UFRJ – Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática

Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço

Robson Coelho Neves

Dissertação de Mestrado

Orientador:

Gérard Emile Grimberg

Rio de Janeiro
Dezembro / 2008

Os Quatérnios de Hamilton e o Espaço

Robson Coelho Neves

Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – IM/UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

____

Gérard Emile Grimberg

____

Tatiana Marins Roque

____

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho

____

Raúl Pierre Renteria

Agradecimentos

Ninguém alcança seus objetivos sozinho. Incontáveis são as variáveis, diretas e indiretas, que determinam o sucesso.
A conclusão do mestrado tem um significado especial para mim e para todos que me acompanham de perto.
Agradecendo, compartilho minha alegria.

À Deus, acima de tudo e de todos, agradeço a benção de ter nascido membro de uma família que tanto amo e por estender essa benção para a família que constituí.

Aos meus pais, Maria Celina Coelho Neves (A Guerreira) e Acydnir da Silva Neves (O Tricolor), agradeço os exemplos de humildade, de integridade e disposição incondicional para o trabalho. Espero ter sido um bom aprendiz.

À minha tia-mãe Maria Léa Coelho, agradeço por saber suprir, com amor de mãe genuíno, a involuntária ausência dos meus pais.

Aos meus irmãos, Hudson Coelho Neves, Luci Coelho Neves (in memoriam), Denilson Coelho Neves e Luciana Coelho Neves, agradeço pelo convívio harmonioso e pela caminhada prazerosa.

À minha sogra, Arilene Lixa Victor e ao meu sogro, Jorge Baptista Victor, agradeço pela presença amiga, pela generosidade e carinho com os quais sempre me trataram.

À todas as pessoas que idealizaram e trabalharam sem medir esforços pela criação do mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ, agradeço de coração a oportunidade preciosa de aperfeiçoamento.

Ao corpo docente do mestrado, agradeço pela dedicação e competência com os quais conduziram suas atividades. Em especial, agradeço ao Victor Giraldo, um professor que aprendi a admirar, que me serve de referência.

Aos colegas do curso, agradeço pelo tratamento amigo e cordial que me dedicaram, mesmo sendo eu uma pessoa reservada.

Agradecimentos Especiais

À minha esposa Gláucia Lixa Victor Neves (minha fã número um, meu talismã), agradeço por me fazer acreditar que sou capaz de vencer grandes desafios, por ser minha melhor companhia nos bons e maus momentos, pelo convívio diário renovadamente feliz e por seu amor imenso e sincero (TOO).

Aos meus lindos e maravilhosos filhos, Carolina Lixa Victor Neves (minha Princesa) e Lucas Lixa Victor Neves (meu Moleque), agradeço por me inspirarem a buscar ser uma pessoa melhor, em todos os sentidos, dia após dia.

Ao meu orientador, meu "Caro Mestre e Amigo" Gérard Emile Grimberg, agradeço por ter acreditado desde o início que eu seria capaz "de dar conta" de um tema tão "hiper-complexo"; por me atender e me orientar semanalmente com competência, paciência e generosidade durante dois anos de pesquisas; pelas longas e instigantes conversas que tivemos sobre educação; por ter me transmitido o gosto pela pesquisa em História da Matemática; pelo seu exemplo contagiante de profissionalismo e paixão pelo magistério.
Muito obrigado!

Resumo

O surgimento da representação geométrica para os números imaginários $x + iy$ no início do século XIX e, como conseqüência disto, o surgimento de um método analítico simples e eficaz para a realização de rotações no plano, via multiplicações desses números, sugeriram a possibilidade de se estender tal método para o espaço, a partir da definição de uma multiplicação de tripletos $x + iy + jz$.

As pesquisas de Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) neste sentido resultaram em duas conclusões surpreendentes para a época: a realização de rotações no espaço só é possível a partir da multiplicação de quatérnios $w + ix + jy + kz$, objetos do espaço de dimensão quatro e, além disso, tal multiplicação não é comutativa.

Neste trabalho pretendemos descrever e analisar todo esse processo de pesquisas de Hamilton: suas motivações, a gênese dos quatérnios e a interpretação da multiplicação desses objetos via rotações no espaço.

Abstract

The creation of the geometric representation for the imaginary numbers in the beginning of the XIX century and, as a consequence of this, the appearance of a simple and effective analytical method for the accomplishment of rotations in the plan, through multiplication of those numbers, suggested the possibility to extend this method for the space, based from the definition of triplets multiplication.

The researches of Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) in this matter resulted in two surprising conclusions for the time: the accomplishment of rotations in the space is only possible using the quaternions multiplication, objects of four dimension space , and that this multiplication is not commutative.

In this work we intended to describe and to analyze the whole process of Hamilton's researches: their motivations, the quaternion's genesis and the interpretation of the multiplication of those objects through rotations in the space.

SUMÁRIO DA DISSERTAÇÃO

Introdução

No início do século XIX, o surgimento da representação geométrica para os números imaginários[1] $x + iy$, via segmentos de retas orientados[2] e, paralelamente, a interpretação geométrica da adição e da multiplicação desses números, bem como das suas propriedades operacionais, forneceram métodos analíticos simples e eficazes para a realização de dois tipos de transformações no plano: as translações, via adições, e as rotações, via multiplicações. O modelo analítico para o plano, surgido desses resultados, sugeriu a possibilidade da existência de um modelo analítico similar para o espaço, com as mesmas interpretações geométricas, ou seja, cuja adição pudesse servir como um método para a realização de translações no espaço e cuja multiplicação pudesse servir como um método para a realização de rotações no espaço. A adição em um modelo analítico para o espaço, conforme a sugestão, podia ser de fato definida de maneira similar, mas o mesmo não acontecia em relação a multiplicação.

Sem pretendermos ser originais[3], nesta dissertação iremos descrever e analisar todo o processo de pesquisas do irlandês Sir William Rowan Hamilton (1805-1865)[4] em torno desse problema, ou seja, definir uma multiplicação que possa ser interpretada via rotações no espaço.

Antes mesmo de pensar nesse problema, movido por outros interesses[5], Hamilton fundamentou, em bases axiomáticas, a estrutura algébrica dos números imaginários. Afinal, segundo ele confidenciou ao seu amigo John Thomas Graves (1806-1870), em outubro de 1828, os números imaginários não deveriam precisar do apelo a considerações geométricas para serem entendidos com clareza. Com o artigo “Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time”[6], lido na Academia Real Irlandesa em 4 de

---

[1] Gauss introduziu a expressão “número complexo” em 1832. Manteremos nesta dissertação a expressão “número imáginário”, que foi a usada por Hamilton.

[2] Segmentos com origem em (0,0) e extremidade num ponto (x,y) qualquer.

[3] Nesta dissertação, além de fontes primárias, basearemos nossa análise em vários textos sobre os quatérnios, dentre os quais, Cartan, [1908], Koppelman [1971], Flament [2003].

[4] Hamilton recebeu esse título de nobreza aos trinta e cinco anos de idade em virtude do artigo “Theory of Systems of Rays”, de 1832, sobre a refração cônica de certos cristais (as predições teóricas de Hamilton contidas neste artigo foram confirmadas experimentalmente por Humphrey Lloyd no mesmo ano).

[5] Veremos quais foram esses interesses no capítulo 2.

[6] Teoria das Funções Conjugadas, ou Pares Algébricos; com Ensaio Preliminar e Elementar sobre a Álgebra como uma Ciência do Tempo Puro.

novembro de 1833, Hamilton apresentou os resultados desse projeto preliminar. Nesse artigo, Hamilton construiu uma estrutura algébrica para os "pares algébricos ou numéricos" (x, y), similar a dos números imaginários $x + iy$, de modo que tais números pudessem ser identificados pela relação[7] $(x, y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy$. No final do artigo Hamilton revelou que pretendia estender seus resultados em busca de uma "Teoria de Tripletos"[8] (x, y, z), já com a intenção de obter um modelo analítico para o espaço.

A primeira conjectura de Hamilton para definir uma multiplicação de tripletos é de caráter geométrico e data de 1830. Trata-se de uma tentativa de estender os resultados geométricos de John Warren (1796-1852) sobre rotações no plano via multiplicações de linhas, publicados em 1828 com o título *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities* [9]. Quando foi traduzida via expressões algébricas, tal conjectura geométrica mostrou-se inconveniente por não preservar a propriedade distributiva, conforme Hamilton pretendia.

Esse inconveniente fez com que Hamilton abandonasse sua conjectura geométrica e passasse a tentar o caminho inverso, ou seja, definir algebricamente uma multiplicação de tripletos que preservasse todas as propriedades da multiplicação de pares numéricos e cuja interpretação estivesse de acordo com sua conjectura geométrica. Nas suas conjecturas algébricas para definir uma multiplicação, fazendo uso do modelo algébrico $x + iy + jz$ para um tripleto (x, y, z), Hamilton se deparou com o seguinte problema: o produto da multiplicação apresenta um termo em ij, algo estranho ao modelo algébrico de um tripleto.

A superação desse obstáculo, ocorrida em 16 de outubro de 1843, se deu às custas de duas conclusões surpreendentes para a época: só seria possível definir uma multiplicação algébrica fechada para o espaço abrindo-se mão da propriedade

---

[7] Essa relação é a encontrada nos livros didáticos de matemática do ensino médio.

[8] Hamilton usou a expressão "triplets". Por já ter sido consagrado nos textos em língua portuguesa, usaremos a expressão "tripletos" nesta dissertação.

[9] Um Tratado sobre a Representação Geométrica das Raízes Quadradas de Quantidades Negativas.

comutativa e operando-se com números do tipo $w + ix + jy + kz$, (aqui $k^2 = j^2 = i^2 = -1$), os "quatérnios"[10].

Superado o obstáculo algébrico para a multiplicação, restava ainda esclarecer a seguinte questão: identificando um tripleto (x, y, z) com um quatérnio do tipo $ix + jy + kz$ (aqui, $w = 0$), como a multiplicação de quatérnios pode ser interpretada geometricamente via rotações no espaço? O primeiro artigo de Hamilton sobre a descoberta dos quatérnios: "On a New Species of Imaginary Quantities connected with a Theory of Quaternions"[11], foi lido na Academia Real Irlandesa em 13 de novembro de 1843. Nesse artigo ele não utiliza os quatérnios para tratar de rotações no espaço de um modo geral, mas apenas para tratar de polígonos esféricos. Hamilton só mostra como os quatérnios podem ser utilizados para a realização de rotações no espaço no artigo "On Quaternions"[12], lido na Academia Real Irlandesa em 11 de novembro de 1844.

A primeira publicação de um método simples e eficaz para se operar rotações de segmentos orientados (ou pontos) no plano, via multiplicação de números imaginários, é da autoria do agrimensor norueguês Caspar Wessel (1745-1818) e data de 1798. Nesse mesmo artigo, Wessel também utiliza a multiplicação de segmentos do plano para realizar rotações de segmentos no espaço, porém em torno de duas direções apenas[13].

Segundo Michael J. Crowe[14], pelo menos outras cinco pessoas publicaram trabalhos sobre rotações no plano via multiplicação de segmentos: Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) (teve a idéia em 1799 mas só publicou em 1831); Abbé Buée e Jean-Robert Argand (1768-1822), publicaram, independentemente, em 1806; John Warren (1796-1852) e C. V. Mourey publicaram, independentemente, em 1828. Com exceção de Warren, todos tentaram, sem sucesso, estender seus resultados do plano para o espaço.

[10] Hamilton usou a expressão "quaternions". Pela mesma razão exposta na nota 5, usaremos a expressão "quatérnio".
[11] Uma Nova Espécie de Quantidade Imaginária conectada com a Teoria dos Quatérnios.
[12] Sobre Quatérnios.
[13] Como veremos no capítulo 1, mais exatamente em torno das direções dos eixos imaginários ηr e εr.
[14] Crowe [1967], pp. 5,11

Seguiremos o seguinte planejamento:

- Com o objetivo de introduzir as raízes do foco desta dissertação, o problema das rotações no espaço, no capítulo 1 pretendemos tratar dos resultados de Wessel sobre rotações no plano e no espaço via multiplicação de segmentos. A opção por nos concentrarmos apenas nos resultados de Wessel (em detrimento dos outros cinco autores aqui citados) é justificada pelos seguintes motivos: foi dele a primeira publicação; as representações analíticas de segmentos no plano e no espaço utilizadas por Hamilton são similares às utilizadas por Wessel (embora Hamilton não tenha lido os trabalhos de Wessel); Wessel apresentou um método correto para a realização de rotações no espaço, ainda que apenas em torno das direções dos eixos imaginários e, por fim, os resultados de Warren, que influenciaram Hamilton, estão presentes, de forma bastante similar, no texto de Wessel. Neste capítulo utilizaremos o livro *Essai sur la représentation analytique de la direction*[15], que é uma edição em francês do trabalho original de Wessel, e foi publicada em 1899.

- No capítulo 2, analisaremos o artigo "Theory of Conjugate Functions, Or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Álgebra as the Science of Pure Time"[16] (publicado em 1837 nas Transactions da Royal Irish Academy, volume17, pp. 293-422) no qual Hamilton apresenta uma tentativa de estruturar axiomaticamente os conjuntos numéricos, via a idéia de extensões, desde os inteiros positivos até os pares numéricos, de modo a identificar estes últimos com os números imaginários.

- No capítulo 3, baseados numa carta de Hamilton para Graves (datada de 17 de outubro de 1843, um dia após Hamilton ter descoberto os quatérnios, e publicada em 1844 no The London, Edinburgh and Dublin Philosophical

---

[15] Somente a partir dessa edição (Ensaio da representação analítica da direção), que foi publicada quase cem anos após sua apresentação, as idéia de Wessel se tornaram acessíveis ao público europeu.
Esta edição está disponível na internet.

[16] Na verdade usaremos uma edição de David R. Wilkins, datada de 2000 (todos os artigos de Hamilton estão disponíveis na internet).

Magazine and Journal of Science vol. xxv, pp. 489-95)[17] e no prefácio do seu livro *Lectures on Quaternions*, publicado em 1853 [18], descreveremos e analisaremos as tentativas de Hamilton no sentido de estender a estrutura axiomática do conjunto dos pares numéricos para o conjunto dos tripletos, focando principalmente o problema do fechamento da multiplicação, cuja solução resultou na descoberta dos quatérnios.

- No capítulo 4, baseados no artigo “On Quaternions”[19] (publicado em 1847 nos Proceedings of the Royal Irish Academy, vol. 3, pp. 1-16), descreveremos e analisaremos a maneira pela qual Hamilton interpretou a multiplicação de quatérnios via rotações (e composição de rotações) no espaço.

Para tornar as idéias mais claras, lançaremos mão de algumas figuras, porém ressaltamos que os textos analisados, salvo raríssimas exceções, não apresentam tal recurso.

---

[17] Na verdade usaremos uma edição de David R. Wilkins, datada de 1999 (disponível na internet).

[18] Este livro (*Lectures on Quaternions*), que foi publicado em 1853, é o resultado de várias palestras proferidas por Hamilton sobre suas pesquisas desde a descoberta dos quatérnios em 1843 (disponível na internet).

[19] Na verdade, usaremos uma edição de David R. Wilkins, datada de 1999.

Capítulo 1: A Solução de Caspar Wessel para o Problema das Rotações no Espaço

1.1: Introdução

O problema cuja solução resultou na descoberta dos quatérnios por Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) em 16 de outubro de 1843 pode ser resumido no seguinte : como o método para operar rotações no plano, via multiplicação de números imaginários, pode ser estendido para o espaço?

Segundo Michael J. Crowe[20], pelo menos seis pessoas apresentaram, antes de Hamilton, trabalhos sobre rotações no plano via números imaginários e tentaram (com exceção de Warren), sem sucesso, estender seus resultados para o espaço. São eles[21]: Caspar Wessel (1745-1818), Johann Carl Friedrich Gauss, Jean Robert Argand , Abbé Buée, John Warren e C. V. Mourey.

Wessel, que é o personagem principal desse capítulo, foi o primeiro a publicar (em 1799) um método para a realização de rotações no plano e uma pequena extensão desse método para a realização de rotações no espaço em torno apenas das direções de dois eixos (imaginários). Infelizmente, o texto de Wessel só se tornou acessível em 1899, após uma edição em francês sob o título *Essai sur la représentation analytique de la direction, par Caspar Wessel* .

Embora não tenha influenciado Hamilton em suas pesquisas[22], podemos listar alguns motivos que nos fizeram reservar o primeiro capítulo desta dissertação para procedermos uma análise dos seus resultados: é de Wessel o primeiro texto que trata do tema que é o foco dessa dissertação, ou seja, rotações no plano e no espaço (ainda que

---

[20] Crowe [1967], pp. 5-11.

[21] Em ordem cronológica de publicação, Wessel apresentou seu trabalho a Royal Danish Academy of Scienses em 10 de março de 1797 e este foi publicado (em dinamarquês) em 1798 nas memórias desta academia; Gauss teve a idéia em 1799 mas só publicou em 1831; Buée, apresentou em 1805 a Royal Society of London e este foi publicado no ano seguinte nas Transactions of the Royal Society; Argand , publicou em 1806; Warren e Mourey publicaram em 1828.

[22] Hamilton declara na sua primeira comunicação sobre a descoberta dos quatérnios (uma carta para o amigo John Graves, datada de 17 de outubro de 1843) que suas argumentações foram baseadas nos resultados apresentados por John Warren no livro *Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*, publicado em 1828.

seus resultados no espaço sejam incompletos); em suas pesquisas, Hamilton representa segmentos no plano e no espaço de forma similar a Wessel e os resultados de Warren, que influenciaram Hamilton, estão presentes, de forma bastante similar, no texto de Wessel.

Analisaremos as idéias de Wessel a partir da já citada edição do seu trabalho. As figuras que utilizaremos para facilitar a compreensão dos resultados não são do livro de Wessel[23], mas manteremos sua simbologia.

1.2: Resultados de Wessel para o Plano

No artigo apresentado a Royal Danish Academy of Sciences em 10 de março de 1797, publicado (em dinamarquês) em 1798 nas memórias desta academia sob o título *Om directionens analytiske betegning, et forsøg, avendt fornemmelig til plane og sphaeriske polygoners opløsning* (*Uma apresentação analítica de direção: uma tentativa aplicada principalmente a resolução de polígonos planos e esféricos*), Wessel propôs uma representação analítica para segmentos de retas no plano e no espaço[24], levando em consideração a direção, a origem, a extremidade e o comprimento do segmento. Em seguida, definiu operações entre segmentos e utilizou esses resultados na resolução de polígonos planos e esféricos.

A representação analítica para um segmento no plano permitiu não só que estes fossem identificados com os números imaginários[25], mas também que fossem operados como tais, mantendo inclusive suas propriedades operatórias.

---

[23] Wessel apresenta poucas figuras no final do seu livro, sendo praticamente todas elas figuras espaciais, mais exatamente são esquemas para o estudo de polígonos esféricos.

[24] Wessel [1897], p.3 : "Le présent essai a pour objet la question de savoir comment la direction doit être représentée analytiquement,..."

[25] Id, p.5 : "Ce qui m'a a donné l'occasion de l'écrire, c'est que je cherchais une méthode qui permit d'éviter les opérations impossibles;..."

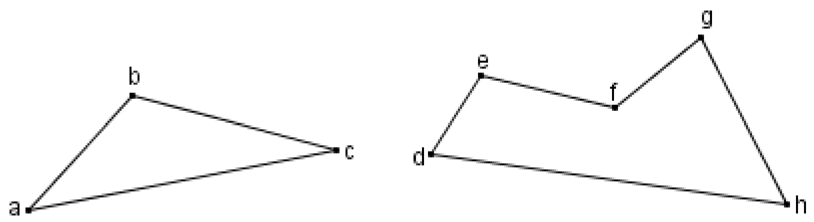
1.2.1: Adição Geométrica de dois ou mais "Segmentos" no Plano e no Espaço

Como primeiro resultado, Wessel definiu a adição geométrica de dois "segmentos"[26] de reta da seguinte maneira:

"Unimos os segmentos de modo que o segundo segmento comece onde o primeiro termina e passamos um segmento pelo primeiro ponto do primeiro segmento e último ponto do segundo segmento. Este segmento será a soma dos dois segmentos".[27]

Wessel estendeu este resultado afirmando que a soma de mais de dois segmentos pode ser feita segundo a mesma regra[28] e observou ainda que a ordem em que os segmentos são somados é indiferente[29].

Na figura.1[30] ilustramos a regra de Wessel para a soma de segmentos.



(figura.1) ab+bc=ac e de+ef+fg+gh=dh

Observemos que da maneira como a adição foi definida, a orientação do segmento é importante. Por exemplo, as adições ab+bc e ab+cb não resultam numa mesma soma, visto que os segmentos bc e cb possuem orientações diferentes[31]. Além disso, essa adição possui as mesmas propriedades da adição de números imaginários, ou seja, em termos atuais: é comutativa, tem elemento neutro (segmento aa, por exemplo), todo segmento ab tem um inverso aditivo ba e é associativa.

---

[26] Wessel não define explicitamente o que vem a ser direção, módulo e inclinação de um segmento orientado porém, como veremos, deixa bastante clara a noção de sentido, ao definir a adição, e as noções de comprimento e direção, ao definir a multiplicação.

[27] Id., p.7 : "L'addition de deux segments se fait de la manière suivante: on les combine en faisant partir l'un du point où l'autre se termine; puis on joint par un nouveau segment les deux bouts de la ligne brisée ainsi obtenue: ce nouveau segment s'appelle alors la somme des segments donnés."

[28] Id., p.8 : "Pour ajouter plus de deux segments, on suit la même règle:…"

[29] Id. : "Par conséquent, dans l'addition des segments, l'ordre des termes est arbitraire, et la somme reste tonjours la même…"

[30] As figuras desta dissertação serão numeradas (segundo a simbologia "figura.n°") para facilitar a compreensão do texto.

[31] Id.: Wessel expressa esse fato considerando cb igual a –bc.

1.2.2: Multiplicação Geométrica de dois Segmentos no Plano

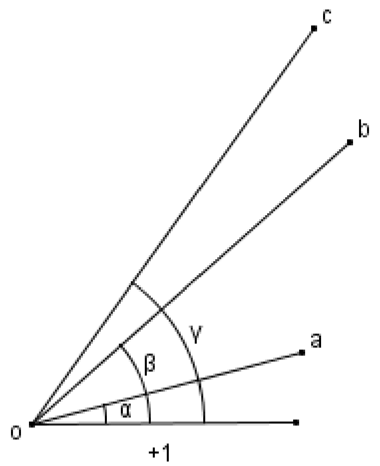
Para definir uma multiplicação geométrica de segmentos, Wessel utilizou como referência um segmento que ele nomeou por "unidade positiva", e simbolizou por +1, cujo comprimento é 1 e cuja inclinação é definida como sendo 0°. Assim, dados dois segmentos, Wessel definiu seu produto como sendo um terceiro segmento com as seguintes características[32]:

1) Pertence ao mesmo plano dos segmentos fatores e do segmento +1;

2) Tem comprimento igual ao produto dos comprimentos dos segmentos fatores;

3) Tem inclinação (tomando como referência a inclinação de +1) igual à soma das inclinações dos segmentos fatores.

Na figura.2 ilustramos a regra de Wessel para o produto de dois segmentos.



(figura.2) oa, ob, oc e +1 são coplanares
oa.ob=oc
α+β=γ

Como veremos no capítulo 3, a definição de Warren para a multiplicação de segmentos no plano, que serviu de base para as pesquisas de Hamilton, é inteiramente similar à esta apresentada por Wessel.

---

[32] Id., p.9 : " 1°) Les facteurs doivent avoir une direction telle qu'ils puissent être placés dans le même plan que l'unité positive; 2°) Quant à la longueur, le produit doit être à l'un des facteurs comme l'autre est à l'unité; 3°) En ce qui concerne la direction du produit, si l'on fait partir de la même origine l'unité positive, les facteurs et le produit, celui-ci doit être dans le plan de l'unité et des facteurs, et doit dévier de l'un des facteurs d'autant de degrés et dans le même sens que l'autre facteur dévie de l'unité, en sorte que l'angle de direction du produit ou sa deviation par rapport à l'unité positive soit égale à la somme des angles de direction des facteurs."

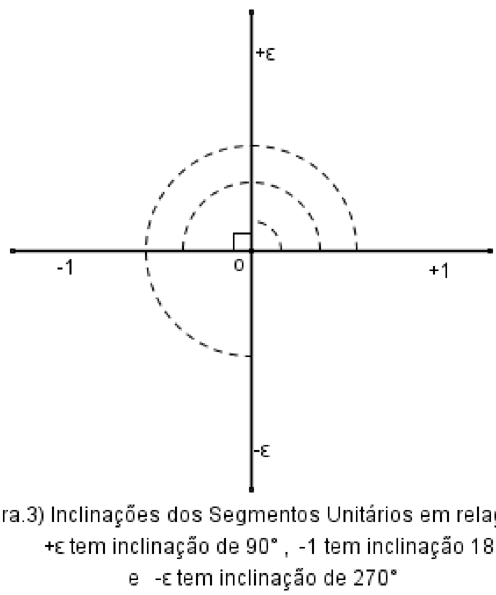
Aqui podemos observar que a simbologia usada por Wessel tem dupla função, ou seja, representa tanto o segmento em si quanto o seu comprimento. Assim, na figura.2, ao.ob = oc simboliza tanto a multiplicação de dois segmentos coplanares quanto o comportamento dos comprimentos desses segmentos na multiplicação.

Wessel concluiu que a multiplicação "não contradiz as regras das operações ordinárias com números"[33] . Em termos atuais tais propriedades são: comutatividade, existência do elemento neutro (unidade positiva), existência do inverso multiplicativo (caso o segmento tenha comprimento diferente de zero), associatividade e distributividade em relação à adição.

1.2.3: Representação Analítica de Segmentos no Plano

Com o objetivo de obter uma representação analítica para um segmento no plano, Wessel definiu outros três segmentos unitários que pertencem ao mesmo plano do segmento +1 e cujas inclinações têm por referência a inclinação de +1, que é de 0°. São eles: $+\varepsilon$, com inclinação de 90°; -1, com inclinação de 180° e $-\varepsilon$, com inclinação de 270º [34].

Na figura.3 ilustramos esses segmentos e suas respectivas inclinações.



(figura.3) Inclinações dos Segmentos Unitários em relação a +1:
+ε tem inclinação de 90°, -1 tem inclinação 180°
e -ε tem inclinação de 270°

[33] Id. : "... et que la déviation du produit est déterminée de telle sorte qu'on ne tombe en contradiction avec aucume des règles d'opération ordinaires."
[34] Id. : "Désignons par +1 l'unité rectiligne positive, par +ε une autre unité perpendiculaire à la première et ayant la même origine: alors l'angle de direction de +1 sera égal à 0°; celui de -1 à 180°, celui de +ε à 90° et celui de -ε à -90° ou à 270°..."

Baseado em sua definição para os quatro segmentos unitários e na regra para a multiplicação, Wessel obteve os seguintes resultados (aqui tabelados) [35]:

•	+1	+ε	-1	-ε
+1	+1	+ε	-1	-ε
+ε	+ε	-1	-ε	+1
-1	-1	-ε	+1	+ε
-ε	-ε	+1	+ε	-1

A partir dessas multiplicações geométricas Wessel concluiu que o segmento $+\varepsilon$ é uma representação geométrica para $\sqrt{-1}$ [36], o que está de acordo com a igualdade $(+\varepsilon).(+\varepsilon)=-1$.

Vejamos como justificar este resultado:

De acordo com a definição, o produto do segmento unitário $+\varepsilon$ por ele próprio é um segmento cujo comprimento é o quadrado do comprimento de $+\varepsilon$, ou seja, $1^2=1$, e cuja inclinação é o dobro da inclinação de $+\varepsilon$, ou seja, $2.90°=180°$. Dentre os quatro segmentos unitários, -1 é o único com tais características.

É interessante observarmos que até aqui Wessel não tratou $\sqrt{-1}$ como um número imaginário.

A regra da adição de segmentos e o resultado $+\varepsilon=\sqrt{-1}$, permitiram que Wessel concluísse que se oa é um segmento unitário de origem o, com inclinação de v graus, então oa pode ser interpretado geometricamente como a soma das suas projeções ortogonais $\cos v$ e $\varepsilon \operatorname{sen} v$, nas direções dos segmentos unitários $+1$ e $+\varepsilon$, respectivamente, e que deve ser representado analiticamente por

$$oa=\cos v+\varepsilon \operatorname{sen} v.$$

---

[35] Id.

[36] Id. : “Il em résulte que ε est égal à √-1...”

