordagem computacional pode ser riquíssima, pois, segundo ele, o aluno se torna mais ativo no processo ensino-aprendizagem e tudo fica mais rápido.

Análise do esboço da imagem de conceito de Lucas

A seguir, para melhor compreensão dos resultados dos testes das sessões pré e pós atividades de Lucas, iremos resumí-los na tabela 1.

Precisamos frisar e lembrar que Lucas é o único a ter estudado cálculo antes das atividades em seu outro curso superior, portanto, ele já havia estudado limites e o comportamento assintótico de funções racionais. Apesar disto, suas reações anteriores às atividades mostram uma imagem de conceito pobre sobre assíntotas com uma série de idéias equivocadas, inclusive a de que uma assíntota é um objeto pertencente ao gráfico. Isto não só confirma a idéia de que o tema é difícil, mas também de que a abordagem dentro da sala de aula não está correspondendo ao esperado, pelo menos para Lucas.

Podemos observar aspectos positivos e negativos nas reações de Lucas às atividades. Apesar de conseguir dar uma definição de conceito razoável para assíntotas (aliás, esta

Pré-atividades e pós-atividades – Lucas			
Questões	itens	correção	
		antes	depois
1 – Definição de conceito de limite	(a)	D	D
	(b)	D	D
	(c)	D	D
	(d)	D	D
2 – Verdadeiro ou falso	(a)	CE	E
	(b)	E	C
	(c)	CE	E
3 – Exemplos	(a)	E	C
	(b)	E	C
	(c)	B	C
	(d)	E	C
4 – Definição de conceito de assíntotas	(a)	E	D
	(b)	E	D
	(c)	B	D
5 – Critérios para encontrar assíntotas	(a)	E	C
	(b)	E	CI
	(c)	B	B
6 – Esboço de gráficos	(a)	C	C
	(b)	E	E
	(c)	E	E

C – Correto

CI – Correto, mas incompleto

CE – Correto por razões erradas

E – Errado

D – Escreve afirmações corretas, mas desvia do que foi perguntado

B – Em branco

Tabela 1: Tabela dos resultados dos testes das sessões pré e pós atividades de Lucas.

pode ter sido apenas resultado de uma mera repetição do que foi visto durante as atividades), em geral, as atividades não o ajudam a definir o conceito de limite. Na verdade, isto já era esperado, tendo em vista que este tipo de habilidade se revela bastante difícil no estágio de desenvolvimento de Lucas conforme já visto em nosso referencial teórico. Contudo, isto não quer dizer que sua imagem de conceito esteja empobrecida, como vimos, definir é apenas um aspecto dela e tudo indica que dependa de uma habilidade específica que ainda não foi desenvolvida pelo indivíduo, o que, de fato, é esperado neste estágio conforme nosso referencial teórico.

Algumas idéias equivocadas presentes antes das atividades permaneceram inalteradas. A nossa abordagem não o ajudou a perceber que quando temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ quando ambos $f(x)$ e $g(x)$ tendem a zero, não necessariamente existem assíntotas verticais. Isto é corroborado pelo *software* que simplesmente liga os finitos pontos da tela, dando a entender que a função está definida inclusive no ponto onde ambos denominador e numerador zeram, porém o *software* não traça um gráfico semelhante a uma curva que possua uma assíntota vertical no ponto onde ocorre a indeterminação. Mesmo assim, Lucas não se dá conta do conflito. Além disso, ele permanece afirmando que toda função racional possui pelo menos uma assíntota, mesmo ele tendo observado a função do item (VII), $l(x) = \dfrac{x^4 - 10}{x^2 + 1}$, que não possui nenhuma assíntota.

Uma impressão aparentemente negativa de Lucas é achar que a máquina possa confundir o usuário, mas achamos que isto é um reflexo do fato de ele ter sido confrontado com diversas situações (algumas não usuais) que o obrigaram a pensar de forma diferente da que está habituado. Isto simplesmente pode indicar que a abordagem mostra os fatos ao invés de escondê-los ou facilitá-los. Na verdade, consideramos isto um aspecto positivo.

Os aspectos positivos são muitos. Durante a etapa numérica, Lucas logo percebe os valores exatos das fórmulas. Ele tem consciência do caráter de aproximação dos valores encontrados na etapa numérica. E também a visualização no computador o ajuda a verificar que o limite do tipo $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{x^2 + 1}$ é zero. Enfim, consideramos que a proposta o ajuda a ampliar sua imagem do conceito de limite.

Lucas se apropria dos critérios de existência de assíntota sugeridos pelas tarefas, sem esquecer os critérios que já possuía, bem como sua capacidade de calcular as fórmulas das assíntotas. A sua capacidade de dar exemplos sobre tópicos relativos ao tema aumenta bastante, tanto que todos os exemplos dados por ele no último teste são corretos. Ele também compreende melhor o conceito, pois antes das atividades ele considerava assíntota como uma parte do gráfico e depois entendeu a idéia correta de que é uma reta externa ao gráfico, isto é, seus pontos não pertencem ao conjunto chamado gráfico da função. Com isso, ele pára de depender de um erro do *software* para identificar a presença de assíntotas, no qual os pontos eram ligados dando a impressão de que a máquina estaria traçando a assíntota. Além disso, compreende melhor a definição de assíntota quando entende a questão da unicidade que não era considerada por ele antes da etapa de reconceituação. Ele também passa a entender que a curva pode cortar a assíntota da função, apesar de ele não ter se deparado com este exemplo durante as sessões. Ao final, ele consegue identificar a existência de assíntotas observando os gráficos mesmo em intervalos de x e y pequenos, o que não ocorria antes.

Podemos dizer que outro aspecto positivo é sua abertura para a eficácia do auxílio do computador. Apesar de dizer que a máquina pode atrapalhar, ele admite que uma abordagem usando o computador também pode ser bastante rica, pois o aluno teria um papel mais ativo no processo ensino-aprendizagem, além de tornar os cálculos mais rápidos.

4.2 Alexandre

4.2.1 Pré-atividade

1. Neste exercício, em todos os itens, Alexandre apenas escreve por extenso o significado da notação $\lim_{x\to a} f(x)$. Alexandre realizou o pré-teste em uma data posterior à data da realização dos outros participantes e já havíamos verificado este erro também nestes. Portanto, este erro poderia estar sendo induzido pela maneira como a questão tinha sido formulada. Então, esperamos Alexandre responder a esta questão e, logo em seguida, lemos a resposta dele. Ao verificarmos que ele também havia apenas traduzido a notação de limite, explicamos-lhe oralmente o que realmente queríamos dizer e ele respondeu assim:

   > Você quer a definição? Com as minhas palavras? Ah, tá! ... Mas é isto que eu sei.

2. (a) Ele afirma que é verdadeiro. Ele erra. Ele responde que basta as duas funções (numerador e denominador) serem polinomiais para existir uma assíntota vertical.

   (b) Ele responde falso. Ele acerta. Diz depender da função, mas não dá um contra-exemplo.

   (c) Ele responde verdadeiro. Ele erra. Não dá nenhuma justicativa.

3. (a) Alexandre desenha o gráfico de uma função que possui uma assíntota horizontal, cuja lei ele afirma ser $y = 2x - 4$, o que é incorreto.
   (b) Análogo ao item (a).
   (c) Deixa em branco.
   (d) Incorreto. Ele diz que a função $y = 2x - 4$ possui duas assíntotas, uma horizontal e outra vertical.

4. (a) Alexandre parece saber, mas em sua afirmação faz confusão com alguns detalhes. Neste item, ele escreve:

      > Assíntota horizontal é aquela onde no eixo y o limite tenderá a $\pm\infty$ e as funções chegarão próximo de tal valor da assíntota.

      Podemos perceber que, quando ele se refere a *tender a* $\pm\infty$ *no eixo* y, ele deveria dizer x tender a infinito, mas nota-se que ele possui alguma noção do conceito, apesar de ter dificuldades para se expressar. Além disso, ele omite a palavra *reta* e diz apenas *aquela*, enfatizando o critério de encontrar assíntotas e não a definição conforme havia sido pedido.
   (b) Ele escreve uma resposta análoga ao item anterior.
   (c) Deixa em branco.

5. (a) Ele apenas diz que o critério é composto de cálculos de limites, mas não os explicita.
   (b) Mesma resposta do item anterior.
   (c) Deixa em branco.

6. (a) Desenha um gráfico incorreto e encontra apenas a assíntota vertical.
   (b) Desenha um gráfico incorreto. Encontra a assíntota vertical, mas seu esboço sugere uma assíntota horizontal inexistente.
   (c) Desenha o gráfico incorreto. Ele encontra uma assíntota vertical. Ele faz o seguinte:

$$\lim_{x\to -3+} g(x) = \lim_{x\to -3+} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)} = \lim_{x\to -3+} (x-3) = +\infty$$

4.2.2 Atividade I

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Na janela gráfica do tipo A desta função (como mostra a figura 32), Alexandre identifica as duas assíntotas existentes, a horizontal e a vertical, e as localiza, apontando para a tela; contudo, não é capaz de dizer as fórmulas delas. Perguntamos, então, como ele sabe que existem assíntotas e ele responde:

> **Al:** Ela tem uma assíntota porque você vê que aqui tem um ponto, tipo que está dividindo ela mais ou menos assim, não sei se estou me expressando bem, e também que ela não encosta no eixo.

Alteramos a janela gráfica até ficar do tipo B e Alexandre diz:

> **Al:** Olhando assim, agora ela (o gráfico da função) parece estar encostando (o eixo).

Visualizamos, em seguida, o gráfico da função em uma janela do tipo C. Alexandre fica surpreso e ri.

> **Al:** Uma reta! ... Parece que elas se encontraram, é o que dá para entender.

Pedimos para ele justificar o que ele está vendo. Ele pensa e diz:

> **Al:** Pela figura aqui, o que dá a entender é isso, que ela é uma reta direto e não como a gente viu antes em que formavam assíntotas.

Pedimos para ele olhar a fórmula da função e dizer por que ele acha que o gráfico da função fica parecido como uma reta. Ele pensa bastante e ri.

> **Al:** ... Porque o x está no denominador não seria, né? ...

Lembramos-no que estamos lidando com números grandes. Neste momento, ele pensa e diz que, quando o x é grande, os valores de y tendem a zero. Perguntamos qual a fórmula da reta que ele está vendo na tela e ele diz não saber. Ele fica curioso e pergunta qual é a reta e informamos que isto descobriremos mais adiante no decorrer das atividades, inclusive que será um de nossos objetivos.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Inicialmente visualizamos o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 33. Alexandre fala sobre a existência de apenas uma assíntota, a vertical, mas não identifica a horizontal. Ele chega a ficar na dúvida sobre a existência desta última e comenta:

> **Al:** Acho que só existe a vertical, a horizontal ... parece que elas estão na mesma, na mesma, ... na mesma altura ... hii, então acho que tem sim.

Ao modificarmos a janela gráfica, chegando ao tipo C, ele fala da semelhança do que ele está vendo com o gráfico da função anterior e diz que o que ocorreu é análogo. Ele vê o gráfico nesta janela e diz que, analisando o gráfico agora, garante não existir assíntota horizontal (agora ele tem certeza). Ele também diz que, se tivesse visto apenas esta janela, ele diria que a assíntota vertical não existia. Em seguida, complementa:

> **Al:** Para números muito grandes, eu acho que realmente ela vai tendendo a como ela está ali (aponta para a visualização tipo C).

Então, perguntamos se ele acha que o "pico"que aparece ao centro do gráfico gradativamente deveria desaparecer após o processo de redução global. Alexandre diz:

> **Al:** Eu acho que sumir, sumir, não deveria sumir não. Não sei se é porque está muito longe, não sei, ou então, como está tendendo ao infinito ... alguma coisa desse tipo.

Ele ainda está visualizando o gráfico em uma janela do tipo C e continua:

> **Al:** Parece que o y está tendendo novamente a zero, mas pela função não sei se isto é o certo.

Visualizamos em seguida a janela do tipo D. Alexandre entende a questão da escala e vê que, na verdade, a função g tende a 1.

> **Al:** Acho que é por causa da escala, quanto mais os números são menorezinhos, por exemplo, aqui parece que este ponto é 100, não sei se é 100, e como a escala vai ficando muito pertinho, não sei se é isso ... ela vai ficando próximo.

Ainda visualizando a janela do tipo D, perguntamos o que ele tem a dizer sobre as assíntotas.

> **Al:** Como está uma reta direta ... a assíntota vertical não vejo mais e a horizontal, se antes eu não estava vendo, agora então.

É interessante como Alexandre não consegue relacionar a reta que ele vê na tela com a assíntota horizontal.

Perguntamos se o gráfico que ele está vendo se parece com o gráfico de alguma função que ele conheça, e ele responde:

> **Al:** ... (pensa, ri) deve estar!

Dizemos, então, que ele não precisa dizer a fórmula exata, mas que ele pode dizer com que tipo de função a g se parece. Ele fala:

> **Al:** Ela parece uma reta ... mas exatamente uma reta ela não é, porque parece que ela faz alguma coisa que vai abrir para algum dos lados quando se aproximar mais, aí a gente vai ver o que ela vai formar.

Apesar de Alexandre não fazer conexão de aspectos gráficos com aspectos algébricos, ele tem consciência das limitações da máquina e das aproximações fornecidas por ela.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Construímos o gráfico desta função em uma janela gráfica do tipo A como mostra a figura 34 e Alexandre não percebe a existência de nenhuma assíntota. Ao mudarmos a janela até o tipo C, ele aponta, ri e fala sobre a semelhança com o caso anterior. Ele completa, dizendo que agora ele não está vendo nada mesmo (nada relacionado com assíntotas).

> **Al:** Para esta, na outra janela você vê que o gráfico dela é diferente, lógico, mas o que parece é que o ponto que estava assim, né? (aponta para a tela) Agora parece que está se aproximando do eixo x, se abrindo, não sei.

Reduzimos o gráfico ainda mais, até visualizarmos a janela do tipo D e ele afirma que o comportamento desta função é análogo à função do exemplo anterior, apenas se diferenciando por estar abaixo do eixo x. Alexandre continua sem dar uma fórmula para a reta visualizada.

> **Al:** Aquela voltinha que a gente via na primeira janela, está aqui neste ponto (aponta para o pequeno “pico”que se forma ao centro do gráfico do tipo D).

Pedimos para ele olhar para a fórmula da função h e tentar analisar o que está ocorrendo. Ele pensa bastante:

Al: Cada vez que o x for maior, parece que ela (a função) vai tender a $-\infty$.

Perguntamos para onde a função vai tender e ele responde:

Al: Ela vai tender a valores negativos, né?

Perguntamos se estes valores negativos são quaisquer e ele diz:

Al: ... Qualquer valor negativo não deve ser ... Olhando para cá, parece que ela parou no -2, mas quando você vê nas janelas anteriores (tipo A, por exemplo), o que dá a entender é que ela não forma uma reta.

Insistimos para ele se concentrar no gráfico visualizado quando x assume valores grandes. Alexandre pensa muito e responde:

Al: Acho que vai ser sempre um valor negativo ... Acho que ela vai descendo.

Pedimos para ele modificar a janela gráfica de tal forma que aumente o intervalo de x e mantenha o intervalo de y pequeno. Ele vê que o gráfico continua semelhante ao tipo D mostrado na figura 34.

Al: É ... ela não desce, continua no -2.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Visualizamos a função i numa janela gráfica do tipo A' como mostra a figura 35 e, mesmo depois de perguntarmos se a função poderia assumir valores positivos, Alexandre afirma que não. Esta resposta é devida certamente pela influência da representação gráfica. Então, modificamos a janela até a mesma ficar do tipo A, Alexandre se surpreende com a aparição de mais uma parte da curva no canto superior direito da janela. Depois disto, ele identifica a existência da assíntota vertical, mas em princípio fica na dúvida se existe uma assíntota horizontal. Pensa um pouco e acaba decidindo que não existe tal assíntota. Devemos lembrar que Alexandre não estudou assíntotas inclinadas, portanto não esperávamos que ele a indentificasse, contudo esta atividade serviria para introduzirmos esta noção. Neste momento, pedimos para ele analisar a fórmula da função e dizer se existe alguma relação entre a existência da assíntota vertical, apontada por ele, e a lei da função i. Ele pensa, mas não vê nenhuma relação. Insistimos para ele pensar mais e ele se arrisca:

> **Al:** Acho que estão se formando duas parábolas dos dois lados por causa da função "de cima"($y = 5x^2 + 1$), não sei. E depois, quando nós mudamos a janela, parecia que ia formar uma reta.

