Universidade Federal do Rio de Janeiro

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DE INTEGRAL

Allan de Castro Escarlate

Rio de Janeiro

2008

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DE INTEGRAL

Allan de Castro Escarlate

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Rio de Janeiro

Dezembro de 2008

Escarlate, Allan

Uma investigação sobre a aprendizagem de integral/ Allan Escarlate. – Rio de Janeiro: UFRJ/IM, 2008.

x, 159f.:il.;34 cm.

Orientador: Victor Augusto Giraldo

Dissertação (Mestrado) – UFRJ/ IM/ Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2008.

Referências Bibliográficas: f. 144-147.

1. Integral Definida. 2. Imagem de Conceito 3. Raiz Cognitiva

I. Giraldo, Victor. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. III. Título

Agradecimentos

Ao Professor Victor Giraldo, pela orientação atenciosa e por se dedicar a me ajudar, mas sem restringir minha criatividade.

Aos alunos que gentilmente cederam parte de seu tempo para participar da pesquisa que fundamenta este trabalho.

Aos professores Maria Darci, Márcia Pinto, Carlos Eduardo Mathias e Ângela Rocha pelo cuidado ao lerem o trabalho e pelas valiosas sugestões.

Aos professores Marco Aurélio Cabral e Mariano Carvalho pelas sugestões no Exame de Qualificação.

Aos queridíssimos colegas da turma de 2006 do mestrado pelo convívio sem igual e por todas as muitas coisas que aprendi com eles.

Aos professores das disciplinas que cursei por sempre tentarem, cada um da sua maneira, que eu aprendesse tudo da melhor forma possível.

Ao pessoal da Secretaria de Pós-Graduação por serem sempre solícitos.

Aos meus familiares, principalmente meu pai Carlos Roberto, minha mãe Maria Emilia e meu irmão Renan pelo apoio constante.

À Darlene, minha esposa, companheira e amiga pelo apoio incondicional, por sempre acreditar em mim e me incentivar, principalmente nos momentos de fraqueza. Sem ela, com certeza, este trabalho não teria sido feito.

Ao Pedro, que apesar de ainda não estar conosco, possui uma força sobre o pai dele que ele sequer imagina.

E à Deus, pois sem Ele nada disso teria sido possível.

Lastimável discípulo, que não ultrapassa o mestre.

Leonardo Da Vinci

Resumo da dissertação de Mestrado entregue ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática (M.Sc.).

UMA INVESTIGAÇÃO SOBRE A APRENDIZAGEM DE INTEGRAL

Allan de Castro Escarlate

Dezembro de 2008

Orientador: Victor Augusto Giraldo
Programa: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Este trabalho está baseado em uma pesquisa sobre o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida. Considerando como referencial teórico a teoria de imagem de conceito e definição de conceito, de autoria de David Tall e Shlomo Vinner, procuramos identificar os principais conflitos surgidos na aprendizagem deste conceito por alunos de graduação em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ). Além disso, questionamos se a noção de área pode ser considerada uma raiz cognitiva adequada para o conceito de integral definida. A pesquisa feita possui caráter qualitativo e foi feita por meio de questionários e entrevistas clínicas com alunos.

Abstract of dissertation presented to Institute of Mathmatics of the Rio de janeiro Federal University (IM-UFRJ) as parts of the necessary requeriments for getting the Master`s degree in Teaching of Mathematics (M.Sc.).

AN INVESTIGATION ABOUT THE LEARNING OF INTEGRAL

Allan de Castro Escarlate

2008, December

Advisor: Victor Augusto Giraldo
Departament: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

This work is based on a teaching and learning research of defined integral concept. Considering as theorist referential, the theory of concept image and concept definition, by David Tall and Shlomo Vinner, we target to identify the main conflicts generated by the learning of such concept by mathematics graduation students from Rio de Janeiro Federal University. Besides that, we also question if the idea of area could be considered a cognitive root suitable to the defined integral concept. The mentioned research has a qualitative character and was achieved thru series of questions and clinic interviews with students.

Sumário

Introdução

Nos últimos anos, muitas pesquisas têm sido realizadas sobre ensino e aprendizagem de cálculo elementar, a maioria destas tratando de limites e derivadas e de conceitos diretamente ligados (e.g. VINNER, 1983; TALL, 1989; WINIKI-LANDMAN & LEIKIN, 2000; GIRALDO, 2004; BIZA et al, 2006). No entanto, encontra-se na literatura de educação matemática um número relativamente pequeno de trabalhos enfocando a aprendizagem de integrais. O presente trabalho tem por objetivo geral investigar as concepções de alunos em fase inicial de aprendizagem de cálculo sobre o conceito de integral definida e suas interpretações geométricas.

Utilizando como referencial teórico as noções de imagem de conceito, definição de conceito (TALL & VINNER, 1981) e raiz cognitiva (TALL, 1989), procuramos mostrar que grande parte dos alunos adquire uma idéia imprecisa da definição de integral definida, e que essa concepção provoca erros até mesmo em situações consideravelmente simples. Isso aliado à falta de contato com uma variedade ampla o suficiente de exemplos e situações provoca um empobrecimento das imagens de conceito formadas. Nossas conclusões estão baseadas em um estudo empírico realizado com alunos de graduação em Matemática da UFRJ. Estes resultados coincidem em grande parte com os de pesquisas semelhantes realizadas em outros países (ORTON, 1983; RASSLAN & TALL, 2002; GONZÁLEZ-MARTÍN & CAMACHO, 2004), o que reforça as conclusões.

No capítulo 1, expomos o referencial teórico mencionado acima. Algumas discussões sobre a teoria de área e suas dificuldades intrínsecas, além de uma pequena abordagem histórica são encontradas no capítulo 2, bem como referências a alguns trabalhos de pesquisa relacionados com o conceito de integral e as questões de pesquisa são explicitadas. A metodologia da pesquisa consta no capítulo 3 e os dados empíricos são apresentados nos capítulos 4, 5 e 6, bem como as discussões decorrentes da análise desses dados. Nossas conclusões são relatadas no capítulo 7 e algumas considerações finais são encontradas no capítulo 8.

Capítulo 1
Referencial teórico

A teoria de imagem de conceito e definição de conceito foi desenvolvida por David Tall e Shlomo Vinner, em 1981, em um artigo que se tornou bastante conhecido na comunidade de educação matemática (TALL & VINNER, 1981).

A teoria sugere que um determinado conceito matemático não deve ser introduzido ou trabalhado tendo como única referência pedagógica sua definição formal[1]. Segundo os autores, para que a definição formal seja satisfatoriamente compreendida pelo estudante, é preciso que haja uma familiarização anterior com o conceito em questão, desenvolvida com base em impressões e experiências variadas.

A introdução de um conceito matemático por meio da definição formal não é, em geral, pedagogicamente aconselhável. Isso está bem ilustrado em um exemplo dado por Vinner (VINNER, 1991). Ele toma como exemplo a noção de valor absoluto e afirma que uma boa caracterização desse conceito é "o número sem o seu sinal". Segundo o autor, seria uma idéia bastante clara para o aluno e seria o que este responderia quando perguntado sobre valor absoluto. No entanto, o que a maioria dos professores e livros textos utilizam é uma conceituação inicial que é bem menos clara para o aluno:

$$|x| = \begin{cases} x\ ; & se\ x \geq 0 \\ -x\ ; & se\ x < 0 \end{cases}$$

Apesar de defender que é possível não usar a definição formal inicialmente, o autor afirma que não se pode ignorar a necessidade de, mais adiante, o estudante conhecer a fórmula acima, justamente pela sua utilidade em resolução de equações e inequações (VINNER, 1991). Ainda segundo Vinner:

[1] Entendemos aqui por definição formal aquela largamente aceita pela comunidade acadêmica matemática em geral, em um dado contexto histórico e social.

> [...] quando vier a decidir sobre a pedagogia de ensino de matemática tem-se que levar em conta não apenas como *se espera* que os alunos vão adquirir o conceito matemático, mas também, e talvez mais significativamente, como os alunos *realmente* adquirem esses conceitos.
>
> (VINNER, 1991, p.67), tradução nossa

1.1. Imagem de conceito e definição de conceito

Segundo a teoria de Tall e Vinner, **imagem de conceito** é:

> [...] a estrutura cognitiva total que está associada ao conceito, que inclui todas as imagens mentais além de processos e propriedades associadas. É construída através de anos de experiências de todos os tipos, mudando quando o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece.
>
> (TALL & VINNER, 1981) tradução nossa

Por exemplo, a imagem de conceito de um aluno sobre polígonos pode englobar exemplos prototípicos, tais como um triângulo genérico ou um mais específico (isósceles, equilátero, retângulo), um quadrilátero genérico ou um mais específico (retângulo, trapézio, quadrado), um polígono com número de lados qualquer, teoremas, como a soma dos ângulos externos ser constante igual 360º; propriedades, como ser regular ou eqüiângulo ou algo envolvendo diagonais; a noção de área e perímetro, etc. Ou seja, imagem do conceito polígono pode ser considerada como sendo tudo que existe na mente do aluno, relacionado à idéia de polígono. Segundo a definição, essa imagem sofre modificações de acordo com as experiências vividas pelo aluno no que diz respeito ao conceito de polígono. Essas experiências ocorrem sob a forma de exercícios, problemas propostos, questões a serem respondidas, teoremas, e assim por diante.

Além disso, é necessário chamar atenção para o fato de que não só as experiências de natureza matemática exercem influência na formação da imagem de conceito. As experiências externas à matemática ou ao processo de aprendizagem do conceito, como experiências do dia-a-dia, também podem moldar a imagem de conceito (o que, segundo Tall e Vinner, pode vir a se tornar uma fonte de conflitos, como veremos mais adiante). Um exemplo disso é o conceito de limite. A palavra limite, em seu uso cotidiano, se refere a um obstáculo intransponível. Quando um aluno começa a ter os primeiros contatos com o conceito de limite, o significado da palavra no cotidiano influencia na formação da imagem do conceito. Pesquisas já feitas confirmam esse fato (eg. CORNU, 1991). Nesse caso, a influência pode não ser benéfica, pois, matematicamente, o termo limite não significa necessariamente um ponto que não se pode ultrapassar. Pode ocorrer então a formação de uma fonte de conflitos.

Desse modo, fica bastante claro que a imagem de conceito é um atributo subjetivo do indivíduo, não fazendo sentido falar em imagem de conceito intrínseca de um determinado conceito. Segundo os autores, a aprendizagem da definição formal de um conceito requer o desenvolvimento anterior de uma imagem de conceito suficientemente rica.

Portanto, a imagem de um determinado conceito inclui todas as idéias que permeiam a mente do indivíduo em relação ao dado conceito. Dentre essas idéias, pode estar um conjunto de palavras que encerra o conceito, chamada pelos autores de **definição de conceito**. Esta sentença pode tanto ser meramente decorada como aprendida de forma mais significativa pelo aluno. Pode também ser uma construção pessoal do próprio aluno, ou seja, uma forma de palavras usada por ele para explicar o conceito do seu ponto de vista, utilizando para isso sua imagem de conceito. Assim, a definição de conceito pode ou não ser consistente com a definição formal correspondente (TALL & VINNER, 1981). Segundo Tall, a definição de conceito faz parte da imagem de conceito, ou seja, dentre tudo que permeia a mente de um aluno em relação a um determinado conceito pode estar uma definição para o mesmo.

Entretanto, a definição de conceito é pessoal e pode não ser compatível com a definição formal. Para isso, basta que o indivíduo tenha uma definição de conceito calcada na sua própria imagem de conceito e que esta seja pobre. Por outro lado, uma definição de conceito decorada do livro (portanto consistente com a definição formal) pode fazer parte de uma imagem de conceito absolutamente pobre ou até inexistente.

Uma imagem de conceito rica pode ser considerada como sendo aquela que inclui, muitas propriedades, experiências e impressões sobre um determinado conceito. No entanto, ainda assim ela pode ser traiçoeira, como mostra o exemplo dado por Giraldo:

> [...] Uma definição de conceito comumente encontrada entre estudantes em cursos iniciais de geometria euclidiana é a seguinte: 'um retângulo é um quadrilátero com quatro ângulos retos, lados opostos iguais e lados consecutivos diferentes'. Podemos facilmente imaginar que um estudante

> com esta definição de conceito forme uma imagem de conceito incluindo propriedades matematicamente corretas, como: ‘todo retângulo possui lados opostos paralelos’, ou ‘a área de um retângulo á igual ao produto dos comprimentos de seus lados’, e assim por diante. Assim, tal estudante teria uma imagem de conceito rica e poderia ser confiante ao desenvolver raciocínios matemáticos a partir dela. Entretanto, sua imagem de conceito sempre poderá traí-lo, uma vez que, segundo sua definição de conceito, um quadrado não seria considerado um retângulo (diferindo, portanto da definição formal usualmente aceita). Um segundo estudante pode ser capaz de recitar a definição correta: ‘um retângulo é um quadrilátero equiângulo’, sem ter conhecimento das propriedades da figura geométrica, ou construir uma imagem de conceito com propriedades incorretas como: ‘todo retângulo possui diagonais perpendiculares entre si’.
>
> (GIRALDO, 2004)

Dessa forma, é possível que um indivíduo possua uma imagem de conceito rica, mas possua uma definição de conceito inconsistente, o que pode se constituir em uma fonte de conflitos cognitivos, como veremos em mais detalhes mais adiante. Por outro lado, um indivíduo pode possuir uma definição de conceito compatível com a definição formal, mas ter uma imagem de conceito pobre. Esse último, em muitos casos, é conseqüência de uma definição de conceito decorada, introduzida sem que o aluno tenha a oportunidade de experimentar o conceito, não permitindo a formação de uma imagem de conceito relacionada. Ainda segundo Giraldo, uma definição de conceito incompatível com a definição formal pode fazer parte de uma imagem de conceito rica. (GIRALDO, 2004).

Vinner fornece outro exemplo das possíveis relações entre imagem e definição de conceito (VINNER, 1991). Segundo o autor, um estudante poderia ter uma imagem de conceito da noção de sistema de coordenadas baseada na experiência dele com gráficos. Essa imagem conteria o fato de que os eixos do sistema de coordenadas são perpendiculares. Mais tarde, o professor definiria sistema de coordenadas como sendo quaisquer duas retas que se interceptam (podendo não formar um ângulo reto). Três casos poderiam ocorrer:

1. A imagem de conceito poderia ser alterada para conter também sistemas de coordenadas cujos eixos não formam um ângulo reto (isso seria o desejável).
2. A imagem de conceito poderia continuar como estava, com a definição do professor ficando armazenada na estrutura cognitiva do aluno por enquanto, mas logo sendo esquecida (nesse caso, a definição não foi bem assimilada).
3. Tanto a imagem de conceito quanto a definição de conceito poderiam permanecer inalteradas. Quando ao aluno fosse pedido para definir sistema de coordenadas ele repetiria qualquer uma das definições (dele mesmo ou do professor), mas estaria, realmente, pensando em sistema de coordenadas com eixos perpendiculares.

(VINNER, 1991)

Com base no que foi discutido acima, podemos afirmar que a formação da imagem de conceito e da definição de conceito são atributos independentes, e por isso, devem constituir objetivos pedagógicos diferentes.

Um modelo pedagógico bastante comum em ensino superior de matemática é aquele em que a apresentação dos conteúdos é organizada nos moldes de sua estrutura formal. Em particular, os conceitos são introduzidos a partir de sua definição formal. Segundo Vinner (VINNER, 1991), as concepções que norteiam esse modelo são as seguintes:

1. Conceitos são significativamente adquiridos através de suas definições.
2. Alunos usarão definições para resolver problemas e provar teoremas, quando necessário, de um ponto de vista matemático.
3. Definições devem ser mínimas. (Ou seja, uma definição não deve conter partes que possam ser deduzidas de outras partes da própria definição).
4. É desejável que definições sejam elegantes.
5. Definições são arbitrárias. (Definir, em matemática, é dar um nome).

(VINNER, 1991)

Essas concepções guardam uma inversão no que diz respeito à pedagogia matemática e à matemática propriamente dita. Em geral, a construção histórica dos conceitos matemáticos mais avançados não se deu de uma forma logicamente encadeada e formalmente correta como sugerem as concepções acima. No entanto, é assim que as teorias matemáticas são apresentadas. Assim, este tipo de abordagem traz o pressuposto implícito de que o que é imprescindível para que a teoria seja matematicamente consistente é também determinante da ordem pedagógica, o que sugeriria que o objetivo do ensino é simplesmente fazer com que o aluno seja capaz de imitar a teoria, e não que ele a "domine", isto é, que tenha uma compreensão suficientemente significativa do encadeamento lógico da teoria, e que seja capaz de estabelecer relações de forma autônoma com a própria teoria em questão e com outras.

Por outro lado, esse modelo encerra o pressuposto tácito de que a definição de conceito molda a imagem de conceito – enquanto a teoria proposta por Tall e Vinner sugere justamente o contrário. O comportamento esperado pelos professores é que os alunos sempre recorram à definição de conceito antes de dar a resposta, mas não é isso que se observa em geral. Essa crença, por parte dos professores, no papel central da definição na formação de um conceito é reforçada pelos livros textos em matemática avançada. Muitos, se não a maioria, são baseados nas concepções listadas acima.

A teoria de imagens de conceito indica que a compreensão adequada da definição formal demanda uma imagem de conceito bem formada. Isto é, a definição é uma maneira de identificar um objeto já familiar. Uma imagem de conceito não suficientemente desenvolvida pode levar o estudante a não compreender o papel da definição formal na estrutura teórica matemática, mesmo que a conheça e seja capaz de recitá-la com sucesso quando solicitado. Neste caso, a tendência será que, em lugar de recorrer à definição formal quando necessário, o estudante recorra, em geral de maneira confusa, a outros atributos contidos na imagem de conceito (como por exemplo, analogias inadequadas com a linguagem cotidiana, ou propriedades válidas em outros contextos matemáticos que não se aplicam ao contexto em questão). Este processo pode causar grandes obstáculos à aprendizagem, particularmente no caso de matemática avançada. Pesquisas já foram realizadas nesse sentido e comprovam esse fato (e.g. CORNU, 1991; VINNER, 1991; TALL, 1992; SIERPINSKA, 1992).

É claro que o estudante de matemática avançada deve conhecer as definições e ter consciência da sua importância. Elas desempenham um papel essencial no desenvolvimento de uma estrutura teórica, uma vez que um conceito só ganha existência matemática depois de formalmente definido. Afirmar que a definição formal não deve ser considerada um ponto de partida adequado para a introdução de um conceito matemático, como sugere a teoria discutida até aqui, de forma nenhuma deve significar que esta definição é dispensável. A definição deve ser considerada como um objeto muito importante, pois possui um papel central no ensino. No entanto, esse papel não pode ser o de ponto de partida para a introdução de um conceito matemático, como em geral, no ensino ocorre atualmente. A definição deve representar um objetivo. Mas, para que isso ocorra, é necessária uma familiarização prévia com o conceito em questão.

De fato, a definição é fundamental em contextos teóricos mais aprofundados, como identificação de exemplos ou contra-exemplos de um conceito ou em demonstrações matemáticas. Porém, para que a compreensão absoluta de um conceito aconteça e, em particular, justamente para que a definição fique significativamente compreendida, é necessário mais do que somente a definição.

1.2. Conflitos potenciais e conflitos cognitivos

Alguns autores têm demonstrado preocupação com o quanto certas percepções e idéias, algumas anteriores à introdução de um conceito, podem comprometer a aprendizagem deste por parte dos alunos. Vinner, inclusive, afirma que o objetivo da matemática deveria ser transformar os hábitos de raciocínio do cotidiano em hábitos de raciocínio necessários para contextos técnicos (VINNER, 1991). Tadavia, não são só as experiências anteriores da vida cotidiana que podem causar problemas na aprendizagem.

Em (TALL & VINNER, 1981), os autores definem **imagem de conceito evocada** como sendo uma parte da imagem de conceito que é ativada em um determinado momento a partir de estímulos externos, como fornecer um contra-exemplo, demonstrar um teorema ou resolver um problema. Também segundo Tall e Vinner, a imagem de conceito não é necessariamente sempre coerente, de maneira que porções de uma mesma imagem de conceito podem ser contraditórias em determinados momentos. Os autores chamam de **fator de conflito potencial** uma parte (ou partes) da imagem de conceito que pode (ou podem) estar em oposição com outra parte (ou outras partes) dessa imagem de conceito. Quando a imagem de conceito evocada contém um fator de conflito potencial, temos o **fator de conflito cognitivo** (TALL & VINNER, 1981). Isto é, quando a parte da imagem de conceito que é ativada em um determinado momento contém uma seção conflitante, esta seção passa a ser denominada fator de conflito cognitivo, ou seja, o conflito vem à tona.

Por exemplo, consideremos um aluno que possua na sua imagem de conceito para seqüências numéricas a concepção de que, para que uma seqüência seja convergente, ela tenha que ser monótona (crescente ou decrescente) – o que, de fato, é bastante comum. Se esse aluno fosse levado a estudar a convergência da seqüência cujo termo geral é dado por $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, que claramente não é monótona, e a simples aplicação da definição de convergência utilizando limite do termo geral mostrasse que tal seqüência converge, o conflito potencial poderia ocorrer. E isso poderia se tornar um conflito cognitivo se essas duas situações fossem evocadas ao mesmo tempo. Esse exemplo mostra bem a necessidade de o conflito ser evocado, como será discutido a seguir.

De fato, fatores de conflito potencial podem nunca ser evocados, permanecendo inativos na imagem de conceito, fazendo com que o conflito real nunca apareça. Em alguns desses casos, pode ocorrer uma inquietude em relação a um determinado conceito, como quando um aluno, em alguma tarefa, tem a impressão de que há algo errado em algum lugar, mas não é capaz de identificar o que é e nem onde está o erro.

Desta forma, Tall e Vinner afirmam que, apesar de causar problemas no decorrer da aprendizagem de um determinado conceito, fatores de conflito potencial devem ser convertidos em fatores de conflito cognitivos, de maneira a se tomar consciência deles e, então, resolvê-los. Segundo Vinner, uma forma de fazer isso é o professor propor questões e problemas que não possam ser resolvidos somente usando as impressões e experiências contidas nas imagens de conceito dos alunos, mas que sejam necessárias também definições formais (VINNER, 1991). De fato, o aluno hipotético do exemplo anterior poderia não ter problemas em responder sobre a convergência da tal seqüência se estivesse habituado a usar também definições como critério na hora de decidir sobre a resposta de uma questão.

Em (VINNER, 1991), o autor recomenda categoricamente duas atitudes em relação a conflitos cognitivos:

1. Ocultar conflitos cognitivos desnecessários aos alunos.
2. Iniciar conflitos cognitivos com alunos somente quando esses conflitos forem necessários para a ascensão a um estágio matemático superior.

O autor afirma ainda que conflitos só devem ser estimulados em alunos candidatos a uma matemática de nível mais elevado, e que, para os demais, o melhor é omiti-los. De certa forma, isto contraria o que foi defendido em (TALL & VINNER, 1981), quando o confronto com os conflitos foi sugerido sem qualquer restrição, visando à superação destes em prol de uma total compreensão do conceito em questão. E este trabalho se baseia nessa última concepção.

1.3. Unidades cognitivas

Alguns anos após o desenvolvimento da teoria de imagens de conceito, Tony Barnard e David Tall propõem em (BARNARD & TALL, 1997) o termo **unidade cognitiva** para indicar a porção da imagem de conceito que um indivíduo pode manter no foco de sua atenção em um determinado momento. Isso poderia ser um símbolo (como o sinal das operações básicas), uma propriedade (como o fato de todo número múltiplo de 4 ser par), um teorema (como a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º), uma relação, um passo em um argumento ou até mesmo um fato específico (como o resultado de uma operação). Por exemplo, ao ter que traçar o gráfico de uma função quadrática, um aluno pode ativar como unidade cognitiva em sua mente o fato de que a forma do gráfico de uma função quadrática é uma parábola. A partir desse ponto, outras informações sobre funções quadráticas podem ser "desempacotadas" e utilizadas pelo aluno na tarefa.

Segundo Giraldo, a teoria de unidades cognitivas enfoca a capacidade do ser humano de comprimir informação matemática em novas estruturas que podem ser usadas como elementos de um novo desenvolvimento teórico mais geral ou reabertas, dando acesso aos elementos primários que as compuseram originalmente (GIRALDO, 2004).

Tall e Barnard destacam ainda dois fatores que são importantes na construção de uma estrutura de pensamento poderosa:

1. A habilidade de comprimir informação em unidades cognitivas.
2. A habilidade para fazer conexões entre unidades cognitivas tal que informações relevantes possam ser colocadas ou retiradas do foco de atenção quando for conveniente.

Uma vez que faz parte da imagem de conceito, a unidade cognitiva é absolutamente pessoal. O que é unidade cognitiva para um indivíduo pode não ser para outro. Depende das informações relacionadas ao conceito que são conhecidas e de que modo elas foram comprimidas em unidades cognitivas. Portanto, se para o aluno do exemplo anterior o fato de o gráfico de uma função quadrática ser uma parábola consistia em uma unidade cognitiva, para um segundo aluno hipotético, essa mesma idéia pode não significar nada.

A função de uma unidade cognitiva é substituir por um item (um símbolo ou um fato) uma coleção de informações conectadas, com o objetivo de poupar espaço mental, de forma que deste modo seja mais fácil que a estrutura permaneça no foco de atenção. Dessa forma, uma unidade cognitiva pode ser concebida como uma compressão de elementos, porém possuindo uma conexão ativa com as informações que a compõe. Barnard afirma que:

> Pode-se dizer que o seu valor (de unidades cognitivas) em pensamento matemático reside no fato dessas se constituírem em um todo que é ao mesmo tempo menor e maior que a soma de suas partes – menor no sentido de ser capaz de caber no foco da atenção de curto período, e maior no sentido de possuir características holísticas que são capazes de orientar a sua manipulação.
>
> (BARNARD, 1999), tradução nossa

Segundo os autores, em uma estrutura de pensamento poderosa, a imagem de conceito contém várias unidades cognitivas, todas conectadas umas com as outras. Seria desejável que a porção da imagem de conceito que é ativada em algum momento específico, isto é, a imagem de conceito evocada, fosse exatamente uma unidade cognitiva. Dessa forma, tudo que seria necessário vir à tona na mente do aluno para resolver um problema viria, porém sob a forma de estruturas compostas de informações comprimidas, mais fáceis de manipular e que ocupam menos espaço. Dessa forma, pode-se perceber que há uma relação natural entre imagem de conceito evocada e unidades cognitivas.

1.4. Raízes cognitivas

Como já foi dito, a definição formal não constitui uma boa alternativa para a introdução de um conceito matemático. É plausível, portanto, uma discussão de qual estratégia utilizar na abordagem inicial de um determinado conceito.

Em oposição a uma abordagem inicial baseada na definição, pode-se pensar em uma estratégia em que o professor "simplifica" os conteúdos, apresentando conceitos matemáticos em um contexto mais restrito do que aquele em que estes serão aplicados. O que ocorre neste caso é que, na esperança de "facilitar a vida" do aluno, com omissões de detalhes teóricos mais delicados (como casos particulares ou patológicos, interpretações mais sofisticadas, relações com outros pontos do conteúdo, etc), o professor acaba por contribuir para a formação de uma imagem de conceito pobre. Portanto, essa opção de abordagem também não é ideal.

Então, uma estratégia pedagógica não deve ser nem apenas centrada na definição, uma vez que dessa forma a definição pode não se tornar um atributo ativo da imagem de conceito e por isso perder o sentido para o aluno. Nem ser demais simplificada, sob pena de implicar em uma imagem de conceito restrita.

Assim, surge a necessidade de discutir a questão de como inserir novos conteúdos matemáticos, principalmente os mais avançados, sem pecar pelo excesso ou falta de formalismo. Como solução a esta questão, a noção de **raiz cognitiva** é proposta por Tall (TALL, 1989) como sendo um conceito âncora com duas características fundamentais:

1. ser familiar ao aluno;
2. mas ao mesmo tempo conter as sementes de um desenvolvimento teórico futuro mais avançado.

A raiz cognitiva não coincide, de forma geral, com a definição formal de um conceito – a primeira é um porto de partida para a abordagem pedagógica, enquanto a segunda deve se colocar como um objetivo instrucional.

Onze anos mais tarde, Tall (TALL, 2000) define raiz cognitiva como sendo uma unidade cognitiva que faz sentido para o aluno no estágio em questão, mas ainda assim permite a expansão do conceito a desenvolvimentos teóricos mais elevados. Essa formulação do conceito de raiz cognitiva em termos de unidade cognitiva aponta para uma implicação crucial: sendo uma unidade cognitiva, uma raiz cognitiva *deve fazer parte* da imagem de conceito (TALL, 1989 e TALL, 2000), isto é, fazer parte do repertório de idéias já familiares para o estudante.

Também em (TALL, 1989), buscando facilitar a transição entre o que o aluno já sabe e o que a nova teoria irá apresentar, o autor define **organizador genérico** como um ambiente (ou micromundo) que permite ao aluno manipular exemplos e (se possível) não-exemplos de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados. O objetivo é ajudar o aluno a adquirir experiências que o façam refletir sobre a construção de conceitos mais abstratos.

A concepção de um organizador genérico está diretamente relacionada com a existência de uma raiz cognitiva para o conceito em questão. Tall deixa isso claro:

> Confeccionar um organizador genérico requer a seleção de uma importante idéia fundamental para se basear. Entretanto, essa idéia não é um fundamento da teoria.[...] Para obter sucesso inicial e a longo prazo, um ponto de partida desejável é o que seja familiar ao aluno e também

> que abilite o aluno que deseja se aprofundar na teoria [...] Com isso em mente, eu formulei a noção de raiz cognitiva [...].
>
> (TALL, 2000) tradução nossa

Portanto o organizador genérico, segundo Tall, deve ser baseado em uma idéia âncora já familiar para ao aluno, para que este possa de fato manipular o ambiente, e deve possibilitar a exploração do conceito tendo como objetivo a evolução da teoria, sem com isso, entretanto, esgotar todas as possibilidades do conceito. Como já foi discutido anteriormente, esses são atributos de uma raiz cognitiva.

Ainda em (TALL, 2000) o autor faz uma afirmação do que ele espera, em geral, a respeito de um organizador genérico:

> Mais geralmente, eu espero que todo organizador genérico "contenha as sementes da sua própria destruição", no sentido de que ele seja suficientemente sofisticado para mostrar as limitações do seu processo de modelagem e a necessidade de uma abordagem teórica mais completa.
>
> (TALL, 2000), tradução nossa

Essa afirmação terá uma implicação importante neste trabalho. Voltaremos a ela mais adiante.

1.5. Raízes cognitivas e o caso da derivada

Nessa seção, analisaremos algumas questões sobre o ensino do conceito de derivada que serão importantes para discussões posteriores sobre o conceito de integral definida, bem como para a formulação das questões de pesquisa.

No caso do conceito de derivada, a raiz cognitiva proposta por Tall é a noção de retidão local[2] (para mais detalhes, ver TALL, 1989; TALL, 2000; GIRALDO & CARVALHO, 2002; GIRALDO, 2004), que se baseia na percepção humana de que um objeto curvo parece reto quando observado de muito perto.

No entanto, a grande maioria dos livros textos de cálculo introduz o conceito a partir da definição como limite da razão incremental, acompanhada da figura de retas secantes "aproximando-se" da tangente (GIRALDO, 2004). A noção de limite não se caracteriza

---

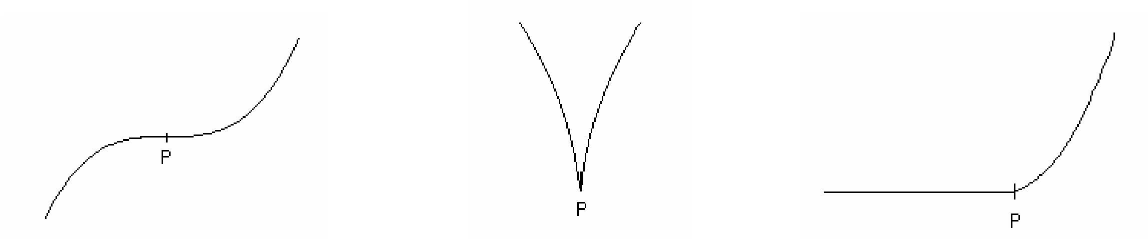
[2] No original, *local straightness*.

como raiz cognitiva adequada para o conceito de derivada, já que sua clara compreensão (considerando toda a complexidade matemática inerente ao conceito) não é imediata para grande parte dos alunos dos cursos iniciais de cálculo. Idéias imprecisas da noção de limite são apontadas por diversos autores como uma origem de obstáculos no desenvolvimento cognitivo do conceito de derivada (e.g. CORNU, 1991). Assim, a teoria de raízes cognitivas sugere que a compreensão formal da noção de limite deve ser um objetivo e não um ponto de partida da abordagem pedagógica.

Além disso, o uso inadequado da representação de derivadas por meio de retas tangentes também está associado com diversos problemas na aprendizagem de derivadas (VINNER, 1991; GIRALDO, 2004; BIZA et al, 2006). Vinner aplicou um questionário a um grupo de bons alunos (afirmação do autor) universitários do primeiro ano cursando a disciplina de Cálculo (VINNER, 1991). Nesse questionário havia três esboços de gráficos de funções, a saber:

1. $y = x^3$ 2. $y = \sqrt{|x|}$ 3. $y = \begin{cases} x^2; & x \geq 0 \\ 0\ ; & x \leq 0 \end{cases}$

As leis de formação acima não foram fornecidas aos alunos, somente os respectivos gráficos sobre os quais havia um ponto P marcado, como a figura abaixo.



.

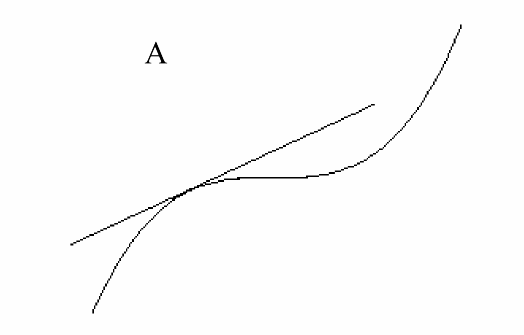
Para cada gráfico havia três afirmações sobre tangentes no ponto P:

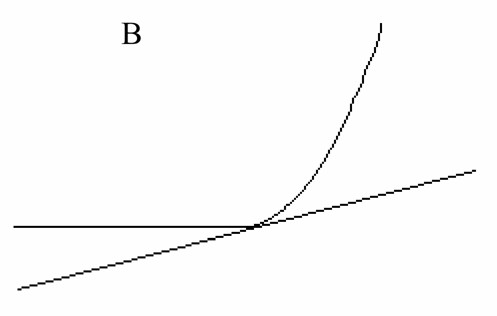
A. Pelo ponto P é possível traçar exatamente uma tangente a curva (trace-a).

B. Pelo ponto P é possível traçar mais de uma tangente (especifique quantas, uma, duas, três, infinitas. Trace todas no caso de um número finito e algumas no caso de serem infinitas).

C. É impossível traçar pelo ponto P uma tangente a curva.

O aluno deveria assinalar a opção que considerasse correta e desenhar as tangentes conforme instruções. Poucos conseguiram responder utilizando a definição formal de derivadas, como seria o correto. Em alguns casos, ficou nítida a associação à noção de tangência relacionada ao círculo, tanto que algumas respostas evidenciavam que o aluno forçou um traçado que tocasse a curva em um único ponto ou que impedisse que a reta tangente interceptasse a curva. Ambas estes idéias são herdadas da tangência ao círculo, como mostram os exemplos abaixo, retirados da pesquisa em questão.





O exemplo A mostra que o aluno procurou desenhar a tangente de forma que ela não tocasse a curva em mais de um ponto. O não prolongamento parece ter sido proposital, de forma a evitar que a reta interceptasse a curva em um segundo ponto. Além disso, a tangente não foi traçada no ponto pedido, pois, dessa forma, a tangente teria que interceptar horizontalmente a curva no ponto P. No exemplo B, mais uma vez fica explícito o desconforto em traçar a tangente de forma correta, uma vez que esta coincidiria com a parte horizontal do gráfico (uma semi-reta contida na reta $y = 0$). Em ambos os casos, os alunos traçam a reta tangente de forma que haja um e somente um ponto em comum com a curva.

Os resultados mostram que a idéia de tangente relacionada ao círculo, aprendida em cursos iniciais de geometria fora da universidade, ainda persistia, embora os alunos já tivessem sido apresentados à definição formal e tradicional de derivadas, utilizando limite de secantes. Quando não havia uma mistura entre as concepções antiga e nova, a que prevalecia na maioria dos casos era a idéia associada ao círculo.

Sem a definição prévia do conceito de derivada, a definição de tangência só pode ser enunciada em contextos matemáticos restritos, em que aparece associada ao estudo do número de pontos de interseção (como no caso de curvas convexas). Esta idéia, evidentemente, não se generaliza para a noção de tangência a que se refere o cálculo diferencial. Portanto, no contexto do cálculo, a noção de derivada é *anterior* à de tangência. Assim, a afirmação de que "o valor da derivada no ponto é a inclinação da reta tangente" pode ser considerada como uma definição para reta tangente, mas não para derivada – como esta em muitos casos é apresentada por livros didáticos e professores.