Na figura.4 ilustramos a representação analítica de Wessel para um segmento unitário com origem o e com inclinação de um ângulo v.

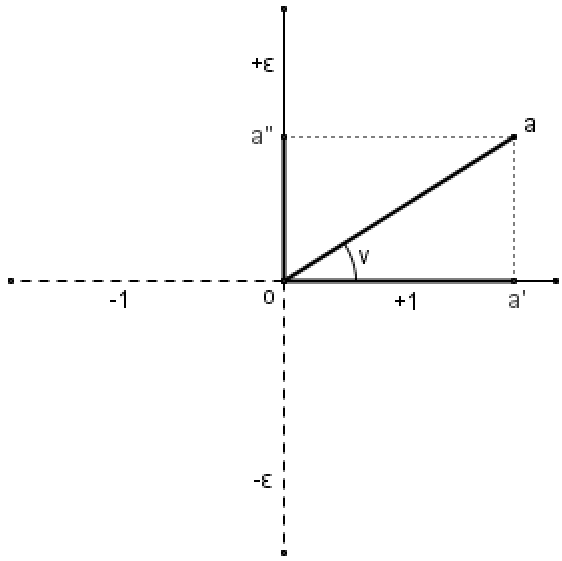


figura.4) oa=cosv+εsenv, onde cosv=oa' e εsenv=oa"

De modo geral, Wessel concluiu que se o segmento oa possui comprimento A e inclinação de um ângulo v, então oa pode ser representado analiticamente por[37]

$$oa = (\cos v).A + \varepsilon(\text{sen}v).A = A.(\cos v + \varepsilon \text{sen}v).$$

Em termos atuais, trocando-se ε por i, a representação analítica genérica de Wessel para um segmento é o que chamaríamos de "forma polar ou trigonométrica de um número complexo"[38].

1.2.4: Multiplicação Analítica de Segmentos no Plano

Considerando que a multiplicação de segmentos é distributiva, que $\varepsilon.\varepsilon = -1$ e fazendo uso de identidades trigonométricas[39], Wessel concluiu que a multiplicação dos segmentos unitários $(\cos v + \varepsilon \text{sen}v)$ e $(\cos u + \varepsilon \text{sen}u)$ obedece à seguinte regra[40]:

---

[37] Id., p.11

[38] Wessel não usa a identidade $e^{i\theta} = \cos\theta + i\text{sen}\theta$, de Leonhard Euler (1707-1783), no seu texto.

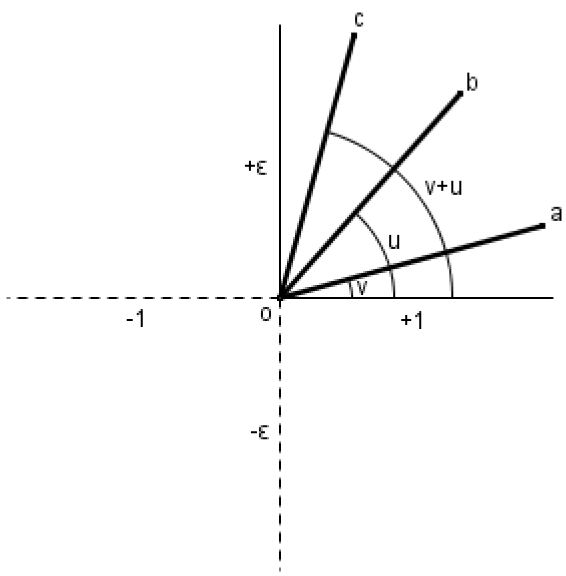
[39] cos(x+y) = cosxcosy-senxseny e sen(x+y) = cosxseny+senxcosy.

[40] Id., p.10

$$\begin{aligned}(\cos v + \varepsilon \mathrm{sen} v)(\cos u + \varepsilon \mathrm{sen} u) &= \cos v.\cos u + \varepsilon^2(\mathrm{sen} v.\mathrm{sen} u) + \varepsilon(\cos v.\mathrm{sen} u + \mathrm{sen} v.\cos u)\\ &= \cos v.\cos u - \mathrm{sen} v.\mathrm{sen} u + \varepsilon(\cos v.\mathrm{sen} u + \mathrm{sen} v.\cos u)\\ &= \cos(v+u) + \varepsilon \mathrm{sen}(v+u)\end{aligned}$$

Este resultado mostra que Wessel sabia que a multiplicação de segmentos unitários opera rotações. Mais exatamente, sabia que o produto da multiplicação $(\cos v + \varepsilon \mathrm{sen} v)(\cos u + \varepsilon \mathrm{sen} u)$ resulta na rotação do segmento unitário $\cos v + \varepsilon \mathrm{sen} v$ de um ângulo u ou na rotação do segmento unitário $\cos u + \varepsilon \mathrm{sen} u$ de um ângulo v [41].

Na figura.5 ilustramos a multiplicação analítica de dois segmentos unitários.



(figura.5) oa.ob=oc, onde oa=cosv+εsenv, ob=cosv+εsenv
e oc=cos(v+u)+εsen(v+u)

Considerando dois segmentos quaisquer $A.(\cos v + \varepsilon \mathrm{sen} v)$ e $B.(\cos u + \varepsilon \mathrm{sen} u)$, da multiplicação analítica de segmentos unitários, Wessel obteve a regra geral:[42]

$$\begin{aligned}A.(\cos v + \varepsilon \mathrm{sen} v).B.(\cos u + \varepsilon \mathrm{sen} u) &= A.B.(\cos v + \varepsilon \mathrm{sen} v)(\cos u + \varepsilon \mathrm{sen} u)\\ &= A.B.(\cos(v+u) + \varepsilon \mathrm{sen}(v+u)).\end{aligned}$$

[41] Id.
[42] Id., p.12

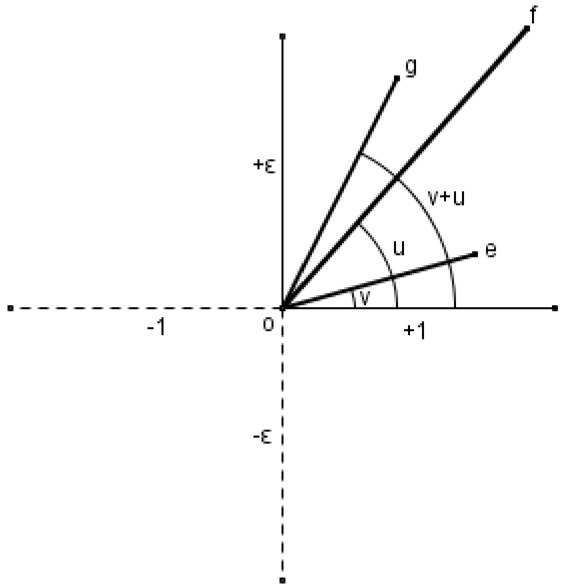
Considerando mais uma vez que a multiplicação de segmentos é distributiva e que $\varepsilon.\varepsilon = -1$, Wessel concluiu que[43]:

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac + \varepsilon ad + \varepsilon bc + \varepsilon\varepsilon bd = ac - bd + \varepsilon(ad + bc).$$

Fazendo

$$A.\cos v = a, A.\text{sen} v = b, C.\cos u = c \text{ e } C.\text{sen} u = d,$$

na figura.6 ilustramos a multiplicação analítica de dois segmentos não unitários.



(figura.6) oe.of=og, ou A.(cosv+εsenv).B.(cosu+εsenu)=A.B.[cos(v+u)+εsen(v+u)], ou (a+εb)(c+εd)=ac-bd+ε(ad+bc), onde A.cosv=a, A.senv=b, B.cosu=c e B.senu=d

Em termos atuais, observemos que trocando-se ε por i, esta última multiplicação é equivalente a multiplicação de números complexos na forma algébrica[44].

Wessel finalizou o capítulo I demonstrando analiticamente como realizar multiplicações, divisões, potenciações e radiciações de segmentos quaisquer, unitários ou não[45].

---

43 Id., pp.11-12

44 Conforme veremos no capítulo 2, este resultado foi obtido por Hamilton.

45 Id., pp.12-16

Até essa altura do seu texto Wessel não tinha feito qualquer comentário sobre a identificação dos números imaginários com os segmentos, mas após demonstrar como se resolve potências do tipo $(\cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v)^{\frac{n}{m}}$, onde n e m são positivos ou negativos, para citar um exemplo de aplicação deste resultado[46], ele observou que $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ representa um segmento de comprimento 2 e inclinação de 10º.

Vejamos como chegar a esta conclusão de Wessel com os resultados que ele apresentou até então:

Como $4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1} = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon\frac{1}{2}\right) = 8(\cos 30^o + \varepsilon \operatorname{sen} 30^o)$ e, segundo Wessel,

$$(\cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v)^{\frac{n}{m}} = \cos\frac{n}{m}v + \varepsilon \operatorname{sen}\frac{n}{m}v,$$

teremos que

$$\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \varepsilon\frac{1}{2}\right)} = \sqrt[3]{8(\cos 30^o + \varepsilon \operatorname{sen} 30^o)} = \sqrt[3]{8}(\cos 30^\circ + \varepsilon \operatorname{sen} 30^\circ)^{\frac{1}{3}}$$
$$= 2\left(\cos\frac{30^\circ}{3} + \varepsilon \operatorname{sen}\frac{30^\circ}{3}\right) = 2(\cos 10^\circ + \varepsilon \operatorname{sen} 10^\circ),$$

ou seja, de fato $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ representa um segmento de comprimento 2 e inclinação de 10º.

No capítulo II Wessel usou os resultados do capítulo I em duas aplicações: a demonstração do teorema de Roger Cotes (1682-1716) [47] e a resolução de polígonos planos[48].

---

[46] Id., p14 "...on peut par exemple représenter $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ par un segment de droite dont la longueur est égale à 2 et dont l'angle avec l'unité positive a pour mesure 10º."

[47] Id., pp.17-18

Enunciado do teorema de Cotes (segundo a nossa tradução): Se a equação $x^n+px^{n-1}+qx^{n-2}+...+sx+t=0$ tem as n raízes a,b,c,...,g, a função inteira $z^n+zx^{n-1}+zx^{n-2}+...+sz+t$ terá por divisores z-a, z-b, z-c,...,z-g e será o produto dessas.

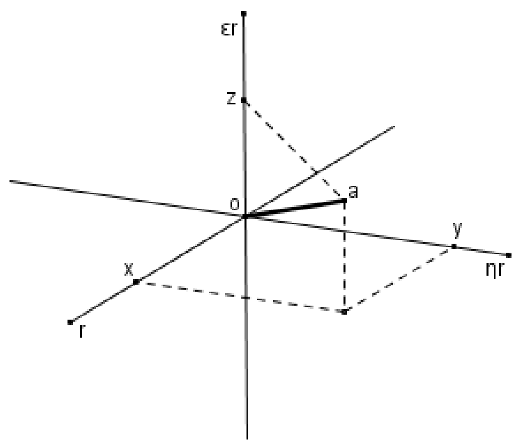
[48] Id., pp.18-23

1.3: Resultados de Wessel para o Espaço

1.3.1: Representação Analítica de Segmentos no Espaço

Para obter uma representação analítica de um segmento no espaço, Wessel iniciou o capítulo III considerando um sistema de três eixos que são perpendiculares mutuamente e que se intersectam no centro de uma esfera de raio r [49]. Wessel simbolizou estes eixos por $r, \eta r$ e εr, e por analogia com a representação analítica de segmentos no plano, ou com os números imaginários, definiu que $\eta\eta = \varepsilon\varepsilon = -1$ [50] e concluiu que segmentos do espaço com origem o podem ser representados analiticamente (de maneira similar à representação de segmentos no plano) por $x + \eta y + \varepsilon z$ [51].

Na figura.7 ilustramos a representação analítica de um segmento de origem o no espaço, segundo a definição de Wessel.



(figura.7) oa=x+ηy+εz

Vejamos agora de que maneira Wessel definiu multiplicações no espaço e interpretou geometricamente os resultados dessas multiplicações em termos de rotações.

---

[49] A escolha desse sistema de referência é conseqüência do interesse de Wessel em estudar polígonos esféricos.

[50] Id., p.23

[51] Id., p.24

Veremos no capítulo três que Hamilton utilizou uma representação analítica similar a esta para segmentos no espaço.

1.3.2 : Multiplicação de Segmentos no Espaço

Wessel definiu os seguintes tipos de multiplicação:

1) Multiplicação de segmentos que pertencem a planos definidos pelos pares de eixos $r, \eta r$ e $r, \varepsilon r$:

Wessel concluiu que estas multiplicações deverão ser feitas da mesma maneira que as multiplicações da sub-seção 1.2.4, bastando considerar que $\eta\eta = \varepsilon\varepsilon = -1$ [52], ou seja,

$$(x + \eta y)(a + \eta b) = xa - yb + \eta(xb + ya) \text{ e } (x + \varepsilon z)(a + \varepsilon b) = xa - zb + \varepsilon(xb + za).$$

2) Multiplicação de um segmento do espaço por um segmento unitário do plano definido pelo par de eixos $r, \varepsilon r$ [53]

Wessel simbolizou essa multiplicação colocando duas vírgulas entre os fatores, e a definiu como segue:

$$(x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u) = \eta y + x\cos u - z\operatorname{sen} u + \varepsilon x \operatorname{sen} u + \varepsilon z \cos u.$$

Observemos que além de não ser geral, ou seja, além de não ser uma multiplicação entre dois segmentos quaisquer do espaço[54], esta multiplicação também não possui a propriedade distributiva. Para que fosse distributiva deveria ser definida da seguinte maneira:

$$(x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u) = \eta y \cos u + x\cos u - z\operatorname{sen} u + \varepsilon x \operatorname{sen} u + \varepsilon z \cos u + \eta\varepsilon y \operatorname{sen} u.$$

[52] Id., pp.24-25

[53] Id.

[54] Como veremos no capítulo três, Hamilton descobriu que é impossível definir uma multiplicação de segmentos no espaço que preserve as propriedades da multiplicação de segmentos no plano.

3) Multiplicação de um segmento do espaço por um segmento unitário do plano definido pelo par de eixos $r, \eta r$ [55]

Wessel definiu e simbolizou tal multiplicação como segue:

$$(x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos v + \eta \operatorname{sen} v) = \varepsilon z + x\cos v - y \operatorname{sen} v + \eta x \operatorname{sen} v + \eta y \cos v.$$

As observações feitas sobre a multiplicação anterior podem ser estendidas para esta multiplicação.

1.3.3 : Interpretação Geométrica das Três Multiplicações Via Rotações

1) Por analogia com a interpretação da multiplicação de segmentos do plano (sub-seção 1.2.4) em termos de rotação, Wessel reescreveu os fatores $(a + \eta b)$ e $(a + \varepsilon b)$ como $\cos v + \eta \operatorname{sen} v$ e $\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u$, respectivamente, para concluir que a multiplicação $(x + \eta y)(\cos v + \eta \operatorname{sen} v)$ resulta na rotação do segmento $x + \eta y$,de um ângulo v, no plano definido pelo par de eixos $r, \eta r$ e que a multiplicação $(x + \varepsilon y)(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u)$ resulta na rotação do segmento $x + \varepsilon y$, de um ângulo u, no plano definido pelo par de eixos $r, \varepsilon r$. [56]

2) Reescrevendo o segundo membro da multiplicação do item 2) como segue

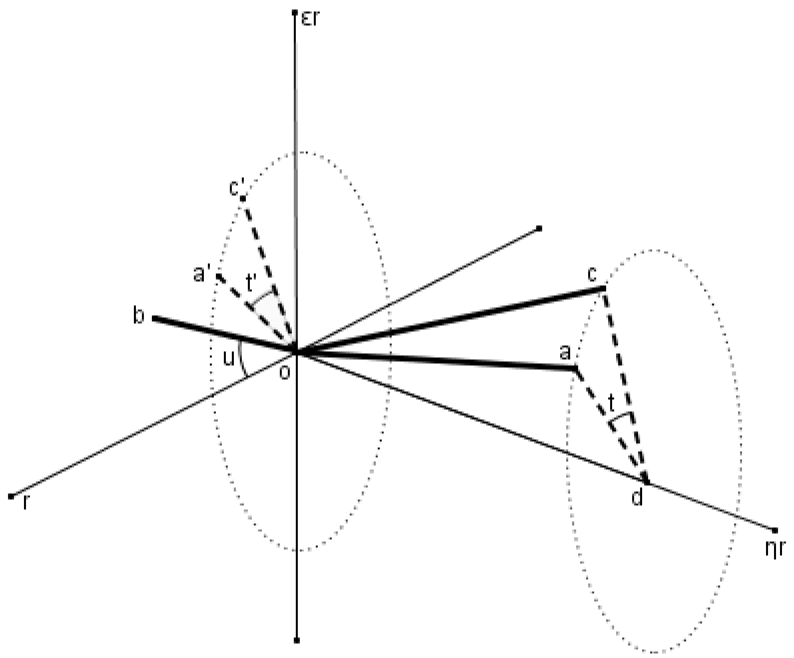
$$\eta y + x\cos u - z \operatorname{sen} u + \varepsilon x \operatorname{sen} u + \varepsilon z \cos u = \eta y + (x + \varepsilon z)(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u),$$

Wessel observou que o produto da multiplicação $(x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u)$ pode ser interpretada geometricamente como sendo o resultado da rotação do segmento $(x + \eta y + \varepsilon z)$ de um ângulo u em torno do eixo ηr [57] .

Para entendermos esta interpretação de Wessel, faremos uso da figura.8. O comprimento do segmento oa' nessa figura é menor do que o comprimento do

[55] Id..p.26
[56] Id., p.25
[57] Id.

segmento unitário ob, mas observamos que a interpretação de Wessel independe do comprimento desse segmento .



(figura.8) oc=oa após rotação de um ângulo t = t'=u em torno do eixo ηr

Na figura.8, consideremos as seguintes convenções:

1) $oa = x + \eta y + \varepsilon z$ é o segmento do espaço sujeito a sofrer rotação de um ângulo $t = u$ em torno do eixo ηr;

2) $ob = \cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u$ é o segmento unitário de inclinação u, pertencente ao plano definido pelos eixos $r, \varepsilon r$;

3) $oa' = x + \varepsilon z$ é a projeção do segmento oa (e da) no plano definido pelos eixos $r, \varepsilon r$;

4) $oc' = oa'.ob$, ou seja, é o resultado da rotação do segmento oa' de um ângulo $t' = u$ no plano definido pelos eixos $r, \varepsilon r$;

5) $oc =$ segmento oa após a rotação de um ângulo $t = u$ em torno do eixo ηr.

Como conseqüências dessas convenções, teremos que:

6) $t = t' = u$, onde $t =$ ângulo de rotação de da num plano paralelo ao plano definido pelos eixos $r, \varepsilon r$;

7) $oc' = dc =$ projeção de oc no plano definido pelos eixos $r, \varepsilon r$;

8) $od = \eta y$ é a projeção do segmento oa na direção do eixo ηr;

9) $oc = od + dc$.

Finalmente, podemos concluir dessas conseqüências que

$$\begin{aligned} oc &= od + dc = \eta y + oc' = \eta y + oa'.ob \\ &= \eta y + (x + \varepsilon y)(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u) = (x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u). \end{aligned}$$

Assim, acabamos de confirmar a interpretação geométrica para a multiplicação 2) em termos de rotações no espaço.

Observemos que essa multiplicação pode ser simbolizada, de acordo com a figura.8, por $oa,,ob = oc$.

3) Reescrevendo o segundo membro da multiplicação do item 3) como segue

$$\varepsilon z + x\cos v - y\operatorname{sen} v + \eta x \operatorname{sen} v + \eta y \cos v = \varepsilon z + (x + \eta y)(\cos v + \eta \operatorname{sen} v),$$

Wessel observou que $(x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos v + \eta \operatorname{sen} v)$ resulta na rotação do segmento $(x + \eta y + \varepsilon z)$ de um ângulo v em torno do eixo εr [58] .

A verificação da validade dessa interpretação é similar ao caso 2) anterior.

1.3.4 : Composição de Rotações no Espaço

Wessel sabia como fazer composições de rotações em torno dos eixos $\eta r, \varepsilon r$. Por exemplo, ele sabia que a multiplicação dos três segmentos $[(x + \eta y + \varepsilon z),,(\cos u + \varepsilon \operatorname{sen} u)],,(\cos v + \eta \operatorname{sen} v)$ resultava na rotação do segmento $(x + \eta y + \varepsilon z)$ de um ângulo u, em torno de ηr, seguida de uma rotação de v graus em torno de εr [59].

Nos últimos capítulos, IV e V, Wessel usou os resultados obtidos sobre representação analítica de segmentos no espaço e a interpretação da multiplicação desses segmentos via rotações para resolver polígonos esféricos.

[58] Id.
[59] Id.

1.4 : Conclusão

Wessel nasceu na Noruega e viveu na Dinamarca, um país de pouca tradição matemática. Era agrimensor por profissão, não sendo sócio de nenhuma academia científica. O único texto matemático que produziu foi o que analisamos neste capítulo. Por essas razões, é surpreendente que seu texto tenha sido o primeiro a tratar da representação geométrica dos números imaginários e, além disso, por ter sido escrito numa linguagem moderna, clara e objetiva. Certamente seu texto teria influenciado muitos matemáticos caso tivesse se tornado acessível no início do século dezenove.

Wessel não definiu uma multiplicação de segmentos do espaço que pudesse ser interpretada via rotações em torno do eixo real r ou qualquer outro eixo diferente dos eixos imaginários ηr e εr. Provavelmente isto ocorreu porque ele não precisava mais do que isso para resolver polígonos planos e esféricos. É interessante destacarmos que seu método para a realização de rotações no espaço está muito intimamente conectado com seu método para o plano, ou seja, Wessel não estava muito confortável no espaço. Não sabemos se ele tentou definir uma multiplicação geral de segmentos do espaço, mas considerando que ele usou a mesma representação que Hamilton, podemos concluir que caso isso tenha ocorrido, provavelmente também se deparou com o seguinte problema: o produto de dois segmentos do espaço não resulta num segmento do espaço, pois apresenta termos acompanhados dos produtos $\eta\varepsilon$ e $\varepsilon\eta$ (para Hamilton, como veremos no capítulo três, este produto apresenta termos acompanhados dos produtos ij e ji). Hamilton só conseguiu ultrapassar esse obstáculo às custas de conjecturas algébricas, algo que não era do interesse de Wessel.

Capítulo 2: A Construção Algébrica de Hamilton para os Números Imaginários Via Pares-Numéricos

2.1: Introdução

A insatisfação de Hamilton diante da falta de clareza e precisão em relação a alguns resultados utilizados na matemática, em particular, a utilização dos números imaginários num artigo do seu amigo Graves, sobre logaritmos de números negativos, e a sua concepção pessoal da álgebra como uma ciência, o motivaram a tentar estruturar algebricamente os conjuntos numéricos via a idéia inovadora de extensões numéricas, desde os inteiros positivos até os pares numéricos (x, y), identificando estes com os números imaginários.

Neste capítulo, com base no artigo "Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Álgebra as the Science of Pure Time", publicado em 1837, faremos uma análise das estruturas algébricas propostas por Hamilton para os conjuntos numéricos e pares numéricos, estruturas estas que lhe serviram de sugestão e base para que pesquisasse uma estrutura algébrica similar para os tripletos e, como conseqüência dessa pesquisa, descobrisse os quatérnios.

Para situarmos a concepção de Hamilton sobre a álgebra, presente na primeira parte do artigo que iremos analisar, trataremos inicialmente das raízes de um movimento ocorrido na Inglaterra, na primeira metade do século XIX (Hamilton não participou desse movimento), cujo objetivo era tirar esse país do isolamento em relação aos progressos matemáticos ocorridos na Europa, e do qual resultaram importantes contribuições para o desenvolvimento da álgebra como uma ciência fundada em bases axiomáticas seguras (tal como ocorreu com geometria através da obra "Elementos" de Euclides, surgida no IV século a.C.) e independente da aritmética . Faremos também alguns comentários sobre a concepção da álgebra segundo George Peacock (1791-1858) e Augustus De Morgan (1806-1871), dois importantes expoentes desse período.

O citado artigo é subdividido em três partes:

- na primeira parte (que foi a última a ser escrita), "General Introdutory Remarks"[60] (Observações Introdutórias Gerais), Hamilton defendeu a tese de que a álgebra poderia ser fundamentada formalmente a partir do conceito de número, e por achar que a idéia de progressão está diretamente ligada ao conceito de número, decidiu usar a intuição do tempo como base nas suas construções numéricas, visto que ela é intimamente conectada com a idéia de progressão (segundo Hamilton, a álgebra é uma "Ciência do Tempo Puro");

- na segunda parte, "Preliminay and Elementary Essay on Álgebra as the Science of Pure Time"[61] (Ensaio Preliminar e Elementar em Álgebra como a Ciência do Tempo Puro), construiu os números, dos inteiros até os irracionais, via razões de "degraus" [62] comensuráveis e incomensuráveis, definiu suas operações e demonstrou suas propriedades, finalizando com um estudo sobre logaritmos;

- na terceira parte (que foi a primeira a ser escrita), "The Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples"[63] (Teoria das Funções Conjugadas ou Pares Algébricos), construiu uma álgebra para os pares-numéricos de forma a identificá-los com os números complexos, finalizando com o estudo de logaritmos de pares-numéricos .

[60] Este artigo foi publicado em 1837 nos *Proceedings* da *Royal Irish Academy*.
[61] Este artigo foi apresentado a Royal Irish Academy em 1835.
[62] Essa foi a expressão usada por ele para denotar a diferença entre dois instantes de tempo.
[63] Este artigo foi lido em 1833 na Royal Irish Academy.

2.2: A Álgebra na Primeira Metade do Século XIX

Na Europa, no final do século XVIII, a Álgebra ainda era considerada simplesmente como uma aritmética simbólica, ou seja, seus símbolos representavam números e operações entre números, sendo por isso mesmo considerada como a ciência das quantidades ou das magnitudes. Neste sentido, segundo Lubos Novy[64], prevalecia a opinião de que a álgebra era a ciência cujo objeto de pesquisa era a solução de equações algébricas, uma espécie de aritmética "universal".

Também ainda prevalecia a antiga tradição euclidiana de se distinguir número de razão entre grandezas e, embora não existisse uma definição precisa para os números negativos e os números imaginários (como compreender que existam objetos algébricos menores do que nada ou que tenham quadrado negativo?), estes eram utilizados com alguma liberdade e sucesso na resolução de equações algébricas.

Essa falta de clareza em relação aos números negativos e imaginários colocava em risco não só a credibilidade dos resultados obtidos no campo das equações algébricas como também a própria aceitação da álgebra como uma ciência autônoma.

Alguns matemáticos tentaram resolver esse problema simplesmente desconsiderando os números negativos e imaginários, uma vez que a álgebra já oferecia uma fundamentação segura para os números inteiros positivos. Como partidários desse pensamento, podemos citar Francis Maseres (1731-1824) e William Frend (1757-1841), dois professores de Cambridge.

Em seu livro *The Principles of Algebra*, de 1796, Frend declarou que :

"Quando alguém não pode explicar os princípios de uma ciência sem referência a metáforas (a existência dos números negativos era justificada por analogia com a idéia

[64] Novy [1973], p.182

de débito, entre outras), é provável que ele não tenha pensado profundamente no assunto" [65].

Maseres desprezava raízes negativas. Por exemplo, segundo ele, 3 é a única raiz da equação $x^2 + 2x = 15$ (Maseres desprezava a raiz negativa -5).

Em um texto intitulado "Dissertação sobre o uso de Sinais Negativos em Álgebra"[66], Maseres argumenta sobre os problemas causados pela aceitação das raízes quadradas de números negativos na Álgebra.

"Eu desejaria que as raízes negativas nunca tivessem sido admitidas em álgebra...isto removeria problemas computacionais algébricos causados pela obscuridade desses conceitos...o que tornaria a álgebra ou aritmética universal, uma ciência não menos clara e capaz de produzir demonstrações do que a geometria".[67]

A idéia de abandonar os números negativos e imaginários significava abrir mão de uma série de bons resultados obtidos na teoria das equações algébricas. Felizmente prevaleceu entre os matemáticos a decisão de se introduzir modificações na álgebra de modo que tais números "inconvenientes" fossem aceitos como objetos matemáticos de fato, ao invés de simplesmente eliminá-los.