Alexandre tenta encontrar alguma relação familiar entre o gráfico que está vendo e a fórmula. Ele vê uma semelhança entre parábolas e as duas curvas que se formam na janela de tipo A (figura 35) e procura algo na fórmula que seja familiar. Sabemos que sua tentativa não teve sucesso, mas neste momento ele se aventurou a pensar em uma explicação. Não será isto que queremos estimular em nossos alunos? A exploração, a busca por explicações? Assim como o Alexandre, pesquisadores nem sempre acertam. Também podemos analisar a segunda parte da explicação dele, quando fala sobre a formação da reta, ele não chega a dizer, mas poderíamos deduzir que ele estivesse pensando na semelhança entre a reta formada e a fórmula do denominador, $y = x - 2$.

Alteramos a janela gráfica novamente, ficando de tipos B e C, e ele visualiza a formação da reta inclinada, mas se restringe a descrever o que vê, sem maiores explicações. Ele esclarece, dizendo:

> **Al:** Gráfico para mim é muito difícil ... qualquer tipo de gráfico.

Desta vez, diferente do outro item, Alexandre, além de falar sobre a semelhança com uma reta, também fala sobre a função i se parecer com uma função do 1º grau. Até agora não sabíamos se ele conhecia a fórmula da reta.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2 + x}$

Visualizamos esta função como mostra a figura 36 e a reação de Alexandre neste item é totalmente análoga a sua reação no item anterior. Além disso, perguntamos se ele acha que a existência de assíntotas depende da escala usada para a visualização e ele responde que não depende disto, mas da fórmula da função. Ele complementa:

> **Al:** Quanto mais vou me distanciando, parece que ela vai formando uma reta, né? ... apesar de não ser.

Ele não se esquece do caráter de aproximação da tarefa. Pedimos também para ele tentar explicar o que está acontecendo com a função:

> **Al:** ... Ali sempre o valor do numerador é maior que o valor do denominador, ou seja, a função sempre ... , aliás aqui temos um valor negativo (ele se refere

ao coeficiente do numerador), mas que sempre estaria se aproximando do -1 (ele se refere à assíntota vertical), não sei se é isso.

(VI) $k(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

Visualizamos esta função como mostra a figura 37. Inicialmente observamos uma janela do tipo A e Alexandre identifica a existência da assíntota vertical.

Observamos, então, a janela do tipo C e ele aponta a semelhança do gráfico da k com uma parábola. Pedimos que ele explicasse porque isto ocorre:

Al: Porque o valor de cima é sempre maior do que o valor de baixo, ou seja, ela sempre vai tender a um valor positivo ... (fica em dúvida) ... é, vai sempre tender a um valor positivo e que ... não, nem sempre ela vai tender (ele ri).

Ele não pensa em efetuar a divisão entre os dois polinômios do numerador e do denominador.

4.2.3 Atividade II

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Voltamos a visualizar esta função nas janelas gráficas mostradas na figura 32 e vamos calcular uma aproximação para a fórmula da reta à qual a função f se assemelha após a redução global. Os valores encontrados por Alexandre são mostrados na tabela abaixo:

x	y	Fórmula
-100	-0.01	$y = 0.0001x$
100	0.01	
500	0.002	$y = 0.00004x$
-500	-0.002	

Alexandre após observar os valores dos coeficientes das fórmulas das duas retas encontradas, logo diz que o coeficiente angular está cada vez mais se aproximando de zero. Estranhamente, mesmo ele tendo dito isto, ao ser perguntado sobre qual a reta o gráfico da f está se aproximando, ele diz que é possível existir, mas não sabe qual.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Visualizamos esta função conforme mostra a figura 33. Ao procurarmos uma aproximação através de uma reta para a g, Alexandre obtém os seguintes valores:

x	y	Fórmula
100	1.0202	$y = 0.0002005x + 1.00015$
-100	0.9801	
500	1.004	$y = 0.000008x + 1$
-500	0.996	
1000	1.002	$y = 0.000002x + 1$
-1000	0.998	

Após o cálculo da segunda reta, Alexandre observa que o coeficiente de x está tendendo a zero e acha que o termo independente vai continuar diminuindo. Continuamos então o cálculo escolhendo pontos cuja coordenada x é ainda maior em termos absolutos e chegamos à formula da terceira reta. Neste momento, ele vê que o termo independente tende a 1 e o coeficiente de x continua tendendo a zero.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

As reações de Alexandre neste item são análogas ao item anterior.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Voltamos a visualizar esta função nas janelas gráficas mostradas na figura 35 e vamos calcular uma aproximação para a fórmula da reta à qual a função i se assemelha após a redução global. Alexandre novamente escolhe os mesmos valores para x. Os respectivos valores de y e as fórmulas das retas foram os seguintes:

x	y	Fórmula
-100	-490.2058	$y = 5.0021x + 10.0042$
100	510.2142	
500	2510.0421	$y = 5.0000839x + 10.00015$
-500	-2490.0418	

Alexandre observa que o coeficiente de x e o termo independente tendem respectivamente para 5 e 10. Ao traçar as retas na mesma janela do tipo C da função i, ele também observa que as mesmas se confundem com o gráfico de i.

Alexandre procede de forma análoga nos demais itens desta atividade.

Ao final desta sessão, sugerimos que ele pensasse em uma forma algébrica de calcular as retas das quais os gráficos das funções racionais estudadas se aproximam, pois isto seria um dos nossos objetivos de estudo na próxima atividade. Pedimos que ele analisasse as leis das funções.

4.2.4 Atividade III

Ao iniciarmos esta atividade, Alexandre não retorna com nenhum artifício algébrico para o cálculo da fórmula da assíntota. Na verdade, ele não cita nem o artifício comumente encontrado em livros de cálculo, já citado neste texto no relato do participante Lucas durante a atividade III. Portanto, no início do primeiro item, explicamos nosso artifício algébrico.

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Perguntamos a ele qual o resultado de $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x}$ e ele se mostra confuso. Primeiro diz que é $+\infty$, depois pensa e fica em dúvida. Pedimos que olhe novamente o gráfico desta função em uma janela do tipo C como mostra a figura 32 e neste momento ele diz que f tende a zero.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Alexandre, após efetuar a divisão de $x+1$ por $x-1$ e passar o limite, conforme sugestão, entende facilmente que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 1$. Ele também percebe a coerência deste resultado com o resultado da etapa anterior.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Alexandre tem reações análogas neste item.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Neste item, após efetuar a divisão dos polinômios e passar o limite, ele diz:

> **Al:** ... Dá para ver que, quando você faz o limite no caso da função, você vai chegar ao mesmo resultado.

Nos demais itens, o procedimento é análogo e não há muito o que acrescentar.

Em todos os itens, Alexandre observou as retas calculadas na mesma janela gráfica das curvas estudadas, realizando assim a etapa de discriminação entre a curva e a assíntota.

Ao final desta atividade, lembramos a Alexandre os gráficos vistos por ele durante o processo de redução global, onde também traçamos as diversas aproximações de assíntotas e perguntamos se poderíamos dizer que as diferentes aproximações encontradas para cada função são também assíntotas da mesma função. Categoricamente, Alexandre afirma que não e que existe apenas uma. Ao ser perguntado sobre o por que desta afirmação, ele simplesmente diz que sim. Isto sugere que Alexandre não está se baseando na definição de assíntota. Além disso, perguntamos por que ele acha que a verdadeira assíntota é aquela calculada algebricamente, já que, na verdade, as duas etapas algébrica e numérica têm caráter de aproximação e a visualização no computador até este momento não privilegia nenhuma e ele diz que é por causa dos cálculos. Neste momento, deixamos Alexandre refletir sobre estas questões para serem resolvidas na próxima atividade.

4.2.5 Atividade IV

Começamos esta atividade explorando a etapa de reconceituação. Alexandre acredita na unicidade de assíntota, mas sem nenhum motivo consistente. Então, nós o incentivamos a refletir sobre isto, visualizando as janelas dos gráficos das funções $y = [f(x) - \bar{f}(x)]x$ e $y = [f(x) - \hat{f}(x)]x$ dos itens de (I) a (V), conforme descrito no apêndice C. Alexandre observa bastante, mas não consegue relacionar o que vê com o conceito de assíntotas e, além disso, se mostra um pouco confuso.

(VI) $k(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

Alexandre visualiza esta função em uma janela gráfica do tipo A como mostra a figura 37 e identifica a presença da assíntota vertical. Após mudar a escala para uma do tipo C, apesar desta assíntota ficar mascarada, Alexandre não esquece a existência da mesma e evidentemente percebe a semelhança do gráfico desta função com uma parábola. Partimos, então, para a etapa numérica como foi feito nas atividades anteriores. Como Alexandre escolheu valores de x muito grandes, o *software* acabou por aproximar rapidamente a fórmula da parábola para $y = x^2$. Na etapa algébrica, Alexandre efetua a divisão polinomial sem problemas e constata a coerência dos resultados.

Perguntamos então se ele poderia comparar o conceito de assíntota com o que ele está observando na tela e ele pensa bastante, mas responde que não consegue perceber nada olhando o gráfico.

Perguntamos, então, o que ele entende por assíntota (horizontal) e ele responde:

Al: Quando x vai para infinito, o gráfico dela nunca vai chegar ao valor, vamos supor que a assíntota fosse $y = 2$, então o valor desta função vai sempre se aproximar de 2, mas nunca será 2.

(VII) $g(x) = \dfrac{x^4 - 10}{x^2 + 1}$

Alexandre traça o gráfico desta função no computador e faz o processo de redução global como mostra a figura 38. Ele não se surpreende com o gráfico tipo A', que se assemelha com duas retas, muito menos fala sobre o que poderia parecer um "bico"na janela tipo A. Ele visualiza a janela do tipo C e fala sobre a semelhança com a parábola. Partimos para a etapa numérica. Alexandre escolhe os valores de x e encontra a aproximação $y = x^2 - 0.005x - 0.6691$. Na etapa algébrica, efetua a divisão polinomial e encontra $y = x^2 - 1$, o que considera bastante razoável. Alexandre traça o gráfico desta última função na mesma janela do tipo C da função l, observa, mas, apesar de nossa insistência em perguntar se existe alguma relação entre o que ocorre neste caso e o conceito de assíntota, ele continua não percebendo nenhuma relação e ri bastante. Ele complementa:

Al: Em gráfico eu não consigo ver muita coisa.

Vamos para etapa de reconceituação e Alexandre traça na tela os dois gráficos das duas diferenças $y = [l(x) - \bar{l}(x)]x$ e $y = [l(x) - \hat{l}(x)]x$, ele observa apenas a primeira tendendo a zero quando x tende a infinito, ri novamente, mas não fala muito. Diz apenas que o observado deve ter explicação na equação.

(VIII) $m(x) = \dfrac{5 - 2x^4}{x^2 + 5}$

Neste caso, Alexandre apenas observando a fórmula da função consegue antecipar como será o gráfico de m após a redução global, dizendo que será uma parábola com concavidade para baixo, pois o resultado da divisão polinomial daria um polinômio do 2º grau com coeficiente do termo de grau 2 negativo.

Ao final destas atividades, perguntamos a Alexandre como tem sido seu curso de Cálculo e ele diz estar sentindo bastante dificuldade, apesar de estudar bastante e fazer os exercícios. Sobretudo, ele sente muita dificuldade nas definições de limite, que ele sequer consegue memorizar. Na verdade, ele prossegue, dizendo que nem é este seu objetivo, ele quer aprender.

Mais uma vez, perguntamos se Alexandre é capaz de definir assíntota e ele responde:

> **Al:** Para mim assíntota é ... no caso como eu tenho um gráfico da função ... é o que faz ... não sei explicar direito. É uma reta né ... que ela vai, ela não chega ... tem um certo ponto em que ela não ultrapassa, não sei explicar bem, ela não encosta a função e que praticamente ela tem os mesmos valores de quando ele vai para $-\infty$ ou para $+\infty$.

Alexandre, ao ver gráficos das funções e suas assíntotas durante a redução global, também comenta:

> **Al:** Eu diria que elas são iguais apesar de saber que não são ... Olhando assim ... é a mesma coisa, não? (Ele se refere à semelhança da assíntota com o gráfico da função estudada após a redução global).

Ele ri bastante depois desta afirmação. Para finalizar, perguntamos o que ele achou das atividades e ele diz:

> **Al:** Eu não esperava que iria dar nas assíntotas. Traçar a assíntota ali ... Achei legal.

4.2.6 Pós-atividade

1. Alexandre continua apenas escrevendo por extenso o significado da notação de limite em todos os itens deste exercício, ao invés de explicar com suas palavras o conceito de limite.

2. (a) Alexandre continua achando esta afirmação verdadeira, mas desta vez ele considera que basta o denominador ser igual a zero para garantir a existência de assíntota vertical.

   (b) Desta vez, Alexandre acerta, responde falso. Ele dá o seguinte contra-exemplo também correto: $y = \dfrac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$. Podemos ver facilmente que esta função possui uma assíntota horizontal $y = -1$ e que esta é cortada por seu gráfico em $x = 3$.

   (c) Alexandre erra. Ele continua respondendo verdadeiro, mas sem justificativa.

3. (a) Alexandre acerta. Ele cita a função $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ que possui a assíntota horizontal $y = 2$.

(b) Ele acerta. Dá como exemplo a função $y = \dfrac{3}{x-3}$ que possui a assíntota vertical $x = 3$.

(c) Ele também acerta. Dá o exemplo da função $y = \dfrac{x^2+3}{x-1}$ que possui a reta $y = x + 1$ como assíntota inclinada.

(d) Ele acerta. Cita novamente a função $y = \dfrac{2+x-x^2}{(x-1)^2}$ que, de fato, possui duas assíntotas.

4. Curiosamente ele deixa em branco todos os itens deste exercício.

5. (a) Ele responde que o resultado de $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ determinará a assíntota horizontal, mas ele não diz quando isto ocorrerá, dando a entender que sempre que calcularmos este limite iremos obter uma assíntota horizontal.

   (b) Ele responde que o critério consiste em calcular limites laterais em pontos onde o denominador é zero. Esquece da possibilidade do numerador também ser zero.

   (c) Ele deixa em branco.

6. (a) Alexandre faz o esboço corretamente e encontra as duas assíntotas.

   (b) Novamente ele faz o esboço correto e encontra as assíntotas.

   (c) Seu esboço do gráfico está incorreto. Ele encontra uma assíntota vertical. Novamente ele não considera a possibilidade do numerador ser zero.

4.2.7 Esboço da imagem de conceito de Alexandre

Agora iremos fazer um resumo das principais idéias observadas durante a pré-atividade, as atividades e a pós-atividade de Alexandre, afim de ajudar em nosso esboço de sua imagem de conceito.

Esboço da imagem de conceito anterior

1. **Definição de conceito:** Alexandre não define limite, apenas escreve por extenso o significado do símbolo de limite. Ele possui alguma noção do conceito de assíntota, mas tem dificuldade em expressar a respectiva definição de conceito. Além disso, não faz muita distinção entre *definir* e *como encontrar*.

2. **Critérios:** Diz saber critérios para encontrar assíntotas, mas podemos perceber que em muitos momentos ele se confunde e tem dificuldade em expressá-los. De qualquer forma, em geral tenta obter explicações por si mesmo para a existência delas.

3. **Exemplos:** Ele dá exemplos corretos de gráficos, mas desconectados de suas respectivas leis.

4. **Idéias equivocadas:** Ele afirma que qualquer função racional possui pelo menos um tipo de assíntota. Tem bastante dificuldade em fazer esboços de gráficos. Se o denominador zera, então afirma que há assíntota vertical; não considerando a possibilidade da indeterminação quando o numerador também é zero.

5. **Idéias corretas:** Ele diz que o gráfico de alguma função pode cortar a sua assíntota horizontal (mas não dá nenhum exemplo). Ele identifica assíntotas em janelas gráficas com intervalos de x e y pequenos. Também sabe que um limite do tipo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ é zero porque quando os valores de x são muito grandes, a fração $\dfrac{1}{x}$ fica muito pequena. Demonstra compreender bem os efeitos da escala escolhida sobre os gráficos observados e tem consciência de certas limitações do computador e das aproximações feitas por ele.

6. **Conexões:** Tem dificuldade em fazer conexões entre aspectos gráficos e aspectos algébricos, isto é, não demonstra muita habilidade em relacionar os gráficos com suas respectivas fórmulas, inclusive não nota a ausência de partes de certos gráficos como o tipo A' da função do item (IV). Também não relaciona assíntotas com as retas observadas após os afastamentos globais das funções estudadas. E mais, confunde hipérboles com parábolas e tenta explicar a existência destas "falsas" parábolas, relacionando-as, por exemplo, com polinômios do segundo grau encontrados no numerador de funções racionais.