Essa abordagem tradicional encerra dois problemas. O primeiro, de natureza cognitiva, diz respeito ao fato de que o aluno recém ingressado no ensino superior traz consigo a noção de tangência por ele utilizada até o ensino médio. Isto é, a noção de tangência a círculos, que leva em conta o número de pontos de interseção. No momento em que o professor de cálculo afirma “reta tangente à curva”, é razoável esperar que o que o aluno entende esteja diretamente relacionado com tangente a círculos, o que faz com que sua compreensão se torne restrita.

O segundo problema, de natureza matemática, se refere à própria “definição” de derivada como inclinação da reta tangente. Pode-se dizer que da maneira como é, em geral, apresentada, essa afirmação se caracteriza como uma imprecisão matemática bastante considerável, pois se trata de uma afirmação recursiva. O objeto que se quer definir (derivada) precisa de um outro objeto que não está definido (tangente), e este, por sua vez, necessita do primeiro para defini-lo.

Este uso impreciso pode se constituir em uma fonte de conflitos cognitivos entre a definição de conceito e a imagem de conceito de derivada desenvolvida por estudantes (TALL, 1989).

Em (TALL, 2000), o autor afirma que “área sob a curva” seria raiz cognitiva para o conceito de integral. No entanto, faz essa afirmação sem embasamento empírico, ao contrário da noção de retidão local, que foi largamente pesquisada antes de ser considerada raiz cognitiva para o conceito de derivada.

> Raízes cognitivas para o cálculo são simplesmente a noção *de retidão local* (para taxa de variação/diferenciação) **e *área sob a curva* (para integração).**
>
> (TALL, 2000), tradução e grifo nossos

Neste trabalho, abordaremos essa possibilidade de área como raiz cognitiva para o conceito de integral, discutindo suas implicações para o ensino à luz da teoria de imagem de conceito e definição de conceito. Iniciaremos essa discussão no próximo capítulo.

Capítulo 2
A problemática do ensino do conceito de área

Neste capítulo, faremos algumas discussões sobre o conceito de área, dando ênfase ao ensino desse conceito e os problemas envolvidos nesse processo. Faremos também algumas considerações de caráter histórico que nos permitirão analisar com mais detalhes as questões referentes ao conceito de área em toda sua generalidade.

Apesar de bastante conhecido e muito difundido entre alunos e professores, tanto do ensino básico quanto do ensino superior, o conceito de área não é simples. É claro que em níveis iniciais de ensino, pode ser suficiente trabalhar o conceito de área totalmente baseado em noções intuitivas, relacionadas com problemas práticos envolvendo o cálculo da área de retângulos ou triângulos. A idéia de contar quantos quadrados de lado unitário podem ser colocados dentro de um determinado retângulo é muito usada. A partir dela, pode-se chegar à fórmula da área do retângulo e, com base nesta, às que fornecem as áreas de figuras poligonais mais conhecidas.

No entanto, a necessidade de uma definição formal de área aumenta à medida que o nível de ensino se eleva. A própria iniciativa de usar quadrados unitários para cobrir uma determinada área, por exemplo, retangular pode causar problemas se o retângulo tiver lados incomensuráveis. Nesse caso a idéia inicial falha por não conseguirmos um quadrado com lado de medida u pequena o suficiente de tal forma que os lados do retângulo sejam ambos múltiplos inteiros de u. Já há, nesse ponto, necessidade de utilizar um raciocínio infinitesimal.

Quando surgem os estudos de figuras circulares essa necessidade se torna ainda mais contundente, já que não é possível preencher um círculo com um número finito de quadrados ou (considerando um círculo de raio 1) construir, com instrumentos euclidianos, um quadrado de lado π. Este é o problema da quadratura do círculo, um dos problemas mais conhecidos da matemática e que remonta à Grécia antiga. Este problema persiste, quando ocorrem os estudos sobre figuras bidimensionais que possuem superfície limitada por curvas quaisquer.

As duas definições seguintes podem servir para que tenhamos uma noção do quão complicada é a definição formal do conceito de área.

Hartshorne, em seu livro de geometria, faz a seguinte afirmação:

> Na geometria na escola secundária muitas vezes você aprendeu a calcular área de várias figuras, mas nunca viu uma definição de área ou uma prova de que isso exista.
>
> (HARTSHORNE, 2000) tradução nossa

A seguir, define área como sendo:

> O valor de uma função α em um plano, definida no conjunto P de todas as figuras, com valores em um grupo abeliano G, tal que: (1) Para qualquer triângulo T, α (T) > 0 em G; (2) Se T e T' são triângulos congruentes então α (T) = α (T'); (3) Se duas figuras P e Q são disjuntas então α (P $\cup$ Q) = α (P) + α (Q).
>
> (HARTSHORNE, 2000) tradução nossa

Pogorelov afirma que toda teoria estrita de área deveria começar com a prova do seguinte teorema:

> Em um conjunto de figuras que admitem partição em um número finito de triângulos sem pontos internos comuns, uma função S chamada área pode ser definida tal que possua as seguintes propriedades:
>
> i) Para figuras com pontos interiores, S > 0;
>
> ii) Se uma figura G é formada por duas figuras G1 e G2, não tendo pontos interiores comuns, então S (G) = S (G1) + S (G2);
>
> iii) Figuras congruentes têm áreas iguais;
>
> iv) Para um quadrado com lado unitário, S = 1.
>
> (POGORELOV, 1987) tradução nossa

A falta da passagem de uma noção elementar de área para uma noção mais elaborada, que talvez pudesse ser ao menos iniciada no ensino médio, em geral não ocorre. Os livros-texto de matemática nesse nível de ensino, raramente fornecem algo além de fórmulas para calcular a área das figuras planas poligonais mais conhecidas e a área do círculo. Além disso, em geral, não mencionam o processo usado para chegar a esses resultados. Desse modo, a noção de área que permanece na imagem de conceito dos alunos é a única trabalhada até então, ou seja, aquela baseada na adoção de um ponto de vista intuitivo para compreender o que é área de uma figura plana. E esse ponto de vista está diretamente ligado ao ato de descobrir sua medida através de cálculos usando fórmulas, em detrimento de uma concepção baseada na idéia de que área é um atributo de figuras planas.

Euclides, no Livro I de *Os Elementos*, desenvolve o conceito de área através de uma seqüência de proposições conhecida como áreas paralelogrâmicas (que se inicia na proposição 35 e vai até a proposição 48 e última do Livro I). Entretanto, ao invés de atribuir valores numéricos às medidas das áreas, os argumentos usados para provar as proposições dessa seqüência são baseados nas chamadas "noções comuns" estabelecidas por Euclides como axiomas, como por exemplo: *se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais*.

A matemática grega consistia, na maior parte, de uma matemática retórica. O tratamento das áreas na matemática grega era feito por comparação e não pelo estabelecimento de fórmulas. Surgem, então, os problemas de quadratura. Encontrar a quadratura de uma figura significa encontrar um quadrado cuja área seja igual à da figura dada. Isso mostra que não são necessários números e cálculos para se compreender o que é área, quanto propriedade de uma figura plana.

Essa falsa compreensão do conceito de área pautada nas fórmulas está presente nos professores. Em (BELFORT, GIRALDO & CARVALHO, 2004), os autores relatam o ocorrido quando da aplicação de um problema em turmas de professores de matemática em formação inicial e em formação continuada. O problema consistia basicamente em analisar a situação encontrada na proposição 35 do Livro I de *Os Elementos* (em que dois paralelogramos com mesma base e lados opostos à base contidos na mesma paralela têm áreas iguais) em um ambiente de Geometria Dinâmica com livre interação, no qual era possível, através das funcionalidades do software, obter o valor numérico referente à área das figuras na tela. Segundo os autores, a resposta padrão foi recorrer às fórmulas e, "quase que sem exceções, os professores participantes não se mostram capazes de conceber a noção de área a não ser através de sua medida obtida através da aplicação de uma fórmula". É de se esperar que essa visão restrita de área como cálculo de medida seja absorvida pelos alunos e mantida quando estes ingressam no ensino superior, passando a existir na imagem de conceito deles como idéia chave para o conceito de área.

2.1. A importância do método de exaustão

O método de exaustão era o método usado na Grécia antiga como solução, principalmente, para se determinar a área de superfícies curvas usando a área de superfícies poligonais, estas mais simples de serem calculadas. Segundo ROQUE, (2008), esse processo também é atribuído a Eudoxo (por volta de 400 a.C.), embora Arquimedes (278-212 a.C.) tenha uma maior notoriedade pelo seu uso para o cálculo de π, entre outros problemas.

Embora utilizada desde a antiguidade, essa técnica ficou conhecida como método da exaustão apenas no século XVII. O método consiste em enquadrar a superfície da qual se quer calcular a área usando duas outras superfícies e fazer, através de refinamentos, com que a diferença entre as áreas seja tão pequena quanto se queira (ver ROQUE, 2008).

Um exemplo que ilustra bem a aplicação do método de exaustão é o cálculo de π, feito por Arquimedes com um bom grau de aproximação. O processo baseia-se na construção de polígonos regulares inscritos e circunscritos a um círculo de raio unitário e, por meio de refinamentos, aumentar o número de lados desses polígonos a fim de aproximar cada vez mais o perímetro desses polígonos do comprimento da circunferência, criando assim duas seqüências de perímetros, uma crescente e outra decrescente, que convergem para o valor de π.

A quadratura do círculo e a quadratura da parábola são também exemplos clássicos do uso do método de exaustão para determinar a área de um círculo e de um segmento parabólico, respectivamente. Este último, atribuído a Arquimedes, trata do problema de comparar a área da superfície compreendida entre uma parábola e um segmento de reta que a intercepta em dois pontos com a área de um triângulo inscrito nessa superfície, tendo o segmento de reta como base. O método de exaustão é utilizado para mostrar que a área do segmento parabólico é equivalente a 4/3 da área do triângulo em questão.

Apesar de Euclides e até mesmo Arquimedes evitarem o uso da palavra infinito, o método de exaustão pode ser considerado como uma indicação de que é necessário um processo infinitesimal para o cálculo da área de superfícies curvas, uma vez que os processos menos elaborados para medida de área não possibilitam essas aproximações. O tratamento das áreas como simples comparações entre grandezas envolvendo um determinado quadrado de lado ideal não é suficiente. Muito menos a manipulação de fórmulas soltas extraídas de raciocínios sobre regiões poligonais. E a própria incomensurabilidade das dimensões de uma figura, como dissemos anteriormente, demanda uma reflexão ligada ao infinito.

Em (ROQUE, 2008) encontramos menções de que no século XVII os trabalhos de Cavalieri e Pascal foram fundamentais para a formalização de argumentos antigos pautados na intuição. No Renascimento, as obras gregas foram traduzidas e o método de Arquimedes para o cálculo das quadraturas passou a ser conhecido na Europa. Um pouco antes da metade do século XVII, Cavalieri (1598-1647) publicou um método inovador para o cálculo de quadraturas, no qual propõe a divisão da figura em tiras, que ele chama de indivisíveis, de modo que a área da figura seja igual à soma das áreas dessas tiras que eram muito numerosas e, por isso, muito estreitas. O argumento segue com o fato de que quando as larguras das tiras diminuem infinitamente, o número de tiras também aumenta infinitamente.

Usando séries, que foram muito estudadas no século em questão, Blaise Pascal (1623–1662), também aborda problemas da quadratura, porém de uma forma menos intuitiva e mais aritmética. Por exemplo, para calcular a área da parábola $y = x^2$, Pascal constrói retângulos sobre as abscissas de pontos em $d, 2d, 3d,..., nd$, de forma que todos os retângulos tenham base medindo d, e com altura $d^2, 4d^2, 9d^2,...., n^2d^2$, de acordo com a equação da parábola. A soma das áreas dos retângulos é dada pela expressão

$dd^2 + d4d^2 + d9d^2 + ... + dn^2d^2 = d^3 + 4d^3 + 9d^3 + ... + n^2d^3 = d^3(1 + 2^2 + 3^2 + ... n^2).$

Pascal usa métodos aritméticos para deduzir que a expressão entre parênteses é igual a $\frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$. Quando o número n de retângulos aumenta muito, Pascal argumenta que os termos de graus 1 e 2 tornam-se muito pequenos em relação ao termo de grau 3, de modo que podem ser desprezados. Então, a soma das áreas dos retângulos é dada por $\frac{d^3n^3}{3}=\frac{x^3}{3}$. Não é difícil notar que esse é exatamente o mesmo resultado que seria encontrado se o problema tivesse sido resolvido através dos procedimentos que conhecemos hoje, ou seja, do uso da teoria de integral.

Como já dito antes, a importância do método de exaustão no desenvolvimento da matemática desde a Grécia antiga mostra que o uso de um argumento infinitesimal se faz indispensável quando se trata do problema de calcular área de superfícies que tenham fronteiras curvas, ou seja, quando se trata do conceito de área de uma forma mais geral.

2.2. Algumas concepções sobre integral definida

No início da década de 80, em (ORTON, 1983), o autor realizou uma pesquisa sobre a compreensão do cálculo elementar, incluindo integral, por alunos das séries terminais do ensino secundário e alunos das primeiras séries da universidade. O objetivo era identificar os erros comuns e as concepções erradas que surgiam quando os alunos trabalhavam com integral. Essa pesquisa, no entanto, foi bastante calcada no aspecto formal, buscando encontrar falhas no entendimento dos alunos na formalização do conceito. O autor concluiu que, apesar de sua importância para o entendimento do conceito de integral, a noção de limite tem pouco espaço nos currículos e que, sendo desse modo, não se pode esperar do aluno mais do que saber aplicar o algoritmo. Além disso, muitos alunos tiveram problemas em entender a relação entre a integral definida e a área sob a curva.

Tall também foi autor de alguns trabalhos sobre o conceito de integral. Por exemplo, em (TALL, 1986), há uma proposta sobre o uso do computador para uma mais profunda compreensão do teorema fundamental do cálculo, utilizando, para isso, representações gráficas que são potencializadas pelo uso da máquina. O autor defende o uso do computador como facilitador para cálculos numéricos, bem como para uma mais precisa e mais rápida visualização. Através da exploração do software Graphic Calculus, os alunos têm oportunidade de desenvolver uma percepção significativa sobre alguns pontos conflitantes da teoria, como o porquê do sinal de menos no resultado da integral quando a função está abaixo do eixo das abscissas.

Mais recentemente, em (ASPINWALL & MILLER, 2001), através de uma pesquisa envolvendo respostas escritas de alunos de primeiro semestre de cálculo em uma universidade americana, os autores concluíram que esses alunos, em geral, possuem a imagem de conceito fortemente atrelada à definição de conceito com que eles têm contato em sala de aula, mas que essa definição de conceito normalmente não é bem compreendida. Essa definição de conceito diz respeito à integral definida como limite das somas superior e inferior. A pesquisa revela que há muitos erros relacionados à essa definição de conceito, pois poucos alunos têm uma noção correta do que ocorre nesse processo.

De forma semelhante, em (RASSLAN & TALL, 2002), os autores identificam, por meio de um questionário escrito contendo 6 questões aplicado a 41 alunos do último ano do ensino secundário (English High School), uma série de problemas na formação de suas imagens de conceito de integral, como por exemplo o fato de que os alunos não necessariamente sabem calcular a área de funções que mudam de sinal.

O foco principal da pesquisa realizada pelos autores em (GONZÁLEZ-MARTÍN & CAMACHO, 2004) é a compreensão do conceito de integral imprópria, mas parte do trabalho é dedicada ao conceito de integral definida. A pesquisa feita com 31 alunos universitários já familiarizados com cálculo foi baseada na aplicação de um questionário com 9 questões, sendo todas relacionadas com integrais impróprias, exceto a primeira. Esta pedia que os alunos explicassem o significado de $\int_a^b f(x)\,dx$. Dos 31 alunos, 29 alunos responderem que é usado para calcular áreas, mas somente quatro mencionaram o sinal da função. Além disso, apenas 17 fizeram algum gráfico em sua explicação. Esses resultados vão ao encontro dos obtidos nesta pesquisa, como será mostrado mais adiante.

TALL (2000) sugere que a idéia de área seria uma raiz cognitiva adequada para o conceito de integral definida, pois atende às duas condições fundamentais de ser familiar para os estudantes e propiciar desenvolvimentos teóricos subseqüentes. No entanto, pouca pesquisa tem sido feita para comprovar esta hipótese. Se considerarmos os resultados de pesquisa sobre o ensino de derivada, citados anteriormente, uma reflexão por analogia sugere que esta imprecisão na definição de integral pode levar a conflitos cognitivos na imagem do conceito desenvolvida por estudantes em estágios iniciais de aprendizagem de cálculo. Esta discussão constitui a questão central deste trabalho.

No momento em que é apresentado à teoria de integral no curso de cálculo, tudo que o aluno conhece sobre área vem de estudos anteriores à universidade. O aluno tem uma idéia de área que depende diretamente das ferramentas disponíveis até o ensino médio, isto é, basicamente ferramentas da geometria euclidiana plana. Por mais bem trabalhado que seja o conceito de área, enriquecido com diferentes abordagens, manipulações práticas de medições e exemplos práticos do cotidiano, as limitações inerentes ao nível restringem a concepção do aluno. Qualquer raciocínio fica limitado às figuras poligonais mais simples, para as quais são conhecidas fórmulas que fornecem a medida da área da região dada.

Quando ocorre a generalização do conceito de área no cálculo, surgem conflitos com as noções antigas de área que o aluno detém, e que já estão enraizadas em sua imagem de conceito. Por exemplo, a possibilidade de haver área para uma região plana não limitada ou, em um caso mais extremo, haver área sem mesmo haver uma região, como será mostrado mais adiante, podem criar uma sensação de confusão para o aluno.

Algumas potenciais fontes de conflito podem ser associadas a concepções da idéia de área em geometria euclidiana plana que são se generalizam para o contexto do cálculo integral. Por exemplo, é possível que a integral de uma função exista e forneça um resultado positivo, mesmo que não haja uma região limitada por seu gráfico (como ilustra a figura 1 abaixo).

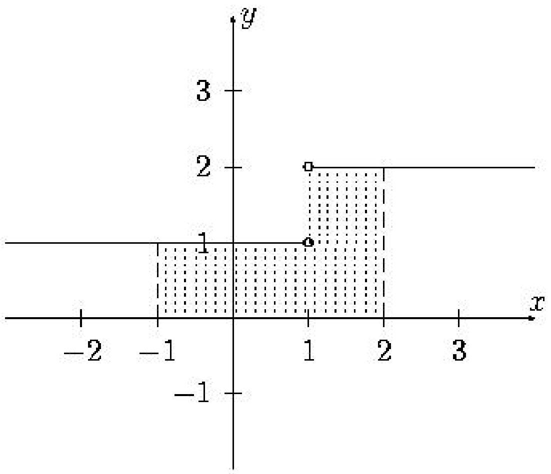


Figura 1. Uma função cuja integral existe e é positiva,

mas cujo gráfico não forma, com o eixo x, uma região limitada.

Um outro exemplo, talvez mais extremo, para esse caso ocorre na função real $f:[0,1]\to R$ definida por:

$$f(x)=\begin{cases}1 & se\ x\notin Q\\ \dfrac{1}{q}+1, & com\ x=\dfrac{p}{q},\ p\ e\ q\ primos\ entre\ si\end{cases}$$

Temos que $\int_0^1 f(x)\,dx=1$, mas seu gráfico não fornece, com o eixo x, nenhuma região limitada.

Além disso, em cálculo integral, dizer que a área limitada por uma curva *é zero* não é o mesmo que dizer que *não existe* área limitada pela curva (isto é, que a curva não é integrável no sentido de Riemann), como ilustra o exemplo das duas funções reais $g:[0,1]\to R$ e $h:[0,1]\to R$ definidas abaixo.

$$g(x)=\begin{cases}1 & se\ x=1\\ 0 & se\ x\neq 1\end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases}1 & se\ x\in Q\\ 0 & se\ x\notin Q\end{cases}$$

Para a função *g*, a integral existe e seu valor em [0,1] é 0. Já a função *h* não é integrável (no sentido de Riemann) no mesmo intervalo [0,1] (nem em nenhum outro). Em ambos os respectivos gráficos não há área limitada pela curva. No entanto, para a generalidade do cálculo, a área relacionada à função *g* é zero e para a função *h* a área não existe.

2.3. As questões de pesquisa

O conceito de integral definida (no sentido de Riemann) é tipicamente absorvido pelos alunos em turmas iniciais de cálculo como a *área determinada entre o gráfico da função e o eixo horizontal em um intervalo fechado e limitado do domínio*. Nesse ponto, faremos uma analogia ao problema da "definição" de derivada como inclinação da reta tangente, já discutida no capítulo anterior.

Para a generalidade do cálculo diferencial, a idéia de tangência não pode ser a mesma utilizada em níveis básicos de matemática, pelo caráter restrito desta última. Para o cálculo, a definição de reta tangente deve ser mais abrangente, não sendo suficiente uma noção que leve em conta apenas o número de pontos de interseção com a dada curva.

Um exemplo bem claro desse fato é a reta tangente à uma parábola. Uma reta que intercepte a parábola em exatamente um ponto não é garantidamente uma tangente nesse ponto. Se a reta em questão é paralela ao eixo de simetria da parábola, há somente um ponto de interseção, mas, claramente, não se trata de uma reta tangente.

Como já foi discutido nesse trabalho e em outros (GIRALDO, 2004), no contexto do cálculo, o conceito de tangente adquire um caráter local, sendo necessário, portanto, um artifício infinitesimal para defini-lo em toda sua generalidade. Podemos conceber a idéia de tangente a círculos como um caso particular da definição de tangente da forma mais geral, obtida no cálculo diferencial. Portanto, para o cálculo, o conceito de derivada é anterior ao de tangente e o primeiro se faz necessário para definir o segundo.

É possível estabelecer nesse ponto uma analogia entre a problemática da definição equivocada de derivada no ponto como inclinação da reta tangente e a problemática da definição, que veremos que é também equivocada, de integral como área sob a curva.

Para compreender o conceito de área em toda sua generalidade, é necessário um processo de aproximação infinitesimal (como o método da exaustão utilizado na Grécia antiga – que já mencionamos anteriormente - ou a noção moderna de integral de Riemann) sem o que só é possível definir área de figuras poligonais, calculadas através de métodos da geometria euclidiana, e cujos lados não sejam incomensuráveis.

A concepção de área relativa ao ensino básico, isto é, aquela mais restrita, limitada a regiões poligonais de lados mensuráveis, pode ser vista como caso particular da concepção de área relativa ao cálculo, esta mais generalizada e mais abrangente.

A frase “a integral é a área sob a curva”, comumente utilizada nos cursos de cálculo, não pode ser considerada uma definição para integral porque depende do significado geral do conceito de área e este, por sua vez, só pode ser satisfatoriamente atingido (como mostra a argumentação feita anteriormente) através de algum processo infinitesimal, como a construção da integral de Riemann. Ou seja, sem a definição anterior do conceito de integral (ou de outro recurso infinitesimal), o conceito de área só pode ser enunciado em contextos teóricos restritos. Esta noção não se generaliza para a idéia de área a que se refere o cálculo.

Portanto, no contexto do cálculo, o conceito de integral é anterior ao de área, sendo o primeiro imprescindível para definir o segundo. Assim, a afirmação de que “a integral é a área sob a curva” pode ser admitida como uma definição para área, não para integral.

Isso acarreta um problema de natureza matemática, pois a “definição” de integral como área sob a curva torna-se recursiva, de forma análoga que ocorre com as tangentes e derivadas. A definição de derivada como inclinação da reta tangente não pode ser considerada matematicamente satisfatória porque, depende da noção geral de tangência que se faz necessária no cálculo diferencial. No entanto, esta última só pode ser vista em toda sua generalidade mediante um processo infinitesimal, que fundamenta justamente o conceito de derivada. No caso de integral e área, o conceito que se deseja definir (integral) depende de um outro (área) que não está satisfatoriamente definido, do ponto de vista do cálculo.

Do ponto de vista pedagógico, essa imprecisão também pode provocar um problema. Ao ouvir a frase “a integral é a área sob a curva”, o aluno pode recorrer à idéia de área com a qual ele teve contato em seus estudos anteriores. O aluno passa a associar imediatamente o conceito de integral com o conceito de área insuficientemente generalizado que ele conhece. Com isso, a relação com integral adquire um aspecto muito restrito. A integral, como indicam os resultados que mostraremos mais adiante, passa a se caracterizar na imagem de conceito dos alunos apenas como uma ferramenta a mais para cálculo de área de figuras planas.

ANALOGIA : DERIVADA / RETA TANGENTE X INTEGRAL / ÁREA SOB A CURVA	
A noção de tangência do ensino básico (baseada no número de pontos de contato) não é suficiente para o contexto do cálculo.	A concepção de área dos níveis básicos de matemática (calcada na geometria euclidiana) é restrita para a generalidade do cálculo.
É necessário um argumento infinitesimal (derivada) para definir tangência em toda sua generalidade.	É preciso um artifício infinitesimal (integral) para compreender o conceito de área em toda sua generalidade.
Para o cálculo, o conceito de derivada é anterior ao de tangência.	No contexto do cálculo, o conceito de integral é anterior ao de área.
"*A derivada é a inclinação da reta tangente*"pode ser admitida como uma definição para reta tangente, não para derivada.	"*A integral é a área sob a curva*" pode ser considerada uma definição para área, não para integral.
Dificuldades na aprendizagem de derivada surgem em virtude dessa relação equivocada.	Problemas na aprendizagem de integral podem se atribuídos à concepção de área que não se generaliza para o cálculo.

Tabela 1: Analogia entre derivada / reta tangente e integral / área sob a curva

É necessário, nesse ponto, estabelecer uma diferença entre as problemáticas da derivada com tangente e da integral com área, apesar da analogia explícita. A noção restrita de tangência trazida do ensino básico, não carrega dificuldades intrínsecas. Isto é, o aluno não possui, de forma geral, grandes dificuldades para compreender a idéia de tangência que leva em conta apenas o número de pontos de contato com a curva (quase sempre círculo). Já o conceito de área, mesmo aquele a que se refere o ensino básico, ou seja, restrito à noções simples de geometria euclidiana e figuras de lados comensuráveis, possui dificuldades inerentes ao próprio conceito. Como já discutimos anteriormente, o conceito de área não pode ser considerado de fácil ensino e aprendizagem. Este fato tende a potencializar o problema pedagógico a que nos referimos no parágrafo anterior. Além de os alunos recorrerem a uma noção de área que já é restrita, esta ainda pode ser equivocada.

Como já mencionamos, em (TALL, 2000) o autor defende que a noção de área seria raiz cognitiva para o conceito de integral. Entretanto, consideramos que há um ponto passível de discussão na própria teoria de raiz cognitiva. Esta teoria não prevê que a estratégia pedagógica usada inclua situações que deixem explícitas as limitações da idéia usada como raiz cognitiva. Ou seja, não é esperado que uma raiz cognitiva contenha "as sementes da sua própria destruição", como ocorre com a idéia de organizador genérico, de acordo com Tall, como já mencionamos anteriormente. É importante ratificar que a confecção de um organizador genérico deve ser baseada em uma raiz cognitiva adequada ao conceito em questão, segundo Tall em (TALL, 2000).

Esse ponto tem uma implicação fundamental para este trabalho. Ao usarmos a idéia de área como raiz cognitiva para integral, sem incluir uma abordagem pedagógica que explicite suas limitações, a idéia de área pode nunca se desassociar do conceito de integral. Isto é, a relação entre os conceitos de área e integral pode ganhar caráter de identificação, de modo que, na imagem de conceito dos alunos, um conceito signifique o outro.

Essa relação indiscriminada de área com integral, além de não ser considerada compatível com os preceitos do cálculo, ainda é agravada pelo fato de que o conceito de área não é aprendido a contento no ensino básico.

A noção de raiz cognitiva não prevê também a ocorrência de conflitos que podem ser "herdados" das tais "noções familiares" a que se refere. Esses conflitos estão previstos na teoria de imagem de conceito, em que está incluída a noção de raiz cognitiva.

A investigação sobre a adequação da noção de área como raiz cognitiva para o conceito de integral definida demanda cuidadosos estudos sobre as concepções e possíveis obstáculos na aprendizagem do conceito de integral definida. Este trabalho tem por objetivo contribuir para esta discussão, através de um levantamento destas concepções em alunos já familiarizados com integral e da comparação com os resultados de outras pesquisas, como as mencionadas anteriormente. Mais especificamente, este trabalho procura auxiliar na busca pelas respostas às seguintes questões:

- Quanto a idéia de área se atrela ao conceito de integral definida?
- Em algum momento, o aluno abandona a concepção de que a integral definida sempre fornece o resultado do cálculo da área de uma região?
- No que diz respeito a uma abordagem inicial pedagogicamente satisfatória, a noção de área pode ser considerada uma raiz cognitiva adequada para o conceito de integral definida?

Capítulo 3
Metodologia

A metodologia deste estudo foi concebida para servir como um instrumento capaz de nos auxiliar na obtenção de respostas referentes às questões de pesquisa. Principalmente no que diz respeito à adequação da noção de área como raiz cognitiva para o conceito de integral definida.

Não objetivamos realizar nenhum tipo de quantificação na coleta dos dados nem analisá-los à luz de métodos estatísticos. Portanto, o enfoque dado a esta pesquisa é de natureza qualitativa por acreditarmos que uma análise mais detalhada e mais subjetiva, procurando compreender a forma de pensar dos alunos, atenderia aos nossos propósitos de uma forma mais completa. Em (GODOY, 1995), a autora afirma:

> A pesquisa qualitativa não procura enumerar e / ou medir os eventos estudados, nem emprega material estatístico na análise de dados. Parte de questões ou focos de interesse amplos, que vão se definindo à medida que o estudo se desenvolve. Envolve a obtenção de dados descritivos [...] pelo contato direto do pesquisador com a situação estudada, procurando compreender os fenômenos segundo as perspectivas dos sujeitos, ou seja, dos participantes da situação em estudo.
>
> (GODOY, 1995)

Desse modo, os participantes desta pesquisa foram selecionados de acordo com os pressupostos acima descritos. Consistiram sempre de alunos de graduação em matemática, uma vez que o estudo considera o ensino e a aprendizagem da teoria de integral definida, ensinada em cursos iniciais de cálculo.

3.1. Planejamento do estudo empírico

O estudo empírico desta pesquisa foi estruturado na forma de 3 etapas. A primeira delas, etapa 0, ocorrida em dezembro de 2006, consistiu em um estudo exploratório sob a forma de um questionário com 8 questões abrangendo a teoria de integral definida. Esse questionário foi aplicado aos alunos de uma turma de graduação em matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) que dispuseram de 40 minutos para responder, individualmente e sem qualquer tipo de consulta, ao máximo de questões que pudessem. Não foi obrigatória a identificação e o ambiente foi a própria sala de aula da turma.

A segunda etapa, etapa 1, aconteceu em março de 2008 e se deu através da aplicação de um questionário contendo 8 questões sobre a teoria de integral definida aos alunos de duas turmas de graduação em matemática da UFRJ. Para essa etapa, o tempo disponibilizado foi de 60 minutos. Mais uma vez não foi obrigatória a identificação e os ambientes de pesquisa foram as salas de aula das turmas mencionadas.

A última etapa do estudo, etapa 2, ocorreu por meio de entrevistas clínicas semi-estruturadas, realizadas conforme a disponibilidade dos alunos participantes. As entrevistas foram feitas na biblioteca do Instituto de Matemática da UFRJ, entre julho e outubro de 2008.

3.2. Descrição dos participantes

Como o foco deste trabalho é o ensino e aprendizagem do conceito de integral, a pesquisa foi realizada com alunos universitários de matemática que concluíram recentemente cursos iniciais de cálculo. Precisamos observar que foram utilizados alunos diferentes para as diferentes etapas da pesquisa como passaremos a esclarecer a partir de agora.

A etapa 0 – estudo exploratório – ocorreu em uma turma de graduação em matemática na UFRJ, que cursava a disciplina Cálculo de Uma Variável II. Nessa disciplina, o aluno é apresentado à teoria de integral. À época em que transcorreu essa etapa 0, o curso da disciplina já se encontrava em fase de finalização, de forma que os alunos já haviam cumprido o programa habitual, segundo relato do então professor da disciplina. Participaram da etapa 0 um total de 16 alunos, que o fizeram espontaneamente. Alguns desses cursavam a disciplina pela segunda vez.

A etapa 1 foi desenvolvida em duas turmas de graduação em matemática da UFRJ que cursavam a disciplina Fundamentos III. Essa disciplina tem como pré-requisito a aprovação no curso de Cálculo I ou equivalentes[3]. Todos os alunos das duas turmas presentes ao dia da aplicação participaram de forma espontânea, em um total de 33 alunos.

A seleção para a participação na etapa 2 foi feita dentre 11 alunos voluntários das turmas de Fundamentos III, que participaram da etapa anterior. Com isso, todos os alunos participantes da etapa 2, participaram também da etapa 1. Por fim, 5 alunos participaram, de fato, das entrevistas da etapa 2. O critério estabelecido para a escolha desses 5 alunos foi a disponibilidade dos próprios em comparecer em dia e hora marcados fora de seu horário normal de aulas.

É importante deixar claro que a participação ou não de qualquer aluno em qualquer uma das três etapas desta pesquisa, bem como o desempenho não influenciou nas avaliações feitas pelos professores das disciplinas mencionadas. Todos os alunos estavam cientes desse fato.

3.3. As etapas

Como já foi dito anteriormente, este trabalho está baseado em uma pesquisa realizada em três etapas, etapa 0, etapa 1, e etapa 2. Essas etapas não tiveram papéis isolados na pesquisa. Os resultados de uma etapa influenciaram na confecção das outras. Vamos a um detalhamento delas.

3.3.1. A etapa 0

Como primeiro passo de toda a pesquisa, a primeira etapa teve como objetivo observar as concepções de alunos de graduação em matemática sobre o conceito de integral definida, onde ficaria estabelecido o início das nossas investigações sobre as influências da noção de área na aprendizagem de integral.

Optamos por um estudo exploratório elaborado sob a forma de um questionário, em que os alunos responderiam ao máximo de questões que conseguissem dentro de um determinado tempo.

[3] Na UFRJ, o curso de Cálculo I é equivalente aos cursos de Cálculo de Uma Variável I e Cálculo de Uma Variável II somados, estando o primeiro incluído no currículo do curso de Bacharelado em Matemática e os dois últimos incluídos no currículo do curso de Licenciatura em Matemática.

Uma vez que buscávamos as primeiras impressões em relação ao que os alunos compreendiam e aos possíveis problemas que poderiam existir, organizamos um questionário bastante amplo, constituído de 8 questões de variados tipos. Havia questões práticas e teóricas, algumas consideradas fáceis e outras mais elaboradas. O questionário na íntegra se encontra no anexo I.

O único critério para a escolha da turma onde seria aplicado o questionário foi o fato de os alunos já conhecerem a teoria de integral. Por isso, não nos fixamos a nenhuma turma específica, nem nos influenciamos por desempenho de alunos.

Os resultados obtidos nessa etapa 0 serviram como base para a elaboração da etapa seguinte, a etapa 1.

Na tabela abaixo, estão os objetivos gerais para cada uma das 8 questões que formaram o questionário do estudo exploratório.

QUADRO RESUMO DOS OBJETIVOS GERAIS DAS QUESTOES DO ESTUDO EXPLORATÓRIO	
Questões	Objetivos
1	Observar se o aluno seria capaz de resolver uma questão sobre integral em que não houvesse nenhuma relação explícita com área.
2	Identificar, se possível, qual seria a definição de conceito de integral do aluno, caso existisse.
3	Verificar se haveria alguma relação, na imagem de conceito dos alunos, entre o fato de uma função ser integrável ou não e o fato de haver ou não alguma área a ser calculada.
4	Observar se o que os alunos haviam respondido para as primeiras questões se traduziria em exemplos que não os contradissessem.
5	Verificar se a noção de área influencia na hora de resolver uma questão prática sobre a integral de uma função, e o quanto influencia.
6	Verificar se o aluno considera que calcular a área é o mesmo que calcular a integral, indiscriminadamente.
7	Verificar o nível de formalização que o aluno possui em relação ao conceito de integral, e, mais uma vez, observar se é capaz de decidir sobre a integrabilidade de uma função sem recorrer à área.
8	Observar se a definição de conceito de integral do aluno é semelhante à definição formal, caso ela seja capaz de escrevê-la.

Tabela 2: Resumo dos objetivos gerais de cada questão do estudo exploratório

3.3.2. A etapa 1

Depois de uma análise cuidadosa e de natureza qualitativa das respostas fornecidas pelos alunos ao estudo exploratório na etapa 0, identificamos alguns tipos de respostas que eram recorrentes, bem como a falta de respostas para determinadas questões, o que fez com que, para essas questões, o estudo exploratório não se tornasse de grande valia.

Com isso, elaboramos um questionário a ser aplicado a alunos de graduação em matemática já familiarizados com a teoria de integral. Esse questionário, que também contou com 8 questões, teve como base o questionário da etapa anterior. Houve a inclusão de algumas questões e a exclusão de outras, de forma que boa parte do questionário era igual ao questionário do estudo exploratório.

As quatro primeiras questões e a última foram mantidas. Isso foi feito porque houve um alto número de alunos que não responderam a essas questões na etapa anterior. Gostaríamos de observar respostas para as tais questões por se tratarem de questões teóricas, uma vez que as questões práticas foram as mais respondidas.

