Universidade Federal do Rio de Janeiro

A *INTRODUÇÃO À ARTE ANALÍTICA* DE FRANÇOIS VIÈTE: COMENTÁRIOS E TRADUÇÃO

Bruna Moustapha Corrêa

2008

A *INTRODUÇÃO À ARTE ANALÍTICA* DE FRANÇOIS VIÈTE: COMENTÁRIOS E TRADUÇÃO

Bruna Moustapha Corrêa

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Tatiana Roque

Aprovada por:

____

Tatiana Roque, IM-UFRJ

____

Gérard Emile Grimberg, IM-UFRJ

____

João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho, PUC-RJ

____

Carlos Eduardo Mathias Motta, UFRRJ

Rio de Janeiro

Dezembro de 2008

C824i

Corrêa, Bruna Moustapha.
A introdução à arte analítica de François Viète: comentários e tradução / Bruna Moustapha Corrêa. — Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2009.
131f. : il..; 30cm.
Dissertação (mestrado) – UFRJ/IM. Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática, 2009.
Orientador: Tatiana Roque.
Referências: f.88-9
1. Matemática-História-Tese.2. Viète, François, 1540-1603. I. Roque, Tatiana Marins. II.Universidade Federal do Rio de Janeiro.Instituto de Matemática. III.Título.

Agradecimentos

Aos professores da Universidade Federal Fluminense que incentivaram a continuação dos meus estudos direta ou indiretamente – Dinamérico Pombo, Jorge Delgado, Maria Lúcia Villela, Marina Tebet, Paulo Trales, Renata Del-Vecchio, Ricardo Apolaya, Wanderley Rezende e muitos outros. Especialmente a Pierre Pétin, por ter me apoiado no estudo de História da Matemática, por ter me "apresentado" a minha orientadora e pela participação na minha qualificação; e a Ana Kaleff pela esperança depositada, por um jantar e por muitas conversas.

A todos os professores, funcionários e idealizadores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática que viabilizaram a criação de um programa de mestrado nessa área, possibilitando a realização de um sonho.

A todos os amigos que ganhei com esse mestrado, exemplos de dedicação e força de vontade, que me mostraram o verdadeiro sentido de uma turma. Carinhosamente a Malu, por ter me "adotado" e por sempre ter me incentivado; a Ulício, por uma paixão repentina e por ser meu companheiro de orientação; a Lucíola, por todas as confidências trocadas; e a Victor Paixão, também pelas confidências, mas, sobretudo, pela ajuda prestada e pelas dicas oferecidas nos momentos de desespero.

À minha orientadora Tatiana Roque por ter aberto as portas para o meu futuro profissional e por ter me ajudado e apoiado nos momentos decisivos da realização desta dissertação.

Às minhas "chefes" queridas – Eliane, Kátia e Regina do Lante e Beta e Bia do Cepar – que entenderam as minhas ausências e me apoiaram e me incentivaram na conclusão deste curso.

Aos amigos de sempre pela amizade, pelas orações, pela ajuda e por compreenderem a minha escolha e todas as suas conseqüências.

À Renata, que, em alguns momentos, me ajudou durante a pesquisa para esta dissertação.

E sobretudo a Sandra e Paulo (Dimim e Paulete para mim) por terem me feito do jeito que sou e por todo o apoio de agora e de sempre.

[...] à peine les avais-je feuilletés que j'y reconnaissais la main du maître et là où je ne croyais trouver l'algèbre qu'à l'état d'ébauche, je rencontrai une science créée de toutes pièces et s'élevant du première jet à une hauteur inespérée.

Frédéric Ritter

Frédéric Ritter consagrou a sua longa carreira à reunião e tradução das obras de Viète (Revista François Viète, 7, 2004, p. 11)

Resumo da Dissertação de Mestrado entregue ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática (M.Sc.).

A *INTRODUÇÃO À ARTE ANALÍTICA* DE FRANÇOIS VIÈTE:

COMENTÁRIOS E TRADUÇÃO

Bruna Moustapha Corrêa

Dezembro de 2008

Orientador: Tatiana Roque

Programa: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

François Viète (1540-1603), conhecido entre os historiadores da matemática como o pai da álgebra moderna, estudava matemática no seu tempo livre. No entanto, ele é o responsável por uma invenção fundamental, que marcou o início da ciência moderna. Na tentativa de atender aos padrões de exatidão vigentes no final do século XVI, Viète, em uma de suas obras mais conhecidas, *Introdução a Arte Analítica* (1591), propôs de maneira axiomática o uso de procedimentos algébricos, aliado ao método analítico, para resolver qualquer tipo de problema. Nesta dissertação, veremos quais as inovações deste trabalho em relação à arte analítica usada pelos gregos e em relação à álgebra inventada pelos árabes. Mostraremos, assim, como a sua *Introdução a Arte Analítica* apresentou um novo método que permitia resolver, com elegância e rigor, todos os tipos de problemas.

Abstract of Dissertation presented to Institute of Mathematics of the Federal University of the Rio de Janeiro (IM-UFRJ) as part of the necessary requirements for getting the Master's degree in Teaching of Mathematics (M.Sc.)

FRANÇOIS VIÈTE'S *INTRODUCTION TO THE ANALYTIC ART*:

COMMENTS AND TRANSLATION

Bruna Moustapha Corrêa

2008 December

Advisor: Tatiana Roque

Department: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

François Viète (1540-1603), known among historians of mathematics as the father of modern algebra, studied mathematics in his spare time. However, he is responsible for a crucial invention that marked the beginning of modern science. In an attempt to meet the prevailing standards of exactness at the end of the sixteenth century, Viète, in one of his best known works, *Introduction to the Analytic Art* (1591), proposed, in an axiomatic way, the use of algebraic procedures, linked to the analytical method, to solve any kind of problem. In this research, we will see which are the innovations related to the analytic art used by the Greeks and to the algebra invented by the Arabs. We will show, thus, how his *Introduction to the Analytic Art* presented a new method to solve, with elegance and rigor, all kinds of problems

Sumário

1 Introdução

1.1 A Escolha do Tema

A Matemática é uma ciência exata. Porém ela só se torna exata quando está pronta e, para uma teoria matemática ficar pronta, muitas conjecturas são feitas, muitas discussões acontecem, muitas teses são confirmadas e outras refutadas. O estudo de todas essas etapas é muito importante, pois pode revelar aspectos intrínsecos de uma teoria, que aos olhos de pessoas mais treinadas, parecem simples, mas que podem se constituir em verdadeiros obstáculos para os principiantes. A História da Matemática se dedica ao estudo do desenvolvimento da Matemática e pode revelar muitos segredos ou fornecer pistas para minimizar a aversão que muitas pessoas têm em relação ao estudo da Matemática.

A exatidão da Matemática está associada, entre outros fatores, à abstração. Este aspecto causa, freqüentemente, estranhamento e repulsa, fazendo com que muitas pessoas se afastem da Matemática. Porém, costumamos ouvir que a Matemática é importante justamente por desenvolver o raciocínio e a capacidade de abstração. Por outro lado, escutamos freqüentemente o desejo das pessoas em tornar a Matemática mais concreta. Instaura-se aqui um paradoxo: como tornar concreta uma ciência que, por natureza, é abstrata?

Acreditamos que, para minimizar a distância entre o abstrato e o concreto, ao se ensinar Matemática, é preciso mostrar que a Matemática é um conhecimento que se desenvolveu (e se desenvolve até hoje) a partir de problemas e de questões que certas pessoas, em determinado momento, quiseram entender. O estudo da História da Matemática, quando feito de maneira adequada, pode trazer benefícios para o ensino da Matemática, principalmente quando a Matemática passa a ser aprendida a partir dos problemas que a motivaram.

A parir do momento em que se admite que o estudo da História da Matemática é importante por aproximar as pessoas das origens da Matemática e dos seus questionamentos iniciais, uma outra questão é levantada: como estudar a História da Matemática? A maneira de se fazer, bem como de se estudar Matemática, se modificou muito ao longo dos anos. Estudar História da Matemática é analisar a Matemática no momento da sua criação, o que pode significar uma distância de mais de 2000 anos.

Por esta razão, ao se estudar a sua história, é preciso estar atento às diferentes formas de fazer Matemática. Devemos evitar uma postura anacrônica, ou seja, não podemos cometer o erro de estudar o passado com os olhos do presente. Porém, sabemos que é impossível reproduzir argumentos matemáticos de tempos atrás exatamente como eles eram. As depredações do tempo, por exemplo, impedem que os originais sejam consultados. Além disso, o leitor moderno não tem a destreza e o treinamento dos estudiosos para os quais os textos antigos foram originalmente escritos; ele tem, ao mesmo tempo, muito e pouco conhecimento matemático. Por um lado, tem acesso a teorias modernas que, em geral, revelam facilmente passagens que permaneciam ocultas para os matemáticos antigos. Mas, por outro lado, não tem certas habilidades comuns entre os estudiosos de determinada época, como, por exemplo, a familiaridade com autores clássicos.

Como Bos afirma em (BOS, 2001, p.17-18), ao se estudar um texto original de História da Matemática, pode ser necessário adaptar o argumento matemático empregado pelo autor para que o conteúdo seja mais bem compreendido por um leitor moderno. O leitor deve poder distinguir claramente o conteúdo do trabalho original daquilo que foi adicionado pelo tradutor ou comentador.

Nesta dissertação, estudamos a obra *In Artem Analyticem Isagoge*[1] (*Introdução à Arte Analítica*) de François Viète (1540 - 1603). Na verdade, nos servimos de suas diversas traduções para o francês, mencionadas mais adiante. Com o objetivo de apresentar um trabalho fidedigno, optamos por consultar o texto da *Isagoge* e, assim, o trabalho de tradução para o português acabou acontecendo de maneira natural. Entretanto, a proposta desta dissertação não é apenas a apresentação de uma tradução. Pretendemos mostrar o que Viète fez de inovador que o faz ser considerado, entre os historiadores da Matemática, como o pai da álgebra moderna. Para tanto, é preciso entender qual era o contexto no qual Viète estava inserido e que tipo de preocupações envolviam as suas pesquisas.

Por que traduzir e comentar a *Introdução à Arte Analítica* de Viète? Como dissemos anteriormente, ao se estudar História da Matemática, é preciso estar atento à maneira pela qual um certo tema foi estudado pela primeira vez, ou seja, no momento da sua criação. Uma vez que não existe tradução para o português da *Isagoge*, esta já seria uma ótima justificativa para a apresentação da tradução.

[1] Nesta dissertação utilizaremos a expressão “*Isagoge*”, que significa “introdução”, para nos referirmos ao texto de Viète *Introdução à Arte Analítica*.

Um outro fator decisivo para escolha do tema foi o fato de que existem poucas fontes de consulta sobre Viète em português. Aliás, na pesquisa para esta dissertação esbarramos com a falta de material adequado para consulta. Nosso tema, a introdução da notação algébrica na Matemática, não foi suficientemente pesquisado no Brasil, apesar do uso desta notação ser uma das características principais da Matemática atual. Quando buscamos fontes de consulta para fazer uma comparação entre a novidade introduzida por Viète e o que era feito antes dele, tivemos bastante dificuldade, pois muitos dos textos usados no ensino de História da Matemática são escritos com a notação moderna.

Nosso objetivo é abordar aspectos intrínsecos ao surgimento da álgebra a partir da comparação entre fazeres diferentes, antes de Viète. Entendendo a maneira que os procedimentos algébricos surgiram poderemos entender – e conseqüentemente minimizar – as dificuldades apresentadas pelos alunos ao utilizarem a álgebra.

O nosso objetivo nesta dissertação é apresentar um trabalho em História da Matemática sobre a introdução da notação algébrica e de procedimentos analíticos na resolução de problemas. Nossa estratégia será mostrar primeiramente a realidade na qual o autor se encontrava, culminando com a apresentação das conseqüências causadas pela inovação proposta por Viète na Matemática subseqüente.

Para nós, o entendimento do contexto no qual a obra de Viète está inserida engloba não apenas o momento vivido por ele, mas também dois momentos anteriores que o influenciaram de maneira decisiva, a saber, a maneira pela qual os antigos resolviam problemas matemáticos e a nova ferramenta inventada pelos árabes no século IX. A dissertação se encerra com alguns comentários sobre as inovações propostas por Viète em uma de suas mais famosas obras, *A Introdução à Arte Analítica*.

Para realizar esta dissertação, o primeiro texto consultado e estudado foi a tradução para o francês de 1630 da *Isagoge*. Para a compreensão do trabalho de Viète utilizamos alguns textos que comentam a sua obra como, por exemplo, (BOS, 2001) e (CHARBONNEAU, in BARBIN et al., 2005), bem como a tradução para o inglês do texto original (WITMER, 1983). Outros textos como as tradução para o francês de (RITTER, 2004)[2] e (VAULÉZARD, 1630) e (BARBIN et al., 2005) e (PANZA, 2007) ajudaram posteriormente na conclusão deste trabalho.

[2] A tradução de Ritter foi feita em 1868 e foi retomada em 2004 na Revista François Viète, nº7.

1.2 François Viète – um Matemático da Renascença

François Viète, um francês nascido em 1540, não é um matemático por formação. Filho de um advogado, Viète se formou em Direito na Universidade de Poitiers e após a conclusão dos seus estudos, começou a praticar a sua profissão com bastante êxito, principalmente resolvendo problemas legais de famílias francesas de renome. Esta aproximação entre Viète e famílias influentes acabou conduzindo-o a cargos políticos importantes na corte francesa.

Viète estudava Matemática por prazer no pouco tempo livre que lhe restava. Essa sua relação com a Matemática rendeu-lhe cargos de confiança nas cortes de Henrique III e Henrique IV. Henrique III, por exemplo, pedia conselhos secretos para Viète e o procurava para missões confidenciais. Além disso, o rei confiava a Viète a tarefa de decifrar mensagens transmitidas entre os seus inimigos. Depois da morte de Henrique III, Viète tornou-se um dos homens mais influentes na corte de Henrique IV.

Os trabalhos realizados no seu tempo livre renderam a Viète um título entre os matemáticos: o pai da álgebra moderna. Este título está associado ao desenvolvimento de uma invenção que marcou o início da ciência moderna. Na tentativa de atender aos padrões de exatidão[3] vigentes no final do século XVI, Viète propôs o uso de procedimentos algébricos aliados ao método analítico para resolver qualquer tipo de problema, o que constituiu uma grande inovação na Matemática.

Na próxima seção, teremos a oportunidade de falar um pouco sobre a questão da exatidão que permeia toda a História da Matemática e, no capítulo 4, teceremos observações sobre a inovação de Viète. Por ora, gostaríamos de falar sobre outras realizações matemáticas atribuídas a Viète. Ele é conhecido: a) na Astronomia, pela sua *Canon Mathematicus*, uma coletânea de tabelas trigonométricas; b) na Criptografia, por ter decifrado cartas famosas tidas como indecifráveis; c) na história do calendário, por ter proposto um calendário gregoriano; d) na história do número *pi* (π), por ter apresentado uma aproximação para π a partir de um produto infinito pela primeira vez; e) por suas técnicas de resolução numérica de equações; f) na Geometria, por ter reconstruído a solução perdida de um problema de Apolônio

[3] Na próxima seção comentaremos a importância do entendimento da exatidão matemática e as suas conseqüências para o desenvolvimento da Matemática.

(construção de um círculo tangente a três círculos dados); g) na Álgebra, por ter explicitado as relações entre os coeficientes de uma equação polinomial e suas raízes.[4]

A ambição de Viète era grande. Porém seus trabalhos poderiam ter marcado de modo mais consistente a História da Matemática, se ele tivesse tido tempo para editá-los. Viète estudava Matemática no seu tempo livre e, além disso, alguns dos seus trabalhos são póstumos (BARBIN & BOYÉ, 2005, p.4-5).

Fica claro, portanto, que mesmo não tendo a Matemática como profissão, Viète realizou diversos estudos em diferentes ramos desta ciência. A seguir, apresentaremos de forma breve o contexto matemático do final do século XVI.

1.3 Contextualização Histórica

Todos sabemos que a Matemática é uma ciência exata, mas o que exatidão matemática significa? Antes de falarmos do período compreendido entre o Renascimento e o Iluminismo, entre os anos de 1550 e 1750 – período no qual os trabalhos de Viète estão inseridos, é interessante tecermos algumas observações sobre o significado da "exatidão matemática".

Para entendermos esta questão, é preciso saber de qual matemática estamos falando. A noção de exatidão está associada à matemática que está sendo produzida em determinado momento. Assim, considerando a matemática grega, por exemplo, que era essencialmente geométrica, a solução de um problema era considerada "exata" quando podia ser construída pelos instrumentos euclidianos, a régua e o compasso (BOS, 2001, p.3).

Em cada momento da História uma noção de exatidão deve ser considerada. Hoje em dia, sabemos que existem varias soluções para um mesmo problema e cada solução considera um padrão de exatidão. Queremos dizer, por exemplo, que a solução de um problema geométrico pode ser apresentada nos moldes gregos, exibindo uma construção com régua e compasso,

[4] As observações sobre a vida de Viète foram feitas baseadas em (BARBIN et al., 2005) e (WITMER, 1983) e nos seguintes sites: a) http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDP=296&IDD=0 (acesso em 22/08/08); b) http://www.dma.ens.fr/culturemath/ (acesso em 22/08/08); c) http://www.france-pittoresque.com/perso/44.htm (acesso em 22/08/08); d) http://www.universalis.fr/encyclopedie/S182651/VIETE_F.htm (acesso em 22/08/08); e) http://encyclopedie.snyke.com/articles/francois_viete.html (acesso em 22/08/08); f) http://es.geocities.com/christianjqp1/especial/biografia/viete1.htm (acesso em 12/12/07).

mas também pode ser exibida uma solução algébrica que utiliza uma figura que serve apenas para indicar quais grandezas estão sendo designadas por qual letra. Mesmo sendo diferentes e utilizando ramos diferentes da Matemática, ambas são consideradas corretas, exatas. Entretanto, houve momentos nos quais essa diversidade de soluções não era aceita. Como poderemos constatar, em alguns períodos da história, técnicas de soluções que hoje são consideradas exatas, foram rejeitadas. Para que fossem aceitas foi preciso muitas vezes apresentá-la em um padrão condizente com o vigente na época.

No final do século XVI, a álgebra já tinha sido introduzida na Matemática pelo importante trabalho realizado por matemáticos árabes como Al-Khwarizmi e Omar Khayyam. Durante algum tempo a resolução de problemas através de métodos algébricos foi um dos desafios mais importantes da Matemática. Dessa forma, podemos dizer que a produção matemática deste período era influenciada por esses novos procedimentos inventados pelos árabes. Entretanto, com a nova publicação da *Coleção Matemática* de Pappus e da *Aritmética* de Diofanto, a matemática grega voltou à tona. Os critérios de exatidão relacionados ao padrão grego, associados às construções geométricas com régua e compasso, tornaram-se ainda mais presentes.