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Não identificamos nenhuma reação importante.

8. **Incoerências momentâneas:** Apesar de ter dito inicialmente ser possível que gráficos de funções racionais possam cortar suas assíntotas, durante as atividades diz que não. Chega a afirmar que dois exemplos são análogos, quando, na verdade, em um deles reconhece a existência de uma assíntota horizontal e no outro não. Inicialmente calcula errado o limite do tipo $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$. Ele acha ser igual a $-\infty$, mas depois calcula corretamente.

Devemos lembrar que Alexandre não havia estudado assíntotas inclinadas até antes das atividades propostas. Ao falar sobre seu curso de cálculo, diz ter muita dificuldade, apesar de, segundo ele, estudar bastante e fazer os exercícios.

Processo de interação entre abordagem e a imagem de conceito

Aqui vamos citar algumas características importantes observadas durante o processo de interação entre as atividades e a imagem de conceito do participante, com isso, queremos mostrar a evolução deste processo.

Atividade II

- Na etapa numérica, percebe que os coeficientes encontrados se aproximam de certos valores a medida que x cresce. Mesmo assim, não é capaz de citar a fórmula da reta com a qual a curva se parece após a redução global. Isto ratifica sua pequena intimidade em relacionar gráficos com suas fórmulas e vice-versa.
- Ainda não relaciona as retas observadas com as assíntotas das funções estudadas.

Atividade III

- Não consegue encontrar nenhum artifício algébrico alternativo para calcular as assíntotas das funções conforme foi pedido ao final da sessão anterior. Na verdade, não aponta nem o critério tradicional.
- Mesmo tendo respondido que $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$ é zero na atividade I, desta vez ele tem dúvidas quanto a isto. Ele precisa observar o gráfico de $y = \frac{1}{x}$ para entender o que de fato ocorre.
- Após o critério de divisão polinomial sugerido, Alexandre entende melhor o cálculo de limites do tipo $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x-1} = 1$ e conseqüentemente também entende o critério para encontrar assíntotas.
- Compara os resultados da etapa numérica e vê coerência.
- Acredita na unicidade das assíntotas. As razões para esta crença não aparentam consistência com a definição de assíntota (à qual ele não recorre), mas apenas na sua crença na verdade dos cálculos algébricos e no caráter de aproximação do método numérico do computador.

Esboço da imagem de conceito posterior

1. **Definição de conceito:** Ele diz ter dificuldade principalmente em entender definições e também, em definir. Quando tenta definir assíntotas, apenas cita algumas características baseadas em casos específicos. Particularmente continua sem definir limite, apenas escreve por extenso o significado do símbolo.

2. **Critérios:** Ele não tem dificuldades em aplicar o critério de divisão de polinômios sugerido para encontrar assíntotas ou outras funções limitantes, tanto que consegue antecipar em vários casos o comportamento da função antes mesmo de traçá-la no computador. Com isso, tem maior capacidade de calcular fórmulas de assíntotas e determinar a existência delas, apesar de não ter a mesma facilidade na hora de explicar os critérios usados para determiná-las.

3. **Exemplos:** Significativa melhora na capacidade de dar exemplos pertinentes de funções que possuem assíntotas.

4. **Idéias equivocadas:** Ele também considera que os limites de uma função quando x tende a infinito ou x tende a menos infinito sempre são iguais. Além disso, continua achando que, se o denominador zera, então há assíntota vertical; não considerando a possibilidade da indeterminação quando o numerador também é zero. E continua achando que toda função racional tem pelo menos uma assíntota.

5. **Idéias corretas:** Alexandre continua tendo consciência do caráter de aproximação dos gráficos observados no computador, isto é, apesar de ele observar a curva se transformando em uma reta (por exemplo), ele sabe se tratar de uma aproximação. Além disso, sua capacidade para esboçar os gráficos das funções aumenta bastante. Desta vez, durante o teste escrito posterior, ele afirma que o gráfico de uma função pode cortar sua assíntota e ainda dá um exemplo correto, apesar de não ter visto nenhum exemplo deste tipo durante as atividades.

6. **Conexões:** Ele tem alguma dificuldade em relacionar o que ocorre na visualização da etapa de reconceituação com o conceito de assíntota. Também não consegue relacionar este conceito com o de função limitante, isto é, não relaciona o que ocorre após o processo de redução global no caso de assíntotas com o que ocorre no caso em que a curva se assemelha a outros gráficos, como os de parábolas. Continua fazendo poucas conexões entre aspectos gráficos e algébricos de uma função, pois ainda não se dá conta de aspectos qualitativos do comportamento da função não mostrados pela janela gráfica, como o ocorrido no tipo A' da função do item (VII).

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Nenhuma reação importante foi observada.

8. **Incoerências momentâneas:** Nenhuma incoerência relevante foi observada.

9. **Impressões:** Alexandre demonstra curiosidade no decorrer das atividades, apesar de considerar o estudo de gráficos muito difícil. Caráter surpresa: ele não esperava que o processo de redução global das funções levaria ao conceito de assíntotas. Ele gosta das atividades.

Análise do esboço da imagem de conceito de Alexandre

A seguir, para melhor compreensão dos resultados dos testes das sessões pré e pós atividades de Alexandre, iremos resumí-los na tabela 2.

Algumas características da imagem de conceito de Alexandre permanecem inalteradas após as sessões. A capacidade de definir, por exemplo, continua restrita. Na tentativa de elaborar definições, Alexandre se limita a citar algumas características do objeto em questão, mas que também são comuns a outros objetos. Muitas vezes notamos uma dificuldade em diferenciar as noções de *definir* e de *como encontrar*. Sua capacidade de usar palavras para descrever algo é tão limitada que sente dificuldade até mesmo no momento de explicar algum critério usado por ele. A abordagem não parece influenciar neste aspecto, que aliás, já vimos ser, em geral, difícil para estudantes em estágios iniciais de cálculo.

Outro aspecto negativo é Alexandre achar que uma função não pode ter assíntotas horizontais diferentes para os casos em que x tende a $+\infty$ ou $-\infty$. As funções propostas na abordagem acabaram fortalecendo esta crença, pois nenhuma delas mostrou comportamentos diferentes do mencionado por Alexandre. Isto ocorreu justamente por abordarmos apenas funções racionais que, de fato, têm esta propriedade revelando uma limitação de nossa abordagem. Ele também continua achando que, quando temos uma indeterminação do tipo $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, onde ambos $f(x)$ e $g(x)$ tendem a zero, necessariamente existam assíntotas verticais, não percebendo que, ao invés disso, o limite da função neste ponto pode existir sem a função estar definida nele. Neste caso, o *software*, de fato, liga os finitos pontos dando a entender que a função está definida naquele ponto, mas também não traça uma curva cujo aspecto lembre um gráfico que possua uma assíntota vertical. Alexandre não se dá conta deste conflito.

Além disso, Alexandre continua achando que toda função racional possui pelo menos uma assíntota, apesar de ter estudado funções durante as sessões que não possuíam ne-

Pré-atividades e pós-atividades – Alexandre			
Questões	itens	correção	
		antes	depois
1 – Definição de conceito de limite	(a)	D	D
	(b)	D	D
	(c)	D	D
	(d)	D	D
2 – Verdadeiro ou falso	(a)	E	E
	(b)	CI	C
	(c)	E	E
3 – Exemplos	(a)	CE	C
	(b)	CE	C
	(c)	B	C
	(d)	E	C
4 – Definição de conceito de assíntotas	(a)	CI	B
	(b)	CI	B
	(c)	B	B
5 – Critérios para encontrar assíntotas	(a)	CI	CI
	(b)	CI	CI
	(c)	B	B
6 – Esboço de gráficos	(a)	E	C
	(b)	E	C
	(c)	E	E

C – Correto

CI – Correto, mas incompleto

CE – Correto por razões erradas

E – Errado

D – Escreve afirmações corretas, mas desvia do que foi perguntado

B – Em branco

Tabela 2: Tabela dos resultados dos testes das sessões pré e pós atividades de Alexandre.

nhum tipo de assíntota. Ele também não se dá conta disto.

Alexandre sente algumas dificuldades em etapas da proposta ligadas a aspectos gráficos, o que ele justifica dizendo que acha o estudo de gráficos difícil. Por exemplo, na etapa de reconceituação ele tem problemas em entender o significado do que vê nas janelas gráficas e relacionar com o conceito de assíntota. Também não consegue fazer qualquer analogia entre o conceito de assíntotas e o conceito de função limitante.

Ele tem dificuldade em analisar gráficos de funções, pois não se dá conta de alguns aspectos do comportamento da função não evidenciados em algumas janelas gráficas. Isto significa que ele faz poucas conexões entre aspectos gráficos e algébricos de funções.

Há também aspectos positivos. Alexandre não tem dificuldade em aplicar os critérios sugeridos e, inclusive, consegue antecipar o comportamento no infinito de várias funções racionais antes mesmo de visualizá-las no computador. Também sua capacidade de calcular fórmulas de assíntotas aumenta bastante, bem como sua capacidade de dar exemplos de funções que as possuam. Consideramos significativo, inclusive o fato de ele ter conseguido dar um exemplo de uma função cujo gráfico corta a sua assíntota, apesar de não ter visto nenhuma deste tipo durante as sessões. Isto poderia ser uma limitação de nossa abordagem (que pode ser resolvida facilmente, incluindo os exemplos deste tipo) acabou não influenciando o participante negativamente.

Alexandre se mostra bem consciente do caráter de aproximação tanto das fórmulas quanto dos gráficos visualizados durante as atividades. Além disso, podemos observar que a sua capacidade de esboçar os gráficos melhorou bastante.

Há também aspectos emocionais positivos demonstrados por ele durante as sessões, como curiosidade, surpresa e o fato de ter gostado das atividades. Isto pode sugerir o aumento do interesse de Alexandre pelo assunto futuramente.

4.3 Ana

4.3.1 Pré-atividade

1. Em todos os itens, Ana apenas traduz o significado da notação, mas sem explicar o conceito de limite.

2. (a) Ana erra, afirma que é verdadeiro. Ela não considera a possibilidade do numerador também ser zero.

(b) Ana erra. Ela afirma que é verdadeira a afirmação, mas não dá uma justificativa.

(c) Ana acerta. Ela diz ser falsa a afirmação, pois depende da função dada, mas não dá nenhum exemplo.

3. (a) Ana dá um exemplo incorreto, a função $y = 2 + x$.

   (b) Ana dá um exemplo correto, a função $y = \dfrac{2+x}{x}$ e desenha o gráfico corretamente.

   (c) Ela deixa em branco.

   (d) Ana dá um exemplo correto, a função $y = \dfrac{2}{x}$ que possui, de fato, duas assíntotas.

4. (a) Ana na verdade não define assíntota horizontal, apenas cita algumas características. Ela diz:

   > O ponto que toca o eixo y.

   Ela também diz como encontrá-la, explicando que é através do cálculo de limites no infinito.

   (b) Resposta análoga ao item anterior.

   (c) Ela deixa em branco.

5. (a) Ana responde, dizendo que temos que calcular os limites no infinito, mas ela diz que as assíntotas só existem quando os limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ forem iguais.

   (b) Ela responde, dizendo que é o ponto que toca o eixo x e que zera a função. Naturalmente ela quis dizer zerar o denominador.

   (c) Ela deixa em branco.

6. (a) Ana calcula corretamente e desenha as assíntotas da função, mas não esboça o gráfico.

   (b) Resposta análoga ao item anterior.

   (c) Ana não faz o esboço correto. Mesmo ela percebendo a simplificação: $\dfrac{(x+3)(x-3)}{(x+3)} = x - 3$, encontra uma assíntota vertical.

4.3.2 Atividade I

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Ana inicialmente observa o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 32. Ao ser perguntada se ela identifica alguma assíntota, ela pensa bastante, fala lentamente e responde que sim, duas assíntotas: uma horizontal e outra vertical. Contudo, ela tem dúvidas na hora de dizer as fórmulas delas. Neste momento, perguntamos se ela lembra o que é assíntota e ela diz:

> **A:** É uma reta horizontal ou vertical ... ela não chega num ponto, ela tende, mas não chega.

Perguntamos, neste caso, para qual número a f estaria tendendo e ela pensa bastante, mas não tem uma resposta. Depois disto, alteramos a janela gráfica para o tipo B e ela diz:

> **A:** Ela (a função) dá uma curvinha ... ela não chega no zero, ela não passa no zero, ela ... no caso assim, a assíntota (a vertical) é no zero, ela chega mais perto, mas ela não é zero. A horizontal também, chega perto, mas não é zero.

Continuamos a mudar a janela gráfica desta vez para o tipo C e Ana percebe que o gráfico de f fica semelhante à própria assíntota horizontal.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Ana constrói o gráfico de g em uma janela gráfica do tipo A como mostra a figura 33. Ela identifica a existência da assíntota horizontal e, desta vez, ao perguntamos qual a fórmula desta assíntota, ela diz:

> **A:** É um.

Insistimos para saber o que assume valor 1 e ela pensa bastante, mas não dá uma resposta. Perguntamos sobre a assíntota vertical, ela pensa bastante, mas não dá nenhuma resposta. Modificamos a janela gráfica para os tipos B e C, Ana mais uma vez percebe a semelhança do gráfico observado com a assíntota horizontal. Então, mudamos novamente a visualização para uma janela do tipo D, como mostra a figura 33. Ana observa:

> **A:** Ficou melhor para visualizar! Vemos a assíntota horizontal.

Então, perguntamos se ela acha que o gráfico de uma função pode cortar sua assíntota e ela logo responde não.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Ana visualiza o gráfico desta função inicialmente em uma janela do tipo A como mostra a figura 34 e identifica a assíntota horizontal. Novamente ela se refere à ela por -2, omitindo a variável e o fato de ser uma equação. Mudamos a janela gráfica para os tipos B e C e novamente ela ressalta a semelhança do gráfico que está vendo com a assíntota horizontal. Novamente alteramos a janela, fazendo com que fique do tipo D. Ela apenas observa, parece que confirma o que ela estava esperando que acontecesse, na verdade algo semelhante com o que já tinha observado no item anterior.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Ana traça o gráfico desta função em uma janela do tipo A' como mostra a figura 35, observa e, quando perguntamos se ela acha que o gráfico que ela está vendo reflete todos os sinais que a função pode assumir, ela pensa e diz que não. Perguntamos por quê, ela pensa bastante, pedimos para ela olhar para a fórmula e diz:

> **A:** Porque ... ela assim ... observando, ela é positiva, né? Quando x é maior que 2, ela é positiva.

Modificamos a janela gráfica para o tipo A, ela pensa bastante e diz:

> **A:** Agora é uma equação do 2º grau, um polinômio (se refere ao numerador) e daí ...

Ela também fala sobre a existência de assíntotas. Perguntamos o que ela acha que acontecerá com a função quando x tender a infinito e ela diz que irá para infinito. Neste momento, explicamos que este é um caso de assíntota inclinada (ela não tinha estudado este tipo em seu curso). Ela observa a existência de uma assíntota vertical também. Tendo dito isto, visualizamos os gráficos em janelas do tipo B e C, e Ana confirma suas previsões.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2+x}$

Ana traça o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 36 e fala sobre a existência da assíntota vertical, referindo-se a ela como 0,5 (desta vez, ela também omite o sinal negativo). Perguntamos o que ocorre quando $x = 0$, pois o denominador neste caso é zero. Ela apenas olha, pensa, mas não responde. Observando o gráfico, ela não vê uma assíntota vertical em $x = 0$. Explicamos que neste ponto ocorre uma indeterminação, $x = 0$ não pertence ao domínio da função e não há assíntota. Ela diz ter entendido.

Em seguida, alteramos a janela gráfica para o tipo C como mostra a figura 36 e ela fala da semelhança do gráfico da função com uma reta, que ela aponta como assíntota inclinada de j.

(VI) $k(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x}$

Ana traça o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 37 e observa a existência da assíntota vertical. Ela não faz nenhum comentário. Mudamos a janela gráfica para o tipo C e ela fala que não existe outra assíntota. Também comenta sobre a semelhança do gráfico da tela com uma parábola. Perguntamos por que ela acha que isto ocorre e ela diz:

> **A:** Porque é um polinômio.

Pedimos para ela explicar melhor, já que a fórmula de k é uma divisão de polinômios. Ela continua:

> **A:** Porque resolvendo isto daqui, vai dar $x^2+...$, $x^2+\frac{1}{x}$ ... este $\frac{1}{x}$ vai se tornando insignificante.