As questões 5 e 6 também foram mantidas, mas parcialmente. Em ambas as questões, dos 6 itens, excluímos três, e acrescentamos um semelhante a um dos que foram retirados. O motivo para as exclusões foi o fato de considerarmos que esse questionário da segunda etapa deveria ser um pouco mais restrito e direcionado do que o estudo exploratório. Isso possibilitaria que os alunos se dedicassem mais a cada uma das questões, o que nos proporcionaria respostas mais completas e, conseqüentemente, mais valiosas. Retiramos, então, os itens referentes às funções menos comuns e mais problemáticas, para que as possíveis dificuldades dos alunos com funções tivessem uma influência mínima em nossas análises.

Esse também foi o nosso pensamento ao retirarmos a questão 7 do estudo exploratório e substituí-la por uma questão prática, semelhante às questões 5 e 6, porém com os gráficos hachurados dados. Nossa meta, para essa questão, foi estender os objetivos das questões 5 e 6, eliminando a influência de um gráfico mal construído ou construído de forma errada.

Como boa parte do questionário utilizado na etapa 0 é igual ao utilizado na etapa 1, os objetivos gerais das questões especificados na Tabela I se mantém. Exceção feita à questão 7, já mencionada antes. No entanto, a análise feita pôde ser comparada, em algumas situações, com os resultados obtidos na etapa anterior. Isso influenciou na elaboração da estrutura das entrevistas da etapa seguinte. O questionário da etapa 1 completo se encontra no anexo II.

3.3.3. A etapa 2

A etapa 2 teve como principal objetivo confirmar conjecturas levantadas sobre a maneira de pensar dos alunos em relação às respostas dadas por eles ao questionário da etapa 1 anterior.

Em algumas oportunidades, quando da análise do questionário da etapa 1, não ficou claro que raciocínio alguns alunos utilizaram para responder às questões. Consideramos então que somente entrevistas individuais com esses alunos poderiam confirmar ou não as impressões deixadas por suas respostas e aprofundar nossas investigações. Em relação às entrevistas clínicas John Clement observa:

> Seus pontos fortes incluem a habilidade de coletar e analisar dados em processos mentais no nível de significados e idéias autênticas de um indivíduo, e expor estruturas e processos ocultos no pensamento do sujeito.
>
> (CLEMENT, 2000) tradução nossa

Mais especificamente:

> Mesmo quando a detecção de conhecimento acadêmico é solicitada, entrevistas clínicas podem dar mais informações sobre a profundidade dos entendimentos conceituais porque explicações orais e gráficas podem ser coletadas.
>
> (CLEMENT, 2000) tradução nossa

Temos consciência de que a participação de um número reduzido de alunos (ao todo foram cinco alunos entrevistados, como já foi dito) não possibilitou que verificássemos as respostas dadas por todos os alunos que participaram da etapa 1. Mas, ainda assim, as entrevistas foram de uma relevância enorme para nossas conclusões. Até porque muitas respostas duvidosas que continham as mesmas imprecisões e que demandavam maiores investigações foram dadas por mais de um aluno. Dessa forma, mesmo não entrevistando todos os alunos, esses tiveram uma boa representatividade em relação ao total.

As entrevistas semi-estruturadas possuíram algumas perguntas padrão, que foram feitas a todos os alunos entrevistados. Dependendo das respostas de cada aluno, outras perguntas foram feitas, ocasionalmente. Havia perguntas relacionadas com as questões do questionário respondido na primeira etapa e a forma como foram respondidas. Os entrevistados foram sempre estimulados a explicarem o raciocínio que os levaram a responder de determinada forma. As perguntas padrão serão mostradas no capítulo 7, dedicado às entrevistas.

QUADRO RESUMO DAS ETAPAS DE PESQUISA		
ETAPA	INSTRUMENTO	PARTICIPANTES
0	Estudo exploratório por meio de questionário	16 alunos de graduação em matemática da UFRJ
1	Questionário	33 alunos de graduação em matemática da UFRJ (diferentes dos que participaram da etapa 0)
2	Entrevistas clínicas	5 alunos que participaram da etapa 1

Tabela 3: Resumo das etapas, instrumentos e participantes.

3.4. A análise dos resultados

Vamos relatar nesta seção como foi realizada a análise dos resultados obtidos nas três etapas de pesquisa, devidamente esclarecidas na seção anterior.

Como já mencionamos anteriormente, optamos por uma análise qualitativa, em detrimento de uma análise pautada em dados estatísticos de natureza quantitativa. Nosso interesse era buscar ao máximo compreender as formas de raciocínio e as conexões utilizadas pelos alunos para responder às questões. Com isso, procuramos verificar a consistência de suas imagens de conceito e identificar conflitos, caso existissem.

Para os questionários, utilizamos categorização de repostas apenas para as questões 5 e 6 do estudo exploratório e para as questões 5, 6 e 7 do questionário da etapa 1, que explicaremos em tempo. Para as demais questões, expomos todos os tipos de respostas dadas, quantificando-as e exemplificando-as. Para as entrevistas, citamos as respostas dadas pelos alunos para as perguntas e comentários livres, em trechos ou integralmente, conforme conveniente. Após a exposição das respostas, tecemos comentários para cada uma das entrevistas realizadas, contendo nossas conclusões e impressões observadas à luz da teoria de imagens de conceito.

Para cada etapa foi dedicado um capítulo, a fim de que as análises e as conclusões posteriores fossem feitas de uma forma mais clara.

Capítulo 4

Etapa 0 - O estudo exploratório

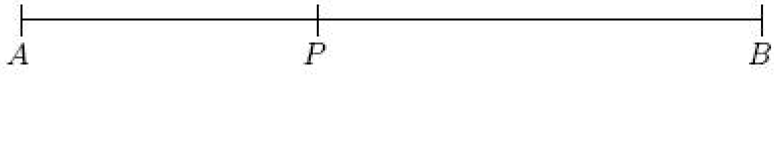
Como já foi dito no capítulo anterior referente à metodologia desta pesquisa, a primeira etapa, chamada por nós de etapa 0, consistiu em um estudo exploratório sob a forma de um questionário amplo aplicado à uma turma de Cálculo de Uma Variável II, na UFRJ, na qual todos os alunos eram de graduação em matemática.

Nem todos os alunos responderam todas as questões. Isso pode ter ocorrido devido ao tempo relativamente curto que foi fornecido. Contudo, acreditamos que não seja absurdo presumir que os alunos tendem a responder primeiro as questões que lhes são mais familiares, isto é, aquelas questões que eles pensam conseguir resolver mais facilmente. Portanto, a própria seleção feita pelos alunos das questões resolvidas pode se converter em um dado a ser analisado. Entretanto, é importante salientar que mesmo com o tempo consideravelmente curto, a maior parte dos alunos terminou de responder antes da chamada final para a entrega. Algumas questões foram respondidas por poucos alunos, incluindo aqueles que terminaram antes do tempo limite.

4.1. Resultados

Será apresentada a seguir a análise das questões. Como as questões 5 e 6 foram as únicas respondidas por uma parte significativa dos alunos, elas tiveram suas respostas categorizadas. As categorias e os detalhes da categorização serão expostos mais à frente.

Questão 1: ***A figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento l. A temperatura em um ponto P sobre o arame depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função $T(x) = x^2$. Determine a temperatura média do arame.***



Essa questão não foi respondida por nenhum aluno sequer. Isso pode significar que essa foi, para estes alunos, a questão mais difícil de todas. De fato, para a solução dessa questão, a integral definida se relacionava com a noção de somatório, e não de área.

Questão 2: ***Explique o que significa*** $\int_a^b f(x)dx$ ***(a integral definida da função*** f ***no intervalo [a,b]).***

A questão 2 foi respondida por 4 dos alunos do grupo. Destes, 3 definiram categoricamente $\int_a^b f(x)\,dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a,b]) como a área sob o gráfico de f, como mostram os seguintes exemplos de respostas:

"$\int_a^b f(x)\,dx$ é a área determinada pelo gráfico da função f(x), o eixo x e as retas x = a e x = b.";

"Com esta integral calculamos aproximadamente a área no intervalo de a até b".

Apenas um falou sobre limite da soma de Riemann, porém de uma maneira que pareceu decorada, pois a resposta continha uma notação demasiadamente cuidadosa e técnica, inconsistente com o restante das respostas dadas pelo aluno. Isso pode ser evidência de que o aluno está preso à definição formal que lhe foi passada, e que esta se encontra desconectada do restante de sua imagem de conceito.

Questão 3: ***Explique como é possível determinar se uma dada função*** f ***é ou não integrável em um intervalo [a,b] , isto é, se existe ou não a integral*** $\int_a^b f(x)dx$ **.**

A questão 3 foi respondida por apenas 3 alunos e todos eles responderam também a questão 2. Destes, 2 deles responderam que é suficiente saber se a dada função é ou não contínua. Uma das respostas dadas foi:

"O critério suficiente é a continuidade da função neste intervalo".

Um outro aluno deu uma resposta que segue uma outra linha:

"Primeiro, integra a função utilizando um dos métodos de integração, e depois, utiliza-se a segunda parte do Teorema Fundamental do Cálculo".

A segunda resposta nos mostra que o aluno acredita que para determinar se uma função é integrável ou não, deve-se aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo, que ele parece conhecer ao menos superficialmente. Se no final chega-se a um resultado utilizando o algoritmo, então a função é integrável. Caso contrário, não é.

Questão 4:

a) Dê um exemplo de uma função integrável em um intervalo [a,b], isto é, tal que exista a integral $\int_a^b f(x)dx$.

b) Dê um exemplo de uma função não integrável em um intervalo [a,b], isto é, tal que não exista a integral $\int_a^b f(x)dx$.

A questão 4 foi respondida por uma quantidade maior de alunos. Dez alunos responderam o item (a). Destes, 9 deram exemplos aceitáveis. A maioria de funções polinomiais. Alguns exemplificaram com função exponencial ou trigonométrica simples, como f(x) = cos x. Apenas 1 não forneceu um exemplo plenamente satisfatório. Um dos alunos escolheu f(x) = $\frac{1}{x}$, mas não especificou o intervalo [a,b] que, além de ter sido pedido no enunciado da questão, seria importante nesse caso, uma vez que esta função não está definida para x = 0.

Apenas 5 alunos deram algum exemplo para o item (b), e todos incorretos. Um deles forneceu como exemplo f(x) = $\frac{1}{x-1}$ num intervalo [a,b] (que supomos ser qualquer). Isso pode indicar que, para esse aluno, descontinuidade em um ponto torna a função não integrável. Pode haver confusão no que diz respeito à continuidade como condição suficiente, porém não necessária para que uma função seja integrável. Dois outros alunos escolheram como exemplo f(x) = tg x, que apesar de não ser um caso simples, é absolutamente integrável.

Como dito anteriormente, as questões 5 e 6 foram as únicas categorizadas. Essa categorização foi feita de maneira semelhante à encontrada em RASSLAN & TALL (2002). Para cada uma das questões, são expostas as categorias, cada uma delas acompanhadas da quantidade de alunos incluídos, em relação ao total de alunos que responderam à questão, além de alguns exemplos característicos das respostas dadas. As categorias são as seguintes:

I. Teoria de integração correta com resposta correta.

II. Teoria de integração correta com resposta incorreta devido a outro tipo de erro (como erros aritméticos ou no traçado de gráficos).

III. Teoria de integração incorreta.

Questão 5: ***Em cada um dos casos, encontre a área pedida.***

(a) ***Entre o eixo x, as retas*** $x = 0$ ***e*** $x = 2\pi$ ***e a curva*** $y = sen(x)$**.**

A questão foi respondida por 10 alunos. Segue o número de respostas encontradas em cada categoria:

I. 2 respostas.

II. 1 resposta:

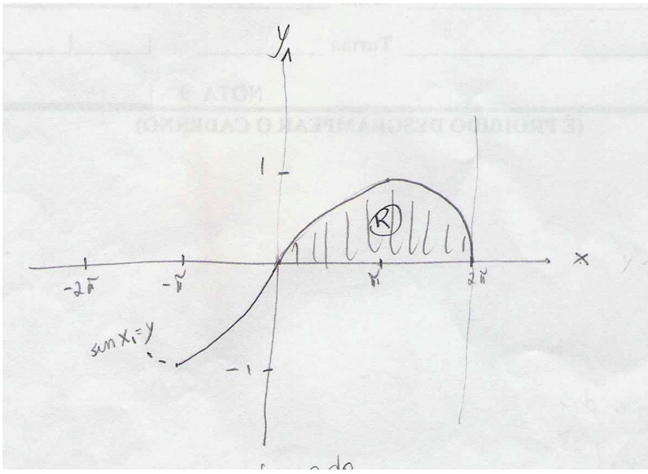


Figura 2. Gráfico desenhado por um aluno.

III. 7 respostas. Destas, 4 não consideraram o sinal da função no intervalo. Exemplo:

$$\int_0^{2\pi} senx\, dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos(0) + \cos(2\pi) = 0\,.$$

Outras 3 cometeram outro tipo de erro. Exemplo:

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} senx - (-1)\, dx\,.$$

(b) ***Entre o eixo x, as retas*** $x = 0$ ***e*** $x = 2$ ***e a curva*** $y = x^2 - 5x + 6$**.**

A questão foi respondida por 12 alunos.

I. 7 respostas.

II. 5 respostas. Um destes participantes não fez nenhum cálculo, apenas fez o desenho da área a ser encontrada no gráfico. Não é possível afirmar que o aluno deixou de fazer os cálculos por não saber. Os demais erros ocorreram por falhas na aplicação do algoritmo ou por erros aritméticos. Exemplo:

$$\int_0^2 x^2 - 5x + 6\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6\Big|_0^2 = 6 - \frac{8}{3} + \frac{40}{2} + 6 = \frac{88}{3}$$

III. Nenhuma resposta.

(c) ***Entre o eixo x, as retas*** $x = -1$ ***e*** $x = 3$ ***e a curva*** $y = x^2 - 5x + 6$.

A questão foi respondida por 10 alunos.

I. Nenhuma resposta.

II. 1 resposta. O participante não fez nenhum cálculo, apenas fez o desenho da área a ser encontrada no gráfico. Não é possível afirmar que o aluno deixou de fazer os cálculos por não saber.

III. 9 respostas. Todos esses erros ocorreram pela não consideração da variação de sinal da função no intervalo pedido. Exemplo:

$$\text{área} = \int_{-1}^{3} x^2 - 5x + 6\, dx$$

(d) ***Entre o eixo x, as retas*** $x = -1$ ***e*** $x = 2$ ***e a curva*** $y = |x|$.

A questão foi respondida por 6 alunos.

I. 2 respostas. Exemplo:

$$\text{área} = \int_{-1}^{0} -x\, dx + \int_0^2 x\, dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^2 = -\left(-\frac{1}{2}\right) + 2 = \frac{5}{2}.$$

II. 1 resposta:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-1}^{0} -x\, dx = -\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \displaystyle\int_0^3 x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 0 = \frac{27}{2} \end{array}\right\} \text{Área} = \frac{1}{2} + \frac{27}{2} = \frac{28}{2} = 14.$$

III. 3 respostas. Todos cometeram o mesmo erro. Calcularam a integral como se fosse $f(x)=x$, simplesmente ignorando o sinal de módulo. Exemplo:

$$\text{área} = \int_{-1}^{2} |x|\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

(e) ***Entre o eixo x, as retas*** $x=0$ ***e*** $x=2$ ***e a curva y =*** $\begin{cases} x & se\ x<1 \\ 2-x & se\ x\geq 1 \end{cases}$**.**

A questão foi respondida por 6 alunos.

I. 3 respostas.

II. 1 resposta:

$$\int_0^1 x\, dx + \int_1^2 2-x\, dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + 2x - \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{1}{2}+4-2-1+\frac{1}{2} = 2.$$

III. 2 respostas. Exemplo:

$$\text{A} = \int_0^2 -x+(2-x)\, dx = \ldots$$

(f) ***Entre o eixo x, as retas*** $x=0$ ***e*** $x=3$ ***e a curva*** $y=[x]$***, onde*** $[x]$ ***denota a parte inteira do número real*** x**.**

Nenhum aluno respondeu a questão.

No quadro abaixo, vemos um resumo de número de respostas classificadas em cada uma das categorias, para item da questão 5.

Itens	Total de Respostas	Categorias		
		I	II	III
(a)	10	2	1	7
(b)	12	7	5	0
(c)	10	0	1	9
(d)	6	2	1	3
(e)	6	3	1	2
(f)	0	0	0	0

Tabela 4: Resumo das categorias de respostas da questão 5

Questão 6: ***Em cada caso abaixo, verifique se a função f dada é integrável, justificando sua resposta. Em caso afirmativo, encontre a integral pedida.***

Para esta questão, estamos considerando respostas com erro na teoria de integral (categoria III) aquelas que apresentam erro no algoritmo ou na afirmação sobre a integrabilidade.

(a) $f(x) = senx$ **,** $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ **.**

A questão foi respondida por 13 alunos. Segue o número de respostas encontradas em cada categoria.

I. 2 respostas.

II. 5 respostas. Todos os erros encontrados neste item ocorreram por falha no cálculo do valor numérico de f(x) = cosx. Exemplo:

$$\int_0^{2\pi} senx\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2$$

III. 6 respostas.

$$\int_0^{2\pi} senx\,dx = \cos x\Big|_0^{2\pi} = \cos(2\pi) - \cos(0) = 1 - 1 = 0$$

(b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **,** $\int_0^{2} f(x)\,dx$ **.**

A questão foi respondida por 13 alunos.

I. 7 respostas.

II. 4 respostas. Exemplo:

$$\int_0^{2} x^2 - 5x + 6\,dx = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6\Bigg|_0^{2} = \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 = \frac{58}{3}.$$

III. 2 respostas. Um dos alunos afirmou que a função não é integrável, mas não forneceu nenhuma justificativa. Exemplo:

$$\int_0^{2} x^2 - 5x + 6\,dx = (2(2) - 5) - (2(0) - 5) = -1 + 5 = 4$$

(c) $f(x)=|x|$, $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$.

A questão foi respondida por 12 alunos.

I. 2 respostas.

II. Nenhuma resposta.

III. 10 respostas. Exemplo:

$$\int_{-1}^{2} |x|\,dx = \int_{-1}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2} = \frac{2^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = \frac{3}{2}$$

(d) $f(x)=[x]$, $\int_{0}^{3} f(x)\,dx$.

A questão foi respondida por 6 alunos.

I. Nenhuma resposta

II. Nenhuma resposta.

III. 6 respostas. Duas delas foram de alunos que afirmaram que a função não é integrável. Os outros 4 cometeram o erro de calcular a integral como se a função fosse f(x) = x.. Exemplo:

$$\int_{0}^{3} [x]\,dx = \int_{0}^{3} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{3} = \frac{3^2}{2} - \frac{0}{2} = \frac{9}{2}$$

(e) $f(x)=\begin{cases} 1 & se\ x=1 \\ 0 & se\ x\neq 1 \end{cases}$. $\int_{1}^{2} f(x)\,dx$.

A questão foi respondida por 2 alunos.

I. Nenhuma reposta.

II. Nenhuma resposta.

III. 2 respostas. Um dos alunos afirmou que a função é integrável, mas não justificou. Exemplo:

$$\int_{1}^{2} f(x)\,dx = 0-1=-1.$$

(f) $f(x)=\begin{cases} 0 & se\ x\in Q \\ 1 & se\ x\notin Q \end{cases}$, $\int_{0}^{1} f(x)\,dx$:

Nenhum aluno respondeu.

No quadro abaixo, vemos um resumo de número de respostas classificadas em cada uma das categorias, para item da questão 6.

Itens	Total de Respostas	Categorias		
		I	II	III
(a)	13	2	5	6
(b)	13	7	4	2
(c)	12	2	0	10
(d)	6	0	0	6
(e)	2	0	0	2
(f)	0	0	0	0

Tabela 5: Resumo das categorias de resposta da questão 6

Questão 7: ***Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por*** $f(x)=\begin{cases} 0 & se\ x\in Q \\ 1 & se\ x\notin Q \end{cases}$.

Leia atentamente o seguinte argumento: consideremos $0=x_0<\ldots<x_n=1$ uma partição qualquer do intervalo $[0,1]$, isto é, uma subdivisão de $[0,1]$ em subintervalos menores. Qualquer que seja o subintervalo $[x_i,x_{i+1}]$, temos que o mínimo da função f em $[x_i,x_{i+1}]$ é igual a 0 e o máximo da função f em $[x_i,x_{i+1}]$ é igual a 1.

O que se pode concluir, com respeito à integral de f no intervalo $[0,1]$ com base neste argumento? Justifique sua resposta.

Esta questão teve efeito semelhante à questão 1 e foi respondida por somente um aluno, que o fez de forma errada. Ele utilizou como justificativa apenas o fato de a função não ser contínua no intervalo, mas fez de forma muito precária. Além disso, mostrou confusão no que diz respeito ao fato de que continuidade é uma condição suficiente, porém não necessária para que uma função seja integrável.

Questão 8: ***Você saberia dar uma definição formal para a integral definida de uma função real f?***

Apenas um aluno respondeu essa questão, mas de uma forma obscura, mostrando muita confusão para fazer uso do formalismo. É importante esclarecer que esta questão e a questão 2 possuem aspectos diferentes, apesar de envolverem a mesma idéia. Nesta questão 8, o que é pedido é uma definição baseada no formalismo, ou seja, uma definição de acordo com o que a comunidade entende por formalmente correto. Enquanto que na questão 2, o aluno deve responder usando suas idéias, como uma explicação, livre de qualquer formalismo.

4.2. Discussão

Faremos agora alguns comentários sobre os resultados obtidos em cada questão, de acordo com nossa interpretação.

A questão 1 não foi respondida por nenhum aluno. Acreditamos que isso pode ter ocorrido por se tratar de uma questão em que a teoria de integral definida não está ligada à noção de área. Nesse caso, a integral funcionaria como uma ferramenta para um "somatório infinito" dos valores da função em cada um dos pontos do arame. Parece plausível acreditar que esta idéia de integral não faz parte da imagem de conceito desses alunos, embora, como já foi dito, a professora tenha introduzido a teoria através de somas de Rieman. A única idéia que parece estar presente é a de área.

Sobre a questão 2, como já mencionado anteriormente, apenas um aluno deu uma resposta baseada na teoria de soma de Riemann (mesmo assim, de forma que pareceu memorizada). Os outros que responderam fizeram, de alguma forma, referência à área. Por outro lado, é importante chamar atenção para o número muito baixo de alunos que tentou dar alguma resposta. Este resultado se torna ainda mais contundente se considerarmos que a questão é uma das primeiras questões a serem lidas (é a segunda na ordem do questionário) e possui enunciado relativamente simples e curto. Mesmo assim foi deixada sem resposta por três quartos do grupo.

Isto sugere que a definição de conceito desses alunos (se é que há uma) não está conectada com o restante de suas imagens de conceito de integral e, portanto não figura como um atributo ativo para o pensamento matemático, o que pode gerar uma sensação de insegurança que os leva a não responder. Isto é apontado por TALL & VINNER (1981) como uma importante fonte de conflitos cognitivos. Para estarmos certos desta conclusão, será necessária uma pesquisa mais aprofundada, envolvendo entrevistas clínicas individuais. Fato semelhante foi verificado em (GONZÁLEZ-MARTÍN & CAMACHO, 2004), quando uma questão praticamente idêntica (diferindo apenas por algumas palavras no enunciado) teve um índice bastante alto de respostas que mencionavam o uso da integral para cálculo de áreas. Esse resultado também se assemelha ao encontrado em (RASSLAN & TALL, 2002), quando cerca de 64% dos alunos não responderam a uma questão bastante semelhante.

Para a questão 3 houve 3 respostas. Duas delas afirmavam ser a continuidade da função no intervalo um critério para garantir se a dada função é integrável ou não, o que é incorreto, haja vista que a continuidade é uma condição suficiente, mas não necessária para integrabilidade. A outra resposta mostra que a parte teórica do conceito não foi apreendida, já que, para o aluno em questão, o critério a ser usado é conferir se a aplicação do algoritmo resulta em algum valor. Essa resposta, aliada à grande quantidade de alunos que não responderam, nos leva a acreditar que a compreensão do conceito de integral definida, quando ocorre, se dá apenas em nível procedimental. A maioria dos alunos que não responderam esta questão responderam as questões 5 e 6, de caráter mais prático.

O item (a) da questão 4 mostra que na prática muitos alunos sabem exemplificar funções integráveis. Apesar de os exemplos citados serem em sua maioria de funções consideradas mais comuns, o fato é que a experiência dos alunos com integração, se não é excelente, é pelo menos básica. Já o item (b) mostra o contrário em relação às funções não integráveis. Todos os alunos que exemplificaram o fizeram de forma errada. É interessante notar que dois deles deram como exemplo a função $tg(x)$, porém sem especificar o intervalo de integração. A integral dessa função existe e, qualquer intervalo $[a,b]$ em R, no entanto seu cálculo não pode ser considerado simples. Em comunicação pessoal com a professora, ficou esclarecido que essa função foi trabalhada em sala de aula. Outro exemplo importante a ser discutido é o da função $f(x) = \frac{1}{x-1}$. O aluno não precisou o intervalo $[a,b]$ de integração. Ainda assim, parece claro que a possível descontinuidade no ponto $x = 1$ foi o que motivou o aluno a escolher essa função como exemplo de função não integrável. Como já foi dito, pode haver confusão sobre a continuidade da função ser suficiente, mas não necessária para que a integral exista.

De qualquer forma, a imagem de conceito desses alunos parece estar bastante carente de exemplos de funções não integráveis. Os alunos não parecem ter contato com funções menos “comportadas”, sejam elas integráveis ou não. Ao encontro disso, a falta de uma definição de conceito coerente com a definição formal, pode colaborar também para o mal resultado nessa questão, já que uma definição de conceito consistente é um bom critério na busca de exemplos e contra-exemplos.

Em relação à questão 5, faremos uma discussão sobre cada item. No item (a), é interessante mencionar que a maioria dos alunos inclusos na categoria III encontrou resposta zero, o que significaria que a área seria nula. Destes, metade fez o gráfico, que mostrava claramente o contrário. De fato, apenas 3 dos 10 alunos que resolveram esse item tiveram a iniciativa de desenhar o gráfico (o outro foi classificado na categoria I). O baixo índice de acertos, assim como o índice dos que desconsideraram o sinal da função no intervalo, é semelhante ao encontrando em (RASSLAN & TALL, 2002) para uma questão idêntica.

No item (b) é possível perceber que quando o cálculo da área coincide com o cálculo algébrico da integral, isto é, quando a função é positiva no intervalo, não parece haver problemas sérios para os alunos. É importante ressaltar que apenas dois dos alunos que responderam fizeram o gráfico, ambos da categoria I. Já no item (c), o fato marcante é que nenhum aluno apresentou a teoria correta de integração. Mesmo sendo semelhante ao item anterior, que teve bom índice de acertos, o resultado foi quase o oposto. Parece bastante plausível concluir que a idéia de que o cálculo da integral $\int_a^b f(x)dx$ fornece sempre a área a ser calculada está completamente enraizada. Além disso, nenhum dos alunos das categorias I e II desenhou o gráfico, o que ajuda a explicar o fato de nenhum deles ter atentado para a variação de sinal da função.

O que é interessante notar no item (d) é que apenas 6 alunos do grupo tentaram responder, o que mostra que a função módulo causa algum desconforto. Isto provavelmente ocorre porque a função módulo é pouco familiar para os alunos, ou pelo menos não faz parte do repertório de funções cujas integrais definidas podem ser obtidas pela aplicação direta do algoritmo (Teorema Fundamental do Cálculo). De fato, apenas um aluno fez o gráfico da função (o que teria facilitado, já que a área a ser encontrada se resume à soma das áreas de dois triângulos retângulos), mas nem mesmo este tentou responder usando o desenho exclusivamente. Todos os alunos precisaram recorrer ao algoritmo.

No caso do item (e), podemos supor que a falta de experiência com funções definidas por duas sentenças seja uma explicação para o baixo número de alunos que apresentaram alguma resposta. Somente um aluno (classificado na categoria II) desenhou o gráfico que deixa claro que a área pedida poderia ser calculada usando somente áreas de triângulos.

Isto confirma a conclusão sobre a quase completa ausência de estratégias por parte dos alunos para lidar com funções que escapem de seu repertório usual. Da mesma forma que na questão anterior, todos que deram alguma resposta, o fizeram recorrendo ao algoritmo.

Os resultados dos itens (d) e (e) são confirmados também pelo do item (f). Assim, não é surpreendente que nenhum aluno tenha tentado resolvê-lo. Isto mostra que os alunos não estão habituados a exemplos menos comuns, mesmo que estes não ofereçam grandes dificuldades de cálculo, como é o caso aqui. Mais uma vez, o gráfico teria tornado a tarefa fácil.

Os três últimos itens mostram a necessidade de questionar os alunos que participarão das entrevistas sobre o que eles sabem de funções, para que se possa incluir na análise de resultados quais obstáculos são adquiridos com o conceito de integral e quais são trazidos da formação anterior.

Para a questão 6, os 4 primeiros itens se referiam a funções que já estavam presentes na questão 5, inclusive com o mesmo intervalo de integração. Foi feito dessa forma porque era nosso interesse verificar a relação entre cálculo da área e cálculo da integral para esses alunos. Faremos algumas comparações entre os itens análogos.

O item (a) apresentou um alto número de respostas, o que também o correu no item análogo da questão 5. As funções trigonométricas simples, como essa, são bastante presentes nos cursos de cálculo. É provável que esse grande número de respostas se deva a este fato. Porém, de todos os 13 alunos que responderam, apenas um deu uma justificativa para o fato de a função ser integrável, dizendo: “É integrável, pois $f(x) = sen(x)$ é contínua”. Este aluno foi um dos dois cuja resposta se encontra na categoria I. Todas as respostas incorretas inclusas na categoria III ocorreram por erros no cálculo da função primitiva. É possível que a falta de justificativa de alguns alunos tenha ocorrido por acreditarem que o fato de terem conseguido chegar a uma resposta final com o uso do algoritmo deixa implícito que a função é integrável. Entretanto não há possibilidade de garantir esta afirmação. Será necessária uma investigação mais aprofundada.

Em relação ao item (b), o resultado foi muito semelhante ao item (b) da questão 5, que fazia referência à mesma função. Era esperado que esse fato ocorresse, uma vez que as duas questões são resolvidas exatamente da mesma forma. Como a função é positiva no intervalo, na questão 5, o cálculo da área se resume à aplicação imediata do algoritmo, como já foi dito. Isso reforça o que já havia sido concluído anteriormente sobre o fato de que quando o cálculo da área se limita à direta aplicação do algoritmo, os alunos parecem ser mais eficazes. Principalmente em relação a funções mais simples, como é o caso da polinomial. A observar que apenas um aluno, da categoria I, justificou o fato de a função ser integrável dizendo: "*É integrável, pois um polinômio é contínuo em toda a reta*". E um dos alunos afirmou que a função não é integrável. Esse aluno não havia respondido o item (b) da questão 5.

O item (c) é análogo ao item (d) da questão 5 e, ao contrário do que ocorreu neste último, houve um número expressivo de alunos que tentaram responder. Apesar disso, apenas 2 dos 12 alunos que responderam fizeram corretamente. Todos os outros erraram e, na maioria das vezes, por calcular a integral para $f(x) = x$ em lugar de $f(x) = |x|$. Apenas um aluno afirmou que a função não é integrável. A justificativa foi: "*Não é integrável, pois* $f(x) = |x|$ *é descontínua quando* $x \to 1$ *pois* $\lim_{x \to 0^-} |x| \neq \lim_{x \to 0^+} |x|$". Essa justificativa mostra desconhecimento das teorias de limite e de continuidade de funções. Como de todos os alunos que resolveram, apenas um respondeu se a função era integrável ou não, o que foi dito anteriormente sobre uma possível explicação para a não justificativa dos alunos fica reforçado. Os alunos podem ter considerado ser suficiente resolver a integral para mostrar que a função era integrável.

No item (d), que era semelhante ao item (f) da questão 5, houve poucas respostas. Embora esse número seja superior ao encontrado na questão 5 (nenhum aluno respondeu), todos os alunos erraram na teoria de integral. Dois responderam que a função não era integrável. Isso pode ter ocorrido por se tratar de uma função incomum, com a qual os alunos possivelmente nunca tiveram contato. Os outros que tentaram dar alguma resposta o fizeram utilizando a função $f(x) = x$, desconsiderando totalmente a notação de parte inteira. Fica claro mais uma vez que essa função não faz parte da imagem de conceito dos alunos.

Já o item (e) foi respondido por apenas dois alunos, todos de forma errada. Um deles afirmou que a função não é integrável, mas não justificou. O outro parece ter tentado aplicar o algoritmo, mas o fez de maneira incompreensível. Esse resultado reforça o que já havia sido dito sobre potenciais fontes de conflito causadas pela idéia restrita da noção de área que não se generalizam para o contexto do cálculo. Essa função foi dada como exemplo dessas fontes de conflito. Nesse caso, geometricamente parece não haver nenhuma área a ser calculada. Isso pode ter levado os alunos a afirmar que não existe a integral definida para esta função, isto é, que ela não é integrável. O que não é verdade, pois existe é igual a zero.

Outra função que pode gerar conflitos é a do item (f). Já era esperado que poucos alunos respondessem, mas acreditávamos que pelo menos alguns dos alunos a conhecessem, uma vez que esta é uma função que constitui um exemplo clássico de função não integrável. Mesmo que não soubessem formalmente quais são os motivos que fazem com que a integral dessa função não exista. Isso reforça a afirmação de que a imagem de conceito desses alunos é bastante restrita a exemplos mais comuns e menos patológicos.

Capítulo 5
Etapa 1 – O questionário

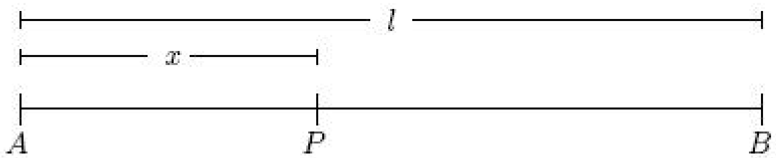
O questionário referente à etapa 1 da metodologia de pesquisa foi aplicado a alunos de turmas da disciplina Fundamentos da Matemática III, na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), no 1° semestre de 2008, nas próprias salas de aula das turmas. Essa disciplina tem como pré-requisito o curso concluído de Cálculo I (curso onde são apresentadas as teorias de limite, derivada e integral, entre outras noções fundamentais do cálculo).

Trinta e três (33) alunos participaram da etapa 1. No entanto, dois alunos tiveram seus questionários desconsiderados, pois não desenvolveram a tarefa com seriedade, inclusive se ausentando da sala por longo tempo, e um deles entregou o questionário praticamente em branco. Portanto, em consideração, trinta e um (31) alunos. Todos foram identificados por números de 1 a 33, para facilitar as análises e discussões. Os alunos que foram desconsiderados são os de números 22 e 23.

A seguir, vamos expor os resultados apurados das respostas dadas pelos alunos.

5.1. Resultados

Questão 1: A figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento l. A temperatura em um ponto P sobre o arame depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função T(x) = x². Determine a temperatura média do arame



22 alunos responderam (todos, exceto alunos 1, 2, 3, 10, 16, 21, 29, 30 e 31)

Respostas corretas: 7 alunos (6, 7, 8, 12, 13, 25, 27)

Exemplo:

"AB = l   AP = x   T(x) = x²

$$\int_{o}^{l} x^2 \, dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{x=0}^{l} \Rightarrow T_m = \frac{\frac{l^3}{3}}{l} = \frac{l^2}{3}.$$ *"* (aluno 7)

Os outros quinze alunos cometeram erros variados. O mais comum foi calcular apenas a integral de x^2 e considerar o resultado como a temperatura média do arame (aluno 5). Oito alunos fizeram isso. Dentre os outros sete alunos, há aqueles que até parecem ter percebido a necessidade de dividir o resultado da integração de x^2, mas efetuaram a divisão por 2 e não por l. Um outro aluno tentou resolver de alguma forma a questão, mas não conseguindo, escreveu que não lembrava como fazer. O restante cometeu erros diferentes, mas sem nenhum padrão.

Questão 2: Explique, com suas palavras, o que significa $\int_a^b f(x)dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a,b]).

26 alunos responderam (todos, exceto 1, 2, 27, 29 e 30)

Dezenove alunos fizeram referência direta à área, como mostram os seguintes exemplos de respostas dadas:

"Pelo princípio fundamental do cálculo,

a integral vai determinar uma certa área." (aluno 4)

"$\int_a^b f(x)\,dx = A$ (Área sob a curva)." (aluno 12)

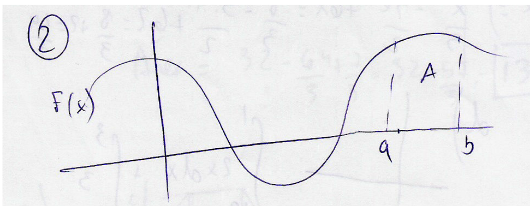


figura 2: Desenho feita pelo aluno 12 para a questão 2

"Área abaixo do gráfico de f(x) entre a e b." (aluno 24)

"$\int_a^b f(x)\,dx$ definida no intervalo [a,b] corresponde ao valor da área compreendida, no plano cartesiano, entre o gráfico de f(x) e o intervalo [a,b]." (aluno 32)

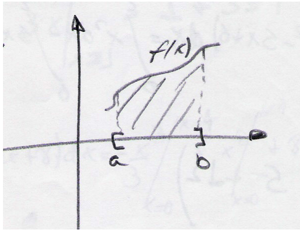


figura 3: Desenho feito pelo aluno 32 para a questão 2.