Na Inglaterra, durante boa parte do século XVIII e início do século XIX, o panorama matemático apresentava algum atraso em relação aos progressos ocorridos na Europa. Costuma-se dizer que o motivo desse atraso foi a adoção do método dos fluxos de Newton, supostamente incômodo se comparado com o cálculo diferencial de Leibniz, adotado no continente. Segundo Carl Boyer[68] , esta justificativa para o atraso na Inglaterra não é muito confiável visto que "a notação fluxional é comodamente usada

---

[65] Frend,William [1796], *The Principles of Algebra* ,London, p.x
"Now , when a person cannot explain the principles of a science whithout reference to a metaphor, the probability is, that he has never thought accurately upon the subject."

[66] Maseres, Francis [1758], Dissertation on the Use of the Negative Sign in Algebra , London.

[67] "I were to be wished therefore that negative roots had never been admitted into algebra, or were again discarded from it: for it this were done, there is good reason to imagine, that the objections which many learned and ingenious men now make to algebraic computations, as being obscure and perplexed with almost unintelligible notions, would thereby be removed; it being certain that algebra, or universal arithmetic, is, in its own mature, a science no less simple, clear, and capable of demonstration, than geometry" .

[68] Boyer, Carl B.[1991], p.318

até hoje pelos físicos e são facilmente adaptáveis a geometria analítica". Esta opinião de Boyer é compartilhada por J. Katz[69] . Para ambos, o que determinou o atraso foi a adoção da geometria sintética na Inglaterra, pois ela dificultou o entendimento dos métodos analíticos que eram praticados com sucesso no continente[70].

Com o propósito de trazer para a Inglaterra os avanços obtidos no cálculo pelos pesquisadores do continente, que eram frutos da aplicação de métodos analíticos, e assim promover mudanças no ensino e na pesquisa matemática, alguns matemáticos de Cambridge decidiram fundar, em 1812, a *Analytical Society*. O algebrista George Peacock, um dos líderes dessa sociedade, desempenhou um papel importante, mas sua contribuição mais significativa resultou de suas tentativas de se conferir à Álgebra uma fundamentação axiomática segura, nos moldes da obra *"Elementos"* de Euclides. Essa preocupação, que foi compartilhada por vários algebristas ingleses do século XIX, era motivada pela antiga questão: qual é o significado dos números negativos e imaginários? Discutiremos nas três próximas seções alguns aspectos das pesquisas de Peacock, Augustus De Morgan e, com mais detalhes, conforme dito na introdução deste capítulo, os resultados de Hamilton.

2.3: A Concepção da Álgebra segundo Peacock

Peacock apresentou seus resultados em 1830 no livro *Treatise on Álgebra*[71]. Nesta obra Peacock distinguiu dois tipos de álgebra, denominadas por ele de "álgebra aritmética" e "álgebra simbólica". A álgebra aritmética visa obter e justificar resultados aritméticos para os números decimais positivos. Para atingir tais objetivos Peacock utiliza os símbolos operatórios usuais da aritmética e substitui números por letras. Por exemplo, para a álgebra aritmética, a igualdade $a-(b-c)=a+c-b$ é sempre verdadeira desde que, como pressupõe a aritmética, tenhamos $c<b$ e $b-c<a$. Na álgebra simbólica, por outro lado, apesar das manipulações com os símbolos serem ainda derivadas da aritmética, não é necessário impor restrições a sua aplicabilidade e, além disso, os símbolos não precisam indicar números. A identidade anterior, por exemplo, seria verdadeira mesmo que as desigualdades $c<b$ e $b-c<a$ não fossem verificadas. Este procedimento de estender os resultados da álgebra aritmética para a

[69] Katz, J. Victor [1993], p.612
[70] O próprio Newton aplicou esses métodos no seu *Principia*.
[71] Essa obra foi revisada e ampliada em 1842 e 1845.

álgebra simbólica estava baseado num princípio que Peacock denominou por "Princípio da Permanência das Formas Equivalentes" e cujo enunciado era:

"Quaisquer que sejam as formas equivalentes, quando os símbolos são gerais em sua forma e específicos em seus valores, continuará sendo uma forma equivalente assim como os símbolos são gerais tanto em seu valor quanto em sua forma".[72]

Em outras palavras, o princípio de Peacock considera que podemos obter novas leis na aritmética simbólica se interpretamos livremente os símbolos que traduzem uma verdade aritmética. Por ser fiel a esse princípio, Peacock afirmou que resultados algébricos não derivados da aritmética não seriam corretos[73].

Peacock considerou que os números negativos podem ser entendidos simplesmente como um símbolo da forma –a e as operações com estes símbolos são derivadas da aritmética. Por exemplo, a igualdade $(a-b)(c-d) = ac - ad - bc + bd$, que na álgebra aritmética só valeria se $b < a$ e $d < c$, poderia justificar a regra dos sinais numa multiplicação de números negativos, bastando para isso considerar $a = c = 0$ ou $a = d = 0$ para se concluir que, respectivamente, $(-b)(-d) = bd$ e $(-b)c = -bc$. Quanto aos números imaginários, Peacock considerava que o símbolo $\sqrt{-1}$ estava sujeito às mesmas regras da raiz quadrada na aritmética dos números positivos, concluindo daí que $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$.

Percebe-se, nessas considerações, que Peacock entendia que os números podem ser construídos de maneira simbólica e que os números negativos, e até o conceito de número, de um ponto de vista formal, podem ser construídos a partir dos números positivos. Observemos também que ele usa o princípio da permanência das formas equivalentes para conferir significado aos números imaginários.

A possibilidade de se estender resultados conhecidos para outros objetos matemáticos fez com que o princípio da permanência das formas equivalentes fosse considerado um conceito de grande alcance na matemática, mas devemos também

---

[72] "Whatever algebraical forms are equivalent, when the symbols are general in form but specific in value, will be equivalent likewise when the symbols are general in value as well as in form".
[73] "I believe that no views of the nature of Symbolical Algebra can be correct or philosophical which made the selection of its rules of combination arbitrary and independent of arithmetic."

observar que o mesmo princípio, na medida em que só permite a extensão de resultados, limita a possibilidade de se criar novas propriedades. O uso deste princípio nos fornece indícios de que Peacock compreendia que o conceito de número podia ser unificado e, mais ainda, que os números imaginários podiam ser vistos como uma extensão dos números reais. Como veremos neste capítulo, coube a Hamilton o uso explícito dessas possibilidades.

Apesar de Peacock não ter percebido que os resultados da álgebra simbólica não precisam estar baseados nos resultados da aritmética, ou seja, não só os símbolos, mas também as operações podem ser interpretadas livremente, sua iniciativa pioneira representou um passo importante em direção a uma crescente abstração na álgebra.

2.4: A concepção de De Morgan

A obra *Trigonometry and Double Álgebra* de De Morgan, publicada em 1830, revela que embora ele tenha sofrido a influência das idéias de Peacock, tinha consciência de que poderia criar um sistema algébrico introduzindo símbolos arbitrários e criando de alguma maneira um conjunto de leis segundo as quais estes símbolos são operados e interpretados.

Vejamos um exemplo dado por ele em 1849:

Considerando um sistema algébrico definido pelos símbolos $M, N, +$ e válida a relação $M + N$ é o mesmo que $N + M$, podemos interpretá-lo, entre outras possibilidades, das seguintes maneiras :

(1) M, N podem ser magnitudes e $+$ o sinal da adição do segundo com o primeiro;

(2) M, N podem ser números e $+$ o sinal de multiplicação do primeiro pelo segundo;

(3) M, N podem ser segmentos de reta e $+$ a direção de um retângulo que tem o antecedente por base e o conseqüente por altura;

(4) M, N podem ser nações e $+$ pode significar que o conseqüente lutou uma batalha com o antecedente.

Apesar de De Morgan ter dado um passo adiante em relação a Peacock, ambos não tentaram criar um sistema algébrico que contrariasse as leis da aritmética, ou seja, não conseguiram fazer da álgebra uma ciência autônoma, independente da aritmética. Este passo, como veremos na próxima seção, coube a Hamilton.

2.5: A Concepção de Hamilton

Coube a Hamilton a criação de um novo sistema algébrico com interpretação genuína. Segue um trecho de uma carta de Hamilton endereçada ao seu amigo poeta e filósofo Aubrey De Vere (1788-1846), no qual declara sua discordância em relação a maneira pela qual seus contemporâneos encaravam a álgebra como uma ciência:

"Eu discordo totalmente dos meus grandes contemporâneos, não em coisas transitórias e acidentais, mas essenciais e permanentes, no espírito e ponto de vista com o qual eu estudo ciência."[74]

Hamilton leu *Treatise on Álgebra* em 1830 e confessou a Peacock que não concordou com sua intenção de reduzir a álgebra à "um mero sistema de símbolos, nada mais.", pois para ele os símbolos na álgebra teriam que representar algo real, não no senso material, mas deveriam ter pelo menos uma construção mental. Segundo ele, a álgebra, tal como a geometria, deveria ter seus resultados "deduzidos a partir de raciocínios válidos, baseados em princípios intuitivos próprios"[75]. Como veremos na próxima seção, o princípio que ele escolheu como base é o do tempo puro ou "a noção, intimamente conectado com ele, de progressão contínua".[76]

Em comum com Peacock e De Morgan, Hamilton tinha o desejo de justificar o uso dos negativos e imaginários na álgebra . Vejamos suas considerações a esse respeito, contidas na primeira parte do seu artigo:

"A doutrina dos Negativos e Imaginários torna-se desacreditada, quando lança mão de princípios tais como: uma magnitude maior pode ser subtraída de uma menor, e

[74] "I differ from my great contemporaries, my "brother-band", not in transient or accidental, but in essential and permanent things: in the whole spirit and view with which I study Science."
[75] Id : "…deduced by valid reasonings from its own intuitive principles."
[76] Id : "…the closely connected (and in some sort coincident) notion of *Continuous Progression*."

o resultado é menor do que nada; dois números negativos ou números denotando magnitudes menores do que nada podem ser multiplicados e o produto será um número positivo ou um número denotando uma magnitude maior do que nada; e embora o quadrado de um número, ou o produto de um número por ele próprio, é sempre positivo, seja o número positivo ou negativo, até aqueles números, chamados de imaginários, podem ser encontrados ou concebidos ou determinados e operados segundo todas as regras dos números positivos e negativos, como se estivessem sujeitos a estas regras, embora tenham quadrados negativos e devam então não ser supostos nem positivos, nem negativos e nem números nulos, e assim suas magnitudes são supostas não denotar nem algo maior do que nada, nem menor do que nada, nem igual a nada".[77]

Podemos perceber nesse trecho que Hamilton reconhece que os problemas existentes em relação à teoria dos números negativos e imaginários são diretamente ligados à idéia de ordenação[78]. Passemos agora a análise do artigo de Hamilton[79].

2.5.1: A Construção de Hamilton dos Números Inteiros até os Irracionais

A percepção da importância da idéia de ordenação fez com que Hamilton pensasse em construir os conjuntos numéricos usando como base uma noção intimamente conectada com ela, ou seja, a idéia da progressão contínua dos "instantes de tempo".[80] Vejamos de que maneira Hamilton fez esta construção.

---

[77] Hamilton [1837], p.2,3

"But it requires no peculiar scepticism to doubt, or even to disbelieve, the doctrine of Negatives and Imaginaries, when set forth (as it has commonly been) with principles like these: that a *greater magnitude may be subtracted from a less*, and that the remainder is *less than nothing*; that *two negative numbers*, or numbers denoting magnitudes each less than nothing, may be *multiplied* the one by the other, and that the product will be a *positive* number, or a number denoting a magnitude greater than nothing; and that although the *square* of a number , or the product obtained by multiplying that number by itself, is therefore *always positive*, whether the number be positive or negative, yet that numbers, called *imaginary*, can be found or conceived or determined, and operated on by all the rules of positive and negative numbers, as if they were subject to those rules, *although they have negative squares* , and must therefore be supposed to be themselves neither positive nor negative, not yet null numbers, so tht the magnitudes which they supposed to denote can neither be greater than nothing, nor less than nothing, nor even equal to nothing".

[78] Peacok e De Morgan não perceberam esta idéia fundamental.

[79] Este trabalho de Hamilton é analisado por Flament [2003], pp. 362-416 e nossa problemática é baseada nesta análise.

[80] Id : "…the closely connected (and in some sort coincident) notion of *Continuous Progression*."

Hamilton usou letras latinas maiúsculas para simbolizar os instantes de tempo e, para representar as relações entre estes, usou a simbologia da aritmética.

Assim, B>A significa que B é um instante que é mentalizado após o instante A [81], e B<A significa que B é mentalizado antes de A.[82]

Hamilton usou a diferença entre dois instantes sucessivos para definir uma "série indefinida de instantes eqüidistantes".

Assim:
$\ldots, E^{IV}, E^{III}, E^{II}, E^{I}, E, A, B, B^{I}, B^{II}, B^{III}, B^{IV}, \ldots$ é uma "série indefinida de instantes eqüidistantes" se for verdade que

$$\ldots B^{II} - B^{I} = B^{I} - B = B - A = A - E = E - E^{I} = E^{I} - E^{II} = \ldots$$

As diferenças entre dois instantes sucessivos foram denotadas por "degraus de tempo" [83] e simbolizados por letras minúsculas. Assim, a série anterior pode ser definida pelo degrau a, ou seja,

$$\ldots = B^{II} - B^{I} = B^{I} - B = B - A = A - E = E - E^{I} = E^{I} - E^{II} = a = \ldots$$

Em termos atuais, observemos que um degrau "a" é uma classe de equivalência de pares de instantes A,B, tais que B-A = a.[84]

Os degraus podem ser: menores que zero, quando B<A, igual à zero, quando B =A e maior que zero, quando B>A. Em termos atuais, observemos que aqui Hamilton define uma relação de ordem total entre momentos e que esta, por sua vez, determina uma relação de ordem total entre degraus.

Se B-A= a, o "degrau oposto" de "a" foi definido como a diferença entre os instantes A e B e simbolizado por A-B = Θa.

---

[81] Id, p.9 : "…the moment B is *later* than A…"
[82] Id, p.9 : "…the moment B is *earlier* than A…"
[83] Hamilton usou a expressão "steps in time".
[84] Em símbolos, $a = \{(A_n,B_n);\ A_n,B_n$ são instantes e $B_n - A_n = a\}$

2.5.1.1: A Construção dos Números Inteiros Positivos e Contra-Positivos[85]

O "ato mental de transição" do instante A para o instante posterior B foi simbolizado por $B = a + A$ e o "ato mental de transição" do instante B para o instante anterior A foi simbolizado por $A = \Theta a + B$.

Percebe-se aqui que a noção intuitiva de progressão do tempo permite que se pense um número negativo (degrau oposto) a partir da idéia de anterioridade, não sendo mais necessário apelar para a idéia pouco clara de magnitude negativa ou para um argumento geométrico. Isto conferiu aos números negativos, segundo a Ciência do Tempo Puro, uma existência matemática claramente compreensível.

Assim, na série eqüidistante. $\ldots, E^{IV}, E^{III}, E^{II}, E^{I}, E, A, B, B^{I}, B^{II}, B^{III}, B^{IV}, \ldots$, onde

$\ldots = B^{II} - B^{I} = B^{I} - B = B - A = A - E = E - E^{I} = E^{I} - E^{II} = a = \ldots$, teremos que

$E^{II} = \Theta a + E^{I} = \Theta a+(\Theta a+E) = \Theta a+(\Theta a+(\Theta a+A))$ ou $E^{II} - A = \Theta a+\Theta a+\Theta a=3\Theta a$

$E^{I} = \Theta a + E = \Theta a+ (\Theta a+A)$ ou $E^{I}-A = \Theta a+\Theta a = 2\Theta a$

$E = \Theta a+A$ ou $E-A = \Theta a = 1\Theta a$

$A = 0+A$ ou $A-A = 0a$

$B = a+A$ ou $B-A = a = 1a$

$B^{I} = a+B = a+(a+A)$ ou $B^{I}-A = a+a = 2a$

$B^{II} = a+B^{I} = a+(a+B) = a+(a+(a+A))$ ou $B^{II}-A = a+a+a = 3a$

Denotando A por "instante-zero", os seus sucessores $B, B^{I}, B^{II}, \ldots$ por "primeiro positivo", "segundo positivo", "terceiro positivo",etc., e seus antecessores $E, E^{I}, E^{II}, \ldots$ por "primeiro contra-positivo", "segundo contra-positivo", "terceiro contra-positivo", etc., podemos obter qualquer instante da série a partir do seu degrau a, do instante-zero A e da posição do instante na série. Por exemplo, $B^{IV}=5a+A$ é o quinto instante positivo da série ou o instante positivo da série que é antecedido por 4 instantes positivos mais o momento A, e $E^{IX}= 10\Theta a+A$ é o décimo instante contra-positivo da série ou o instante

[85] Esta foi a expressão usada por Hamilton para os números "inteiros negativos".

contra-positivo da série que é sucedido por nove instantes contra-positivos mais o instante A.

A possibilidade de se obter um instante numa série via um número ordinal ou seu correspondente cardinal fez com Hamilton considerasse os números inteiros positivos 1,2,3,etc. , bem como suas operações e propriedades, previamente conhecidos na sua construção. Além disso, como a aritmética dos números positivos está conectada intimamente com a idéia de sucessão, Hamilton considerou esta, parte integrante da Ciência do Tempo Puro, ou seja, os inteiros positivos não necessitam ser construídos.

Observemos que ao admitir essa hipótese, Hamilton mais uma vez parece reconhecer que a idéia de sucessão é fundamental para a construção dos números inteiros positivos.

Os símbolos ...3Θ,2Θ,1Θ,0,1,2,3…podem ser considerados como ordenadores na "série de múltiplos do degrau a" ...3Θa ,2Θa,1Θa,0a,1a,2a,3a… .Assim, 0a = 0 é o "múltiplo-zero de a", 2a é o "segundo múltiplo positivo de a", 3Θa é o "terceiro múltiplo contra-positivo de a" e deve ser tomado na direção oposta de 3a (o degrau oposto significa uma reversão de sentido), etc.

Essa idéia de localização, associada com a possibilidade de identificação dessa série de símbolos com a dos "números inteiros" [86], positivos e contra-positivos, (basta fazer a = 1) permitiu a Hamilton explicar com clareza o sentido de subtrações em que o subtraendo é maior do que o minuendo, das multiplicações com sinais, bem como provar as propriedades da adição e multiplicação[87]. Por exemplo:

i) 5-8 seria agora pensado como: tomamos o quinto múltiplo positivo e em seguida, na direção contrária, tomamos oito unidades, resultando no final estarmos na posição do terceiro contra-positivo, ou seja, 5-8= -3.

---

[86] Id, p.30

[87] Em Id., p. 32, provou a distributividade.
Em Id., p. 33, provou a comutatividade da adição e em Id., p. 34, a comutatividade da multiplicação.
Em Id., p. 34, provou a associatividade da multiplicação.

ii) (-2).(-3) = 6, pois os dois sinais negativos significam um dupla inversão da direção.

iii) (-2).3 = -6, pois aqui temos apenas uma inversão da direção.

2.5.1.2: A Construção dos Números "Fracionários"[88]

Para conceber os números "fracionários" (racionais), Hamilton definiu "degraus comensuráveis".

Definição: b e c são degraus comensuráveis quando são múltiplos de uma base comum a, ou seja, quando existem inteiros α, β tais que $b = \alpha \times a$ e $c = \beta \times a$.

Segue da definição, que o quociente entre dois degraus comensuráveis b e c é um número fracionário ou inteiro, ou seja, $\frac{b}{c} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Observemos aqui que Hamilton definiu um número fracionário como um quociente de números inteiros, um procedimento ainda adotado hoje em dia.

Em termos atuais, podemos ver que um número fracionário $\frac{\alpha}{\beta}$ é uma classe de equivalência de pares de degraus comensuráveis segundo os fatores α, β. [89]

Hamilton tornou clara a sua concepção de número, segundo a Ciência do Tempo Puro, quando disse que as "razões entre degraus efetivos (não-nulos)" são números quaisquer, contra-positivo, nulo ou positivo e que a progressão indefinida de razões, "das contra-positivas para as positivas" inclui a progressão indefinida de números inteiros e a de números fracionários.

Adição, Subtração, Multiplicação e Divisão de razões [90] são definidas de maneira análoga às mesmas operações com frações numéricas.

[88] Esta foi a expressão usada por Hamilton para os "números racionais".

[89] Em símbolos atuais, $\frac{\alpha}{\beta} = \{b, c;\ b = \alpha a \text{ e } c = \beta a\}$.

[90] Usaremos a expressão "razão" como sinônima de "razão entre degraus efetivos".

Hamilton definiu uma relação de ordem e mostrou que a adição e a multiplicação são comutativas e que a multiplicação é distributiva em relação à adição. [91]

2.5.1.3: A Construção dos Números "Incomensuráveis"[92]

Hamilton fez a seguinte observação: nem todas as razões entre degraus são números fracionários. Ele denotou por "razões incomensuráveis" ou "números incomensuráveis" todas as razões que não são números fracionários.[93] Percebe-se aqui que os números incomensuráveis são o que conhecemos hoje como números irracionais. De fato isso se confirma quando Hamilton prova que $\sqrt{2}$ é um número incomensurável [94].

A existência de uma única raiz quadrada para todo número ou razão "*b*" positiva[95] é provada por Hamilton de duas maneiras. Por curiosidade, reproduziremos a demonstração menos rigorosa, que é baseada na hipótese da continuidade do tempo ou, equivalentemente, na continuidade do sistema numérico que ele concebeu. Quanto à demonstração rigorosa, citaremos apenas os lemas e corolários utilizados por Hamilton.

DEMONSTRAÇÃO:

Sejam A,B,D três instantes distintos que satisfazem a relação $\dfrac{\mathrm{D}-\mathrm{A}}{\mathrm{B}-\mathrm{A}} = b$. A demonstração necessita de três hipóteses para *b*. Hamilton demonstrou o teorema para a hipótese $b>1$, e afirmou que as demonstrações para as hipóteses $b<1$ e $b = 1$ eram inteiramente similares.

---

[91] Id., pp. 51,54,55.
[92] Esta foi a expressão usada por Hamilton para os "números irracionais".
[93] Id, pp. 59-60
"We must then admit the existence of pairs of steps which have no common measurer; and may call the ratio between any two such steps an *incommensurable ratio*, or *incommensurable number*".
[94] Id, p.59
[95] Id, p.58
"...and therefore also the existence of a determined number or ratio a which is the exact square-root of any proposed (positive) number or ratio b."

HIPÒTESE $b>1$

Se $\dfrac{D-A}{B-A} = b>1$, então B está situado entre A e D. Consideremos um quarto momento C situado entre B e D, mas que, devido a continuidade da progressão do tempo, possa ser escolhido tão próximo de B ou de D tanto quanto desejarmos. Assim, as duas razões $\dfrac{C-A}{B-A} = x$ e $\dfrac{D-A}{C-A} = y = (Rx)\times b$, onde $Rx = \dfrac{1}{x}$, são ambas positivas. Escolhendo C suficientemente próximo de B, podemos aproximar x de 1 tanto quanto queiramos, enquanto y tenderá para *b*. Usando $\underline{L}$ para indicar "limite", Hamilton concluiu que

$$\text{Se } \underline{L}C = B\text{, então } \underline{L}x = 1 \text{ e } \underline{L}y = b.$$

Escolhendo C suficientemente próximo de D podemos aproximar y de 1 tanto quanto queiramos, enquanto x tenderá para *b*, ou seja, em símbolos

$$\text{Se } \underline{L}C = D\text{, então } \underline{L}x = b \text{ e } \underline{L}y = 1.$$

Assim, admitindo que a progressão do tempo é contínua, não podemos deixar de conceber a existência de uma posição do instante C, para a qual as progressões de razões se encontram, ou seja, $(Rx)\times b = y = x$.

Como, em geral, $\dfrac{D-A}{C-A}\times\dfrac{C-A}{B-A}=\dfrac{D-A}{B-A} = b$, ou $((Rx)\times b)\times x = x\times x = b$, podemos então conceber a existência da raiz quadrada de *b*.

A demonstração rigorosa da existência da raiz quadrada foi baseada nos seguintes lemas e corolários:

Lema I) Se x é uma razão positiva, então xx cresce na medida em que x cresce.

Lema II) Entre quaisquer duas razões existe uma terceira razão.

Modernamente, esse lema significa que o crescimento mencionado no lema anterior é contínuo.

Corolário do Lema II) Dadas as progressões de razões $a', b', c', \ldots$ e $a'', b'', c'', \ldots$, se a menor razão na segunda é maior do que as razões na primeira, então existe uma razão a tal que

$$a > a',\ a > b',\ a > c', \ldots \ \text{e}\ \ a < a'',\ a < b'',\ a < c'', \ldots$$

Lema III) Se b é uma razão positiva e m', n', m'', n'' são números inteiros tais que $\frac{n'n'}{m'm'} < b$ e $\frac{n''n''}{m''m''} > b$ então existe uma única razão positiva a tal que $a > \frac{n'}{m'}$ e $a < \frac{n''}{m''}$.

Lema IV) Entre duas razões positivas podemos sempre inserir o quadrado de um número fracionário $\frac{n}{m}$, ou seja, dadas as razões positivas $b'' > b'$ sempre podemos encontrar dois números inteiros positivos m, n tais que

$$\frac{nn}{mm} > b' \ \text{e}\ \frac{nn}{mm} < b''.$$

Na demonstração desse teorema Hamilton concluiu que se *b* é um número incomensurável, sua raiz quadrada pode ser aproximada, tanto quanto quisermos, a partir de números fracionários. Este procedimento é bastante parecido com o que será utilizado por Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) para definir os números irracionais via cortes de números racionais (cortes de Dedekind)[96]. Ainda a respeito dos números irracionais, Jerome Manhein [97] afirmou que Hamilton foi o primeiro a apresentar um tratamento científico moderno para eles.

Como último resultado dessa segunda parte do artigo[98], Hamilton mostrou que dadas duas razões positivas c e b, com $b \neq 1$, existe um único número α, tal que $b^{\alpha} = c$. Tal número α é chamado de "logaritmo de c na base b", e é notado por $\alpha = \log_b c$.

---

[96] Hawkes [1901], p. 312
Edwin Herbert Hawkes observa que não se tem certeza de que Hamilton de fato tenha influenciado Dedekind, pois enquanto o primeiro baseou sua teoria na continuidade do tempo, o segundo baseou a sua na continuidade do espaço.
[97] Manhein [1964], p.78
[98] Hamilton [1837],p.84

Podemos concluir que para Hamilton os números são divididos em razões comensuráveis, que inclui os inteiros e os racionais, e as razões incomensuráveis, ou seja, para ele existe uma identidade entre os instantes de tempo e os números reais..

Hamilton não chegou a construir o conjunto dos números reais por completo, mas os métodos esboçados no seu trabalho mostram que ele estava realmente perto deste conceito. Além disso, a generalidade do seu conceito de número revela uma ruptura com a concepção tradicional de número.

Alguns matemáticos criticaram o fato de Hamilton ter feito uso da associação entre números e as progressões contínuas de instantes de tempo na sua construção. Mesmo seus amigos próximos, entre os quais estava De Morgan, concordavam que ele deveria se referir apenas a idéia de progressão contínua, uma vez que sua construção é correta mesmo sem essa associação. Elaine Koppelman[99] observou que o próprio título da obra de Hamilton, onde podemos ler "...Ensaio da Álgebra como a Ciência do Tempo Puro.", deve ter desencorajado muitos possíveis leitores por sua conotação metafísica.

2.5.2: A Identificação de Pares-Numéricos com Números Imaginários

Embora a representação geométrica dos números imaginárias tenha possibilitado que estes fossem melhor compreendidos, tal representação não foi suficiente para que eles fossem amplamente aceitos como objetos matemáticos de fato. Gauss e Hamilton compartilhavam dessa opinião.

A representação geométrica dos números imaginários também mostrava ser natural entender que eles poderiam ser identificados por pares numéricos, estes sim mais facilmente aceitáveis como objetos matemáticos. Assim, uma possibilidade para a a aceitação definitiva dos números imaginários, poderia ser a construção de uma estrutura algébrica para os pares numéricos, de modo que estes pudessem ser identificados com os números imaginários, preservando as operações e propriedades destes.

[99] Koppelman [1971], p. 222

2.5.2.1: A Construção de uma Álgebra para os Pares-Degraus

Inicialmente Hamilton definiu um "par-degrau" (a_1, a_2) como sendo a diferença entre dois "pares-instantes" A_1, A_2 e B_1, B_2, ou seja:

$$(B_1, B_2) - (A_1, A_2) = (B_1 - A_1, B_2 - A_2) = (a_1, a_2).$$

Similarmente ao que ocorre com os instantes e os degraus, também podemos pensar (B_1, B_2) como um ato de transição mental gerado a partir dos pares (A_1, A_2) e (a_1, a_2), o que pode ser simbolizado por $(B_1, B_2) = (a_1, a_2) + (A_1, A_2)$.