Os próprios gregos conheciam outras maneiras de resolver problemas sem utilizar a régua e o compasso. Na sua *Coleção*, Pappus[5] (que viveu perto do final do século III d.C.) estudou questões geométricas de acordo com o padrão euclidiano, ou seja, resolvendo problemas através de construções com régua e compasso. Já Diofanto (que provavelmente viveu no início do século III d.C.) estudou na sua *Aritmética* problemas que são resolvidos com o que hoje chamamos de "álgebra sincopada", por utilizar uma representação não completamente simbólica. Isto quer dizer que os estudos de Diofanto de certa forma estavam distantes da geometria euclidiana.[6]

A reedição destes trabalhos significou uma volta ao passado e, neste caso, uma volta ao padrão grego. Já sabemos que entre a data em que a *Coleção* e a *Aritmética* foram escritas e a data desta nova publicação houve o trabalho dos árabes que desenvolveram uma matemática

[5] "A *Coleção Matemática* de Pappus é verdadeiramente uma mina rica em pepitas geométricas. Comparações, quando possíveis, têm mostrado que os comentários históricos contidos no trabalho são dignos de confiança. Devemos muito de nosso conhecimento da geometria grega a esse tratado, com suas citações ou referências a trabalhos de mais do que trinta matemáticos da Antiguidade. Poderíamos chamá-lo de réquiem ou canto do cisne da geometria grega" (EVES, 2002, p. 212).

[6] Na História, em geral, Diofanto é lembrado por ter dado os primeiros passos rumo a uma notação algébrica. Veremos no capítulo 4 que a *Aritmética* de Diofanto influenciou bastante os trabalhos de Viète.

que já podemos chamar de algébrica. Ainda assim, o peso dos *Elementos* de Euclides era grande e, por esta razão, a geometria não deixou de ser soberana. A álgebra dos árabes era utilizada como ferramenta para a solução de problemas concretos ou de problemas geométricos. As ferramentas algébricas não estavam totalmente dentro dos padrões gregos de exatidão e as soluções obtidas por esta via não podiam ser consideradas "exatas", já que não eram construídas. Entretanto, não se podia continuar ignorando a sua importância, visto que eram de grande valia para a resolução de problemas matemáticos.

Estamos, portanto, diante de uma situação na qual a álgebra tornava-se, cada vez mais, uma ferramenta poderosa, que podia ajudar na solução de problemas cada vez mais numerosos, além de propor também novas questões. Por esta razão, foi preciso rever os padrões de exatidão em vigor. O novo padrão de exatidão deveria estabelecer quais seriam os procedimentos aceitáveis dentro da prática de resolução de problemas geométricos. É importante observar que, mesmo que outros procedimentos passassem a ser aceitos pela comunidade matemática, os problemas para os quais eles iriam servir ainda eram, em sua maioria, geométricos. O método analítico e os procedimentos algébricos foram fundados inicialmente para servir à geometria. Queremos dizer, para resumir, que Viète fundou um novo ramo da Matemática, a Análise, na busca de novos procedimentos para servir à Geometria, que até este momento era predominantemente sintética[7].

Mas, a todo o momento, a questão da legitimidade dos procedimentos propostos era trazida à tona novamente. Sendo assim, ao se apresentar um novo método, era essencial fornecer uma boa justificativa, pois, caso contrário, o procedimento poderia ser ignorado. É justamente neste ponto que se introduz a grande inovação de Viète. A maneira que ele encontrou para legitimar seus procedimentos foi aceitar o critério de exatidão como estando ainda associado à construção. A diferença estava no fato de considerar o seu método como primeiros princípios, propondo com isso novas ferramentas de construção. Uma vez que os novos postulados levavam-no a resolver mais problemas geométricos, eles deveriam ser admitidos como princípios da Matemática.

No final do século XVI (período no qual Viète desenvolveu seus trabalhos), o padrão grego, ou seja, aquele proposto nos *Elementos* de Euclides ainda ditava as regras matemáticas. A matemática exata era, portanto, aquela apresentada na forma axiomático-dedutiva. Mesmo

[7] No capítulo 2, apresentaremos a diferença entre os procedimentos analítico e sintético.

sendo uma ferramenta poderosa, a álgebra não se enquadrava nesse padrão, sendo rejeitada pelos estudiosos. Mostraremos, nesta dissertação, como Viète apresentou a sua arte analítica propiciando que a álgebra fosse aceita como ferramenta legítima na resolução de problemas.

1.4 Organização da Dissertação

Para entendermos o trabalho realizado por Viète é interessante compará-lo com que já tinha sido feito antes dele. O capítulo 2 mostrará de que maneira os matemáticos e filósofos antigos entendiam o método de análise, método este que foi renovado por Viète, no final do século XVI, para ser aplicado à solução de um problema qualquer. No capítulo 3, veremos como os matemáticos árabes utilizavam procedimentos algébricos para resolver problemas práticos, mas também problemas numéricos e geométricos. Finalmente, no capítulo 4, analisaremos o que Viète propõe na sua *Isagoge*, mostrando como esta obra inovou o fazer matemático da época. Apresentaremos, ainda, dois problemas estudados por Viète a fim de entender de que maneira ele mesmo utilizava a sua arte analítica para resolver problemas. O capítulo 5 concluirá a dissertação, indicando algumas pistas para compreendermos de que modo este trabalho de Viète influenciou a Matemática subseqüente. Uma proposta de tradução da *Introdução à Arte Analítica*, bem como do *Primeiro Livro das Zetéticas* de Viète, será apresentada como Anexo.

2 A Análise na Tradição Grega

2.1 Análise X Síntese

Atualmente, a análise e a síntese são entendidas como procedimentos independentes. Em geral, associamos a síntese a um raciocínio direto e a análise a um raciocínio ao inverso. Seguindo essa linha, a análise é entendida como uma decomposição da verdade que procuramos em termos mais simples enquanto que a síntese é associada a uma recomposição de termos simples para encontrar a verdade procurada.

Entretanto, esta concepção independente de análise e síntese nem sempre foi verdadeira. Pretendemos com este capítulo esclarecer de que maneira os antigos, principalmente os matemáticos e filósofos gregos, entendiam os procedimentos de análise e síntese.

Como é sabido, não temos acesso às obras clássicas gregas, devido, por exemplo, às depredações do tempo. Como já foi dito, Pappus, um matemático competente a sua época, é um dos principais responsáveis pelo nosso conhecimento dos estudos realizados pelos gregos. A *Coleção* é um dos seus trabalhos mais conhecido e estudado ao longo da História da Matemática. Como constataremos na citação a seguir, Pappus era um profundo conhecedor do método de análise e síntese. Além disso, com os exemplos que aparecerão ao longo deste capítulo, perceberemos que Pappus também foi um praticante deste método.

Pappus inicia o Livro VII da *Coleção* falando explicitamente da análise e da síntese:

> *O chamado 'Tesouro da Análise'[8], meu querido Hermodorus, é, em suma, um organismo especial de doutrinas equipado para o uso daqueles que, depois de passarem pelos elementos habituais, desejam obter o poder de resolverem problemas teoréticos, os quais são definidos para eles, e apenas para este propósito é útil. É o trabalho de três homens, Euclides o autor dos Elementos, Apolônio de Perga, e Aristeu o Elder, e prossegue com o método de análise e síntese.*
>
> *Agora, a análise é o caminho do que se está procurando, como se estivesse estabelecido, através de suas concomitâncias [conseqüências] em direção a algo que é estabelecido pela síntese. Isto quer dizer que, na análise, assumimos o que é procurado como se já tivesse sido encontrado e olhamos para aquilo de que isto segue e, em seguida, para o que vem antes, até que, regressando desta maneira, encontremos algo que já seja conhecido, ou que*

---

[8] "O *Tesouro da Análise*, uma coleção que, à maneira dos *Elementos* de Euclides, pretende abarcar o material que se considerava essencial como bagagem do matemático profissional" (EVES, 2002, p.210).

> *ocupe a posição de primeiro princípio. Chamamos este tipo de método de ‘análise’, significando solução para trás. Na síntese, ao contrário, assumimos o que foi obtido por último na análise como já tendo sido estabelecido e, colocando agora na ordem natural, como precedentes, o que antes seguia da assunção inicial; adequando-os uns aos outros alcançamos o fim da construção do que era procurado. Isto é o que chamamos de ‘síntese’* (PAPPUS apud HINTIKKA & REMES, 1974, p. 8-9, tradução nossa)[9].

Fica claro, portanto, que a análise e a síntese são procedimentos complementares, ou seja, de acordo com Pappus, a análise deveria ser completada pela síntese. Por outro lado, analisando esta passagem e confrontando-a com a noção geral atual de análise e síntese apresentada anteriormente, percebemos que a noção moderna está de acordo com a noção pappusiana. Afinal, de acordo com a citação, a análise é uma “*solução para trás*”, enquanto a síntese organiza os fatos na “*ordem natural*”. Sendo assim, é correto afirmar que na análise assumimos o que está sendo procurado e buscando de onde esta afirmação vem, encontramos um fato já conhecido, isto é, um fato cuja verdade já seja estabelecida. Já na síntese, devemos assumir o que foi obtido por último na análise e prosseguindo na ordem natural alcançamos o que era procurado.

Não resta dúvida, portanto, de que a análise e a síntese diferem uma da outra com respeito ao sentido da argumentação tanto para Pappus quanto de acordo com a noção moderna. O que deve ficar claro, entretanto, é que para Pappus e, portanto, para os antigos, a análise e a síntese formam um único argumento e, por esta razão, não devem ser consideradas isoladamente.

2.1.1 Dois Tipos de Análise

Dando seqüência, Pappus prossegue destacando que:

> *Agora a análise é de dois tipos. Uma delas procura pela verdade e é chamada de ‘teorética’. A outra serve para realizar o que era desejado de se fazer e é chamada ‘problemática’. No caso da análise teorética, assumimos*

[9] Antes que observações sobre o significado de análise e síntese sejam tecidas, é importante observar que optamos por seguir a tradução de Hintikka e Remes, pois a julgamos mais atenta a um detalhe que causa algumas dúvidas na interpretação destes conceitos. Estes autores optaram por usar a palavra “concomitância” no lugar de “conseqüência”. Portanto, onde em geral se lê “*a análise é o caminho do que se está procurando, como se estivesse estabelecido, através de suas **conseqüências** em direção a algo que é estabelecido pela síntese*”, escrevermos “*a análise é o caminho do que se está procurando, como se estivesse estabelecido, através de suas **concomitâncias** em direção a algo que é estabelecido pela síntese*”. Mais a frente teremos a oportunidade de discutir esta escolha.

> *o que é procurado como um fato verdadeiro; e depois, avançamos através de suas concomitâncias [conseqüências], como se elas fossem verdades de acordo com a hipótese, até algo estabelecido. Se isso que foi estabelecido for verdadeiro, então aquilo que era procurado também será verdadeiro, e a sua prova é o inverso da análise; mas se encontrarmos algo que é estabelecido como sendo falso então, aquilo que era procurado também será falso. No caso da análise problemática, assumimos o desejado como algo conhecido e, depois, procedemos através das suas concomitâncias [conseqüências], como se fossem verdadeiras, até algo estabelecido. Se a coisa estabelecida é possível e pode ser obtida, que é o que os matemáticos chamam de 'dado', o procurado também será possível de se obter e, mais uma vez, a prova será o inverso da análise; mas se encontrarmos alguma coisa que é impossível de ser estabelecida, o problema também será impossível* (PAPPUS apud HINTIKKA & REMES, 1974, p. 9-10, tradução nossa).

Sendo assim, a análise clássica pode ser considerada como um procedimento para a construção da solução de um problema (análise problemática) ou como um procedimento para a prova de um fato (análise teorética).

Podemos considerar, portanto, que, na geometria clássica, o que é de fato procurado na solução de um problema é um objeto satisfazendo certa condição. Este objeto é considerado encontrado quando uma solução apropriada é exibida. Assim, a análise problemática deveria começar com a suposição de que tal objeto esteja dado e proceder em direção à afirmação de que outros objetos, que estão dados ou estabelecidos como impossíveis, estejam dados.

Por outro lado, o que é procurado na prova de um teorema, por exemplo, é a veracidade ou a falsidade de uma afirmação. Esta afirmação é considerada estabelecida quando ela, ou a sua negação, for deduzida de outras afirmações cuja verdade já tenha sido estabelecida. Daí, a análise teorética deveria começar pela suposição da verdade da primeira afirmação e proceder até a afirmação da verdade de outras afirmações cujo valor de verdade já seja conhecido.

Em ambos os casos, uma seqüência de implicações é realizada chegando a algo previamente estabelecido. É, portanto, necessário observar a veracidade deste fato. Neste momento, o conceito de "dado" tem um papel central, uma vez que para saber se a prova ou a construção serão possíveis de se realizarem é preciso saber o que foi dado diretamente e o que **pode** ser obtido através dos dados do problema ou do teorema.

Nesse sentido, o livro *Data* de Euclides tem um papel fundamental. Neste compêndio, bem menos conhecido que os *Elementos*, Euclides apresenta as proposições de maneira muito objetiva, facilitando e encurtando o processo de análise. Mais a frete na seção 2.3.2, teremos a oportunidade de tecer mais comentários sobre este compêndio. Isso será deixado para mais tarde, pois as proposições do *Data* estão mais relacionadas a resolução de problemas.

Por ora, entretanto, é preciso que fique claro que em ambos os casos teorético e problemático, a análise era realizada levando-se em consideração o que podia ser realizado a partir dos dados do problema. Ou seja, quando um problema era suposto resolvido era importante que se ponderassem todos os fatos importantes para que esse problema fosse realizado. Em outras palavras, era preciso analisar a hipótese do problema, confrontando-a com a solução suposta resolvida para que se pudesse perceber o que seria possível de se realizar diretamente, a partir dos dados, o que precisaria de alguns passos auxiliares e o que precisaria de mais atenção, ou seja, o que precisaria efetivamente ser provado.

"*Existe uma passagem em Aristóteles que parece dizer que uma vez tendo realizado as construções corretas, o teorema em questão é óbvio*" (HINTIKKA & REMES, 1974, p. 2, tradução nossa). Sendo assim, no que se refere às figuras geométricas, é importante observar que a análise terá sucesso apenas se, além de assumir a verdade do resultado desejado, realiza uma seqüência suficiente de construções auxiliares na figura de acordo com a qual a prova será realizada. Dessa forma, de acordo com Aristóteles ficaria evidente a resolução do problema. Estas construções são indispensáveis, uma vez que na geometria elementar uma construção auxiliar vai além da explicação do resultado desejado de acordo com a figura (HINTIKKA & REMES, 1974, p.2).

Portanto, é correto afirmar que a essência do método de análise para os antigos consiste nas intercalações e interdependências entre as partes de uma figura. Nesse sentido, as construções auxiliares têm um papel fundamental: são elas as responsáveis pelas intercalações e interdependências das partes da figura relevante para a resolução do problema. A necessidade dos passos auxiliares está relacionada ao fato da figura relevante para a constatação do resultado desejado não ser exatamente aquela dada pelo enunciado do problema. Esta figura seria obtida através da configuração obtida a partir dos dados do enunciado aperfeiçoada por construções auxiliares adequadas (HINTIKKA & REMES, 1974, p. 4)[10].

Dessa forma, não resta dúvida de que o método de análise e síntese era muito importante na geometria grega, uma vez que, como mostramos, a observação de uma figura que realiza o

[10] Tudo que foi mostrado até agora está relacionado à Geometria. No caso de um tratamento alheio à Geometria, deveríamos também considerar características auxiliares que desenvolveriam o mesmo papel das construções auxiliares.

problema era o ponto crucial para a resolução efetiva do problema. Entretanto, os matemáticos e filósofos gregos parecem ser reticentes quanto à natureza deste método e, por isso, acredita-se que eles omitiam a parte referente à análise das resoluções dos problemas (HINTIKKA & REMES, 1974, p. 7). Dessa forma, podemos considerar que para os antigos a análise era, sobretudo, um método de descoberta e não um método de prova. Talvez, por esta razão, encontramos tanta dificuldade em encontrar uma discussão explícita sobre o método de análise entre os matemáticos e filósofos gregos (HINTIKKA & REMES, 1974, p. 7). Entretanto, como já enfatizamos no início deste capítulo, Pappus é uma fonte bastante segura para basearmos o nosso estudo sobre a prática de resolução de problemas pelos antigos.

2.2 O Método de Análise e Síntese

Como já falamos, é comum encontrarmos discussões sobre análise e síntese considerando-as como argumentos distintos e independentes. Atualmente, esta concepção está correta, entretanto, um estudo preocupado excessivamente com o aspecto direcional da análise e da síntese acabaria conduzindo para o entendimento da análise e da síntese de maneira independente, deixando de lado a essência do método para os antigos. Para eles a análise era usada principalmente como método de descoberta e não fazia sentido se não fosse seguida pela síntese.

Tentando evitar interpretações errôneas do método de analise e síntese, optamos por seguir Hintikka e Remes usando "concomitância" no lugar onde usualmente aparece "conseqüência". Dessa forma, tentamos afastar a idéia de que a análise e a síntese eram entendidas pelos antigos como argumentos distintos que diferem com respeito à direção das relações de conseqüências lógicas. Ou seja, não estamos interessados aqui em entender a síntese como um conjunto de argumentos organizados na ordem lógica e a análise como um procedimento independente da síntese e esquematizado numa direção contrária àquela das implicações lógicas ou causais – mesmo que essa concepção seja correta.

O que pretendemos aqui é que fique claro que, na descrição de Pappus (e, portanto, podemos considerar que para qualquer matemático antigo) não havia um método de análise, e sim um método composto de análise e síntese. Ou seja, para Pappus, a análise sozinha não faz sentido, ela vem sempre acompanhada da síntese.

Tendo entendido que para Pappus o método era um *método de análise e síntese*, podemos observar que, se olhássemos apenas para a descrição de análise feita pelo próprio Pappus, perceberíamos que a síntese não seria necessária:

> *[...] na análise, assumimos o que é procurado como se já tivesse sido encontrado e olhamos para aquilo de que isto segue e, em seguida, para o que vem antes, até que, regressando desta maneira, encontremos algo que já seja conhecido, ou que ocupe a posição de primeiro princípio* (PAPPUS apud HINTIKKA & REMES, 1974, p. 8-9, tradução nossa).

Afinal, se encontramos uma premissa a partir da qual segue uma conclusão desejada e se conectamos esta conclusão através de uma seqüência de premissas com axiomas e teoremas previamente conhecidos, não há nada mais a ser feito, isto é, nenhuma outra justificativa é necessária. Por esta razão, contrariando a opinião mais comum, ou seja, aquela que interpreta a análise como um procedimento numa direção contrária às implicações lógicas, acreditamos que a análise possa ser identificada a um movimento ascendente na ordem lógica.