"Calcular a área sob o gráfico de f(x), no intervalo de $a \leq x \leq b$*."* (aluno 33)

Alguns desses alunos parecem se preocupar em dar explicações mais completas, utilizando termos mais formais e conceitos ligados à teoria de integral, como o Teorema Fundamental do Cálculo, bem como desenhos. Outros se limitam à respostas imediatas, usando apenas algumas palavras.

Somente um aluno mencionou a soma de Riemann, mas o fez depois de afirmar que a integral definida era área:

"A integral $\int_a^b f(x)\,dx$ *significa a área da curva f(x) no intervalo [a,b] que pode também ser calculada pelo limite da soma de Riemann."* (aluno 3)

Dentre os outros sete alunos, encontram-se dois que deram respostas que não faziam referência à área (alunos 6 e 14). Essas respostas continham termos mais específicos como partições, soma superior e soma inferior. Uma delas foi:

"Quando a $\int_a^{\bar{b}} f(x)dx \neq \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx$*, dizemos que f é integrável. Basicamente, o problema da integralização surge na impossibilidade do cálculo de áreas com extremidades curvas.*

Precisamos através disso criar uma partição do intervalo onde definimos a função e aproximamos ao máximo da extremidade. Deste modo, definimos que $f:[a,b] \rightarrow R$ *é integrável, s.s.s.,a soma das áreas superiores for idêntica a soma das áreas inferiores, quando diminuímos, ou refinamos, ao máximo a dada partição."* (aluno 6)

Os outros cinco alunos deram respostas que não podem ser consideradas corretas, como esta:

"$\int_a^b f(x)\,dx$ *distância entre 2 pontos no intervalo dado."* (aluno 9).

Questão 3: Explique, com suas palavras, como é possível determinar se uma dada função f é ou não integrável em um intervalo $[a,b]$, isto é, se existe ou não a integral $\int_a^b f(x)dx$.

22 alunos responderam (todos exceto alunos 1, 2, 9, 10, 13, 19, 29, 30 e 31)

Onze alunos (4, 7, 11, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 26, 33) responderam considerando a continuidade da função no dado intervalo o critério para decidir se uma determinada função é ou não integrável, como mostram os seguintes exemplos de respostas:

"De acordo com o intervalo [a,b]. Para existir a integral $\int_a^b f(x)dx$, a função f(x) tem que ser contínua no intervalo [a,b]." (aluno 16)

"Ela é integrável se for contínua em todo o intervalo [a,b]." (aluno 18)

"Se a função for contínua no intervalo, existe integral." (aluno 12)

Dos outros onze alunos, quatro deram respostas que levam em consideração não se a função é contínua ou não é, mas sim o número de pontos de descontinuidade (alunos 5, 14, 17 e 27), como os exemplos:

"Uma função é integrável se ela só é descontínua em um número finito de pontos." (aluno 5)

"f $\in$ [a,b] é integrável se e somente se o conjunto dos pontos de descontinuidade do domínio [a,b] possui medida nula". (aluno 27)

"(...) A questão da descontinuidade deve ser levada em consideração, tendo, desta maneira, que recorrermos ao conjunto dos pontos que tenha medida nula, ou seja, é enumerável, uma possibilidade para 'integralização'." (aluno 14)

Dois alunos deram respostas que levavam em consideração outros critérios. São elas:

"Uma função é integrável se a soma superior (S) é igual à soma inferior (s)." (aluno 8)

"Caso básico é contrariando a definição, onde $\int_{a}^{{}^{-}b} f(x)\,dx \neq \int_{a_{-}}^{b} f(x)\,dx$ *(...)"*. (aluno 14)[4]

Os seis alunos restantes deram respostas que não podem ser consideradas corretas, por serem vagas ou desprovidas de sentido, como:

"Para existir basta que o intervalo [a,b] seja coerente com o domínio de f." (aluno 6)

"Se $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$ *não for definido."* (aluno 28)

"Se for possível calcular o limite no intervalo 'a' e 'b'." (aluno 21)

Questão 4(a) : Dê um exemplo de uma função integrável em um intervalo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$, isto é, tal que exista a integral $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$.

27 alunos responderam (todos exceto alunos 1, 3, 9 e 30)

Todos os alunos deram exemplos corretos de funções integráveis em um determinado intervalo. A grande maioria exemplificou com funções polinomiais de graus 1 ou 2. Apenas três alunos fizeram de forma diferente. Dois exemplificaram com a função *sen(x)*, no intervalo *[0,2π]* e um, com a função $|x|$, mas não mencionou o intervalo de integração.

Questão 4(b): Dê um exemplo de uma função não integrável em um intervalo $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ isto é, tal que exista a integral $\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$.

21 alunos responderam (todos exceto alunos 1, 3, 4, 9, 10, 13, 18, 21, 29 e 30).

Treze alunos forneceram exemplos corretos, a maioria (7 deles) de funções racionais em um intervalo conveniente, como os exemplos que seguem:

"$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *[0,2]* $\int_{0}^{2} \dfrac{1}{x^2}\,dx$." (aluno 2)

[4] A resposta dada pelo aluno 14 foi dividida para que pudesse ser vista em duas situações de respostas diferentes. Deve ficar claro, no entanto, que as duas partes compõem a totalidade da resposta dada, não havendo nenhum trecho omitido.

"Seja o intervalo [0,3], e $f(x)=\dfrac{x}{x-2}\rightarrow\int_0^3\dfrac{x}{x-2}dx$ *."* (aluno 20)

" $f(x)=\dfrac{1}{x}$*, [-1,1]."* (aluno 33)

Nenhum desses alunos fez qualquer comentário sobre a sua escolha. Apenas dois (alunos 7 e 24), que exemplificaram com a função *f(x) = 1/x* em *[0,1]*, resolveram a integral e mostraram que o resultado era divergente, embora para isso, tenham utilizado conceito de integral imprópria.

Ainda dentre os onze, três deram um dos exemplos clássicos de função não integrável, que é *f(x) = 0*, quando x é irracional e *f(x) = 1*, quando x é racional. Diferiram apenas no intervalo, um pôs em *[0,1]*, o outro em *[-2,2]* e o terceiro não colocou intervalo algum. Outros dois deram exemplos semelhantes, são eles:

" $f(x)=\begin{cases}0, & x\in R\setminus Q\\ x^2, & x\in Q\end{cases}$ *só é contínua no zero, logo não é R – integrável."* (aluno 5)

" $f(x)=\begin{cases}x^3, & x\in R\setminus Q\\ 0, & x\in Q\end{cases}$ *descontínua em todos os pontos do seu domínio."* (aluno 14)

Apenas um aluno (aluno 19) escreveu uma função menos comum, que foi *f (x)* = e^{x^2} em *[2,3]*. Esta função é integrável, apesar de sua primitiva não poder ser expressa analiticamente. Isto é, é possível mostrar que essa função é integrável através de limites das somas superior e inferior, mas não é possível exibir uma primitiva. Talvez tenha sido esse o motivo que levou o aluno a considerar que a função é não integrável. Uma vez que a primitiva não pode ser expressa de forma analítica, não é possível utilizar o Teorema Fundamental do Cálculo para determinar o valor da integral. Daí então considerar que a integral não existe. Esse caso mostra como o conceito de integral está sendo considerado como apenas um procedimento, livre de compreensão conceitual.

Portanto, 8 alunos não tiveram suas repostas consideradas corretas, por diferentes razões. Em dois casos (alunos 11 e 26), a função dada como exemplo foi *f(x) = 1/x*, mas sem intervalo de integração especificado, o que é imprescindível para exemplos como esse, de funções racionais. Outro aluno (aluno 32) também deu o mesmo exemplo, mas no intervalo $[0,+\infty]$.

Dois alunos (alunos 28 e 31, respectivamente) deram como exemplo funções integráveis nos respectivos intervalos, a saber, a função *f(x) = 1, se x < 1 e f(x) = 2, se x > 1*, no intervalo *[0,2]*, e a função *f(x)* = $|x|$, no intervalo *[-1,1]*. Acreditamos que o que motivou a escolha da primeira função foi o fato de a mesma não estar definida no ponto x = 1. Há também uma descontinuidade em forma de "escada", que poderia influir, na concepção do aluno, na existência da integral. O que não ocorre com a função *módulo de x*, também citada, pois é uma função contínua, freqüentemente trabalhada nos cursos de cálculo. Podemos supor que o fato de a função não ser diferenciável em um ponto pode ter causado alguma confusão ao aluno. Não encontramos outras justificativas, até porque se tratam de funções simples.

A função módulo de x também dada como exemplo de função não integrável

Os três alunos restantes deram as seguintes respostas erradas:

"*f(x)* = $\sqrt{x}$, $\int_a^b \sqrt{x}\,dx$ *pode ou não existir, dependendo de a e b.*" (aluno 6)

"*F(x) = i + 1.*" (aluno 12)

"$\int_0^0 x\,dx$." (aluno 16)

Questão 5: Em cada um dos casos abaixo, encontre a área pedida.

Para todos os itens da questão 5, consideramos duas categorias de respostas: I – teoria correta de integral, e II – teoria incorreta de integral. Não foram considerados os cálculos, e sim a modelagem da integral a ser determinada, conforme o caso. Portanto, se um aluno hipotético escreveu a integral com os limites de integração de maneira correta, mas errou em algum ponto no desenvolvimento, ele foi inserido na categoria I. As respostas finais só foram consideradas quando conveniente. No final desta seção há uma tabela que indica as questões que foram respondidas por aluno.

Questão 5(a): Entre o eixo x, as retas $x = 0$ e $x = 2\pi$ e a curva $y = sen(x)$.

27 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 12 alunos (11, 12, 15, 16, 17, 19, 24, 25, 27, 29, 31 e 33).

Exemplos:

" $A = A_1 + (-A_2)$

$A_1 = \int_0^{\pi} sen(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = 1 + 1 = 2$

$A_2 = \int_{\pi}^{2\pi} sen(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -1 - 1 = -2$

$A = 2 - (-2) = 4\, ua$ ”. (aluno 24)

“$2 \cdot \int_0^{\pi} sen(x)\, dx = 2 \cdot [-\cos(x)]_0^{\pi} = 2 \cdot [1 - (-1)] = 4$ ”. (aluno 31)

Dois desses doze alunos (alunos 11 e 16) encontraram resposta final diferente de 4 por causa de erros aritméticos na resolução da integral. É importante ressaltar que oito dos doze alunos (inclusive o aluno 16) fizeram um esboço do gráfico da função.

II: Teoria incorreta de integral: 15 alunos (1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 14, 18, 20, 21, 26 e 32)

A maioria das respostas contidas nessa categoria estão erradas porque os alunos não consideraram a variação de sinal da função *sen(x)* no intervalo *[0,2π]*. Onze alunos cometeram esse mesmo erro.

Exemplos:

“$\int_0^{2\pi} sen(x)\, dx$”. (aluno 1)

“A = $\int_0^{2\pi} sen(x)\, dx = -\cos(x)\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos 0) = -\cos(2\pi) + \cos 0 = 0$”. (aluno 7)

Além do aluno 7, outros sete alunos encontraram zero como resposta para a área. Somente um deles não fez o desenho do gráfico da função sen(x). O aluno 32, inclusive, fez o seguinte comentário:

“Sendo y = sen(x) uma função par, temos que a $\int_0^{2\pi} sen(x)\, dx = 0$”. Esse aluno foi um dos que fez o desenho do gráfico da função.

Outros três alunos escreveram respostas sem sentido, como essa:

“f(x) = 0, g(x) = 2π, h(x) = sen(x)

$A = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx + \int h(x)$." (aluno 21)

O último aluno dessa categoria (aluno 5) escreveu a seguinte resposta além de ter feito o gráfico hachurado da função corretamente:

"$\int_0^{\pi} sen(x)\,dx - \int_{\pi}^{2\pi} sen(x)\,dx = 0$ *(por simetria)"*.

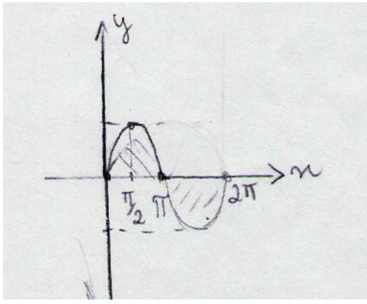


Figura 4: Desenho feito pelo aluno 5 para a questão 5(a)

Acontece algo semelhante com o aluno 33, que deu a seguinte resposta além de ter feito também o desenho hachurado do gráfico da função de forma correta:

"$\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0$

NÃO!

Será 2 vezes a área do meio caminho!

$= \; 2\int_0^{\pi} sen(x)\,dx = 2\left[-\cos(\pi) + \cos(0)\right] = 2\text{x}2 = 4$ ".

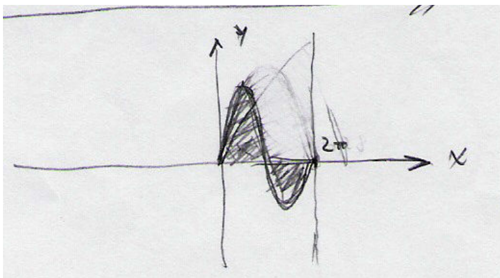


Figura 5: Desenho feito pelo aluno 33 para a questão 5(a)

Questão 5(b): Entre o eixo x, as retas $x = 0$ e $x = 2$ e a curva $y = x^2 - 5x + 6$.

28 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 24 alunos

Exemplos:

"$A = \int_0^2 x^2 + 5x + 6 \, dx$". (aluno 6)

"$\int_0^2 x^2 + 5x + 6 \, dx = \left. \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = \frac{8}{3} - 10 + 12 = \frac{14}{3}$". (aluno 25)

Desses, apenas três não chegaram à resposta final correta, por erros nos cálculos e quinze fizeram o desenho do gráfico. É interessante mencionar que, dos alunos que desenharam o gráfico, três (alunos 3, 5 e 6) o fizeram de forma errada, mas, ainda assim, modelaram corretamente a integral. É possível afirmar que, para esses três alunos, o gráfico não influenciou na resposta.

II: Teoria incorreta de integral: 4 alunos (9, 14, 18 e 28)

Exemplos:

"$\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^2 x^2 + 5x + 6 \, dx$". (aluno 9)

"$y = x^2 + 5x + 6$

$y' = 2x - 5$ $\qquad f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6$

$x = \frac{5}{2}$ $\qquad -\frac{25}{4} + 6 = -\frac{1}{4}$" (aluno 14)

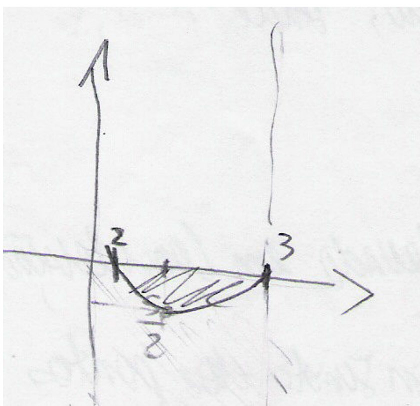


Figura 6: Desenho feito pelo aluno 14 para a questão 5(b)

Todos os quatro alunos incluídos nessa categoria desenharam o gráfico, mas apenas o aluno 28 o fez de forma correta.

Questão 5(c): Entre o eixo x, as retas *x = -1* e *x = 3* e a curva *y = x² - 5x + 6*.

25 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 8 alunos (11, 12, 15, 17, 19, 24, 25 e 27)

Exemplos:

$$“\left.\begin{array}{l}\int_{-1}^{2} x^2+5x+6\,dx=\frac{14}{3}-\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}-6\right)=\frac{81}{3}\\ \int_{2}^{3} x^2+5x+6\,dx=9-\frac{45}{2}+18-\frac{14}{3}=-\frac{1}{6}\end{array}\right\}\frac{41}{3}”\text{. (aluno 25)}$$

Desses nove alunos, três não fizeram o desenho do gráfico (alunos 12, 15 e 19).

II: Teoria incorreta de integral: 17 alunos

Doze dessas respostas erradas ocorreram pela não consideração da variação do sinal da função no intervalo dado. E desses doze alunos, apenas um (aluno 3) fez o gráfico, mas de forma errada.

Exemplo:

$$“\int_{-1}^{3} x^2+5x+6\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-1}^{3}=\left[9-\frac{45}{2}+18-\left(-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}-6\right)\right]=\frac{40}{3}”\text{. (aluno 31)}$$

Um dos outros quatro alunos dessa categoria deu a seguinte resposta:

$$“\int_{-1}^{3} x^2+5x+6\,dx=\int_{-1}^{2} x^2+5x+6\,dx+\int_{2}^{3} x^2+5x+6\,dx=\ldots=\frac{40}{3}”\text{. (aluno 29)}$$

Dois outros alunos (alunos 5 e 16) cometeram o mesmo erro, consideraram apenas o intervalo [-1,2]:

$$“\int_{-1}^{2} x^2+5x+6\,dx=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{2}+6x\right]_{-1}^{2}=\ldots”.$$

O aluno restante (aluno 9) deu uma resposta sem sentido:

"$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-1}^{3}\left(x^2+5x+6\right)dx$".

Questão 5(d): Entre o eixo x, as retas *x = 1* e *x = 3* e a curva $y=\begin{cases} \boldsymbol{1} & \textbf{\textit{se x < 2}} \\ \boldsymbol{x+3} & \textbf{\textit{se x > 2}} \end{cases}$.

20 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 18 alunos

Exemplos:

"$A=\int_1^2 1\,dx+\int_2^3 x+3\,dx$". (aluno 6)

"$\int_1^2 1\,dx+\int_2^3 x+3\,dx = x\Big|_{x=1}^{x=2}+\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{x=2}^{x=3}=[2-1]+\left[\left(\frac{9}{2}+9\right)-\left(\frac{4}{2}+6\right)\right]=$

$=1+\frac{27}{2}-\frac{16}{2}=\frac{2+11}{2}=\frac{13}{2}\,ua$". (aluno 17)

"$\frac{(5+6)\cdot 1}{2}=5{,}5+1=6{,}5$". (aluno 25)

"$\int_1^3 f(x)\,dx=\underbrace{\int_1^2 f(x)\,dx}_{=1}+\underbrace{\int_2^3 f(x)\,dx}_{\frac{(6+5).1}{2}}$ $\qquad 1+\frac{11}{2}=\frac{13}{2}$". (aluno 27)

Dos dezoito alunos dessa categoria, onze fizeram o gráfico da função no intervalo, inclusive os alunos dos exemplos anteriores. E quatro alunos (14, 15, 25 e 27) resolveram sem utilizar o cálculo da integral (pelo algoritmo), ou seja, resolveram apenas utilizando a área do quadrado adicionada à área do trapézio. Todos os quatro desenharam o gráfico corretamente.

II: Teoria incorreta de integral: 2 alunos (7 e 11)

Um desses (aluno 11) desenhou o gráfico hachurado da função corretamente, mas afirmou: "Não recordo se existe integral". O aluno 7 deu a seguinte resposta:

"Como a função não está definida no 2, temos:

$$\lim_{a\to 2^-}\int_1^a 1\,dx=\lim_{a\to 2^-}(a-1)=2$$

$$\lim_{a\to 2^+}\int_a^3 (x+3)\,dx = \lim_{a`\to 2^+}(18-a`^2-3a`)=2$$

A = 2 + 2 = 4”. (aluno 7)

Itens	Número de respostas	Categorias	
		I	**II**
(a)	27	12	15
(b)	28	4	24
(c)	25	8	17
(d)	20	18	2

Tabela 6: Resumo das categorias de resposta da questão 5

Questão 6: Em cada um dos casos abaixo calcule a integral pedida.

A categorização das respostas para essa questão é feita de forma semelhante à feita anteriormente na questão 5.

Questão 6(a): $\boldsymbol{f(x) = sen(x)}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathbf{f(x)\,dx}$**.**

28 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 25 alunos

Exemplos:

A resposta do aluno 6 se resumiu ao desenho encontrado abaixo.

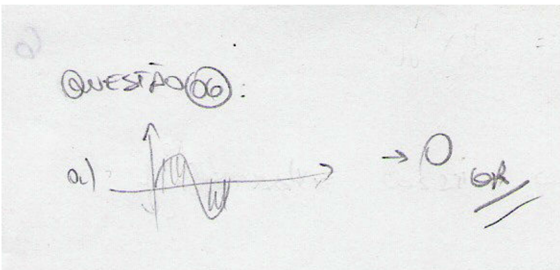


Figura 7: Desenho feito pelo aluno 6 para a questão 6(a)

“$\displaystyle\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{2\pi} = -1+1=0$ ”. (aluno 15)

“Pelo mesmo motivo do item 5(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx = 0$ ”. (aluno 32)

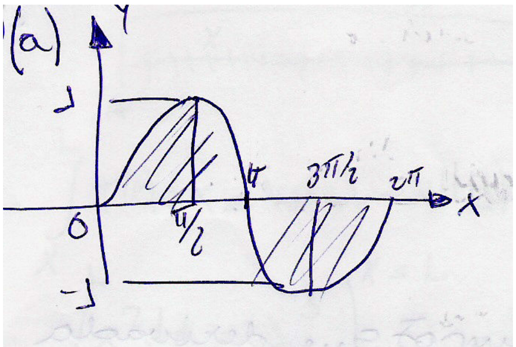


Figura 8: Desenho feito pelo aluno 32 para a questão 6(a)

II: Teoria incorreta de integral: 3 alunos (11, 17 e 29)

Todos cometeram o mesmo erro. Levaram em consideração a variação de sinal da função no intervalo.

Exemplos:

"$\int_0^{2\pi} sen(x)\, dx = 4$ ". (aluno 11)

"6 – a) 4". (aluno 17)

"$\int_0^{2\pi} sen(x)\, dx = 2 \cdot \int_0^{\pi} sen(x)\, dx = -2 \cdot \cos(x)\Big|_0^{\pi} = -2 \cdot [-1-1] = 4$ ". (aluno 29).

Questão 6(b): $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 5x + 6,\ \int_0^2 f(x)\, dx}$.

28 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 25 alunos

Exemplo:

"$\int_0^2 x^2 - 5x + 6\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 6x \right]_0^2 = \frac{14}{3}$ ". (aluno 15)

Seis alunos (7, 11, 17, 25, 27 e 31), apesar de terem dado a resposta correta da questão, não fizeram nenhum cálculo.

Exemplos:

"6)

b) 14/3". (aluno 25)

"$\int_0^2 x^2 - 5x + 6\, dx = \frac{14}{3}$ ". (aluno 27)

Outros (alunos 5, 19 e 32) fizeram menção à questão 5b, que tratava da mesma função no mesmo intervalo, mas pedia a área.

Exemplos:

"Idem ao 5 (b)". (aluno 32)

"já feita item 5b". (aluno 5)

II: Teoria incorreta de integral: 3 alunos (16, 21 e 28)

Todos os alunos dessa categoria cometeram erros ao efetuarem o cálculo da integral.

Exemplos:

"$\int_0^2 x^2 - 5x + 6\, dx = 2x - 5\Big|_0^2 = ... = 4$ ". (aluno 16)

"$f(x) = x^2 - 5x + 6; \quad \int_0^2 f(x)\, dx$

$[2^2 - (5 \cdot 2) + 6] - [0^2 - (5 \cdot 0) + 6] = ... = 4$ ". (aluno 21)

Questão 6(c): $\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 1 \\ 0 & se\ x \neq 1 \end{cases}, \int_1^2 \mathbf{f(x)\,dx}}$.

20 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 12 alunos

Exemplos: (na verdade, só houve esses dois tipos de respostas)

"*Questão 6*

c) 0". (aluno 6)

"$\int_1^2 f(x)\, dx = 0$ ". (aluno 15)

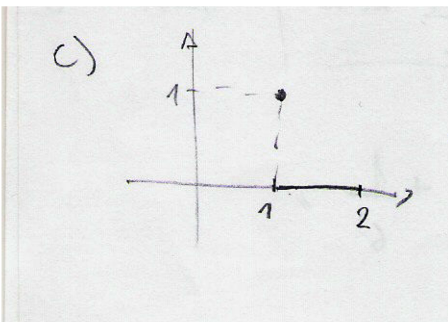


Figura 9: Desenho feito pelo aluno 5 para a questão 6(c)

Cinco desses onze alunos (7, 11, 12, 15 e 29) fizeram o desenho correto do gráfico no intervalo desejado. O aluno 11, apesar de ter chegado à resposta certa, demonstrou insegurança no seu raciocínio:

"Não me recordo se esta integral existe ou não, porém, pela axiomatização de Euclides, ponto não tem dimensão, logo, não tem área, logo a integral desta f é zero." (aluno 11)

II: Teoria incorreta de integral: 8 alunos (5, 14, 18, 20, 21, 24, 26, 31)

Há erros de vários tipos. Vamos apresentar todos:

Exemplos:

"$\int_1^2 f(x)\,dx = \therefore \left.\frac{df}{dx}\right|_0^1 \therefore -1$". (aluno 18)

"$\int_1^2 f(x)\,dx = f(2) - f(1) = 0 - 1 = -1$". (aluno 20)

"$\int_1^1 1\,dx + \int_1^2 0\,dx = 0$". (aluno 5)

"$\int_1^2 1\,dx = x\Big|_1^2 = 1$". (aluno 26)

"$\int_1^2 1\,dx = 0$". (aluno 24)

"$\int_1^2 1\,dx =$ *não existe Não existe limite no ponto x = 1 <u>descontinuidade</u>*". (aluno 21)

"não tem derivada = não existe $\int f(x)\,dx$". (aluno 32)

"f é descontínua em todos os pontos do seu domínio, portanto não existe a integral". (aluno 14)

O último aluno (31) dessa categoria fez apenas o gráfico (correto) da função no intervalo no espaço reservado para a questão, mas não deu nenhuma resposta. De todos os alunos dessa categoria, somente o aluno 21, além do aluno 31 já mencionado, fez o desenho (correto) do gráfico.

Questão 6(d): $f(x)=\begin{cases} 2x & se\ x<1 \\ 3 & se\ x>1 \end{cases}$, $\int_0^3 \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$.

21 alunos responderam.

I: Teoria correta de integral: 15 alunos

A maioria desses alunos (treze) responderam aplicando diretamente a teoria de integral e fazendo os cálculos, como a resposta dada pelo aluno 8 mostrada a seguir. Desses, apenas um fez o gráfico (aluno 15). Porém, dois alunos (25 e 27) responderam utilizando conceitos de geometria plana, depois de desenharem o gráfico da função, sem fazer uso de integral.

Exemplos:

"$\int_0^3 f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx + \int_1^3 3\,dx = x^2\Big|_0^1 + 3x\Big|_1^3 = 1+9-3=7$". (aluno 8)

"*1 + 6 = 7*". (aluno 25)

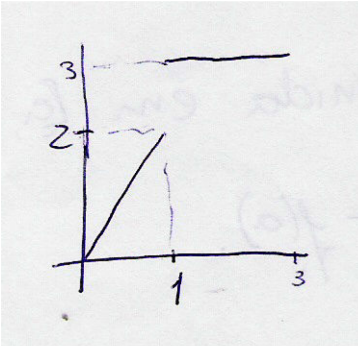


Figura 10: Desenho feito pelo aluno 25 para a questão 6(d)

"$\int_0^3 f(x)\,dx = 1+6=7$". (aluno 27)

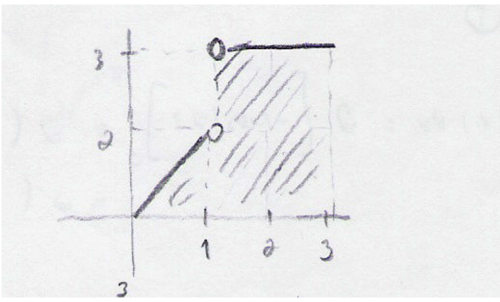


Figura 11: Desenho feito pelo aluno 27 para a questão 6(d)

II: Teoria incorreta de integral: 6 alunos (3, 7, 9, 11, 20 e 30)

O aluno 11, depois de ter esboçado o gráfico da função, afirmou: "*Não recordo.*" Seguem as demais respostas erradas:

"$\int_0^1 2x\,dx + \int_2^3 3\,dx = ... = 4$". (aluno 3)

"$\int_0^3 2x\,dx + \int_0^3 3\,dx$". (aluno 9)

"$\int_0^3 f(x)\,dx = f(3) - f(0) = 3 - 2\cdot 0 = 3$". (aluno 20)

"$\int_0^1 2x\,dx + 3 = \frac{2x^2}{2} + 3 = x^2 + 3$". (aluno 30)

"$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a 2x\,dx + \lim_{b\to 1^+}\int_b^3 3\,dx ... = 1 + 9 - 3 = 7$". (aluno 7)

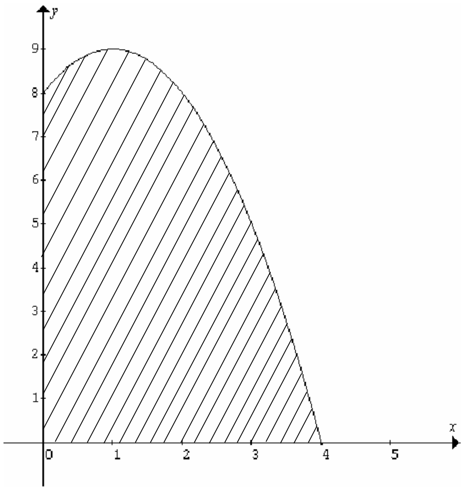
Itens	Número de respostas	Categorias	
		I	II
(a)	28	25	3
(b)	28	25	3
(c)	20	12	8
(d)	21	15	6

Tabela 7: Resumo das categorias de resposta da questão 6

Questão 7: Em cada um dos casos abaixo calcule a área da região hachurada.

A categorização das respostas para essa questão é feita de forma semelhante a já feita anteriormente na questão 5.

Questão 7(a): $f\left(x\right) = -x^2 + 2x + 8$



28 alunos responderam (todos exceto alunos 4, 9 e 33)

Todos os alunos que responderam o fizeram de maneira correta. Alguns não encontraram a resposta final exata porque cometeram erros nos cálculos.

Exemplos:

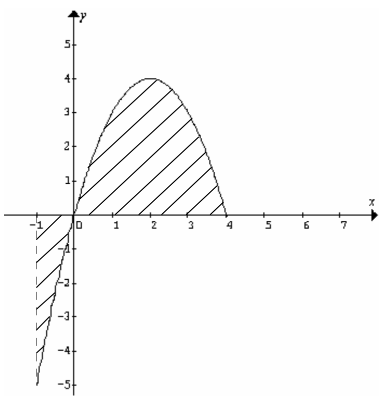
"$\int_0^4 -x^2 + 2x + 8\,dx$ ...". (aluno 6)

"$\int_0^4 f(x)\,dx$". (aluno 28)

"$\int_0^4 -x^2 + 2x + 8\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 8x\right]_0^4 = \left[-\frac{64}{3} + 16 + 39\right] = -\frac{64}{3} + 48 = \frac{-64+144}{3} = \frac{80}{3}$ *ua*".

(aluno 29)

Questão 7(b): $f\left(x\right) = -x^2 + 4x$



27 alunos responderam (todos exceto alunos 4, 9, 16 e 33)

I: Teoria correta de integral: 10 alunos (5, 8, 11, 12, 15, 19, 24, 25, 27 e 30)

Exemplos:

"$$\underset{[-1,0]}{\acute{A}rea} = \left| \int_{-1}^{0} \left(-x^2 + 4x\right) dx \right| = \left| \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right)_{-1}^{0} \right| = \frac{7}{3}$$

$$\underset{[0,4]}{\acute{A}rea} = \left| \int_{0}^{4} \left(-x^2 + 4x\right) dx \right| = \left| \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right)_{0}^{4} \right| = -\frac{64}{3} + 32 = \frac{32}{3}$$

$\acute{A}rea\ hachurada = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} = \frac{39}{3} = 13$". (aluno 8)

"$-\int_{-1}^{0} -x^2 + 4x\,dx + \int_{0}^{4} -x^2 + 4x\,dx = A$". (aluno 19)

II: Teoria incorreta de integral: 17 alunos

A maior parte dos erros nas respostas ocorreram por causa da não consideração da variação do sinal da função no intervalo, ainda que o gráfico já estivesse feito. Dos dezessete alunos dessa categoria, quinze cometeram esse erro.

Exemplos:

"$\int_{-1}^{4} -x^2 + 4x\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right]_{-1}^{4} = \ldots$". (aluno 29)

"$\int_{-1}^{0} -x^2 + 4x\,dx + \int_{0}^{4} -x^2 + 4x\,dx = \ldots$". (aluno 21)

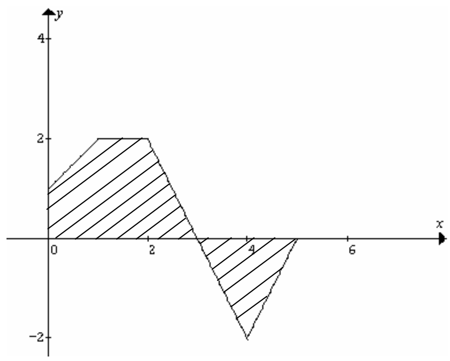
"$\int_{-1}^{0} f(x) + \int_{0}^{4} f(x) = \ldots$". (aluno 18)

Os outros dois alunos restantes cometeram os seguintes erros:

"$\int_{0}^{4} -x^2\,dx + \int_{-1}^{0} 2x\,dx = \ldots$". (aluno 1)

"$\int_{-1}^{0} -x^2 + 4x\,dx + \int_{-1}^{0} -x^2 + 4x\,dx$". (aluno 3)

Questão 7(c): $f(x)=\begin{cases} x+1, & 0\le x\le 1 \\ 2, & 1<x\le 2 \\ -2x+6, & 2<x\le 4 \\ 2x-10, & 4<x\le 5 \end{cases}$



21 alunos responderam (todos exceto alunos 3, 4, 5, 9, 16, 28, 30, 31, 32 e 33)

I: Teoria correta de integral: 10 alunos (8, 11, 12, 15, 17, 19, 20, 24, 25 e 27)

Sete (alunos 11, 12, 15, 17, 20, 25 e 27) desses alunos não calcularam a área utilizando integral definida. Dividiram a região em questão em regiões menores e determinaram a área dessas regiões através de conceitos da geometria euclidiana plana:

Exemplos:

"$0 \text{ a } 1: A = 1+2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ $\quad 1 \text{ a } 2: A=1\times 2=2$ $\quad 2 \text{ a } 4: A=2\times\frac{(b+h)}{2}=2$

$4 \text{ a } 5: A=\frac{1\times 2}{2}=1$ $\quad A_T=\frac{3}{2}+2+2+1=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}$". (aluno 15)

"$\frac{3}{2}+2+1+2=\frac{13}{2}$". (aluno 25)

Dois utilizaram corretamente o conceito de integral:

"$\underset{[0,3]}{Área}=\int_0^1 x+1\,dx+\int_1^2 2\,dx+\int_2^3 -2x+6\,dx=...$

$\underset{[3,5]}{Área}=\int_3^4 -2x+6\,dx+\int_4^5 2x-10\,dx=...$". (aluno 8)

"$A=\int_0^1 x+1\,dx+\int_1^2 2\,dx+\int_2^3 (-2x+6)\,dx-\int_3^4(-2x+6)\,dx-\int_4^5(2x-10)\,dx=...$". (aluno 24)

O último aluno dessa categoria utilizou um misto de teoria de integral com cálculo de área de triângulo:

$$\text{“}\int_0^1 x+1\,dx+2+\int_2^3 -2x+6\,dx+\frac{2\cdot 2}{2}=A\text{”. (aluno 19)}$$

II: Teoria incorreta de integral: 11 alunos

Dos onze, nove (alunos 1, 2, 6, 10, 14, 18, 21, 26 e 29) calcularam usando integral definida e dois usando área de figuras planas simples. Todos os que usaram integrais erraram porque não consideraram a variação do sinal da função no intervalo.

Exemplos:

$$\text{“}\int_0^1 x+1\,dx+\int_1^2 2\,dx+\int_2^4 -2x+6\,dx+\int_4^5 2x-10\,dx=\ldots\text{”. (aluno 10)}$$

$$\text{“}\int_0^1 x+1\,dx+\int_1^2 2\,dx+\int_2^3 +2x+6\,dx+\int_3^4 +2x+6\,dx+\int_4^5 2x-10\,dx=\ldots\text{”. (aluno 18)}$$

(este ainda errou ao considerar $+2x+6$ em lugar de $-2x+6$ como estava no enunciado).

Os dois alunos que usaram área de figuras geométricas simples deram as seguintes respostas:

$$\text{“}A_{0\to 3}=A_{TRAPÉZIO}=\frac{(3+1)\times 2}{2}=4$$

$$A_{3\to 5}=A_{TRÂNGULO}=\frac{2\times 2}{2}=2 \qquad A_{TOT}=6\text{”. (aluno 7)}$$

$$\text{“}A_{Trapézio}+A_{\Delta} \qquad A_T=\frac{(B+b)\times h}{2}+\frac{Bh}{2}=\frac{(3+1)\times 2}{2}+\frac{2\times 2}{2}=6\text{”. (aluno 13)}$$

Fica claro que o erro ocorreu porque confundiram a região acima do eixo x no intervalo *[0,3]* com um trapézio.