Hamilton nomeou os pares-degraus da seguinte maneira:

i) $(0,0)$ é um "par-degrau nulo".

ii) (a_1, a_2) é um "par-degrau duplo efetivo" se os degraus são efetivos (não-nulos).

iii) $(a_1, 0), (0, a_2)$ por "par-degrau simples primário puro" e por "par-degrau simples primário secundário", respectivamente.

2.5.2.1.1: Adição e Subtração de Pares-Degraus

Hamilton definiu Adição e Subtração de "pares-degraus" da seguinte maneira:

$$(b_1, b_2) \pm (a_1, a_2) = (b_1 \pm a_1, b_2 \pm a_2).$$

e mostrou que a adição é comutativa e associativa, que $(0,0)$ é o elemento neutro da adição e que para todo par-degrau (a_1, a_2) existe um "par-degrau oposto" $(-a_1, -a_2)$.

2.5.2.1.2: Multiplicação de Número por Par-Degrau

Da mesma maneira que podemos gerar uma série de instantes eqüidistantes a partir de um instante A e um degrau a, também podemos gerar uma série eqüidistante de pares-instantes a partir de um par-instante (A_1, A_2) e de um par-degrau (a_1, a_2).

Assim, na série eqüidistante $\ldots,(E'_1,E'_2),(E_1,E_2),(A_1,A_2),(B_1,B_2),(B'_1,B'_2),\ldots$ por exemplo, o termo (E'_1, E'_2) foi gerado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(E'_1, E'_2) &= (-a_1,-a_2)+(E_1,E_2)=(-a_1,-a_2)+(-a_1,-a_2)+(A_1,A_2)\\ &= (E'_1,E'_2)-(A_1,A_2)=-2x(a_1,a_2)\end{aligned}$$

De maneira similar ao que ocorre com as séries de instantes eqüidistantes, paralelamente à série de pares-instantes gera-se uma série de múltiplos do par-degrau (a_1, a_2), ou seja

$$\ldots,-2x(a_1,a_2),-1x(a_1,a_2),0x(a_1,a_2),+1x(a_1,a_2),+2x(a_1,a_2),\ldots$$

Também podemos conceber a existência de sub-múltiplos e frações de um dado par-degrau. Assim, podemos ter

$$(c_1,c_2)=\frac{\upsilon}{\mu}(b_1,b_2), \text{ onde } \upsilon,\mu \text{ são números inteiros.}$$

Hamilton definiu a multiplicação de um par-degrau (a_1, a_2) por um número a (contra-positivo, nulo ou positivo) ou pelo seu correspondente "par-numérico primário" $(a,0)$ da seguinte maneira :

$$a(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) = (a,0)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) = (a\mathrm{a}_1,a\mathrm{a}_2).$$

2.5.2.1.3: Multiplicação de Par-Numérico por Par-Degrau

Considerando a multiplicação anterior e as duas propriedades seguintes

$$(b_1+a_1,\ b_2+a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) = (b_1,\ b_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)+ (a_1,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) \text{ e}$$

$$(a_1,a_2)(\mathrm{b}_1+\mathrm{a}_1,\mathrm{b}_2+\mathrm{a}_2) = (a_1,a_2)(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2)+(a_1,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2),$$

Hamilton obteve o produto de um par-numérico (a_1,a_2) por um par-degrau $(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}(a_1,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) &= (a_1,0)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) + (0,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) = (a_1\mathrm{a}_1,a_1\mathrm{a}_2) + (0,a_2)(\mathrm{a}_1,0) + (0,a_2)(0,\mathrm{a}_2)\\ &= (a_1\mathrm{a}_1,a_1\mathrm{a}_2) + (0,a_2\mathrm{a}_1) + (0,a_2)(0,\mathrm{a}_2) = (a_1\mathrm{a}_1,a_1\mathrm{a}_2+a_2\mathrm{a}_1)+(0,a_2)(0,\mathrm{a}_2).\end{aligned}$$

Para completar a multiplicação, faltava definir o produto $(0,a_2)(0,\mathrm{a}_2)$.

Supondo $(0,a_2)(0,\mathrm{a}_2) = (\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2)$, Hamilton concluiu que $\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2$ deveriam ser proporcionais ao produto $a_2\mathrm{a}_2$, isto é, existem γ_1, γ_2, tais que

$$(0,a_2)(0,\mathrm{a}_2) = (\gamma_1 a_2\mathrm{a}_2\,,\ \gamma_2 a_2\mathrm{a}_2).$$

Assim,

$$\begin{aligned}(a_1,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) &= (a_1\mathrm{a}_1, a_1\mathrm{a}_2 + a_2\mathrm{a}_1) + (\gamma_1 a_2\mathrm{a}_2\,,\ \gamma_2 a_2\mathrm{a}_2)\\ &= (a_1\mathrm{a}_1 + \gamma_1 a_2\mathrm{a}_2\,,\ a_1\mathrm{a}_2 + a_2\mathrm{a}_1 + \gamma_2 a_2\mathrm{a}_2).\end{aligned}$$

Hamilton afirmou, sem considerações adicionais, que para satisfazer seus objetivos[100], não existiria “escolha mais simples do que $\gamma_1 = -1$ e $\gamma_2 = 0$”[101].

Finalmente, concluiu que o produto dos par-numérico (a_1,a_2) pelo par-degrau $(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$ é o par-degrau $(a_1\mathrm{a}_1 - a_2\mathrm{a}_2\,,\ a_1\mathrm{a}_2 + a_2\mathrm{a}_1)$, ou seja,

$$(a_1,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2) = (a_1\mathrm{a}_1 - a_2\mathrm{a}_2\,,\ a_1\mathrm{a}_2 + a_2\mathrm{a}_1).$$

2.5.2.1.4: Divisão de Pares-Degraus

Fazendo $(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2) = (a_1,a_2)(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$ e supondo que $\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2$ não são ambos degraus nulos, vejamos como Hamilton obtém o quociente entre os pares-degraus $(\mathrm{b}_1,\mathrm{b}_2)$ e $(\mathrm{a}_1,\mathrm{a}_2)$, ou seja, vejamos como ele obtém o par-numérico (a_1,a_2).

Das considerações da sub-seção anterior, temos que

$$\mathrm{b}_1 = a_1\mathrm{a}_1 + \gamma_1 a_2\mathrm{a}_2 \quad \text{e} \quad \mathrm{b}_2 = a_1\mathrm{a}_2 + a_2\mathrm{a}_1 + \gamma_2 a_2\mathrm{a}_2.$$

Supondo que c é o degrau não nulo tal que $\mathrm{a}_1/\mathrm{c} = \alpha_1$, $\mathrm{a}_2/\mathrm{c} = \alpha_2$, $\mathrm{b}_1/\mathrm{c} = \beta_1$ e $\mathrm{b}_2/\mathrm{c} = \beta_2$, da igualdade anterior, Hamilton obtém

$$\beta_1 = a_1\alpha_1 + \gamma_1 a_2\alpha_2 \quad \text{e} \quad \beta_2 = a_1\alpha_2 + a_2\alpha_1 + \gamma_2 a_2\alpha_2.$$

[100] Lembremos que Hamilton tinha a intenção de apresentar uma justificativa para a existência dos números imaginários sem apelar para considerações geométricas. Assim, em termos atuais, Hamilton pretendia criar um isomorfismo entre os números imaginários e os pares numéricos.

[101] Id, p.93

“It is easy to show that no choice simpler than the ...”

Fazendo, conforme obtido na sub-seção anterior, $\gamma_1 = -1$ e $\gamma_2 = 0$, as igualdades anteriores se transformam no sistema linear (nas incógnitas a_1 e a_2)

$$\begin{cases} \alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 = \beta_1 \\ \alpha_2 a_1 + \alpha_1 a_2 = \beta_2 \end{cases}$$

de cuja solução Hamilton conclui que

$$\frac{(\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2)}{(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2)} = \frac{(\beta_1 \mathrm{c}, \beta_2 \mathrm{c})}{(\alpha_1 \mathrm{c}, \alpha_2 \mathrm{c})} = \left(\frac{\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2}{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2}, \frac{\beta_2\alpha_1 - \beta_1\alpha_2}{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2} \right) = (a_1, a_2).$$

2.5.2.2: A Construção de uma Álgebra para os Pares-Numéricos

Na tentativa de preservar, de modo simples, a analogia entre a teoria dos pares-numéricos e de números, Hamilton conclui que as operações entre pares-numéricos devem ser definidas de maneira similar às operações de pares-degraus, ou seja:[102]

$$(b_1, b_2) \pm (a_1, a_2) = (b_1 \pm a_1, b_2 \pm a_2)$$

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2)$$

$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \left(\frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{(a_1)^2 + (a_2)^2}, \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{(a_1)^2 + (a_2)^2} \right)$$

Hamilton afirmou que as operações assim definidas, por mais que pareçam arbitrárias, preservavam as propriedades das operações entre números, como era do seu ineresse.

"Apesar de parecerem arbitrárias, essas definições não se contradizem entre si e nem os princípios básicos da Álgebra, e seria possível, com raciocínio rigoroso, tirarmos conclusões legítimas delas. As pessoas que leram com atenção as observações

[102] Id, p.95

"...it is easy to see the reasonableness of the following definitions, and even their necessity, if we would preserve in simplest way, the analogy of the theory of couples to theory of singles..."

Observemos que o quociente entre pares numéricos é obtido a partir do quociente entre pares degraus, se fazemos c = 1.

precedentes desta teoria, e os comparou com o Ensaio Preliminar, verá que estas definições não foram escolhidas arbitrariamente e , apesar de que outras definições possam ser adotadas, nenhuma delas seriam igualmente apropriadas."[103]

2.5.2.3: A Identificação de Números Imaginários com Pares-Numéricos

Após ter identificado os números com pares-numéricos primários [104] e ter concluído, via considerações sobre potências de pares-numéricos, que $\sqrt{-1} = (0,1)$, Hamilton concluiu que os pares-numéricos poderiam ser identificados com os números imaginários.

"Na teoria dos números, o símbolo $\sqrt{-1}$ é absurdo e denota uma operação impossível ou um número imaginário. Mas na teoria dos pares, o mesmo símbolo $\sqrt{-1}$ é significante e denota uma operação possível ou um par real, isto é, a raiz principal do par (-1,0) ... e podemos escrever qualquer par (a_1, a_2) como

$$(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1},$$

interpretando a_1, a_2 como denotando os pares primários puros $(a_1,0), (a_2,0)$ e $\sqrt{-1}$ como denotando o par secundário puro $(0,1)$. Assim, a notação (a_1, a_2) parece ser suficientemente simples"[105]

---

[103] Id., p.95

"Were these definitions even altogether arbitrary, they would at least not contradict each other, nor the earlier principles of lgebra, and it would be possible to draw legitimate conclusions, by rigorous mathematical reasoning, from premises thus arbitrarily assumed: but the persons who have read with attention the foregoing remarks of this theory, and compared them with the Preliminary Essay, will see that these definitions are really not arbitrarily chosen, and that though others might have been assumed, no others would be equally proper."

[104] Id., p.95

[105] Id., p.107

"In the THEORY OF SINGLE NUMBERS, the symbol $\sqrt{-1}$ is absurd, and denotes an IMPOSSIBLE EXTRACTION, or a merely IMAGINARY NUMBER; but in the THEORY OF COUPLES, the same symbol $\sqrt{-1}$ is significant, and denotes a POSSIBLE EXTRACTION, or a REAL COUPLE, namely the principal square-root of the couple $(-1,0)$. In the latter theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed; and we may write, if we choose, for any couple (a_1, a_2) whatever, $(a_1, a_2) = a_1 + a_2\sqrt{-1}, \ldots$. However, the notation (a_1, a_2) appears to be sufficiently simple."

Mais claramente, esta identificação é feita da seguinte maneira:

$$(a_1, a_2) = (a_1, 0) + (0, a_2) = (a_1, 0) + (a_2, 0)(0,1) = a_1 + a_2\sqrt{-1}\,.$$

Este resultado permitiu, sem apelo a considerações geométricas, que os números imaginários fossem considerados como objetos matemáticos legítimos, visto que podemos considerar que possuem a mesma estrutura algébrica formal dos pares numéricos. Parece estar claro por essa observação, que Hamilton tinha pelo menos uma noção vaga sobre estruturas algébricas "isomorfas" [106].

Como último resultado do estudo dos pares numéricos, Hamilton deduziu a fórmula para se obter o logaritmo de um par numérico (y_1, y_2) na base (b_1, b_2):

$$\underset{\omega\ (b_1,b_2)}{\overset{\omega'}{\log}}(y_1, y_2) = \frac{F^{-1}(y_1, y_2) + (0, 2\omega'\pi)}{F^{-1}(b_1, b_2) + (0, 2\omega\pi)}\ ,\ \text{onde}\ F^{-1}(y_1, y_2) = \left(\log_e \sqrt{y_1^2 + y_2^2}, \alpha + 2\omega\pi\right),\ \omega', \omega \text{ são}$$

números inteiros e $-\pi < \alpha < \pi$. .

Na última página do seu Ensaio, Hamilton comentou que Mr. Graves havia descoberto esse resultado sobre logaritmos em 1826, mas o fato de ter usado números imaginários sem nenhuma interpretação, fez com que ele se dedicasse a pesquisar os pares-numéricos. Hamilton também declarou que a interpretação clara para os logaritmos de números complexos, sem fazer uso de argumentações geométricas, só foi possível porque considerou a Álgebra como uma Ciência do Tempo Puro, não como uma mera Arte ou Linguagem. Prometeu ainda obter outras aplicações para os pares-numéricos, especialmente para Equações e Integrais, bem como estender esses resultados para a obtenção de sistemas de "tripletos"[107]. Essa pesquisa de Hamilton, cujo resultado foi a descoberta dos "quatérnios", será analisada no próximo capítulo.

---

[106] Nicolas Bourbaki (Borbaki [1960], p.117) observou que Hamilton nada menciona sobre isomorfismo de estruturas algébricas, mas que, nessa época, os matemáticos ingleses Arthur Cayley e De Morgan sabiam que a mudança da base não modifica substancialmente a álgebra de uma estrutura.

[107] Id, p.111

"This existence of two arbitrary and independent integers in the general expression of a logarithm, was discovered in the year 1826, by Mr. Graves, who published a Memoir upon the subject in the Philosophical Transactions for 1829, and has since made another communication upon the same subject to the British Association for Advancement of Science, during the meeting of that Association at Edinburgh, in 1834…But because Mr. Graves employed, in his reasoning, the usual principles respecting

2.6: Conclusão

Através da identificação dos números imaginários com os pares numéricos, Hamilton mostrou de forma indiscutível, sem a necessidade de considerações geométricas, que esses números de fato existem, fazem sentido. Paralelamente a esse resultado, introduziu várias idéias realmente inovadoras: uma visão moderna do conceito de número, não mais atrelada à idéia de grandeza; a clareza de que a idéia de sucessão é diretamente ligada a concepção dos números inteiros positivos e poderia servir de base para uma construção formal dos números ; a idéia de extensões numéricas, que permitiram suas construções a partir dos números inteiros positivos; a idéia de classe de equivalência para definir os números racionais; a idéia de que os números irracionais podem ser aproximados o quanto se queira por seqüências de números racionais e a idéia de "corpo". Essas contribuições foram de grande importância para o desenvolvimento formal da álgebra. Para alguns matemáticos, foram mais importantes até do que a descoberta de Hamilton que abriu as portas para o desenvolvimento de álgebras abstratas e livrou de vez a álgebra da dependência da aritmética: a descoberta da álgebra não comutativa dos quatérnios, ou seja, a descoberta de um modelo analítico para o espaço.

Imaginary Quantities, and was content to prove the symbolical necessity without showing the interpretation, or inner meaning, of his formulae, the present Theory of Couples is published to make manifest that hidden meaning: and to show, by this remarkable instance, that expressions which seem according to common views to be merely symbolical, and quite incapable of being interpreted, may pass into the world of thoughts, and acquire reality and significance, if Algebra be viewed as not a mere Art or Language, but as the Science of Pure Time. The author hopes to publish hereafter many other applications of this view; especially to Equations and Integrals, and to a Theory of Triplets and Sets of Moments, Steps and Numbers, which includes this Theory of Couples."

Capítulo 3: A Gênese dos Quatérnios

3.1: Introdução

Como veremos neste capítulo, os quatérnios surgiram das tentativas de Hamilton de definir uma multiplicação para os tripletos (x, y, z), com as mesmas propriedades da multiplicação dos pares numéricos (x, y) e que pudesse ser interpretada via rotações no espaço, tal como a multiplicação de pares numéricos, em relação ao plano[108].

Apesar de ter apresentado sua construção algébrica para os pares numéricos em 1833, e de que suas pesquisas sobre os tripletos tenham sido um prolongamento dessa construção, Hamilton declara no prefácio do seu livro *Lectures on Quaternions*, publicado em 1853, que sua primeira conjectura sobre a multiplicação de tripletos data de 1830 e tinha a intenção de estender, para o espaço, os resultados geométricos que John Warren apresentou em 1828 sobre rotações no plano[109]. Essa conjectura geométrica, segundo ele, teve que ser abandonada por não preservar a propriedade distributiva. As conjecturas que Hamilton experimenta a partir daí, até o surgimento dos quatérnios em 1843, são de caráter algébrico.

O foco deste capítulo está na descrição e análise das conjecturas de Hamilton em torno da multiplicação de tripletos, a geométrica e as algébricas. A interpretação das conclusões obtidas via rotações no espaço será o tema do próximo capítulo.

Tomaremos por referência dois textos de Hamilton nos quais ele descreveu seu processo de pesquisas: uma carta endereçada a John T. Graves, e datada de 17 de outubro de 1843 (no dia seguinte à descoberta dos quatérnios) e o já citado prefácio do livro *Lectures on Quaternions* , publicado em 1853.

---

[108] Hamilton revelou a intenção de pesquisar uma álgebra para os tripletos no final do artigo "Teoria das Funções Conjugadas, ou Pares Algébricos; com um Ensaio Preliminar Elementar sobre a Álgebra como a Ciência do Tempo Puro", de 1833, no qual ele apresenta uma estrutura algébrica para o conjunto dos pares numéricos.

[109] Warren apresentou seus resultados sobre rotações no plano no *A Treatise on the Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*, de 1828. Conforme dissemos no capítulo 1, Warren não tentou estender seus resultados para o espaço.

Mais uma vez, para tornarmos nossa exposição mais clara, lançaremos mão de várias figuras, mas ressaltamos que Hamilton não utilizou deste artifício nos textos que analisaremos neste capítulo.

3.2: Multiplicação de Tripletos – Conjecturas de Hamilton

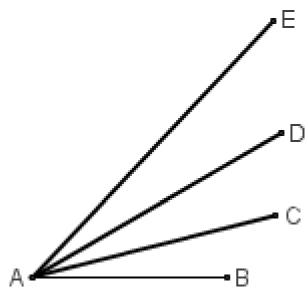
3.2.1: Conjectura de Caráter Geométrico

A primeira conjectura de Hamilton [110] é uma tentativa de definir uma multiplicação de tripletos (x, y, z) a partir de considerações geométricas, de modo que seu produto possa ser interpretado via rotações no espaço. Tal conjectura (de 1830) tem por base um resultado sobre multiplicação de "linhas retas" no plano, que foi publicado por John Warren em 1828 no livro *Um Tratado sobre a Representação Geométrica de Raízes Quadradas de Quantidades Negativas*.

O enunciado desse resultado é o seguinte:

"Se ab = c, e a tem inclinação de um ângulo *A* e b tem inclinação de um ângulo *B*, em relação à linha unitária; c terá inclinação de um ângulo *A+B* [111]".

A figura.1, incluindo a simbologia, foi extraída do texto de Warren e ilustra esse resultado.



(figura.1) Se ab=c, onde:
AB=unidade, AC=a, AD=b, AE=c
Então
BAE=BAC+BAD=A+B

---

[110] Hamilton [1853], p.39

[111] Warren [1828], pp.21-22.
"If ab=c, and a be inclined to unity at an angle = A, and b at an angle = B; c will be inclined to unity at an angle = A+B."

Para melhor interpretarmos esse enunciado, cabe fazermos aqui duas observações:

1) Wessel usou letras latinas minúsculas para representar, ao mesmo tempo, um segmento e o seu comprimento, mas em outros momentos do seu texto, como ocorre na legenda da figura.1, ele distingue a representação do segmento da representação do seu respectivo comprimento;

2) Warren não diz no enunciado se o produto de duas linhas retas pertence ou não ao plano que contem a linha reta unidade e as linhas fatores, mas isso fica evidente pela figura e a legenda que ele utiliza para ilustrar essa multiplicação . Podemos reforçar essa evidência se considerarmos que ao contrário da maioria daqueles que publicaram trabalhos sobre a representação geométrica para os números imaginários, Warren não discutiu uma extensão dessa representação para o espaço[112].

Feitas as observações, uma leitura mais clara para o enunciado poderia ser:

O produto de duas linhas retas resulta numa linha reta que é coplanar com as linhas retas fatores, tem comprimento igual ao produto dos comprimentos das linhas fatores e inclinação igual à soma das inclinações das linhas fatores em relação à linha unidade.

Antes de lançar sua conjectura geométrica para a multiplicação de tripletos, Hamilton observa que sua multiplicação de pares numéricos está de acordo com o resultado de Warren[113] pois, segundo ele, se duas linhas de comprimentos r e r' e inclinações θ e θ' são representadas em "coordenadas polares" [114] pelos pares numéricos $(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)$ e $(r'\cos\theta', r'\operatorname{sen}\theta')$, o seu produto é o par numérico $(r''\cos\theta'', r''\operatorname{sen}\theta'')$, onde $r'' = rr'$ e $\theta'' = \theta + \theta'$ [115].

---

[112] Crowe [1967], p.11.

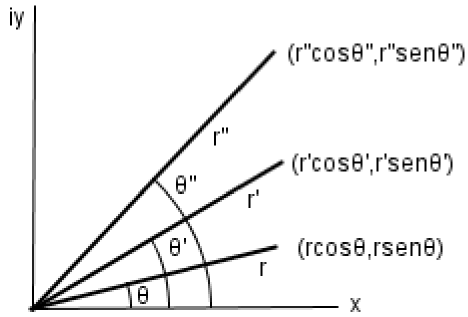
[113] Conforme vimos no capítulo1, Caspar Wessel foi o primeiro a apresentar um método para se multiplicar segmentos no plano, mas seu trabalho não era do conhecimento de Hamilton, visto que apesar de ter sido publicado em 1799, só se tornou acessível entre os matemáticos europeus em 1897, quando foi publicada uma edição em francês com o título "*Essai sur la représentation analytique de la direction*"

[114] Id., p.39

Hamilton não usou aqui o termo coordenadas esféricas, falou em relação de transformação entre coordenadas retangulares e polares.

[115] Id., p.39.

Na figura.2 ilustramos a observação de Hamilton.



(figura.2) (rcosθ,rsenθ)(r'cosθ',r'senθ')=(r"cosθ",r"senθ"), onde r"=rr' e θ"=θ+θ'.

A conjectura geométrica de Hamilton para a multiplicação de tripletos foi sugerida pelas observações anteriores. Vejamos qual é o seu enunciado:

"Como as linhas retas no espaço são somadas de acordo com as mesmas regras com as quais são somadas no plano, elas também poderiam ser multiplicadas de acordo com as mesmas regras com as quais são multiplicadas no plano, ou seja, multiplicando seus comprimentos e somando seus ângulos polares."[116]

Segundo Hamilton, tal conjectura poderia ser escrita em termos de tripletos da seguinte forma: se duas linhas do espaço podem ser identificadas pelos tripletos

$$\left(\underbrace{r\cos\theta}_{x}, \underbrace{r\mathrm{sen}\theta\cos\varphi}_{y}, \underbrace{r\mathrm{sen}\theta\mathrm{sen}\varphi}_{z}\right) \text{ e } \left(\underbrace{r'\cos\theta'}_{x'}, \underbrace{r'\mathrm{sen}\theta'\cos\varphi'}_{y'}, \underbrace{r'\mathrm{sen}\theta'\mathrm{sen}\varphi'}_{z'}\right) ,$$

onde r, r' são seus comprimentos e θ, φ e θ', φ' são os ângulos que identificam essas linhas num sistema de referência do espaço, respectivamente, então o seu produto é o tripleto

$$\left(\underbrace{r''\cos\theta''}_{x''}, \underbrace{r''\mathrm{sen}\theta''\cos\varphi''}_{y''}, \underbrace{r''\mathrm{sen}\theta''\mathrm{sen}\varphi''}_{z''}\right) \text{,tal que } r''=rr', \theta''=\theta+\theta' \text{ e } \varphi''=\varphi+\varphi'.$$

---

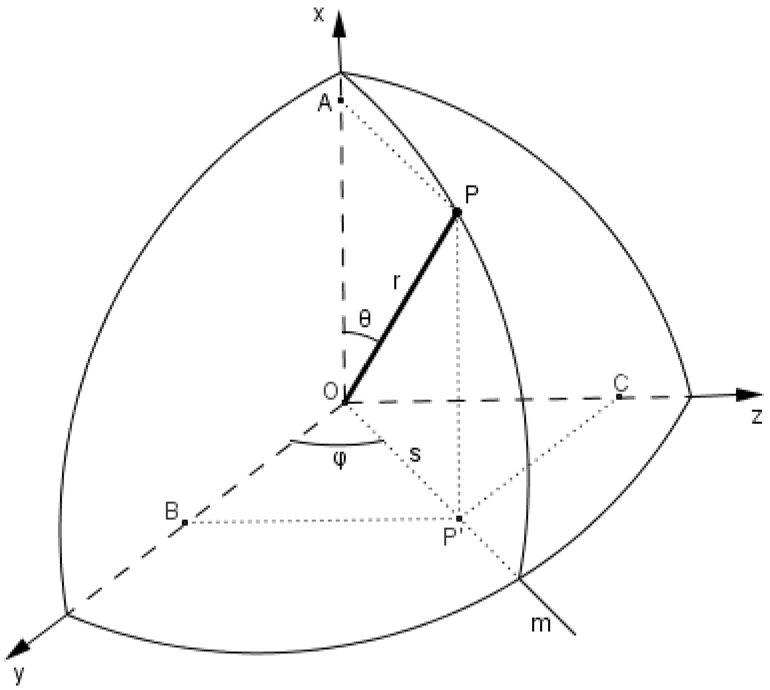
[116] Hamilton [1853], p.39

"...the first conjecture respecting geometrical triplets, which I find noted among my papers (so long ago as 1830), was, that while lines in space might be added according to the same rule as in the plane, they might be multiplied by multiplying their lengths, and adding their polar angles."

Em termos atuais (coordenadas esféricas), na figura.3 apresentamos uma ilustração para um tripleto

$$\left(\underbrace{r\cos\theta}_{x},\underbrace{r\text{sen}\theta\cos\varphi}_{y},\underbrace{r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi}_{z}\right)$$

ou uma linha OP do espaço, segundo a simbologia utilizada por Hamilton.



(figura.3)

Observemos que as relações $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen}\theta\cos\varphi$ e $z = r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi$ podem ser deduzidas facilmente da figura.3.

Sem entrar em detalhes, Hamilton observa que, em "coordenadas retangulares", a expressão para x'' na multiplicação de tripletos é $x'' = xx' - \left(y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}\left((y')^2 + (z')^2\right)^{\frac{1}{2}}$, mas nada fala sobre as expressões para y'' e z'', apenas comenta que estas não contrariam a multiplicação de pares numéricos, ou seja, essa multiplicação abrange a multiplicação de pares numéricos (x,y) caso estes sejam vistos como tripletos do tipo (x,y,0)[117].

[117] Id.

O que Hamilton quer dizer com esse comentário é que as expressões obtidas por ele para x'', y'' e z'' tornam a igualdade $(x,y,0)(x',y',0') = \left(\underbrace{xx'-yy'}_{x''}, \underbrace{xy'+yy'}_{y''}, \underbrace{0}_{z''}\right)$ verdadeira quando fazemos $z = z' = 0$ nas expressões de x'', y'' e z''. De fato, pelo menos em relação a expressão de x'', podemos comprovar que tal comentário é correto, pois

$$x'' = xx' - \left(y^2 + 0^2\right)^{\frac{1}{2}}\left((y')^2 + 0^2\right)^{\frac{1}{2}} = xx' - yy' \text{ quando } z = z' = 0.$$

Embora essa multiplicação esteja de acordo com sua conjectura geométrica, Hamilton observa que teve que abandoná-la, pois a mesma "é inconsistente com o principio distributivo"[118], uma das propriedades da teoria dos pares numéricos que ele pretendia preservar. Parece que tal conclusão foi o motivo para que Hamilton não publicasse tal tentativa integralmente[119].