Ana procede de forma análoga com as funções dos itens (VII) e (VIII).

4.3.3 Atividade II

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Voltamos a visualizar esta função nas janelas gráficas mostradas na figura 32 e vamos calcular uma aproximação para a fórmula da reta à qual o gráfico da função f se assemelha depois do processo de redução global. Um dos valores encontrados por Ana são mostrados na tabela abaixo para ilustrar:

x	y	Fórmula
121	0.008264	$y = -0.000032x + 0.0122$
256	0.003906	

Ana encontra outras fórmulas a partir da escolha de outros pontos e observa que os coeficientes parecem tender a zero.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Visualizamos esta função em janelas gráficas como mostra a figura 33. Ao procurarmos uma aproximação através de uma reta para a g durante o processo de redução global, Ana obtém, por exemplo, a seguinte fórmula dentre outras:

x	y	Fórmula
20	1.052631	$y = -0.0003x + 1.06$
150	1.013422	

Ela observa os resultados e conclui que o coeficiente angular está tendendo para zero e provavelmente o termo independente vai para 1. Lembra que a reta $y = 1$ é a assíntota horizontal.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Ela procede de forma análoga neste item.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Retornamos a esta função da atividade anterior. Nós a visualizamos novamente em janelas de tipos B e C como mostra a figura 35. Por exemplo, uma das fórmulas encontradas por Ana segue abaixo:

x	y	Fórmula
80	410.269230	$y = 5x + 10.98$
85	435.253012	

Ana, após observar seus dados e a reta calculada na tela, comenta que o gráfico da função i e a reta estão muito próximos, sendo esta muito próxima do que seria a assíntota inclinada. Ela estima que o coeficiente angular estaria tendendo a 5 e o termo independente talvez a 10 ou 11.

A função j do item (V) também foi estudada nesta sessão, mas as reações de Ana foram análogas.

4.3.4 Atividade III

Prosseguimos a obter aproximações para o cálculo das assíntotas, porém com outro método, o algébrico. Na verdade, durante a atividade I Ana já havia antecipado este método no item (VI). Também, após o cálculo das fórmulas, pedimos que traçasse as assíntotas na mesma tela da função e das retas calculadas pelo método numérico e posteriormente magnificasse o gráfico, isto é, desse *zoom in* e observasse as assíntotas nas mesmas janelas que as curvas, realizando a etapa de discriminação geométrica.

Além disso, também colocamos a questão de qual seria realmente a assíntota da função estudada ou se todas as retas visualizadas poderiam ser consideradas assíntotas da função. Esta questão é levantada ao final desta atividade e serve como motivação para a atividade seguinte.

Ana fica um tanto passiva nesta sessão. Realiza tudo que lhe é pedido, mas não fala muito.

4.3.5 Atividade IV

Iniciamos esta atividade, propondo uma forma de visualizar no computador a melhor reta que aproxima a curva no infinito.

Ana, ao traçar inicialmente o gráfico das funções $y = [f(x) - \bar{f}(x)]$ e $y = [f(x) - \hat{f}(x)]$ no computador e realizar o processo de redução global, não observa nenhuma alteração entre elas. Porém, quando multiplica por x sua reação é:

A: Oh, ou!

Ana observa bastante, fica intrigada e pergunta por que multiplicamos por x. Perguntamos se ela mesma não poderia tentar encontrar uma resposta. Ela pensa, mas diz que não sabe. Então, explicamos que fazemos isto para amplificar as diferenças que podem estar sendo mascaradas pela escala escolhida. Ela apenas ouve atenta e diz ter entendido. Ela continua a atividade com as outras funções.

Ana novamente visualiza o gráfico da função $k(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ como mostra a figura 37. Ela altera a janela gráfica ficando do tipo C e procede da mesma forma que nas outras atividades para encontrar aproximações numéricas e algébricas para a parábola da qual a curva se aproxima no infinito. Ela observa os coeficientes dos termos de graus 1 e 0 tenderem a zero e o coeficiente do termo de grau 2 tender a 1. Também vê a coerência dos resultados encontrados nas duas etapas. Então, perguntamos se ela vê alguma semelhança entre o conceito de assíntotas e o que ela está observando. Ela diz:

> **A:** Porque quando tender a infinito, elas se aproximam (a curva e a função limitante).

Ana procede de forma análoga nos outros itens desta atividade que não foram citados, mas não resta nenhuma observação relevante a ser feita com relação a elas. Ana se mostra bastante tímida e um pouco fechada, não é de falar muito.

Ao final da última atividade, perguntamos a Ana como ela definiria assíntota. Ela diz:

> **A:** É um limite, né, que ... da função ... paralelo ao eixo x, é ... (ela se refere à horizontal) quando (x) tende a infinito vai dar uma constante.

Perguntamos como seria no caso da assíntota inclinada. Ela prossegue:

> **A:** A inclinada vai tender também ... (pensa bastante) estou imaginando assim, a gente divide, tem lá o ... polinômio entre aspas, né? Como é o nome disto aqui? ... Não é polinômio ... É, a gente faz o quociente, iguala a zero e acha.

Perguntamos como ela definiria função limitante (já havíamos lhe falado sobre isto) e ela diz:

> **A:** É tipo uma assíntota, só que a função limitante é uma função do 2º grau, é uma parábola.

Também aproveitamos o momento para saber a opinião de Ana sobre as atividades. Ela fala:

A: Eu acho que ajuda, porque a gente vai ter mais noção assim quando tende a infinito, porque, pela escala, a gente vê. Eu gostei!

4.3.6 Pós-atividade

1. Ana continua apenas escrevendo por extenso o significado da notação de limite.

2. (a) Ana não altera sua resposta do pré-teste, ela diz que a afirmação é verdadeira.

   (b) Desta vez, Ana acerta. A afirmação é falsa e ela justifica, dizendo que as raízes de f podem cortar a assíntota, o que só pode ocorrer quando a assíntota horizontal coincide com o eixo x. Ela não dá nenhum exemplo de função que se comporte como ela descreveu.

   (c) Ana acerta, diz que a afirmação é falsa. Ela justifica apenas dizendo que depende da função, novamente não dá exemplo.

3. (a) Ana acerta. Cita a função $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ que possui a assíntota horizontal $y = 2$.

   (b) Ana acerta. Cita a função $y = \dfrac{2x^3}{(x+1)^2}$ que possui a assíntota vertical $x = -1$.

   (c) Ana acerta. Dá o exemplo da função $y = \dfrac{2x^3+1}{x^2+1}$ que, de fato, possui uma assíntota inclinada $y = 2x$.

   (d) Ana acerta. Ela cita a função $y = \dfrac{2x^2+1}{x+1}$ que possui assíntotas vertical $x = -1$ e inclinada $y = 2x - 2$.

4. (a) Ana escreve:

   > Quando x tende a infinito, dá um número constante chamado assíntota.

   Podemos perceber que, apesar da confusão entre o valor que determina a reta e a assíntota, Ana se aproxima mais do conceito desta vez. Podemos notar que a sua definição está muito ligada com o *como calcular*.

   (b) Ana escreve:

   > O número que não pertença ao domínio, isto é, que zera o denominador da função racional.

   Novamente Ana se refere à assíntota por número e, ao tentar defini-la, acaba por explicar um critério para encontrá-la. Notemos que ela ainda acha que basta o denominador ser zero para garantir a existência de assíntotas verticais, o que sabemos não ser verdadeiro, pois o numerador pode ser zero também e termos uma indeterminação, cujo limite não seja $\pm\infty$.

(c) Ana escreve:

> É uma função racional que tenha no numerador um expoente n e no denominador um expoente $n - 1$.

Mais uma vez podemos notar que Ana não consegue definir com clareza, pois chama a assíntota inclinada de função racional, quando sabemos pelo contexto que não era isto que ela gostaria de dizer. Ela acaba descrevendo um critério do que definindo propriamente.

5. (a) Ana basicamente escreve o mesmo critério mencionado no pré-teste.

(b) Idem ao item sobre assíntotas verticais do exercício anterior, o que prova mais uma vez sua dificuldade em distingüir definição de critério.

(c) Ana escreve:

> Dividindo a função racional e igualando seu quociente a zero, encontramos a assíntota inclinada.

Ana com certeza se refere ao critério visto durante as atividades, apesar de sua explicação confusa. Este ponto mostra que, apesar de Ana saber usar o critério corretamente como foi visto em vários momentos das atividades e dos testes, ao tentar explicá-lo, não tem êxito.

6. (a) Assim como no pré-teste, Ana continua encontrando as assíntotas e aplicando critérios corretamente, inclusive calculando as derivadas primeira e segunda, mas curiosamente ela continua sem desenhar o esboço do gráfico, ela apenas desenha os eixos, as assíntotas, mas o gráfico da função não desenha.

(b) Idem ao item anterior.

(c) O gráfico continua incorreto. Ela continua encontrando uma assíntota vertical no ponto em que $x = 3$. Desta vez ela encontra a assíntota inclinada. Neste trecho, se Ana fizesse o gráfico correto: uma reta sem um ponto, ela poderia ter percebido um conflito, já que em geral os alunos nesta fase não consideram que retas possam ser assíntotas delas mesmas.

4.3.7 Esboço da imagem de conceito de Ana

Agora iremos fazer um resumo das principais idéias observadas durante a pré-atividades, as atividades e a pós-atividades de Ana, afim de ajudar em nosso esboço de sua imagem de conceito.

Esboço da imagem de conceito anterior

1. **Definição de conceito:** Ela não define limite, apenas escreve por extenso o significado do símbolo de limite. Ela também tem dificuldade em definir assíntotas. Cita apenas algumas características e critérios, ao invés de definir. Não mostra muita distinção entre *definir* e *como encontrar*.

2. **Critérios:** Para calcular assíntotas horizontais, ela consegue calcular os limites no infinito. Porém o mais interessante é quando consegue explicar a semelhança do gráfico de algumas funções com parábolas após o processo de redução global; no exemplo $y = \dfrac{x^3+1}{x}$, efetua a divisão e explica que $\frac{1}{x}$ é insignificante quando x é grande.

3. **Exemplos:** Consegue dar alguns exemplos de funções que possuem assíntotas.

4. **Idéias equivocadas:** Se o denominador zera, então afirma que há assíntota vertical. Ana não considera a possibilidade da indeterminação quando o numerador também é zero. Ela também acha que o gráfico de uma função nunca corta sua assíntota. Quanto aos limites no infinito, ela acha que, para as assíntotas horizontais existirem, os limites (quando $x \to \infty$ e $x \to -\infty$) devem ser iguais.

5. **Idéias corretas:** Ana diz que nem toda função racional possui assíntotas, mas não dá nenhum exemplo. Ela demonstra alguma habilidade para calcular e desenhar assíntotas.

6. **Conexões:** Ela consegue identificar a existência de assíntotas horizontais ao visualizar os gráficos em janelas com valores de x e y pequenos, mas inicialmente não sabe dizer as fórmulas destas assíntotas, mesmo as mais simples como $y = 0$. Após o processo de redução global das funções, rapidamente relaciona as retas observadas com as respectivas assíntotas, inclusive as verticais que, no início das atividades, não identificava. Ela também percebe quando partes do gráfico não aparecem em

certas janelas; isto mostra que ela consegue analisar algebricamente as funções estudadas, sem confiar plenamente na máquina e relaciona os dados algébricos com as características gráficas da função.

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Não observamos nenhuma reação importante.

8. **Incoerências momentâneas:** Quando tenta dizer a fórmula de uma assíntota, omite informações, como em $y = 1$, ela diz apenas 1. Ela também confunde hipérboles com parábolas e, quando visualiza a suposta parábola, atribui o fato ao polinômio do 2º grau que vê, por exemplo, no numerador da função racional.

Ana, antes das atividades, não havia estudado assíntotas inclinadas e seu contato com o restante dos assuntos abordados durante as atividades havia tido apenas em seu 1º período de cálculo, cujo desempenho, segundo ela, não estava bom.

Processo de interação entre abordagem e a imagem de conceito

Aqui vamos citar algumas características importantes observadas durante o processo de interação entre as atividades e a imagem de conceito do participante, com isso, queremos mostrar a evolução deste processo.

Atividade II

- Na etapa numérica, rapidamente percebe que os coeficientes das fórmulas das retas tendem a certos valores.
- Percebe que as aproximações das fórmulas encontradas nos levam às fórmulas das assíntotas das funções estudadas.
- Relaciona as retas inclinadas encontradas com as assíntotas inclinadas da função.

Atividade III

O grande ponto positivo de Ana nesta atividade foi ter antecipado o método algébrico para calcular assíntotas. Contudo, não temos mais o que observar, já que Ana ficou muito passiva e apenas realizou as atividades sem reações relevantes.

Esboço da imagem de conceito posterior

1. **Definição de conceito:** Ana consegue definir assíntota horizontal. Também tenta definir assíntota inclinada, mas a definição não fica muito clara. Mas ela continua sem definir limite, apenas escreve por extenso o significado do símbolo. Continua não mostrando muita distinção entre *definir* e *como encontrar*.

2. **Critérios:** Ana possui maior capacidade de calcular fórmulas de assíntotas e determinar a existência delas. Dentre os critérios, podemos destacar este conjecturado espontaneamente por ela: se o polinômio do numerador tiver grau n e o polinômio do denominador tiver grau $n-1$, a função racional possui uma assíntota inclinada.

3. **Exemplos:** Sua capacidade de dar exemplos pertinentes de funções que possuem assíntotas é bastante aumentada.

4. **Idéias equivocadas:** Ela continua achando que se o denominador zera, então necessariamente há assíntota vertical; não considerando a possibilidade da indeterminação quando o numerador também é zero. Além disso, continua achando que para a assíntota horizontal existir é necessário que os limites no infinito sejam iguais.

5. **Idéias corretas:** Desta vez acha que a assíntota horizontal pode cortar o gráfico da função, mas não sabe dar um exemplo, apenas descreve uma situação possível: uma função que possui o próprio eixo x como assíntota horizontal e também tem raízes reais, o que significa que a função possui pontos pertencentes à assíntota. Ela também continua achando que nem toda função racional possui assíntota, mas continua sem dar nenhum exemplo de função que não tenha.

6. **Conexões:** Consegue fazer analogia do conceito de assíntota com o conceito de função limitante.

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Não observamos nenhuma importante.

8. **Incoerências momentâneas:** Não observamos nenhuma importante.

9. **Impressões:** Ana fica surpresa na etapa de reconceituação, quando apenas uma das funções-diferença explode. Fica intrigada com o fato de sugerirmos a multiplicação da função-diferença por x. Sozinha não consegue descobrir a resposta, mas demonstra ter entendido após a explicação. Por fim, ela gosta das atividades, pois as visualizações ajudariam no entendimento da noção de infinito.

Análise da imagem de conceito de Ana

A seguir, para melhor compreensão dos resultados dos testes pré e pós atividades de Ana, iremos resumí-los na tabela 3.

Algumas características da imagem de conceito de Ana permanecem inalteradas após as atividades. Podemos destacar a sua dificuldade em definir os objetos matemáticos, sobretudo a noção de limite. Ana permanece sem definí-lo, porém ela faz uma tentativa bem sucedida de definir assíntotas horizontais. Na verdade, ela continua confundindo as noções *definir* e *como encontrar*. Este tipo de dificuldade é esperada neste estágio de desenvolvimento de Ana como visto em estudos anteriores.

Há outros pontos negativos como ela continuar supondo como obrigatória a existência de assíntotas no ponto, onde ambos numerador e denominador de uma função racional tendem a zero, isto é, sem levar em conta a possibilidade de uma indeterminação, em que o limite no ponto exista, mas a imagem da função, não. Isto pode ter sido corroborado pelo computador, pois apesar das atividades oferecerem exemplos deste tipo, o *software* não evidenciava este aspecto. Por outro lado, Ana também não se dá conta do conflito porque, neste caso, não faz conexão entre aspectos algébricos e gráficos da função. Outro fato negativo importante observado, e este sim sem dúvida corroborado pelas atividades, é Ana achar a necessidade dos limites no infinito de uma função serem iguais para existir a assíntota horizontal, já que não foi mostrado nenhum exemplo de funções que possuíssem assíntotas horizontais diferentes, justamente porque isto nunca ocorre com funções racionais. Entendemos isto como uma limitação da abordagem.