Itens	**Número de respostas**	**Categorias**	
		I	**II**
(a)	28	28	0
(b)	27	10	17
(c)	21	10	11

Tabela 8: Resumo das categorias de resposta da questão 7

Questão 8: Você saberia dar uma definição formal para a integral definida de uma função real f ?

14 alunos responderam (alunos 1, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15, 19, 24, 25, 26, 27 e 32). Cinco responderam que não saberiam dar uma definição formal para integral definida (alunos 1, 7, 11, 13 e 15). Dois alunos (alunos 8 e 12) responderam que saberiam dar uma definição formal, mas não o fizeram. Responderam simplesmente "saberia". Três fizeram referência à anti-derivada ou tentaram enunciar o TFC. São elas:

"Seja f(x) uma função contínua e definida em [a,b], com antiderivada F.

Então, $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$ *."* (aluno 24)

" $\int_a^b f(x)\, dx = g(b) - g(a)$ *para uma g, tal que g´(b) = f(b) e g´(a) = f(a)."* (aluno 25)

"Seria o valor de uma função que a derivada resultaria em f, isto é, F´= f." (aluno 32)

Um aluno (aluno 27) deu uma resposta bastante completa:

"(Não lembro direito!) Vou tentar!

Seja [a,b] $\subset$ *R um intervalo da reta. Seja P o conjunto de todas as partições do intervalo [a,b]. Por exemplo, tome p* $\in$ *P, P =* $\{ a = x_0, x_1, x_2, ..., x_n = b \}$*.*

$S_p = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, $M_i = \sup\{f(x)\}$ $\quad x_{i-1} \le x \le x_i$ *Soma Superior*

$s_p = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot (x_i - x_{i-1})$, $m_i = \inf\{f(x)\}$ $\quad x_{i-1} \le x \le x_i$ *Soma Inferior*

Se inf{ S_p */p* $\in$ *P} = sup{* s_p */p* $\in$ *P} então dizemos que f é integrável no intervalo [a,b]."*

Um outro aluno (aluno 6) deu a seguinte resposta:

"Integral: Definição: Fiz tudo sem ela."

As duas respostas restantes foram as seguintes, claramente erradas:

" $\int_a^b f(x)$ *corresponde ao* $\lim_{n\to\infty} S_n\ n \cdot (n-1) \cdot f(x)$ *para* $a \le n \le b$ *."* (aluno 19)

"Não estou muito lembrado, mas é algo do tipo: $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0 / \left|F(x_2) - F(x_1)\right| > \delta$ $x_1, x_2 \in R$*. Por aí."* (aluno 26).

alunos/questão	1	2	3	4a	4b	5a	5b	5c	5d	6a	6b	6c	6d	7a	7b	7c	8
1						x	x	x		x	x			x	x	x	x
2				x	x	x	x	x	x				x	x	x	x	
3		x	x			x	x	x	x	x	x		x	x	x		
4	x	x	x	x													
5	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		
6	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
8	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
9	x	x				x	x	x		x	x		x				
10		x		x		x	x	x		x	x			x	x	x	
11	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
12	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
13	x	x		x			x	x	x	x	x			x	x	x	x
14	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	
15	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
16		x	x	x	x	x	x	x		x	x			x			
17	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	
18	x	x	x	x		x	x			x	x	x	x	x	x	x	
19	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
20	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	
21		x	x	x		x	x			x	x	x		x	x	x	
24	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
25	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
26	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
27	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
28	x	x	x	x	x		x			x	x			x	x		
29				x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
30										x	x		x	x	x		
31		x		x	x	x	x	x		x	x	x		x	x		
32	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
33	x	x	x	x	x	x	x	x									

Tabela 9: Questões respondidas por aluno na etapa 1. O "x" marca as questões respondidas.

5.2. Discussão

Faremos agora algumas observações acerca dos resultados apresentados em cada questão, de acordo com nossa interpretação.

A primeira questão tinha como objetivo tentar verificar o quanto a noção de integral definida estava dissociada da idéia de área, isto é, até que ponto o aluno poderia pensar em integral de uma maneira que não fosse pra calcular a área de alguma região. A questão tratava de uma média contínua em uma linha, cuja solução correta é determinar a soma da temperatura em cada ponto da linha através da integral definida de x^2 no intervalo *[0,l]* (ou *[A,B]*) e depois dividir esse resultado pelo comprimento l (ou B – A) da linha.

O número de alunos que responderam pode ser considerado satisfatório, se comparado ao resultado obtido no estudo exploratório que continha a mesma questão, em que nenhum aluno respondeu. Este foi, inclusive, o motivo principal da manutenção desta questão no questionário da etapa 1. Como nenhum aluno havia respondido, pouco se pôde concluir. Houve apenas a crença nossa de que a idéia de usar o conceito de integral definida com um objetivo diferente de calcular a área de alguma região não parecia estar presente na imagem de conceito dos alunos.

No entanto, na etapa 1, 22 alunos responderam. Isso faz com que possamos atribuir a falta de respostas do estudo exploratório também a outras causas, como o tempo menor disponível ou ao fato de o professor do curso não ter trabalhado questões desse tipo.

Dos 22 alunos que responderam, sete o fizeram corretamente. Porém, o que mais chama a atenção é que, mesmo errando, alguns alunos identificaram que se tratava de uma questão que envolvia média. Mas, no lugar de dividir por l, que representava o comprimento do fio, efetuaram a divisão por dois. Isso pode ser devido ao fato de muitos alunos terem a idéia de média diretamente ligada à operação de soma, seguida de uma divisão por dois, independente de quantos termos participaram da soma anterior. É claro que se trata de conjectura e uma pesquisa nessa direção é necessária para ter certeza dessas afirmações.

Outro fato importante a ser mencionado é que quase um terço dos que responderam, o fizeram calculando somente a integral de x^2 e considerando o resultado como resposta final. Parece plausível concluir que a idéia de média não esteve presente na mente dos alunos que deram essa resposta, pois se estivesse, haveria alguma divisão depois de encontrado o resultado da integral de x^2, como fizeram outros, mesmo de forma errada, como já mencionamos. Portanto, é provável que a idéia de calcular a integral tenha surgido apenas porque se tratava de um questionário sobre integral, e porque x^2 era a única função que poderia ser integrada na questão.

Diferentemente do que ocorreu no estudo exploratório, podemos concluir que o uso da integral definida desvinculada da noção de área está presente na imagem de conceito de alguns alunos, embora esses não sejam a maioria. Esta discussão será mencionada quando das entrevistas da etapa 2.

O objetivo da questão 2 era fazer com que os alunos mostrassem, sem a preocupação de fornecer uma resposta formal, o que eles entendiam por integral definida, deixando-os à vontade para escreverem o que eles realmente pensam sobre o conceito. E essa preocupação, salvo algumas exceções, realmente não existiu. Todos pareceram ter compreendido que não estava sendo cobrada uma definição formal do conceito de integral definida.

Houve um bom número de respostas e a maioria delas fazendo referência direta à área, o que já era esperado, principalmente levando em consideração os resultados do estudo exploratório, não só para a mesma questão, que também estava presente, como para as demais existentes no estudo. O fato é que, de uma forma ou de outra, área quase sempre fazia parte da resposta. Apenas dois alunos não fizeram menção à área, e suas respostas continham um nível de formalismo considerável.

Não podemos afirmar que esses alunos têm uma definição de conceito desconectada do restante de suas imagens de conceito, como fizemos no estudo exploratório. No estudo houve poucas respostas, mas dessa vez, não. O que houve foi uma evidência de que a noção de área está muito enraizada na mente dos alunos como quase uma definição para o conceito de integral definida. E isso fica ainda mais claro no decorrer do questionário, nas respostas dadas para as outras questões.

Mais uma vez podemos comparar esses resultados com os mostrados em (GONZÁLES-MARTÍN & CAMACHO, 2004), onde uma questão praticamente igual apontou um grande número de respostas que identificavam o uso da integral com o cálculo de áreas.

O objetivo da 3ª questão era tentar perceber se o aluno tinha alguma idéia do que ocorre quando a função não é integrável, e identificar que critérios são usados para decidir se uma determinada função é ou não integrável. O número de respostas dadas foi apenas razoável, com 9 alunos deixando de responder. Para a metade dos que responderam, a questão da continuidade da função é o critério a ser usado para decidir se uma função é integrável ou não, o que não é verdade, uma vez que funções que apresentam pontos de descontinuidade no intervalo de integração podem ser integráveis.

Essa confusão entre a continuidade ser uma condição suficiente, mas não necessária para decidir se uma função é ou não integrável já havia ocorrido no estudo exploratório, porém com um número muito menor de respostas, o que nos motivou a manter a questão para a etapa 1.

Ainda sobre a 3ª questão, dois alunos deram respostas que levavam em consideração a igualdade entre as somas inferiores e superiores para uma partição do intervalo [a,b]. Essas respostas mostram conhecimentos mais avançados e mais formais dos que os que são aprendidos nos cursos iniciais de cálculo, uma vez que nesses cursos, em geral, a teoria de integral não é abordada de forma tão específica.

Se somarmos aos onze alunos que não responderam os seis que deram respostas consideradas erradas, temos que mais da metade do total de alunos que participaram têm problemas com a questão de decidir se uma determinada função tem ou não integral definida. Isso nos permite, pelo menos, suspeitar que a compreensão do conceito de integral definida ocorre como um procedimento apenas, já que veremos mais adiante que nas questões práticas o número de alunos que deixa de responder é bem menor.

A 4ª questão está inteiramente relacionada com a 3ª. O objetivo, em ambos os itens, era verificar o quanto os alunos estão familiarizados com funções integráveis e, principalmente, não integráveis, inclusive apurando se os critérios explicados na questão 3 foram usados na hora de fornecer os exemplos.

Para o item (a), houve muitas respostas e todas corretas. Isso mostra que os alunos sabem exemplificar funções integráveis, mesmo que os exemplos dados tenham sido de funções mais simples, como polinomiais que foram mencionadas pela esmagadora maioria dos alunos. De fato, isso vai ao encontro do que foi respondido pela maior parte dos alunos na questão anterior, que afirmaram ser a continuidade o critério para saber se uma função é integrável ou não. Como as funções polinomiais são exemplos clássicos de funções contínuas, usar essas funções como exemplos de funções integráveis é quase imediato.

Entretanto, no item (b) o resultado não foi tão bom. O número de alunos que responderam diminuiu, mas não muito. A questão a ser ressaltada é o número de alunos que deram exemplos errados, o que não havia ocorrido no item (a). No total, oito alunos forneceram exemplos incorretos. Três desses mencionaram a função $1/x$, mas dois deles não forneceram o intervalo de integração. Embora não possamos confirmar, é possível que os dois alunos tenham considerado que, já que se trata de uma função descontínua em $x = 0$, o intervalo de integração é dispensável, o que não é verdade, pois em intervalos que não contenham o 0, a função é integrável. Essa conjectura está baseada no fato de que esses mesmos alunos, na questão 3, assumiram a continuidade como critério único para decidir se uma função é ou não integrável. Dessa forma, nada mais natural do que dar como exemplo uma função que possui uma descontinuidade.

Esse aspecto fica reforçado também pelos alunos que deram respostas corretas, pois, sete forneceram exemplos de funções racionais, que podem ser integráveis, mas não nos intervalos que foram dados, todos contendo o valor de x que anularia o denominador.

Dessa forma, os alunos conseguiram “encaixar” seus exemplos no critério mencionado por eles na questão 3.

Dentre os outros alunos que deram exemplos incorretos, alguns exemplificaram com funções que são integráveis. Isso pode ter ocorrido devido à pouca familiaridade desses alunos com funções com mais de uma sentença e com a função módulo, o que tentaremos confirmar nas entrevistas da etapa 2.

A questão 5, de caráter mais prático, teve um bom índice de respostas dadas em relação ao total de alunos, um pouco mais de 80%, na média dos quatro itens. O objetivo dessa questão foi verificar se os alunos saberiam diferenciar o cálculo da integral de uma função do cálculo da área da região compreendida entre o gráfico da função e o eixo das abscissas, em um determinado intervalo. Ou seja, verificar o quanto estão relacionados os conceitos de área e integral e se há uma dependência entre esses conceitos. Nesse aspecto, essa questão está muito relacionada com a questão 6, inclusive com alguns itens tratando da mesma função, no mesmo intervalo.

No item (a), apenas quatro alunos deixaram de responder, mas apenas doze deram a resposta correta. O que causou a maior parte dos erros foi a desconsideração da variação do sinal da função no intervalo dado. Dos quinze alunos que erraram, onze cometeram esse erro. E desses onze, oito encontraram resultado igual a zero para a área da região, mesmo tendo desenhado o gráfico da função corretamente, como fizeram sete, desses oito alunos. Esse resultado é semelhante ao encontrado no estudo exploratório e ao encontrado em (RASSLAN & TALL, 2002), para uma questão exatamente igual.

Interessantes foram os casos dos alunos 5 e 33. O primeiro escreveu as integrais corretamente, levando em consideração a mudança de sinal da função, no entanto, deixou de considerar o valor absoluto das integrais e “anulou” esses valores sem fazer nenhum cálculo, apenas pela simetria do desenho e encontrou zero como valor da área, o que vai de encontro ao que havia esboçado.

Esses casos onde o resultado final obtido vai de encontro ao gráfico esboçado são mencionados em (TALL & VINNER, 1981), em que um fator de conflito potencial parece ter sido evocado, mas ainda assim o conflito cognitivo não se concretizou.

Já o aluno 33, estava para cometer o mesmo erro, mas em algum momento depois de já ter dado a resposta, a corrigiu. A diferença entre as duas respostas é que o aluno 33 (incluído na categoria I), depois de encontrar zero como resposta para a área da região, percebeu o equívoco que estava cometendo, provavelmente ao comparar sua resposta com o próprio desenho que mostrava que havia uma região hachurada e, por isso, a área não poderia ser nula. Nesse caso, o conflito de fato veio à tona, e possibilitou que ele reparasse o erro.

No item (b), houve um elevado número de respostas corretas, como já era esperado, principalmente tendo em vista os resultados do estudo exploratório para a mesma questão. Os poucos alunos que não acertaram cometeram erros sem fundamento e estão no grupo daqueles que erraram também os demais itens. Devemos salientar que nesse item, o cálculo da área da região se identificava com o cálculo direto da integral entre os limites, sem nenhuma restrição. No entanto, no item (c), quando a função foi mantida, mas o intervalo foi modificado, com a intenção de provocar uma mudança no sinal da função, houve uma queda brusca no número de respostas certas, chegando próximo a somente um terço das respostas dadas. E, mais uma vez, a não consideração da variação do sinal da função foi a grande causadora dos erros, sendo responsável por três quartos das respostas incorretas.

O aluno 29, que teve sua resposta mostrada na seção anterior, parece ter percebido a necessidade de considerar (de alguma forma) a mudança no sinal da função, uma vez que separou duas integrais, a primeira para valores positivos e a segunda para valores negativos da função. Porém, como somou uma à outra acabou, de fato, por não considerar a tal variação. Calculando dessa forma, foi como se tivesse calculado diretamente a integral em *[-1,3]*.

Parece bem plausível concluir que a idéia de que a resolução da integral diretamente de um ponto a outro do intervalo sempre irá fornecer a área da tal região constitui um atributo absolutamente ativo na imagem de conceito dos alunos. Essa conclusão é reforçada pelo fato de que, para a resolução do item (c), 14 alunos não desenharam o gráfico e para o tem (b), esse número foi de 9 alunos. Esses números englobam tanto alunos que erraram como que acertaram. Ou seja, o gráfico da função não parece ser relevante para grande parte dos alunos na hora de calcular a área de uma região, como as que foram dadas na questão. Para muitos, parece suficiente saber quais são os valores de x que servem como limites de integração, pois, a partir daí, basta calcular a integral e a resposta dará a área procurada.

Como já havia ocorrido no estudo exploratório, há grande diferença no resultado dos itens (b) e (c). No primeiro, quando não há variação no sinal da função, e o cálculo da área pedida coincide com o cálculo da integral no intervalo, há grande número de respostas corretas. Enquanto no item (c), com a mesma função, porém com o sinal da função variando, e a necessidade de considerar essa variação na modelagem, esse número diminui bastante.

Fechando a questão 5, o item (d) apresentou um número apenas razoável de respostas, perto de dois terços do total de alunos. Essa queda no número de respostas pode ter ocorrido por se tratar de uma função definida por mais de uma sentença, haja vista que, dos quatro itens, esse é o único com esse tipo de função. Entretanto, apenas dois alunos erraram. E o fato de a função apresentar descontinuidade no ponto $x = 2$ parece ter causado esses erros. O aluno 7 levou em consideração essa descontinuidade e fez o cálculo utilizando o conceito de integral imprópria e acreditamos que o aluno 11 que afirmou não ser capaz de lembrar se existe ou não a integral o fez por causa da descontinuidade, já que fez o gráfico corretamente e conseguiu resolver os itens anteriores sem grandes problemas.

Já em relação aos alunos que acertaram, é importante mencionar que, apesar do gráfico da função ser conveniente para o cálculo da área sem utilizar a teoria de integral, ou seja, apenas usando métodos geométricos básicos, como área de triângulo, apenas quatro alunos escolheram esse caminho, sensivelmente mais fácil. Além desses quatro alunos, mais sete alunos que acertaram a questão desenharam o gráfico da função.

Esses resultados reforçam o que parece cada vez mais claro. Quando se trata de calcular área de regiões limitadas por funções, há uma ligação direta com integral definida na imagem de conceito dos alunos que os impede de enxergar soluções muito mais simples, que lançariam mão de conceitos básicos, mais familiares dos que os relacionados à teoria de integral.

Na questão 6, o objetivo é mais uma vez saber o grau de identificação entre cálculo de integral definida e cálculo de área. Tentar perceber como os alunos relacionam as questões 5 e 6, principalmente os itens (a) e (b) de ambas, que tratam da mesma função no mesmo intervalo. Também verificar se há confusão nos itens (c) e (d) que possuem descontinuidades. Essa questão teve um índice de respostas semelhante ao da questão 5, próximo a 80% do total de alunos, em média.

Como era esperado, o item (a) teve um excelente número de respostas e uma taxa de acertos muito alta. Entretanto, ao analisarmos com mais cuidado, percebemos que apesar do grande número de respostas corretas, há razões para acreditarmos que boa parte dessas respostas podem não ser fruto de uma compreensão correta da teoria. Isso porque, dos vinte e cinco alunos que acertaram, onze deram resposta igual a zero também para a questão 5(a) (erradamente) que tratava da mesma função no mesmo intervalo, mas pedia a área. Mesmo que não seja possível garantir essa hipótese para todos os onze alunos, alguns deixaram óbvia essa relação indiscriminada entre as duas questões, como o aluno 5, cuja resposta e desenhos feitos estão registrados na seção anterior, e o aluno 14, que na questão 5(a) fez referência direta e clara à questão 6ª, como mostra a seguinte figura:

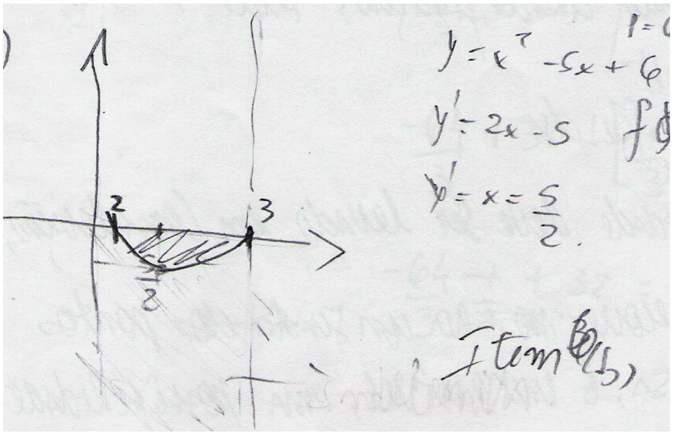


Figura 12: Desenho com parte da solução dada pelo aluno 14 para a questão 5(a). Há uma referência direta ao item a da questão 6

Até mesmo as poucas respostas erradas servem para ratificar o que foi dito acima. Os únicos três alunos que responderam erradamente cometeram o mesmo erro de considerar a variação do sinal da função no intervalo, como seria o correto se fosse pedida a área, como na questão 5(a), que todos esses três responderam corretamente.

Ou seja, do total de alunos que responderam a questão, quatorze (onze da categoria I e três da categoria II) repetiram a resposta dada na questão 5(a), seja ela certa ou errada.

Algo parecido ocorreu no item (b). Novamente muitas respostas e um bom índice de acertos, mas observando mais a fundo, notamos que alguns alunos não efetuaram nenhum cálculo para chegar ao valor correto da resposta. Alguns montaram a integral, mas colocaram a resposta direto, como o aluno 27, e outros nem sequer montaram a integral, como o aluno 25, já registrados na seção anterior. É um indício de que esses alunos levaram em conta o fato de já terem feito os cálculos para o item (b) da questão 5, que tratava da mesma função no mesmo intervalo, até porque, desses alunos, três (alunos 7, 11 e 17), fizeram a mesma coisa em relação às questões 5(a) e 6(a), respondendo uma igual à outra indiscriminadamente, como já foi mencionado anteriormente. Os alunos 5, 19 e 32 foram ainda mais enfáticos e mencionaram claramente a questão 5(b).

Esses resultados indicam que existe confusão entre cálculo da integral e cálculo da área limitada pelo gráfico da função, que muitas vezes são tratados como sendo a mesma coisa, quando, na realidade, não são.

Para o item (c), houve uma diminuição sensível no número de alunos que responderam, e uma diminuição maior no índice de acertos. Pouco mais da metade acertou. Um fato interessante é que apenas cinco alunos que acertaram a questão fizeram o gráfico de forma correta.

Já em relação às respostas erradas, o que chama atenção é a variedade dos tipos de erros. Para alguns alunos, o fato de a função apresentar um ponto de descontinuidade é razão para causar problemas, como para os alunos 5, 14 e 21. Outro fator que parece ter proporcionado dúvida a alguns alunos foi a presença de duas sentenças, agravada pela descontinuidade no ponto $x = 1$, que era justamente o limite de integração à esquerda, como mostram as respostas dos alunos 21, 24 e 26. Até mesmo um dos alunos que respondeu corretamente se mostrou em dúvida, pelo que escreveu.

Mais uma vez, há evidências de que a descontinuidade da função em algum ponto causa dificuldades. Parece haver realmente algo na imagem de conceito de alguns alunos que os faz considerar a continuidade como necessária para que se possa calcular a integral de uma função.

Finalizando a questão 6, o item (d) foi respondido por pouco mais de dois terços dos alunos, sendo que desses, quinze acertaram. No entanto, é importante destacar que, embora fosse fácil desenhar o gráfico da função, apenas três dos que acertaram o fizeram, e dois desses, provavelmente encorajados pela simplicidade do gráfico, preferiram resolver usando apenas área de figuras geométricas planas, nesse caso, triângulo e retângulo.

Alguns fatos já observados aparecem novamente. O fato de a função não estar definida no ponto $x = 1$, causou problemas a alguns alunos, como é o caso do aluno 7 que, por causa disso, utilizou a teoria de integral imprópria. E mais uma vez fica claro, pelo baixo número de alunos que não desenharam o gráfico, apenas quatro no total, que o gráfico pouco influencia no procedimento para resolver questões sobre integral definida. Nem mesmo para facilitar a resposta ou para validá-la. Há também algumas respostas erradas que mostram que os respectivos alunos possuem dificuldades quando se trata de calcular a integral de funções definidas por mais de uma sentença, como as dadas pelos alunos 3, 9 e 30.

O objetivo da questão 7 é muito semelhante aos das questões 5 e 6, com o diferencial de que, nessa questão, há o gráfico da função no intervalo desejado devidamente construído e hachurado. O índice de respostas é semelhante aos das questões 5 e 6, cerca de 80 %, em relação ao total de alunos. Mais uma vez a não consideração da variação de sinal da função causou a diferença brusca nos resultados dos itens (a) e (b). Enquanto no primeiro não houve respostas erradas, no segundo esse número chegou a pouco mais de 60% das respostas dadas. E praticamente todos os erros ocorreram devido à mudança de sinal da função. Como já havia ocorrido nas questões 5(b) e 5(c), parece claro que quando a função é totalmente positiva no intervalo, e por isso a integral coincide com o cálculo da área, há um grande número de respostas corretas. Caso a função mude de sinal, o número de erros cresce bastante. Isso nos faz crer que o indício de que há uma identificação incondicional entre integral definida e área é cada vez mais forte.

Os resultados para o item (c) mostram uma diminuição considerável no número de respostas dadas. Esse fato, na verdade, também ocorreu para o item (d) da questão 6, que também tratava de uma função definida por mais de uma sentença. Isso pode representar mais um fator de dificuldades para os alunos. E essa conjectura não está baseada no número de erros, mas sim no número de respostas. É fato que nas questões 5, 6 e 7, respectivamente itens (d), (d) e (c), há uma queda no número de respostas quando se trata de questões que abordam funções definidas por mais de uma sentença. Parece que os alunos não se sentem tão à vontade com esse tipo de função. Uma conclusão mais precisa deve ser possível após as entrevistas da etapa 2.

Nos parece interessante observar que no item (c), que apresentou menos da metade das respostas certas, boa parte dos que acertaram solucionaram a questão sem recorrer à teoria de integral. Estes aproveitaram a conveniência do gráfico e usaram métodos exclusivamente geométricos de cálculo de áreas de polígonos simples, o que é realmente mais fácil. Os que utilizaram integral cometeram outra vez mais o erro de não considerar a variação do sinal da função no intervalo.

Para a questão 8, cujo objetivo era saber se os alunos eram capazes de formalizar o conceito de integral definida, ocorreu um baixo número de respostas. Pesquisas já foram feitas que mostram que a definição formal, muitas vezes, não permanece ativa na imagem de conceito dos alunos, principalmente quando se trata de matemática em níveis mais elevados. A própria forma como a teoria matemática normalmente é exposta aos alunos, seguindo o encadeamento lógico de lemas seguidos de teoremas e demonstrações, não facilita a aprendizagem da definição formal (ver VINNER, 1991). Aliado a isso, temos os resultados das questões anteriores que são um prenúncio de que a definição formal do conceito de integral definida praticamente não é lembrada. O resultado deixa isso claro, já que dos poucos que responderam, cinco afirmaram não saber definir formalmente o conceito e dois, apesar de responder que saberiam, não o fizeram.

Talvez a resposta que sintetize boa parte dessa discussão seja a que foi dada pelo aluno 6, que afirmou que fez tudo sem a definição. Esse aluno respondeu todas as questões do questionário, não deixando sequer uma sem resposta, mas errou várias delas.

Capítulo 6
Etapa 2 – entrevistas

A segunda etapa da pesquisa, como já foi dito anteriormente, foi realizada através de entrevistas clínicas com alguns alunos que participaram da etapa 1. Foram entrevistados 5 alunos dentre os que participaram da etapa 1 que, por vontade própria, aceitaram participar. As entrevistas foram realizadas na UFRJ, fora do horário das aulas. O teor das entrevistas não foi levado em consideração para fins de avaliação dos alunos em qualquer disciplina cursada no período em curso na ocasião das entrevistas, ou em qualquer período de aulas futuro. Os alunos foram comunicados desse fato.

As entrevistas continham uma série de perguntas comuns a todos os alunos, que podem não ter sido feitas na mesma ordem, mudando de um aluno para outro dependendo do decorrer da entrevista. Os alunos foram deixados livres para se expressarem como quisessem, sem determinação de tempo.

Durante as entrevistas, foi utilizado o questionário da etapa 1, bem como as respostas originais dadas pelos alunos participantes, para que eles pudessem também analisar suas respostas e para que algumas questões levantadas quando da discussão das respostas do questionário pudessem ser esclarecidas.

Para que a análise das respostas dadas durante a entrevista pudesse ser feita da forma mais completa possível, evitando qualquer tipo de má interpretação, as entrevistas foram todas áudio-gravadas e posteriormente transcritas totalmente. No decorrer das entrevistas, tomamos notas auxiliares para registrar atos não verbais dos alunos que pudessem ser relevantes na análise. Nos trechos transcritos que forem citados, colocaremos tais atos entre parênteses, por exemplo (indica a região a ter a área calculada). Indicaremos pausas ou hesitações dos entrevistados com [...]. Seguem as perguntas contidas na entrevista.

1. Você tem alguma dificuldade com funções de um modo geral? Há algum tipo de função com o qual você fique mais desconfortável ou que você tenha problemas para traçar ou esboçar o gráfico?

2. Explique, com suas palavras, o que você entende por integral definida. Sem se preocupar com formalismo algum, sem definir formalmente. O que vem à sua mente?

3. Explique, com suas palavras, como é possível determinar se uma dada função f é ou não integrável, ou seja, se existe ou não $\int_a^b f(x)\,dx$.

4. Na sua concepção, há alguma relação entre existência da integral e existência de área a ser calculada?

5. (Somente se o aluno fizer menção direta à área para decidir sobre a existência de integral) Observe as seguintes funções e seus gráficos: Essas funções são integráveis? Há uma área a ser calculada?

a) f*(x) = 1, se x = 1 e f(x) = 0, se x* $\neq$ *1, x* $\in$ *[1,2]*; (figura A)

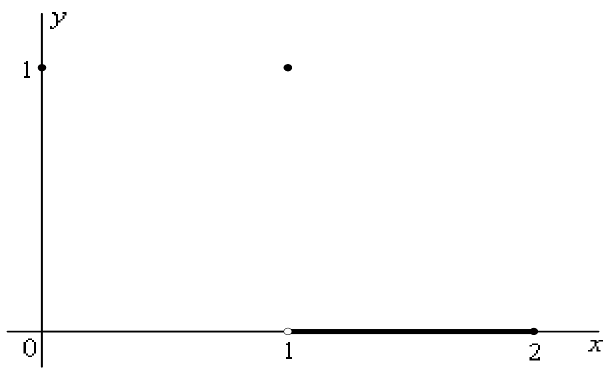


figura A

b) *f(x) = 1, se x é racional e f(x) = 0, se x é irracional, x* $\in$ *[0,1];* (figura B)

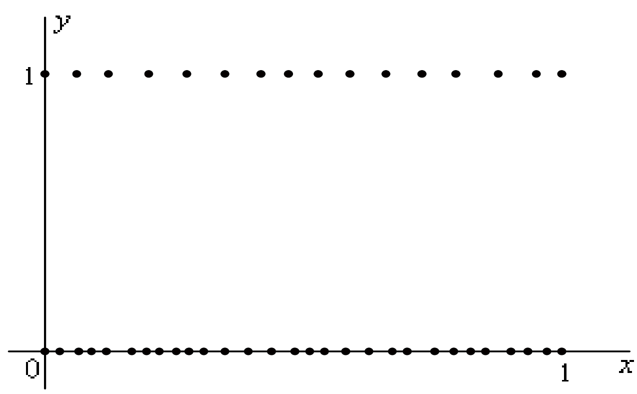


figura B

c) *f(x) = 0, se x é irracional e f(x) =* $\frac{1}{q}$*, se x =* $\frac{p}{q}$*, onde p e q são primos entre si, x* $\in$ *[0,1[;* (figura C)

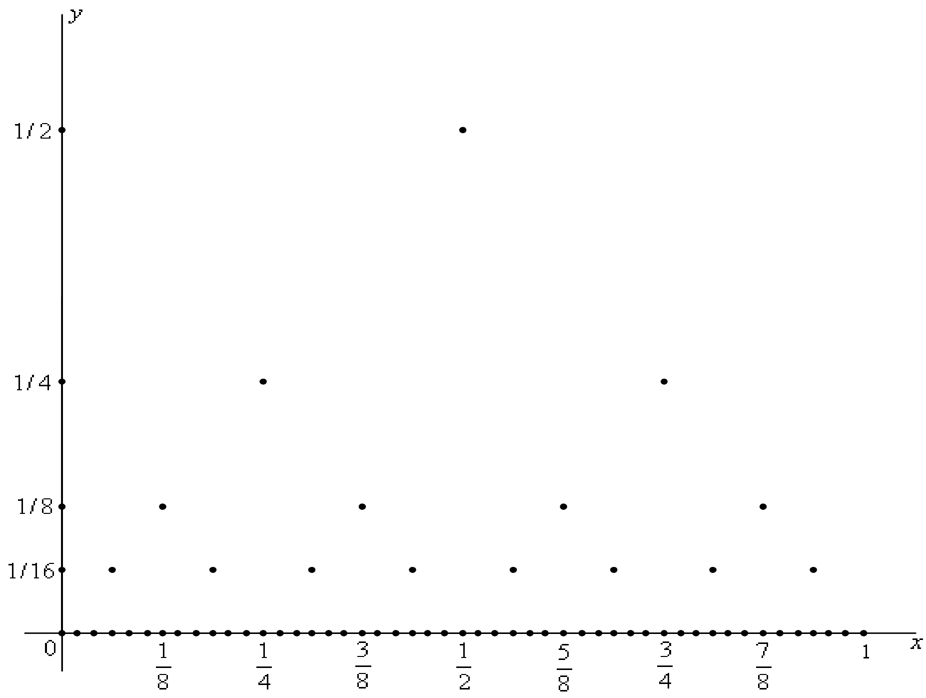


figura C

6. Qual é a área hachurada na figura D (*f(x) = cos(x)*)?

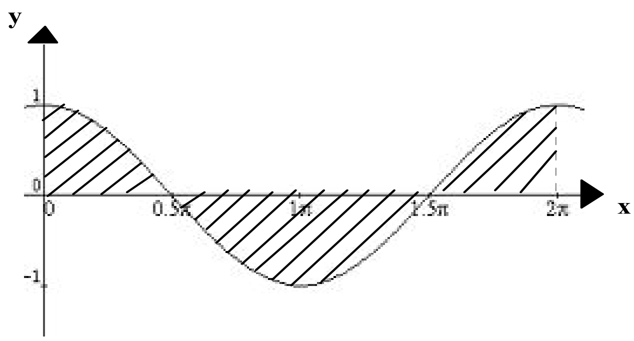


figura D

7. Calcule a área da figura E.

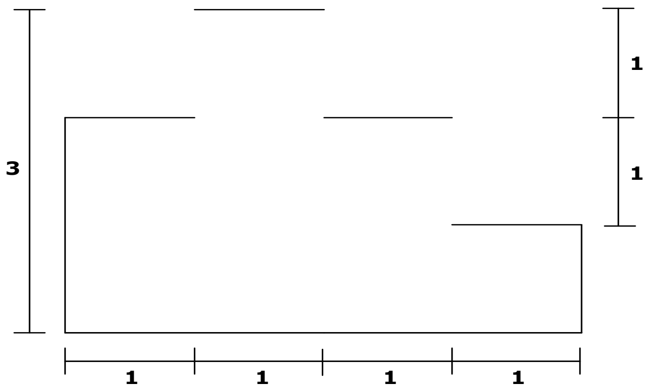


figura E

8. Qual é a área da região limitada pelo gráfico da função *g* e o eixo x, entre $x = 0$ e $x = 4$ (figura F)? ($g(x) = 2$, *se* $0 \le x < 1$; $g(x) = 3$, *se* $1 < x < 2$; $g(x) = 2$, *se* $2 < x \le 3$; $g(x) = 1$, *se* $3 < x \le 4$, $g(x) = 0$, *se* $x = 1$ *e* $x = 2$).

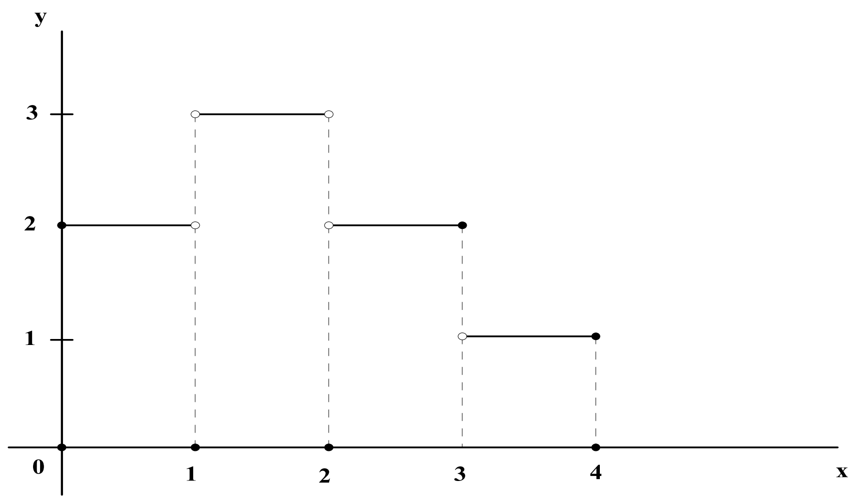


figura F

9. Você saberia dar uma definição formal para o conceito de integral definida?

Todas os gráficos expostos acima foram retirados de (SPIVAK, 1970).

6.1. Os participantes

Os alunos participantes, como já foi dito, eram todos alunos de graduação em matemática e foram escolhidos entre o grupo de 31 alunos que tiveram suas respostas analisadas quando da participação na etapa 1. A partir de um grupo de 11 alunos que se voluntariaram a participar das entrevistas da etapa final, foram escolhidos 5. O critério adotado na escolha desses 5 alunos foi simplesmente a disponibilidade em comparecer ao local das entrevistas nos dias e horas determinados, sem que isso prejudicasse sua participação nas aulas regulares.