3.2.2: Tentativas de Caráter Algébrico

Não tendo obtido sucesso com sua conjectura geométrica, Hamilton passa a usar um modelo algébrico "natural" x+iy+jz para um tripleto[120] em suas novas tentativas, embora isso não signifique que ele tenha abandonado tal conjectura. Conforme veremos, na verdade ele utiliza essa conjectura como um parâmetro de validação das suas conjecturas algébricas.

Hamilton também utiliza considerações geométricas para definir a unidade imaginária j de modo a passar do modelo algébrico x+iy de um par numérico para o modelo algébrico x+iy+jz de um tripleto. Segundo ele, um tripleto x+iy+jz pode ser

---

[118] Hamilton [1853], p.39. cf. Flament [2003], p. 425.

"But this old (and uncommunicated) conjecture of mine, which was inconsistent with the distributive principle…".

[119] Id.

"...I venture to mention here that the first conjecture respecting geometrical triplets, which I find noted among my papers (so long ago as 1830)…"

[120] Hamilton [1853], pp.21,28

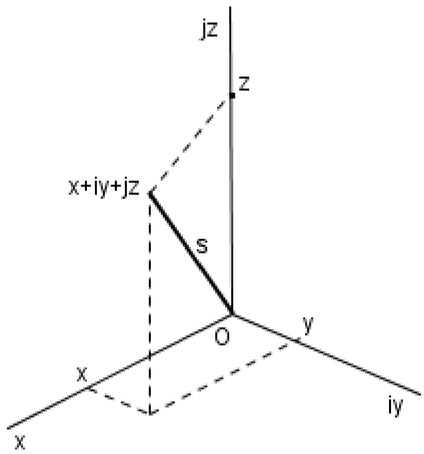
Hamilton usou indistintamente os termos "number-triplet" ou "triplet" para denotar tanto o trio de números reais (x,y,z) quanto a representação algébrica x+iy+jz, e usou os termos "números", "escalares", "reais" , "coeficientes", "constantes" e "quantidades reais" para denotar todos "os positivos e negativos na progressão de $-\infty$ para $+\infty$."

interpretado geometricamente como uma linha orientada do espaço (com origem em (0,0,0) e extremidade em (x,y,z)), sendo x,y,z suas "coordenadas retangulares"[121], e sendo j o representante da direção perpendicular às direções das linhas perpendiculares "1" e "i" . Nas palavras do próprio Hamilton:

"Como $\sqrt{-1}$, em um sentido bem conhecido, é uma linha perpendicular à linha 1, parece natural que deva haver outro imaginário para expressar a linha perpendicular a ambas anteriores;..."[122]

Na figura.4 ilustramos a identificação entre s, uma linha reta orientada do espaço, e um tripleto x+iy+jz, segundo Hamilton.

.



(figura.4) a linha s é identificada pelo tripleto x+iy+jz

Em termos algébricos, tal como fez para a unidade imaginária i, Hamilton idealizou j como uma raiz quadrada de -1, ou seja, $j^2 = i^2 = -1$ e em termos de rotações no plano, assim como a multiplicação por i^2 resulta numa rotação dupla de um "ângulo reto no plano xy" , considerou que a multiplicação por j^2 resulta numa rotação dupla de um "ângulo reto no plano xz"[123].

---

[121] Hamilton [1853], p.43

"…so that a numerical triplet took the form x+iy+jz, where I proposed to interpret x,y,z as three rectangular co-ordinates, and the triplet itself as denoting a line in space."

[122]Hamilton [1843], p.1

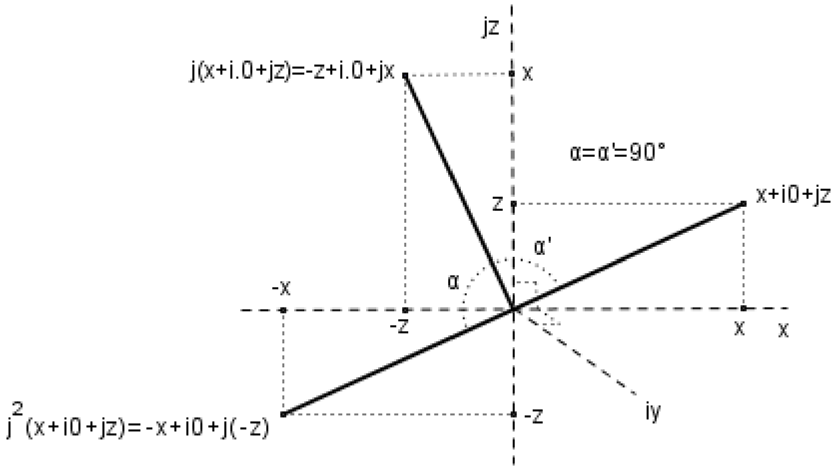
"Since $\sqrt{-1}$ is in a certain well-known sense, a line perpendicular to the line 1, it seemed natural that there should be some other imaginary to express a line perpendicular to the former;..."

[123] Hamilton [1853], p.44

"…and tried the effect of assuming also $j^2 = -1$, which I interpreted as answering to a rotation through two right angles in the plane of xz, as $i^2 = -1$ had corresponded to such a rotation in the plane of xy."

"...e como a rotação dupla de 1 em relação a ela também conduz a –1, ela também deve ser a raiz quadrada da unidade negativa, embora não deva ser confundida com a anterior."[124]

Na figura.5 ilustramos como Hamilton pensou geometricamente a unidade imaginária j via rotações no plano xz.



(figura.5) Interpretação de j via rotações no plano xz, em torno do eixo iy

Uma vez definido algebricamente um tripleto, Hamilton passa a definir suas operações de maneira a preservar todas as propriedades das operações com pares numéricos (ou números imaginários), além é claro, de maneira que possam ser interpretadas geometricamente via translações e rotações no espaço. Em termos atuais, essas propriedades operacionais que Hamilton pretende preservar são aquelas que conferem ao conjunto dos pares numéricos uma estrutura algébrica denominada de "Corpo". São elas: associatividade, comutatividade, existência do elemento neutro e do simétrico na adição e multiplicação e a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Hamilton não teve problema com a adição de tripletos. Bastou defini-la de modo similar à adição de números imaginários, ou seja,

---

[124]Hamilton [1843], p.1
"…and because the rotation from this to this also being doubled conducts to -1, it ought also to be a square root of negative unity, though not to be confounded with the former."

$$(a+ib+jc)+(x+iy+jz)=(a+x)+i(b+y)+j(c+z),$$

e as propriedades foram preservadas[125].

A dificuldade surgiu com a multiplicação de tripletos. Nas palavras do próprio Hamilton

"Chamando a antiga raiz, como os alemães freqüentemente fazem, de i, e a nova de j, questionei quais leis deveriam ser assumidas para a multiplicação de a+ib+jc com x+iy+jz."[126]

"Parece natural assumir que o produto é (ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+ij(bz+cy), mas o que fazer com ij? Deveria ser da forma α+iβ+jγ?" [127]

Conforme podemos constatar, Hamilton se depara com um problema algébrico. A multiplicação de tripletos num primeiro momento parece não resultar num tripleto[128].

De fato, partindo do pressuposto (algébrico), como pretendia Hamilton, de que a multiplicação de tripletos deveria ser associativa, comutativa e distributiva, tal como a multiplicação de números imaginários, e que $i^2 = j^2 = -1$, teremos que

$$\begin{aligned}(a+ib+jc)(x+iy+jz) &= ax+aiy+ajz+ibx+ibiy+ibjz+jcx+jciy+jcjz\\ &= ax+i^2by+j^2cz+iay+ibx+jaz+jcx+ijbz+ijcy\\ &= (ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+ij(bz+cy)\end{aligned}$$

---

125 Hamilton [1853], p.17

126 Hamilton [1843], p.1

"Calling the old root, as the Germans often do, i, and the new one j, I inquired what laws ought to be assumed for multiplying together a+ib+jc and x + iy + jz.."

127 Hamilton [1843], p.2

"It was natural to assume that the product = (ax-by-cz)+i(ay+bx)+j(az+cx)+ij(bz+cy),but what are we to do with ij? Shall it be of the form α+iβ+jγ?"

128 Como já vimos no capítulo.1, Wessel usou argumentações geométricas para tratar das rotações não só no plano, mas também no espaço, embora não o tenha feito de forma genérica. Wessel não comenta, mas caso tenha tentado generalizar seu método para a realização de rotações no espaço, provavelmente encontrou um problema similar ao encontrado por Hamilton, ou seja, como definir uma multiplicação de linhas no espaço de modo que o seu produto seja uma linha do espaço? Foi a superação desse impasse, como veremos neste capítulo, que resultou na descoberta dos quatérnios.

ou seja, a multiplicação toma a forma que ele disse ser "natural assumir", mas apresenta o termo ij(bz+cy), que é estranho a um tripleto.

Numa carta para o filho Archibaldi Henry Hamilton, datada de agosto de 1865, Hamilton deixa transparecer que os vários anos de pesquisas para resolver o problema com o produto ij, sem sucesso, o deixavam tristemente frustrado, sensibilizando inclusive seus filhos.

"Toda manhã…quando eu descia para o café da manhã, seu (na época) pequeno irmão William Edwin, e você também, costumavam me perguntar, "Bem, Papai, você consegue multiplicar tripletos? Esta pergunta eu sempre respondia com um triste balanço da cabeça: Não, eu sei apenas somá-los e subtraí-los"[129].

Para superar o impasse, Hamilton testa conjecturas algébricas sobre o produto ij em multiplicações particulares de tripletos. Essas multiplicações provavelmente foram escolhidas por ele de modo que pudessem ser interpretadas geometricamente segundo a sua conjectura geométrica [130], o que significa ser necessário, considerando a multiplicação $(a+ib+jc)(a'+ib'+jc') = a''+ib''+jc''$, que satisfaçam as três condições seguintes:

Condição.1) O produto dos comprimentos das linhas fatores deve ser igual ao comprimento da linha produto, ou de forma equivalente, a multiplicação deve obedecer a "lei dos módulos"[131].

Para efeito de cálculos, isto significa que a igualdade abaixo deve ser verdadeira:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left((a')^2+(b')^2+(c')^2\right) = (a'')^2+(b'')^2+(c'')^2 .$$

[129] "Every morning…, on my coming down to breakfast, your (then) little brother William Edwin, and yourself, used to ask me : Well, Papa, can you multiply triplets? Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake of the head: No, I can only add and subtract them."

[130] Conjectura que usou na primeira tentativa de expansão já discutida : o produto de duas linhas retas orientadas (ou tripletos) no espaço resulta numa terceira linha reta orientada que é coplanar com as linhas fatores, tem comprimento igual ao produto dos comprimentos das linhas fatores e inclinação, em relação ao eixo unitário, igual à soma das inclinações das linhas fatores, em relação ao mesmo eixo.

[131] Em termos algébricos, a validação da lei dos módulos significa a possibilidade de se definir uma divisão de tripletos sem ambiguidades, como pretendia Hamilton.

Condição.2) Os "raios vetores dos pontos" $a, b, c; a', b', c'$ e a'', b'', c'' devem pertencer ao mesmo plano que contém o "semi-eixo positivo dos x".

Para efeito de cálculos, isto significa verificar se existe um plano β que contenha o semi-eixo positivo dos x e os raios vetores dos pontos dos fatores e do produto.

Condição.3) A soma dos ângulos formados pelos raios vetores dos pontos a, b, c e a', b', c' com o semi-eixo dos x deve ser igual ao ângulo formado pelo raio vetor do ponto a'', b'', c'' com o mesmo semi-eixo, isto é, a soma das inclinações das linhas fatores deve ser igual à inclinação da linha produto.

Para efeito de cálculos, fazendo $\alpha_1, \alpha_2 =$ ângulos formado pelos raios vetores dos pontos a, b, c e a', b', c' com o semi-eixo dos x e $\theta =$ ângulo formado pelo raio vetor do ponto a'', b'', c'' com o mesmo semi-eixo, isto significa verificar se é verdadeira a igualdade

$$\operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \operatorname{tg}\theta.$$

Passaremos agora a descrever e analisar as conjecturas algébricas de Hamilton para o produto ij.

3.2.2.1: $ij = \pm 1$

Hamilton concebe essa conjectura ao observar que o quadrado de ij deve ser igual a 1, visto que $i^2 = j^2 = -1$ [132].

De fato, considerando válidas as propriedades associativa e comutativa na multiplicação dos tripletos i e j e ainda que $i^2 = j^2 = -1$, segue que

$$(ij)^2 = (ij)(ij) = i(ji)j = i(ij)j = (ii)(jj) = i^2 j^2 = (-1)(-1) = 1,$$

ou seja, ij deve ser igual a ± 1.

[132] Carta de Hamilton para Graves, datada de 17 de outubro de 1843 : "Its square would seem to be = 1, because $i^2 = j^2 = -1$; and this might tempt us to take ij = 1 or ij = -1".

Para testar essa conjectura algébrica, Hamilton considera uma multiplicação particular: a de um tripleto por ele próprio (isto é, o quadrado de um tripleto):

$$(a+ib+jc)(a+ib+jc)=a^2-b^2-c^2+i(2ab)+j(2ac)+ij(2bc).$$

Trocando ij por ± 1, obtém

$$(a+ib+jc)^2=(a^2-b^2-c^2\pm 2bc)+i(2ab)+j(2ac).$$

Hamilton não mostra os detalhes, mas conclui que essa multiplicação (além de ser particular) não satisfaz a lei dos módulos (Condição.1), e por isso resolve abandoná-la. Vejamos como ele justifica sua conclusão.

"mas nem mesmo assumindo isto ($ij=\pm 1$) teremos a soma dos quadrados dos coeficientes de 1, i e j no produto = ao produto das somas dos correspondentes quadrados dos fatores."[133]

De fato, como é fácil de verificar, isto quer dizer que $(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)$ e $(a^2-b^2-c^2\pm 2bc)^2+(2ab)^2+(2ac)^2$ são diferentes. Em símbolos,

$$(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+c^2)\neq(a^2-b^2-c^2\pm 2bc)^2+(2ab)^2+(2ac)^2.$$

3.2.2.2: $ij=0$

Hamilton concebe essa conjectura ao observar que a condição.1 é satisfeita nessa mesma multiplicação (quadrado de um tripleto) caso despreze o termo $ij(2bc)$[134].

---

[133] Id. "but with neither assumption shall we have the sum of the squares of the coefficients of 1, i, and j in the product = to the product of the corresponding sums of squares in the factors".

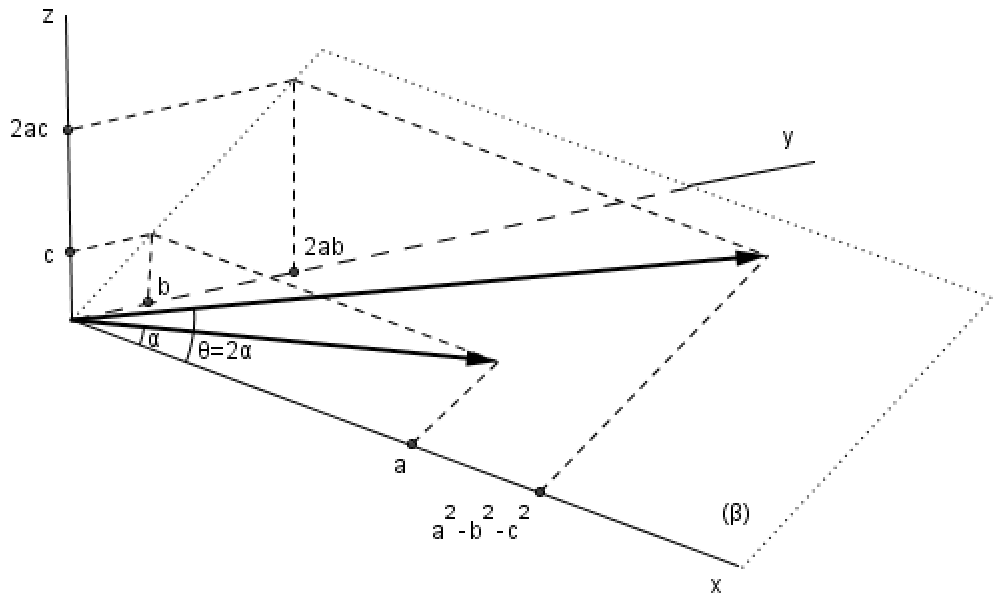
[134] As conjecturas ij = ±1 e ij = 0, significam admitir que ij possa ser um tripleto, possibilidade que foi comprovadamente descartada por Kenneth O. May em 1966. A prova é basicamente a seguinte: se supomos que existem α, β e γ reais tais que $ij=\alpha+i\beta+j\gamma$ e multiplicamos essa igualdade por i, obteremos $-j=i\alpha-\beta+ij\gamma$. Substituindo a primeira igualdade na segunda, obteremos $-j=i\alpha-\beta+(\alpha+i\beta+j\gamma)\gamma$, ou seja, $0=(\alpha\gamma-\beta)+i(\alpha+\beta+\gamma)+j(\gamma^2+1)$, que é impossível pois $\gamma^2+1=0$ não possui solução real.

De fato, como é fácil verificar,

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2+c^2\right)=\left(a^2-b^2-c^2\right)^2+(2ab)^2+(2ac)^2.$$

Além disso, Hamilton observa que as condições.2 e 3 também são satisfeitas nesse caso[135].

As verificações das condições 2 e 3 serão baseadas na figura.6, na qual utilizamos flechas para representarmos os raios vetores, embora Hamilton só tenha utilizado esta representação em 1866 no seu livro *Elements of Quaternions*.



(figura.6) Interpretação Geométrica para $(a+ib+jc)^2$

OBS.: $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ e $\theta=\alpha_1+\alpha_2=2\alpha$.

De fato, quanto à condição.2, basta vermos que β é o plano que contem o semi-eixo positivo dos x e cuja intersecção com o plano yz é a reta $z=\frac{c}{b}y$, pois os raios vetores dos pontos a,b,c e $a^2-b^2-c^2, 2ab, 2ac$ são tais que $c=\frac{c}{b}b$ e $2ac=\frac{c}{b}2ab$.

[135] Id.

"In fact, if we double, in its own plane, the rotation from the positive semiaxis of x to the radius vector of the point a, b, c, we attain the direction of the radius vector drawn to a^2-b^2-c^2, 2ab, 2ac".

Quanto à condição.3, se considerarmos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha =$ ângulo formado pelos raios-vetores dos pontos a,b,c com o semi-eixo positivo dos x, $\theta =$ ângulo formado pelo raio-vetor do ponto $a^2 - b^2 - c^2$,2ab,2ac com o mesmo semi-eixo, e aplicarmos o Teorema de Pitágoras na figura.6, teremos que

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a} \quad \text{e} \quad \mathrm{tg}\theta = \frac{\sqrt{(2ab)^2 + (2ac)^2}}{a^2 - b^2 - c^2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 + 4a^2c^2}}{a^2 - b^2 - c^2},$$

de onde podemos concluir, usando uma identidade trigonométrica (tangente de um arco duplo), que

$$\mathrm{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathrm{tg}(2\alpha) = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - (\mathrm{tg}\alpha)^2} = \frac{2\dfrac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}}{1 - \left(\dfrac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}\right)^2} = \frac{2\dfrac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}}{\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{a^2}}$$

$$= 2\frac{a\sqrt{b^2 + c^2}}{a^2 - b^2 - c^2} = \frac{\sqrt{4a^2b^2 + 4a^2c^2}}{a^2 - b^2 - c^2} = \mathrm{tg}\theta.$$

Ressaltamos aqui que a conjectura ij = 0 está de acordo com a conjectura geométrica de Hamilton numa multiplicação particular, não numa multiplicação geral. Hamilton não diz se testou essa hipótese numa multiplicação geral de tripletos, mas podemos constatar que ela pode não satisfazer a condição.1 se consideramos uma multiplicação de dois tripletos diferentes, como por exemplo, $(1 + i.1 + j.1)(1 + i.1 + j.2)$.

De fato, fazendo a = b = c = 1, x = y = 1, z = 2 e ij = 0 no modelo do produto geral de tripletos $(a + ib + jc)(x + iy + jz)$, obtemos

$$(1 + i.1 + j.1)(1 + i.1 + j.2) = -2 + i.2 + j.3$$

mas, como é fácil ver, esse exemplo não satisfaz a condição.1 pois

$$\left(1^2 + 1^2 + 1^2\right)\left(1^2 + 1^2 + 2^2\right) \quad \text{e} \quad \left((-2)^2 + 2^2 + 3^3\right) \text{ são diferentes.}$$

O próprio Hamilton revelou, sem justificar, que considerou a hipótese ij = 0 "estranha e desconfortável"[136].

3.2.2.3: $ij = -ji = k$

Hamilton observa que poderia fazer o termo estranho $ij(2bc)$ desaparecer do produto anterior caso considerasse a "suposição menos radical" ij = -ji = k.[137]

Sem justificar (provavelmente baseado em suas pesquisas anteriores sobre o que ele chamou de "sets of numbers", e que em termos atuais chamaríamos de uma n-upla), Hamilton declara que tinha seus motivos para não estranhar a suposição ij =-ji [138], embora ela significasse admitir a possibilidade de se criar uma teoria que contrariasse a propriedade comutativa da multiplicação, uma idéia nova para sua época (ainda que já existissem nessa época as geometrias não-euclidianas, uma teoria que também surgiu da negação de um axioma de uma teoria milenar, a geometria euclidiana).

Para testar essa conjectura, Hamilton considera a multiplicação de dois tripletos com as mesmas coordenadas retangulares b e c, ou seja, um produto mais geral, porém ainda particular. Vejamos o que ele obtém:

$$\begin{aligned}(a + ib + jc)(x + ib + jc) &= ax - b^2 - c^2 + i(a + x)b + j(a + x)c + ijbc + jibc \\ &= ax - b^2 - c^2 + i(a + x)b + j(a + x)c + ijbc - ijbc \\ &= ax - b^2 - c^2 + i(a + x)b + j(a + x)c.\end{aligned}$$

Como no caso anterior, Hamilton observa que aqui também o produto é um tripleto e que as condições 1 ,2 e 3 são satisfeitas[139]. Vejamos.

---

[136] Hamilton [1843], p.2

"Behold me therefore tempted for a moment to fancy that ij = 0. But this seemed odd and uncomfortable…".

[137] Carta de Hamilton para Graves: "I perceived that the same suppression of the term which was de trop might be attained by assuming what seemed to me less harsh, namely that ji = -ij".

[138] Hamilton [1853],p.45

"…the supposition for which may old speculations on sets had prepared me…"

[139] Carta de Hamilton para Graves:

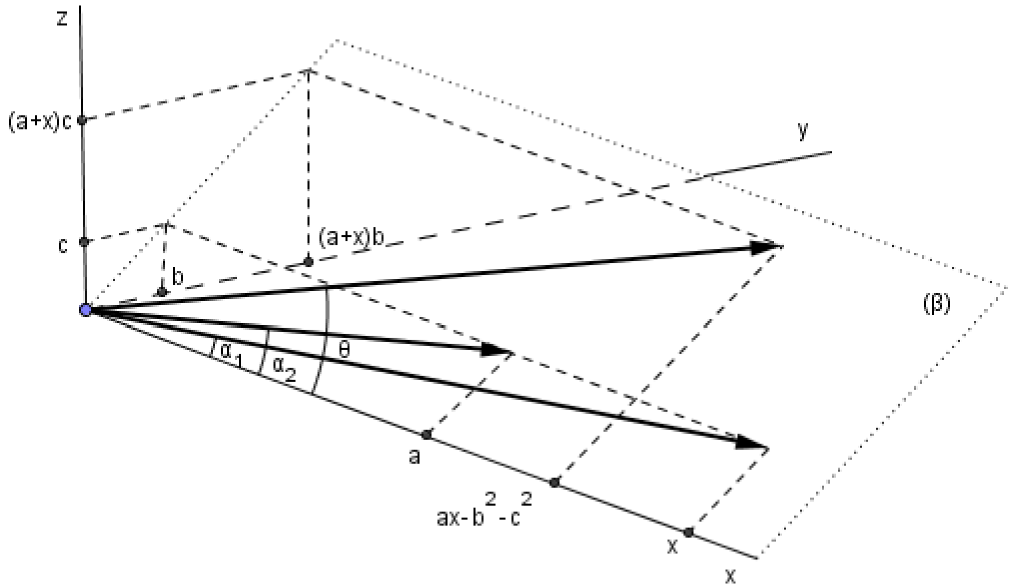
"the two factor lines in one common plane with the unit line"

"and $ax-b^2 -c^2$, (a+x)b, (a+x)c are easily found to be the correct coordinates of the product-point, in the sense that the rotation from the unit line to the radius vector of a, b, c, being added in its own plane to the rotation from the same unit-line to the radius vector of the other factor-point x, b, c, conducts to the

A condição.1 de fato é satisfeita, pois como é fácil ver, a igualdade abaixo é verdadeira.

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+b^2+c^2\right)=\ldots=\left(ax-b^2-c^2\right)^2+\left[(a+x)b\right]^2+\left[(a+x)c\right]^2.$$

As verificações das condições 2 e 3 serão baseadas na figura.7 abaixo.



(figura.7) Interpretação Geométrica para (a+ib+jc)(x+ib+jc)

OBS.: $\alpha_1+\alpha_2=\theta$

Quanto à condição.2, basta vermos que β é o plano que contem o semi-eixo positivo dos x e cuja intersecção com o plano yz é a reta $z=\frac{c}{b}y$, pois os raios vetores dos pontos a,b,c ; x,b,c e ax- b^2 - c^2 ,(a + x)b,(a + x)c são tais que $c=\frac{c}{b}b$ e $(a+x)c=\frac{c}{b}(a+x)b$.

Para verificarmos se a condição-3 é satisfeita basta fazermos $\alpha_1 =$ ângulo formado pelo raio vetor do ponto a,b,c com o semi-eixo positivo dos x, $\alpha_2 =$ ângulo formado pelo raio-vetor do ponto x, b, c com o semi-eixo dos x e $\theta =$ ângulo formado pelo raio-vetor do ponto ax - b^2 - c^2 ,(a+x)b, (a+x)c com o mesmo semi-eixo, e constatarmos que $tg(\alpha_1+\alpha_2)=tg\theta$.

---

radius vector of the lately mentioned product-point; and that this latter radius vector is in length the product of the two former”.

De fato isto ocorre, pois se aplicarmos o Teorema de Pitágoras na figura.7, teremos que

$$tg\alpha_1 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}, \; tg\alpha_2 = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{x} \; \text{ e }$$

$$tg\theta = \frac{\sqrt{[(a+x)b]^2 + [(a+x)c]^2}}{ax - b^2 - c^2} = \frac{\sqrt{(a+x)^2(b^2+c^2)}}{ax - b^2 - c^2}.$$

Se usarmos uma identidade trigonométrica (tangente da soma de dois arcos), teremos que

$$tg(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a} + \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{x}}{1 - \left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}\right)\left(\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{x}\right)} = \frac{(a+x)\sqrt{b^2+c^2}}{ax - b^2 - c^2}$$

$$= \frac{\sqrt{(a+x)^2(b^2+c^2)}}{ax - b^2 - c^2} = tg\theta.$$

Ainda que essa multiplicação de tripletos não seja geral, Hamilton conclui que a hipótese ij = -ji é de fato correta, embora não tenha obtido, por essas argumentações, nenhuma "informação sobre o valor de k"[140].

3.2.2.4: $k = 0$ Numa Multiplicação Geral – E surgem os Quatérnios

Partindo finalmente para uma multiplicação geral de tripletos e considerando ij = -ji, Hamilton conclui que

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx) + ij(bz - cy).$$

Em seguida, fazendo k = ij = 0 , Hamilton conclui que

$$(a + ib + jc)(x + iy + jz) = (ax - by - cz) + i(ay + bx) + j(az + cx).$$

[140] Id.

"…but no information yet of the value of k".

Ao verificar se a lei dos módulos (condição.1) é satisfeita nessa última igualdade, ou seja, se a igualdade

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)=(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2$$

é verdadeira, Hamilton conclui (como é fácil ver) que "Não, o primeiro membro excede o segundo por $(bz-cy)^2$"[141] . Em símbolos, o que Hamilton afirma é o seguinte:

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)-\left\{(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2\right\}=(bz-cy)^2.$$

A diferença $(bz-cy)^2$ foi fundamental para que ele percebesse como resolver definitivamente o problema com o produto ij. Acompanhemos as argumentações de Hamilton fazendo uso das suas próprias palavras:

"Mas este é (a diferença $(bz-cy)^2$) justamente o coeficiente de k no desenvolvimento do produto (a+ib+jc)(x+iy+jz) se admitimos ij = k e ji = -k, como antes"[142].