Surge aqui uma pergunta: será que Pappus (e, portanto, qualquer outro matemático antigo) preocupava-se em garantir a reversibilidade de todos os passos realizados na análise para que a síntese fosse realizada como inversa da análise sem nenhum problema? Mesmo que essa preocupação não apareça explicitamente, nos problemas que serão apresentados na seção 2.3 constataremos que a análise era sempre seguida da síntese e, portanto, o problema da reversibilidade não aparece. Fica aqui, porém, uma dúvida: será que esse problema da reversibilidade de fato não acontecia nos problemas dos matemáticos e filósofos gregos ou eles simplesmente omitiram os problemas que apresentavam incompatibilidade entre a análise e a síntese? Esta é uma pergunta muito difícil de ser respondida, afinal, uma vez que não temos acesso nem mesmo aos próprios trabalhos finais que certamente apresentam apenas resultados selecionados, como saberemos se a preocupação com a reversibilidade acontecia ou não nos antigos? Esta é uma discussão interessante e muito rica, entretanto, acreditamos que não seja aqui o momento oportuno para tanto.

Como o objetivo desta dissertação é a compreensão das inovações propostas por Viète na sua *Isagoge*, não iremos nos aprofundar muito nas discussões sobre a análise e síntese. Pretendemos, porém, que tenha ficado claro que a descrição pappusiana da análise e da síntese sugere que a análise esteja associada a um procedimento "para cima" mesmo que as práticas geométricas tendam a associá-la a um movimento descendente, levantando, assim, a questão da reversibilidade do problema. Queremos dizer, portanto, que a prática, ou seja, a resolução de problemas por Pappus, bem como por outros matemáticos antigos, nem sempre corresponde a sua própria descrição do método analítico, isto é, do método de resolução de problemas.

Em outras palavras, a partir da observação da citação de Pappus podemos ser levados a entender a análise como um procedimento na ordem lógica usual e auto-suficiente como explicamos anteriormente. Contudo, a partir da análise da resolução de alguns problemas nos padrões do método de análise e síntese que serão apresentados na seção 2.3 será possível perceber que a questão da reversibilidade, bem como o entendimento da análise associada a um padrão argumentativo na ordem lógica inversa, de fato ocorre, visto que a análise é sempre sucedida pela síntese.

O fato de, na prática grega, a análise sempre ser comprovada pela síntese corrobora a análise e a síntese como as duas metades de um único método. Nesse sentido, tanto no caso teorético quanto no problemático, o ponto de partida da análise é a suposição do resultado como um fato verdadeiro e o seu objetivo é a confirmação de uma afirmação sabidamente verdadeira. Em contrapartida, o ponto de partida da síntese é a suposição de uma afirmação já estabelecida como verdadeira enquanto que o seu ponto final e a confirmação do resultado desejado, isto é, de algo que não era verdadeiro *a priori*. Logo, o ponto de partida da síntese é o ponto final da análise e vice-versa.

A idéia de que a síntese começa onde termina a análise e vice-versa, tem tudo a ver com a concepção moderna que entende a análise e a síntese como métodos diferentes. Ou seja, aquela concepção da qual falamos no início deste capítulo que associa a análise a um raciocínio ao inverso e a síntese a um raciocínio direto.

Para finalizar as observações sobre análise e estudarmos alguns exemplos, gostaríamos de apresentar ainda uma concepção sobre o método analítico atribuída a Aristóteles. Como pudemos constatar, o termo análise é ambíguo. Mesmo considerando esta ambigüidade, para Panza, a análise pode ser associada a um padrão argumentativo ou de maneira mais geral a uma maneira de raciocínio. Ele afirma que:

> *Embora Aristóteles (assim como qualquer outro filosofo grego [...]) nunca tenha definido [a análise] explicitamente, ele se referiu a ela em diversas ocasiões. Uma comparação de passagens relevantes sugere que ele a entendia como um modelo típico de argumentos que: i) começam pela suposição (hipotética) de que alguma coisa que não é realmente dada ou*

> *estabelecida – e que se deseja obter ou estabelecer – seja, de fato, dada ou estabelecida; ii) permitem a obtenção ou o estabelecimento de algo que seja independentemente dado ou estabelecido como resultado de um procedimento de argumentação; e iii) por causa disso, sugerem uma maneira de se obter ou estabelecer efetivamente o que se buscava obter ou estabelecer, ou diretamente provam que não se pode obter ou estabelecer o que era procurado* (PANZA, 2007, p. 13, tradução nossa).

Observando esta passagem, é possível identificarmos o item (i) com a análise, uma vez que o ponto de partida é a suposição do desejado como verdadeiro, isto é, como dado. Por outro lado, o item (ii) pode ser associado à síntese, pois, neste item o desejado é obtido a partir de um procedimento de argumentação. Já o item (iii) corrobora o fato dos itens anteriores serem complementares. Portanto, o posicionamento de Panza está de acordo com a nossa concepção de análise e síntese, ou seja, aquela que entende que a análise tem que ser sucedida pela síntese e que a síntese começa exatamente onde termina a análise.

Cabe aqui uma observação interessante: quando o item (iii) enfatiza o fato de o resultado desejado poder não ser obtido, podemos fazer uma ponte entre o método analítico e a prova por redução ao absurdo. Note que, quando utilizamos uma prova por redução ao absurdo, o resultado desejado é suposto estabelecido e uma seqüência de implicações lógicas é realizada, chegando a uma afirmação falsa. Dessa forma, somos levados a concluir que a primeira afirmação, ou seja, o resultado desejado é falso. É correto afirmar, portanto, que a seqüência de passos a ser realizada em uma prova por redução ao absurdo coincide com a seqüência de passos da análise tão enfatizada neste capítulo.

Este fato foi destacado por Heath[11] na sua introdução à tradução do Volume 1 dos *Elementos* de Euclides onde ele tece diversas observações sobre, traduções e edições; teoremas e problemas; termos técnicos; definições etc. relacionadas aos *Elementos*. Neste espaço, ele dedica um item a "*Redução ao absurdo um tipo de análise*" corroborando mais uma vez com a tese apresentada, isto é, com o fato de a prova por redução ao absurdo poder ser identificada com a análise. Dessa maneira, percebemos que uma prática muito comum nos dias de hoje tem estreita relação com um método utilizado pelos gregos há mais de 2000 anos.[12]

---

[11] Na pesquisa para esta dissertação, utilizamos a tradução de Heath dos *Elementos* de Euclides (HEATH, 1956a e b).

[12] Na sua descrição de análise teorética, Pappus afirma que "*[...] mas se encontrarmos algo que é estabelecido como sendo falso, então, aquilo que era procurado também será falso.*" Do mesmo modo, no caso de análise problemática, Pappus destaca que "*[...] mas se encontrarmos alguma coisa que é impossível de ser estabelecida, o problema também será impossível.*" Dessa forma, a ponte entre o método analítico e a prova por redução ao absurdo também pode ser feita de acordo com a descrição de Pappus.

Voltamos aqui ao que já falamos anteriormente sobre a auto-suficiência do procedimento analítico. Na verdade, a garantia de que a análise é suficiente e, por isso, a síntese não é necessária, permite que provas por absurdo sejam realizadas sem que a sua veracidade seja contestada.

Esperamos que tenha ficado claro para o leitor que tanto para Pappus, quanto para Aristóteles (e, portanto, podemos considerar que para qualquer matemático e filósofo grego) a análise caminha juntamente com a síntese. Sendo assim, é correto entender a análise como um método de descoberta e a síntese como a prova efetiva que é realizada de acordo com a descoberta feita na análise.

A seguir apresentaremos alguns problemas resolvidos pelos antigos utilizando o método de análise e síntese. Pretendemos, com isso, que as idéias até aqui apresentadas sobre este método de resolução de problemas sejam exemplificadas. Dessa forma, pretendemos que seja comprovado que os antigos utilizavam um procedimento analítico como método de descoberta e um procedimento sintético como método de prova.

2.3 Problemas

2.3.1 Exemplos de Análise Teorética

Na seqüência apresentaremos dois exemplos de análise teorética. O primeiro deles é a proposição XIII.1 dos *Elementos* de Euclides e o segundo é a proposição IV.4 da *Coleção* de Pappus. Optamos por apresentar os problemas exatamente como aparecem nos textos dos quais foram extraídos. Esta opção não é ingênua, ela foi feita tentando evitar que mais perdas[13] aconteçam.

2.3.1.1 Proposição 1 do Livro XIII dos *Elementos* de Euclides

> ***Proposição XIII.1 dos Elementos**: Se um segmento de reta for cortado em média e extrema razão, então o quadrado construído sobre o segmento*

[13] É evidente que ao longo da história e depois de tantas traduções e edições alguma perda tenha se dado. É importante observar que quando um tradutor ou editor acrescenta observações sem que estas fiquem evidentes para o leitor, estamos diante de uma perda, pois ao lermos o texto traduzido ou editado, não estaremos lendo o que o autor desejou escrever.

maior somado à metade do todo é cinco vezes o quadrado construído sobre a metade.

Solução:

Seja um segmento de reta AB cortado em média e extrema razão no ponto C e seja AC o maior segmento; desenhe o segmento de reta AD no prolongamento do segmento CA com AD sendo a metade de AB; eu digo que o quadrado sobre CD é cinco vezes o quadrado sobre AD.

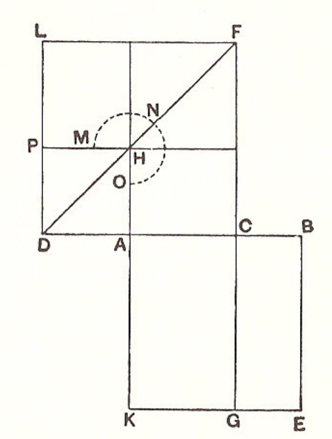


Figura 1

Construa os quadrados AE e DF sobre AB e DC, e prolongue FC até G.

Agora, como AB foi cortado em média e extrema razão por C, portanto o retângulo AB, BC é igual ao quadrado sobre AC.

[VI. Def.3, VI.17]

E CE é o retângulo AB, BC, e FH, o quadrado sobre AC.; portanto, CE é igual a FH.

E como BA é o dobro de AD, enquanto que BA é igual a KA, e AD, a AH, portanto, KA é também o dobro de AH.

Mas KA está para AH assim como CK está para CH, portanto, CK é o dobro de CH.

[VI.1]

Mas [a soma de] LH, HC é também o dobro de CH.

Portanto, KC é igual a [soma de] LH, HC.

Mas CE também foi mostrado ser igual a HF; portanto, o quadrado todo AE é igual ao gnomon MNO.

E, como BA é o dobro de AD, o quadrado sobre BA é o quádruplo do quadrado sobre AD, isto é, AE é o quádruplo de DH.

Mas AE é igual ao gnomon MNO; portanto, o gnomon MNO é também o quádruplo de AP; portanto, DF todo é cinco vezes AP.

E DF é o quadrado sobre DC, e AP, o quadrado sobre DA, portanto, o quadrado sobre CD é cinco vezes o quadrado sobre DA.

Portanto, etc.

Q.E.D.

(EUCLIDES apud HEATH, 1956b, p. 440-441, tradução nossa).

Observando a solução apresentada por Heath percebemos que ela se enquadra aos moldes da síntese, isto é, parte dos dados do problema em direção ao resultado desejado. Constatamos, assim, o que falamos anteriormente: os antigos tinham por hábito esconder a análise. Entretanto, logo após esta solução Heath faz algumas observações bastante pertinentes ao nosso estudo.

> *O MSS. [manuscrito] contém um adendo curioso para as [proposições] XIII.1 – 5 nos moldes da análise e da síntese para cada uma das proposições, prefaciado pelo título:*
>
> *'O que é análise e o que é síntese.*
>
> *'Análise é a suposição do que é procurado como se estivesse admitido e a obtenção através de suas conseqüências a algo admitido como verdade.*
>
> *'A síntese é a suposição do que é admitido e a obtenção através de suas conseqüências a algo admitido como verdade'* (HEATH, 1956b, p.442, tradução nossa).

Esta passagem nos sugere que Euclides conhecia a análise e a síntese como procedimentos de resolução de problemas. Entretanto, observando a citação, percebemos que a descrição de síntese parece estar corrompida. Afinal, a passagem nos diz que partimos e obtemos algo admitido como verdade. Lembrando que um texto como os *Elementos* que foi tantas vezes traduzido e reeditado, certamente apresenta incompatibilidade com o original. Este fato é inclusive ressalto por Heath na seqüência da passagem apresentada anteriormente quando ele chama a atenção para as diferenças entre traduções e manuscritos distintos. Sendo assim, fica claro que o sentido original foi perdido.

Em todo caso, o que podemos observar a partir desta passagem é que a análise está sendo considerada como a passagem, através de uma seqüência de conseqüências, do fato procurado suposto conhecido para a obtenção de uma verdade já conhecida. Por outro lado, apesar de não ser exatamente isso que esteja escrito na citação, podemos afirmar que, na síntese, parte-se de algo já admitido como verdadeiro e se obtém a verdade desejada.

Dando continuidade à observação sobre análise e síntese, Heath apresenta a seguinte solução :

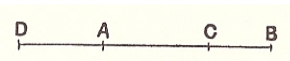


Figura 2

> *A figura é um simples segmento de reta.*
>
> *Seja AB dividido em média e extrema razão por C, AC sendo o maior segmento; e seja* $AD = \frac{1}{2} AB$.

Eu digo que (quad. sobre CD) = 5(quad. sobre AD).

(Análise)

'Como, (quad. sobre CD) = 5(quad. sobre AD),'

e (quad. sobre CD) = (quad. sobre CA) + (quad. sobre AD) + 2(ret. CA, AD)

portanto, (quad. sobre CA) + 2(ret. CA, AD) = 4(quad. sobre AD).

Mas ret. BA, AC = 2(ret. CA, AD),

e (quad. sobre CA) = (ret. AB, BC)

Portanto, (ret. BA, AC) + (ret. AB, BC) = 4 (quad. sobre AD),

Ou (quad. sobre AB) = 4 (quad. sobre AD):

e é verdade, uma vez que $AD = \frac{1}{2}AB$.

(Síntese)

Como (quad. sobre AB) = 4 (quad. sobre AD),

e (quad. sobre AB) = (ret. BA, AC) + (ret. AB, BC),

portanto, 4 (quad. sobre AD) = 2(ret. DA, AC) + quad. sobre AC.

Somando a cada [lado] o quadrado sobre AD, temos

(quad. sobre CD) = 5(quad. sobre AD).

(HEATH, 1956b, p.442 – 443, tradução nossa).

Primeiramente, gostaríamos de relembrar que optamos por apresentar as soluções da maneira mais fiel possível ao texto das quais elas foram extraídas. Sendo assim, um fato gritante é o uso da notação moderna. Observando a solução apresentada nos moldes do método de análise e síntese, constatamos que o sinal de igual é usado a todo instante, bem como abreviações das palavras quadrado e retângulo. Acreditamos que neste momento este fato não é muito prejudicial ao objetivo desta dissertação.

Por ora, estamos interessados em entender como os antigos utilizavam o método de análise e síntese e acreditamos que a notação utilizada na resolução do problema não prejudica o entendimento das estratégias para a resolução de problemas dos matemáticos gregos. Na verdade, o que é relevante no momento é a existência da síntese comprovando a análise na resolução de um problema[14]. Afinal, pretendemos aqui, constatar que o método de análise e síntese era utilizado pelos antigos e mesmo que esteja comprovado que perdas aconteceram nas diversas traduções dos *Elementos*, o fato de Heath apresentar uma solução nos moldes do método de análise e síntese confirma a nossa tese de que este método era utilizado pelos antigos.

A apresentação de uma solução nos moldes do método de análise e síntese feita por Heath parece ir de encontro ao posicionamento de Hintikka e Remes sobre o costume ancião em esconder a análise. Entretanto, as observações feitas por Heath antes da apresentação desta solução parecem esclarecer a questão da fidelidade das traduções e edições dos trabalhos de matemáticos antigos levantada anteriormente na seção 2.2. Para Heath, o adendo sobre análise e síntese parece ser interpolado, isto é, parece ser uma parte acrescentada aos *Elementos a posteriori*. Isso fica evidente quando ele afirma que: "*Além disso, o adendo é totalmente alheio ao plano e a forma dos Elementos.*" e prossegue afirmando que a interpolação, ou seja, o acréscimo tomou lugar antes de Theon e que provavelmente ela se encontrava na margem do texto. Além disso, ele acredita que este adendo seja uma relíquia das investigações analíticas de Teeteto ou Eudoxo (HEATH, 1956b, p. 442). Isto quer dizer que a apresentação desta solução no formato análise e síntese pode não ser de responsabilidade do próprio Euclides.

Fica claro, portanto, que ao se estudar História da Matemática devemos estar atentos a este fato. No caso da nossa discussão, entretanto, esta questão pode não ser um problema, visto que o nosso objetivo em estudar a análise na tradição grega está relacionado ao fato de Viète ter incentivado o uso do método analítico na sua *Isagoge*. Queremos, na verdade, entender de que forma o método analítico era usado antes de Viète a fim de compreendermos a dimensão da inovação da sua proposta.

Discussões sobre a autoria do adendo bem como sobre a notação utilizada a parte, é importante notar que, observando a solução apresentada por Heath, constatamos que a síntese foi apresentada posteriormente à análise o que nos leva a entender a análise como uma forma de descoberta e a síntese como uma confirmação da análise. Além disso, percebemos que o ponto de partida da síntese é o ponto final da análise ((quad. sobre *AB*) = 4 (quad. sobre *AD*)) e o ponto final da síntese é o ponto de partida da análise ((quad. sobre *CD*) = 5(quad. sobre

[14] Quando a notação for relevante estaremos atentos para este fato.

AD)). Dessa forma, acreditamos que este exemplo confirma a apresentação do método de análise e síntese feita na seção 2.2. Na seqüência apresentamos o outro exemplo de análise teorética.

2.3.1.2 Proposição 4 do Livro IV da *Coleção* de Pappus[15]

Mais uma vez chamamos atenção para o fato de estarmos apresentando os exemplos exatamente como eles aparecem no texto do qual foram extraídos. No caso desta proposição, optamos por utilizar a versão apresentada por Hintikka e Remes da Proposição 4 do Livro IV da *Coleção* de Pappus. Estes autores tentam apresentar os seus exemplos de maneira fiel ao original e este foi um fato determinante para a nossa decisão. Entretanto, eles não deixam de fazer comentários sobre a resolução apresentada, bem como, organizaram-na de maneira esquemática e alheia à forma original, isto é, a separação da resolução em passos, por exemplo, não é original. Sendo assim, para diferenciar o texto original dos comentários, apresentamos a parte original em *itálico*; os comentários feitos por Hultsch, ou por VerEeck, nas suas traduções da *Coleção* aparecem entre (parênteses); e as explicações de Hintikka e Remes aparecem entre [colchetes] (HINTIKKA & REMES, 1974, p.22).