Usaremos pseudônimos para nos referimos aos participantes. São eles: Marcos, Ravena, Luiza, Marcelo e Pedro. Eles cursavam, na ocasião da pesquisa, o 8° período, 7° período, 9° período, 5° período e 4° período, respectivamente.

6.2. Resultados e discussão

Faremos agora a análise acerca das respostas dadas pelos alunos durante as entrevistas clínicas da segunda etapa da pesquisa. Os nomes dos alunos encontrados nesse trabalho são todos pseudônimos. Durante essas discussões, faremos menções às respostas dadas por esses alunos para as perguntas do questionário da etapa 1, a fim de sanar possíveis dúvidas que permaneceram após a análise dos resultados do questionário feita no capítulo anterior, bem como tentar conhecer de forma mais aprofundada o raciocínio que levou os alunos a fornecer tais respostas. Reservamos uma seção para cada um dos alunos participantes.

6.2.1. Entrevista com Marcos

Com referência à numeração imposta na análise dos resultados do questionário da etapa I, Marcos é o aluno 14. Ele deixou de responder apenas as questões 5(c) e 8 do questionário.

Quando perguntado se possuía alguma dificuldade com funções de um modo geral e se traçaria tranqüilamente o gráfico de uma função dada naquela hora, que não fosse uma função de um tipo que necessitasse de cálculo de derivadas e etc, ele respondeu:

> Não, eu faço normalmente. Mas eu tenho um defeito crônico de errar em conta. Por exemplo, na análise, eu sei como é o método, eu sei como faz. Mas dependendo da análise, eu acabo errando. [...] Você sabe o que fazer para fazer o esboço, só que às vezes você erra um detalhe. Uma coisa que é para modular, você esquece de modular...

Ao ser perguntado se saberia explicar com suas palavras o que seria integral definida, o aluno confirmou o que havia respondido no questionário. Mencionou sobre área, mas não exclusivamente. Mencionou também partições e somas inferior e superior. Ele comenta:

> Eu começaria falando da questão da área, né. Da área sob a figura [...] quando ela é curva (faz o gesto de uma linha curva) você tem que procurar aquilo ali (faz o gesto que indica algo abaixo da linha). Falaria sobre a questão dos intervalos, dividiria um intervalo de R. Então você define o intervalo e vai dividindo o intervalo [...] eu falaria isso [...] sobre que vai aproximando, vai tendendo o número de intervalo ao infinito. Você vai aproximando ao máximo, aí você tem a área superior, a área inferior [...] e aí, quando elas forem iguais...

Sobre o critério usado por ele para decidir se uma dada função é integrável ou não, ele responde:

> Eu costumo [...] a primeira coisa que me vem à mente é a questão da descontinuidade. Se ela for descontínua em um número finito de pontos, eu sei que eu posso manobrar aquilo e ela é integrável. Então, quando ela é descontínua em um número infinito não enumerável, eu sei que aquilo vai dar problema.

E explica:

> Quando eu comecei a estudar essa questão dela ser integrável eu não [...] do número ser finito [...] faz sentido porque se eu tirar aquela linha (faz o gesto de uma linha vertical), se eu tirar aquele ponto do domínio, a área vai continuar a mesma, se eu tirar dois pontos, a área vai manter a mesma [...] se eu tirar um número finito, não vai dar alteração nenhuma.

Após mostrarmos o exemplo correto que ele deu no questionário de uma função não integrável, ele volta a afirmar que a primeira coisa que ele pensa na hora de decidir se uma função é integrável ou não é a questão da descontinuidade. Marcos afirma também acreditar que existam funções que são integráveis, mas que não possuem uma área a ser calculada no seu gráfico. No entanto, diz que essas funções são "esdrúxulas" e afirma ainda:

> Você consegue provar matematicamente que elas são integráveis, mesmo não tendo uma área associada.

Nesse ponto, mostramos o item (c) da questão 6 do questionário, que pedia a integral da função $f(x)=\begin{cases} 1 & se\ x=1 \\ 0 & se\ x\neq 1 \end{cases}$ no intervalo *[1,2]*, e perguntamos o que ele pensava do resultado. Ele respondeu: "É zero, né?". Depois de confirmarmos, ele espontaneamente afirmou que a função era integrável. Ao revelarmos que ele havia respondido no questionário que a função não era integrável, ele se assustou, perguntando "Eu disse que não?". E ao lermos e mostrarmos a resposta original dada por ele, que dizia que a função era descontínua em todos os pontos do seu domínio, ele exclama: "Ih, então errei feio aí".

Marcos demonstra estar confuso com o fato de ter respondido que a função não era integrável. Ao confirmar que a função possuía apenas um ponto de descontinuidade no intervalo pedido. Ele reafirma: "Ela é integrável. Eu respondi que não?"

É possível que, no momento em que respondia ao questionário, Marcos tenha pensado na função de Dirichlet (*f(x) = 0, se x é racional ou f(x) = 1, se x é irracional*) que é, de fato, descontínua em todos os pontos de seu domínio.

Sobre outras interpretações para integral definida que não sejam o cálculo de áreas, Marcos responde:

> Tem uma [...] sobre aplicações na física, em derivadas múltilplas, que é a questão da integralidade, você calcular, dá a idéia de soma, né, de totalidade. Você pode usar, por exemplo, calor [...] acho até que tinha uma questão dessa no questionário. [...] Você tinha que calcular o calor, né, depois o 'negócio' médio, alguma coisa assim [...] temperatura média.

Depois de mostrarmos a questão 1 do questionário, ele reafirma:

> Isso [...] então tem outras aplicações sim, outras idéias. Mas, acho que essas são secundárias, né. Quer dizer, na minha mente elas são secundárias.

Quando revelamos sua reposta para a questão 1, ele mesmo percebe seu erro ao não dividir o resultado da integral calculada pelo comprimento do arame:

> Ah, é [...] realmente. Ele quer a temperatura média, tem que dividir pelo comprimento do arame. Eu não dividi. Porque não fiz, não sei.

Levado a responder se seria capaz de fornecer uma definição formal para integral definida, ele respondeu negativamente, afirmando que esqueceria muitos detalhes. Afirmou também que, apesar de ter visto a definição em mais de uma oportunidade, esta não "fica" na sua mente, e que muitas idéias que ele tem de integral "estão na definição formal e outras não estão".

Marcos dá exemplos de professores com os quais já cursou disciplinas anteriores para sustentar uma opinião própria sobre o sistema de ensino de matemática. Segundo ele:

> É o sistema de ensino da UFRJ, né. Nem é só da UFRJ, é o sistema de hoje, é o sistema de ensino de matemática hoje, você pega um livro é definição, exemplos, teorema. É a 'fórmula de bolo'.

Para calcular a área hachurada limitada pela função cos(x) e o eixo x no intervalo de 0 a 2π (figura D) Marcos deu a seguinte solução e justificou:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx + \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x\, dx \right| + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x\, dx$$

> Eu dividiria em partes e modularia a parte de baixo, de π/2 a 3π/2. [...] Porque aqui (aponta para a parte hachurada do gráfico abaixo do eixo x) o valor da integral seria negativo. E como você que saber a área...

Para a área a ser calculada na figura F a solução de Marcos foi a seguinte, seguida de sua justificativa:

$$\int_0^1 2\,dx + \int_1^2 3\,dx + \int_2^3 2\,dx + \int_3^4 1\,dx$$

É isso aqui. Integrar de 0 a 1, 2; de 1 a 2, 3; depois de 2 a 3, 2; de 3 a 4, 1.

Então, depois de mostrarmos a figura E e pedirmos para que ele calculasse a área, Marcos afirma prontamente: “Não tem como calcular”.

Voltamos a mostrar a figura F, questionando por que nesse caso, havia como calcular, e Marcos responde, mais uma vez, imediatamente:

> Aí também não tem (risos). O problema é que dentro da teoria de integral, você já associa direto.

Nesse momento, quando pedimos que ele desenvolvesse o que havia acabado de afirmar, Marcos faz uma analogia com uma espécie de ‘anedota’ para esclarecer seu ponto de vista. Ele acredita que o fato de estarmos falando sobre integral deixa implícito que é uma questão que deve ser resolvida usando integral, e com isso, há uma associação com área. Ele explica:

> Você tá falando direto integral, integral, integral, você direto já pensa. [...] Você já tá imerso naquela realidade.

De posse das soluções originais de Marcos para as questões do questionário da etapa I, comparamos o que ele respondeu nas questões 5(a) e 6(a), bem como nas questões 5(b) e 6(b). Como já foi dito no capítulo anterior, havia uma suspeita de que essas respectivas questões tiveram suas respostas diretamente associadas por alguns alunos, por tratarem de funções iguais no mesmo intervalo. E Marcos foi um desses alunos (p. 70). A diferença é que na questão 5 foi pedida a área e na questão 6 foi pedida a integral, o que significa que os resultados não necessariamente devem ser iguais. Procuramos, então, conhecer os motivos que o levaram a fornecer tais respostas.

Mostramos, primeiramente, o que ele havia respondido na questão 5(a), na qual havia o gráfico da função sen(x) traçado e hachurado corretamente, mas sem reposta, apenas com a indicação ‘item 6(a)’. A seguir, mostramos sua resposta da questão 5(b), que possuía um esboço errado do gráfico, além de algumas contas (p. 51), também com a indicação ‘item

6(b)'. Ele confirmou e acrescentou ainda: "Acho que foi nessas aí que eu saí colocando idem, idem [...]".

Só então mostramos suas resoluções (corretas) das questões 6(a) e 6(b), respectivamente 0 e 14/3, e perguntamos se, de fato, era "idem", como ele havia afirmado. Ele respondeu:

> Deixa eu olhar [...] (lê suas respostas para as questões 5(a), 5(b), 6(a) e 6(b)) (pensa). Pois é, eu tenho pra mim que não é idem, mas eu coloquei isso, eu lembro. Porque pra mim, a área seria essa parte aqui (mostra o que ele pensou que fosse, indicando no seu próprio desenho do gráfico a região complementar da região correta). Mas aí eu pensei, não teria sentido calcular isso, teria mais sentido calcular aqui (indica a região hachurada corretamente). [...] Por ter mais sentido calcular aqui (indica novamente a região correta), para ter um valor [...] idem a 6(a).

Vamos reproduzir agora um trecho do nosso diálogo com Marcos, onde é possível perceber claramente o momento em que o conflito potencial vem à tona. Esse trecho é continuação da resposta dada por Marcos, citada acima.

> Pesquisador (P): E aí no seu item 6(a) [...]
> Marcos (M): (interrompe) Deu isso aqui, deu zero (indica sua própria resposta).
> P: Foi pedida a área (indicando o enunciado da questão 5) e seu resultado deu zero (mostrando a referência feita por ele ao item 6(a)).
> M: Exato.
> P: Essa área é zero?
> M: Não [...] Ah, entendi, entendi! Entendi seu ponto.
> P: Como você interpreta essa diferença de resultado?
> M: É questão realmente do que foi pedido, em uma você pediu a área e na outra você pediu a integral, e você tem que levar em consideração o sinal negativo, que foi o caso do módulo, que eu modulei na outra (se referindo à função cos(x) que ele havia trabalhado minutos antes).

Em relação às questões 5(b) e 6(b), depois de ler suas respostas, Marcos percebe rapidamente que, nesse caso, trata-se do mesmo resultado:

> No caso de 0 a 2, como as raízes são 2 e 3, ela vai estar positiva, então vai ser a mesma coisa (olhando para sua resolução da questão 6(b). Esse é o ponto que você quer chegar, né? [...] E aí, seria isso, né? A área seria o mesmo que a integral por ela ter valor positivo, né?

Considerações

Se levarmos em consideração o que Marcos respondeu na entrevista em relação à teoria de integral, podemos afirmar que a idéia de área está relacionada com o conceito de integral na sua imagem de conceito, mas não de uma forma indiscriminada. Partições e somas inferior e superior também fazem parte da sua imagem de conceito.

Ele reconhece a existência de funções que são integráveis, porém que não possuam nenhuma área a ser calculada, ou a possibilidade de mostrar que uma função é integrável, sem relacionar essa integral com uma área. Isso indica que a relação entre integral definida e área feita por Marcos em sua imagem de conceito, não é uma relação de identificação de uma com a outra.

Nossas suspeitas sobre as questões 5(a) e 6(a), bem como sobre as questões 5(b) e 6(b) foram confirmadas. De fato, Marcos não resolveu o item (a) dessas questões por acreditar que se tratava da mesma coisa. Apesar de a questão 5 tratar da área, enquanto a questão 6 tratava de integral, Marcos associou diretamente uma a outra. Isso produziu um resultado sem sentido para a questão 5(a), uma vez que, mesmo se confundido inicialmente, ele havia desenhado o gráfico da função e hachurado a região correta da qual se queria saber a área. Somente depois de chamarmos atenção para a falta de nexo do resultado por ele obtido, ele reagiu e compreendeu seu erro.

Em seguida, em relação às questões 5(b) e 6(b), Marcos compreendeu de forma mais rápida porque realmente as soluções teriam que coincidir. No entanto, quando respondeu o questionário durante a etapa I, ele não teve esse discernimento. Isso fica evidente por um certo tom de dúvida expresso por ele, procurando confirmar se suas afirmações estavam corretas (“E aí, seria isso, né? A área seria o mesmo que a integral por ela ter valor positivo, né?”, p. 102).

Apesar de sua imagem de conceito de integral não estar totalmente pautada na idéia de área, esta possui grande influência na forma de pensar de Marcos. Ele tem como atributo ativo na sua imagem de conceito a questão do número de pontos de descontinuidade do domínio e o utiliza como primeiro critério para decidir se uma função é integrável ou não. No entanto, no momento em que justifica esse critério, o faz pensando diretamente na área sob a curva e se esta seria modificada se fossem retirados os tais pontos de descontinuidade.

Portanto, podemos afirmar que, apesar de partições, somas superiores e inferiores fazerem parte de sua imagem de conceito, como ele deixou claro, estas idéias não são ativas. Elas são acessadas somente no momento em que ele é levado a expressar com palavras o que pensa sobre integral definida. Isto é, essas idéias fazem parte apenas de sua definição de conceito.

Com isso, apesar de possuir uma definição de conceito satisfatoriamente semelhante à definição formal, a imagem de conceito de Marcos parece ser restrita, sem estar relacionada com a definição de conceito. Isso pode ser uma fonte de conflitos, na medida em que o que deveria ser evocado para resolver um problema, só e feito quando é solicitada uma expressão com palavras.

6.2.2. Entrevista com Ravena

Em relação ao questionário da etapa 1, Ravena foi a aluna 17. Deixou de responder apenas as questões 6(d) e 8.

Ravena diz não ter dificuldades em relação ao conceito de função nem no traçado de gráficos, de uma forma geral. Ao ser levada a responder o que seria integral definida, com suas palavras, sem formalismo, ela respondeu, sem pestanejar, de forma quase igual à que fez no questionário da etapa I para a questão 2:

> Integral definida seria a área do gráfico entre o desenho da função e o eixo x.

E quando foi perguntada se essa relação com área era imediata, respondeu, mais uma vez, de forma rápida: “Sim. Para mim é. Bem clara na minha cabeça”.

Sobre seu critério para determinar se uma função é integrável ou não, Ravena responde:

> Uma função [...] por exemplo, se ela for uma função que não é continua em nenhum ponto, ela não é integrável. Acho que só é integrável se é descontinua num número finito de pontos.

Após essa resposta, mostrarmos sua resposta original dada no questionário para a mesma questão (questão 3 do questionário), que dizia: "Se *f* for uma função contínua ou descontínua em um número finito de pontos do intervalo *[a,b]*, então é sempre possível calcular a área abaixo do seu gráfico e, portanto, f é integrável". Sobre, mais uma vez, ter feito relação com área, ela explica:

> Quando penso em integral vem na minha cabeça exatamente essa idéia de área. Por exemplo, uma função que vale *x* nos racionais e *–x* em, R-Q. Você não tem como calcular "raiz de linhas", né. Isso não existe. Ela não é integrável em nenhum ponto [...].

Ela confirma que o critério usado é aliar continuidade à idéia de área. Se for possível fazer a área se o número de descontinuidades permitir, a função é integrável. Em sua justificativa, Ravena acaba por fornecer uma idéia de definição para o conceito de integral, que, segundo ela, é mais simples:

> Porque eu aprendi que a maneira mais fácil de você calcular uma área é através de áreas de retângulos. É a maneira mais trivial. E quando a gente olha para o conceito de integral, é exatamente através desses retângulos. Porque você pega o intervalo *[a,b]* de uma função e quer a integral nesse intervalo, você vai parcelando ela em intervalos tão pequenininhos, infinitesimais e você vai somando e a integral é o limite da soma desses pequenos retângulos que você fez entre o gráfico da função e o eixo x. Seria mais ou menos isso. [...] Só que é aquela história, você me perguntou como é que eu faço para saber se é integrável ou não. Essa definição que eu dei é uma definição informal. Não é a definição certa. A certa, pela análise, diz que o limite das somas superiores é igual ao limite das somas inferiores. Mas como eu não estava com tempo para escrever isso, definir soma superior e inferior, eu usei uma definição mais simples.

No entanto, ela confirma que não seria capaz definir o conceito de integral definida de maneira formal, o que justifica o fato de ela não ter respondido a questão 8 do questionário. Diz que pecaria em muitos detalhes, mas que sabe a idéia principal. Confirma ainda que o que ela usou para responder as questões não foi a idéia da definição formal, e sim a que ela dera, considerada mais simples por ela:

> É [...] é tipo assim, eu acho uma maneira mais simples. Eu acho muito mais fácil você chegar e explicar dizendo que uma função é integrável nesse sentido, usando esse critério da continuidade e descontinuidade do que dizer que o limite da soma superior é igual ao limite da soma inferior, porque você teria que definir muita coisa no meio do caminho. E no fundo no fundo é a mesma coisa.

Mostramos a função f(x) = 0, se x é irracional e f(x) = $\frac{1}{q}$, se x = $\frac{p}{q}$, onde p e q são primos entre si, x $\in [0,1]$, com seu respectivo gráfico (figura C) e perguntamos se, baseada no seu critério, poderia afirmar que a função é integrável ou não. Ela diz: “Parece que não. Parece que não é integrável”. Ela ficou surpresa quando confirmamos que a função é integrável e, após pensar por alguns instantes, tenta entender:

> Deve ser por causa do domínio. Deixe eu ver (observa o gráfico atentamente) [...] O domínio é entre 0 e 1, né? [...] Porque isso acontece muito com [...] Pois é, porque é aquela história, a noção de continuidade depende do domínio, entendeu? Porque às vezes você olha uma função e diz assim, ela não é contínua, mas se você olhar o domínio, por exemplo, exclui aquele ponto domínio e ela é contínua. [...] o que eu falei, vai depender domínio. Porque se a noção de integral, pelo menos a que tem na minha cabeça, depende da noção de continuidade e a noção de continuidade depende do domínio, então é razoável que dependa do domínio. Que tenha a ver com domínio.

Ravena demonstra certa incredulidade quanto ao fato da função ser integrável. Olha o gráfico por longos instantes e afirma: “Mas é muito estranho porque [...] porque ela é parecida com essa (indica a função de Drichlet). [...] É muito parecida e eu já tenho na cabeça, pôxa, como é que você vai calcular isso? Aí fica complicado”. Ao tomar conhecimento de que a integral para a tal função é zero, e depois de pensar por mais alguns instantes, ela observa:

> É razoável que dê zero. [...] Porque se você levar em conta esse conceito de área abaixo e tal, você tem linhas aqui. E tipo, pra você pegar e formar linhas [...] você não tem como calcular área de linhas. Então tipo, é zero. Pra mim é zero, entendeu?

Para calcular a área hachurada na figura D, Ravena deu a seguinte solução, sem problemas:

> Bom, eu separaria.
>
> $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos x \, dx$$
>
> Seria isso. A integral total. Seria a soma dos intervalinhos.

Mostramos a questão 5(a) do questionário e sua resolução correta (ela calculou o dobro da integral de sen x, entre 0 e π). Observando sua própria solução, explicou:

> Não fiz direto, está vendo? Eu separei em dois intervalos. [...] Porque tinha uma área abaixo do gráfico. Se eu juntasse ia dar zero. Como não é zero, porque a gente consegue enxergar visualmente, pelo gráfico você vê que não é zero. É diferente daquela que diz que y = 1 para x = 1 e y = 0, se x diferente de 1. É diferente, entendeu? (Fazendo referência à questão 5(c)).

Reproduziremos agora um trecho da entrevista que nos permite compreender a forma de pensar de Ravena quando resolveu as questões 5(a), 5(b), 6(a) e 6(b) do questionário. Como já foi dito anteriormente, um dos objetivos da entrevista era esclarecer sobre a resolução dessas questões, principalmente se foram relacionadas indiscriminadamente, como suspeitamos para alguns alunos. Ravena se encaixa nesse caso, pois resolveu corretamente as questões 5(a) e 5(b), mas apenas escreveu as respostas das questões 6(a) e 6(b) idênticas à 5(a) e 5(b), respectivamente, sem fazer nenhum cálculo (p.55).

Pesquisador (P): Olhe a questão 6(a) agora.
Ravena (R): (Lê o enunciado) É a mesma coisa, né?
P : Olhe o que você respondeu na 6(a). (Ela respondeu somente “4”)
R: Ué, mas não é a mesma coisa?
P: Eu que vou te perguntar isso agora. É a mesma coisa ou não é?R: Eu entendo como a mesma coisa.
P: Mesmo lendo os enunciados?
R: Sim.
P: Ok. É por isso que você colocou direto “4” aqui?
R: É. Eu olhei a resposta lá. Eu não fiz de novo a conta. Eu não fiz a conta porque eu olhei lá.
P: Você não fez a conta porque olhou aqui? (Indicamos a sua solução da questão 5(a))
R: Exatamente
P: Agora olhe a 5(b) e a 6(b), por favor.
R: (Lê a questão 5(b)) É uma parábola, né...
P: Agora a 6(b).
R: (lê a questão 6(b)) Também é a mesma coisa, né?
P: Aí você tratou do mesmo jeito. Fez aqui a conta (indicamos sua resolução da questão 5(b)), que está certa, e aqui idem? (Mostramos que ela respondeu na questão 6(b) somente “14/3”)
R: Exatamente.
P: Ok. Será que [...]
R: (Interrompe) É o que estou te falando. No caso eu relacionei diretamente com a área. Por isso que eu fiz a mesma coisa. Está pedindo a mesma coisa.
P: No item (a) e no item (b)?
R: É.
P: Aqui é pedida a área e aqui é pedida a integral. (Mostramos os enunciados das questões 5 e 6, respectivamente).
R: Nesse caso (questões 5(b) e 6(b)) coincidiu, entendeu?
P: Existe diferença?
R: Não. Nesse caso coincidiu [...] quer dizer, na verdade não coincidiu, acho que é a mesma coisa. Pra mim a integral está muito atrelada a essa coisa de área. Então, realmente é a mesma coisa. Tanto que achei até estranho estar pedindo a mesma coisa. Eu olhei e falei: ué, ele está

> pedindo a mesma coisa de maneira diferente? Por isso não fiz a conta de novo.

Quando mostramos a figura E e pedimos que calculasse a área, Ravena afirmou:

> Tipo, só que é uma figura aberta. Não tem como calcular. Tipo, quer dizer, se fosse fechada aqui [...] (indica as descontinuidades existentes no gráfico).

A seguir, quando pedimos para ela calcular a área da região limitada pelo gráfico da função g (referente à figura F) e o eixo x entre 0 e 4, Ravena respondeu sem utilizar a teoria de integral, usando apenas área de retângulos, e o fez de forma correta, sem dificuldades. E explicou:

> Aí então o que acontece [...] supondo que ela seja descontinua só nesses pontos aqui que estão marcados. Então é um numero finito de pontos. Então pelo meu critério, ela é integrável. Então existe uma área e eu posso calcular a área disso aqui. [...] É aquela história, como eu vou calcular a área de uma linha? Uma linha é uma coisa desprezível. Não entraria. (Indicando os trechos das retas $x = 1$, $x = 2$ *e* $x = 3$ que deixam claras as descontinuidades nesses pontos).

Acrescentou ainda que poderia ter feito usando a teoria de integral, dividindo o intervalo de forma semelhante à que foi feita por ela, mas que da maneira como ela fez seria mais fácil. Então, questionada se o que a incomodou na figura E não incomodou da figura F, ela argumenta:

> Não porque [...] no caso de geometria plana, isso aqui não é uma figura fechada (figura E). Então no conceito de Geometria plana não faz sentido você falar em área. Mas, no contexto de integral, faz todo sentido. Essa que é a diferença. Foi o que falei pra você. Isso aqui tem que usar conceito de integral, pois no caso de Geometria Euclidiana, você não tem como calcular área de coisas abertas. Pelo menos eu nunca vi.

Sobre as aberturas no gráfico da função da figura F, que vêm a ser a mesma figura E, ela afirma:

> Mas o fato é que elas [...] como se pudessem ser desprezadas no caso da teoria de integral, aqui na Geometria Euclidiana não.

Sobre uma outra interpretação para integral, que não fosse área, ela afirma que é possível que haja, mas que não saberia. Depois de mostrarmos a primeira questão do questionário, ela reafirma que não a relacionaria com integral. Somente depois de ver sua própria solução (errada) e pensar por alguns instantes, ela conclui, lembrando-se do que pensou para resolvê-la:

> Acho que entendi. Você trabalha com um critério, não é? Em cada ponto você tem uma temperatura. Aquela coisa do infinitesimal. Tão pequeno quanto se queira. Acho que foi mais ou menos nessa idéia que eu fiz essa questão. Mais ou menos isso. Para fazer a temperatura total, seria um somatório das possíveis temperaturas. É realmente, a idéia de integral está relacionada ao somatório. Mas eu já havia falado isso porque é o somatório dos retangulozinhos [...].Deve ser por isso que usei integral, porque me veio na cabeça a idéia de somatório. Exatamente. Foi por isso que eu fiz. Faz todo sentido. Você perguntou, pode relacionar a outra coisa? Sim, pode, ao somatório. Somatório de coisas infinitesimais.

No entanto, afirma mais uma vez que, em sua mente, quando o assunto é integral, a idéia que surge primeiro é a de área. Levada a explicar se ela sabe porque isso acontece, ela finaliza prontamente: “Porque me ensinaram. Foi como entrou em mim. Como internalizou em mim”.

Considerações

O que há de mais importante na entrevista com Ravena são seus esclarecimentos sobre a relação entre integral e área, que ela faz de forma quase imediata. Durante vários momentos ele deixou isso claro. Sua definição de conceito para integral definida contém somente a noção de área.

Essa relação indiscriminada salta aos olhos no momento em que Ravena é perguntada sobre o que a levou a responder às questões 6(a) e 6(b) do questionário da etapa I de forma idêntica às questões 5(a) e 5(b), respectivamente, sem fazer nenhum cálculo, apenas escrevendo o valor final. Nesse ponto o objetivo era conduzi-la à uma situação de conflito. No entanto, a afirmação categórica feita por ela de que acreditava se tratar do mesmo objetivo em ambas as questões 5 e 6 e que por isso deveriam ser resolvidas da mesma forma, mesmo sendo levada a reler o enunciado várias vezes, nos faz concluir que integral e área têm uma relação de identidade na imagem de conceito de Ravena. E essa relação não foi estremecida frente a um conflito potencial.

Apesar de a questão do número de descontinuidades também pertencer a sua imagem de conceito, essa idéia atua em parceria com a noção de área. Juntas, essas duas idéias formam o critério usado por Ravena para decidir se uma função é integrável ou não. Esse critério foi explicado por ela e foi posto em prática durante a entrevista quando foi levada a explicar sobre suas concepções em relação às questões referentes às figuras B, C, E e F. Ela se mostrou muito surpresa e intrigada com o fato de a função referente a figura C não obedecer seu critério, principalmente depois de compará-la à função de Drichlet, que foi usada por ela como exemplo de função não integrável na questão 4(b) do questionário, e cujo gráfico também lhe foi mostrado.

Até mesmo para explicar seu raciocínio ao resolver corretamente a questão 5(a) do questionário da etapa I, Ravena justificou sua resposta afirmando que levou em consideração a variação do sinal porque, se não considerasse, o valor da área seria zero, o que não poderia ocorrer já que, visualmente, era possível perceber que havia uma área a ser calculada. Esse raciocínio não poderia ser usado na questão 6, que pedia a integral, mas ela simplesmente copiou o resultado obtido na questão 5, como ela mesma afirmou (p. 70/71).

Ravena teve um bom desempenho nas questões de caráter mais prático do questionário da etapa I, ou seja, nas questões 5 e 6 - apesar de alguns acertos terem sido fundamentados em concepções erradas, como já foi observado - e na questão 7. Entretanto, para as demais questões, o resultado não foi o mesmo, como mostram suas respostas para as questões 2 e 3, praticamente iguais as dadas durante a entrevista, ambas pautadas em área.

Depois de mostrar de várias formas que integral e área estão presas uma à outra em sua imagem de conceito, torna-se compreensível o fato de Ravena ter dito não conhecer outra interpretação para o conceito de integral que não fosse área.

A entrevista com Ravena nos permite concluir que o que funciona ativamente em sua imagem de conceito de integral definida é a noção de área, uma vez que nem mesmo quando foi exposta à uma situação conflitante, houve mudança em sua forma de pensar.

6.2.3. Entrevista com Luiza

Em relação ao questionário da etapa 1, Luiza foi a aluna 24. Ela respondeu todas as questões.

Primeiramente, Luiza responde que não possui nenhuma dificuldade com funções em geral, principalmente no traçado e interpretação de gráficos.

Sobre uma explicação não formal para o conceito de integral definida, Luiza responde:

> Eu escreveria que é a área abaixo do gráfico. Tentaria aproximar a área com aqueles retângulos. Seria a soma das áreas daqueles retângulos, naquele intervalo. [...] Ia somar as áreas dos retângulos, fazer o limite para tentar aproximar a área abaixo daquele gráfico.

Quando perguntada como faz pra saber se uma função é integrável ou não, qual ou quais critérios usa, ela responde, depois de pensar por alguns instantes: “Pelo que eu me lembre, se ela é contínua, ela é integrável, não é isso?”. Então, questionada se realmente usa esse critério, ela responde que não. Logo em seguida, pede a confirmação do que significa a função ser integrável ou não. Nesse momento, mostramos as respostas dadas por ela para o questionário da etapa 1, na questão 3, que pedia exemplos de funções integráveis e não integráveis. Como exemplo de função integrável, ela deu a função $f(x) = x$ e justificou sua escolha: “Porque eu já sabia que no final ia dar um número bonitinho”. E para exemplificar uma função não integrável ela deu $f(x) = 1/x$, no intervalo $[0,1]$, e explica:

> Mesma coisa. Aqui eu sei que no ponto zero ela é descontinua, aí eu [...] Eu tentei ver alguma que de repente ia dar infinito ou uma constante mais infinito, que eu ia saber que não ia convergir, né? Eu não lembro se eu pensei se ela é continua ou não no zero. Eu acho que sim, porque se

> agente tem um ponto em que ela não é contínua, ali a gente vai ter algum problema.

Questionada se poderia relacionar o fato de existir a integral de uma determinada função com o fato de haver uma região para se calcular a área, ela responde, sem demonstrar segurança: "Acho que sim porque a gente usa a integral para calcular as áreas, né?" No entanto, nesse momento, Luiza demonstra não ter compreendido bem a pergunta. Então reformulamos e perguntamos se o fato de ela encontrar algum valor no cálculo da integral implica que existe uma região da qual se pode calcular a área e ela confirma que sim, prontamente.

Pedimos então que ela analisasse a função $f(x) = 1$, *se* $x = 1$ *e* $f(x) = 0$, *se* $x \neq 1$ no intervalo $[1,2]$ bem como o respectivo gráfico e respondesse se é integrável ou não e qual seria o valor da integral. Depois de fazer seu próprio gráfico e pensar por um bom tempo, respondeu que a integral é zero, mas hesitou muito na justificativa e acabou mudando sua resposta:

> Porque é a integral de 1 a 2. Aí aqui seria [...] é [...] de 1 a 2 ela vale zero [...] se bem que nesse ponto aqui ela vale 1, né? Deixa eu pensar [...] Então ela não é continua [...] Acho que ela não é integrável [...] Eu acho que ela não é integrável.

Luiza demonstrou muita insegurança em sua explicação. Em um primeiro momento afirmou que o resultado seria zero, mas depois de pensar por um tempo, concluiu, ainda sem certeza, que a função não seria integrável. Tentou justificar usando argumentos da teoria de integral imprópria, por causa do ponto $x = 1$, segundo ela. Ao afirmarmos não ser o caso para integral imprópria porque o ponto $x = 1$ pertencia ao domínio, sua confusão aumentou ainda mais. Nesse momento, mostramos a ela sua resposta para a mesma questão no questionário da etapa 1, onde ela deu reposta igual a zero, mas sem nenhuma justificativa. Depois de ler, ela comenta:

> Acho que esse ponto aqui, ele não vai influenciar (indica o ponto x = 1) [...] Primeiro eu disse que não é integrável e aqui eu tô falando que dá zero [...] Acho que esse aqui (indica o ponto $x = 1$ novamente) é como se fosse uma região degenerada, então não vai [...]. Estou totalmente confusa!

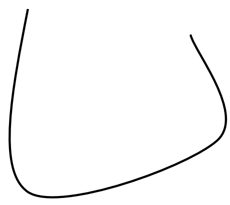
Luiza ainda pensou mais alguns instantes, mas não conseguiu chegar a uma conclusão definitiva para a questão.

Apresentamos em seguida a função *f(x) = 1, se x é racional e f(x) = 0, se x é irracional,* $x \in [0,1]$, que ela reconheceu imediatamente pelo nome de função de Drichlet, e seu respectivo gráfico (figura B). Depois de pensar um pouco, concluiu que a função é integrável, mas não foi capaz de justificar: “Eu não me lembro, mas sei que ela é integrável.”

No momento seguinte, mostramos o gráfico da função *f(x) = 0, se x é irracional e* $f(x) = \frac{1}{q}$, *se* $x = \frac{p}{q}$, onde p e q são primos entre si, $x \in [0,1[$ (figura C). Primeiramente ela afirma que a função é integrável, mas pede para confirmarmos que a função anterior (Drichlet) era realmente integrável como ela havia respondido. Ao afirmarmos que a função anterior não é integrável, ela se surpreende, mas muda seu discurso, dizendo que chutaria que a função da figura C não é integrável porque a de Drichlet não é, numa clara comparação entre os dois gráficos. Mais uma vez demonstra surpresa ao revelarmos que a função da figura C é integrável, enquanto a de Drichlet, não é. Luiza afirma que ficou confusa porque os dois gráficos eram muito parecidos (*“com vários pontinhos”*), que sugeriam que ambas as funções eram descontínuas, e que, por isso, deveriam se comportar da mesma forma.

Mostramos a figura E e pedimos para que ela calculasse a área da figura, ao que ela imediatamente começou a completar a figura com segmentos de reta onde não havia nenhuma linha, de modo a completar retângulos. Perguntamos porque ela traçou os seguimentos auxiliares, se eles não estavam na figura original e ela respondeu: “Eu faria assim. Aqui é um retângulo...” (dividindo a figura em quatro retângulos de base igual a 1). Luiza não conseguia pensar em nada diferente de fechar a figura usando segmentos de retas, mesmo que disséssemos seguidas vezes que a figura original não continha tais segmentos, e que era uma figura aberta.

Como Luiza demonstrou não ter compreendido bem a tarefa anterior, o objetivo do que foi pedido, acrescentamos uma outra pergunta. Perguntamos se era possível calcular a área da seguinte figura:



O trecho da entrevista a seguir mostra o momento em que Luiza percebe uma situação de conflito.

> Luiza (L): Acho que pelo mesmo modo que eu tava pensando, dá pra calcular.
> Pesquisador (P): Ok. Então seu raciocínio seria fechar? Como?
> L: (Pensa por algum tempo) É verdade! Eu posso fechar de várias formas, né?
> P: Você quer responder de novo essa pergunta aqui? (pergunta sobre a área da figura E, feita momentos antes).
> L: Quero
> P: Aquela pergunta anterior que eu tinha te feito sobre essa figura (indico a figura E), é possível calcular a área disso?
> L: Não
> P: Porque?
> L: Porque não é limitado. (continua pensando)
> P: Tem mais algum outro motivo?
> L: E porque não é contínua.

Podemos afirmar que quando se tratou de uma região que não era formada por segmentos de retas, Luiza percebeu que fechar tal região não era tão imediato como ela havia feito antes, usando segmentos de retas de forma automática.

Sobre o cálculo da área hachurada da figura D, Luiza deu a seguinte solução:

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = sen\, x\Big|_0^{\pi/2} = 1$$

$$A_2 = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos x \, dx = -sen\, x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 2$$

$$A_3 = A_1 = 1 \Rightarrow A = 1 + 2 + 1 = 4$$

E respondeu a questão 8 da seguinte forma, sem usar a teoria de integral.

$$A_1 = 2 = A_3$$

$$A_2 = 3$$

$$A_4 = 1$$

$$A = 2 + 3 + 2 + 1 = 8$$

Luiza afirmou que poderia ter usado integrais para calcular a área pedida, mas não era necessário.