"E aqui me veio a idéia de que devemos admitir, de alguma maneira, uma quarta dimensão para o espaço com o propósito de calcular com tripletos; ou transferindo o paradoxo para a álgebra, que devemos admitir um terceiro símbolo imaginário k, distinto de i e j, mas igual ao produto deste (nesta ordem); o que me levou a introduzir quaternions tais como a+ib+jc+kd ou (a;b;c;d)"[143].

---

[141] Id.

"No, the first member exceeds the second by $(bz-cy)^2$."

[142] Id.

"But this is just the square of the coefficient of k, in the development of the product (a+ib+jc)(x+iy +jz), if we grant that ij = k, ji = -k, as before".

[143] Id.

"And here there dawned on me the notion that we must admit, in some sense, a fourth dimension of space for the purpose of calculating with triplets; or transferring the paradox to algebra, must admit a third distinct imaginary symbol k, not to be confounded with either i or j, but equal to the product of the first as multiplier, and the second as multiplicand; and therefore was led to introduce quaternions, such as a+ib+jc+kd, or (a; b; c; d)".

Observemos que a verificação algébrica da condição.1 numa multiplicação geral de tripletos em que ij = -ji = k = 0 fez com que Hamilton percebesse, mesmo sem a possibilidade de um a visualização geométrica, que deveria tomar uma decisão paradoxal, ou seja, introduzir uma dimensão a mais e passar de um tripleto a+ib+jc para um quatérnio a+ib+jc+kd. Assim, a descoberta dos quatérnios trás em si dois fatos surpreendentes: é possível construir uma teoria algébrica que não respeite propriedades aritméticas, no caso a comutatividade da multiplicação, e para operar com linhas no espaço tri-dimensional foi preciso recorrer ao espaço de dimensão quatro.

Surpreendente também são as condições em que essa descoberta ocorreu. Hamilton narra esse episódio em 1865 (um ano antes do seu falecimento) numa carta para o filho Archibaldi. Vejamos.

"Mas no dia 16 do mesmo mês (outubro de l843) - que era uma segunda-feira e dia de reunião do Conselho da Real Sociedade da Irlanda - eu ia andando para participar e presidir, e tua mãe andava comigo, ao longo do Royal Canal, embora ela falasse comigo ocasionalmente, uma corrente subjacente de pensamento estava acontecendo na minha mente, que finalmente teve um resultado, cuja importância senti imediatamente. Pareceu como se um circuito elétrico tivesse se fechado; e saltou uma faísca, o arauto de muitos anos vindouros de pensamento e trabalho dirigidos, por mim, se poupado, e de qualquer forma por parte de outros, se eu vivesse o suficiente para comunicar minha descoberta. Nesse instante eu peguei um caderneta de anotações que ainda existe e fiz um registro naquela hora. Não pude resistir ao impulso - tão não filosófico quanto possa ser - de gravar com um canivete numa pedra da ponte de Brougham, quando a cruzamos, a fórmula fundamental dos símbolos i,j,k

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

que contém a solução do Problema."[144] .

[144] "On the 16th day of October, which happened to be a Monday, and Council day of the Royal Irish Academy, I was walking in to attend and preside, and your mother was walking with me along the Royal Canal, to which she had perhaps driven; and although she talked with me now and then, yet an undercurrent of thought was going on in my mind, which gave at last a result, whereof it is not too much to say that I felt at once the importance. An electric circuit seemed to close; and a spark flashed forth, the herald of many long years to come of definitely directed thought and work, by myself if spared, and at all events on the part of others, if I should even be allowed to live long enough distinctly to communicate the discovery. Nor could I resist the impulse—unphilosophical as it may have been—to cut with a knife on a stone of Brougham Bridge, as we passed it, the fundamental formula with the symbols i,j,k; namely, $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$, which contains the solution of the problem,…"

Hamilton declarou que chegou à conclusão sobre a impossibilidade de se definir uma multiplicação de tripletos que satisfizesse a lei dos módulos somente após anos de experimentações (algo em torno de dez anos), mas que teria antecipado a descoberta dos quatérnios se tivesse conhecimento do seguinte teorema de Euller[145]:

Dados os números $a, b, c, d, a', b', c', d'$, existem os números a'', b'', c'', d'' tais que

$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left((a')^2+(b')^2+(c')^2+(d')^2\right)=(a'')^2+(b'')^2+(c'')^2+(d'')^2 .$$

Observemos que esse teorema mostra a possibilidade da lei dos módulos ser válida para uma multiplicação de quatérnios.

Na verdade, um resultado geral acerca desse problema enfrentado por Hamilton foi apresentado em 1898 pelo matemático alemão A. Hurwitz. Segundo ele provou, a identidade

$$\left(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2\right)=\left(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+\ldots+c_n^2\right),$$

é verdadeira apenas para n = 1,2,4,8, ou seja, para números reais, imaginários, quatérnios e octônios (os octônios são quatérnios cujos componentes são números imaginários e foram descobertos por Arthur Cayley (1821-1895) e John Graves).

3.2.2.4.1: Qual é a Natureza de k?

Apesar de ter definido algebricamente a multiplicação de quatérnios, Hamilton não sabia ainda qual era a natureza de k.

Considerando que a multiplicação de quatérnios respeita a lei dos módulos, que é associativa e que ji = -ij, Hamilton concluiu que k tem a mesma natureza de i e j, ou seja, representa uma linha orientada de módulo 1 e direção perpendicular às direções de i e j.

---

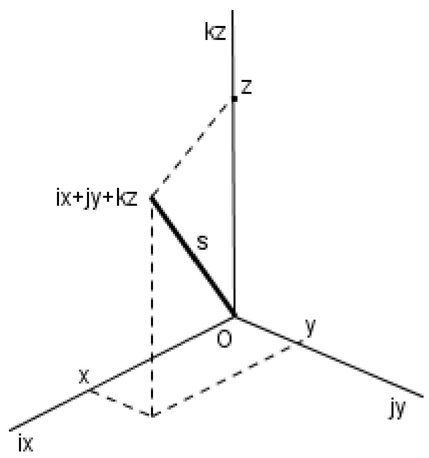
[145] Hamilton [1853], p.47.

De fato isto ocorre, pois

$$|k| = |ij| = |i|.|j| = 1.1 = 1 \text{ e } k^2 = ij.ij = i(-ij)j = -i^2.i^2 = -(-1)(-1) = -1 .$$

A partir dessa interpretação geométrica para i,j e k, Hamilton conclui que a “forma trinomial” ou “tripleto imaginário” $ix + jy + kz$ pode ser interpretado geometricamente como uma linha orientada (com origem em (0,0,0) e extremidade no ponto (x,y,z)) no espaço ou um ponto de coordenadas retangulares x,y,z do espaço e, consequentemente, que “...o produto de duas linhas no espaço poderia ser expresso por um quatérnio...”[146].

Na figura.8 ilustramos a identificação de uma linha orientada s e um quatérnio ix+jy+kz.



(figura.8) s é identificada pelo tripleto imaginário ou quatérnio ix+jy+kz

3.2.2.4.2: Multiplicação de Quatérnios do Tipo ix + jy + kz

Uma vez decidido sobre a natureza de k e admitindo a associatividade, Hamilton conclui que ik = iij = (-1)j = -j, kj = ijj = i(-1) = -i, e assim como ij = -ji, deveria ser verdade que ki = j e jk = i. [147]

[146] Hamilton [1853], p.47

“…instead of representing a line by a triplet of the form x+iy+jz, we should agree to represent it by this other trinomial form, ix+jy+kz, we should then be able to express the desired product of two lines in space by a quaternions…”

[147] Hamilton [1843], p.3.

A tábua completa da multiplicação das unidades imaginárias i,j,k seria então:

	i	j	k
i	-1	k	-j
j	-k	-1	i
k	j	-i	-1

Vejamos agora como obter o produto de duas linhas do espaço tri-dimensional via quatérnios:

$$\begin{aligned}(ix + jy + kz)(ix'+jy'+kz') &= i^2xx'+ijxy'+ikxz'+jiyx'+j^2yy'+jkyz'+kizx'+kjzy'+k^2zz' \\ &= \ldots = (-xx'-yy'-zz') + i\underbrace{(yz'-zy')}_{x''} + j\underbrace{(zx'-xz')}_{y''} + k\underbrace{(xy'-yx')}_{z''} \\ &= (-xx'-yy'-zz') + ix''+jy''+kz''.\end{aligned}$$

Apesar de Hamilton ter conseguido definir uma multiplicação algébrica de linhas do espaço (consideradas como quatérnios) que obedece a condição.1, tal multiplicação só resulta numa linha do espaço quando $xx'+yy'+zz'=0$. Essa observação já nos dá indícios de que a interpretação geométrica dessa multiplicação, via rotações no espaço, não deve ser simples. Mesmo fugindo do objetivo deste capítulo, já concluído com o surgimento dos quatérnios, vejamos quais foram as considerações iniciais de Hamilton neste sentido.

3.2.2.4.3: Interpretação Geométrica de Hamilton para o Produto de Quatérnios do Tipo ix + jy + kz

Hamilton afirma que os termos $-xx'-yy'-zz'$ e $ix''+jy''+kz''$ do produto, na multiplicação $(ix + jy + kz)(ix'+jy'+kz')$ anterior possuíam

"... um significado geométrico muito simples..." [148].

Considerando α = ângulo entre as linhas, com $0° \le \alpha \le 180°$, e fazendo uso das expressões "parte real ou escalar" para o termo $-xx'-yy'-zz'$ e "parte imaginária ou

[148] Hamilton [1853], p.47
"…of which the constituents have very simple geometrical significations…"

vetorial" para o termo $ix''+jy''+kz''$ [149] do quatérnio produto, tais significados segundo Hamilton, são os seguintes:

- A parte real representa o produto dos comprimentos das linhas fatores, multiplicado pelo cosseno do suplemento do ângulo entre elas. Em símbolos, podemos expressar esse significado da seguinte maneira:

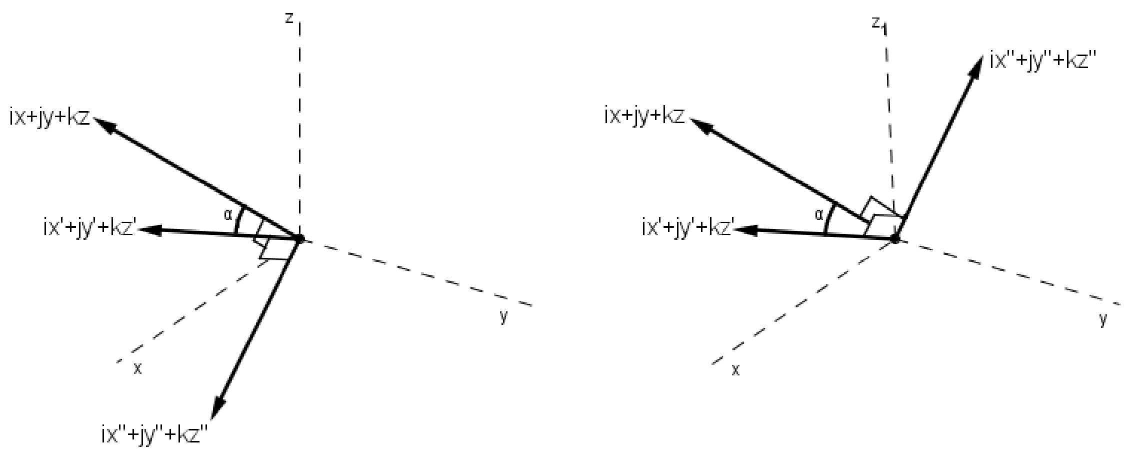
$$-xx'-yy'-zz' = |ix + jy + kz|.|ix'+iy'+kz'|.\cos(180° - \alpha) \ .$$

- A parte imaginária representa uma linha cujo comprimento é o produto dos comprimentos das duas linhas-fatores, multiplicado pelo seno do ângulo entre elas, cuja direção é perpendicular ao plano das linhas-fatores e cujo sentido tem a mesma característica dos produtos das unidades i,j,k [150].

Em símbolos, o comprimento da linha $ix''+jy''+kz''$ pode ser expresso por:

$$|ix''+jy''+kz''| = |ix + jy + kz|.|ix'+jy'+kz'|.\mathrm{sen}\alpha..$$

Na figura.9 ilustramos como a direção e o sentido de $ix''+jy''+kz''$ pode ser obtido.



(figura.9) Representação da Direção e Sentido da Linha ix''+jy''+kz'', nas Multiplicações (ix'+jy'+kz')(ix+jy+kz) e (ix+jy+kz)(ix'+jy'+kz')

Façamos aqui algumas observações decorrentes desses significados geométricos:

[149] Hamilton [1844], p.2
[150] A direção e o sentido são dados pelas regras hoje conhecidas como "regra da mão-direita" ou do "saca-rolhas".

1) O quadrado de um quatérnio do tipo ix+jy+kz é um número real negativo[151], pois sua parte real é $-xx - yy - zz = -\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ e, como $\alpha = 0°$ nesse caso, sua parte imaginária é o quatérnio i.0+j.0+k.0, já que seu comprimento é $|ix + jy + kz|.|ix + jy + kz|.\text{sen}0° = 0$.

2) Se as linhas (orientadas) $ix + jy + kz$ e $ix'+jy'+kz'$ possuem a mesma direção (com mesmo sentido ou sentidos contrários), seu produto será um quatérnio cuja parte imaginária é i.0+j.0+k.0, pois sendo $\alpha = 0°$ ou $\alpha = 180°$, teremos que

$$|ix + jy + kz|.|ix'+jy'+kz'|.\text{sen}0° = |ix + jy + kz|.|ix'+jy'+kz'|\text{sen}180° = 0.$$

3) O produto de duas linhas $ix + jy + kz$ e $ix'+jy'+kz'$ do espaço resulta numa linha do espaço quando as linhas-fatores são perpendiculares, pois nesse caso sua parte real é $|ix + jy + kz|.|ix'+iy'+kz'|.\cos(180° - 90°) = 0$.

Para exemplificarmos esse comentário, consideremos no espaço tri-dimensional, a multiplicação das linhas perpendiculares i1+j1+k2 e i1+j1+k(-1). De acordo com o modelo deduzido para a multiplicação de linhas no espaço tri-dimensional, teremos que :

$$\begin{aligned}(i.1 + j.1 + k.2)(i.1 + j.1 + k.(-1)) &= \underbrace{(-1.1 - 1.1 - 2(-1))}_{0} + i\underbrace{(1.(-1) - 2.1)}_{x''} + j\underbrace{(2.1 - 1.(-1))}_{y''} + k\underbrace{(1.1 - 1.1)}_{z''} \\ &= i.(-3) + i.3 + k.0\end{aligned}$$

4) Se as linhas $ix + jy + kz$ e $ix'+jy'+kz'$ não são perpendiculares, então seu produto não resulta numa linha do espaço , pois sua parte real $-xx'-yy'-zz'$ é diferente de zero. Em símbolos,

$$-xx'-yy'-zz' = |ix + jy + kz|.|ix'+iy'+kz'|.\cos\alpha \neq 0\,.$$

Para exemplificarmos esse comentário, consideremos no espaço a multiplicação das linhas não perpendiculares i.1+j.2+k.1 e i.3+j.1+k.1 . De acordo com a regra da multiplicação de linhas no espaço, teremos que

[151] Hamilton [1844], p.2
“every vector has a negative square.”

$$(i.1 + j.2 + k.1)(i.3 + j.1 + k.1) = (-1.3 - 2.1 - 1.1) + i\underbrace{(2.1 - 1.1)}_{x''} + j\underbrace{(1.3 - 1.1)}_{y''} + k\underbrace{1.1 - 2.3}_{z''}$$

$$= -6 + i.1 + j.2 + k.(-5).$$

3.3: Conclusão

Conforme vimos, a teoria de tripletos não mostrou ser, como supunha Hamilton, uma extensão natural da teoria dos pares numéricos. Na verdade, após várias conjecturas e experimentações, ele percebeu que para definir uma multiplicação de tripletos teria que tomar duas decisões consideradas não comuns para a época: abrir mão da comutatividade da multiplicação e admitir, por mais paradoxal que parecesse, que os objetos cuja álgebra descreveria o espaço deveriam ser quatérnios, não tripletos. Uma vez definida uma adição de quatérnios de modo a preservar as propriedades da adição de pares numéricos e uma multiplicação que satisfaz a condição.1 (lei dos módulos) da sua conjectura geométrica para o espaço e, com exceção da propriedade comutativa, também preserva as propriedades da multiplicação com pares numéricos, Hamilton atribui significado às partes real e imaginária de um produto de linhas . Entretanto, esses significados não permitem a verificação das condições 2 e 3 da conjectura de Hamilton, pois de acordo com a nossa análise (última seção), a multiplicação de duas linhas do espaço só resulta numa linha do espaço quando as linhas fatores são perpendiculares e, além disso, nesse caso as três linhas são perpendiculares duas a duas, ou seja, não satisfazem a condição.2 (não são coplanares).

Tais considerações são indícios claros de que embora Hamilton tenha obtido uma multiplicação algébrica para linhas do espaço, o significado geométrico do produto não nos permite imaginar facilmente de que maneira a multiplicação de quatérnios pode ser interpretada via rotações no espaço. Analisaremos essa questão no próximo capítulo, mas observamos desde já que o próprio Hamilton só publicou uma resposta para ela em 1847 no artigo “On Quaternions”.

Capítulo 4: Rotações no Espaço Via Quatérnios

4.1: Introdução

Hamilton descobriu em 16 de outubro de 1843 que para definir uma multiplicação algébrica fechada para linhas do espaço deveria operar com quatérnios $ix + jy + kz$, ou seja, quatérnios $w + ix + jy + kz$, nos quais $w = 0$. Uma parte do problema foi resolvida. A outra parte, interpretar essa multiplicação via rotações no espaço, não teve de Hamilton uma resposta imediata. Isso ele só fez no ano seguinte com o artigo "On Quaternions", lido na Royal Irish Academy em 11 de novembro de 1844 e publicado nas Atas dessa academia em 1847.

Nesse artigo, Hamilton afirmou que o uso dos quatérnios forneceria um método superior aos métodos cartesianos de coordenadas para a resolução de problemas geométricos, visto que não dependeria de uma escolha prévia de um sistema de eixos, retangulares ou outros e, para convencer a comunidade acadêmica de que os quatérnios eram de fato uma ferramenta promissora, apresentou dois exemplos de aplicações geométricas: composição de translações e composição de rotações no espaço[152].

Com base no citado artigo, neste capítulo descreveremos e analisaremos a aplicação apresentada por Hamilton quanto ao problema das rotações e composições de rotações no espaço.

Seremos fiéis à simbologia e à terminologia utilizadas por Hamilton (exceto na seção 4.5, onde preferimos simbolizar diferentes ângulos e vetores usando índices, ao invés de expoentes, como fez ele) e, para ilustrar suas idéias, utilizaremos flechas para representar vetores em nossas figuras, apesar dele não utilizar figuras no seu artigo e ter utilizado essa representação somente no seu livro *Elements of Quaternions* , publicado em 1866 (um ano após seu falecimento).

[152] Hamilton [1999], p.5

4.2: Multiplicação Algébrica de Quatérnios em Termos Atuais

De acordo com a simbologia e os resultados do capítulo 3, dados os quatérnios $q = w + ix + jy + kz$ e $q' = w' + ix' + jy' + kz'$, fazendo uso das propriedades distributiva e das regras de multiplicação das unidades imaginárias i, j e k, teremos que

$$\begin{aligned} qq' &= (ww' - xx' - yy' - zz') + i(wx' + xw' + yz' - zy') + j(wy' + yw' + zx' - xz') + k(wz' + zw' + xy' - yx') \\ &= ww' - (xx' + yy' + zz') + w(ix' + jy' + kz') + w'(ix + jy + kz) + i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx') \end{aligned}$$

Em termos atuais, se trocarmos w por a, $ix + jy + kz$ por α, w' por b e $ix' + jy' + kz'$ por β e fizermos uso das operações multiplicação de números reais, multiplicação de escalar por vetor, produto escalar e produto vetorial, podemos reescrever a multiplicação algébrica de quatérnios da seguinte maneira:

$$qq' = (a + \alpha)(b + \beta) = \underbrace{ab - \alpha.\beta}_{\text{parte real}} + \underbrace{a\beta + b\alpha + \alpha \times \beta}_{\text{parte imaginária}} \qquad \text{(I)}$$

onde, ab é um produto de números reais, $\alpha.\beta$ é um produto escalar de vetores, $a\beta$ e $b\alpha$ são produtos de escalar por vetor e $\alpha \times \beta$ é um produto vetorial.

4.3: Interpretação Geométrica da Multiplicação de Quatérnios

Nesta seção faremos uso da interpretação geométrica de Hamilton para a multiplicação de quatérnios de modo a obtermos uma expressão idêntica a (I), ou seja, identificaremos na sua interpretação geométrica as operações produto escalar e produto vetorial, operações que foram explicitadas posteriormente na “Análise Vetorial” criada por Josiah Willard Gibbs (1839-1903) e no “Cálculo Vetorial criado por Oliver Heaviside (1850-1925).

Vejamos como Hamilton interpretou geometricamente a multiplicação dos quatérnios $a + \alpha$ e $b + \beta$ (nessa simbologia de Hamilton, utilizada por nós na seção anterior, a e b são escalares e α e β são vetores).

Usando a distributividade, Hamilton obteve:

$$(a+\alpha)(b+\beta) = ab + a\beta + \alpha b + \alpha\beta \qquad (II)$$

Hamilton reconheceu três tipos de multiplicação em (II):

1) ab é uma multiplicação de escalares e deve, portanto, ser operado segundo as regras da álgebra dos números reais[153].

2) $a\beta, \alpha b = b\alpha$ são multiplicações de escalares por vetores e resultam em vetores cujas alterações nos comprimentos e nos sentidos dependem dos comprimentos e dos sinais dos escalares[154].

3) $\alpha\beta$ é uma multiplicação de vetores.

A terceira multiplicação foi interpretada por Hamilton da seguinte maneira:

Inicialmente ele decompôs β nos vetores β_1 e β_2, tais que[155]

β_1 é a projeção de β na direção de α e

β_2 é a projeção de β numa direção perpendicular à α.

---

[153] Id., p.5

Scalars are multiplied, as well as added, by the known rules of ordinary algebra, for the multiplication of real numbers, positive or negative...

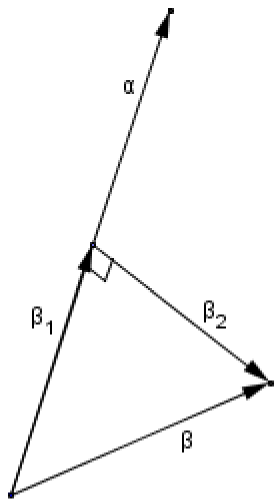
[154] Id., p.5

For the same reason, to multiply any vector α by any scalar a, is in general to change its length in a known ratio, and to preserve or reverse its direction, according as a is > or < 0; the product is therefore a new vector, which may be denoted by aα. The same new vector is obtained, under the form αa, when we multiply the scalar a by the vector α.

Observemos que para Hamilton a palavra "direção" é equivalente, atualmente, à palavra "sentido".

[155] Id., p.6 : And if the multiplicand vector β be decomposed into two parts, or summands, one = β_1 and in the direction of the multiplier α, or in the direction exactly opposite thereto, and the other = β_2 , and in a direction perpendicular to the former (so that β_1 and β_2 are the projections of β on α itself, and on the plane perpendicular to α)…

Na figura.1 ilustramos a decomposição de β , idealizada por Hamilton.



(figura.1) Decomposição de β
$\beta=\beta_1+\beta_2$

Observamos que manteremos, como feito na figura.1, o procedimento de considerar que o ângulo entre α e β é agudo, mas que chegaremos às mesmas conclusões em caso contrário.

Feita a decomposição e admitindo que a multiplicação entre vetores é distributiva, Hamilton obteve[156]

$$\alpha\beta = \alpha(\beta_1 + \beta_2) = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 \qquad \text{(III)}$$

e definiu os produtos parciais $\alpha\beta_1$ e $\alpha\beta_2$ geometricamente da seguinte maneira[157]:

- $\alpha\beta_1$ é um escalar dado pelo produto dos comprimentos dos vetores α e β_1 , antecedido por um sinal negativo se estes possuem o mesmo sentido (isto é, se o ângulo entre β e β_1, ou β e α, é maior que ou igual a

[156] Id., p.6

"…then it may be farther defined that the multiplication of any one vector β by any other vector α may be accomplished by the formula $\alpha\beta = \alpha(\beta_1+\beta_2) = \alpha\beta_1+\alpha\beta_2$ …

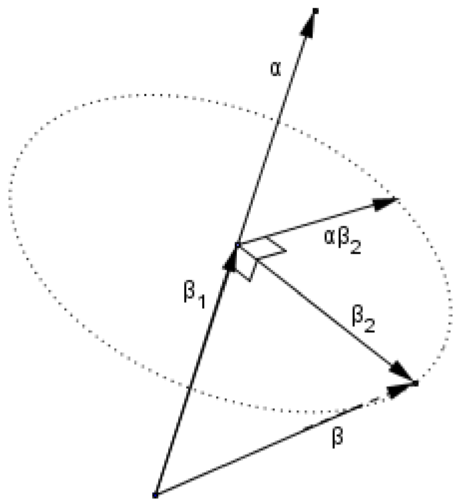
[157] Id., p.6

"... the partial product $\alpha\beta_1$ is to be considered as equal to a scalar, namely, the product of the lengths of α and β_1, taken with the sign - or +, according as the direction of β_1 coincides with, or is opposite to that of α; while the other partial product $\alpha\beta_2$ is a vector, of which the length is the product of the lengths of α and β_2, while its direction is perpendicular to both of their's, being obtained from that of β_2, by making it revolve right-handedly through a right angle round α as an axis.

0° e menor que ou igual a 90°) ou por um sinal positivo, se possuem sentidos contrários (isto é, se o ângulo entre β e β_1, ou β e α é maior que ou igual a 90° e menor que ou igual a 180°), e

- $\alpha\beta_2$ é um vetor cujo comprimento é o produto dos comprimentos de α e β_2 , cuja direção é perpendicular a ambos e cujo sentido é o mesmo de β_2 após girado de 90º em torno de α tomado como eixo, no sentido anti-horário[158].

Supondo que α é unitário, o que implica dizer que β_2 e $\alpha\beta_2$ possuem o mesmo comprimento, na figura.2 ilustramos a interpretação geométrica de Hamilton para o vetor $\alpha\beta_2$.



(figura.2) Comprimento, Direção e Sentido de $\alpha\beta_2$, supondo que α é unitário

Façamos uso agora da seguinte simbologia de Hamilton:

A = comprimento de α

B = comprimento de β

(A,B) = ângulo entre α e β

γ = vetor unitário com direção e sentido de $\alpha\beta_2$.

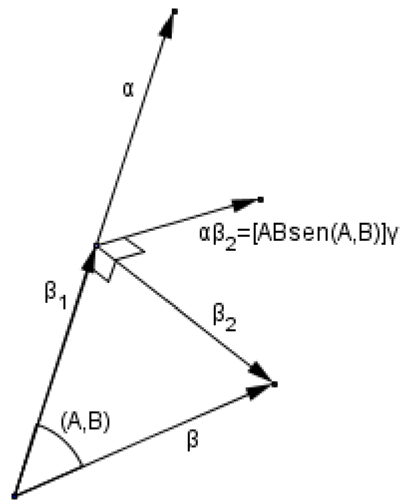
---

[158] Modernamente, essa definição para a direção e sentido do vetor $\alpha\beta_2$ equivale a "regra do saca-rolhas" ou da "mão direita", para a determinação da direção e sentido do produto vetorial .

É fácil ver, conforme ilustramos na figura.3, que o comprimento de β_1 é dado por $B\cos(A,B)$, o comprimento de β_2 é dado por $B\mathrm{sen}(A,B)$ e que, considerando as definições geométricas de $\alpha\beta_1$ e $\alpha\beta_2$, podemos concluir que[159]

$$\alpha\beta_1 = -AB\cos(A,B) \text{ e } \alpha\beta_2 = [AB\mathrm{sen}(A,B)]\gamma.$$

Em termos atuais, essas conclusões significam que $\alpha\beta_1 = -\alpha.\beta$ e $\alpha\beta_2 = \alpha \times \beta$.