I. ENUNCIAÇÃO[16]

I(a) Aquilo que é dado (a *dedomena [...]*)

Seja ABG uma circunferência com centro E. Seja BG um diâmetro, e AD uma tangente (que encontra a circunferência em A)*; que encontra o prolongamento de BG em D. Una D a F. Descreva* (o diâmetro) *AEH. Una H a F; una H a J. O diâmetro BG*

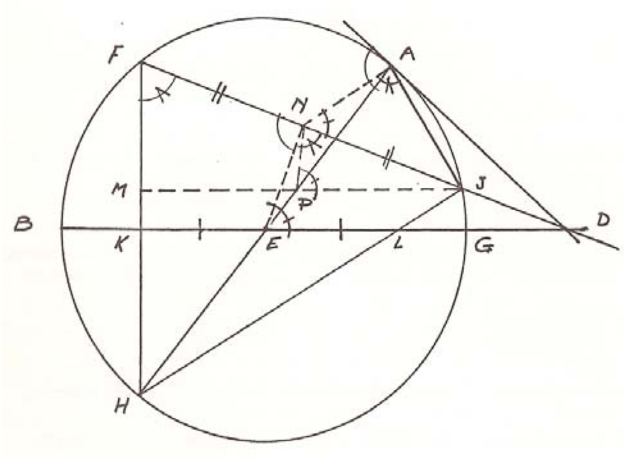


Figura 3

[15] Na pesquisa para esta dissertação tivemos acesso apenas à tradução de Jones do Livro VII da *Coleção* de Pappus. Este exemplo foi extraído do texto de Hintikka e Remes, 1974, p. 22 - 26 usado na pesquisa para esta dissertação.

[16] Excepcionalmente nesta citação não usaremos o recurso *itálico*. Esta opção foi feita para que fique evidente a forma na qual Hintikka e Remes apresentaram este exemplo.

encontra HF em K e HJ em L.

I(b) A coisa procurada (o *zetoumenon [...]*)

Então, EK=EL.

[Significando, é claro, que se deve mostrar que *EK=EL*.]

II. ANÁLISE NO SENTIDO MAIS AMPLO

II(a) Análise propriamente [[...] O termo usado por Hankel aqui é ‘transformação’ [...]]

Admitamos que seja feito [...].

Passo A1: *Descreva um segmento de reta paralelo a BG a partir de J* (que corta *AH* em *P*).[Esta é a primeira construção auxiliar. O *zetoumenon* – a suposição *KE=EL* não é necessária]

Passo A2: *MP=PJ* (por construção e porque assumimos que *KE=EL*). [suposição-*zetoumenon* e a construção assumida na *dedomena* ambas usadas]

Passo A3: *Descreva uma perpendicular a FJ a partir de E.* [A suposição-*zetoumenon* não é usada nesta construção auxiliar]

Passo A4: *FN=NJ* (por construção, de acordo com a proposição III.3) [A suposição-*zetoumenon* não é usada nesta dedução]

Passo A5: (Una *N* a *P*) [Omitida por Pappus. A *zetoumenon* não é usada]

Passo A6: *NP e FM são paralelas* (De resultados prévios dos *Elementos* VI.2) [O fato *MP=PJ* é em parte baseado na suposição-*zetoumenon* e é usado aqui, uma vez que o fato *FN=NJ* que também é usado aqui não utiliza o *zetoumenon*]

Passo A7: (Una *J* e *A*) [Omitida; o *zetoumenon* não é usado]

Passo A8: *O ângulo JNP=NFM=JAP* (pelas proposições I.29 e III.21) [Passo de dedução como no Passo A6.]

Passo A9: *Os pontos J, A, N, P estão sobre uma circunferência* (pela recíproca de III.21 dos *Elementos*). [Apesar da sua formulação, este passo introduz um novo objeto geométrico, a circunferência *JNAP*. O fato que permite que esta circunferência seja introduzida é baseado nas igualdades do Passo A8. Se elas valem, existe uma circunferência sobre *JNAP*. Agora, elas foram inferidas a partir do paralelismo entre NP e FM, que, por sua vez, foi baseado na igualdade MP=PJ, como mostrado no Passo 5. Mas esta igualdade foi inferida a partir do fato de a suposição- *zetoumenon* vale, claro, em conjunto com a construção original e as construções auxiliares baseadas nela. Assim, a introdução da circunferência JNAP é baseada na suposição-*zetoumenon* I(b).]

Passo A10. *O ângulo ANJ=APJ=AEL* (Pelas proposições I.29 e III.21 dos *Elementos*)

Passo A11. *A, N, E, D estão sobre uma circunferência* (pela proposição III.21 dos Elementos) [Porque Pappus pensa que elas estarem sobre uma circunferência não está dito. Entretanto, é bastante óbvio que esta última conclusão segue das igualdades do passo imediatamente anterior Passo A10]

II(b) 'Resolução' ([...])

De fato

R1. *Os ângulos DAE e END são ambos retos* (... e os pontos *A*, *N*, *E*, *D*, portanto formam uma circunferência). [Esta observação envolvendo *DAE* e *END* não é inferida a partir de qualquer coisa previamente estabelecida ao longo do argumento, como é mostrado por dois fatos. Primeiro, se pensamos que seja inferida a partir de resultados estabelecidos, como poderemos então interpretar a afirmação precedente 'de fato'? Em segundo lugar, a suposição é totalmente não problemática. *DAE* é um ângulo reto por construção original (confira I(a)) *END* é um ângulo reto por construção auxiliar que depende somente da *dedomena*. (confira Passo A3.) Claramente, uma interpretação diferente de R1 é mais aceitável. Nela, o fato de que *A*, *N*, *E*, *D* estarem sobre uma circunferência é inferido a partir da afirmação em *itálico* de R1. Esta afirmação dá uma razão para o fato que é diferente daquela dada anteriormente no Passo A11. A repetição se faz compreensível através da observação de que a razão dada em R1 é independente da suposição–*zetoumenon* – ao contrário da dada no Passo A11. Por isso, os ângulos *DAE* e *END* podem ser construídos a partir apenas da *dedomena*–I(a); e a prova pode, portanto, começar. [...]]

III. SÍNTESE

A síntese é como a seguir.

III(a) Construção

III(b) Prova

Passo S1. *Uma vez que os ângulos DAE e END são ambos retos, A, N, E, D encontram-se sobre uma circunferência.*

[Repita R1 de acordo também com Passo A11.]

Passo S2. *Conseqüentemente o ângulo AND=AED.*

Passo S3. *Mas, por ED e PJ serem paralelas, o ângulo AED=APJ.* [De acordo com o PassoA10]

Passo S4. *Por isso, os pontos A, N, P, J estão sobre uma circunferência.* [De acordo com o Passo A9]

Passo S5. *Por isso, o ângulo JAP=JNP* [De acordo com o Passo A8.]

> Passo S6. *Mas* (pela construção original) *JAP=JFM.*
>
> Passo S7. *Daí, JFM=JNP.*
>
> Passo S8. *Daí, FM e NP são paralelas*. [De acordo com Passo A6.]
>
> Passo S9. *FN=NJ* (Pela proposição III.3 dos *Elementos*, por exemplo) [De acordo com o Passo A4.]
>
> Passo 10. *Daí, MP=PJ.* [De acordo com o Passo A2.]
>
> Passo 11. *E* (por) *MJ e KL* (serem paralelas por construção auxiliar), *FH:EH=MP:KE=PJ:EL; por outro lado, MP:PJ=KE:EL; por isso, KE=EL.*
>
> (Q.E.D)
>
> (PAPPUS apud HINTIKKA & REMES, 1974, p. 22-26, tradução nossa).

A maneira na qual Hintikka e Remes organizaram a solução desta proposição evidencia a utilização do método de análise e síntese. Na primeira parte, denominada "enunciação", o problema foi proposto e o enunciado foi apresentado em duas partes, diferenciando a hipótese da tese. Isso ajuda na identificação dos dados do problema e do que é procurado.

A segunda parte "análise no sentido mais amplo" também foi dividida em duas partes. Na primeira parte ("análise propriamente" – ou "transformação" para Hankel), supõe-se primeiramente o problema resolvido e uma seqüência de afirmações foi feita baseada nesta suposição. Em seguida na parte denominada de "resolução", foi feita a verificação dos fatos apresentados anteriormente. Isso fica evidente, quando se afirmou "*Admitamos que seja feito*" e "*De fato*", respectivamente na "análise propriamente" e na "resolução".

Já na terceira e última parte ("síntese") que foi dividida em "construção" e "prova", nenhuma construção foi exibida por não ser necessária para esta proposição. Na parte referente à prova, o primeiro passo está relacionado ao último passo da "análise propriamente" e à explicação dada na "resolução" e o raciocínio prossegue no sentido contrário ao raciocínio da "análise no sentido mais amplo".

Sendo assim, na resolução desta proposição, a análise pode ser entendida como um mecanismo de descoberta sucedido pela síntese que, efetivamente resolve o problema organizando a solução a partir dos dados do problema em direção ao procurado. E mais uma vez fica comprovada a nossa tese.

2.3.2 Exemplos de Análise Problemática

De acordo com a Introdução de Heath para o Volume 1 dos Elementos:

> *É em relação aos problemas que a análise dos antigos tem o seu grande significado, porque era o método geral que os gregos usavam para resolver todos 'os problemas mais abstrusos'.*
>
> *Suponhamos que tenhamos que construir uma figura satisfazendo determinadas condições. [...], primeiramente é necessário 'analisar' estas condições. [...] [a melhor maneira de fazer isso] é assumindo todas as condições efetivamente realizadas, ou seja, supondo o problema resolvido. Em seguida, temos que transformar estas condições [...], chegando a alguma relação que nos permita* **construir** *uma determinada parte da figura que tenha sido hipoteticamente assumida como verdadeira ou até mesmo desenhada, mas que, contudo, realmente necessite ser* **encontrada** *para que o problema seja resolvido. A partir deste momento, esta determinada parte da figura, passa a fazer parte dos* **dados** *e uma relação deve ser encontrada a fim de que uma parte da figura seja determinada através dos dados originais juntamente com o novo dado* (HEATH, 1956a, p.140-141, tradução nossa, grifo nosso).

É preciso, portanto, proceder desta maneira até que todas as partes da figura requerida sejam encontradas. Dessa forma, esta passagem deixa claro como o processo de análise deveria ser realizado: a partir da observação de um figura que caracteriza o problema, junta-se aos dados do problema pouco a pouco novas informações que passam a ser consideradas como dado.

Ainda sobre o processo de análise e síntese, de acordo com Heath, Hankel chama "transformação" a primeira parte da análise, aquela que vai até a descoberta de uma relação que permite dizer que uma determinada nova parte da figura não pertencente à configuração original é "dada". Por outro lado, ele chama de "resolução" a segunda parte da análise onde se prova que todas as partes restantes da figura são "dadas". Destaca ainda que a "síntese" – que acontece na seqüência da "resolução" – também possui duas partes: a "construção" e a "demonstração". Na primeira parte a construção, de fato, é realizada, seguindo, em geral, os passos da "resolução" no sentido contrário. A "demonstração" faz-se necessária, pois é neste momento que se mostra que a figura obtida satisfaz a todas as condições do problema, neste caso, são os passos da "transformação" que são percorridos na ordem inversa (HEATH, 1956a, p.141)[17].

---

[17] Repare que a denominação "transformação" e "resolução", assim como o sentido dado a cada uma das partes do processo analítico, aparece na organização da solução apresentada por Hintikka e Remes – exemplo 2.3.1.2

Como já enfatizamos anteriormente, para a realização da análise o *Data* de Euclides é fundamental, uma vez que ele auxilia e encurta o trabalho de descoberta da solução. De acordo com Itio[18], o objetivo do *Data* é fornecer uma série de proposições para provar que se em uma dada figura determinadas partes ou relações são dadas, outras partes ou relações também são dadas em uma ou outra maneira previamente definida.

Sendo assim, esse tratado começa com a definição das maneiras nas quais as coisas são ditas "dadas", por exemplo, "dado em tamanho", "dado em posição" e "dado em tipo". Neste sentido, para Euclides, grandezas geométricas eram dadas em tamanho "quando podemos designar equivalentes a elas". Ou seja, as grandezas eram conhecidas em tamanho quando existia um número associado a ela. Por outro lado, figuras retilíneas eram dadas em tipo quando cada um dos seus ângulos, assim como as razões entre cada um de seus lados eram dados. E prossegue com as proposições. Nas proposições a palavra "dado" é empregada tanto significando "realmente dado" quanto "dado por implicação". Podemos dizer que as proposições do *Data* partem do que é realmente dado para o que é dado por implicação (ITIO, 1980, p. 8).

No primeiro capítulo da sua tradução do *Data*, Itio cita a passagem da introdução do volume 1 dos *Elementos* de Euclides feita por Heath apresentada anteriormente. E na seqüência afirma que:

> *[...] o final da primeira parte da 'análise', a parte que Hankel chamou 'transformação' constitui o ponto de partida do problema do Data. Na parte seguinte da 'análise', a qual Hankel chamou 'resolução', as proposições do Data desempenham o seu papel compondo cadeias de dados até que cheguemos ao ponto que nos permite iniciar o processo de síntese* (ITIO, 1980, p. 9-10, tradução nossa).

Fica evidente, portanto, o auxílio que o *Data* proporciona no processo de análise e síntese realizado pelos antigos. Principalmente quando umas duas páginas à frente ele garante que: "*O real significado do Data, [...], reside no fato dele ter sido* ***uma coleção de proposições muito úteis que facilitam enormemente o processo de 'análise'*** *[...]*" (ITIO, 1980, p. 12, tradução nossa, grifo nosso).

apresentado anteriormente e exemplo 2.3.2.2 apresentado a seguir. Da mesma forma, o processo sintético de Hintikka e Remes é equivalente ao associado a Hankel.

[18] Itio é o autor da tradução do *Data* utilizada na pesquisa para esta dissertação.

Para que todas estas observações sobre o significado do "dado" sejam entendidas, bem como seja feita uma exemplificação da análise problemática, apresentaremos a seguir dois exemplos. O primeiro é a proposição 105 do Livro VII da *Coleção* de Pappus, disponível, por exemplo, no primeiro capítulo da tradução de Itio do *Data*, bem como na Introdução da tradução de Heath para os *Elementos* volume 1. O segundo é o exemplo apresentado por Hintikka e Remes que consiste na proposição 155 do Livro VII da *Coleção* de Pappus.

2.3.2.1 Proposição 105 do Livro VII da *Coleção* de Pappus

> ***Proposição VII.105 da Coleção****: Dadas a posição de uma circunferência ABC e a de dois pontos D, E exteriores a ela, desenhar segmentos de reta DB e EB a partir de D, E para um ponto B na circunferência tal que, se DB, EB encontram a circunferência de novo em C [e em] A [respectivamente], AC deve ser paralelo a DE.*
>
> ***Análise***
>
> *Suponha o problema resolvido e a tangente em A desenhada, encontrando ED em F.*
>
> *(Parte I.* **Transformação**)
>
> *Então, como AC é paralelo a DE, o ângulo em C é igual ao ângulo CDE.*
>
> *Mas, como FA é uma tangente, o ângulo em C é igual ao ângulo FAE. [Proposição III.32 dos Elementos]*
>
> *Portanto, o ângulo FAE é igual ao ângulo CDE, daí, A, B, D, F estão sobre uma circunferência.*
>
> *Portanto, o retângulo AE, EB é igual ao retângulo FE, ED.*
>
> *(Parte II.* **Resolução**)
>
> *Mas o retângulo AE, EB é dado, pois é igual ao quadrado sobre a tangente a partir de E. [Proposição III.36 dos Elementos]*
>
> *Portanto, o retângulo FE, ED é dado; e, como ED é dado, FE é dado em comprimento. [Data.57]*

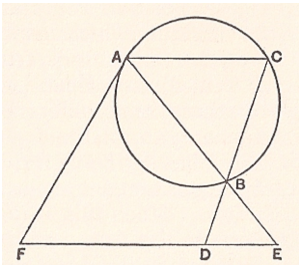


Figura 4

Mas FE também é dado em posição, então F também é dado. [Data.27]

Agora, FA é a tangente a partir de um ponto dado F para uma circunferência ABC dada em posição; portanto, FA é dado em posição e tamanho. [Data.90]

E F é dado; portanto, A é dado.

Mas E é também dado; portanto, o segmento de reta AE é dado em posição. [Data.26]

E a circunferência ABC é dada em posição; portanto, o ponto B é também dado. Data.25]

Mas os pontos D, E são também dados; portanto os segmentos de reta DB, BE são também dados em posição.

Síntese

(Parte I. **Construção***)*

Suponha dados a circunferência ABC e os pontos D, E.

Tome um retângulo contido por ED e por um certo segmento de reta EF igual ao quadrado sobre a tangente à circunferência a partir de E.

A partir de F desenhe FA tocando a circunferência em A; ligue ABE e depois DB, de tal maneira que DB encontre a circunferência em C. Ligue AC.

Eu digo que AC é paralelo a DE.

(Parte II. **Demonstração***)*

Como, por hipótese, o retângulo FE, ED é igual ao quadrado sobre a tangente a partir de E, que de novo é igual ao retângulo AE, EB, o retângulo AE, EB é igual ao retângulo FE, ED.

Portanto, A, B, D, F estão sobre uma circunferência, daí, o ângulo FAE é igual ao ângulo BDE.

Mas o ângulo FAE é igual ao ângulo ACB no segmento alternado; portanto, o ângulo ACB é igual ao ângulo BDE.

Portanto, AC é paralelo a DE

(PAPPUS apud HEATH, 1956a, p.141-142, tradução nossa).

Da mesma forma como nos exemplos apresentados, a solução aparece dividida em duas partes: a análise e a síntese. Assim como no exemplo 2.3.1.2, a análise foi dividida em "transformação" e "resolução"; a "resolução" justificou o que foi feito na "transformação". A síntese também foi composta por duas partes: “construção” e “demonstração”[19]. Diferentemente dos exemplos 2.3.1.1 e 2.3.1.2, neste caso, uma construção foi exibida e na seqüência da solução – na “demonstração” – ela foi verificada. Podemos verificar, mais uma vez, a nossa tese, pois a síntese aparece no final da solução como uma forma de comprovação da análise apresentada previamente. Em seguida, apresentamos o último problema que contempla o uso do método de análise e síntese na solução de problemas pelos antigos.

2.3.2.2 Proposição 155 do Livro VII da *Coleção* de Pappus[20]

> I(a) Aquilo que é dado.
>
> *Seja um segmento de um círculo dado, com a corda AB. Seja uma razão dada. Inflexione* (Veja a Figura 5)
>
> I(b) A coisa procurada.
>
> *dentro do segmento dois segmentos de reta AC, CB na razão dada.*
>
> II(a) Análise propriamente
>
> *Admitamos que seja feito.*
>
> *Desenhe uma tangente CD a partir de C;*
>
> *$AC^2 : CB^2 = AD : DB$.*
>
> II(b) A ‘resolução’
>
> *Mas AC : CB é a razão dada* (De acordo com I(a))*; portanto, $AC^2 : CB^2$ é dado; portanto, a razão AD : DB é dada. E os pontos A e B são dados; portanto o ponto D é dado, e a tangente DC* (Data, Prop. 91)*; portanto o ponto C é dado.*

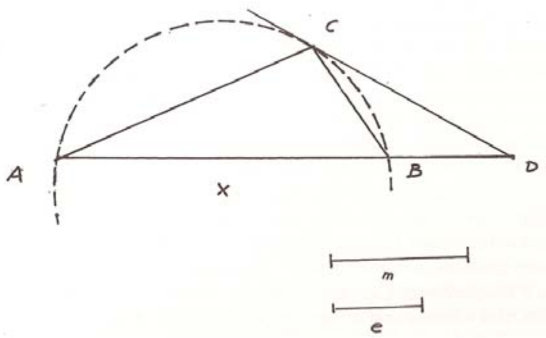


Figura 5

> III(a) Construção da síntese

[19] A “demonstração” é equivalente à “prova” de Hintikka e Remes.
[20] Assim como no outro exemplo de Hintikka e Remes apresentado na seção 2.3.1.2, nesta citação não usaremos o recurso *itálico*. Esta opção foi feita para que fique evidente a forma na qual Hintikka e Remes apresentaram este exemplo.