Perguntamos a Luiza se ela concordaria que o gráfico da figura F e a figura E são regiões iguais e ela respondeu que não, e justificou dizendo: "Nesses pontos tem diferença" (indicando os pontos $x = 1$ e $x = 2$), mas não soube responder porque haveria tal diferença (*"Não sei te responder"*).

Sobre uma definição formal de integral definida, Luiza foi capaz apenas de mencionar alguns itens, mas sem nenhum encadeamento:

> Partições num intervalo [...] Aí seria o limite do somatório das áreas mesmo, $f(x_i)$ vezes um Δx_i, com limite de delta x indo pra zero...

Em relação às respostas dadas por ela no questionário da etapa 1, Luiza afirma não se lembrar do que pensou quando respondeu a primeira questão, que tratava da temperatura média em um arame. Ela errou a questão (apenas fez a derivada da função x^2). Nesse ponto, perguntamos se ela conhecia alguma outra aplicação ou interpretação do conceito de integral definida que não fosse o cálculo de áreas e Luiza respondeu "somatório", depois de pensar por alguns instantes.

Levada a justificar a diferença de resultados nas suas respostas (corretas) para as questões 5(a) e 6(a) que tratavam da mesma função no mesmo intervalo, com a diferença que a questão 5 pedia a área e a questão 6 pedia a integral, Luiza respondeu:

> Porque como é pra calcular a área, não faz sentido calcular uma área negativa, aí tem que rebater pra parte positiva do eixo. (em relação à

> questão 5(a)). Nesse caso, é a integral mesmo, não é a área que ele está pedindo, né? (em relação à questão 6(a)).

Quando pedimos que ela comparasse suas respostas (também corretas) para as questões 5(b) e 6(b), e explicasse porque nesse caso não houve diferença no resultado, ela respondeu:

> Porque na verdade a integral é aquela área que a gente falou desde o início. Calcular a área abaixo da região. Como aqui a região está na parte positiva do eixo, aqui é a integral justamente da área, não tem que fazer nenhuma troca de sinais.

Considerações

Luiza demonstrou na entrevista que o que lhe vem à mente quando pensa em integral é justamente a noção de área. No entanto, área não está explicitamente contida em seu critério para decidir se uma função é integrável ou não. Luiza afirma claramente que o critério utilizado por ela é simplesmente saber se, através dos cálculos, chega-se a um número como resultado. Se sim, é porque a função é integrável (p. 111). Seguindo esse critério, para que uma função seja não integrável, não deve ser possível chegar a algum valor por intermédio de cálculos utilizando o algoritmo (Teorema Fundamental do Cálculo). Por isso ela buscou, como exemplo, uma função e um intervalo tais que houvesse algum ponto para o qual a função escolhida não estivesse definida naquele intervalo. Segundo Luiza, ela sabia que nesse tal ponto "haveria um problema" por causa da descontinuidade (p.111/112). Ela procurou um exemplo de função cuja integral não convergisse. Nesse momento fica nítida a confusão feita por Luiza ao relacionar o exemplo à teoria de integrais impróprias.

Esse não foi o único momento em que Luiza demonstrou desconforto com descontinuidades. Dois outros momentos mostraram isso. Quando levada a analisar a função de Drichlet, que ela já conhecia, Luiza rapidamente afirmou se tratar de uma função integrável. Ela não pensou nem por alguns segundos. E como se fosse um exemplo clássico, disse não lembrar da justificativa, mas sabia que era integrável. De fato é um exemplo clássico, porém de função não integrável (no sentido de Rieman).

A dificuldade em lidar com as descontinuidades aparece quando ela tenta comparar os gráficos das funções de Drichlet e da figura C. Como os dois gráficos apresentam pontos desconectados de curvas, o que ela associou automaticamente a vários pontos de descontinuidades, Luiza pensou que as funções deveriam ter o mesmo comportamento. É interessante notar que nem mesmo o fato de termos dito que a função de Drichlet era não integrável, o que a surpreendeu muito, a impediu de lançar mão da comparação entre os gráficos. Ela simplesmente aceitou o que dissemos e afirmou que então a outra função também não era. E mais uma vez se surpreendeu quando revelamos que a função na figura C era integrável.

Como ela de fato já havia demonstrado antes quando afirmou que a função $f(x) = x$ era integrável porque ela sabia que os cálculos levariam a um resultado final real, o número de descontinuidades não faz parte de sua estratégia para saber se uma dada função é integrável ou não. O que figura é a noção de área. Descontinuidades causam desconforto quando se trata de buscar uma região para ter a área calculada. Luiza teve muita dificuldade para reconhecer que, na função $f(x) = 1$, *se* $x = 1$ *e* $f(x) = 0$, *se* $x \neq 1$ no intervalo $[1,2]$, o ponto $x = 1$ não influenciaria no resultado. E mesmo assim não podemos dizer que ela o fez com total segurança e certeza.

Outro momento que mostra problemas na sua concepção em relação a descontinuidades ocorre quando Luiza afirma que há diferença entre as figuras E e F e que essas diferenças seriam os pontos $x = 1$ e $x = 2$, que estão desconectados dos segmentos de retas que fazem parte do gráfico da função correspondente. Ela afirma "Nesses pontos tem diferença", mas diz não saber responder o porquê. Esse comportamento é característico de um aluno em conflito potencial, quando percebe que algo não vai bem, mas é incapaz de perceber o que é exatamente (TALL & VINNER, 1981). Nesse caso o conflito cognitivo não veio à tona e Luiza seguiu em sua sensação de inquietude.

Não é possível afirmar que os conceitos de integral e área tenham uma relação de identidade na imagem de conceito de Luiza. Ela justificou corretamente as diferenças e semelhanças entre os resultados das questões 5(a) e 6(a), assim como das questões 5(b) e 6(b) do questionário da etapa I. Mostrou que suas respostas corretas dadas no questionário tinham fundamento. Luiza sabe o que fazer quando uma questão pede para calcular a área e quando outra pede para calcular a integral, pelo menos do ponto de vista prático.

Porém, o que prevalece em sua imagem de conceito para a teoria de integral é a idéia de área. Ela chega a afirmar: "[...] a gente usa a integral para calcular as áreas, né?" (p.112). Quando perguntada se conhecia alguma outra aplicação ou interpretação para o conceito de integral, Luiza responde “somatório”, sem maiores explicações ou detalhamentos. Mas, isso não se configura como atributo ativo na sua imagem de conceito. Quando deu essa resposta durante a entrevista, Luiza pensou bastante antes de responder, como se quisesse lembrar de algo, alguma coisa que tenha aprendido. Isso fica reforçado pelo fato de ela não ter conseguido responder a questão 1 do questionário, que fazia referência a uma média contínua, nem durante o questionário, nem durante a entrevista, quando novamente lhe apresentamos a questão, inclusive mostrando a resposta incorreta que havia dado. Ela afirmou não lembrar o que pensou quando respondeu o questionário, mas no momento seguinte responde somatório como outra aplicação de integral definida. Essa outra interpretação para integral até existe na sua imagem de conceito, mas parece desconectada do restante.

Luiza tem na idéia de área sob a curva toda a base para sua compreensão do conceito de integral definida. Tanto é assim, que curvas com poucos ou muitos pontos de descontinuidades lhe causam desconforto e são suficientes para lhe colocar em situação de séria dúvida e insegurança.

6.2.4. Entrevista com Marcelo

Em relação à etapa 1, Marcelo foi o aluno 29 respondeu apenas às questões 4(a), 5, 6 e 7.

Marcelo afirma que não possui nenhuma dificuldade com funções de um modo geral, bem como com análise e interpretação de gráficos. De fato, todos os gráficos que poderiam ser necessários para responder às questões foram feitos pelo aluno de forma correta.

Ao ser levado a dizer com suas próprias palavras o que é integral definida, Marcelo foi bastante rápido e econômico: “Bom, calcular a área entre aquela curva e o eixo x naquele intervalo”. E não teceu nenhum outro comentário. Já com relação ao critério usado para decidir se uma função é integrável ou não, Marcelo explicou:

> Tentando integrar, se não conseguir [...] Tentando, dando uma olhada, vendo, será que eu consigo integrar por substituição, por partes, por frações parciais? Aí, vou olhando, se eu não conseguir [...] não tentando até o final. Chegar e olhar [...] igual quando você bate o olho em uma questão e diz “ah, isso aqui dá pra resolver por substituição simples, esse aqui resolve por partes, esse aqui não dá, não dá para integrar”.

Perguntamos se Marcelo em geral associa o fato de existir a integral de uma determinada função, isto é, de ser integrável, com o fato de existir alguma região a ter sua área calculada, e ele responde:

> Associo, associo. Quando eu fiz cálculo eu sempre procurava desenhar a função e o intervalo, aí hachurava área que tava sendo calculada...

Marcelo também afirma que no caso de a função não ser integrável, ele não faz nenhum tipo de associação com área.

Mostramos, a função $f(x) = 1$, $se\ x = 1$ $e\ f(x) = 0$, $se\ x \neq 1$, $x \in [1,2]$, bem como seu gráfico (figura A) e perguntamos se a função em questão é integrável, ao que Marcelo responde afirmativamente. No entanto, quando perguntamos qual seria o resultado, Marcelo responde como se tivesse nos explicando o procedimento para resolver a integral da função: "Seria *x* se *x* igual a 1 e seria uma constante k qualquer se *x* diferente de 1 [...]". Perguntamos então se ele não sabia quando seria o valor final e ele reponde negativamente e afirma que teria que calcular embora não soubesse muito bem como fazer:

> É, nem sei como se calcula essa constante. Eu acho que não tem nenhum jeito de calcular o zero. Acho que não tem como calcular. O 1 tem como integrar, agora o zero [...] não sei nem qual é a constante.

Com relação a uma possível associação com área, Marcelo diz: "Não consigo fazer não. Porque aqui é só um ponto [...]" e volta afirmar que não sabe o valor da integral.

Em seguida, mostramos a função de Drichlet com seu respectivo gráfico (figura B) e perguntamos se ele tem alguma coisa a afirmar sobre a existência ou não da integral e Marcelo responde:

> Não. (olha fixamente para a função) Eu faria da mesma forma. Eu faria x se x pertence aos racionais e k se não pertence aos racionais. Agora relacionar com área eu não conseguiria não.

Mostramos o gráfico da função *f(x) = 0, se x é irracional e f(x) =* $\frac{1}{q}$*, se x =* $\frac{p}{q}$, onde *p* e *q* são primos entre si, $x \in [0,1[$, acompanhada de seu gráfico (figura C) e Marcelo pensa por um longo tempo e depois conclui: "Não sei, acho que ela não é integrável". Ao ser levado a explicar os motivos de sua conclusão, ele diz:

> Porque ela não segue uma ordem (aponta para os pontos), não segue uma coisa contínua, eu acho que é isso. Porque quando você tem f(x) igual a x^2, aí você tem aquilo tudo direitinho (faz no ar com as mãos uma parábola) e esse aqui não segue.

Pedimos que calculasse a área da região hachurada na figura D (função *cosseno*, entre 0 e 2π). Marcelo leva alguns minutos para resolver e mostra três tentativas feitas no papel. São elas:

$$\int_0^{2\pi} \cos x = senx\Big|_0^{2\pi} = sen(2x) - sen(0) \text{ (primeira tentativa)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x = \int_0^{\pi} \cos x + \int_{\pi}^{2\pi} \cos x = sen\ x\Big|_0^{\pi} + sen\ x\Big|_{\pi}^{2\pi} \text{ (segunda tentativa)}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos x\ dx = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\ dx = 4 \cdot sen\ x\Big|_0^{\pi/2} = 4 \cdot (1-0) = 4 \text{ (terceira tentativa)}$$

Em seguida, explica:

> Eu tentei fazer assim (mostra sua primeira tentativa), mas eu vi que dava zero. Aqui daria zero (mostra sua segunda tentativa). Aí eu vi que essa área aqui é igual a essa aqui, que é igual a essa aqui, que é igual a essa aqui (indica no gráfico uma partição da região hachurada em 4 regiões iguais, de 0 a π/2, de π/2 a π, de π a 3π/2 e de 3π/2 a 2π). Então pode ser 4 vezes a integral de *cos(x)*, de 0 a π/2. [...] Eu fui vendo como resolver. Porque eu sei que tem algumas integrais que você tem que dividir, às vezes, o intervalo. Tem que ver se acontece de a área poder ser dividida

> em partes. Aí eu fiz dessa forma aqui (indica sua resolução correta, sua terceira tentativa).

Perguntamos porque ele procurou uma solução que não desse zero como resultado e Marcelo responde: "Porque eu sei que a área não pode ser zero aí".

Em seguida, lhe mostramos a figura E e pedimos para que ele determinasse a área da região, ao que ele imediatamente interfere: "Pô, mas [...] o desenho ta falhado?" Ao receber nossa negativa e a confirmação de que se trata exatamente da região que ele está vendo, ele afirma que não é possível calcular área nenhuma e explica:

> Pra mim, não dá. (pensa) Porque vai calcular a área de quê? Eu acho que não dá, porque tem uns espaços abertos. Não dá pra saber qual é a região que vai ser calculada a área. (pensa) Eu acho que é essa aqui (traça segmentos verticais, completando retângulos, de forma a tornar fechada a região).

Perguntamos como ele poderia ter certeza de que a região deveria ser completada com segmentos de reta e não de outra forma e ele responde, depois de pensar por alguns instantes: "Bom, porque eu acho que tá faltando pedaços aqui, né. É um chute. A princípio não dá". Nesse ponto da entrevista, Marcelo demonstra estar bastante confuso e dá sinais de que realmente não tem certeza do que havia respondido.

Esse estado de confusão permanece para a pergunta seguinte. Mostramos a função $g(x) = 2$, se $0 \le x < 1$; $g(x) = 3$, se $1 < x < 2$; $g(x) = 2$, se $2 < x \le 3$; $g(x) = 1$, se $3 < x \le 4$, $g(x) = 0$, se $x = 1$ e $x = 2$, acompanhada de seu gráfico (figura F) e pedimos que calculasse a área da região limitada pelo gráfico da função e o eixo x , entre $x = 0$ e $x = 4$. Marcelo pensa por alguns instantes e afirma: "Acho que não tem como calcular a área". Mas, não consegue, em um primeiro momento, explicar por quê. Nós perguntamos então o que o perturbava em relação a esse pergunta, e ele responde: "os espaços abertos" e confirma que essa perturbação é a mesma que lhe causou a figura E, da região mostrada anteriormente. Depois de pensar e analisar a função por alguns instantes, ele diz:

> A integral vai dar a área abaixo [...] ter, tem [...] fazendo [...], mas eu acho que não tem uma área abaixo. Eu acho que se eu tentar calcular vai dar alguma coisa errada. (muita incerteza). Deixa eu tentar. (começa a resolver).

A resolução, correta, de Marcelo é a seguinte:

$$\int_0^1 2\,dx + \int_1^2 3\,dx + \int_2^3 2\,dx + \int_3^4 dx$$
$$2\int_0^1 dx + 3\int_1^2 dx + 2\int_2^3 dx + \int_3^4 dx$$
$$2\cdot x\Big|_0^1 + 3\cdot x\Big|_1^2 + 2\cdot x\Big|_2^3 + x\Big|_3^4$$
$$2\cdot(1-0)+3\cdot(2-1)+2\cdot(3-2)+(4-3)$$
$$2+3+2+1=8\,ua$$

Então perguntamos se o resultado que acabara de encontrar o deixava mais confuso, uma vez que ele havia pensado não poder calcular a área pedida. E explica seu raciocínio:

> Bom, eu acho que, como integral se relaciona à área, eu, olhando isso aqui, eu acharia que isso não teria integral. Eu olhando o gráfico. Mas, olhando a função, eu vejo que tem como calcular. Eu olhei o gráfico e achei “poxa, isso não tem como calcular”. Mas, aí eu olhei para as funções eu achei “pela função, tem como calcular. E até vi que esse aqui (indica a figura F) é igual a esse aqui (indica a figura E). Igual ao anterior.

Pedimos que ele comente o final de sua explicação, no qual ele diz que as figuras E e F são iguais:

> Bom, inicialmente eu acho que esse aqui (indica a figura E) não tem como porque aqui não tem nem as funções. É, não se sabe qual é a região. Aqui agente não sabe se vai ser uma curva, se vai ser uma linha reta ligando aqui (indica as aberturas na região da figura E).

No momento seguinte, perguntamos se ele seria capaz de fornecer uma definição formal para o conceito de integral definida e ele responde imediatamente: “Calcular área”. Reiteramos que pedimos uma definição formal e ele afirma: “Isso, formalmente, não?”.

Começamos, então, a perguntar-lhe sobre suas respostas para o questionário da etapa I, inclusive mostrando suas soluções. Primeiramente perguntamos porque desenhou todos os gráficos da questão 5, e ele responde já explicando sua solução para o item (a):

> Para poder ajudar a visualizar. Nessa aqui (indica o item (a)), se eu fizesse a integral direta, de 0 a 2π, como uma parte está acima e a outra parte está abaixo, ia zerar, né. Aí eu vi, essa região aqui (de 0 a π) é simétrica a essa (de 0 a 2π). Então a soma das duas vai ser igual a duas vezes essa (de 0 a π).

Pedimos que Marcelo explicasse sua resolução para o item (c) da questão 5, na qual havia um erro. Ele somou a integral no intervalo de -1 a 2 com a integral no intervalo de 2 a 3, apesar de, nesse último intervalo, a função estar abaixo do eixo x.

> Eu vi que teria que calcular a área dessa região aqui (indica corretamente a área que devia ser calculada no seu próprio desenho). Aqui seria abaixo (entre $x = 2$ e $x = 3$), depois subiria. Calcularia a integral dessa função aqui nesse intervalo de -1 até 2 e depois de 2 até 3. Então tem que calcular até o ponto 2 e depois do ponto 2 até o ponto 3. Eu achei que fosse dar algum problema igual aqui (indica o item (a)).

Perguntamos sobre os itens (a) e (b) das questões 5 e 6 que tratavam da mesma função no mesmo intervalo, com a questão 5 pedindo a área e a questão 6, a integral. Reproduzimos o trecho da entrevista para que não se percam os detalhes das perguntas e respostas.

> Pesquisador (P): Leia o enunciado da questão 6. Agora olhe o item (a), que é o mesmo da questão 5(a) (mostramos sua resolução para a questão 6(a), que foi exatamente a mesma dada para a questão 5(a)).
> Marcelo (M): Então, eu acho que é a mesma resposta da outra (indica sua resposta para a questão 5(a)).
> P: É a mesma coisa mesmo?
> M: (imediatamente) Seria a mesma coisa.
> P: A questão 5 é uma questão e a questão 6 é outra...
> M: (interrompe) Eu até vi isso, mas aí eu pensei, será que eu colocando "é a mesma resposta da anterior", não sei se teria algum problema fazer isso. Mas, eu vi que era a mesma coisa.
> P: No item (b) das questões 5 e 6, também é a mesma função no mesmo intervalo, concorda? (mostramos os itens)

M: É a mesma coisa, mesmo intervalo.

P: Porque a questão 5 pedia a área e a questão 6 pedia a integral. Resolve-se da mesma forma? (mostramos as suas resoluções idênticas para os itens (a) e (b) das questões 5 e 6)

M: É isso mesmo.

Abaixo, mostramos a resolução de Marcelo para a questão 5(c), acompanhada do gráfico feito pelo aluno:

$$\int_{-1}^{3} x^2 - 5x + 6\,dx = \int_{-1}^{2} x^2 - 5x + 6\,dx + \int_{2}^{3} x^2 - 5x + 6\,dx \,[...]$$

A seguir, perguntamos sobre sua resposta para o item (c) da questão 6. No início da entrevista, havíamos perguntado sobre essa função e ele afirmara que não havia área. No questionário, porém ele deu zero como resposta para a integral da função, mas sem nenhuma justificativa. Perguntamos porque a reposta seria zero e ele explica automaticamente: “Porque na minha opinião não existe área”.

Passamos, então, à questão 7 do questionário, pedindo que ele nos explicasse como resolveu o item (b). Marcelo havia dado uma resposta errada no questionário, sem considerar a variação de sinal da função no intervalo. E ele parece reconhecer o erro logo que analisa a resposta dada por ele: “Essa aqui eu teria que dividir, desmembrar, de -1 até 0 e depois 0 até 4. E eu fiz direto”. No entanto, ao perguntarmos o que ele faria com os resultados das integrais separadas, e ele responde: “Aí, somaria”.

Ao explicar sua resolução para o item (c), também errada, Marcelo também parece, a princípio, encontrar seu erro. Mas continua afirmando que deveria somar as integrais provenientes da subdivisão do intervalo, mesmo quando se trata de regiões abaixo do eixo das abscissas. Sua resolução para o item (c) foi a seguinte:

$$\int_{0}^{1} x + 1\,dx + \int_{1}^{2} 2\,dx + \int_{2}^{4} -2x + 6\,dx + \int_{4}^{5} 2x - 10\,dx \,[...]$$

Ele afirma:

> São várias funções diferentes. Eu teria que colocar de 2 até 3, aí depois, **mais**, essa outra parte aqui (indica o trecho do gráfico entre x = 3 e x = 4). Teria que desmembrar aqui (indica o trecho do gráfico entre x = 2 e x = 4) em dois. (grifo nosso)

Marcelo afirma, quando perguntado, que haveria outra maneira de resolver o mesmo item (c) sem usar integrais:

> Teria. Eu separaria. Aqui é a área de um trapézio (indica o trecho do gráfico de x = 0 a x = 1), aqui é a área de um retângulo (indica o trecho do gráfico de x = 1 a x = 2), aqui um triângulo (indica o trecho do gráfico de x = 2 a x = 3), aqui mais um triângulo (indica o trecho do gráfico de x = 3 a x = 5). Aí, soma.

Neste momento, mostramos mais uma vez, o gráfico da função referente à figura F, e Marcelo afirma que também seria possível encontrar a área solicitada sem usar integrais:

> Dessa aqui teria (indica o gráfico da figura F), seriam vários retângulos, para bater com o resultado. Mas, como está aberto, fica mais difícil de visualizar.

Marcelo, com já foi dito, respondeu apenas às questões 4(a), 5, 6 e 7 do questionário, ou seja, as de caráter prático. Perguntamos, então, porque, ele não respondeu as demais questões. Marcelo explica que teve problemas para escrever seu raciocínio:

> Não sei. (pensa) Bom, porque na hora para escrever o que eu penso, fica mais complicado. Igual aqui (indica a questão 2 do questionário), a integral definida seria a área dela entre a curva e o eixo x. Acho que senti um pouco de dificuldade de escrever isso.

Finalmente, perguntamos se, na sua concepção, haveria uma outra interpretação ou aplicação para o conceito de integral definida que não fosse área e Marcelo responde de forma imediata: “Não. Pra mim é área”.

Considerações

Com base nas respostas de Marcelo na entrevista é possível afirmarmos que a sua imagem de conceito para integral definida se resume à idéia de área e ao algoritmo para calcular a integral de uma função em um dado intervalo.

Em vários momentos da entrevista, Marcelo deixou claro que a idéia de área está sempre associada ao conceito de integral. Fez isso de forma explícita, quando, por exemplo, afirmou que a integral definida é calcular a área (p.118) ou quando afirmou que não havia nenhuma outra interpretação ou aplicação do conceito de integral definida que não fosse área (p.125).

Outras passagens da entrevista também mostram essa associação entre integral e área em níveis elevados. Não é absurdo afirmarmos que, em sua forma de pensar, a existência da integral depende de haver área. Fica demonstrado isso quando se refere à função cujo gráfico é a figura F, "[...] olhando o gráfico, eu achava que não tinha integral. Mas, olhando a função eu vi que dava para calcular" (p. 122). Ou seja, se fosse dado a ele só a lei de formação da função, ele não teria pensado se existiria ou não a integral. Ele simplesmente resolveria, como fez. Não haveria gráfico para que ele ficasse em dúvida.

Essa relação indiscriminada entre área e integral faz com que Marcelo se confunda e entre em contradição. É possível perceber isso quando ele analisa sua própria resposta para a questão 6(c) do questionário, "coloquei zero porque não tinha área" (p.124). Nesse ponto, procuramos forçar o aparecimento de algum fator de conflito ao mostrarmos sua resposta para a questão 6(c), tendo em vista o que ele havia respondido anteriormente na entrevista para a mesma função, que não conseguiria fazer nenhuma associação com área (p.119). Mas o conflito não se deu, porque, nesse caso, para Marcelo, não haver área e a integral ser igual a zero significam a mesma coisa. Isso vai de encontro ao que havia afirmado anteriormente. Se a existência da integral depende de haver alguma área a ser calculada, então quando essa área não existe, não deveria haver a integral. Isto é, ele deveria afirmar que a função não é integrável, e não que a integral é igual é zero.

Essa discussão nos leva a um outro ponto da entrevista com Marcelo. Quando levado a explicar sobre seus critérios para decidir se uma determinada função é integrável ou não, Marcelo nos permite enxergar o quanto é limitada sua compreensão sobre o conceito de integral definida. Marcelo nos revela que, para descobrir se uma função é integrável ou não, ele simplesmente tenta integrá-la (p.118). Ele tenta perceber, olhando a lei de formação da função, se é possível, por algum método de integração conhecido, chegar a um resultado. É como se ele deixasse transparecer que sua imagem de conceito em relação à integral é formada por um mecanismo para encontrar área. Além de que, mais uma vez de forma contraditória, Marcelo não menciona área quando fala de funções não integráveis.

Como fizemos com os demais alunos que foram entrevistados, procuramos esclarecer alguns pontos obscuros em relação às suas respostas para as questões do questionário da etapa I. No caso de Marcelo, nosso objetivo era confirmar algumas suspeitas que surgiram em relação à forma de pensar do aluno, quando da resolução do tal questionário. E nossas suspeitas se confirmaram. De fato, os itens (a) das questões 5 e 6, ambos referentes à função seno no intervalo $[0,2\pi]$, foram respondidos por Marcelo exatamente da mesma forma porque ele realmente acredita se tratar de questões idênticas (p.123/124). Convém ratificar que os enunciados das questões 5 e 6 são diferentes, com a primeira solicitando á área e a segunda, a integral. Isso evidencia que não há diferença entre integral e área na imagem de conceito de Marcelo. Em nenhum momento, qualquer fator de conflito se manifestou quando mostramos suas resoluções para os referidos itens, lado a lado, e chamamos atenção para a diferença dos enunciados. Ao contrário, Marcelo revela ter achado estranho o fato de haver duas questões repetidas no questionário e afirma, inclusive, que esteve inclinado a escrever que a questão 6(a) era resolvida da mesma forma que a questão 5(a), invés de resolver novamente, como fez.

É interessante ressaltar a explicação dada por Marcelo sobre sua resolução da questão 5(a). Ele deixa claro que sua primeira idéia era integrar de 0 a 2π diretamente, mas percebendo que o resultado seria zero, passou à outra alternativa. Marcelo justifica corretamente, inclusive, que o resultado seria zero porque "[...] uma parte está acima e a outra parte está abaixo [...]" (p.123). Ele usa mais uma vez esse raciocínio quando pedimos, durante a entrevista, que calculasse a área hachurada na figura D (p.120), em que faz duas tentativas que resultam em resposta igual a zero, que ele mesmo despreza, antes de resolver de forma correta. No entanto, ainda no questionário da etapa I, para as questões 5(c), 7(b) e 7(c), Marcelo não usa esse raciocínio. Ele não considera a variação do sinal da função no intervalo em questão, apesar de ter feito isso anteriormente, no questionário. Se ele afirma, para a questão 5(a), que o resultado seria igual a zero, se integrada diretamente, porque as regiões estão uma acima e outra abaixo do eixo x, é porque ele sabe, mesmo que não perceba, que as integrais provenientes das regiões acima e abaixo do eixo x têm sinais opostos, o que leva à anulação do resultado final, se forem somadas, já que tais regiões são iguais. Mas, ignora esse fato em outras questões. Na questão 5(c), por exemplo, Marcelo subdivide o intervalo de integração, reconhecendo que a função muda de sinal, mas soma as duas integrais, sem considerar que a segunda integral, proveniente da região abaixo do eixo das abscissas, possui sinal negativo.

Isso reforça o que já dissemos, que a teoria de integral definida não está bem compreendida para Marcelo, além de que, para ele, a relação entre integral e área se dá em um nível de quase identidade.

6.2.5. Entrevista com Pedro

Pedro respondeu todas as questões do questionário referente à etapa 1.

Com relação à teoria de funções, Pedro garante que não possui nenhum tipo de dificuldade, seja na construção de gráficos ou na interpretação destes.

Sobre o que entende por integral definida, em uma explicação não formal, Pedro diz:

> Eu entendo a integral como sendo mesmo a área entre o gráfico e o eixo, limitado por essas retas, que seria o limite da integral. É isso que vem à cabeça.

Ao ser levado a explicar como costuma decidir se uma determinada função é integrável ou não, Pedro afirma:

> A primeira coisa que eu vejo é se a função é contínua. Se a função é contínua ela é integrável em qualquer ponto. Outra coisa que eu vejo são as assíntotas verticais, que são os pontos de descontinuidade do gráfico.

Quando perguntado se relaciona à existência da integral de uma função a existência de alguma região a ter sua área calculada, Pedro responde:

> Depois que eu fiz equações diferenciais, não. Se você fizesse essa pergunta quando eu estava no segundo período, ou até no terceiro, eu responderia facilmente que sim. Mas, depois que eu vi equações diferenciais, que a integral não é basicamente isso, é tipo uma ferramenta, então eu enxergo de forma diferente. [...] A forma de utilizar, como se fosse realmente uma operação. Derivada e integral mudou um pouco o sentido, como se fosse uma operação e não a reta tangente ou a área. Eu entendo também como isso, porque eu não consigo ver integral de outra forma. Mas eu consigo ver também como

> uma ferramenta. Eu ainda não consigo achar o que seria a outra coisa a não ser área, mas eu consigo ver como uma ferramenta.

Quando mostramos a função referente à figura A, $f(x) = 1$, *se* $x = 1$ *e* $f(x) = 0$, *se* $x \neq 1$, $x \in [1,2]$, bem como seu gráfico, Pedro responde rapidamente o que pensa sobre tal função em relação à integral. Mas, ao final, fica confuso e acaba não conseguindo encerrar a questão:

> Eu diria que não existe uma área. O problema é só esse ponto 1, mas eu acho que não interferiria tanto assim. Por ser um ponto solto. Porque o limite existe. Ela só não é contínua nesse ponto. Pensando na integral, calculando a integral, eu conseguiria ver que a integral dá uma constante. Mas, seria meio estranho porque não tem uma área, mas o resultado é uma constante... (observa avidamente o gráfico da função)

Pedro não demonstrou nenhuma dificuldade com a função referente à figura B, $f(x) = 1$, *se x é racional e* $f(x) = 0$, *se x é irracional*, $x \in [0,1]$. Imediatamente, respondeu que a função não é integrável porque é descontínua em todos os pontos. Ele afirmou em seguida que conhecia a função. Já com a função da figura C, $f(x) = 0$, *se x é irracional e* $f(x) = \frac{1}{q}$, *se* $x = \frac{p}{q}$,, onde p e q são primos entre si, $x \in [0,1[$, Pedro disse que também já a conhecia, mas nunca havia feito nenhuma análise sobre a integrabilidade da função. Ele afirma, ao olhar o gráfico da função fornecido por nós, que a função não é integrável, sem pensar muito. E explica:

> Eu imagino que ela não seja integrável. Por ela ser descontínua mesmo, porque como a derivada é a operação inversa da integral e se uma função é descontínua ela não é derivável, imagino que ela não seja integrável também.

E demonstra muita surpresa, quando revelamos que a função em questão é integrável. Depois de pensar por alguns instantes, diz que não consegue pensar em um valor para a integral a função.

Ao solicitarmos que calculasse a área hachurada na figura D (função cosseno, no intervalo de 0 a 2π), Pedro resolve da seguinte forma, sem levar nem 1 minuto.

$$A = \int_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx = sen\, x\Big|_{0}^{\pi/2} = 4 \cdot 1 = 4$$

Ele explica que sabia que poderia dividir a região em quatro partes iguais e que, por isso, calculou a área de uma delas, no intervalo de 0 a π/2, e multiplicou o resultado por 4.

Em seguida, pedimos que calculasse a área da região mostrada na figura E. Pedro, ao olhar a figura, imediatamente começa a traçar segmentos retos verticais onde se encontram as aberturas da região. Após pensar um pouco, responde que a área é 8. Pedimos que ele confirmasse qual foi seu primeiro passo na resolução e ele prontamente afirma: “Foi pontilhar a parte que não tem linha”. Ratificamos que a região dada não pertence a nenhum eixo de coordenadas, o que ele confirmou, e então pedimos que explicasse porque traçou os segmentos retos. Ele responde: “Para formar vários retângulos”. Ao ser perguntado como sabia que as aberturas deviam ser completadas com segmentos de reta, ele responde: “É verdade. Foi mais pela figura, ela me induziu a fazer isso. Mas poderia não ser. Eu poderia fechar como eu quiser”. Nesse momento, voltamos a perguntar se ele queria mudar a resposta dada anteriormente e ele responde que não, afirmando que o resultado é mesmo 8, e que o fato de a região estar aberta não impede nada do que ele havia feito.

Mostramos a função referente à figura F (*g(x) = 2, se 0 ≤ x < 1; g(x) = 3, se 1 < x < 2; g(x) = 2, se 2 < x ≤ 3; g(x) = 1, se 3 < x ≤ 4, g(x) = 0, se x = 1 e x = 2*), assim como seu gráfico, e pedimos que calculasse a área da região limitada pelo gráfico da função e o eixo x, entre os limites de integração. Pedro afirma prontamente que se trata da mesma região da figura E: “É a mesma figura, né. Só que você colocou um eixo e uma função. Imagino que seja a mesma coisa, seria 8 também”.

Procuramos, assim como foi feito com os outros entrevistados, esclarecer sobre respostas dadas para algumas questões do questionário da etapa 1, com o objetivo de compreender a maneira de pensar do aluno ao responder. Começamos pelas questões 5(a) e 6(a). Ao mostrarmos o enunciado da questão 5, que pedia a área, e sua resposta para o item (a), Pedro interrompe e logo começa a explicar:

> O problema é que eu fiz aqui o que eu não fiz na questão que você me mostrou (questão referente à figura D, feita alguns minutos antes). Que,

> na verdade, a função seno, quando você calcula a integral, eu não sei também por que, a parte de cima com a parte de baixo, uma área vai ser negativa, a outra vai ser positiva e elas vão se anular. E, na verdade, a integral é zero. E se você fosse calcular a integral, você não faria isso, né. Naquela que você me mostrou (questão referente à figura D), como eu sabia que as partes eram iguais, eu peguei uma pedaço, calculei de 0 a π/2 e multipliquei por 4.

Nesse momento, aproveitando a espontânea justificativa dada por Pedro, mostramos-lhe sua resposta para o item (a) da questão 6, que pedia a integral. Esse item fazia referência a função seno, no intervalo de 0 a 2π, assim como a questão 5(a). No questionário, Pedro deu a seguinte resposta, sem cálculo algum:

$$\int_{0}^{2\pi} sen(x)\, dx = 0$$

Pedro, então, confirmou que deu resposta igual a zero diretamente, sem fazer nenhum cálculo, porque se baseou na resposta da questão 5(a). Apenas repetiu a resposta. E fez o mesmo em relação à questões 5(b) e 6(b), que também se referiam à mesma função no mesmo intervalo. Repetiu na questão 6(b) a resposta obtida na questão 5(b), respondida antes.

Uma vez que Pedro não desenhou nenhum gráfico para resolver as questões 5 e 6 do questionário, perguntamos se o gráfico era pouco relevante para que ele chegasse às respostas das questões e ele respondeu que, para tais funções, sim, por serem funções mais familiares. Entretanto, quando logo em seguida perguntamos sobre sua resolução errada para o item (c) da questão 5, no qual a função quadrática varia de sinal, ele responde mencionando a dependência do gráfico para a resolução:

> Dá pra ver que as raízes dessa função são 2 e 3. O 2 está aqui (indica o intervalo *[-1,3]*) [...] E aí para fazer essa análise de como a função poderia mudar, a questão de positivo e negativo, **eu teria que dar uma olhada no gráfico mesmo**. No item (c), as duas raízes estão dentro do intervalo que está pedindo. [...] Aqui (indica a própria resolução da questão 5(c)) eu tinha que repartir os intervalos, a parte entre as raízes eu tinha que colocar negativa [...]. (grifo nosso)

Quando começamos a analisar as respostas para a questão 7 do questionário, Pedro, mais uma vez, interrompe:

> Aqui (indica o item (b) da questão 7) eu não cometi aquele erro. Aqui inclusive eu troquei (o sinal) encontrei -7/3. E depois eu troquei o sinal. Exatamente o que eu deveria ter feito no outro. Talvez porque o gráfico estava na minha frente e eu vi a necessidade.

Pedro confirma que resolveu o item (c) da questão 7, sem utilizar a teoria de integral, assim como já havia feito em uma das questões na entrevista. Ele utilizou apenas área de trapézio e área de triângulo.

Perguntamos se ele seria capaz de fornecer uma definição formal de integral definida, e Pedro responde:

> Não formal mesmo. Eu não me lembro bem, tem uma definição que eu vi em cálculo I, que você pegava a integral definida, quebrava ela em vários pedaços de n tamanhos, aí fazia o limite de n tendendo a zero, aí esses retângulos, na verdade você calculava a área de cada retângulo, e você estimava a área por aproximação. Mas não lembro.