Por outro lado, há muitos pontos positivos. Após as atividades, Ana conhece mais critérios de existência de assíntontas e desenvolve mais habilidade para calcular suas fórmulas. Na verdade, mais do que isto, Ana por si mesma (antes de que fosse explicado) chega a um critério algébrico para identificar assíntotas. A sua capacidade de dar exemplos de funções que possuem assíntotas também é bastante aumentada como podemos observar na tabela dos testes das pré e pós atividades.

Ao contrário de antes das atividades, Ana desta vez admite a possibilidade de uma curva cortar sua assíntota, porém ela tem dificuldades em expressar sua justificativa para o fato e também de dar um exemplo para corroborar sua afirmação, apenas tenta descrever uma situação possível. Não é para menos, pois nenhum exemplo explorado durante as atividades mostrou tal propriedade. Por um lado, entendemos isto como uma limitação da abordagem que pode ser corrigida facilmente incluindo as funções que possuem a propriedade de cortar sua assíntota. Por outro lado, vemos isto como algo positivo no

Pré-atividades e pós-atividades – Ana			
Questões	itens	correção	
		antes	depois
1 – Definição de conceito de limite	(a)	D	D
	(b)	D	D
	(c)	D	D
	(d)	D	D
2 – Verdadeiro ou falso	(a)	E	E
	(b)	E	CI
	(c)	CI	CI
3 – Exemplos	(a)	E	C
	(b)	C	C
	(c)	B	C
	(d)	C	C
4 – Definição de conceito de assíntotas	(a)	D	D
	(b)	D	D
	(c)	B	D
5 – Critérios para encontrar assíntotas	(a)	CI	CI
	(b)	E	CI
	(c)	B	CI
6 – Esboço de gráficos	(a)	CI	CI
	(b)	CI	CI
	(c)	E	E

C – Correto

CI – Correto, mas incompleto

CE – Correto por razões erradas

E – Errado

D – Escreve afirmações corretas, mas desvia do que foi perguntado

B – Em branco

Tabela 3: Tabela dos resultados dos testes das sessões pré e pós atividades de Ana.

sentido que, mesmo sem ter explorado exemplos de funções com a propriedade citada, ela consegue deduzir e ainda descrever uma situação: cita a possibilidade de existência de uma função que possua a assíntota $y = 0$ e tenha raízes reais. Acreditamos que esta dedução tenha sido estimulada pelas atividades, já que no pré teste ela tinha respondido o contrário.

Outro fato interessante: apesar de Ana afirmar que nem todas as funções possuem assíntotas já desde antes das atividades, e continuar afirmando após, ela não consegue dar um exemplo de uma função deste tipo. Ela parece não se lembrar destes exemplos observados durante as sessões. Ana pode simplesmente não ter evocado a parte de sua imagem de conceito necessária no momento da observação.

Ana muito naturalmente faz a analogia do conceito de assíntotas com o conceito de funções limitantes. Na realidade, mais do que uma analogia, ela entende a ampliação ou a generalização de um conceito para o outro.

E, finalmente, podemos citar os aspectos emocionais positivos como: a surpresa, a curiosidade (durante a etapa de reconceituação ao pensar na razão da multiplicação por x), o fato de ter gostado das atividades e achar que elas ajudaram na compreensão do infinito.

4.4 João

4.4.1 Pré-atividade

1. (a) João responde:

   > Quando x se aproxima de a, a imagem se aproxima de b.

   (b) João responde:

   > Quando x se aproxima de a, a imagem cresce, se aproxima de infinito. A reta $x = a$ é uma assíntota vertical.

   João se antecipa e já relaciona a definição de limite infinito com a definição de assíntota vertical.

   Nos outros dois itens, João define limite de forma análoga.

2. (a) João erra, diz que a afirmação é verdadeira. Ele explica a idéia de que quanto mais o denominador se aproxima de zero, o quociente torna-se grande. Não percebe a possibilidade do numerador também ser zero.

(b) João erra, diz que a afirmação é verdadeira. Ele responde que a função se aproxima da sua assíntota tanto quanto queiramos, mas nunca a intercepta.

(c) João erra novamente, diz que a afirmação é verdadeira. Contudo, ele diz:

> Se existir um valor real a que torne a função do denominador nula, isto ocorrerá.

Notemos que, apesar dele dizer que a frase é verdadeira, ao dizer *se existir*, fica implícito que tal valor de a pode não existir e a assíntota não existir, o que contradiz sua resposta. Aqui talvez não seja um problema de imagem de conceito, mas uma deficiência em entender expressões como *existe* e *para todo*.

3. (a) João acerta. Dá o exemplo da função $y = \dfrac{1}{x}$ que possui a assíntota horizontal $y = 0$.

(b) João acerta. Dá a função $y = \dfrac{1}{x^2}$ como exemplo. Ela possui a assíntota vertical $x = 0$.

(c) Ele deixa em branco.

(d) João acerta. Ele cita a função $y = \dfrac{1}{x^4}$ que possui assíntotas vertical e horizontal.

4. (a) João escreve:

> É uma reta do tipo $y = b$, onde $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$, com $b \in \mathbb{R}$.

Esta é a definição de assíntota horizontal.

(b) João escreve:

> É uma reta do tipo $x = a$ com $a \in \mathbb{R}$ e ocorre quando $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Também escreve a definição correta.

(c) João escreve:

> É uma reta com inclinação que ocorre quando a imagem se aproxima desta reta.

Apesar de João não ter estudado assíntotas inclinadas, ele se aventura em definir um objeto desconhecido. Acaba fazendo isto por analogia.

5. (a) João responde que, se $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$, a assíntota horizontal existirá.

(b) João diz apenas que a função tem um ponto de descontinuidade. Aqui seu critério está incompleto, pois sabemos que isto não é suficiente.

(c) Ele deixa em branco.

6. Em todos os itens, João desenha os gráficos corretamente, explicitando as assíntotas horizontais e verticais quando existem. Observamos que ele sabe analisar os gráficos e as leis das funções. Por exemplo, na questão 2, item (a), apesar de ele ter dito que bastava o denominador ser zero para existir uma assíntota vertical, no item (c) desta questão, mesmo o numerador também sendo zero para $x = -3$, ele não erra e desenha o gráfico corretamente. Isto nos leva a crer que anteriormente ele apenas não tinha feito a conexão entre as possibilidades.

4.4.2 Atividade I

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

João observa o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 32. Rapidamente ele identifica a existência da assíntota horizontal, informando inclusive a fórmula: $y = 0$; e também identifica a presença da assíntota vertical, informando a fórmula: $x = 0$. Ele ainda complementa:

> **J:** Quando x tende a $-\infty$ ou a $+\infty$, a função vai para zero. E quando a função vai para $-\infty$ ou para $+\infty$, x vai para zero.

Em seguida, alteramos a janela gráfica para o tipo B e depois para o tipo C. João observa e vê a semelhança do gráfico de f com sua assíntota horizontal. Perguntamos por que ele acha que isto ocorre e ele responde:

> **J:** Sei lá, parece que você está enxergando de longe, aí não dá para distinguir qual é qual, parece que é tudo igual.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

João visualiza o gráfico desta função na janela gráfica do tipo A como mostra a figura 33 e identifica as assíntotas vertical e horizontal, informando inclusive suas fórmulas, que são, respectivamente, $x = 1$ e $y = 1$. Alteramos a janela para os tipos B e C, João relaciona o que ele observa na tela com a assíntota horizontal. Mudamos novamente a janela, desta vez para o tipo D e João diz:

> **J:** Dá para a gente mudar aqui também, porque ficou confuso (ele aponta para a região do gráfico, onde forma uma espécie de “pico”e onde sabemos está a descontinuidade, $x = 1$, ver gráfico tipo D da figura 33).

Neste ponto, ele propõe uma mudança na janela gráfica para melhor visualizar a assíntota vertical. Mais adiante, veremos que ele deseja encontrar uma janela onde seja boa a visualização de todas as assíntotas da função. Logo, ele percebe ser impossível visualizar a assíntota vertical como ele observou a horizontal na janela do tipo D sem perder esta de vista.

Perguntamos em seguida se ele acha que o gráfico de qualquer função pode cortar sua assíntota e ele diz:

> **J:** Ah ... Eu acho até que ela pode cortar, não sei, eu tenho que pensar. Talvez. ... Por exemplo, aqui (ele aponta para um trecho do gráfico do tipo A onde o gráfico se aproxima da assíntota horizontal) ela não pode cortar onde ela está se aproximando, mas em outra região sim.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

João visualiza o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 34 e logo identifica a assíntota horizontal, inclusive sua fórmula: $y = -2$. Mudamos a janela gráfica, ficando dos tipos B e C. De imediato, João aponta o fato do gráfico da função se parecer com sua assíntota horizontal, que nesta tela apesar de ser semelhante à reta $y = 0$ (perguntamos-lhe se ele acha que é $y = 0$), ele é coerente com sua primeira afirmação dizendo que não. Em seguida, ele pergunta se é comum ocorrer isto, ou seja, depois do processo de redução global, retas como neste exemplo, $y = -2$ se confundirem com o eixo x. Perguntamos o que ele acha e logo responde:

> **J:** Sei lá, pelo menos grande da ordem que está aqui, talvez seja até normal acontecer isto ... é um valor muito pequeno para uma distância muito grande que a gente está tentando enxergar.

Alteramos a janela gráfica para uma do tipo D como mostra a figura 34. Ele confirma sua expectativa com relação ao gráfico realmente se parecer com a reta $y = -2$ e não $y = 0$. Neste ponto, perguntamos se ele acha que o computador traça tudo corretamente e ele prontamente diz que não, com certeza não.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Traçamos o gráfico desta função em uma janela do tipo A' como mostra a figura 35. João observa e diz:

J: Parece com uma parábola mal feita.

Perguntamos se ele acha que o gráfico como ele está vendo nesta janela descreve todos os sinais assumidos pela função. Pedimos para ele pensar na fórmula. Ele reflete um pouco e diz que não, porque a função também assume valores positivos. Ele lembra também que ela possui uma descontinuidade em $x = 2$ que não aparece nesta janela.

Mudamos a janela para o tipo A, João mostra bastante interesse e diz gostar desta visualização. Neste momento, explicamos que neste exemplo existe uma assíntota inclinada, pois ele não tinha visto este tópico em seu curso de cálculo. Rapidamente, ele faz analogia com os outros tipos de assíntota que conhece e diz que sim, existe uma assíntota inclinada nesta função. Ele também lembra a existência da assíntota vertical. Logo em seguida observamos os gráficos em janelas dos tipos B e C, ratificando o que já havíamos estudado.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2 + x}$

João traça o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 36 e observa a existência de uma assíntota vertical. Ele explica:

J: Porque não pode ser zero o denominador e ela é zero pra $x = -\frac{1}{2}$.

Então, perguntamos para João o que acontece quando $x = 0$, dizemos que neste ponto o denominador também zera. Ele pensa sobre isto (ele não parecia ter visto este fato) e não diz nada. Lembramos-lhe que, diferente do fato apontado por ele e do qual resultou uma assíntota, quando $x = 0$ temos um tipo de indeterminação e não há assíntota. Ele só balança a cabeça e diz ter entendido.

Em seguida, alteramos a janela gráfica para o tipo C como mostra a figura 36 e João comenta sobre a semelhança do gráfico da tela com a reta, que ele identifica como assíntota inclinada de j. Neste momento, João faz a pergunta:

J: Quando a gente sabe se uma função tem uma assíntota horizontal ou inclinada apenas olhando para a fórmula?

Pedimos para ele refletir sobre sua pergunta e tentar sozinho chegar à alguma resposta. Explicamos que no decorrer das atividades ele seria capaz de obter esta resposta. Ele promete pensar nesta questão.

(VI) $k(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$

João traça o gráfico desta função em uma janela do tipo A como mostra a figura 37 e fala sobre a existência da assíntota vertical $x = 0$. Perguntamos se existe mais alguma assíntota. Ele pensa e diz:

J: Não sei o que ocorre com o comportamento desta função. Não sei.

Mudamos a janela gráfica para o tipo C e, então, João tem certeza que não existe outra assíntota e ainda comenta a semelhança com uma parábola.

(VII) $g(x) = \dfrac{x^4-10}{x^2+1}$

João procede de forma análoga.

4.4.3 Atividade II

(I) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Voltamos a visualizar esta função nas janelas gráficas mostradas na figura 32 e vamos calcular uma aproximação para a fórmula da reta à qual o gráfico da função f se assemelha após a redução global. Um dos valores encontrados por João são mostrados na tabela abaixo:

x	y	Fórmula
200	0.005	$y = -0.0000083x + 0.0067$
600	0.001666	

João encontra outras fórmulas a partir da escolha de outros pontos e observa que os coeficientes parecem tender a zero.

(II) $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

Visualizamos esta função em janelas gráficas como mostra a figura 33. Ao procurarmos uma aproximação através de uma reta para a g durante o processo de redução global, João obtém, por exemplo, a seguinte fórmula dentre outras:

x	y	Fórmula
50	1.040816	$y = -0.00062x + 1.07$
60	1.033898	

Ele observa os resultados e conclui que o coeficiente angular está tendendo para zero e provavelmente o termo independente vai para 1. Lembra que a reta $y = 1$ é a assíntota horizontal.

(III) $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

Ele procede de forma análoga neste item.

(IV) $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$

Retornamos a esta função da atividade anterior. Visualizamos-na novamente em janelas de tipos B e C como mostra a figura 35. Por exemplo, uma das fórmulas encontradas por João segue abaixo:

x	y	Fórmula
20	111.166666	$y = 4.97x + 11.78$
40	210.552631	

João, após observar outros dados e a reta calculada na tela, comenta que o gráfico da função i e a reta estão muito próximos, sendo esta muito próxima do que seria a assíntota inclinada. Ele estima que o coeficiente angular estaria tendendo a 5 e o termo independente a 11.

(V) $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2+x}$

João procede de forma análoga neste item.

Ao final desta atividade, propomos a João que depois pensasse em uma outra forma de calcular as assíntotas, um método algébrico para obter suas fórmulas. Dizemos que isto o ajudaria, sem dúvida, a responder àquela pergunta feita por ele próprio anteriormente na primeira atividade (com relação a poder reconhecer quando uma função possui assíntota inclinada ou horizontal apenas analisando a fórmula) e que isto seria o nosso foco na atividade seguinte.

4.4.4 Atividade III

No início desta atividade, João diz ter refletido bastante sobre a última questão proposta na atividade anterior e diz ter encontrado uma forma algébrica de calcular assíntotas. Primeiro ele define assíntota inclinada:

J: É uma reta, né? Que tem uma inclinação e que a função se aproxima dela quando x vai para $+\infty$ ou $-\infty$.

Perguntamos se ele encontrou um artifício algébrico para calculá-la e ele responde:

J: Só vai acontecer isto, eu acho, quando for um polinômio de grau $n+1$ no numerador e um polinômio de grau n no denominador. Aí você pega o numerador e divide pelo denominador ... o quociente vai ser a sua reta e o resto você coloca lá como ... é o resto.

Neste momento, ele olha se referindo ao resto como algo que não vai interferir mesmo no comportamento no infinito da função. Embora, sua explicação tenha o foco em assíntotas inclinadas, mesmo porque talvez ele esteja mais preocupado com elas por ser um assunto novo para ele (as horizontais, ele já sabia calcular), ele logo percebe que este seu método serviria para as horizontais também.

Aproveitamos este momento para colocarmos a questão:

Tutor: Você disse que, se a diferença de graus entre os polinômios do numerador e denominador for 1, teremos uma assíntota inclinada, e naqueles exemplos da atividade passada, o (VI) e o (VII), onde após o processo de redução global surgia uma parábola, o que ocorre?

João, então, responde:

J: Ah! Então neste caso a diferença será 2, não?!

Voltamos, então à questão do resto da divisão polinomial. Lembramos-lhe que todo resto tem grau menor do que o grau do polinômio divisor. E o próprio João complementa:

J: Então, quando x tender a infinito, esta parte vai tender a zero.

Prosseguimos durante esta atividade a obter aproximações para o cálculo das assíntotas das funções dos itens (I) a (VII), utilizando o método proposto pelo próprio João e que chamaríamos de etapa algébrica. Também propomos, após o cálculo das fórmulas, traçar as assíntotas na mesma tela da função e das retas calculadas pelo método numérico. Ao observarmos todas estas retas na mesma janela, colocamos a questão de qual seria realmente a assíntota da função estudada ou se todas as retas visualizadas poderiam ser consideradas assíntotas da função. Esta questão é levantada ao final desta atividade e serve como motivação para a atividade seguinte.