> *A síntese é como a seguir.*
>
> *Seja o segmento ABC, e a razão e : m. Fazemos AD : DB = e_2 : m_2. Desenhamos a partir de D a tangente DC; eu digo que os segmentos de reta AC, CB resolvem o problema.*
>
> III(b) *Apodeixis*[21] da síntese
>
> *Como $e_2 : m_2 = AD : DB$, e $AD : DB = AC_2: CB_2$* (CD é uma tangente por construção por III(a*)), $e_2 : m_2 = AC_2 : CB_2$; portanto, $e : m = AC : CB$; então as retas AC, CD resolvem o problema*
>
> (PAPPUS apud HINTIKKA & REMES, 1974, p. 52-53, tradução nossa).

Com este exemplo percebemos que, na análise problemática, a “resolução” servia para estabelecer que todas as entidades geométricas necessárias à construção da solução podiam ser obtidas como “dadas”. Nesse sentido, a natureza heurística da análise aplicou-se mais a “análise propriamente” do que a “resolução”. Afinal, na “resolução” nenhuma construção nova foi realizada, apenas as anteriores foram justificadas. E o que é heuristicamente crucial é justamente a procura das construções adequadas que é realizado na “análise prorpiamente” (HINTIKKA & REMES, 1974, p. 53-54).

Em ambos os exemplos de análise problemática, percebemos duas de suas características mais importantes: procedem através do significado de “dado” e foram realizados com respeito a uma figura na qual os elementos requeridos eram supostos já traçados. Esta última característica foi indicada pela frase “*Suponha o problema resolvido e a tangente em A desenhada, encontrando ED em F*.”, no primeiro exemplo, e por “*Admitamos que está feito*” no segundo exemplo. Ambas lembram justamente o fato de que o argumento subseqüente é uma análise. Afinal, a característica essencial do raciocínio analítico é a suposição do problema resolvido a fim de que sua solução seja encontrada. Como pudemos perceber nas supostas figuras, alguns elementos eram dados no início, alguns eram diretamente construídos através dos dados iniciais e outros demandavam mais passos.

Vale lembrar que alguns raciocínios utilizados na análise, como, por exemplo, os utilizados para achar elementos construtíveis na figura, foram extraídos provavelmente do *Data*. E é nesse sentido que a análise procede através do significado de “dado”. Como falamos, este tratado ajuda a determinar os elementos construtíveis em uma figura a partir dos elementos dados no problema.

---

[21] Esta expressão parece ter o mesmo significado de prova, pois ela é usada neste exemplo enquanto que no outro exemplo apresentado por Hintikka e Remes eles indicam esta parte da resolução por “*prova*”.

Para finalizar o estudo sobre o método de análise e síntese dos antigos, apresentaremos a seguir duas tabelas muito interessantes disponíveis em Hintikka e Remes, 1974, p.23. Acreditamos que estas tabelas são na verdade uma maneira de apresentar tudo o que falamos nesse capítulo de maneira organizada e esquematizada.

	Afirmação geral	Explicação
O ponto de partida da análise.	Análise é o caminho do que é procurado	Na análise assumimos o que é procurado
O tipo de suposição inicial necessária.	- como se estivesse admitido -	como já realizado
Natureza do processo.	através das suas concomitâncias em direção	e temos de averiguar do que resulta, e mais uma vez aquilo que é antecedente do último...
Exigências de estágios intermediários	....	....
Pontos finais da análise.	a algo estabelecido	Até que nós esclareçamos algo
Exigências nelas.	na síntese.	já conhecido ou que esteja na frente na ordem.
Resultado positivo.	....	....
Resultado negativo.	....	....

Tabela 1

Análise Teorética	Análise Problemática
No caso teorético assumimos a coisa procurada	No caso problemático assumimos a coisa desejada
como sendo e como sendo verdadeira	como sendo conhecida
e depois avançamos através das suas concomitâncias	e depois avançamos através das suas concomitâncias
como se elas fossem verdades e existentes por hipótese	como se elas fossem verdades,
até algo estabelecido;	até algo estabelecido.
....	....
depois, se o que foi estabelecido for verdade, a coisa procurada é verdade, também.	Se a coisa estabelecida é possível ou pode ser obtida, ou seja, se é o que os matemáticos chamam de dado, a coisa desejada também será possível...
Mas se encontramos algo que é estabelecido como sendo falso, a coisa procurada será falsa também.	... mas se encontramos alguma coisa que é impossível de ser estabelecida, o problema também será impossível.

Tabela 2

Fica claro, portanto, que os antigos utilizavam o método de análise e síntese uma vez que a análise era aceita como uma ferramenta de descoberta que deveria ser justificada por um raciocínio sintético. Além disso, apesar dos antigos considerarem dois tipos de análise a problemática e a teorética, estes tipos são equivalentes como mostrado na Tabela 2.

Na Tabela 3, apresentamos a diferença entre os métodos de analise e síntese, diferença essa essencial para o entendimento do método de análise e síntese dos antigos. O entendimento da distinção entre o ponto de partida e o objetivo desses dois métodos implica no entendimento da necessidade dos antigos utilizarem o método composto de análise e síntese que aceita a análise (avessa ao padrão de exatidão do momento) como forma de descoberta e a síntese (adequada ao padrão de exatidão) como a resolução efetiva do problema.

		Ponto de partida	Ponto final
Análise	Considerada como um raciocínio ao inverso, uma decomposição da verdade que procuramos em termos mais simples.	Suposição de algo que não é dado como verdadeiro.	Confirmação de uma afirmação sabidamente verdadeira.
Síntese	É um raciocínio direto, uma recomposição de termos simples para encontrar a verdade procurada.	Suposição de uma afirmação sabidamente verdadeira.	Confirmação de algo que não era verdadeiro.

Tabela 3

Esperamos, portanto, ter mostrado que a análise na tradição grega pode ser entendida como uma forma de descoberta, pois sempre era preciso exibir a síntese, que seria a construção propriamente dita no caso de problemas (análise problemática) ou a prova ou demonstração no caso de teoremas (análise teorética). Ou seja, a análise, como entendemos atualmente, era admitida para encontrar um caminho entre procurado e os dados do problema, mas a solução deveria ser exibida através da um modelo sintético.

No capítulo 4 teremos a oportunidade de mostrar como Viète quebra com este padrão introduzindo a análise como método de solução auto-suficiente.

3 A Álgebra na Matemática Árabe

Os árabes são os responsáveis pelo nosso conhecimento de algumas obras clássicas, em particular as gregas. A partir do século VIII, estas obras foram traduzidas para o árabe o que possibilitou que mais tarde, no final da Idade Média, elas fossem traduzidas para o latim, garantindo assim a sua permanência para posteridade. Entretanto, como veremos ao longo deste capítulo, os árabes também contribuíram de forma original para o desenvolvimento da Matemática.

O que chamamos hoje de “álgebra” é fruto do trabalho e da contribuição de diversos matemáticos ao longo de muitos séculos de desenvolvimento. O objetivo desta dissertação não é o estudo do desenvolvimento da álgebra, mas sim o entendimento das inovações propostas por Viète no final do século XVI. Queremos, portanto, ter uma idéia geral dos procedimentos algébricos utilizados e conhecidos antes de Viète, para podermos entender a importância da *Isagoge*. Para tanto, devemos estudar a contribuição dos árabes, uma vez que elas foram bastante expressivas e, por isso, nos darão uma noção geral do que já existia antes[22].

A cidade de Bagdá pode ser considerada como um dos maiores centros científicos do mundo entre os séculos VIII e XII. Havia um incentivo para o estudo das obras clássicas, o que propiciou mais tarde que uma matemática original, influenciada pela geometria grega, fosse desenvolvida. Após terem se apropriado do saber matemático grego mais avançado, os matemáticos árabes expandiram esse conhecimento produzindo métodos sistemáticos e procurando generalizá-los. Posteriormente, novos problemas foram elaborados e sua resolução se fez através de novos objetos. Alguns domínios eram totalmente novos, o que permitiu que a pesquisa se libertasse completamente do contexto antigo. A invenção da álgebra, uma nova disciplina, é um dos fatores que permitiram essa emancipação. Primeiramente, porque ela rompeu com a predominância do conhecimento grego. Mas, sobretudo, porque a álgebra, tal como estudada pelos árabes, ultrapassou a divisão

[22] Infelizmente, não encontramos aqui no Rio de Janeiro literatura suficiente para uma boa pesquisa sobre o desenvolvimento da matemática árabe. A maioria dos textos aqui encontrados não é fiel ao original, pois utiliza uma notação moderna para representar idéias antigas e, para esta dissertação, a preservação da exposição original é importante, uma vez que foi Viète quem introduziu a simbologia na Matemática.

número/grandeza, que era constituinte da matemática euclidiana. Essa ultrapassagem permitiu que os matemáticos aplicassem resultados de um domínio aos objetos de outro.

Dentre os muitos estudiosos que se destacaram neste centro científico, consideraremos, nesta dissertação, apenas dois: Muhammad Khwarizmi, que provavelmente viveu entre os séculos VIII e IX, e Omar Khayyam, do século XI. A palavra "álgebra" tem origem em um dos livros mais importantes da Idade Média: *Hisab al-jabr wa'l-muqabalah* (*Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala*) de al-Khwarizmi[23]. As duas palavras – *al-jabr* e *al-muqabala* – designavam, cada uma, uma operação que, juntas, resumiam o novo procedimento que caracterizou uma nova disciplina. A expressão "*o cálculo de al-jabr e al-muqabala*" denominava esta disciplina e as formas verbais – "*jabara*" e "*qabala*" – designavam as operações algébricas.

Naquela época, a palavra "*al-jabr*" era usada significando "restauração", "reunião do que estava quebrado", enquanto "*al-muqabala*" significava "redução". Ambas as operações designadas pelos verbos "*jabara*" e "*qabala*" eram operações fundamentais na nova teoria. O verbo "*jabara*" (restaurar) expressava a operação que consistia em mudar de membro, em uma igualdade, os termos subtrativos (isto é, negativos). Já o verbo "*qabala*" (reduzir) expressava a simplificação de dois termos (positivos) de mesmo grau que se encontravam em ambas as partes de uma igualdade (balanceamento da equação). Devemos lembrar que os árabes não consideravam grandezas negativas e, por esta razão, era preciso eliminá-las.

Usando uma linguagem atual, podemos entender "*al-jabr*" como a operação que consiste em passar um termo negativo de um membro para outro da equação, de forma a eliminar os termos com coeficiente negativo, e "*al-muqabala*" como a operação que se faz em seguida e que consiste em simplificar os termos semelhantes. Com a notação moderna, podemos entender "*al-jabr*" como a transformação de $6x^2 - 17 - 3x = 2x^2 - x - 12$ para $6x^2 = 2x^2 + 2x + 5$, ou seja, a transformação de uma subtração em um membro numa adição no outro membro. "*Al-muqabala*" seria a redução de $6x^2 = 2x^2 + 2x + 5$ a $4x^2 = 2x + 5$[24].

[23]Omar Khayyam também escreveu um tratado sobre *al-jabr* e *al-muqabala*.
[24] Segundo o site http://www.prof2000.pt/users/andrepache/matetavira/tarefa7/alkhwarizmi.htm, al-Khwarizmi considerava ainda um outro procedimento chamado de "*al-radd*", que tinha por objetivo transformar o coeficiente da incógnita com a mais alta potência em 1. Seguindo a seqüência de equações anteriores seria a transformação de $4x^2 = 2x + 5$ em $x^2 = \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}$.

3.1 O Método de Al-Khwarizmi

O objetivo de Al-Khwarizmi em seu *Tratado sobre o cálculo de al-jabr e al-muqabala* era reunir os princípios da nova ciência e fazer uma exposição concisa, tornando seus princípios compreensíveis a todos os leitores. O tratado é composto por dois livros. No primeiro, o autor desenvolveu a teoria das equações quadráticas e do cálculo algébrico. Após a exposição da teoria das equações, Al-Khwarizmi aplicou as operações da aritmética às expressões algébricas. Apresentou também a solução de diferentes problemas através das equações algébricas, utilizando-as, por exemplo, na resolução de certos problemas geométricos. O segundo livro tratou da resolução dos problemas de herança de acordo com as regras do direito muçulmano. Dessa vez, foi nos problemas jurídicos que Al-Khwarizmi utilizou o cálculo algébrico.

Omar Khayyam é bastante conhecido devido às suas poesias e tanto ele quanto Al-Khwarizmi escreviam matemática de maneira retórica, sem símbolos. Encontramos na literatura de Al-Khwarizmi um vocabulário padrão para indicar os objetos dos seus problemas. Como estudou problemas que atualmente correspondem a equações do segundo grau, ele introduziu os termos necessários para o seu entendimento, principalmente os três modos sob os quais o número aparecia no cálculo da álgebra: a raiz, o quadrado e o número simples.

Na sua notação, o quadrado é um conceito algébrico designado pela palavra *Mal*. Não é o quadrado geométrico (*murabba'a*). Citemos Al-Khwarizmi na sua definição dos termos que constituem as equações:

> *A raiz é qualquer coisa multiplicada por ela mesma, a partir da unidade, os números que estão acima dela e as frações que estão abaixo dela.*
>
> *O quadrado é o que obtemos quando multiplicamos a raiz por ela mesma.*
>
> *O número simples é um número que expressamos sem que esteja relacionado nem a uma raiz, nem a um quadrado* (RASHED, 2006, p.96).

O que Al-Khwarizmi quer dizer aqui é que a raiz é o termo essencial, designada pela palavra "*Jidhr*", mas poderia também ser designada pela palavra "coisa" ("*shay'*"). As duas palavras eram usadas para exprimir o que atualmente chamamos de incógnita. Vale destacar que a palavra "coisa" era utilizada para enfatizar a condição de incógnita, pois, em árabe, esta palavra está associada a uma "indefinição" ou "indeterminação". Uma vez que o cálculo de Al-Khwarizmi era formal e a incógnita designava objetos de uma natureza qualquer, a escolha da palavra “coisa” revela a preocupação em elaborar um cálculo que pudesse ser aplicado tanto aos números quanto às grandezas geométricas. Essa preocupação foi fundamental para a criação de um novo domínio (a álgebra) e revela o fato dessa nova disciplina não estar contida nem na geometria, nem na aritmética, nem na reunião das duas. Justamente por essa razão, nos parece correto afirmar que uma nova disciplina estava sendo criada pelos árabes.

A tabela a seguir mostra os termos utilizados por Al-Khwarizmi, bem como os seus significados encontrados nos problemas.

Palavra	Significado	Sentido nos problemas	Notação moderna
‘Adad		Quantidade conhecida (número dado)	c
Jidhr	“raiz”	Quantidade desconhecida	x
Mal	“possessão” “tesouro”	Quadrado da quantidade desconhecida	x^2

Tabela 4

Após a definição destes termos, Al-Khwarizmi classificou os problemas estudados em seis classes (vide Tabela 5). Como falamos anteriormente, ele não considerava grandezas negativas e, por esta razão, não podia considerar uma equação do segundo grau genérica, do tipo $ax^2 + bx + c = 0$ como escrevemos atualmente (além de não empregar notação simbólica e não designar os coeficientes de forma genérica). Sendo assim, para cada uma das seis classes, havia uma regra distinta para a resolução. Cada uma delas foi estudada a partir de exemplos particulares que possuíam, contudo, um valor genérico.

	Linguagem retórica utilizada por al-Khwarizmi	Linguagem retórica mesclada com notação atual	Notação atual
1	*Mal* igual a *Jidhr*.	Quadrados iguais a raízes.	$ax^2 = bx$
2	*Mal* igual a ‘*Adad*.	Quadrados iguais a um número.	$ax^2 = c$
3	*Jidhr* igual a ‘*Adad*.	Raízes iguais a um número.	$bx = c$
4	Mal e *Jidhr* iguais a ‘*Adad*.	Quadrados e raízes iguais a um número.	$ax^2 + bx = c$
5	Mal e ‘*Adad* iguais a *Jidhr*.	Quadrados e um número iguais a raízes.	$ax^2 + c = bx$
6	Jidhr e ‘*Adad* iguais a *Mal*.	Raízes e um número iguais a quadrados.	$bx + c = ax^2$

Tabela 5

No caso dos problemas do tipo 1 ($ax^2 = bx$), Al-Khwarizmi apresentou três exemplos que correspondem a equações cujo coeficiente do quadrado é igual, inferior e superior a 1. O procedimento apresentado para os problemas que tinham o coeficiente do quadrado igual a 1 pode ser considerado como o algoritmo geral para a solução desta classe de problemas, pois esse procedimento poderia ser realizado para qualquer outro exemplo que fosse do mesmo tipo, isto é, “quadrados iguais a raízes”. Já no caso dos problemas que recaem em equações cujo coeficiente do quadrado é superior ou inferior a 1, Al-Khwarizmi mostrou como reduzi-los ao primeiro exemplo, ou seja, como normalizá-los a fim de que se encaixassem na forma canônica.

Podemos dizer que ele apresentou as seis formas canônicas da sua teoria, pois o procedimento usado no exemplo apresentado para cada classe poderia ser usado para qualquer outro exemplo do mesmo tipo. Para reduzir um problema qualquer a um dos seis tipos canônicos, era preciso usar os procedimentos de “*al-jabr*” e “*al-muqabala*”.

Mas para justificar a resolução geral de cada tipo canônico, Al-Khwarizmi percebeu que era necessário um argumento de natureza mais geral que os procediemntos descritos para os exemplos. Nos três primeiros tipos de equação, os procedimentos apresentados eram suficientemente simples e poderiam receber sua justificativa a partir da própria álgebra. Por outro lado, foi preciso recorrer à geometria euclidiana para demonstrar e explicar os procedimentos (algoritmos) de resolução dos outros três tipos de equação. As regras de resolução, nestes casos, foram justificadas de modo quase exclusivamente geométrico, através de procedimentos encontrados nos *Elementos*. A relevância da obra de Al-Khwarizmi consiste exatamente na utilização de procedimentos algébricos articulados com representações geométricas que justificavam os raciocínios utilizados.

3.1.1 Exemplo do tipo 4: "Mal e *Jidhr* iguais a '*Adad*"

A título de exemplo, apresentamos a seguir a solução dada por Al-Khwarizmi para o seguinte problema: "Um *Mal* e dez *Jidhr* igualam trinta e nove denares"[25]. Em notação atual, este problema pode ser expresso pela seguinte equação $x^2 + 10x = 39$, que tem como solução as raízes $x_1 = 3$ e $x_2 = -13$.