Finalmente, perguntamos se conhecia alguma outra interpretação ou aplicação para integral que não fosse área. Pedro responde que sim, e mais uma vez afirma sua compreensão de integral também como uma ferramenta para resolver problemas. Mostramos, então, sua resolução correta para a questão 1 do questionário, que tratava de uma “média contínua” da temperatura em um arame. Após analisar atentamente sua própria solução, Pedro revela:

> Isso tem muita cara de problema de Equações Diferenciais. [...] Eu usei a idéia do contrário da derivada. E não tem nada a ver com área. Imagino que seja isso mesmo. Quando eu respondi essa questão, eu lembro que eu olhei essa questão e achei extremamente estranho. Aí eu pensei, só pode ser isso. Faz mais sentido agora, depois de algumas coisas que eu aprendi em Equações Diferenciais.

Considerações

Baseado na entrevista é possível afirmar que Pedro possui em sua imagem de conceito uma ligação entre integral é área, que foi abrandada por suas experiências cursando outra disciplina que também utilizava o conceito de integral. E o fato de esta utilização não ser imediatamente relacionada com a idéia de área permitiu a Pedro conhecer outras facetas para integral.

Parece que o fato de cursado Equações Diferenciais fez com que sua mente se abrisse para outras utilizações para integral diferentes do calculo de áreas. No entanto, quanto à interpretação do conceito, ele ainda se encontra preso à noção de área. Isso fica explícito, quando ele afirma "eu ainda não consigo achar o que seria a outra coisa a não ser área, mas eu consigo ver como uma ferramenta" (p.128/129). Nesse ponto fica claro que Pedro possui duas formas de compreender integral. Uma delas é a integral quanto sua aplicação, utilização. Nessa, Pedro diz que já não pode afirmar que integral só é utilizada quando se deseja calcular alguma área. Ele explica que integral pode ser utilizada como uma ferramenta para resolver certos problemas que ele teve contato em seu curso de Equações Diferenciais, no qual, de fato, integral aparece como uma parte do procedimento para resolver equações.

A outra forma de compreender integral é quanto sua interpretação. Com sua frase "eu ainda não consigo achar o que seria a outra coisa a não ser área, mas eu consigo ver como uma ferramenta", Pedro mostra que, em sua concepção, uma coisa é usar a integral e outra é interpretar a integral como conceito. E essa sua interpretação do conceito de integral é baseada na noção de área sob a curva, segundo ele mesmo afirma na resposta para a segunda pergunta da entrevista, quando foi levado a dizer, informalmente, o que entendia por integral definida (p.128).

Apesar de haver um certo desprendimento de Pedro em relação à área, os conflitos surgem quando ele é posto em situação que os propiciem. Isso é notado no momento que Pedro se depara com a função $f(x) = 1$, se $x = 1$ e $f(x) = 0$, se $x \neq 1$, $x \in [1,2]$ e seu gráfico (figura A), pois, pelo que havia respondido antes, continuidade é seu primeiro critério para decidir se uma função é integrável ou não, e a função em questão possui uma descontinuidade no ponto $x = 1$. Pedro, ao examinar o gráfico, fica confuso com o fato de não ser capaz de identificar uma região para determinar a área, apesar de estar certo de que a integral existe. "Mas seria meio estranho porque não tem uma área, mas o resultado é uma constante". Ele não foi capaz de finalizar seu raciocínio.

Em relação ao questionário da etapa 1, na entrevista Pedro confirma que respondeu os itens (a) e (b) da questão 6 baseado diretamente na resposta encontrada para os itens (a) e (b) do questão 5, que ele havia respondido antes, apesar dos enunciados de ambas as questões serem claramente diferentes, um pedindo a área e outro, a integral. Simplesmente repetindo a resposta encontrada. Isso mostra que Pedro faz uma associação de identidade entre integral e área, em alguns momentos. Nesses casos, Pedro percebe os erros e os corrige oralmente, explicando o que deveria ter feito, dizendo ainda ser necessário o gráfico em um dos itens, apesar de não ter feito nenhum quando respondeu o questionário (p.130 e 131). Isso vem ao encontro do que já foi dito. Para esses itens, Pedro usou a integral definida para calcular áreas, indiscriminadamente.

A definição de conceito de Pedro para integral se identifica com a resposta dada por ele quando lhe foi pedido para explicar o que compreendia por integral definida, com suas palavras (p.128). È possível afirmar isso, já que ele não foi capaz de fornecer uma definição formal para o conceito de integral definida, quando lhe pedimos na entrevista. Porém, ele não utiliza essa definição de conceito em todos os momentos. Seu critério para decidir se a integral de uma função existe leva em conta a continuidade ou não da função em questão. Está presente, mais uma vez, a confusão que muitos alunos demonstraram fazer em suas respostas no questionário da etapa 1, de considerar continuidade como condição necessária para que uma função seja integrável, e não suficiente.

É interessante mencionar que Pedro respondeu corretamente a primeira questão do questionário da etapa 1, que pedia a temperatura média de um arame de comprimento l, quando é conhecida a função que fornece a temperatura em cada ponto do arame. Uma questão que não faz referência à área. No entanto, Pedro revela que ficou bastante confuso na hora de responder e que o fez sem certeza. Não parece ter interpretado a integral definida como uma soma, como seria natural.

Portanto, não podemos afirmar que Pedro é totalmente dependente de uma relação entre integral e área, que o leve a identificar uma com a outra sempre. Ele parece saber que o cálculo de área não é a única aplicação para o conceito de integral. Todavia, não podemos dizer também que Pedro tem uma compreensão perfeita do conceito de integral definida e que essa compreensão não passa pela noção de área, em certas ocasiões. Ele cometeu erros e esteve em situações de conflito justamente porque integral e área ainda se relacionam na sua imagem de conceito.

Capítulo 7
Conclusões

Este trabalho de pesquisa foi desenvolvido com o objetivo geral de analisar o ensino e aprendizagem do conceito de integral definida, este presente em todos os cursos iniciais de cálculo, que por sua vez, está incluído no currículo de grande parte dos cursos superiores na área tecnológica.

A preocupação em estabelecer um estudo sobre integral reside no fato de haver muitas pesquisas em várias partes do mundo sobre o ensino e aprendizagem de funções, limite, derivada e outros conceitos relacionados ao cálculo infinitesimal (e.g. VINNER, 1983; TALL, 1989; WINIKI-LANDMAN & LEIKIN, 2000; GIRALDO, 2004; BIZA et al, 2006), mas não existir um número semelhante de pesquisas sobre integral.

É importante chamar atenção para as limitações desta pesquisa. Os participantes são todos alunos de graduação que fazem parte de uma mesma universidade. O número de participantes, principalmente das entrevistas, foi reduzido. O caráter qualitativo estabelecido para a pesquisa demanda um número restrito de alunos, de forma a garantir que a análise possa ser feita com maior cuidado e que os resultados obtidos tenham maior grau de profundidade. Portanto, os resultados encontrados neste trabalho não devem ser generalizados. No entanto, mesmo com as limitações referidas, acreditamos que o trabalho pode contribuir para uma reflexão sobre o ensino e aprendizagem de integral nos cursos iniciais de cálculo.

A partir de agora, faremos considerações em caráter de conclusão baseadas nas análises dos resultados de todas as etapas de pesquisa, detalhados nos capítulos anteriores. Nossos comentários foram feitos à luz das teorias de imagem de conceito, definição de conceito e raiz cognitiva, que serviram como referencial teórico, já exposto do capítulo 1 deste trabalho.

7.1. A imagem do conceito integral definida

Podemos fazer algumas considerações baseadas nas análises realizadas. O aspecto conceitual de integral definida parece estar bastante obscuro para os alunos. É possível perceber que nas suas imagens de conceito a idéia predominante é a de integral relacionada diretamente com área.

As entrevistas confirmaram o que já havia sido sinalizado nos resultados referentes à etapa 1 e também ao estudo exploratório. Todos os alunos entrevistados, quando levados a explicar o que entendiam por integral definida, fizeram menção direta à área nas suas respostas. Isso também foi observado no questionário da etapa 1, quando 19 de 26 alunos que responderam à questão 2, mencionaram área imediatamente.

Isso mostra que a definição de conceito preponderante é a idéia de integral como área. Outras noções mais formais ligadas ao conceito de integral, tais como partições do intervalo de integração e limites das somas superior e inferior, ou outras menos formais como a idéia de somatório, quando existem na imagem de conceito dos alunos, são desconectadas da definição de conceito. O que leva os alunos a recorrerem a elas somente quando precisam lançar mão de uma expressão com palavras sobre integral, como frisamos nas discussões sobre a entrevista com Marcos (p. 103).

A baixa quantidade de respostas corretas para a primeira questão do questionário vem reforçar o que foi dito acima. Apesar de ser uma questão de resolução simples, a teoria de integral diretamente ligada à noção de área não se aplica à resolução da questão. Ou seja, associar indiscriminadamente a idéia de área com integral definida não levaria os alunos a responder a questão. Parece ter sido isso o que ocorreu, principalmente se considerarmos que durante as entrevistas, Ravena e Marcelo afirmaram que não conseguiam pensar em outra interpretação para integral que não fosse área (p. 109 e 125, respectivamente).

Da mesma forma que em (GONZÁLES-MARTIN & CAMACHO, 2004), pode-se entender que os alunos aprendem em algum momento que *a integral é uma área*. Ravena deixou isso claro nos momentos finais de sua entrevista. Quando perguntamos se ela saberia explicar por que, em sua forma de pensar, área e integral estão tão associados ela responde dizendo “foi como entrou em mim, como internalizou em mim” (p. 109).

Essa concepção restrita de integral como área provoca erros em situações consideravelmente simples. Em questões que pedem o cálculo de áreas, como a questão 5 do estudo exploratório e do questionário da etapa 1, freqüentemente os alunos não consideraram variações de sinal das funções, por efetuar o cálculo da integral diretamente de um limite a outro do intervalo fornecido. Como conseqüência, surgem resultados absurdos como valores negativos ou nulos para áreas positivas. Em alguns casos, como relatamos, nem mesmo o gráfico esboçado e hachurado de forma correta faz com que o aluno perceba o erro.

Um dos objetivos das entrevistas foi ratificar uma suspeita nossa de que alguns alunos identificaram as respostas para alguns itens das questões 5 e 6 do questionário da etapa 1. Isso aconteceu para as questões 5(a) e 6(a) e também para as questões 5(b) e 6(b). Esses pares de itens tratavam da mesma função no mesmo intervalo de integração ($f(x) = sen(x)$, $x \in [0,2\pi]$ e $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $x \in [0,2]$, respectivamente). Alguns alunos simplesmente repetiam a resposta encontrada para os dois itens semelhantes. Isto é, calculavam para a questão 5(a) e repetiam a resposta obtida para o item 6(a).

Ravena fez isso no questionário e durante sua entrevista, tivemos a oportunidade de esclarecer sua maneira de pensar. Durante o diálogo entre nós e a aluna que expusemos na seção 6.2.2 do capítulo anterior (p. 107/108), fica claro que Ravena possui em sua imagem de conceito uma relação de identificação entre os conceitos de integral e área. Apesar de confirmarmos que a questão 5(a) solicitava a área da região e a questão 6(a), a integral, Ravena foi incapaz de perceber o erro. Afirmou mais de uma vez que se tratava da mesma coisa e que, inclusive havia estranhado o fato de estar sendo pedido o mesmo em questões diferentes.

O mesmo ocorreu com Marcelo. Ele confirmou o que havia respondido no seu questionário da etapa 1. Associou diretamente uma questão a outra. Mesmo salientando durante e entrevista que se tratavam de questões diferentes e fazendo perguntas diretas ao aluno ("resolve-se da mesma forma?"), Marcelo não percebeu o equívoco. Afirmou que chegou a pensar em escrever "é a mesma resposta da anterior" e só não o fez com medo de que isso pudesse causar algum problema de validação (p.123/124).

Esses casos mostram as conseqüências da associação indiscriminada de integral com área. Os conflitos que procuramos proporcionar sequer surgiram porque, na imagem de conceito desses alunos, integral e área são a mesma coisa.

Essa ligação de integral à área influencia na decisão sobre a existência ou não da integral de uma função. A percepção de haver uma área depende da forma que a dada região tenha. Como conseqüência, haver integral dependerá também do formato da região determinada pelo gráfico da função e o eixo x, entre os limites de integração.

Podemos verificar essa situação nas entrevistas. Em relação à função cujo gráfico é dado na figura F, Marcelo explica que só conseguiu um resultado para a área da região pedida porque olhou a lei de formação da função. Em um primeiro momento, olhando só o gráfico, chegou a afirmar que não seria possível dar um resultado porque não teria uma área ("Eu olhei o gráfico e achei 'poxa, isso não tem como calcular'. Mas, aí eu olhei para as funções eu achei 'pela função, tem como calcular", p.122).

Pedro se mostra bastante confuso no momento da entrevista em que é levado a analisar a função *f(x) = 1, se x = 1 e f(x) = 0, se x ≠ 1, x ∈ [1,2]*, em relação a existir integral ou não. Ele diz: "Mas, seria meio estranho porque não tem uma área, mas o resultado é uma constante" (p. 129).

Luiza compara os gráficos das funções de Dirichlet e da função da figura C para decidir se a segunda é integrável ou não. Isso gerou um conflito porque apesar de os gráficos conterem "vários pontinhos", como disse Luiza, a primeira função não é integrável, mas a segunda, é.

Muitos alunos recorrem à continuidade da função no intervalo como forma de analisar a função em relação a sua integrabilidade. Esse aspecto está relacionado à idéia restrita de área, herança de ensinos anteriores, quando a continuidade apenas serve para garantir que as regiões sejam "bem comportadas", sem patologias e mais parecidas com as regiões com que os alunos têm contato em níveis básicos de matemática. A continuidade aparece como suporte, já que os alunos, em geral, tendem a só considerar um universo limitado de regiões e se baseiam nisso para decidir se a integral para a dada função existe ou não.

Alguns alunos mostraram esse aspecto em suas entrevistas. Pedimos que eles calculassem a área de uma determinada região plana, que lhes foi mostrada através da figura E. Essa região não era fechada, possuía várias lacunas. Luiza e Pedro completaram imediatamente as lacunas com segmentos de reta horizontais. Com a região totalmente fechada, fizeram as contas e deram uma resposta. A questão não mencionava integral em momento algum de seu enunciado e também não havia nenhuma lei de formação associada a figura. Luiza e Pedro não pensaram, em um primeiro momento, que a figura não poderia ter sua área calculada porque esta não estava fechada. As lacunas poderiam ser completadas com qualquer linha, não necessariamente reta. Luiza conseguiu compreender isso, mas Pedro, não. Ele confirma que seu pensamento foi completar para formar retângulos, mas que poderia completar de outra maneira. No entanto, ainda assim, mantém sua resposta.

7.2. A integral como fórmula

A entrevista de Marcelo revela um outro ponto chave nas nossas conclusões. Interpretamos que a associação direta e irrestrita do conceito de integral com área conduz à cristalização de uma concepção anterior para área, que já é excessivamente simplificada e restrita. No capítulo 2, mencionamos a problemática sobre o ensino de área. Esse conceito possui dificuldades intrínsecas e, em geral, é visto em estudos em níveis básicos de matemática de forma muito restrita, quase sempre associado a fórmulas.

É claro que uma pesquisa mais aprofundada sobre o ensino e aprendizagem de área em níveis elementares se faz necessária. No entanto, acreditamos que não seja absurdo concluir que a identificação entre integral e área provoca uma incorporação da integral ao repertório de fórmulas para cálculo de áreas – já tão desprovidas de significado geométrico – trazido do ensino anterior. A entrevista com Marcelo mostra bem isso. O aluno, em vários momentos mostrou que trata o conceito de integral como um mecanismo. Quando pedimos para que ele explicasse como faz para saber se uma função é integrável ou não, ele faz referência aos métodos de integração ("será que eu consigo integrar por substituição, por partes, por frações parciais?", p. 118). Também quando perguntamos quanto seria a integral de uma determinada função e ele responde com um detalhamento do método que usaria ("seria x se x igual a 1e seria uma constante k qualquer se x diferente de 1", p. 119).

Levando em consideração as respostas para o questionário, não só das questões práticas, mas também das questões teóricas, como a questão 2, o que nos parece é que a integral não é aprendida como um conceito matemático, e sim como mais uma fórmula para cálculo de áreas, através do Teorema Fundamental do Cálculo. No caso, uma fórmula que facilita a obtenção da área de uma região curva, até então algo que não era possível apenas com os resultados de ensinos anteriores ao superior.

Esses resultados sugerem que a imagem do conceito de integral que os alunos formam não é suficientemente ampla para servir como base para aprofundamentos teóricos futuros, nem para ampliar a imagem do conceito de área trazida do contexto teórico mais restrito que é estudado no ensino médio. Guardadas as devidas proporções, é o mesmo que ocorre com os conceitos de derivada e de tangente, como já foi dito.

7.3. Área como raiz cognitiva para integral

Este trabalho não incluiu um estudo detalhado sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de área nos níveis de ensino anteriores ao ensino superior. Mas acreditamos que é razoável presumirmos que o conceito de área seja visto de maneira demasiadamente calcada em fórmulas. Os resultados obtidos em (GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M.; BELFORT, E, 2004) reforçam esse aspecto do ensino de área. A referida pesquisa mostra que essa visão restrita do conceito de área fica nítida em professores dos ensinos fundamental e médio. Logo, não é absurdo supor que essa visão chegue aos alunos e que estes, por sua vez, a levem até o ensino superior.

Com isso posto e a partir dos resultados desse estudo, acreditamos estar em condições de responder à questão principal desta pesquisa, isto é, sobre a adequação da noção de área como raiz cognitiva para o conceito de integral definida.

Concluímos que, da maneira como é concebido o conceito de raiz cognitiva, não podemos considerar que área seja uma raiz cognitiva adequada para o conceito de integral definida. Os resultados deste estudo mostram que a noção de área não satisfaz a uma das condições essenciais para uma raiz cognitiva que é propiciar o desenvolvimento teórico mais avançado do conceito em questão.

A interpretação dos resultados sugere que o uso pedagógico da idéia de área como representação predominante para integrais definidas pode estar associado ao desenvolvimento de imagens de conceito restritas. A determinação de integral como área através da aplicação (muitas vezes inadequada) do Teorema Fundamental do Calculo domina a imagem de conceito dos alunos, ofuscando quaisquer outras concepções ou formas de representação, e se constitui em um potencial fator de conflito.

Sugerimos que, para que área possa ser considerada uma raiz cognitiva adequada para integral definida, seria necessária uma adaptação na definição de raiz cognitiva. Além de ser familiar ao aluno e de permitir o aprofundamento da teoria, a definição de raiz cognitiva deveria prever a ocorrência de conflitos causados pelas "noções familiares". Uma vez que, segundo a própria teoria de imagens de conceito, essas noções devem fazer parte da imagem de conceito do aluno, os conflitos estariam previstos e apontariam para expansões cognitivas. Caberia incluir que a raiz cognitiva deveria ser capaz de se desfazer. Isto é, em algum momento, através de conflitos surgidos, o aluno deve perceber que a raiz cognitiva não esgota todo o conceito em questão.

Nesse ponto, voltamos ao que foi dito na seção 1.4 (p. 19), quando estabelecemos parte do referencial teórico que fundamenta este trabalho. Tall em (TALL, 2000) afirma que um organizador genérico deve ser baseado em uma raiz cognitiva. Afirma também que espera que um organizador genérico "contenha as sementes de sua própria destruição, no sentido de que ele seja suficientemente sofisticado para mostrar as limitações do seu processo de modelagem e a necessidade de uma abordagem teórica mais completa". As modificações na definição de raiz cognitiva a que nos referimos anteriormente fazem sentido exatamente nesse ponto. Se uma raiz cognitiva for concebida podendo incluir o surgimento de conflitos e “contendo as sementes de sua própria destruição”, a noção de área poderia ser considerada como raiz cognitiva para integral.

Capítulo 8
Considerações finais

Em suma, nossos resultados sugerem que a idéia de área não se caracteriza como uma raiz cognitiva adequada para o conceito de integral, pois falha em atender à segunda condição da noção de raiz cognitiva: permitir desenvolvimentos teóricos subseqüentes. Isto se relaciona com o fato de que a noção de área seja em geral usada como referência para o conceito de integral no ensino de cálculo. Analogamente ao que se verifica com a idéia de tangente em relação ao conceito de derivada, isso faz com que a imagem de conceito de integral herde limitações da imagem de conceito de área, que é desenvolvida em um contexto matemático mais restrito. No caso do conceito de integral, este efeito é agravado pelo fato de que a própria imagem de conceito de área já tenha, em geral, sérias limitações por estar seriamente impregnada da idéia de área como fórmula e com percepção geométrica insuficiente. Assim, acreditamos que seria conveniente uma adaptação na noção de raiz cognitiva no sentido de apontar para a necessidade da abordagem pedagógica incluir situações que explicitem as limitações da idéia usada como raiz cognitiva – isto é, da raiz cognitiva "conter as sementes da sua própria destruição".

É importante frisar que não pretendemos afirmar aqui que área não é uma representação adequada para integrais definidas, o que evidentemente seria uma afirmação absurda. No entanto, os resultados aqui apresentados evidenciam que a representação de integrais definidas por meio de áreas demanda um planejamento cuidadoso, do ponto de vista pedagógico.

Nosso objetivo com este trabalho foi contribuir para uma reflexão em relação ao ensino e a aprendizagem do conceito integral definida, assim como acreditamos que outros trabalhos sobre temas inerentes ao cálculo infinitesimal tenham feito.

A criação do conceito de raiz cognitiva foi baseada na necessidade de buscar uma estratégia pedagogicamente satisfatória para introduzir um conceito matemático, sobretudo em níveis avançados. Portanto, é importante salientar que toda essa discussão acerca da adequação da noção de área como raiz cognitiva para integral definida é válida como forma de reflexão de uma solução pedagógica.

Procuramos também, através deste trabalho, demonstrar nosso apoio à pesquisa em ensino de matemática em nível superior, que ainda carece de mais espaço, se comparada às pesquisas relacionadas aos ensinos fundamental e médio. Como já esclarecemos anteriormente, essa pesquisa possui limitações a serem consideradas, mas que, a nosso ver, não fazem com que o estudo seja menos importante. Talvez este trabalho possa ser visto como um ponto de partida para investigações mais profundas sobre o conceito de integral definida. E como parte de estudos mais completos sobre o ensino e aprendizagem de cálculo.

Referências

ASPINWALL, L.;MILLER, L. D. Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings - One teacher's reflections. *Journal of Mathematical Behavior*, Amsterdam, n. 20, p. 89–107, 2001.

BARNARD, T; TALL, D. Cognitive units, connections and mathematical proof. CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 21, 1997, Finland. *Proceedings*..., vol. 2, p. 41-42, 1997.

BIZA, I.; CHRISTOU, C.; ZACHARIADES, T. Students Thinking about the Tangent Line. CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 30, 2006, Praga. *Proceedings*...Praga: Charles University, p. 177-184, 2006.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, ed. Dordrecht: Kluwer, 1991. p. 153-166.

ESCARLATE, A; GIRALDO, V. Uma investigação sobre a aprendizagem de integral em turmas iniciais de cálculo. *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática*, Belo Horizonte, 2007.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, 3ª edição, ed. Unicamp, Campinas, 2002.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M. Magnificação e linearidade local: novas tecnologias no ensino do conceito de derivada. *Tendências em Matemática Aplicada e Computacional*, São Carlos, vol. 3, n. 2, p. 101-110, 2002.

GIRALDO, V.; CARVALHO, L. M.; BELFORT, E. Descriptions and Conflicts in Dynamic Geometry. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 28, 2004, Norway. *Proceedings*...Norway: Bergen University College, vol.2, p. 465-461, 2004.

GIRALDO, V. Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada. Tese (Doutorado em Ciências) – COPPE. Rio de Janeiro: UFRJ, 2004.

GODOY, A. S. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades, *Revista de Administração de Empresas*, São Paulo, vol. 35, n. 2, p. 57-63, 1995.

GONZÁLEZ-MARTÍN, A. S.; CAMACHO, M. What is First-Year Mathematics students' actual knowledge about improper integrals?, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Abingdon, vol. 35, n. 1, p. 73-89, 2004.

HARTSHORNE, R. *Geometry: Euclid and Beyond*, ed. Springer, New York, 2000.

CLEMENT, J. Analysis od Clinical Interviews: Foundations and Model Viability, In: KELLY, A. E; LESH, R. A. (Ed.) *Handbook of research design in methematics and science education*, ed. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, p. 547-590, 2000.

KELLY, A. E; LESH, R. A. *Handbook of research design in methematics and science education*, ed. Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey, 2000.

ORTON, A. Students' Understanding of Integration. *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, vol. 1, n. 14, p.1-18, 1983.

POGORELOV, A. *Geometry*, ed. Mir Publishers, 1987.

RASSLAN, S.; TALL, D. Definitions and Images for the definite integral concept. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 26, 2002, Norwich. *Proceedings...*Norwich: UEA, 2002.

RICHARDSON, R. J.;WAINWRIGHT, D. A pesquisa qualitativa crítica e válida, In: RICHARDSON, R. (Org). *Pesquisa Social*, Capítulo 6, São Paulo, Ed. Atlas, 3ª Ed., 1999.

ROQUE, T. *História da Matemática*, Rio de Janeiro: LIMC/UFRJ, no prelo, 2008.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E.; Harel, G. (Ed.). *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology*, 1992. p. 25-58. (Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, vol. 25).

SPIVAK, M. *Cálculo infinitesima,*. Ed. Reverté, Barcelona,1970.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, vol. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, D. A graphical approach to integration and the fundamental theorem, *Mathematics Teaching*, Derby, n. 113, p. 48-51, 1986.

TALL, D. Concept Images, Generic Organizers, Computers & Curriculum Change, *For the Learning of Mathematics*, Edmonton, vol. 9, n. 3, p. 37-42, 1989.

TALL, D. The Transition to Advanced Mathematical Thinking. In: Grouws D. A. (Ed). *Handbook of Research on MathematicsTeaching and Learning*, ed. New York: Macmillan, 1992. p. 495-511.

TALL, D. Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In: ASIAN TECHNOLOGY CONFERENCE IN MATHEMATICS, 5, 2000, Chiang Mai. *Proceedings*... Blackwood: ATCM Inc, 2000.

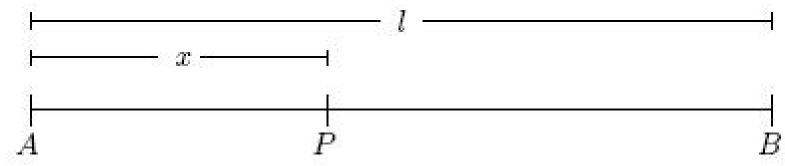
VINNER, S. Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 6, 1983, Antuérpia. *Proceedings...*Antuépia: Antwerp University, p. 24-28, 1983.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*, ed. Dordrecht: Kluwer, p. 65-81, 1991.

WINIKI-LANDMAN, G.; LEIKIN, R. On equivalents and non-equivalents definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics*, Edmonton, vol. 20, n. 1, p. 17-21, 2000.

Anexo I. O estudo exploratório

1. A figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento l. A temperatura em um ponto P sobre o arame depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função $T(x) = x^2$. Determine a temperatura média do arame.



2. Explique o que significa $\int_a^b f(x)dx$ (a integral definida da função f no intervalo $[a,b]$).

3. Explique como é possível determinar se uma dada função f é ou não integrável em um intervalo $[a,b]$, isto é, se existe ou não a integral $\int_a^b f(x)dx$.

4.

a) Dê um exemplo de uma função integrável em um intervalo $[a,b]$, isto é, tal que exista a integral $\int_a^b f(x)dx$.

b) Dê um exemplo de uma função não integrável em um intervalo $[a,b]$, isto é, tal que não exista a integral $\int_a^b f(x)dx$.

5. Em cada um dos casos abaixo, encontre a área pedida.

a) Entre o eixo x, as retas $x = 0$ e $x = 2\pi$ e a curva $y = sen(x)$.

b) Entre o eixo x, as retas $x = 0$ e $x = 2$ e a curva $y = x^2 - 5x + 6$.

c) Entre o eixo x, as retas $x = -1$ e $x = 3$ e a curva $y = x^2 - 5x + 6$.

d) Entre o eixo x, as retas $x = -1$ e $x = 2$ e a curva $y = |x|$.

e) Entre o eixo x, as retas $x = 0$ e $x = 2$ e a curva $y = \begin{cases} x & se\ x < 1 \\ 2 - x & se\ x \geq 1 \end{cases}$.

f) Entre o eixo x, as retas $x = 0$ e $x = 3$ e a curva $y = [x]$, onde $[x]$ denota a parte inteira do número real x.

6. Em cada um dos casos abaixo, verifique se a função f dada é integrável, justificando sua resposta. Em caso afirmativo, encontre a integral pedida.

a) $f(x) = sen(x)$, $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$

b) $f(x) = x^2 - 5x + 6$, $\int_0^{2} f(x)\,dx$

c) $f(x) = |x|$, $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

d) $f(x) = [x]$, $\int_0^{3} f(x)\,dx$

e) $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 1 \\ 0 & se\ x \neq 1 \end{cases}$, $\int_1^{2} f(x)\,dx$

f) $f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in Q \\ 1 & se\ x \notin Q \end{cases}$, $\int_0^{1} f(x)\,dx$

7. Considere a função $f : R \to R$ definida por $f(x) = \begin{cases} 0 & se & x \in Q \\ 1 & se & x \notin Q \end{cases}$.

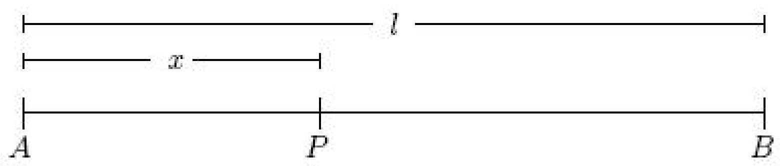
Leia atentamente o seguinte argumento: *consideremos* $0 = x_0 < \mathrm{K} < x_n = 1$ *uma partição qualquer do intervalo* $[0,1]$*, isto é, uma subdivisão de* $[0,1]$ *em subintervalos menores. Qualquer que seja o subintervalo* $[x_i, x_{i+1}]$*, temos que o mínimo da função* f *em* $[x_i, x_{i+1}]$ *é igual a* 0 *e o máximo da função* f *em* $[x_i, x_{i+1}]$ *é igual a* 1.

O que se pode concluir, com respeito à integral de f no intervalo $[0,1]$ com base neste argumento? Justifique sua resposta.

8. Você saberia dar uma definição formal para a integral definida de uma função real f?

Anexo II. O questionário da etapa 1

1. A figura abaixo representa um arame de metal de extremidades A e B e de comprimento l. A temperatura em um ponto P sobre o arame depende da distância x até a extremidade A do arame e é dada pela função T(x) = x^2. Determine a temperatura média do arame



2. Explique, com suas palavras, o que significa $\int_a^b f(x)\,dx$ (a integral definida da função f no intervalo [a,b]).

3. Explique, com suas palavras, como é possível determinar se uma dada função f é ou não integrável em um intervalo $[a,b]$, isto é, se existe ou não a integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

4.a) Dê um exemplo de uma função integrável em um intervalo $[a,b]$, isto é, tal que exista a integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

b) Dê um exemplo de uma função não integrável em um intervalo $[a,b]$, isto é, tal que exista a integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

5. Em cada um dos casos abaixo, encontre a área pedida.

a) Entre o eixo x, as retas x = 0 e x = 2π e a curva y = sen(x).

b) Entre o eixo x, as retas x = 0 e x = 2 e a curva y = x^2 - 5x + 6

c) Entre o eixo x, as retas x = -1 e x = 3 e a curva y = x^2 - 5x + 6.

d) Entre o eixo x, as retas x = 1 e x = 3 e a curva $y = \begin{cases} 1 & se\ x < 2 \\ x+3 & se\ x > 2 \end{cases}$.

6. Em cada um dos casos abaixo calcule a integral pedida.

a) $f(x)$ = sen(x), $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

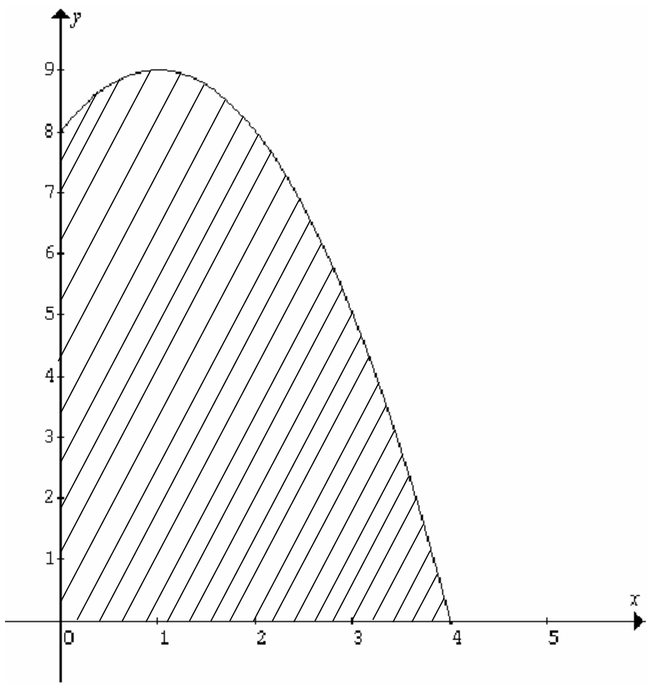
b) $f(x)$ = x² - 5x + 6, $\int_0^{2} f(x)\,dx$.

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & se\ x = 1 \\ 0 & se\ x \neq 1 \end{cases}$, $\int_1^{2} f(x)\,dx$.

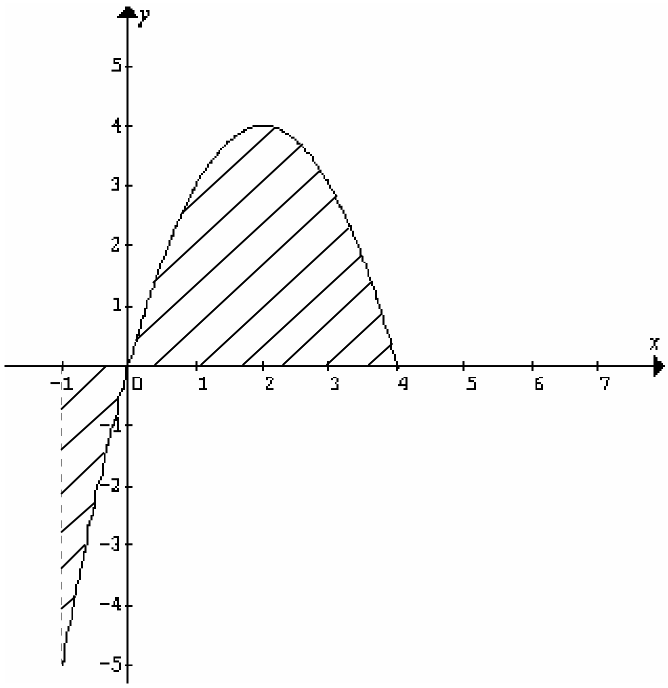
d) $f(x) = \begin{cases} 2x & se\ x < 1 \\ 3 & se\ x > 1 \end{cases}$, $\int_0^{3} f(x)\,dx$.

7. Em cada um dos casos abaixo calcule a área da região hachurada.

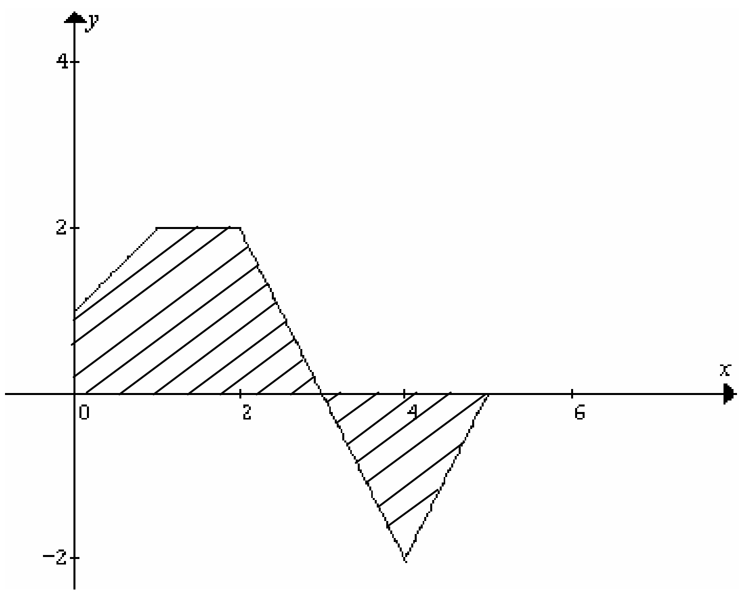
a) $f(x) = -x^2 + 2x + 8$



b) $f(x) = -x^2 + 4x$



c) $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \le x \le 1 \\ 2, & 1 < x \le 2 \\ -2x+6, & 2 < x \le 4 \\ 2x-10, & 4 < x \le 5 \end{cases}$



8. Você saberia dar uma definição formal para a integral definida de uma função real f ?