Prontamente, João diz que, para cada função estudada, apenas uma assíntota é verdadeira: a calculada pelo método algébrico, apesar das outras retas se confundirem com a assíntota após a redução global. Perguntamos por que e ele responde:

> **J:** É verdade, olhando aqui não vemos diferença, mas as calculadas pelo método numérico, você pegou apenas dois valores e tentou, só com estes valores, achar a reta toda, né ... pelo método algébrico, é mais geral.

Lembramos-lhe que, na etapa algébrica, também temos uma aproximação, pois há um momento em que desprezamos o resto. Ele diz:

> **J:** Mas ali é um número muito pequeno dividido por um número muito grande, muito muito grande.

Em todas as funções estudadas nesta sessão, realizamos a etapa de discriminação geométrica entre as assíntotas e as curvas.

4.4.5 Atividade IV

Iniciamos esta atividade, propondo uma forma de visualizar no computador a melhor reta que aproxima a curva no infinito.

João, ao traçar inicialmente as diferenças $y = [f(x) - \bar{f}(x)]$ e $y = [f(x) - \hat{f}(x)]$ no computador e realizar o processo de redução global, não observa nenhuma alteração entre elas. Porém, quando multiplica por x sua reação é:

> **J:** Neurótico!! Muito estranho!

Explicamos novamente o que foi feito para ter certeza se ele estava acompanhando qual é o objetivo da atividade e o que estava sendo feito. Prosseguimos com a atividade, realizando a mesma tarefa com todas as funções de (I) até a função do item (V). João fica curioso e pensa bastante. Ao perguntarmos por que ele acha que isto ocorre, ele diz:

> **J:** Estou sem palavras.

João novamente visualiza o gráfico da função $k(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$ como mostrado na figura 37. Ele muda a janela gráfica até ficar do tipo C e procede da mesma forma que nas outras atividades para encontrar aproximações numéricas e algébricas para a fórmula da parábola da qual o gráfico de k se aproxima no infinito. Após a etapa de discriminação, João fala da analogia do que ele observa com o conceito de assíntota (já havíamos lhe explicado funções limitantes):

> **J:** Assim como no caso das assíntotas, existe uma aproximação ali ... da função limitante com a curva que a gente deseja traçar.

Ao final desta atividade, perguntamos como ele definiria assíntota inclinada depois do que ele observou até agora e ele diz:

> **J:** É uma reta quando você calcula a diferença entre as duas, a curva e a assíntota, a diferença é muito pequena.

Perguntamos se ele pensasse nisto que ele falou em termos de limite como ele definiria e ele continua:

> **J:** Ah, o limite para infinito desta diferença é zero.

Em seguida, perguntamos se poderíamos aplicar esta mesma definição para assíntotas horizontais e ele responde que sim, dizendo apenas que, neste caso, a reta não terá uma inclinação, isto é, ela será paralela ao eixo x. Prosseguimos perguntando como ele definiria funções limitantes:

> **J:** Quando você analisa o comportamento da função que você quer ... para valores muito grandes, ela toma uma forma de uma outra função, né? ... Se aproxima de uma outra função.

Por fim, perguntamos o que ele achou das atividades. Ele responde:

> **J:** Ah, ajuda pra caramba! ... Porque quando a gente começa a estudar assim, a gente tem a mente muito fechada, principalmente quando joga conceito como assíntota que é um conceito novo para mim, então você fica com a mente muito fechada pra aquilo, vê uma reta ali que vai chegar muito perto e tal, quando tende

> a infinito, mas quando a gente começa a experimentar, ainda mais quando funções parecem parábolas ou quando tem as assíntotas oblíquas, abre mais a mente para a gente entender o que é ... tenho certeza que tem muito mais coisa ... Gostei pra caramba!

4.4.6 Pós-atividade

1. Em todos os itens, João repete as definições dadas no pré-teste.

2. Em todos os itens deste exercício, não observamos qualquer mudança substancial em suas respostas.

3. (a) Neste item, João cita a função $y = \dfrac{1}{x^2}$ que possui, de fato, a assíntota horizontal $y = 0$.

   (b) João dá o exemplo da função $y = \dfrac{x+1}{x}$ que possui a assíntota vertical $x = 0$.

   (c) Desta vez, João dá o exemplo da função $y = \dfrac{x^5 - 1}{x^4}$ que possui a assíntota inclinada $y = x$. Lembramos que no pré-teste ele não havia dado exemplo algum por não ter estudado este tipo de assíntota.

   (d) Ele dá exemplo da função $y = \dfrac{1}{x}$ que possui duas assíntotas, uma vertical $x = 0$ e outra horizontal $y = 0$.

4. (a) Lembramos que a definição de assíntota horizontal dada por João no pré-teste foi correta e bastante formal. Desta vez, ele dá uma explicação mais intuitiva. Ele escreve:

   > É uma reta horizontal da qual a $f(x)$ se aproxima, toma forma, para valores grandes de x.

   (b) Sua explicação é análoga à explicação do item anterior.

   (c) João escreve:

   > É uma reta inclinada da qual os valores de $f(x)$ se aproximam, $f(x)$ toma a forma desta reta no infinito.

   Podemos observar a influência de nossas atividades neste trecho. Além disso, apesar da maior facilidade de João em se expressar matematicamente, ele comete a impropriedade de dizer que $f(x)$ toma forma de uma reta, quando sabemos (e, com certeza, João também sabe) que é o gráfico de f que se aproxima da reta. Isto é perfeitamente natural, tendo em vista o estágio de desenvolvimento em que o participante se encontra e, inclusive, por se tratar na verdade de uma descrição de conceito e não propriamente de uma definição de conceito de assíntotas.

5. (a) Neste item, não observamos mudança em seu critério em comparação com o pré-teste.

   (b) Desta vez, seu critério é completo e formal. Ele escreve:

   Calculamos $\lim_{x \to a\pm} f(x) = \pm\infty$, onde $a \in \mathbb{R}$ não pertence ao domínio de f.

   (c) João escreve:

   Seja $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, $f(x)$ terá assíntota inclinada se $p(x)$ tiver grau $n+1$ e $q(x)$, grau n.

   Podemos observar que João, apesar de nunca ter estudado este tipo de assíntotas, após as atividades consegue criar um critério correto para identificá-las.

6. Em todos os itens deste exercício, assim como no pré-teste, João faz corretamente todos os esboços dos gráficos e ainda acrescenta a assíntota inclinada no caso do item (b).

4.4.7 Esboço da imagem de conceito de João

Agora iremos fazer um resumo das principais idéias observadas durante a pré-atividades, as atividades e a pós-atividades de João, afim de ajudar em nosso esboço de sua imagem de conceito.

Esboço da imagem de conceito anterior

1. **Definição de conceito:** João consegue com suas palavras definir o conceito de limite. Apesar disto, ele mostra ter dificuldade em entender definições formais, já que não compreende bem expressões como *existe* ou *para todo*. De qualquer forma, ele é capaz de citar definições formais de assíntotas. E ainda, logo nas primeiras sessões tenta definir assíntotas inclinadas, assunto não estudado por ele até aquele momento.

2. **Critérios:** Ele conhece critérios de existência de assíntotas baseados em cálculos de limites.

3. **Exemplos:** João consegue dar bons exemplos de funções que possuem assíntotas.

4. **Idéias equivocadas:** Ele acha que uma função se aproxima da sua assíntota tanto quanto queremos, mas nunca a intercepta. Ele também afirma que, se uma função possui assíntota vertical, então ela tem um ponto de descontinuidade.

5. **Idéias corretas:** Ele sabe que quanto mais o denominador se aproxima de zero, o quociente torna-se grande. Ele também desenha gráficos de funções corretamente, explicitando as assíntotas. Durante a etapa de visualização, identifica corretamente as assíntotas horizontais e verticais das funções estudadas. João não tem muita certeza, mas acha que o gráfico de uma função pode cortar sua assíntota em algum ponto; não dá nenhum exemplo. Além disso, ele mostra consciência dos efeitos da escala sobre os gráficos e tem consciência das limitações do computador.

6. **Conexões:** Ele relaciona a definição de limite infinito com a definição de assíntota vertical. Além disso, mesmo inicialmente sem pensar na possibilidade de, numa função racional, o denominador e o numerador serem zero e, assim, não existir assíntota vertical, ao se deparar com uma situação como esta, acaba analisando corretamente a função e não afirma existir a assíntota. Ele faz conexão entre os aspectos gráficos e algébricos quando informa as fórmulas das assíntotas apenas visualizando-as no computador e também em vários outros momentos, como por exemplo, quando percebe faltar partes do gráfico em certas janelas. Também relaciona as retas observadas durante o processo de redução global com as respectivas assíntotas.

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Em situações onde existe assíntota vertical e o *software* liga os pontos formando uma espécie de "pico", João percebe o conflito e sugere uma escala diferente para melhorar a visualização.

8. **Incoerências momentâneas:** Nenhuma incoerência importante foi observada.

Devemos lembrar que João não havia estudado assíntotas inclinadas antes das atividades e seu contato com o restante dos assuntos abordados durante as atividades havia sido apenas em seu 1º período de cálculo, cujo desempenho, segundo ele, estava sendo bom.

Processo de interação entre abordagem e a imagem de conceito

Aqui vamos citar algumas características importantes observadas durante o processo de interação entre as atividades e a imagem de conceito do participante, com isso, queremos mostrar a evolução deste processo.

Atividade II

Nesta seção, João realiza as tarefas pedidas e percebe que os coeficientes das fórmulas calculadas na etapa numérica tendem a certos valores que, por sua vez, são coerentes com os coeficientes das fórmulas das respectivas assíntotas. De resto, tudo que ele conclui não difere do que já foi relatado na etapa anterior.

Atividade III

- Ele responde a seu próprio questionamento quando encontra um critério de existência para assíntotas inclinadas. Ele diz que basta a diferença entre os graus dos polinômios do numerador e do denominador ser igual a 1. Ainda complementa, dizendo que é possível encontrar a fórmula da assíntota, dividindo o numerador pelo denominador da função racional.
- Faz analogia do que foi explicado no item anterior para a assíntota horizontal e para o caso de outras funções limitantes.
- Explica que o resto da divisão sugerida no primeiro item, quando o x tende a infinito, sempre tende a zero justamente porque o grau do resto é sempre menor do que o grau do divisor.
- Afirma que só existe uma assíntota em cada caso estudado, as outras são apenas aproximações. A calculada pelo método algébrico, segundo ele, é a melhor por ser mais geral do que as calculadas no método numérico, que foram obtidas a partir de valores particulares e por tentativa (notemos que ele não coloca em jogo aqui a própria definição de assíntota, isto é, ele não recorre a ela para responder à pergunta).

Esboço da imagem de conceito posterior

1. **Definição de conceito:** Permance definindo assíntota, mas desta vez, ora em termos de limite da diferença entre a fórmula da função e a fórmula da assíntota quando x tende a infinito e diz que este limite é zero, ora dizendo que assíntota é uma reta da qual a $f(x)$ se aproxima, toma forma, para valores grandes. Desta vez, João dá uma definição mais intuitiva e mais geral, independente do tipo. Apesar disto, ele continua tendo problemas em compreender expressões como *existe*.

2. **Critérios:** João não esquece os critérios aprendidos por ele, mas cria outro como conseqüência de seus próprios questionamentos e antes de o explicarmos. Ele divide o numerador pelo denominador da função racional e diz que o quociente é a fórmula da assíntota e o resto é desprezível quando x tende a infinito.

3. **Exemplos:** Ele continua dando bons exemplos de funções que possuem assíntotas, mas observamos um enriquecimento nos tipos de exemplos, sobretudo no caso das assíntotas inclinadas.

4. **Idéias equivocadas:** Ao responder as questões de verdadeiro ou falso, afirma que basta o denomindador ser zero para garantir a existência de uma assíntota vertical, não considerando a possibilidade do numerador também assumir aquele valor, o que não acarretaria na existência de uma assíntota. Porém, ao se deparar com uma situação como esta, ele analisa corretamente a função. Além disso, desta vez afirma que o gráfico de uma função pode se aproximar de sua assíntota tanto quanto queremos, mas nunca cortá-la.

5. **Idéias corretas:** João continua achando que, quanto mais o denominador se aproxima de zero, o quociente torna-se grande. Ele também afirma a unicidade de assíntota e justifica este fato. Há uma série de outras idéias já descritas no esboço da imagem de conceito anterior.

6. **Conexões:** Ele faz analogia entre o conceito de assíntotas e o conceito de funções limitantes. Ele continua relacionando a definição de limite infinito com a definição de assíntota vertical. E também continua fazendo boa conexão entre aspectos gráficos e algébricos de funções.

7. **Reação aos conflitos teórico-computacionais:** Nenhuma reação importante foi observada.

8. **Incoerências momentâneas:** Nenhuma incoerência importante foi observada.

9. **Impressões:** Tem a iniciativa de procurar uma janela gráfica melhor para visualizar assíntotas verticais. João mostra muita curiosidade. Sempre faz perguntas e, quando não obtém as respostas, tenta buscá-las sozinho, como quando questiona se é possível saber qual o tipo de assíntota uma função possui, analisando apenas a fórmula. Também fica bastante surpreso ao visualizar as funções-diferença multiplicadas por x no computador após a redução global. João diz gostar bastante das atividades porque, segundo ele, elas abrem a mente dele para o conceito de assíntota (que

ele afirma ser novo para ele), pois permitem experimentar. E, enfim, ele fica bem motivado por ter certeza que há muito mais pela frente a ser estudado com o auxílio da máquina.

Análise do esboço da imagem de conceito de João

A seguir, para melhor compreensão dos resultados dos testes das sessões pré e pós atividades de João, iremos resumí-los na tabela 4.

Conforme observado durante as primeiras sessões, João já possuía uma imagem de conceito relativamente rica de assíntotas para seu estágio, mas que nem por isso deixava de conter algumas idéias equivocadas. Algumas destas idéias não são alteradas pela abordagem, como por exemplo, sua dificuldade em entender o quantificador *existe*, porém já vimos em nosso referencial teórico que tais dificuldades são esperadas nesta fase. Mesmo assim, o interessante é que João já mostrava uma maturidade grande para entender definições formais, pois ele é o único dos participantes que dá definições corretas de limite e de assíntotas.

Outra idéia não alterada de João é sua resposta para a primeira afirmação da questão de verdadeiro ou falso. Ele continua dizendo que basta ambos numerador e denominador serem zero para garantir a existência da assíntota vertical, porém quando se depara com um exemplo em que isto ocorre ele analisa corretamente e não acusa a existência de uma assíntota. Acreditamos que tal afirmação no contexto formal e genérico de um verdadeiro ou falso soou muito abstrata para João (e na verdade, também soou assim para os outros participantes, mas os outros mostraram real desconhecimento quando confrontaram situações mais práticas) que, na verdade, sabia ser falsa a questão, mas não pensou na hipótese da indeterminação $\frac{0}{0}$ fazendo-o cometer o engano. Outro aparente erro de João cujas razões são semelhantes é quando afirma que uma curva pode sempre se aproximar de sua assíntota, mas nunca cortá-la. Em outros momentos, João chega a afirmar que pode cortar. Sabemos que as atividades não ajudaram João neste sentido, porque não foram explorados exemplos deste tipo. De qualquer forma, acreditamos que o contexto do verdadeiro ou falso é muito abstrato e distante para ele, fazendo-o se equivocar.

Antes das atividades, João diz que, se uma função possui uma assíntota vertical, então necessariamente ela possui um ponto de descontinuidade. Esta afirmação é falsa, pois sabemos, por exemplo, que a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ possui uma assíntota vertical $x = 0$ e é contínua. Na verdade, achamos que ele mesmo depois permaneceu com esta idéia, apenas não conseguimos detectá-la explicitamente

Pré-atividades e pós-atividades – João			
Questões	itens	correção	
		antes	depois
1 – Definição de conceito de limite	(a)	C	C
	(b)	C	C
	(c)	C	C
	(d)	C	C
2 – Verdadeiro ou falso	(a)	E	E
	(b)	E	E
	(c)	E	E
3 – Exemplos	(a)	C	C
	(b)	C	C
	(c)	B	C
	(d)	C	C
4 – Definição de conceito de assíntotas	(a)	C	C
	(b)	C	C
	(c)	CI	C
5 – Critérios para encontrar assíntotas	(a)	C	C
	(b)	CI	C
	(c)	B	C
6 – Esboço de gráficos	(a)	C	C
	(b)	C	C
	(c)	C	C

C – Correto

CI – Correto, mas incompleto

CE – Correto por razões erradas

E – Errado

D – Escreve afirmações corretas, mas desvia do que foi perguntado

B – Em branco

Tabela 4: Tabela dos resultados dos testes das sessões pré e pós atividades de João.

durante as sessões. Neste caso, podemos observar que o problema não está no conceito de assíntota, mas sim no conceito de continuidade, ainda muito recente e superficial para João. Provavelmente ele tem a idéia de que uma função é contínua quando, ao desenharmos seu gráfico, não pudermos retirar o lápis do papel. Esta idéia é muita usada em abordagens iniciais por ser intuitivamente simples, mas não corresponde sempre à verdade. De qualquer forma, este aspecto não constitui o foco de nossa pesquisa, nem de nossa proposta e deixaremos esta discussão para um outro momento.