Para resolvê-lo al-Khwarizmi apresentou a seguinte seqüência de passos, seguida de uma justificativa geométrica:

Tome a metade da quantidade de *Jidhr*; multiplique esta quantidade por si mesma; some ao resultado os *'Adad*; extraia a raiz quadrada do resultado; subtraia deste resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução.

Apresentamos esta solução organizada em uma tabela, a fim de comparar a solução de Al-Khwarizmi com o procedimento que utilizamos atualmente.

[25] Este exemplo, bem como a sua solução, foi extraído de ROQUE, T, *A Matemática através da história*. Notas de aula do curso de História da Matemática, UFRJ, 2006.

Solução apresentada por al-Khwarizmi	Operações correspondentes em linguagem moderna	Operações correspondentes em linguagem moderna considerando uma equação genérica do tipo $ax^2 + bx + c = 0$
Tome a metade da quantidade de *Jidhr*.	$\frac{10}{2} = 5$	$\frac{b}{2}$
Multiplique esta quantidade por si mesma.	$5^2 = 25$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2$
Some no resultado os *'Adad*.	$25 + 39 = 64$	$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c$ [26]
Extraia a raiz quadrada do resultado.	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$
Subtraia deste resultado a metade dos *Jidhr*, encontrando a solução.	$8 - 5 = 3$	$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} - \frac{b}{2} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot 1 \cdot c}}{2 \cdot 1}$

Tabela 6

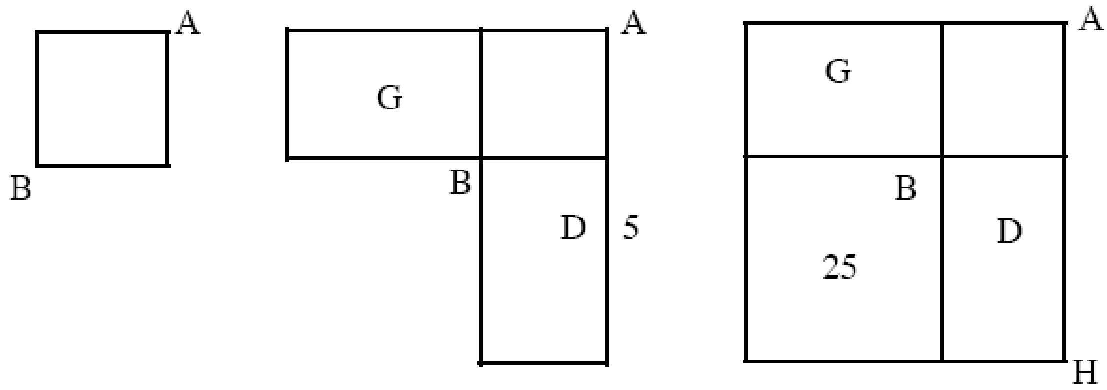
Vemos que a solução apresentada por Al-Khwarizmi corresponde exatamente à raiz positiva da equação $x^2 + 10x = 39$, equivalente ao seu problema. Observando a terceira coluna da Tabela 6, percebemos que o algoritmo de resolução é uma seqüência de operações equivalentes à formula de resolução de equação do segundo grau usada atualmente, o que mostra a generalidade da solução apresentada, mesmo que tenha sido exposta para um exemplo particular.

Para justificar o procedimento algébrico utilizado, Al-Khwarizmi afirmou que “A figura para explicar isto é um quadrado cujos lados são desconhecidos”. Dessa forma, ele representou o quadrado algébrico (*Mal*) pela construção de um quadrado geométrico (indicado por AB na seqüência de figuras a seguir). Em seguida, ele construiu dois retângulos (G e D) sobre dois lados consecutivos do quadrado AB. Esses retângulos deveriam ter como lados a raiz do

[26] Repare que neste caso, o coeficiente c aparece com sinal negativo, pois para Al-Khwarizmi o termo independente deveria aparecer no lado direito da equação.

quadrado procurado (*Jidhr*) e a metade do número de *Jidhr* (isto é, do número de raízes) $\left(\frac{10}{2}=5\right)$. A figura assim formada deveria ter área igual 39, quantidade de '*Adad* do problema.

Usando a proposição II.4[27] dos *Elementos*, era preciso completar a figura com um quadrado de lado igual à metade do número de *Jidhr* $\left(\frac{10}{2}=5\right)$, formando assim um outro quadrado maior de área e igual a $5^2+39=64$. Portanto, o lado AH desse quadrado seria igual a 8 $\left(\sqrt{64}\right)$ e, conseqüentemente, o lado do quadrado desconhecido seria igual a 3 (8 – 5).



Essa construção geométrica reproduz exatamente o procedimento de resolução de Al-Khwarizmi (o seu algoritmo), ficando demonstrada a necessidade de completar quadrado durante a solução algébrica. Fica claro que ele estabeleceu uma analogia entre a geometria e a álgebra ao identificar o lado do quadrado geométrico à raiz do quadrado algébrico. Podemos dizer, portanto, que Al-Khwarizmi recorreu à construção geométrica para explicar e encontrar a causa da divisão em duas metades do número de *Jidhr*. Para al-Khwarizmi, a "causa" não é a demonstração, mas a verdadeira razão do princípio usado no algoritmo.

A demonstração apresentada por Al-Khwarizmi não teve apenas o papel de garantir a verdade do algoritmo, uma vez que ela também exibiu a sua causa, a saber, a necessidade de completar o quadrado. Esse papel para uma justificativa geométrica é totalmente novo: a demonstração do algoritmo não é apresentada para verificar se a solução que ele forneceu está correta, e sim para explicitar as razões do procedimento.

[27] Proposição II.4: Se uma reta for dividida em dois segmentos, então o quadrado construído sobre o todo é igual à soma dos quadrados construídos sobre os segmentos que dividem a reta mais duas vezes o retângulo formado pelos segmentos.

Logo, é correto afirmar que a meta de Al-Khwarizmi era estabelecer uma teoria algébrica para as equações quadráticas, recorrendo à geometria para explicar os algoritmos apresentados. Ele adotou uma abordagem sistemática na elaboração da sua teoria e demonstrou geometricamente pela construção de uma figura o motivo pelo qual a solução das três últimas classes de problemas era válida.

O que permite dizer que Al-Khwarizmi fundou uma nova disciplina, a Álgebra, é o fato de ter apresentado uma classificação dos problemas estudados. Dessa forma, primeiramente, ele expôs a teoria das equações e, em seguida, mostrou como essa teoria podia ser aplicada em todos os tipos de problemas, fossem eles numéricos ou geométricos. Os problemas deveriam, portanto, ser classificados em uma das seis categorias definidas inicialmente. Descoberta a sua classe, o problema seria resolvido por um procedimento análogo ao apresentado para a sua categoria. Por fim, ele aplicou seu método algébrico a todos os tipos de problemas jurídicos (problemas de herança e de divisão conforme os termos do direito muçulmano).

Foi assim que a Álgebra ultrapassou a divisão número/grandeza e permitiu conceber a aplicação de uma a outra. A álgebra de Al-Khwarizmi é independente da Aritmética e da Geometria, apesar de resultados da geometria serem utilizados para explicar procedimentos numéricos.

A seguir falaremos sobre a contribuição de Omar Khayyam para o desenvolvimento da álgebra.

3.2 A *al-jabr* e *al-muqabala* de Al-Khayyam

Na introdução do livro a *Álgebra de Omar Khayyam*[28], o autor afirma que:

> *A álgebra é uma arte científica. Seu objetivo são os números absolutos e as grandezas mensuráveis, estando desconhecidos, mas relacionados a algo que seja conhecido para poder ser determinado [...]; o que procuramos nesta arte são as relações que unem os dados dos problemas à incógnita* (KHAYYAM, 1851, p 5).

[28] Disponível em http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99503d/f73.table, último acesso em 26 de agosto de 2008.

Nessa introdução, Al-Khayyam explicitou o que considerava ser a álgebra. Ele introduziu as notações utilizadas por ele e pelos outros algebristas[29]; fez referência a Euclides (aos *Elementos* e ao *Data*), bem como a Apolônio e as *Cônicas*. Ele afirmou que, para entender bem as suas memórias, era preciso conhecer estes três livros, mostrando que o que ele propôs estava relacionado à geometria clássica grega. Nesta introdução, afirma ainda: "*Se o algebrista emprega o quadrado-quadrado*[30] *nos problemas de medida, ele deve ser entendido metaforicamente, e não propriamente, uma vez que é absurdo que o quadrado-quadrado seja o número de quantidades mensuráveis*" (KHAYYAM, 1851, p. 7).

Aqui percebemos que Al-Khayyam ainda mantinha uma relação estreita com os padrões geométricos. Para ele só fazia sentido medir até a dimensão três e, por essa razão, o quadrado-quadrado deveria ser entendido metaforicamente. Mais a frente ele afirmou: "*Vamos propor métodos através dos quais poderíamos determinar a incógnita nas equações contendo os quatro graus que acabamos de dizer que são os que fazem parte de grandezas mensuráveis, a saber: o número, a coisa, o quadrado e o cubo*" (KHAYYAM, 1851, p. 8). Na sua álgebra, o seu domínio de problemas vai até os de ordem três. Como veremos a seguir, Al-Khayyam utilizava as mesmas palavras para designar grandezas aritméticas ou geométricas, mas precisava interpretar a linguagem adotada para resolver o problema.

Diferentemente de Al-Khwarizmi, Omar Khayyam classificou vinte e cinco espécies de equações explicando o que era preciso para resolver cada uma delas. A tabela a seguir apresenta estes tipos e a sua respectiva tradução em símbolos modernos:

	Linguagem utilizada por al-Khayyam	Notação moderna
1	Um número igual a uma raiz	$a = x$
2	Um número é igual a um quadrado	$a = x^2$
3	Um número é igual a um cubo	$a = x^3$
4	Raízes são iguais a um quadrado	$bx = x^2$
5	Quadrados são iguais a um cubo	$cx^2 = x^3$
6	Raízes são iguais a um cubo	$bx = x^3$

[29] Mais a frente, falaremos sobre a notação adotada por Omar Khayyam.
[30] Para Al-Khayyam o quadrado-quadrado era o produto do quadrado por ele mesmo e o quadrado, por sua vez, era o produto da *coisa* por ela mesma. Sendo assim, o quadrado-quadrado representa a quarta potência.

7	Um quadrado e raízes são iguais a um número	$x^2 + bx = a$
8	Um quadrado e um número são iguais a raízes	$x^2 + a = bx$
9	Raízes e um número são iguais a um quadrado	$bx + a = x^2$
10	Um cubo e quadrados são iguais a raízes	$x^3 + cx^2 = bx$
11	Um cubo e raízes são iguais a quadrados	$x^3 + bx = cx^2$
12	Raízes e quadrados são iguais a um cubo	$bx + cx^2 = x^3$
13	Um cubo e raízes são iguais a um número	$x^3 + bx = a$
14	Um cubo e um número são iguais a raízes	$x^3 + a = bx$
15	Um número e raízes são iguais a um cubo	$a + bx = x^3$
16	Um cubo e quadrados são iguais a um número	$x^3 + cx^2 = a$
17	Um cubo e um número são iguais a quadrados	$x^3 + a = cx^2$
18	Um número e quadrados são iguais a um cubo	$a + cx^2 = x^3$
19	Um cubo, quadrados e raízes são iguais a um número	$x^3 + cx^2 + bx = a$
20	Um cubo, quadrados e um número são iguais a raízes	$x^3 + cx^2 + a = bx$
21	Um cubo, raízes e um número são iguais a quadrados	$x^3 + bx + a = cx^2$
22	Um cubo é igual a raízes, quadrados e um número	$x^3 = bx + cx^2 + a$
23	Um cubo e quadrados são iguais a raízes e um número	$x^3 + cx^2 = bx + a$
24	Um cubo e raízes são iguais a quadrados e um número	$x^3 + bx = cx^2 + a$
25	Um cubo e um número são iguais a raízes e quadrados	$x^3 + a = x + cx^2$

Tabela 7

De acordo com Roque, no livro *Demonstrações de Problemas de al-jabr e al-muqabala*, Al-Khayyam resolveu geometricamente diversos problemas que atualmente correspondem a equações cúbicas. Para estes problemas, diferentemente dos problemas equivalentes a equações quadráticas, ele não conseguiu encontrar algoritmos de resolução, exibindo apenas soluções de caráter geométrico através de interseções de duas cônicas (ROQUE, 2006).

3.2.1 Exemplo do tipo 21 “Um cubo, raízes e um número são iguais a quadrados”

Nosso objetivo não é estudar a obra de Al-Khayyam, queremos apenas entender de que maneira ele resolvia problemas semelhantes aos tratados por Viète. Veremos a seguir um exemplo para entendermos a maneira como ele apresentava as suas soluções. O exemplo está associado a uma equação do terceiro grau, pois julgamos ser interessante a observação de uma solução que utiliza cônicas. Este exemplo pertence à classe denominada por Al-Khayyam “Terceira espécie das quatro equações quadrinômias” e utiliza um círculo e uma hipérbole na sua resolução.

Antes de apresentar os problemas que precisam das cônicas para serem resolvidos, Omar Khayyam mostrou três proposições demonstradas por Euclides e Apolônio nas obras já mencionadas anteriormente. São as seguintes:

1ª) Encontrar dois segmentos de reta entre outros dois segmentos de reta (dados) de maneira que esses quatro segmentos estejam em proporção contínua.

2ª) Estando dados o quadrado ABCD, base de um paralelepípedo retângulo ABCDE e o quadrado MH, construir sobre MH como base um paralelepípedo retângulo igual ao sólido dado ABCDE.

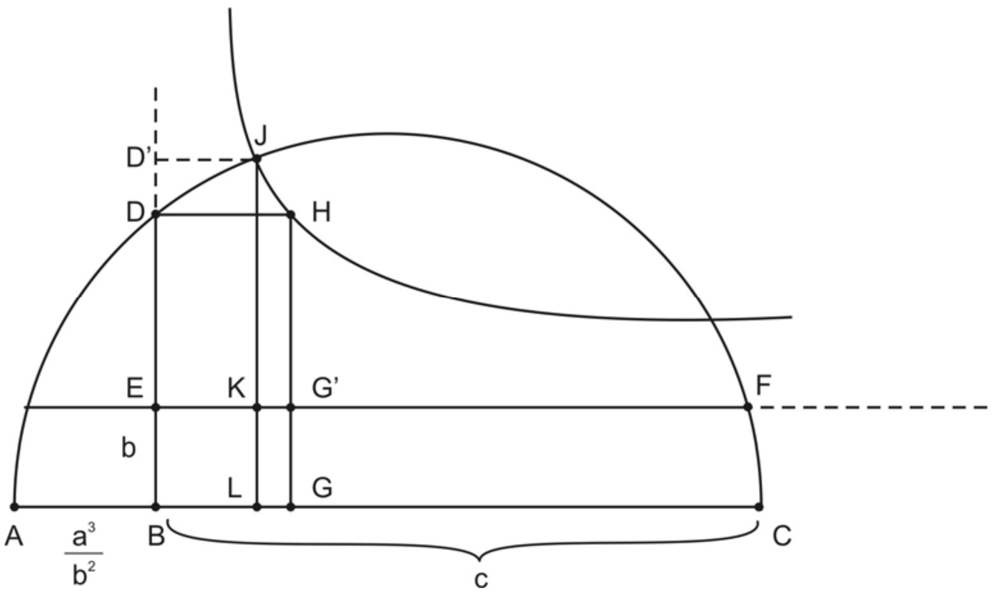
3ª) Estando dados um sólido ABCD cuja base AC ao quadrado, construir um sólido cuja base seja um quadrado, a altura igual ao segmento de reta dado ET e o qual seja igual ao sólido dado ACD.

Um dos tipos de problemas classificados por AL-Khayyam pertencente a “Terceira espécie das quatro equações quadrinômias” é o seguinte: “*Um cubo, lados e números são iguais a quadrados*”. Primeiramente, devemos observar que a própria maneira de Omar Khayyam enunciar o problema já apresenta uma diferença em relação a Al-Khwarizmi: ele o apresenta de maneira mais genérica, pois não especifica quantos lados, números e quadrados são utilizados. Escrito em notação atual, este problema corresponde à equação $x^3 + bx + a = cx^2$. A solução que iremos apresentar é aquela dada por Roque em (ROQUE, 2006).

Solução:

Constrói-se $AB = \frac{a^3}{b^2}$[31] e $BC = c$. Em seguida, desenha-se um semicírculo tendo AC como diâmetro e faz-se com que a perpendicular a AC em B corte o semicírculo em um ponto D. Em BD traça-se BE=b e por E traça-se EF paralelo a AC. Marca-se um ponto G em BC tal que BG.ED = BE.AB[32] e completa-se o retângulo DBGH. Por H desenha-se uma hipérbole que corta o semicírculo em J, tendo EF e ED como assíntotas. A paralela a DE por J corta EF em K e BC em L.

Observamos que este método é útil para demonstrar que a solução é o segmento BL, mas não sabemos como esta construção foi descoberta. É interessante destacar que desde os *Elementos* de Euclides, as construções funcionam, mas o modo como elas foram encontradas não é transparente.



Demonstração de que BL é o segmento procurado:

1) EK.KJ = BG.ED = AB.BE

[31] A construção de AB é feita através do problema euclidiano de encontrar duas quartas proporcionais: dados dois segmentos de comprimentos *a* e *b*, construir um segmento AB de tamanho *m* tal que $b : a = a : z : z : m$. Logo, $m = \frac{a^3}{b^2}$.

[32] Queremos dizer com esta notação que a área do retângulo BG.ED é igual a área do retângulo BE.AB.

Pois ED=G'H, BG=DH, EK=JD' e G'H.DH = KJ.JD', uma vez que o produto das distâncias de cada ponto da hipérbole a cada uma das assíntotas é constante. Logo EK.KJ= BG.ED e esta última área é igual a AB.BE por construção.

2) BL.LJ = AL.BE

Observe que LJ = LK+KJ e AL=AB+BL. Logo, BL.LJ=BL(LK+KJ) e BE.AL=BE(AB+BL)=BE.AB+BE.BL. Mas BL=EK e temos assim que EK(LK+KJ)=EK.LK+EK.KJ. Por (1), obtemos EK.KJ=BG.ED=AB.BE. Resta mostrar que EK.LK=BE.BL=BE.EK, o que é verdade pois LK=BE

3) LJ^2 = AL.LC

LJ^2=AL.LC, pela propriedade do círculo (potência do ponto L).

4) BE^2.AL = BL^2.LC

Por (2) temos que BE = BL.LJ/AL. Substituo em BE obtendo BE^2.AL = BL^2. LJ^2/AL = BL^2.LC e aplicamos (3) em seguida.

5) b^2 AL = b^2 (BL + a^3/ b^2) = $(BL)^2$ LC = $(BL)^2$ (c-BL) =

Substituo BE=b, AL=AB+BL= a^3/ b^2 + BL e LC = BC-BL = c – BL. Escrevendo tudo em BL obtemos:

6) $(BL)^3 + b^2 (BL) + a^3 = c(BL)^2$

O que prova que BL satisfaz à equação.