(figura.3) comprimento de β_1=Bcos(A,B)
comprimento de β_2=B sen(A,B)
$\alpha\beta_2$=[ABsen(A,B)]γ

Finalmente, fazendo uso dessas conclusões em (II) e (III), obteremos o resultado (I), como pretendíamos:

$$\begin{aligned}(a+\alpha)(b+\beta) &= ab + a\beta + \alpha b + \alpha\beta = ab + a\beta + b\alpha + \alpha(\beta_1 + \beta_2) \\ &= ab + a\beta + b\alpha + \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 \\ &= \underbrace{ab - \alpha\beta}_{\text{parte real}} + \underbrace{a\beta + b\alpha + \alpha \times \beta}_{\text{parte imagiária}}.\end{aligned}$$

Observemos que ao admitir que a multiplicação entre vetores é distributiva, parece que Hamilton está raciocinando em termos de multiplicação de quatérnios, ou seja, está considerando que α e β são, respectivamente, os quatérnios $0+\alpha$ e $0+\beta$.

[159] Id., p.6

Observemos ainda que da maneira como ele define $\alpha\beta_1$ e $\alpha\beta_2$, resulta que $\alpha\beta$ é um quatérnio cuja parte real é $\alpha\beta_1$ e a parte imaginária é $\alpha\beta_2$. Essa identificação de um vetor com um quatérnio com parte real igual a zero não havia sido utilizada por Hamilton até então.

Hamilton observou que as definições que usou para o produto $\alpha\beta$ e para os produtos parciais $\alpha\beta_1$ e $\alpha\beta_2$ são compatíveis com as regras de multiplicação das unidades imaginárias i,j e k , além de serem suficientes para demonstrar com clareza as propriedades associativa e distributiva da multiplicação de quatérnios[160].

Como conseqüências das definições de $\alpha\beta_1$ e $\alpha\beta_2$, Hamilton obteve dois resultados para usar nos seus cálculos:

1) a primeira multiplicação é comutativa e a segunda não, ou seja, $\alpha\beta_1$ e $\beta_1\alpha$ representam um mesmo escalar, enquanto $\alpha\beta_2$ e $\beta_2\alpha$ representam vetores de mesma direção e "tamanho", porém de sentidos contrários. Assim, em símbolos, teremos que $\alpha\beta_1 = \beta_1\alpha$ e $\alpha\beta_2 = -\beta_2\alpha$.

2) se α é um "vetor unitário" (vetor de comprimento 1), teremos que:

$$\alpha^2 = \alpha\alpha = -1.1\cos 0° = -1 \text{ e}$$

o comprimento de $\alpha\beta_2 = 1.$(comprimento de β_2).sen90° = comprimento de β_2.

---

[160] Id., p.6

"and may serve to replace them, will be found sufficient to prove generally, and perhaps with somewhat greater geometrical clearness than those formulae, the distributive and associative properties of quaternion multiplication, which have already been stated to exist."

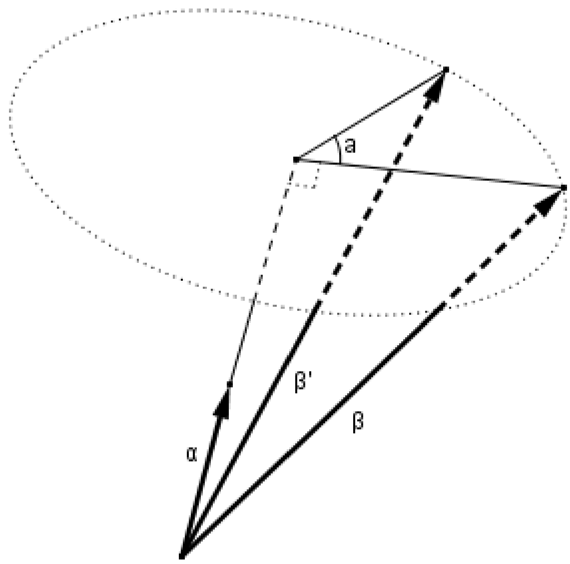
Vale dizer que Hamilton demonstrou algebricamente essas propriedades no seu primeiro artigo sobre os quatérnios "On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions", mas não o fez no artigo que estamos analisando, apenas sugeriu que isto podia ser feito geometricamente a partir das suas definições geométricas.

4.4: Rotações de Linhas (ou Vetores)[161] do Espaço Via Quatérnios

Inicialmente observamos que, como uma linha (ou ponto) do espaço é equivalente a um quatérnio de parte escalar nula, ou seja, a um vetor do espaço, de agora em diante representaremos uma linha a partir de flechas.

Vejamos agora de que maneira Hamilton fez uso da multiplicação de quatérnios para obter uma rotação da linha β, de um ângulo positivo a, em torno da direção do vetor unitário α [162].

A figura.4, onde β' representa a linha β após a rotação, ilustra esse problema.



(figura.4) β' é a linha β após rotação de um ângulo positivo a em torno da direção do vetor unitário α

Fazendo, como na figura.3,

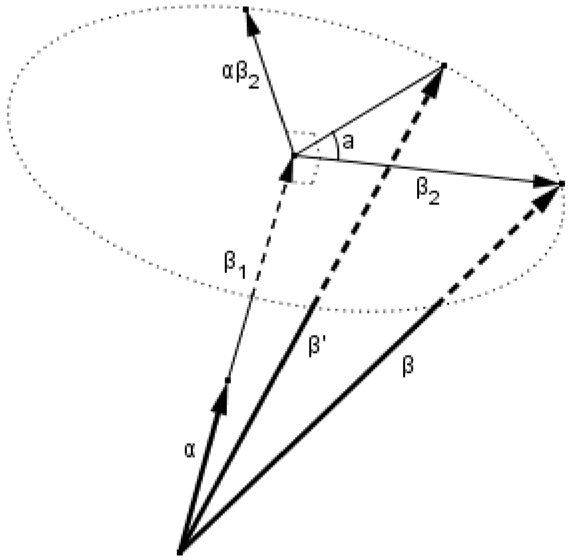
β_1 = componente de β na direção de α

β_2 = componente de β perpendicular à α,

[161] Uma linha β equivale a um quatérnio imaginário 0+β, portanto, a um vetor.
[162] Id., p.7

segue da definição geométrica de $\alpha\beta_2$ e das considerações da seção 4.3, que este vetor é perpendicular aos vetores α e β_2 e como α é unitário, seu comprimento é igual ao comprimento de β_2.

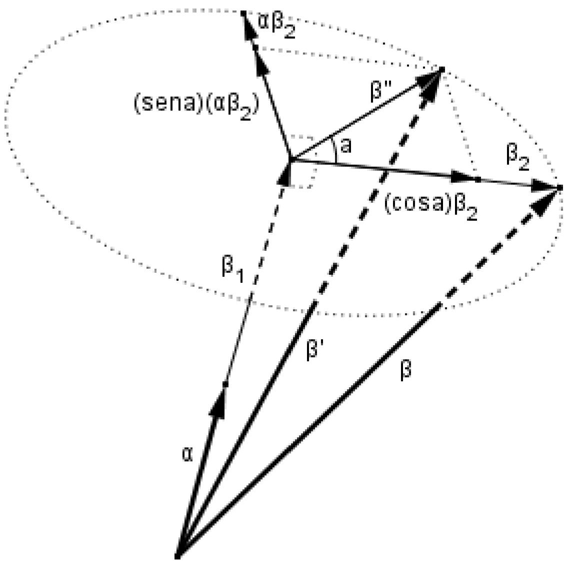
A figura.5 resulta do acréscimo dessas considerações na figura.4.



(figura.5) $\alpha\beta_2$ é perpendicular à α e β_2, e tem comprimento igual ao de β_2

Fazendo $\beta''=\beta'-\beta_1$ na figura.5, teremos que β_2, β'' e $\alpha\beta_2$ são vetores coplanares, que $(\cos a)\beta_2$ e $(\text{sen} a)(\alpha\beta_2)$ são as projeções, respectivamente, de β'' nas direções de β_2 e $\alpha\beta_2$ e que, portanto, $\beta''=(\cos a)\beta_2+(\text{sen} a)(\alpha\beta_2)$.

Na figura.6 ilustramos essas considerações.



(figura.6) $\beta''=(\cos a)\beta_2+(\text{sen} a)(\alpha\beta_2)$

Das argumentações anteriores, como é fácil ver pela figura.6 (anterior), segue que

$$\beta' = \beta_1 + \beta'' = \beta_1 + (\cos a)\beta_2 + (\operatorname{sen} a)(\alpha\beta_2) \qquad (IV)$$

Vejamos como Hamilton obteve β' em função dos elementos que determinam a rotação, ou seja, a, α e β.

4.4.1: Expressão de β_1 em Função de α e β

Considerando que $\alpha\beta + \beta\alpha = \alpha(\beta_1 + \beta_2) + (\beta_1 + \beta_2)\alpha = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 + \beta_1\alpha + \beta_2\alpha$ e que, como já vimos, $\beta_1\alpha = \alpha\beta_1$ e $\beta_2\alpha = -\alpha\beta_2$, Hamilton concluiu que

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 + \alpha\beta_1 - \alpha\beta_2 = 2\alpha\beta_1$$

$$\alpha\beta + \beta\alpha = 2\alpha\beta_1 \qquad (V)$$

Multiplicando (V) por $-\frac{1}{2}\alpha$ e lembrando que $\alpha^2 = -1$, pois α é unitário, Hamilton concluiu que:

$$-\frac{1}{2}\alpha(\alpha\beta + \beta\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha(2\alpha\beta_1)$$

$$-\frac{1}{2}\alpha^2\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta\alpha = -\frac{1}{2}.2.\alpha^2\beta_1$$

$$\beta_1 = \frac{1}{2}(\beta - \alpha\beta\alpha) \qquad (VI)$$

4.4.2: Expressão de β_2 e $\alpha\beta_2$ em Função de α e β

Considerando que $\alpha\beta - \beta\alpha = \alpha(\beta_1 + \beta_2) - (\beta_1 + \beta_2)\alpha = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 - \beta_1\alpha - \beta_2\alpha$ e mais uma vez que $\beta_1\alpha = \alpha\beta_1$ e $\beta_2\alpha = -\alpha\beta_2$, Hamilton concluiu que

$$\alpha\beta - \beta\alpha = \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 - \alpha\beta_1 + \alpha\beta_2 = 2\alpha\beta_2$$

$$\alpha\beta - \beta\alpha = 2\alpha\beta_2 \qquad (VII)$$

Multiplicando (VII) por $-\frac{1}{2}\alpha$ e lembrando que $\alpha^2 = -1$, Hamilton concluiu que:

$$-\frac{1}{2}\alpha(\alpha\beta - \beta\alpha) = -\frac{1}{2}\alpha(2.\alpha\beta_2)$$
$$-\frac{1}{2}\alpha^2\beta + \frac{1}{2}\alpha\beta\alpha = -\frac{1}{2}.2\alpha^2\beta_2\text{, ou seja,}$$
$$\beta_2 = \frac{1}{2}(\beta + \alpha\beta\alpha) \text{ e } \alpha\beta_2 = \frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) \qquad (\mathrm{VIII}).$$

4.4.3: Expressão de β' em Função de a, α e β

Substituindo (VI) e (VIII) em (IV), Hamilton obteve

$$\begin{aligned}\beta' &= \beta_1 + (\cos a)\beta_2 + (\mathrm{sen} a)\alpha\beta_2\\ &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha\beta\alpha) + (\cos a)\frac{1}{2}(\beta + \alpha\beta\alpha) + (\mathrm{sen} a)\frac{1}{2}(\alpha\beta - \beta\alpha) \qquad (\mathrm{IX})\end{aligned}$$

Hamilton partiu do resultado (IX) direto para o resultado (XII). Apresentaremos os detalhes das passagens intermediárias que não constam no artigo em análise.

Fazendo as substituições

$$\cos a = 2\left(\cos^2\frac{a}{2}\right) - 1 \text{ e } \frac{1}{2}\mathrm{sen} a = \cos\frac{a}{2}\mathrm{sen}\frac{a}{2}$$

em (IX), desenvolvendo as multiplicações de escalares por vetores, fazendo uso da distributividade , e somando os termos opostos , segue que:

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha\beta\alpha) + \frac{1}{2}\left(2\left(\cos^2\frac{a}{2}\right) - 1\right)(\beta + \alpha\beta\alpha) + \left(\cos\frac{a}{2}\mathrm{sen}\frac{a}{2}\right)(\alpha\beta - \beta\alpha)\\ &= \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta\alpha - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\alpha\beta\alpha + \left(\cos^2\frac{a}{2}\right)\beta + \left(\cos^2\frac{a}{2}\right)\alpha\beta\alpha + \left(\cos\frac{a}{2}\mathrm{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\beta - \left(\cos\frac{a}{2}\mathrm{sen}\frac{a}{2}\right)\beta\alpha\\ &= -\alpha\beta\alpha + \left(\cos^2\frac{a}{2}\right)\beta + \left(\cos^2\frac{a}{2}\right)\alpha\beta\alpha + \left(\cos\frac{a}{2}\mathrm{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\beta - \left(\cos\frac{a}{2}\mathrm{sen}\frac{a}{2}\right)\beta\alpha \qquad (\mathrm{X})\end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\cos^2\frac{a}{2} = 1 - \text{sen}^2\frac{a}{2}$ no terceiro termo de (X), desenvolvendo as multiplicações de escalares por vetores, fazendo uso da distributividade, e somando os termos opostos , segue que:

$$\begin{aligned}
\beta' &= -\alpha\beta\alpha + \left(\cos^2\frac{a}{2}\right)\beta + \left(1 - \text{sen}^2\frac{a}{2}\right)\alpha\beta\alpha + \left(\cos\frac{a}{2}\text{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\beta - \left(\cos\frac{a}{2}\text{sen}\frac{a}{2}\right)\beta\alpha \\
&= -\alpha\beta\alpha + \left(\cos^2\frac{a}{2}\right)\beta + \alpha\beta\alpha - \left(\text{sen}^2\frac{a}{2}\right)\alpha\beta\alpha + \left(\cos\frac{a}{2}\text{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\beta - \left(\cos\frac{a}{2}\text{sen}\frac{a}{2}\right)\beta\alpha \\
&= \left(\cos^2\frac{a}{2}\right)\beta - \left(\text{sen}^2\frac{a}{2}\right)\alpha\beta\alpha + \left(\cos\frac{a}{2}\text{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\beta - \left(\cos\frac{a}{2}\text{sen}\frac{a}{2}\right)\beta\alpha \qquad (XI)
\end{aligned}$$

Finalmente, fatorando (XI), Hamilton expressou β' (o resultado da rotação da linha β, de um ângulo positivo a, em torno da direção do vetor unitário α) em função de a, α e β da seguinte maneira:

$$\beta' = \left(\cos\frac{a}{2} + \left(\text{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\right)\beta\left(\cos\frac{a}{2} - \left(\text{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\right) \qquad (XII).$$

O resultado (XII) foi obtido para rotações de linhas do espaço, mas também pode ser utilizado para efetuar rotações de pontos no espaço, pois assim como a linha ou o vetor β pode ser identificado com o quatérnio $0+\beta$ e com um ponto P do espaço de coordenadas retangulares (x,y,z) , também o vetor ou a linha β' pode ser identificado com o quatérnio $0+\beta'$ e com um ponto P' do espaço de coordenadas retangulares (x', y', z') .

Observemos que se não tivéssemos acompanhado a dedução de Hamilton para o resultado (XII) , em detalhes, desde o início, teríamos dificuldades para entender que um produto de três quatérnios, onde apenas um deles (β , no caso) é uma linha do espaço (os outros dois são objetos do espaço de dimensão quatro) pode resultar em numa linha (β', no caso) do espaço.

4.5: Composição de Rotações de Linhas (ou Pontos) do Espaço Via Quatérnios

4.5.1: Composição de Duas Rotações

Para compor duas rotações sucessivas da linha β, Hamilton fez uso da associatividade e do resultado (XII) duas vezes seguidas. Assim, considerando que β_1 resulta de uma rotação de β, de um ângulo a_0, em torno da direção do vetor unitário α_0 e que β_2 resulta de uma rotação de β_1 de um ângulo a_1, em torno da direção do vetor unitário α_1, Hamilton concluiu que

$$\beta_2 = \left(\cos\frac{a_1}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_1}{2}\right)\alpha_1\right)\beta_1\left(\cos\frac{a_1}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_1}{2}\right)\alpha_1\right)$$

$$= \left(\cos\frac{a_1}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_1}{2}\right)\alpha_1\right)\left(\underbrace{\left(\cos\frac{a_0}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)\beta\left(\cos\frac{a_0}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)}_{\beta_1}\right)\left(\cos\frac{a_1}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_1}{2}\right)\alpha_1\right) \qquad (\text{XIII})$$

4.5.2: Composição de n Rotações

Nos interessa agora saber como Hamilton calculou a linha β_n se esta é o resultado de n rotações sucessivas da linha β, segundo os ângulos $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}$, em torno das direções dos vetores unitários $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n-1}$, respectivamente[163].

Baseado nos resultados (XII) e (XIII), Hamilton concluiu que β_n deve ser calculada aplicando-se o resultado (XII) n vezes seguidas, ou seja:

$$\beta_n = \left(\cos\frac{a_{n-1}}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right)\cdots\left(\cos\frac{a_0}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)\beta\left(\cos\frac{a_0}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)\cdots\left(\cos\frac{a_{n-1}}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right) \qquad (\text{XIV})$$

Uma vez apresentado o resultado (XIV), Hamilton observou que, utilizando as propriedades da multiplicação de quatérnios, podemos provar que a multiplicação de

[163] Conforme já observamos na introdução deste capítulo, Hamilton usa expoentes para indicar os diferentes ângulos e vetores unitários. Para evitar confusão, preferimos usar índices.

quaisquer quantidade n de quatérnios do tipo $\cos\frac{a}{2} \pm \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha$, onde α é unitário, tem como produto um quatérnio do mesmo tipo, o que equivale a dizer que o resultado (XIV) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\beta_n = \underbrace{\left(\cos\frac{a_{n-1}}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right)\ldots\left(\cos\frac{a_0}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)}_{\cos\frac{a_n}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n}\beta\underbrace{\left(\cos\frac{a_0}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)\ldots\left(\cos\frac{a_{n-1}}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right)}_{\cos\frac{a_n}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n}$$

$$= \left(\cos\frac{a_n}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n\right)\beta\left(\cos\frac{a_n}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n\right) \qquad (XV)$$

onde α_n é um vetor também unitário.

Hamilton observa que este resultado geral mostra não apenas como obter β_n, mas também que esta composição de n rotações sucessivas pode ser obtida por uma única rotação de β de um ângulo a_n em torno da direção do vetor unitário α_n e que se β fosse um ponto de um corpo rígido, poderíamos girar cada ponto deste corpo da mesma forma, visto que a_n e α_n são unicamente determinados, ou seja, não dependem do ponto particular β.

Fazendo uso dos resultados de Hamilton vistos até aqui, apresentaremos uma demonstração para o resultado (XV).

4.5.2.1: Demonstração do Resultado (XV)

Para demonstrarmos esse resultado, considerando que os pares de quatérnios

$$q = \cos\frac{a}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\alpha, \bar{q} = \cos\frac{a}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\alpha$$

e $q' = \cos\frac{a'}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{a'}{2}\right)\alpha'$, $\bar{q'} = \cos\frac{a'}{2} - \operatorname{sen}\left(\frac{a'}{2}\right)\alpha'$ onde α, α' são vetores unitários,

representam quaisquer dos n pares de quatérnios correspondentes no resultado (XV), um à esquerda e outro à direita de β, deveremos mostrar em primeiro lugar que existem um ângulo m e um vetor unitário μ, tais que $qq' = \cos\frac{m}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{m}{2}\right)\mu$ e

$\overline{q'}\,\overline{q} = \cos\frac{m}{2} - \text{sen}\left(\frac{m}{2}\right)\mu$. Feito isto, bastará usarmos a associatividade da multiplicação de quatérnios para concluirmos a demonstração.

Observamos que o símbolo $\overline{q}$ é similar ao usado atualmente para representarmos o conjugado de um número complexo. Hamilton usou o símbolo q^{-1} ,de inverso multiplicativo nos seus textos. Conforme veremos em uma das etapas da nossa demonstração, é correto o procedimento de Hamilton, pois quanto q é um quatérnio do tipo $\cos\frac{a}{2} + \text{sen}\left(\frac{a}{2}\right)\alpha$, com α unitário, é verdade que $q\overline{q} = 1$, ou seja, q e $\overline{q}$ são inversos multiplicativos.

Seguiremos as seguintes etapas:

Etapa.1) Provaremos que $\overline{qq'} = \overline{q'}\,\overline{q}$.

Etapa.2) Provaremos que $q\overline{q} = 1$ e $q'\overline{q'} = 1$.

Etapa.3) Provaremos que dado o quatérnio $Q = X + T\theta$, onde X, T são reais, $T \neq 0$ e θ é um vetor do espaço, se for verdade que $Q.\overline{Q} = 1$, então existem um ângulo $-\pi < A \leq \pi$ e um vetor unitário λ, também do espaço, de modo que possamos reescrever Q da seguinte maneira:

$$Q = \cos A + (\text{sen}A)\lambda.$$

Etapa.4) Concluiremos nossa demonstração fazendo uso da associatividade da multiplicação de quatérnios e dos resultados das etapas 1,2 e 3.

Comecemos nossa demonstração.

Demonstração da Etapa.1) Fazendo uso do resultado (I) da seção 4.2, teremos que

$$\overline{qq'} = \overline{\left(\cos\frac{a}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\right)\left(\cos\frac{a'}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)\alpha'\right)} =$$

$$= \overline{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)(\alpha\alpha') + \left(\cos\frac{a}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)\alpha' + \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\cos\frac{a'}{2}\right)\alpha + \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)(\alpha\times\alpha')}$$

$$= \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)(\alpha\alpha') - \left(\cos\frac{a}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)\alpha' - \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\cos\frac{a'}{2}\right)\alpha - \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)(\alpha\times\alpha')$$

Em linguagem atual, os resultados $\alpha\beta_1 = \beta_1\alpha$ e $\alpha\beta_2 = -\beta_2\alpha$, da seção 4.3, significam aqui que $\alpha.\alpha' = \alpha'.\alpha$ e $\alpha\times\alpha' = -\alpha'\times\alpha$. Assim:

$$\overline{qq'} = \cos\frac{a'}{2}\cos\frac{a}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)(\alpha'.\alpha) - \left(\cos\frac{a'}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha - \left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\right)\alpha' + \left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)(\alpha'\times\alpha)$$

$$= \left(\cos\frac{a'}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a'}{2}\right)\alpha'\right)\left(\cos\frac{a}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\right) = \overline{q'}\,\overline{q}$$

Demonstração da Etapa.2) De acordo com o resultado (I), teremos que

$$q\overline{q} = \left(\cos\frac{a}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\right)\left(\cos\frac{a}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha\right) = \cos^2\frac{a}{2} - \left(\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(-\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\right)(\alpha.\alpha) + \left(\cos\frac{a}{2}\right)\left(-\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\alpha +$$
$$+ \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(\cos\frac{a}{2}\right)\alpha + \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)\left(-\operatorname{sen}\frac{a}{2}\right)(\alpha\times\alpha)$$

Como $\alpha^2 = -(\alpha.\alpha) = -1$, se α é um vetor unitário, e $\alpha\times\alpha = 0$, para todo vetor α, resultados vistos na seção 4.3, segue que

$$q\overline{q} = \cos^2\frac{a}{2} - \left(\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}\right)(-\alpha.\alpha) = \cos^2\frac{a}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{a}{2} = 1\,.$$

A demonstração da igualdade $q'\overline{q'} = 1$ é inteiramente similar.

Demonstração da Etapa.3) Como por hipótese $Q\overline{Q'} = 1$, teremos que

$$1 = Q\overline{Q'} = (X + T\theta)(X - T\theta) = X^2 - (T\theta)(-T\theta) + X(-T\theta) + T\theta X + (T\theta) \times (-T\theta)$$
$$= X^2 + T^2(\theta.\theta) - (TX)\theta + (TX)\theta - T^2(\theta \times \theta).$$

Como, de acordo com a seção 4.3, $\theta \times \theta = 0$, segue que

$$1 = X^2 + T^2(\theta.\theta).$$

Considerando o vetor $\lambda = \left(\frac{1}{\sqrt{\theta.\theta}}\right)\theta$, teremos que $\theta = \left(\sqrt{\theta.\theta}\right)\lambda$ e, portanto, $\theta.\theta = \left(\left(\sqrt{\theta.\theta}\right)\lambda\right)\left(\left(\sqrt{\theta.\theta}\right)\lambda\right) = (\theta.\theta)(\lambda.\lambda)$. Assim,

$$1 = X^2 + T^2(\theta.\theta) = X^2 + T^2(\theta.\theta)(\lambda.\lambda).$$

Como λ é unitário, pois

$$\lambda.\lambda = \left(\frac{1}{(\theta.\theta)}\right)(\theta.\theta) = 1,$$

teremos que

$$1 = X^2 + T^2(\theta.\theta).1 = X^2 + T^2(\theta.\theta) = X^2 + \left(T\sqrt{\theta.\theta}\right)^2.$$

Fazendo $X = \cos A$ e $T\sqrt{\theta.\theta} = \operatorname{sen} A$, teremos finalmente que:

$$Q = X + T\theta = X + T\left(\sqrt{\theta.\theta}\right)\lambda = \cos A + (\operatorname{sen} A)\lambda.$$

Etapa.4) De acordo com a Etapa.1, teremos que

$$(qq')(\overline{qq'}) = qq'\overline{q'}\,\overline{q} = q(q'\overline{q'})\overline{q}.$$

Como, conforme concluímos na Etapa.2, $q\overline{q} = 1$ e $q'\overline{q'} = 1$, teremos que

$$(qq')(\overline{qq'}) = q(q'\overline{q'})\overline{q} = (q)(1)(\overline{q}) = q\overline{q} = 1 .$$

De acordo com a Etapa.3, existem um ângulo $-\pi < A \leq \pi$ e λ, um vetor unitário do espaço, de modo que possamos reescrever $q.q'$ da seguinte maneira:

$$qq' = \cos A + (\operatorname{sen} A)\lambda$$

Fazendo $A = \frac{m}{2}$ e $\lambda = \mu$, teremos que

$$qq' = \cos\frac{m}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{m}{2}\right)\mu$$

De acordo com a simbologia que adotamos; com o resultado da Etapa.1; com o modelo $qq' = \cos\frac{m}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{m}{2}\right)\mu$ e com a disposição dos fatores na identidade (XV), teremos

$$q.q'..\beta...\overline{q'}.\overline{q} = q.q'..\beta...\overline{q.q'} \text{ , ou seja, } \overline{q'}\,\overline{q} = \cos\frac{m}{2} - \left(\operatorname{sen}\frac{m}{2}\right)\mu.$$

Finalmente, fazendo uso da propriedade associativa da multiplicação de quatérnios e das substituições de A por $\frac{a_n}{2}$ e λ por α_n, teremos que:

$$\underbrace{\left(\cos\frac{a_{n-1}}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right)...\left(\cos\frac{a_1}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_1}{2}\right)\alpha_1\right)\left(\cos\frac{a_0}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)}_{\cos A + (\operatorname{sen} A)\lambda} = \left(\cos\frac{a_n}{2} + \left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n\right).$$

e

$$\underbrace{\left(\cos\frac{a_{n-1}}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right)\ldots\left(\cos\frac{a_1}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_1}{2}\right)\alpha_1\right)\left(\cos\frac{a_0}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)}_{\cos A-(\operatorname{sen}A)\lambda}=\left(\cos\frac{a_n}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n\right).$$

ou seja:

$$\beta_n=\underbrace{\left(\cos\frac{a_{n-1}}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right)\ldots\left(\cos\frac{a_0}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)}_{\cos\frac{a_n}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n}\beta\underbrace{\left(\cos\frac{a_0}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_0}{2}\right)\alpha_0\right)\ldots\left(\cos\frac{a_{n-1}}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_{n-1}}{2}\right)\alpha_{n-1}\right)}_{\cos\frac{a_n}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n}$$

$$=\left(\cos\frac{a_n}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n\right)\beta\left(\cos\frac{a_n}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{a_n}{2}\right)\alpha_n\right)$$

4.6: Exemplo de uma Composição de Duas Rotações

Usaremos a simbologia da sub-seção 4.5.2 para exemplificarmos o uso do resultado (XV). Consideraremos uma composição de duas rotações sucessivas da linha $\beta = 0+(0,0,1)=(0,0,1)$ em torno da direção do vetor unitário $\alpha_0=(0,1,0)$, de um ângulo $a_0 = 90°$, seguida de uma rotação em torno da direção do vetor unitário $\alpha_1=(0,0,1)$, de um ângulo $a_1=90°$.