Por outro lado, há diversos pontos positivos. Após as sessões, João continua dando definições corretas de limites e assíntotas, só que ainda mais ricas, pois elas têm um caráter mais geral e uma interpretação mais geométrica. Um ponto surpreendente é quando João consegue um critério algébrico e mais geral de existência de assíntotas por sua própria iniciativa, antes disto ser sugerido.

Os tipos de exemplos dados por ele são mais diversos, principalmente com relação às assíntotas inclinadas. Além disso, João não perde as suas idéias corretas já descritas e compreende bem a noção de unicidade de assíntotas. Sua analogia do conceito de assíntotas com o conceito de funções limitantes se mostra bem natural. De fato, ele entende uma noção como a generalização da outra. Particularmente, sua habilidade para fazer conexões entre os aspectos algébricos e gráficos continua forte.

E finalmente, há muitos aspectos emocionais positivos. Ele mostra iniciativa ao procurar janelas gráficas mais adequadas para a visualização antes disto ser pedido pelo tutor. Ele se mostra muito curioso em diversos momentos e, assim, se questiona ao analisar os exemplos. Ele fica surpreso várias vezes durante as tarefas e diz gostar muito das atividades por elas permitirem a exploração das idéias e, assim, abrirem sua mente. E, sobretudo, ele se sente bastante motivado para estudar muitos outros tópicos mais adiante. Portanto, mais do que os ganhos observados durante as atividades, é importante ressaltar também, e talvez aqui esteja a importância maior da proposta, que esta motivação causada em João lhe permitirá ir em frente em seus estudos com autonomia.

4.5 Análise Geral

Após observarmos com cuidado as reações de cada participante diante das atividades, podemos compará-las e destacar alguns pontos comuns negativos e positivos.

O ponto que mais nos chama a atenção é a pouca experiência dos participantes com definições formais ou não formais. Vemos que, no estágio em que se encontram, *definir* é algo complicado e muitas vezes é confundido com *como encontrar*. Aliás, a dificuldade não está somente na ação de definir, mas também em entender o seu significado. Com exceção de João, neste aspecto todos mostraram grandes dificuldades e a abordagem não mostrou muitos ganhos. Para deixarmos claro que não foi um problema de formulação do teste, vale a pena citarmos novamente o episódio em que Alexandre, tendo apenas escrito por extenso o significado do símbolo de limite, mantém sua resposta mesmo após a orientação do tutor sobre o que realmente havia sido pedido no exercício. Até mesmo João tem dificuldades em entender quantificadores como *existe*, o que compromete sem dúvida o entendimento de definições formais. Este fato é previsto por Cornu (1991), conforme discutido na seção 1.3.

De qualquer forma, observamos alguma melhora na capacidade de definir dos participantes, nem tanto no teste escrito, porém mais presente em algumas atividades de laboratório. Apesar da dificuldade, alguns estudantes se arriscaram a dar algumas definições de assíntotas com suas próprias palavras, algumas mais completas, outras menos.

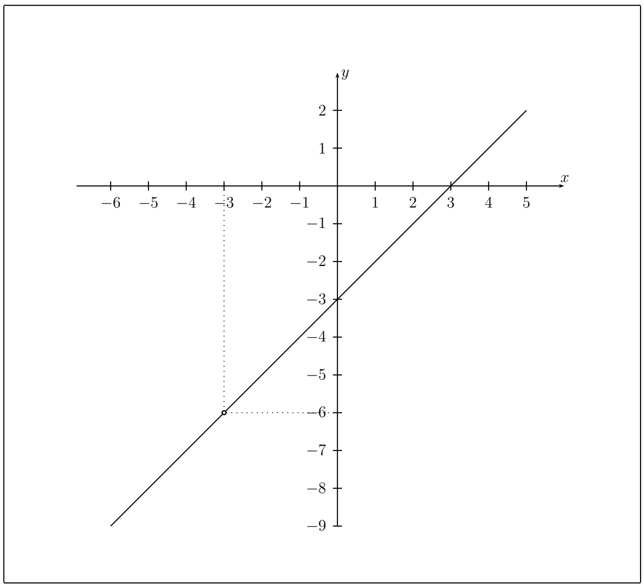


Figura 41: $\lim_{x \to -3} f(x) = -6$, mas a imagem $f(-3)$ não está definida.

Outra característica inalterada da imagem de conceito dos estudantes é o fato de eles não considerarem a possibilidade da indeterminação $\dfrac{0}{0}$ não gerar uma assíntota vertical (mas sim, uma função cujo limite no ponto existe). A figura 41 ilustra a situação que desejamos descrever: o gráfico da função $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x^2 - 9)/(x+3)$ próximo ao ponto $x = -3$. Para três dos participantes bastaria o denominador tender a zero para existir uma assíntota vertical e esta idéia equivocada não é modificada pela proposta. Apesar de terem sido abordados exemplos em que tal situação ocorre, talvez pelo *software* não evidenciar tal detalhe, os estudantes não questionaram o que observaram na tela, isto é, não perceberam o conflito entre o gráfico construído pelo computador e os aspectos algébricos observados. João, apesar de responder a esta questão de forma semelhante aos colegas é o único que, ao se deparar com um exemplo onde ocorre a indeterminação $\frac{0}{0}$ no teste escrito, analisa e constrói corretamente o gráfico, mostrando que na verdade não havia problemas com sua imagem de conceito. Mas apenas João não havia pensado na possibilidade da indeterminação no contexto mais abstrato de uma questão de verdadeiro ou falso. Aliás, isto só evidencia ainda mais a dificuldade de compreensão em contextos mais formais neste estágio de desenvolvimento do aluno. Além disso, é preciso frisar que esta característica da imagem de conceito de João não foi provocada pela proposta, pois ele já havia reagido da mesma maneira na primeira avaliação.

Uma limitação (aparente) de nossa proposta foi não ter explorado nenhum exemplo de função cujo gráfico corta a sua assíntota. Apesar disto, três dos alunos acreditam ser possível que isto ocorra, sendo que um deles não dá nenhuma justificativa. Outra estudante, Ana, tenta descrever uma possibilidade sem dar um exemplo e, Alexandre, antes das atividades já achava que é possível a existência de uma função com a propriedade de cortar sua assíntota, mas após as atividades dá o exemplo da função definida por $f(x) = (2 + x - x^2)/(x - 1)^2$ que, de fato, corta sua assíntota horizontal $y = -1$ conforme mostra a figura 42. Acreditamos que as atividades computacionais o estimularam a buscar a resposta à questão proposta (já no primeiro teste) fora do horário das sessões, pois, segundo comunicação pessoal, ele começou a usar o *software Graphmatica* em casa para estudar cálculo.

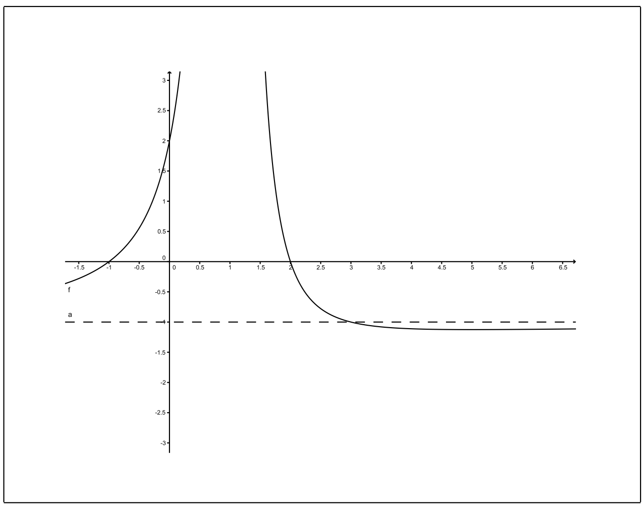


Figura 42: Um exemplo dado por Alexandre – uma função cujo gráfico corta sua assíntota.

Uma limitação importante da proposta é causada pela escolha de explorarmos apenas funções racionais. Funções deste tipo têm sempre no máximo uma assíntota horizontal, o que reforçou a idéia de que quando os limites de uma função com $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ existem, então eles devam ser necessariamente iguais. Esta idéia foi compartilhada por Ana e Alexandre. Para trabalhos futuros poderemos incluir outros tipos de funções que não tenham esta propriedade para eliminarmos esta limitação.

Antes e depois das sessões, Alexandre e Lucas permanecem achando que toda função racional possui pelo menos uma assíntota, mesmo tendo visto exemplos de funções racionais que não possuem esta propriedade durante as sessões. Isto pode ter ocorrido simplesmente por terem incluído, por exemplo, parábolas na categoria de assíntotas. Na verdade, existem autores que não fazem esta distinção.

Alguns conflitos teórico-computacionais observados durante as atividades ajudaram a detectar problemas na imagem de conceito de Lucas. Podemos citar o caso de algumas janelas gráficas do tipo B, nas quais o computador ligava pontos formando uma espécie de pico e resultando na visualização de gráficos desconexos como conexos. A partir do conflito, observamos que Lucas compreendia assíntota como um objeto pertencente ao gráfico. Acreditamos que o confrontamento das diferentes descrições ajudou Lucas a transformar o conflito potencial existente em sua imagem de conceito em um conflito cognitivo, que, por sua vez, foi também transformado em uma unidade cognitiva coerente com a teoria matemática: Lucas passou a compreender que assíntotas de funções são objetos externos ao gráfico destas. Efeitos positivos de conflitos são previstos por Giraldo (2004). Além disso, antes das atividades pudemos verificar a imagem de conceito pobre sobre assíntotas de Lucas, único aluno a ter estudado cálculo anteriormente.

Um outro efeito interessante observado em nosso estudo empírico foi a tentativa equivocada de dois dos participantes, Ana e Alexandre, em buscar conexão entre a observação do que parecia uma parábola (na verdade se tratava de uma hipérbole) e algo na fórmula da função que lembrasse um polinômio de 2º grau. Este fato é muito semelhante aos descritos por Abrahão (1998) (citado na seção 1.6) em sua pesquisa sobre o comportamento de professores de ensino médio frente à questão da escala em gráficos (não usuais) de funções reais construídos com auxílio tecnológico, na qual a autora relata a tentativa de um professor em aplicar propriedades algébricas de uma função quadrática após visualizar um gráfico que ele acreditava ser uma parábola.

Outra observação nossa semelhante às descritas por Abrahão é, por exemplo, o fato de Alexandre visualizar um tipo de janela que mostra um gráfico totalmente abaixo do eixo x e não ser capaz de deduzir a existência de uma outra parte desconexa à primeira situada acima do eixo. Este tipo de característica só poderia ser deduzida por alguém capaz de relacionar aspectos gráficos com algébricos da função. Conforme nosso referencial, Williams (1993) sugere que tal habilidade é difícil para estudantes e, segundo Abrahão, também para professores de ensino médio. Nosso estudo indica que a exploração das diferentes descrições feita pelos estudantes ajudou-os a relacionar melhor as análises algébrica e gráfica de funções.

O fato do computador evidenciar certas "armadilhas" apontadas por Lucas pode parecer, em um primeiro momento, um problema a ser evitado, mas na verdade elas reforçam a necessidade do estudante em confrontá-las com outros tipos de representações como, talvez, a própria definição matemática. Isto é favorável em contextos formais e desejado no ensino de um conceito, conforme também apontado em nosso referencial teórico.

Não podemos esquecer a grande dificuldade apontada por Alexandre em entender gráficos durante as atividades, contudo, como podemos verificar na tabela 2 da página 147, pudemos observar a sua significativa melhora na construção de esboços de gráficos ao final das sessões.

Com exceção apenas de Alexandre, todos conseguem fazer analogia entre as representações observadas na tela e o conceito de assíntota e também entre este e o conceito de função limitante, o que se mostrou bem natural. Além disso, mesmo não tendo eles estudado assíntotas inclinadas antes, todos reagiram de forma positiva à introdução deste tema. Talvez isto seja um indício de que a noção de polinomorfização global seja uma raiz cognitiva para o ensino de assíntotas, já que se mostrou familiar aos estudantes e sugere servir de base para o estudo do tópico em questão. Pelo menos, podemos citar a reação de João quando diz ter certeza que existe muito mais para ser estudado a partir da exploração proposta durante as atividades. Contudo, não é nosso objetivo demonstrar que esta noção seja uma raiz cognitiva por razões já apresentadas em nosso referencial.

Em todos os casos, houve significativa melhora na capacidade dos estudantes de dar exemplos de funções que possuem assíntotas como podemos observar nas tabelas 1, 2, 3 e 4. É preciso frisar que na maioria dos casos os exemplos apresentados foram diferentes dos observados durante as sessões. Acreditamos que isto sugira sobretudo uma habilidade deles de aplicar os critérios de existência de assíntotas.

Na verdade, outro ponto positivo da proposta foi o fato de ter possibilitado a João estabelecer um critério de existência de assíntotas inclinadas, mais geral do que aquele conhecido por ele. João chega ao critério antes deste ser sugerido. Ana também revela uma boa conexão entre aspectos gráficos e algébricos quando explica corretamente a semelhança do gráfico de uma função com uma parábola após o processo de redução global.

Acreditamos que a máquina e o caráter de aproximação das descrições numérica e algébrica ajudaram os participantes na familiarização da idéia de limite, sobretudo aqueles que não mostravam segurança nem com o fato de um limite do tipo $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x}$ ser zero.

Temos certeza que o caráter surpresa – proporcionado pela visualização dos gráficos das funções racionais em janelas após o processo de redução global – ajudou a estimular a exploração do conceito, que se tornou intrigante para o aluno. Isto é, nenhum dos participantes esperava ver os gráficos das funções se transformando em suas assíntotas ou muito menos em parábolas após a redução global. Acreditamos que este fato tenha estimulado a curiosidade deles para prosseguir no estudo.

E por fim, todos se sentiram agentes efetivos durante a interação com a abordagem e estimulados a explorar exemplos com rapidez, ao contrário do que acontece na abordagem tradicional, em que eles se sentem muito passivos e presos aos gráficos estáticos do professor feitos no quadro-negro, o que, segundo eles, dificulta a compreensão de gráficos e, sobretudo, a noção de limite e de infinito.

Considerações finais

Nossa escolha em lidar com imagens de conceito iniciais de limite nos levou à restrição de explorarmos somente funções racionais. O fato de quaisquer funções deste tipo poderem ser aproximadas no infinito por um polinômio acabou por resultar em uma limitação importante para a abordagem proposta: eliminou a possibilidade de manipulação de não-exemplos durante as atividades. Isto é, não houve a chance de propormos visualizações de funções que não se comportassem como polinômios em gráficos reduzidos globalmente. Com isso, a noção de organizador genérico não pôde ser plenamente experimentada conforme prevê sua definição. Contudo, temos o intuito de ampliar futuramente o estudo empírico para outros tipos de funções e observar o efeito das descrições propostas aqui e suas limitações associadas em contextos mais gerais.

Uma limitação de caráter metodológico foi o lapso de omitirmos funções cujos gráficos cortam suas assíntotas. Este problema não parece grave, já que, além de ser resolvido acrescentando-as na proposta, dois dos estudantes não se deixaram influenciar pelo repertório de exemplos sugerido e acabaram por conjecturar a possibilidade da interseção da curva com sua assíntota, sendo que um deles chegou a encontrar um caso deste tipo.

Em trabalhos posteriores também não precisaremos ficar restritos à aproximação do comportamento das funções por retas e parábolas. Poderemos introduzir também os casos de aproximação por polinômios de graus maiores do que dois.

Uma questão interessante é como uma estrutura finita, na qual são baseados os computadores, pode auxiliar na compreensão do conceito de infinito. A resposta talvez esteja na complexidade da mente humana, diferente da estrutura matemática. Esta é coerente, lógica e organizada, ao passo que a outra é mutável, temperamental e muitas vezes confusa. A Matemática ensina que, se uma propriedade é satisfeita cem vezes, não necessariamente funcionará na centésima primeira vez. Nossa mente, ao contrário, pode compreender quantidades muito grandes como muito próximas do infinito. No entanto, tal compreensão pode criar armadilhas.