Apresentamos esta solução, pois julgamos importante o fato de Omar Khayyam ter estudado problemas que recaem em equações cúbicas através de cônicas, o que não era feito pro Viète. A solução que apresentamos não é retórica, como a que foi efetivamente proposta por Al-Khayyam, mas nos permitimos este anacronismo, uma vez que a álgebra árabe não é nosso objeto principal de estudo.

Como dissemos anteriormente, para Al-Khayyam, a "arte da *al-jabr* e *al-muqabala*" visava determinar quantidades geométricas ou numéricas desconhecidas. De acordo com Panza (PANZA, 2OO7), podemos dizer que com o seu *Tratado de al-jabr e al-muqabala*, Al-

Khayyam considerava que esta era uma arte matemática visava: *“i) expressar a forma padrão dos problemas aritméticos e geométricos que atualmente podem ser expressos por equações; ii) classificar estes problemas; e iii) finalmente, mostrar como eles poderiam ser sistematicamente resolvidos”* (PANZA, 2OO7, p. 40, tradução nossa). Veremos ao longo dessa seção que, na verdade, ele queria transformar os problemas em outros problemas, que ele já sabia resolver.

Nos problemas estudados por Al-Khayyam, ele procurava determinar a “raiz” ou o “lado” que satisfazia a determinadas condições. É importante destacarmos que, para ele, a expressão “Um quadrado e um número são iguais a raízes” não era considerada como um objeto matemático, como é o caso da representação deste enunciado por uma equação. Esta é uma das razões pelas quais o seu método de resolução não é tão geral quanto o método algébrico de Viète, que estudaremos no próximo capítulo.

Na sua linguagem, um “número” era uma quantidade dada, isto é, um número no sentido aritmético ou uma quantidade geométrica (um segmento, um retângulo ou um paralelepípedo). Um “lado” (ou “raiz”) era a quantidade desconhecida a ser determinada: um segmento ou um número. O “quadrado” era a segunda potência da raiz ou do lado, no caso de um número, ou um quadrado com lado na raiz ou no lado, no caso de um segmento. Já um “cubo” era tanto a terceira potência da raiz ou do lado, no caso de um número, como um cubo construído com lado na raiz ou no lado, no caso de um segmento.

Se a raiz era um número, então, “algumas raízes”, “alguns lados” ou “alguns quadrados” eram considerados por Al-Khayyam como outros números obtidos tomando-se este número, ou o seu quadrado, um certo número de vezes. Por outro lado, se a raiz, ou o lado, fosse um segmento, o sentido daquelas expressões variava. Se o problema envolvia um cubo, então ele nunca envolveria um quadrado ou um lado, mas sempre “alguns quadrados” e/ou “algumas raízes” ou “alguns lados”. O termo “alguns quadrados” era usado para denotar um paralelepípedo cuja base é o quadrado construído na raiz ou no lado e cuja altura era obtida pegando-se um certo número de vezes um segmento dado considerado unitário. Enquanto que “algumas raízes” ou “alguns lados” eram termos usados para denotar um paralelepípedo cuja altura era a raiz ou o lado e cuja base era obtida tomando-se um certo número de vezes um quadrado construído sobre o segmento dado suposto unitário. Se o problema não envolvia um cubo, mas envolvia um quadrado, então ele nunca envolveria uma raiz ou um lado, mas sempre “algumas raízes”, “alguns lados”. Os termos “algumas raízes”, “alguns lados” eram usados, portanto, para denotar um retângulo cuja base é o lado ou a raiz e cuja altura era obtida tomando-se um certo número de vezes um segmento dado suposto unitário. No outro caso, não havia problema, pois envolvia apenas uma raiz (PANZA, 2007, p 37-38).

A linguagem descrita anteriormente pode ser considerada como uma linguagem comum à aritmética e à geometria, pois designava as formas comuns para tratar qualquer problema de qualquer espécie. Usando esta linguagem, Al-Khayyam conseguia expressar os seus problemas como casos particulares de uma forma comum, fossem eles aritméticos ou geométricos.

Mas apesar de usar a mesma linguagem para todos os tipos de problema, ao resolvê-los, Al-Khayyam precisava fazer uma escolha. Sua linguagem proporcionava uma dupla interpretação – numérica ou geométrica –, mas a sua estratégia de resolução não permitia o mesmo. Era preciso fazer uma escolha entre a aritmética e a geometria para efetivamente resolver o problema. Além disso, no caso de uma interpretação geométrica, Al-Khayyam conseguia resolver problemas de uma maneira geral. Entretanto, para os problemas que eram interpretados pela aritmética, ele não conseguia exibir uma resolução geral, uma vez que não sabia como resolver numericamente os problemas que correspondem a equações do terceiro grau (PANZA, 2007, p 40).

3.2.2 Exemplo do Tipo 16 "Um cubo e quadrados são iguais a um número"

Vejamos como Panza interpreta a solução de Omar Khayyam para a categoria de problemas: "Um número e quadrados são iguais a um cubo" ($x^3 + cx^2 = a$). Primeiramente, Panza observa que esse é um problema cúbico e, portanto, Al-Khayyam não estava apto a resolvê-lo usando uma interpretação aritmética. A solução precisaria exibir uma construção apropriada de um segmento x, tal que o cubo de dimensão x mais o paralelepípedo de dimensões a, x e x fosse igual ao paralelepípedo de dimensões c, u e u; com $a = qu$ e $c = nu$ (em notação moderna, $x^3 + ax^2 = c$), onde q e n eram números quaisquer; a, c eram segmentos dados e u era um segmento unitário.

A fim de apresentar uma solução mais compreensível para um leitor moderno, representaremos, como Panza, o cubo de dimensão x por C(x) e o paralelepípedo de dimensões a, x e x por P(a, x, x). A solução do problema recai no 1º lema que Al-Khayyam havia provado anteriormente, que fornecia a construção de duas meias proporcionais. Esse lema é equivalente à solução geométrica do problema "Um número é igual a um cubo". Para demonstrar esse lema, Al-Khayyam percebeu que a igualdade C(x) = P(c, u, u) é equivalente à proporção *(quadrado de u) : (quadrado de x) :: x : u*, pois, pela proposição XI.34 dos *Elementos* de Euclides, cubos cujas bases são inversamente proporcionais às suas alturas são iguais. A solução é dada como segue:

Trace AB com medida igual a *a* – o segmento dado.

Pelo lema 1, construa o segmento *h* tal que *C(h) = P(c, u, u)*.

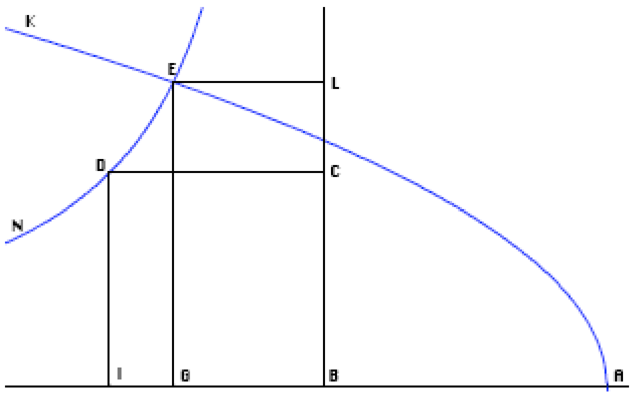
Assim, *h* é dado. Na reta AB, trace BI igual a *h* e construa o quadrado BCDI.

Construa a hipérbole NDE passando por D com assíntotas BC e BI.

Construa a parábola AEK com *latus rectus* BC, eixo de simetria AB e vértice A.

A partir do ponto de interseção E dessas cônicas, trace uma perpendicular EG a reta AB.

O segmento BG é o lado procurado.



Tendo apresentado esta construção, Al-Khayyam prova que ela está certa:

Como o ponto E pertence à parábola AEK, então: AG : EG :: EG : BC.

O ponto E pertence à hipérbole AEK, então: EG : BC :: BC : BG.

Daí, chegamos à proporção continua AG : EG :: EG : BC :: BC : BG que nos fornece que o cubo de dimensão BC é igual ao paralelepípedo de dimensões AG, BG, BG que é igual ao cubo de dimensão BG somado ao paralelepípedo de dimensões AB, BG, BG.

Fazendo x=BG, a igualdade anterior nos diz que C(h) = C(x) + P(a, x, x), que, pelo lema 1 é equivalente à equação C(x) + P(a, x, x) = P(c, u, u), com $a = qu$ e $c = nu$.

De acordo com Panza, Al-Khayyam não falou nada sobre a construção das cônicas utilizadas na sua solução. Como ele não explicitou as suas construções, não podemos considerar a sua solução como estando no padrão sintético. Omar Khayyam tinha por costume não explicitar como o segmento procurado era construído. Na verdade, ele mostrava como o seu problema podia ser reduzido a outro cuja solução era considerada suficientemente conhecida, e deixada a cargo do leitor. No caso desse exemplo, Omar Khayyam mostrou como seria possível obter o segmento procurado supondo conhecida a construção de quatro cônicas (duas parábolas para a construção do lema e uma hipérbole e uma parábola para a solução do problema em si), provando que um dado segmento era o procurado. Na prova, ele mostrou a equivalência entre o problema dado e o problema de construir a interseção das duas cônicas (PANZA, 2007, p. 46-47).

É interessante perguntar qual foi o motivo para Al-Khayyam deixar ao encargo do leitor as construções. Primeiramente, poderíamos considerar que, já que seus problemas eram reduzidos a outros, não haveria interesse em detalhar a sua construção, pois esta já deveria ser conhecida. Por outro lado, esta razão pode estar associada a uma outra: para Al-Khayyam, estas construções não pertenciam ao assunto do seu tratado, ou seja, elas estariam fora do domínio da “arte da *al-jabr* e *al-muqabala*”. Com esta arte, Al-Khayyam se preocupou mais em reduzir os problemas a outros, cuja solução era conhecida, do que em resolver efetivamente estes problemas. Dessa forma, quando dizemos que Al-Khayyam queria “mostrar como estes problemas poderiam ser sistematicamente resolvidos” não estamos dizendo que ele, de fato, os resolvia. Ele os reduzia a outros problemas cuja solução era conhecia (PANZA, 2007, p.51).

Logo, podemos dizer que, de alguma forma, a matemática árabe ainda estava presa à natureza do problema, uma vez que, mesmo que ela pudesse classificar os problemas em formas padrão, para resolvê-los era preciso optar pela característica aritmética ou geométrica. Além disso, como foi mostrado, a não explicitação do caminho da síntese não está relacionada a uma generalidade do procedimento utilizado e sim ao que Al-Khayyam desejava com a sua "arte da *al-jabr* e *al-muqabala*": expressar os problemas geométricos e numéricos que atualmente podem ser escritos como equações em uma forma comum, classificá-los e reduzi-los a outros problemas cuja solução fosse conhecida. Apesar de Al-Khayyam utilizar a álgebra de modo profícuo em seu tratado, ele não resolvia os problemas somente através da álgebra.

Para Panza (PANZA, 2007), o argumento de Viète na resolução das suas *zetéticas*, como veremos a seguir, é estruturalmente similar ao de Al-Khayyam, uma vez que Viète também reduz o problema a um outro cuja solução já era conhecida através da análise. Mas há uma grande diferença entre a estratégia de Viète e a de Al-Khayyam para a redução de um problema a outro mais simples. Ao passo que o árabe precisava interpretar seus problemas como aritmético ou geométrico para poder realizar a análise, Viète conseguia fazer a redução sem a necessidade de fazer uma interpretação preliminar do problema. Isso pôde acontecer justamente porque, para Viète, a análise era um procedimento abstrato, associado a grandezas abstratas.

4 A Arte Analítica de François Viète

4.1 O Problema de Resolver Todos os Problemas

Antes de Viète, o método analítico já era utilizado pelos gregos, mas tratava-se de uma ferramenta de descoberta que devia ser acompanhado por uma síntese. Por esta razão, podemos dizer que os antigos empregavam um método de análise e síntese.

Os árabes desenvolveram uma matemática que já pode ser considerada algébrica, pois utilizavam procedimentos algébricos na resolução de problemas. No século XVI, a álgebra era uma poderosa ferramenta para resolução de problemas, mas ainda não possuía o *status* da geometria, ainda considerada uma ferramenta matemática mais legítima para a resolução de problemas.

Neste capítulo, mostraremos como Viète, em sua *Introdução à Arte Analítica*, transformou a álgebra em uma ferramenta matemática enquadrando-a aos padrões exigidos pela época. Além disso, veremos como o uso da álgebra, associado ao método analítico, fundou um novo cânone para a resolução de "todos os problemas" matemáticos.

Alguns dos mais célebres comentadores do trabalho de Viète – como (BOS, 2001), (CHARBONNEAU, 2005) e (PANZA, 2007) – destacam a importância de se observar os títulos dos seus livros, pois através deles podemos perceber quais eram as suas verdadeiras intenções. *In Artem Analyticem Isagoge* é o primeiro de dez tratados que formam a sua *Opus restituta Mathematica Analyseos, Seu, Algebra nova* (*Obra de Análise Matemática Restaurada, ou, Álgebra Nova*). Neste título a palavra que chama atenção é "*restitua*", levando-nos a acreditar que Viète queria "restaurar" a análise dos antigos (CHARBONNEAU, 2005, p.58). Dando seqüência à *Isagoge*, Viète apresentou os *Cinco Livros das Zetéticas*, nos quais aplica sua arte analítica a 82 problemas que são, em sua maioria, os mesmos estudados por Diofanto na *Aritmética*[33].

[33] Falaremos mais adiante (seção 4.3) sobre a maneira na qual Viète apresentou seus problemas e forneceremos alguns exemplos.

"*A inspiração de Viète foi Diofanto, cujo uso de quantidades desconhecidas na Aritmética ele via como a chave para um método geral de análise que pensava ter sido conhecido pelos matemáticos clássicos e se perdido, mas que poderia ser restaurado.*" (BOS, 2001, p. 146, tradução nossa).

O objetivo da análise de Viète era, portanto, segundo Bos, fundar um método universal para resolver problemas cuja principal ferramenta era a álgebra. Para Barbin e Boyé (BARBIN & BOYÉ, 2005, p.2-3), ao apresentar a sua *Introdução à Arte Analítica*, Viète queria ir além dos matemáticos gregos. É importante lembrarmos que, no final do século XVI, o padrão grego ainda vigorava na comunidade matemática, ainda que a álgebra já se impusesse como uma ferramenta de grande valia. Assim, quando Viète retomou os problemas de Diofanto, nos *Cinco Livros das Zetéticas*, não podemos afirmar que ele estava apenas estudando uma obra antiga com um novo olhar. Na verdade, ele pretendia mostrar que a sua arte analítica permitia que problemas antigos fossem resolvidos com toda a elegância e rigor que a Matemática exige. Além disso, ele também queria provar que esta arte era capaz de propor outros problemas como, por exemplo, problemas numéricos que podem ser resolvidos com letras.

Os tratados de Al-Khwarizmi e Al-Khayyam propagaram-se pela Europa no início da Renascença, divulgando a sua utilidade. A álgebra era, portanto, utilizada por alguns matemáticos contemporâneos de Viète. Entretanto, esta utilização era fragmentada e não seguia um padrão unificado. Os tratados árabes, apesar de fornecerem poderosas ferramentas para a resolução de problemas matemáticos, não eram considerados como parte dos cânones gregos. Eles não eram apresentados na forma axiomático-dedutiva dos *Elementos* de Euclides que, como vimos anteriormente, representava o padrão de exatidão vigente na época. É justamente aqui que se encontra a grande inovação de Viète: buscando usar a ferramenta analítica para resolver qualquer tipo de problema, Viète fez da álgebra uma ciência nos moldes gregos, apresentando-a de maneira axiomática.

Diferente de outros matemáticos gregos, Diofanto, na sua *Aritmética*, não recorria a nenhuma construção geométrica para resolver problemas aritméticos. Ele raciocinava, em geral, em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas que possuíam o mesmo estatuto na resolução do problema, isto é, era preciso supor que todas as quantidades envolvidas eram conhecidas (ROQUE, 2006). Como vimos no capítulo 2, a suposição de que a grandeza procurada é conhecida constitui a principal característica do método de análise.

Viète conhecia, sem dúvida, o método de análise e síntese utilizado pelos antigos e sabia que quantidades desconhecidas podiam ser utilizadas na resolução de problemas, como Diofanto já tinha feito na *Aritmética*. Ele sabia também que a álgebra era uma ferramenta poderosa, pois os tratados árabes eram bastante conhecidos e utilizados, ainda que de modo fragmentado, por seus contemporâneos. Para propor uma unificação destes saberes e fundar um novo padrão para a resolução de problemas matemáticos, Viète apresentou um método sistemático que permitiria resolver qualquer tipo de problema. No final da *Isagoge* lemos que a arte analítica toma para si o maior de todos os problemas, em letras maiúsculas: *NULLUM NOM PROBLEMA SOLVERE* ("nenhum problema sem resolver").

Contudo, o título "pai da álgebra moderna" é ambíguo, pois o sentido que dava a palavra "álgebra" não era o mesmo que o nosso. Talvez esta alcunha se deva ao fato dele ter introduzido o uso de letras para representar, não apenas as grandezas desconhecidas, mas também os coeficientes da equação.

> *Para fazer da álgebra a análise da geometria, Viète foi conduzido a uma invenção primordial: a introdução de símbolos para representar, não somente as grandezas desconhecidas do problema, mas também as grandezas que chamamos, hoje em dia, de parâmetros do problema* (BARBIN & BOYÉ in BARBIN et al., 2005, p.4, tradução nossa).

Como as grandezas desconhecidas já tinham sido representadas simbolicamente antes de Viète, por Diofanto, o grande passo dado por ele foi a introdução do uso de letras para representar parâmetros arbitrários do problema, como os coeficientes de uma equação. Esta invenção permite, por exemplo, que escrevamos o método geral por uma fórmula.

Cabe aqui uma observação importante sobre a diferença entre o coeficiente, quantidade indeterminada arbitrária, e a quantidade desconhecida, que Roque analisa da seguinte maneira:

> *É importante observar que há uma diferença de natureza fundamental entre uma 'incógnita' e um 'coeficiente'. A incógnita é uma quantidade que está desconhecida e que será conhecida a partir das restrições representadas pela equação, já o coeficiente é uma quantidade conhecida genérica que está, portanto, indeterminada na expressão de uma equação como uma equação qualquer. Ambos os casos pressupõem indeterminações, mas em níveis distintos: a determinação dos coeficientes é obtida pela escolha de uma equação particular (arbitrária) e a determinação do valor da incógnita, pela resolução (não arbitrária) desta equação.* (ROQUE, 2006)

Na história da álgebra, Viète é lembrado pela introdução de símbolos para representar as grandezas que estão em jogo em um problema, que permitem escrevê-lo em equação, entretanto, esta não era a sua ambição ao escrever a sua *Introdução à Arte Analítica*. O seu verdadeiro desejo era resolver todos os problemas através da restauração da análise dos antigos. Segundo Barbin e Boyé (BARBIN & BOYÉ in BARBIN et al., 2005, p.1), o projeto de Viète era igualar-se aos antigos, ou fazer melhor que eles, ao propor uma nova utilização do método analítico.