De acordo com o resultado (XV), feitos os cálculos (aqui omitidos), teremos que

$$\beta_2=\underbrace{\left(\cos\frac{90°}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{90°}{2}\right)(0,0,1)\right)\left(\cos\frac{90°}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{90°}{2}\right)(0,1,0)\right)}_{\cos\left(\frac{120°}{2}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{120°}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}(0,0,1)\underbrace{\left(\cos\frac{90°}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{90°}{2}\right)(0,1,0)\right)\left(\cos\frac{90°}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{90°}{2}\right)(0,0,1)\right)}_{\cos\left(\frac{120°}{2}\right)-\operatorname{sen}\left(\frac{120°}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}$$

ou seja,

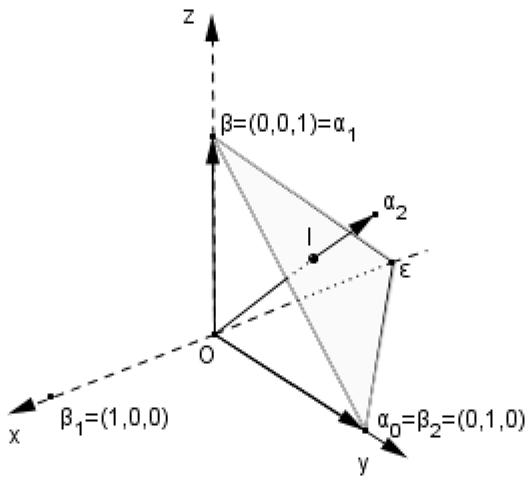
$$\beta_2=\left(\cos\frac{120°}{2}+\left(\operatorname{sen}\frac{120°}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)(0,0,1)\left(\cos\frac{120°}{2}-\left(\operatorname{sen}\frac{120°}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Antes de apresentarmos o resultado final para β_2, observemos que os cálculos indicam que β_2 pode ser obtida por uma única rotação de β em torno da direção do vetor unitário $\alpha_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, de um ângulo $a_2 = 120°$.

Finalizando os cálculos, teremos que

$$\beta_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)(0,0,1)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right) = (0,1,0).$$

A figura.7 esclarece o exemplo utilizado.



(figura.7) Considerando que $\beta\alpha_0\varepsilon$ é equilátero e I é o seu centro, teremos que (0,1,0) é (0,0,1) após duas rotações de 90° em torno de α_0 e α_1 ou uma única rotação de $\beta I\alpha_0 = a_2 = 120°$ em torno da direção do vetor unitário α_2

4.7: Interpretação de um Quatérnio via Quociente de Vetores (ou "linhas retas orientadas")

No livro *Elements of Quaternions* (1866)[164], Hamilton definiu um quatérnio como o "quociente geométrico" entre dois "vetores" ou "linhas orientadas" não-paralelas e,

---

[164] "Elements of Quaternions" foi publicado em 1866 por seu filho Willian Edwin. Uma segunda edição, em dois volumes, com notas e apêndice de C.J.Joly (sucessor de Hamilton como astrônomo real da

fazendo uso das sugestivas propriedades das operações algébricas com frações, desenvolveu toda a álgebra dos quatérnios.

Iniciaremos essa seção com algumas definições e resultados do estudo de vetores apresentados por Hamilton na citada obra.

Hamilton definiu um vetor como sendo "uma linha reta AB que possui não apenas comprimento, mas também direção"[165].

Definiu então uma adição de vetores, uma multiplicação de vetor por escalar[166] e provou que dados os vetores α, β, γ e os escalares m, n, valem as seguintes propriedades[167]:

A1) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (propriedade "comutativa")

A2) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (propriedade "associativa")

A3) $0 + \alpha = \alpha$ (existência do "elemento neutro")

A5) todo vetor α possui um "vetor oposto" $-\alpha$.

M1) $0\alpha = 0$ (OBS.: o zero no membro esquerdo é um escalar, no membro direito é o vetor nulo)

M2) $n\alpha \pm m\alpha = (m \pm n)\alpha$

M3) $n(m\alpha) = nm\alpha$

M4) $m(\beta \pm \alpha) = m\beta \pm m\alpha$

Hamilton reconheceu três tipos de "quocientes" [168]:

1) Quociente entre escalares, como na fração aritmética $\frac{n}{m}$;

Irlanda e professor de astronomia na Universidade de Dublin) apareceu em 1899 e 1901. Em 1905, centenário de nacimento de Hamilton, Joly esreveu um manual de Quaternions (Macmillan, London), como era a intenção inicial de Hamilton ao escrever "Elements of Quaternions".

[165] Hamilton [1866], p.3

"A right line AB, considered as having not only *length*, but also *direction* is said to be a VECTOR."

[166] Id., p.110

"xa denotes another vector, say β, which is either similar or opposite in direction to a, according as the scalar coefficient, or factor, x, is positive or negative…"

[167] Id., p.3

[168] Id., p.107

2) Quociente entre vetor e escalar, como $\frac{\beta}{x} = a$, onde β,a são vetores de mesma direção e x é um escalar (este quociente nada mais é do que a multiplicação já definida entre o vetor β e o escalar $\frac{1}{x}$)

3) Quociente entre vetores

Do resultado anterior, Hamilton concluiu que podemos dizer que x é o "quociente geométrico" entre os vetores paralelos β,a, ou seja, $\frac{\beta}{a} = x$.

O problema, porém, era definir o quociente entre vetores não-paralelos. Para tal, Hamilton simbolizou por q o quociente geométrico entre os vetores não-paralelos β,a, ou seja, $\frac{\beta}{a} = q$ e, sugestionado pela álgebra, considerou válido admitir os cinco princípios seguintes[169]:

1) Do quociente geométrico $\frac{\beta}{a} = q$, podemos admitir $\beta = qa$, o que permite dizer que q pode ser visto como um operador responsável pela transformação da linha a na linha β.

Observemos que até aqui não sabemos se o quociente geométrico q é um escalar ou um vetor ou um misto entre escalar e vetor, mas já sabemos que ele transforma a linha a na linha β, o que significa que ele provoca rotações e/ou alterações no comprimento do vetor a.

2) Se $\frac{\beta'}{a'} = \frac{\beta}{a}$, e $a = a'$, então $\beta = \beta'$.

3) Se $q' = q$ e $q'' = q$, então $q'' = q'$.

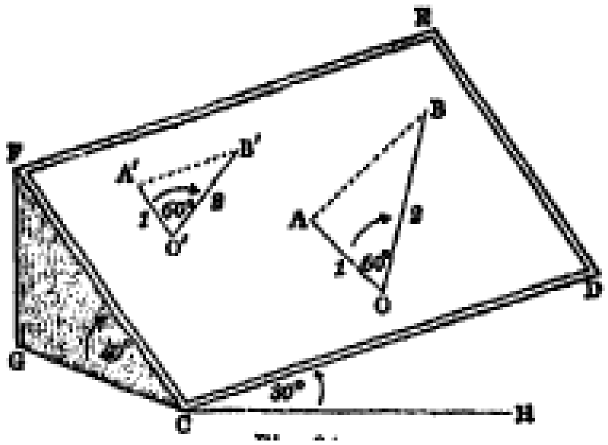
4) $\frac{\gamma}{a} \pm \frac{\beta}{a} = \frac{\gamma \pm \beta}{a}$ e $\frac{\gamma}{a} : \frac{\beta}{a} = \frac{\gamma}{\beta}$.

[169] Id., p.108-109

5) $\frac{\gamma}{\beta}\frac{\beta}{a}=\frac{\gamma}{a}$.

Hamilton concluiu que q deveria ser chamado de “QUATERNION”, e justificou o nome argumentando que para definir com precisão a transformação do vetor OA em outro vetor não paralelo OB (como já vimos, este papel é desempenhado por q), são necessárias quatro informações: uma delas é o comprimento relativo dos vetores, necessário para igualar seus comprimentos; a outra é o ângulo de rotação necessário para igualar suas direções e as outras duas são os ângulos que definem o plano que contem OA e OB[170].

A figura.8 , extraída do livro *Elements of Quaternions*[171], ilustra um exemplo de Hamilton: a transformação das linhas $O'A'$ e OA nas linhas $O'B'$ e OB , respectivamente.



(figura.8)$q=\frac{OB'}{OA'}=\frac{OB}{OA}$, q:2,60°,30°,40°

Observemos que essa transformação é identificada pelos números (ou pelo quatérnio q) : 2, 60°, 30° e 40°. Aqui, 2 significa que o comprimento de $O'A'$ e OA

---

[170] Id., p.112

“It appears, then, from the foregoing discussion, that for the *complete determination*, of what we have called the *geometrical Quotient of two co-initial Vectors, a Systen of Four Elements*, admitting each separately of numerical expression, is *generally required*. Of these four elements, one serves to determine the *relative length* of the two lines compared; and the other three are in general necessary in order to determine fully their *relative direction*…On account, then, of this essential conexion of that complex relation between two lines, which is compounded of a relation of lengths, and of a relation of directions, and to which we have given the name of a geometrical quotient, with a System of Four numerical Elements, we have already a motive for saying, that “the Quotient of two Vectors is generally a Quaternion.”

[171] Id., p.113

deverão ser duplicados; 60° é o ângulo de rotação das linhas $O'A'$ e OA e 30° e 40° definem o plano onde a transformação ocorrerá. Neste exemplo podemos dizer que

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB}{OA} = q\,.$$

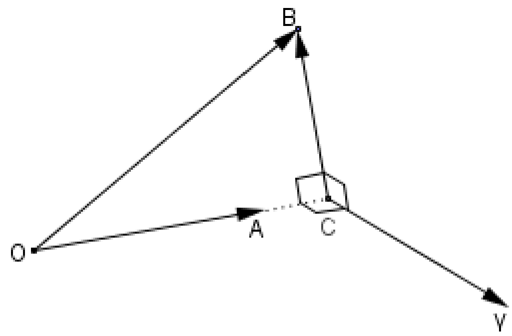
Hamilton usou indistintamente os termos "vetor" e "linha reta orientada" no seu livro, e esse comportamento foi estendido para as figuras[172], ou seja, em algumas usa flechas para representar vetores e em outras não, como na figura anterior.

4.8: Identificação entre as Interpretações de um Quaternion via um Quociente de Vetores e Via uma Soma de um Escalar com um Vetor

Peter Guthrie Tait (1831-1901), que foi um dos maiores defensores dos quatérnios, tendo escrito vários textos sobre este tema, apresentou no seu livro *Elementary Treatise on Quaternions* , publicado em 1867 (um ano após a publicação do livro *Elements of Quaternions*, de Hamilton), uma identificação entre a visão de quatérnio como o quociente geométrico entre vetores não-paralelos e como a soma de um escalar com um vetor do espaço[173]. Acompanhemos suas argumentações.

[172] Hamilton não fez uso de figuras nos seus artigos sobre quatérnios e estas são raríssimas nos seus dois livros "Lectures on Quaternions",de 1853, e "Elements of Quaternions", de 1866.
[173] Tait,P.G. [1890], p.48

Consideremos o quaternion $q = \frac{OB}{OA}$. Traçando $\overline{BC}$ perpendicular à direção de $\overline{OA}$, conforme figura.9, Tait concluiu que[174]:



(figura.9) $q = \frac{OB}{OA} = x + \gamma$

OB=OC+CB, OC=xOA e CB=OAγ

1) Do triângulo OBC formado e da operação adição de vetores, concluiu que $OB = OC + CB$ e , consequentemente, que $q = \frac{OB}{OA} = \frac{OC + CB}{OA}$;

2) A operação multiplicação de vetor por escalar nos garante que existe um escalar x tal que $OC = xOA$ e a operação multiplicação de vetores perpendiculares (seção 4.4) nos garante que existe um vetor γ, perpendicular a $\overline{CB}$ e $\overline{OA}$, tal que $\overline{CB} = OA\gamma$;

3) Dos resultados sugestionados pela adição algébrica de frações, Tait concluiu que

$$q = \frac{OB}{OA} = \frac{OC + CB}{OA} = \frac{OC}{OA} + \frac{CB}{OA}.$$

Finalmente, de 1), 2), 3) e mais uma vez fazendo uso das propriedades das frações algébricas, concluiu que o quatérnio q é a soma de um escalar e um vetor do espaço, pois

$$q = \frac{OC}{OA} + \frac{CB}{OA} = \frac{xOA}{OA} + \frac{OA\gamma}{OA} = x + \gamma.$$

[174] Observamos que ,assim como Hamilton, Tait algumas vezes representou um vetor por uma flecha e outras por um segmento

4.9: Conclusão

Conforme vimos no capítulo anterior e neste capítulo, Hamilton obteve seu método para a realização de rotações no espaço em três etapas. Na primeira etapa, realizada em 1830, definiu uma multiplicação geométrica de tripletos baseada numa tentativa de estender para o espaço os resultados de Warren sobre rotações no plano. Por não satisfazer a propriedade distributiva, tal como a multiplicação de segmentos do plano, Hamilton resolveu abandonar essa definição. Na segunda etapa, que durou algo em torno de 10 anos, e terminou com a descoberta dos quatérnios, Hamilton definiu uma multiplicação algébrica de tripletos. O êxito dessa etapa ocorreu graças a duas conclusões surpreendentes: a multiplicação de linhas no espaço (de dimensão três) só é possível no espaço de dimensão quatro, via quatérnios, e além disso, tal multiplicação não é comutativa. Na terceira, cujos resultados foram apresentados por Hamilton no ano seguinte à finalização da segunda etapa, Hamilton precisou definir geometricamente duas multiplicações de vetores do espaço de modo que a multiplicação de quatérnios pudesse ser interpretada via rotações no espaço. Como vimos na seção 4.4, o resultado dessa etapa também foi surpreendente, pois Hamilton concluiu que o resultado de uma rotação de uma linha (ou vetor, ou ponto) do espaço é obtido por uma multiplicação de três quatérnios, onde apenas um deles pertence ao espaço. Mais surpreendente ainda é a conclusão de que o resultado de qualquer quantidade de n rotações sucessivas também pode ser obtida por uma única multiplicação do mesmo tipo.

Conclusão Final

Hamilton pretendia obter um modelo analítico para o espaço, mas o grande problema para a obtenção desse modelo, problema esse que foi o tema dessa dissertação, e de cujas tentativas de solução resultaram a descoberta dos quatérnios $w + ix + jy + kz$ em 1843, era o seguinte: definir uma multiplicação de tripletos $x + iy + jz$ (identificados com linhas orientadas ou pontos (x, y, z)) que preservasse as propriedades algébricas da multiplicação de números imaginários $x + iy$ e que pudesse ser interpretada geometricamente via rotações no espaço, tal como a multiplicação de números imaginários pode ser interpretada via rotações no plano.

Podemos entender que a solução do problema teve três etapas fundamentais:

i) na primeira, ocorrida em 1830, Hamilton definiu geometricamente uma multiplicação de tripletos (x, y, z) baseado na extensão para o espaço dos resultados de Warren, publicados em 1828, sobre rotações no plano via multiplicação de segmentos. Essa multiplicação foi abandonada por não preservar a propriedade distributiva, que é válida para segmentos do plano.

ii) na segunda, que durou em torno de dez anos, e foi concluída em 1843 com a descoberta dos quatérnios, Hamilton definiu uma multiplicação algébrica fechada para linhas do espaço. Nessa multiplicação, que não é comutativa, as linhas são consideradas como quatérnios do tipo $ix + jy + kz$.

iii) na terceira, cujo resultado ele apresentou em 1844, Hamilton definiu duas multiplicações geométricas entre vetores do espaço de modo a tornar possível a interpretação geométrica da multiplicação de quatérnios via rotações no espaço.

As conjecturas algébricas que Hamilton testou bem como as operações geométricas que precisou definir não eram comuns para a época. Ainda que

George Peacock (1791-1858) e Augustus De Morgan (1806-1871) [175] , seus contemporâneos, tivessem conferido certa liberdade à construção de estruturas algébricas, para eles tais estruturas deveriam obedecer as leis sugeridas pela aritmética. Hamilton precisou contrariar essa concepção em duas etapas das suas pesquisas no tocante a definição de operações: na segunda etapa, definiu uma multiplicação algébrica não comutativa e, na terceira, definiu geometricamente duas operações entre vetores, uma cujo resultado é um escalar e outra cujo resultado é um vetor, mas que não é associativa e nem comutativa (ao contrário da multiplicação de quatérnios, essas duas operações não preservam a lei dos módulos).

O artigo “Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time”, lido na Academia Real Irlandesa em 4 de novembro de 1833, no qual Hamilton preparou as bases para suas pesquisas com tripletos, é considerado por alguns matemáticos como uma contribuição mais importante do que a própria descoberta dos quatérnios. Podemos destacar neste artigo três contribuições realmente relevantes: uma visão moderna de número e estruturas algébricas (a idéia de corpo estava presente neste trabalho); a unificação dos conjuntos numéricos via a idéia de extensões (dos números inteiros positivos até os irracionais, passando pelos pares numéricos, tripletos até os quatérnios), presente nos trabalhos de Giuseppe Peano (1858-1932) [176] sobre a construção dos números inteiros ; a idéia de “cortes” (usado nas aproximações de irracionais via seqüência de racionais), presente nos trabalhos de Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916)[177] para definir com precisão os números irracionais.

Hamilton considerava que a descoberta dos quatérnios era a sua maior contribuição, tendo declarado inclusive que era comparável, em importância, com a descoberta do método dos fluxos de Sir Isaac Newton (1643-1727) e, por acreditar nisso, dedicou grande parte do seu tempo (os 22 anos restantes de vida) pesquisando aplicações para eles em dinâmica, astronomia e teoria ondulatória da luz.

---

[175] Em 1830 Peacock publicou *Treatise on Algebra* e De Morgan publicou *Trigonometry and Double Algebra* , numa tentativa de conferir a álgebra uma estruturação lógica nos moldes dos *Os Elementos* de Euclides.

[176] Em 1889 Peano publicou seus famosos axiomas, a partir dos quais definiu os números naturais em termos de conjuntos.

[177] Dedekind publicou em 1872 sua redefinição para números irracionais em termos de “cortes” no livro *Stetigkeit und Irrationale Zahlen*.

Em 1847 Hamilton introduziu o operador $\triangleleft = i\frac{d}{dx} + j\frac{d}{dy} + k\frac{d}{dz}$, que modernamente é chamado de nabla. O operador $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2$, de Pierre-Simon Laplace (1749-1827), que já era usado em problemas de física, e o operador de Hamilton, estão relacionados da seguinte maneira:

$$-\triangleleft^2 = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d}{dz}\right)^2 .$$

Peter Guthrie Tait (1831-1901), que foi um defensor e divulgador entusiasmado dos quatérnios, desenvolveu novos teoremas e aplicações físicas para o operador nabla, como por exemplo, o estudo das rotações de corpos rígidos, tensões homogêneas, efeitos de correntes elétricas sobre magnetos e o efeito entre correntes.

Outras teorias surgiram como desdobramentos da teoria dos quatérnios. Podemos citar como exemplos, a análise vetorial de Gibbs e o cálculo vetorial de Heaviside, cujas operações básicas,o produto escalar e vetorial, estão embutidas na definição da multiplicação de quatérnios.

Ao contrário das expectativas de Hamilton, a análise vetorial e o cálculo vetorial relegaram os quatérnios a um papel de menor destaque, mas modernamente estes tem sido bastante utilizados. Para citar apenas dois exemplos, os quatérnios foram utilizados em 1927 com as "variáveis spin" na teoria quântica de Wolfgang Pauli (1900-1958) e atualmente encontra muitas aplicações em computação gráfica.

Com a descoberta da álgebra não comutativa dos quatérnios, Hamilton mostrou a possibilidade de se construir álgebras consistentes mesmo que contrariando-se propriedades da álgebra dos inteiros. Segundo E. T. Bell e C. C. Macduffee[178], esta descoberta de Hamilton, que tanto contribuiu para o desenvolvimento da álgebra abstrata, é comparável à descoberta das geometrias não-euclidianas.

[178] Bell, [1937], p. 360 e Macduffee [1945], p. 28

A propósito da polêmica envolvendo as vantagens e desvantagens do uso dos quatérnios e da análise vetorial, em 1940 E. T. Whittaker disse que os quatérnios, devido ao seu caráter híbrido (escalar e vetorial), "poderiam vir a ser a expressão mais natural da mecânica quântica"[179].

Conforme ocorre com algumas importantes descobertas na matemática e em outras ciências, existe uma polêmica em relação a quem primeiro descobriu que as rotações no espaço (tri-dimensional) podem ser descritas pela multiplicação de objetos definidos convenientemente por uma quádrupla de números. Segundo Jeremy Gray[180], antes mesmo que Hamilton (1843), Gauss descobriu esse resultado em 1819 (mas só foi publicado em 1900) e Benjamin Olinde Rodrigues publicou esse mesmo resultado em 1840. Ambos, Gauss e Olinde Rodrigues, usaram matrizes (pode-se provar que tais matrizes são equivalentes aos quatérnios).

[179] Whitaker [1940], p. 158
[180] Gray [1993], p.89

Bibliografia

Altmann, Simon L.[1989], "Hamilton, Rodrigues, and the quaternion scandal", *Mathematics Magazine*, v. 62, N° 5, p. 291-308.

Altmann, Simon L. [1986], *Quaternions, and Double Groups*, Clarendon Press, Oxford.

Argand, Jean Robert [1881], *Imaginary Quantities*, translated into English by A. S. Hardy. New York: Van Nostrand.

Argand Jean Robert [1971], *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris Blanchard.

Bell, E. T. [1937], *Men of mathematics*, New York, Simon & Schuster.

Bellavitis,Giusto [1871], "Sul calcolo dei quaternioni", *Undecima Rivista di Giornali, Ven. 1st. Atti*, (2), 204.

Bourbaki, Nicolas [1960], *Elements of the History of Mathematics*, Springer

Boyer, C.B. [1974], *História da matemática*. Trad. E.F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücker.

Cajori F. [1912], *Historical note on the graphic representation of imaginaries before the time of Wessel*, Amer. Math. Mont.19 ,167-171.

Cartan, E. [1908], "les nombres complexes", *Encyclopédie des sciences mathématiques*, t. 1,vol. 1, fasc. 3.

Cayley, Arthur [1845], "On certain results relating to quaternions", *Philosophical Magazine* vol XXVI , p-141-145.

Cayley, Arthur. [1845], "On algebraical couples", *Phil. Mag.*, p.27,38-40 .

Cayley, Arthur [1846], "On the rotation of a solid round a fixed point", *Cambridge and Dublin Mathematical journal*, t.I ,p.167-173 et p.264-274.

Cayley, Arthur [1848], "On the application of quaternions to the theory of rotation", *The London Edinburgh and Dublin philosophical magazine*, t.XXXIII , p.196-200.

Cayley, Arthur [1895], "Coordinates versus quaternions", *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh*, t.XX ,p.271-275.

Crowe, Michael J. [1967], *A History of vector analysis: The Evolution of the Idea of a Vectorial System*, University of Notre Dame Press, London.

De Morgan, Augustus [1839], "On the Foundation of Algebra, n°I", *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, t.7 , p. 173-187.

De Morgan, Augustus [1842], “On the Foundation of Algebra n° II”, T*ransaction of the Cambridge Philosophical Society*, t.7 , p. 287-300.

De Morgan, Augustus [1844], “On the Foundation of Algebra n° IV, on Triple Algebra”, *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, t.8 , p. 241-254.

De Morgan, Augustus [1849], “On the Foundation of Algebra n° I”, *Transaction of the Cambridge Philosophical Society*, t.8 , p. 139-142.

De Morgan, Augustus [1849], *Trigonometry and Double Algebra,Londres: Taylor*, Walton & Maberly.

Flament,Dominique [2003], *Historie des nombres complexes – Entre algébre et géométrie*, CNRS ÉDITIONS, Paris

Flament,Dominique [2008], “L´algèbre comme science chez W.R.Hamilton: le recours au temps pur”, in *Revista Brasileira de História da Ciência*, vol 1 n°1, Junho de 2008, pp. 71-93.

Gillispie, Charles Coulston [1981], *Dictionary of Scientific Biography*, New York.

Gray,J.J. [1993], “Around and around: quaternions, rotations, and Olinde Rodrigues”, *Proceedings of the conference Nombre complexe et vecteur*, Paris, pp. 89-100.

Graves, Robert Perceval1 [975], *Life of SirWilliam Rowan Hamilton*, 3 vol., Dublin.

Hankins, T.L. [1980], “Sir William Rowan Hamilton”, Baltimore.

Hamilton, William Rowan [1837], “Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time”, *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 17, pp. 293-422.

Hamilton, William Rowan [1844], “Copy of a letter from Sir William R. Hamilton to John Graves”, *The London Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. xxv, pp. 489-95.

Hamilton, William Rowan [1844], “On a new Species of Imaginary Quantities connected with a theory of Quaternions”, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol.2, pp. 424-434.

Hamilton, William Rowan [1847], “On Quaternions”, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, vol.3, pp. 1-16.

Hamilton, William Rowan, [1848], “Researches respecting quaternions first series”, *Transactions of the Royal Irish Academy*, t.XXI , p.199-296.

Hamilton, William Rowan [1850], “On quaternions and the rotation of a solid body”, *Proccedings of the Royal Irish Academy*, t.IV , p.38-56.

Hamilton,William Rowan [1853], *Lectures on Quaternions*, Dublin: Hodges & Smith, Hamilton, William Rowan [1866], *Elements of Quaternions*, London.

Hankins, Thomas [1881], Sir William Rowan Hamilton, Baltimore.

Hawkes, Edwin Herbert [1901], “Note on Hamilton’s determination f irrational numbers”, *Bull. Amer. Math. Soc*., pp. 306-317.

Hendry, John [1984], “The evolution of Willian Rowan Hamilton’s view of algebra as the science of pure time”, *Stud. Hist. Phil.Sci.*, t.15-1 , p.63-81.

Joly, Charles Jasper [1905], *A Manual of Quaternions*, London: Macmillan and Co., 320 p.

Katz, Victor J. [1993], *A History of Mathematics (an introduction)*, University of the District of Columbia.

Koppelman, Elaine [1971], “The Calculus of Operations and the Rise of Abstract Álgebra”, *Archive for History of exact sciences*, t.8-3, pp. 155-242

Mac Duffee, Cyrus Colton [1945], “Algebra’s debt to Hamilton”, *Colletion of Papers in Memory of Sir William Rowan Hamilton*, pp. 25-35. New York.

Mac Cullagh, James [1844], “On the rotation of a solid body”, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, t.II , p.520-526.

Mac Farlane, Alexander [1893], *Vectors and quaternions*, Nature London 48,540-541.

Manheim, Jerome [1964], *Genesis of Point Set Topology*, Oxford.

Novy, Lubos [1973], *Origins of Modern Algebra*, Leiden: Noordhoff International Pub.

Ohrstrom, Peter [1985], “W.R. Hamilton’s view of Algebra as the Science of Pure Time and his Revision to this View”, *Historia Mathematica*, t.12 , p.45-55.

Peacock, George [1834], “Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Anlysis”, *Report of the British Association for the Advancement of Science*, 185-352.

Sinegre, Lug [1994], *Au delà du temps Pur: aspects géométriques, constructions et pratiques dans l’oeuvre algébrique de Sir Williuam Rowan Hamilton*, Université de Paris.

Struik, D.J. [1989], *História concisa das matemáticas*, Trad. J.C. Santos Guerreiro. Lisboa, Gradiva.

Synge, John-Lighton [1945], “The life and the early work of Sir R.W.Hamilton”, *Scripta. Math. Studies* , N° 2 , p.13-24.

Tait, Peter Guthrie [1890], *An Elementary Treatise on Quaternions*, 3rd Ed., Cambridge University Press.

Warren, John [1828], *Geometrical Representation of the Square Roots of Negative Quantities*, printed at Cambridge.

Wessel, Caspar [1999], “On the Analytical Representation of Direction”, *The Royal Danish Academy of Sciences and Letters*, p.9-61.

Whittaker, E.T.,1940,The Hamiltonian Revival, *Mathematical Gazette*, 24, 158.

Whittaker, E.T. [1943], “The sequence of ideas in the discovery of quaternions”, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 50, section A, n°6, 93-98.

Winterbourne, Anthony [1982], “Algebra and Pure Time: Hamilton’s Affinity with Kant”, *Historia Mathematic*a, t.9 , 195-200.