Qualquer modelo que criarmos para a compreensão do infinito (ou para qualquer outro assunto) sempre terá limitações. Daí a necessidade da fundamentação teórica. Ela pode nos guiar onde nossos olhos não vêem. Esperamos que toda abordagem de qualquer tópico da Matemática possa estimular o estudante a entender isto e também seja concebida como um meio de aproximá-lo do conceito, deixando explícito que ela não encerra em si tudo sobre este. Uma abordagem que reúna múltiplas representações (de um mesmo conceito) é uma tentativa de, ao mesmo tempo, *suavizar* e *endurecer*. Ela suaviza porque dá oportunidade ao estudante de entrar em contato com o assunto de forma gradual e ela endurece porque tenta não omitir nenhum aspecto do conceito, mesmo que isto crie dificuldades.

O computador nos permite experimentar noções como a retidão local e a polinomorfização global que se harmonizam com a teoria matemática, mas que ainda são pequenas janelas para a compreensão dos conceitos. Felizmente elas existem. A máquina nos permite não só fazer cálculos complicados ou construir gráficos rapidamente, como também, e principalmente, explorar ambientes para a criação de conjecturas de idéias matemáticas.

A partir da nossa proposta, a discussão sobre *para onde* a função tende no infinito (da abordagem tradicional) pode ser generalizada para a discussão sobre *como* a função tende no infinito. Isto significa um enriquecimento do estudo qualitativo de funções. Consideramos que esta possibilidade vai além do simples *estudar Matemática* e caminha ao encontro do *fazer Matemática*.

Referências

ABRAHÃO, A. *O Comportamento de Professores frente a Alguns Gráficos de Funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Obtidos com Novas Tecnologias*. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Março 1998.

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D.; HANESIAN, H. *Educational Psychology: A Cognitive View*. London: Holt, Rinehart & Winston, 1968.

BARNARD, A. D.; TALL, D. O. Cognitive units, connections, and mathematical proof. In: ANNUAL CONFERENCE FOR THE PSICHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21., 1997, Lahti. *Proceedings...* Lahti: E. Pehkonen, 1997. P. 41–48.

BARNARD, T. Compressed units of mathematical thought. *Journal of Mathematical Behavior*, v. 17, n. 4, p. 401–404, 1999.

CHAR, B. W. et al. Computer algebra in the mathematics classroom. In: ACM SYMPOSIUM ON SYMBOLIC AND ALGEBRAIC COMPUTATION, 5., 1986, Waterloo. *Proceedings...* New York: ACM, 1986. P. 135–140.

CHAVES, M. *O Comportamento no Infinito de Funções Racionais com uma Abordagem Computacional*. Monografia (Final de Licenciatura em Matemática) — Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2001.

CHAVES, M. Uma abordagem computacional para o conceito de assíntotas. In: COLÓQUIO DE HISTÓRIA E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA, 2., 2004, Rio de Janeiro. *Anais...* Rio de Janeiro: IME-UERJ, 2004. P. 211–220.

CORNU, B. *Apprentissage de la notion de limite: Conceptions et obstacles*. Tese (Doctorat de troisième cycle) — L'Université Scientifique et Medicale de Grenoble, Grenoble, 1983.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 153–166.

DEMANA, F.; WAITS, B. K. The role of technology in teaching mathematics. *The Mathematics Teacher*, v. 83, n. 1, p. 27–31, Janeiro 1990.

DUBINSKY, E.; TALL, D. O. Advanced mathematical thinking and the computer. In: TALL, D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 231–248.

DUGDALE, S. et al. Technology and algebra curriculum reform: Current issues, potential directions, and research questions. *Journal of Computers Mathematics and Science Teaching*, n. 14, p. 325–357, 1995.

DUVAL, R. Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE PME-NA, 21., 1999, Cuernavaca. *Proceedings...* Cuernavaca, 1999.

GAFNI, R. *Using Multiple Representations of Function to Improve Semantics Understanding of Algebraic Expressions and Equations.* Tese (Doctoral) — School of Education, Haifa University, Haifa, 1996.

GIRALDO, V. A. *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada.* Tese (Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação) — COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Maio 2004.

GIRALDO, V. A.; CARVALHO, L. M. Local straightness and theoretical-computational conflicts: computational tools on the development of the concept image of derivative and limit. In: CONFERENCE OF THE EUROPEAN SOCIETY FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION, 3., 2003, Bellaria. *Proceedings...* Bellaria, 2003.

GIRALDO, V. A.; CARVALHO, L. M. The role of computacional descriptions and conflicts in the teaching and learning of the concept of the derivative. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF MATHEMATICS EDUCATION, 10., 2004, Copenhagen. *Proceedings...* Copenhagen, 2004.

GOLDENBERG, P. Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs. In: ANNUAL CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 11., 1987, Montreal. *Proceedings...* Montreal, 1987.

GOLDIN, G. A. A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. In: KELLY, A. E.; LESH, R. A. (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* Mahwah, New Jersey, London: Lawrence Erlbaum Associates, 2000. p. 517–545.

HILLEL, J. Computer algebra systems as learning tools. *ZDM*, v. 91, n. 5, p. 184–191, 1995.

HODGSON, B. R. Symbolic and numerical computation: The computer as a tool in mathematics. In: JOHNSON, D. C.; LOVIS, F. (Eds.). *Informatics and the Teaching of Mathematics.* Amsterdan: [s.n.], 1987. p. 55–60.

HUNTER, M.; MONAGHAN, J.; ROPER, T. The effect of computer algebra use on students' algebraic thinking. In: SUTHERLAND, R. (Ed.). *Working Papers for ESCR Algebra Seminar.* London: Institute of Education, London University, 1993.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica.* 2. ed. São Paulo: Harbra, 1986. P. 50–90.

MALIK, M. Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematics Education in Sciences and Technology*, v. 11, n. 4, p. 489–492, 1980.

MINTON, R. Caricature graphs and other lies. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN COLLEGIATE MATHEMATICS, 6., 1995. *Proceedings...* [S.l.], 1995. P. 635–639.

POINCARÉ, H. *Science et Méthode*. Reedição de 1999. Paris: Kimé, 1908.

ROBERT, A. L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 3, n. 3, p. 307–341, 1982.

SHENK, A. *Cálculo e Geometria Analítica*. Rio de Janeiro: Campus, 1991. P. 72–91.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: DUBINSKY, E.; HAREL, G. (Eds.). *The Concept of Function: Elements of Pedagogy and Epistemology*. New York: Concordia University, 1992, (Notes and Reports Series of the Mathematical Association of American). p. 25–58.

SIERPINSKA, A.; LERMAN, S. Epistemologies of mathematics and mathematics education. In: BISHOP, A. et al. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 827–876.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. P. 51–105.

TALL, D. O. The blancmange function, continuous everywhere but differentiable nowhere. *Mathematical Gazette*, v. 66, p. 11–22, 1982.

TALL, D. O. *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Tese (PhD) — University of Warwick, Warwick, 1986.

TALL, D. O. Concept images, generic organizers, computers & curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, v. 9, n. 3, p. 37–42, 1989.

TALL, D. O. The transition to advanced mathematical thinking. In: GROUWS, D. A. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, 1992. p. 495–511.

TALL, D. O. Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: YANG, W.; CHU, S.; CHUAN, J. (Eds.). *Proceedings...* Blackwood: ATCM Inc., 2000.

TALL, D. O.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Education Studies in Mathematics*, n. 12, p. 151–169, 1981.

VINNER, S. Concept definition, concept image and notion of function. *The International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, n. 14, p. 293–305, 1983.

VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: TALL, D. O. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 65–81.

WILLIAMS, C. G. Looking over their shoulders: Some difficulties students have with graphing calculator. *Mathematics and Computer Education*, v. 27, n. 3, p. 198–202, 1993.

YERUSHALMY, M. Reaching the unreachable: Technology and semantics of asymptotes. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, n. 2, p. 1–25, 1997.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Formulário de Dados Pessoais

Dados Pessoais

Atenção! Seus nomes permanecerão em segredo quando eu divulgar o meu trabalho.

1.**Nome:**____ **Idade:**________

2.Em qual escola você cursou o Ensino Médio? Em que ano concluiu?

____

3.Viu Cálculo no Ensino Médio?________

4.Você está cursando a disciplina Cálculo pela primeira vez?

____

5.Quais são as suas primeiras impressões sobre Cálculo? Você gosta? Acha difícil?

____

____

____

____

____

6.Descreva a sua experiência com computadores. Você tem computador em casa? Usa-o com freqüência?

____

____

____

____

Obs.: Se precisarem de mais espaço para responder as perguntas, usem o verso desta folha.

7.Você já usou computador para estudar matemática? Quando e com que conteúdos?

8.Você acha que o computador pode ajudar no ensino de Matemática? Por quê?

APÊNDICE B – Teste escrito das Pré e pós atividades

Teste - 1^a parte

Nome:____

1.Explique, com as suas palavras, o significado de $\lim_{x \to a} f(x) = b$ nos seguintes casos:

(a)$a, b \in \mathbb{R}$

(b)$a \in \mathbb{R}$ e $b = \infty$

(c)$a = \infty$ e $b \in \mathbb{R}$

(d)$a = \infty$ e $b = \infty$

2.Diga se as afirmações abaixo são verdadeiras ou falsas. Dê uma breve justificativa:

(a)Sejam $p(x)$ e $q(x)$ polinômios e f a função real definida por $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$. Se existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q(x_0) = 0$, então podemos dizer que o gráfico de f possui uma assíntota vertical.

(b)Se uma função g possui uma assíntota horizontal, então o gráfico de g não corta sua assíntota em nenhum ponto.

(c)Toda função racional (função como a f do item (a)) possui pelo menos uma assíntota.

3.Dê exemplos de:

(a)Uma função que possua uma assíntota horizontal.

(b)Uma função que possua uma assíntota vertical.

(c)Uma função que possua uma assíntota inclinada.

(d)Uma função que possua pelo menos dois destes três tipos de assíntotas.

2^a parte

4.Explique o que você entende por:

(a)Assíntota horizontal

(b)Assíntota vertical

(c)Assíntota inclinada

5.Diga qual o critério você usa para saber se uma função possui:

(a)Uma assíntota horizontal

(b)Uma assíntota vertical

(c)Uma assíntota inclinada

6.Faça um esboço dos gráficos das seguintes funções reais. Desenhe e indique as assíntotas quando existirem:

(a)$f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

(b)$g(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

(c)$h(x) = \dfrac{x^2-9}{x+3}$

APÊNDICE C – Roteiro das Atividades

Atividade I

Objetivo: Estudar o comportamento no infinito de funções racionais (dizer o que é função racional). Para isto, vamos utilizar o computador para simular este comportamento. Nesta fase inicial, iremos nos concentrar na visualização gráfica das funções, buscando janelas e escalas mais adequadas para esta observação.

1.Construa o gráfico da função $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no computador.

a)Mude a cor e a espessura da linha para melhor visualização.

b)Faça um afastamento da janela.

c)O que ocorreu?

2.Construa agora o gráfico da função $g : \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$.

a)Afaste a janela.

b)Quando afastá-la bastante, mexa apenas no intervalo de x e mantenha $-5 \leq y \leq 5$ (ver: Mudar os intervalos de x e y).

c)O que ocorreu?

3.Agora, encontre você mesmo as janelas adequadas para simular o comportamento das funções no infinito:

a)$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$.

b)$i : \mathbb{R} - \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $i(x) = \dfrac{5x^2+1}{x-2}$.

c)$j : \mathbb{R}^* - \{-\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2+x}$.

d)$k : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $k(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$.

e)$l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $l(x) = \dfrac{x^4 - 10}{x^2 + 1}$

4.O que você vê? Estes gráficos se parecem com gráficos de outras funções? Quais?

5.Por que você acha que isto acontece?

Atividade II

Objetivo: Encontrar os coeficientes dos polinômios, cujos gráficos no infinito se assemelham aos gráficos das funções estudadas na atividade anterior utilizando artifícios numéricos.

Vamos retomar as cinco primeiras funções da atividade anterior. Suas leis de formação são:

(I)$f(x) = \dfrac{1}{x}$

(II)$g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

(III)$h(x) = \dfrac{-2x^2}{x^2 + 1}$

(IV)$i(x) = \dfrac{5x^2 + 1}{x - 2}$

(V)$j(x) = \dfrac{-4x^3}{2x^2 + x}$

Vamos começar com a função do item (I). Construa seu gráfico e faça o afastamento da janela como foi feito na atividade passada. O gráfico fica parecido com o gráfico de outra função. Vamos calcular agora aproximadamente a fórmula desta outra função.

1.Como podemos encontrar a fórmula desta função usando o computador?

2.Quantos pontos definem este gráfico?

3.Faça uma tabela de pontos da função original para valores grandes de x à sua escolha.

4.Trace o gráfico desta função de aproximação na mesma janela gráfica da primeira função, passando pelos pontos que você achou.

5.Veja os coeficientes deste polinômio. Anote-os e compare-os com os encontrados por seus colegas.

6.O que você observou? (o aluno deverá dizer que os coeficientes encontrados estão se aproximando de certos valores)

7.O que você acha que vai acontecer se aumentarmos cada vez mais os valores de x para o cálculo da equação da reta? O que vai acontecer com a equação da reta? Podemos encontrar estes valores exatos?

Atividade III

Objetivo: Encontrar os coeficientes dos polinômios, cujos gráficos no infinito se assemelham aos gráficos das funções estudadas na atividade anterior utilizando artifícios algébricos. Depois construir o gráfico da função encontrada em uma janela gráfica para valores de x pequenos e discriminar o objeto matemático estudado. Ao final refletir sobre a unicidade das assíntotas.

Vamos retomar as cinco primeiras funções da atividade anterior. Suas leis de formação são:

$$(\mathrm{I})f(x) = \frac{1}{x}$$

$$(\mathrm{II})g(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$(\mathrm{III})h(x) = \frac{-2x^2}{x^2+1}$$

$$(\mathrm{IV})i(x) = \frac{5x^2+1}{x-2}$$

$$(\mathrm{V})j(x) = \frac{-4x^3}{2x^2+x}$$

1.Use o algoritmo da divisão

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x)$$

para calcular o limite de $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ quando $x \to \infty$.

2.O que você encontrou?

3.Compare o resultado encontrado agora com os resultados encontrados no item 5.

4.Trace o gráfico desta última função encontrada na mesma janela gráfica.

5.Dê *zoom-in* e observe o que ocorreu.

6.Que objeto matemático relacionado com a função original você encontrou?

7.Repita todos passos com todas as outras funções de (II) a (V).

8.Você observou que as retas encontradas tanto na etapa numérica, quanto na etapa algébrica se confundem com o gráfico da função racional. Será que podemos dizer que todas as retas encontradas se aproximam do gráfico da função racional no infinito? Qual é a melhor reta?

Atividade IV

Objetivo: Continuar o estudo das funções da atividade anterior, agora pensando em determinar qual é a melhor reta que se aproxima do gráfico da função no infinito. E também repetir o procedimento das atividades II e III, agora com outras funções racionais.

Vamos identificar qual é a melhor reta que se aproxima do gráfico da função racional no infinito. Consideremos a função f do item (I). Vamos chamar de n uma das funções encontradas na etapa numérica e de a a função encontrada na etapa algébrica.

1.Trace os gráficos das seguintes funções:

(a)$[f(x) - \bar{f}(x)]x$

(b)$[f(x) - \hat{f}(x)]x$

2.Reduza a janela gráfica. Procure uma boa escala para a visualização.

3.O que você observou? Por que isto ocorreu? Qual é a melhor reta?

4.Repita os itens anteriores para as outras funções estudadas na atividade II.

5.Considere as seguintes funções reais:

(VI)$k(x) = \dfrac{x^3+1}{x}$

(VII)$l(x) = \dfrac{x^4-10}{x^2+1}$

(VIII) $m(x) = \dfrac{5 - 2x^4}{x^2 + 5}$

Vamos começar com a função do item (VI).

6. Construa seu gráfico e faça o afastamento da janela como foi feito nas atividades passadas.

7. Veja se o gráfico ficou parecido com o gráfico de outra função. Se isto não ocorreu, tente intervalos diferentes para x e y. Busque uma janela adequada para a visualização.

8. Repita todos passos das atividades II e III com a função do item (VI).

9. Repita os itens 1, 2 e 3 ainda com a primeira função do item 5.

10. O que você observou?

11. Que conclusões você tira destas observações?

12. Agora, repita todos os passos das atividades II e III, mais os itens 1, 2 e 3 desta aula com as funções l e m do item 5.