Ainda que não fosse este o seu objetivo primeiro, Viète acabou transformando a álgebra em uma ferramenta legítima para a Matemática. Mas esta "álgebra" não tinha o mesmo sentido que tem para nós, tratava-se de uma "*logística speciosa*". O texto de Guichard em (in BARBIN et al., 2005, p.9-34) mostra claramente o papel desta ferramenta:

> *Assistimos a uma invenção de gênio que marca o começo da ciência moderna. Foi em Tours em 1591 que apareceu um curto tratado de 11 páginas precedido de uma dedicatória à Catherine de Parthenay: 'Introdução à Arte Analítica'*
>
> *O que é esta arte? 'A ciência de bem encontrar na matemática'. Qual é seu objetivo? 'A Arte Analítica se atribui justamente o magnífico problema dos problemas: resolver todos os problemas'. Qual é a ferramenta que permitirá a aplicação do método? Uma invenção nova: 'a logística speciosa', ou seja, um cálculo sobre os símbolos, um cálculo literal.*
>
> *A forma sob a qual se deve abordar a investigação exige os recursos de uma arte especial que exerce sua lógica não sobre os números, que foi erro dos analistas antigos, mas através de uma logística nova [...] Logística speciosa é aquela que é praticada pelos signos ou pelas formas, por exemplo, pelas letras do alfabeto.* (GUICHARD in BARBIN et al., 2005, p.20-21)

Esta passagem evidencia, mais uma vez, o desejo de Viète de resolver todos os problemas. Foi para alcançar este objetivo que ele inventou o que chamou de *logística speciosa*, que se propunha como uma ciência dentro dos padrões gregos. Tratava-se, na verdade, de uma nova maneira de calcular apresentada na forma axiomática. A seguir, apresentaremos a organização da sua *Isagoge* e o papel da *logística speciosa* nesta obra.

4.2 A organização da *Isagoge*

Viète começa a *Introdução à Arte Analítica* fazendo uma diferenciação entre análise e síntese:

> *Encontra-se na Matemática uma certa maneira de procurar a verdade, que diz-se ter sido primeiramente inventada por Platão, que Theon chamou Análise e que, para ele, define a suposição daquilo que procuramos como se estivesse concedido para se chegar a uma verdade procurada, por meio das conseqüências; ao contrário, a Síntese é a suposição de uma coisa concedida para se chegar ao conhecimento daquilo que procuramos pelo meio das conseqüências* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 1-2 , tradução nossa).

Nesta passagem, percebemos que Viète entendia a análise e a síntese como procedimentos inversos, o que difere, na prática, o seu método daquele empregado pelos gregos, para quem os métodos de análise e síntese eram complementares e inseparáveis[34].

Destacaremos, a seguir, os aspectos que nos parecem mais relevantes para compreendermos a arte analítica de Viète.

4.2.1 As Três Fases do Método Analítico: *Zetética*, *Porística* e *Exegética*

Após a citação mencionada, Viète afirma que os antigos já conheciam dois tipos de análise, a *zetética* e a *porística*; porém ele acha conveniente o estabelecimento de um terceiro tipo, a *exegética*. A análise de Viète era, portanto, um método universal para resolver qualquer tipo de problema dividido em três fases: *zetética*, *porística* e *exegética*.

Antes de tecermos alguns comentários sobre cada uma destas fases, apresentaremos uma tabela com as definições encontradas no texto original de Viète, a nossa tradução, o sentido que atribuímos e os comentários encontrados na tradução de Ritter (RITTER, 2004).

Zetética	
Passagem do texto utilizado para tradução	*Doncques la Zeteticque est celle par laquelle se trouve l'égalité, par le moyen de la proportion qui est entre la grandeur que lon cherche & celle qui est donnée.*
Tradução apresentada	*A Zetética é aquela pela qual encontramos a igualdade, por meio da proporção que existe entre a grandeza que procuramos e aquela que é dada.*
Sentido que podemos atribuir	Arte de traduzir o problema, transformando-o em uma ou mais equações.
Observações feitas na Revista François Viète nº7	*Zetética, zetese* de $\varsigma\eta\tau\varepsilon\omega$, procurar; zetética significa em sentido próprio procurar, investigar; zetese, a ação de

[34] Cf. capítulo 3.

	procurar, questão. Viète deu o nome de zetética ao método analítico considerado como um método de investigação por excelência.
Porística	
Passagem do texto utilizado para tradução	*La Poristique est celle par laquelle on examine la verité d'un Theoreme déja ordonné, par le moyen de l'égalité ou la proportion.*
Tradução apresentada	*A Porística é aquela pela qual examinamos a verdade de um teorema já ordenado, por meio da igualdade ou proporção.*
Sentido que podemos atribuir	Transformação da equação e estudo de certas passagens delicadas do caminho analítico cuja reversibilidade não é assegurada de modo convincente para a sua utilização em um tratamento sintético.
Observações feitas na Revista François Viète nº7	Porística, porisma de $\pi o \rho \iota \varsigma \omega$, em sentido próprio "abrir passagem", no sentido figurado "encontrar, descobrir, conseguir". Parece que Viète designa por Porismas certas proposições demonstradas fora dos *Elementos*, através delas, demonstra-se outras pelo método porístico ou sintético; com efeito, por este método se entende uma passagem através da quantidade conhecida para se chegar à descoberta da desconhecida.
Exegética	
Passagem do texto utilizado para tradução	*L'Exegetique est celle par laquelle on trouve la quantité ou grandeur cherchée, par le moyen de l'égalité ou proportion déja ordonée.*
Tradução apresentada	*A Exegética é aquela pela qual encontramos a quantidade ou grandeza procurada, por meio da igualdade ou proporção já ordenada*.
Sentido que podemos atribuir	Resolução efetiva do problema através dos procedimentos descritos anteriormente.
Observações feitas na Revista François Viète nº7	*Rética exegética*. É difícil traduzir esses dois adjetivos. *Rética* deriva de $\rho \eta \tau o \varsigma$ que em grego tem numerosos significados: regrada, determinada segundo certas condições, segundo um plano dado. *Exegética*, *Exegese* derivam de $\varepsilon \xi \eta \gamma \varepsilon o \mu \alpha \iota$, interpretar. A exegese para os antigos é a explicação de coisas divinas, dos mistérios: método rético exegético parece, portanto, significar "método que permite penetrar nos mistérios mais profundos dos matemáticos através de regras determinadas".
Tabela 8	

Usamos também os comentários de Charbonneau sobre estas três fases. Primeiramente, ele afirma que: "*Poderíamos definir a zetética da seguinte maneira: colocação do problema em equação e manipulação desta equação para colocá-la em uma forma canônica que dê lugar a uma interpretação geométrica, freqüentemente em termos de proporção*" (CHARBONNEAU in BARBIN et al., 2005, p.69, tradução nossa).

Dessa forma, podemos considerar a *zetética* como a fase da "tradução". Ao escrever uma equação, passamos da linguagem do problema (que podia ser geométrica ou aritmética) para uma linguagem "algébrica", ou seja, estamos traduzindo o problema em termos de equações. Nesta tradução o procurado era suposto conhecido e uma propriedade característica era encontrada; tal propriedade era chamada de *porisma*.

> *No processo analítico de resolução de problemas geométricos, a porisma só é útil se satisfaz duas condições. Primeiramente, ela deve poder ser traduzida efetivamente em uma construção geométrica [...]. Em seguida, ela deve poder permitir a formação da síntese ao se percorrer o sentido inverso da análise* (CHARBONNEAU in BARBIN et al., 2005, p.69 - 70, tradução nossa).

Isso quer dizer que, no caso de problemas geométricos, a *porisma* só ajuda na resolução do problema se ela puder ser revertida em uma construção. Em outras palavras, a resolução do problema é exibida através de um procedimento analítico, entretanto, esta resolução deveria permitir, caso necessário, a exibição da solução através de um processo sintético, ou seja, no sentido contrário. Fica claro que, para Viète, a análise e a síntese são consideradas como dois processos inversos. Charbonneau conclui que:

> *Ora, para que tal percurso possa ser feito, é necessário que, na análise, cada relação seja equivalente àquela que a precede. O estudo da legitimidade da síntese como a inversa da análise, Viète chama de porística. Em outras palavras, a porística poderia ser definida como o estudo de certas passagens delicadas do caminho analítico cuja reversibilidade não é assegurada de modo convincente para a sua utilização em um caminho sintético. Notemos, contudo, que o sentido que atribuímos à porística não é unânime entre os historiadores* (CHARBONNEAU in BARBIN et al., 2005, p. 70, tradução nossa).

Bos, por sua vez, destaca que "*A interpretação da 'porística' é difícil*" (BOS, 2001, p. 147, tradução nossa). A segunda fase do método analítico causa dúvidas entre os historiadores da Matemática e entre os comentadores da obra de Viète. A porística traduz uma preocupação que não está explícita na resolução efetiva dos problemas, logo sua interpretação não é evidente. Consideraremos aqui a *porística* como a fase da transformação da equação que irá possibilitar a solução, de modo que se tenha sempre em mente o estudo da legitimidade da síntese como procedimento inverso da análise.

Finalmente, a última fase do processo analítico de Viète, a *exegética*, era a arte de reconhecer soluções aritméticas ou geométricas das equações fornecidas pela *zetética* e, quando necessário, transformadas pela *porística*.

De acordo com Witmer (WITMER, 1983, p.11), Viète adotou os termos utilizados por Pappus para nomear as duas primeiras fases do seu método analítico[35]. A *zetética* e a *porística* seriam, respectivamente, a tradução dos termos utilizados por Pappus para designar as análises teorética e problemática. Mas, em Viète, estes termos adquirem um novo sentido.

A arte analítica de Viète era uma arte que deveria exercer três ofícios, segundo Vaulézard (VAULÉZARD, 1630, p.15). Primeiramente, era preciso saber como encontrar a igualdade ou proporção entre a coisa procurada e a dada; em seguida, deveria ser possível examinar esta igualdade ou proporção; e, finalmente, atingir o objetivo de exibir a coisa procurada. Para exercer os três ofícios, que correspondem às três fases do método analítico, Viète fazia uso do que ele chamou de *logística speciosa*.

A *logística speciosa* era a ferramenta privilegiada da *zetética*, ou seja, da tradução do problema em termos do que atualmente chamamos de equações.

4.2.2 A *Logística Speciosa*

Para Viète, a álgebra era um método de cálculo simbólico envolvendo grandezas abstratas. Isso quer dizer que, na sua arte analítica, ele manipulava as grandezas independentemente da sua natureza. Por esta razão, foi preciso criar procedimentos simbólicos de cálculo que pudessem ser aplicados tanto a grandezas geométricas, quanto a quantidades numéricas. Um único símbolo devia poder representar todos os tipos de grandezas.

Além disso, como falamos na seção 4.1, Viète é lembrado como "pai da álgebra moderna" por ter introduzido o uso de letras para representar os parâmetros (ou coeficientes) da equação,

[35] Esta semelhança pode não parecer evidente. Porém, em grego a designação para *zetética* é similar a de teorética, o mesmo ocorrendo para *porística* e problemática.

grandezas conhecidas, mas indeterminadas. Isso nunca tinha sido feito antes. Ele usou as letras do alfabeto para representar tanto grandezas geométricas, quanto grandezas aritméticas, tanto quantidades conhecidas, quanto quantidades desconhecidas. Bos observa que:

> *Viète não via a álgebra, que seria a ferramenta essencial da sua análise, como uma técnica concernindo números, mas como um cálculo simbólico concernindo grandezas abstratas. Ao elaborar esta concepção, ele criou procedimentos simbólicos de cálculo que se aplicavam a grandezas independentemente de sua natureza (número, grandeza geométrica ou outra - note que ele considerava o número como um tipo de grandeza). Com este propósito, ele introduziu letras para simbolizar grandezas indeterminadas, bem como grandezas desconhecidas. Apesar de letras para simbolizar grandezas indeterminadas serem comuns na geometria e já terem sido usadas ocasionalmente na aritmética (sobretudo por Jordanus), Viète foi o primeiro a empregá-las para simbolizar grandezas indeterminadas genéricas. Esse não foi um passo evidente, pois levantou a questão do status e da natureza destas grandezas indeterminadas genéricas e das operações realizadas com elas. [...] Na sua 'nova álgebra', entidades matemáticas como números, segmentos de reta, figuras etc., sejam conhecidas, desconhecidas ou indeterminadas, eram consideradas somente no aspecto de serem grandezas, abstraindo a sua verdadeira natureza. Viète falava de grandezas 'em espécie', em forma ou em tipo, chamando sua nova álgebra de 'cálculo a respeito de formas', ou 'a respeito de espécies': também usou o termo 'logística speciosa' [...] Assim, a sua logística speciosa lidava com grandezas abstratas simbolicamente representadas por letras* (BOS, 2001, p.147, tradução nossa).

Para termos uma idéia da importância da novidade introduzida por Viète ao usar letras para representar os coeficientes de uma equação, esta inovação permitiu que se deixasse de resolver casos particulares e se passasse a resolver os problemas de forma geral. Al-Khwarizmi, por exemplo, mostrou que as equações do 2º grau podiam ser classificadas em seis tipos canônicos e, para cada tipo, precisou exibir um procedimento de resolução. Na medida em que Viète introduz o uso de letras para representar os parâmetros de uma equação, veremos que o seu método analítico permitia que os problemas fossem resolvidos de uma forma geral, sem a necessidade em recair em casos particulares como os de Al-Khwarizmi.

Além disso, o uso de um único símbolo para representar todo tipo de grandeza propiciou que os procedimentos de cálculo fossem apenas simbolicamente representados, não precisando ser efetivamente realizados. Sobre isso, Bos afirma que:

> *Uma vez que considerava grandezas abstratas, Viète podia, obviamente, não especificar como a multiplicação (ou qualquer outra operação) era realmente efetuada, mas apenas como era representada simbolicamente. Assim, a parte 'speciosa' de sua nova álgebra era, de fato, um sistema formal completamente abstrato definido implicitamente por suposições básicas sobre grandezas, dimensões e escalas [...] e por axiomas envolvendo*

> *as operações. As operações eram adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raiz e a formação de razões (*BOS, 2001, p.148, tradução nossa).

Fundando um cálculo para todos os tipos de grandeza (numérica ou geométrica; conhecida ou desconhecida), Viète poderia alcançar seu principal objetivo: resolver todos os problemas. Mas como ele estava preocupado em apresentar uma solução elegante e adequada aos padrões de exatidão exigidos na época, apresentou a sua nova álgebra ao modo de Euclides nos *Elementos*. Esta apresentação axiomática fez com que Bos chegasse a afirmar que: "*A álgebra speciosa de Viète deve, de fato, ser considerada como a primeira ocorrência na matemática de um sistema formal completamente abstrato, com alguma complexidade*" (BOS, 2001, p.148, tradução nossa). Fica clara, portanto, a relevância da contribuição de Viète para a Matemática. Sendo assim, pensamos ser importante apresentar detalhadamente a *Introdução a Arte Analítica*, destacando os fatos mais importantes de cada capítulo. É o que será feito a seguir.

4.2.3 *Dos Símbolos, das Equações e das Proporções*

A abordagem axiomática fica evidente no capítulo II, no qual Viète aceita como demonstrados dezesseis axiomas ou propriedades de igualdade e proporção encontrados nos *Elementos* de Euclides.

> *O método analítico toma como símbolos das equações e proporções aqueles que são os mais conhecidos e que se encontram nos Elementos, demonstrados, como os que seguem:*
>
> *1. Que o todo é igual às suas partes.*
>
> *2. Que coisas iguais a uma mesma são iguais entre si.*
>
> *[...]*
>
> *5. Que, se multiplicamos coisas iguais por coisas iguais, então os produtos são iguais.*
>
> *[...]*
>
> *12. Que a igualdade ou razão [...] não é modificada por uma multiplicação ou divisão comum [de seus termos].*
>
> *[...]*

> *O principal símbolo das igualdades e proporções que é de grande importância durante toda a Análise é este aqui:*
>
> *15. Que, se existem três ou quatro grandezas e se o produto dos extremos é igual ao produto do meio pelo meio, ou dos meios, então as grandezas são proporcionais.*
>
> *E contrariamente:*
>
> *16. Que se existem três ou quatro grandezas e que se existe a mesma razão da primeira para a segunda, e da segunda para a terceira, ou da terceira para a quarta, então aquilo que se obtém através dos extremos será igual aquilo que se obtém através dos meios.*
>
> *Portanto, a proporção pode ser dita 'estabelecida da igualdade' e a igualdade a 'resolução da proporção'* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 4-6, tradução nossa).

Estas duas últimas propriedades garantem que uma equação pode ser transformada em uma proporção e vice-versa. Este é um fato muito importante para Viète. Como veremos na seção 4.3, ele sempre começa a resolução do problema supondo-o resolvido, escrevendo assim uma razão equivalente a uma equação. Ele prossegue manipulando essa equação até obter uma proporção cuja quarta proporcional, em geral, é a grandeza procurada. É necessário, portanto, que uma igualdade possa ser transformada em uma proporção.

Perceberemos, ao longo das próximas seções, que Viète se preocupou em apresentar todos os passos, que deveriam ser percorridos na resolução de um problema, de forma axiomática, pois, assim, a sua nova proposta de solução de problemas não poderia ser contestada.

Neste segundo capítulo, Viète listou algumas propriedades que seriam utilizadas durante a manipulação da razão obtida no início da resolução dos problemas, isto é, na fase que ele batizou de *zetética*. Até o capítulo V foi o que ele fez: exibiu as propriedades que deveriam ser satisfeitas para a manipulação da razão entre os dados do problema e o procurado. Já no capítulo V, ele mostrou uma espécie de roteiro que deveria ser seguido desde a escrita da relação entre os dados e a grandeza procurada até a obtenção da proporção que, como veremos nos exemplos apresentados na seção 4.3, em geral, encerravam a solução do problema.

4.2.4 *Da Lei dos Homogêneos, dos Graus e Gêneros e das Grandezas Comparadas*

Uma outra preocupação de Viète, intitulada por ele de "*Lei dos Homogêneos*", é o tema do capítulo III. Esta regra foi enunciada no início deste capítulo da seguinte maneira: *"Os Homogêneos se comparam aos Homogêneos"* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 7, tradução nossa).

Para marcar a necessidade de comparar apenas grandezas homogêneas, na concepção de Viète, qualquer grandeza deveria ser acompanhada por uma escala. Viète escrevia "A cubo", por exemplo, para designar o que chamamos hoje de A^3. Da mesma forma, "A quadrado cubo" indicava A^5, "A quadrado quadrado cubo", A^7 e "A cubo cubo cubo", A^9. Isso também foi feito neste capítulo, no qual podemos encontrar uma lista das escalas, bem como seus respectivos gêneros:

> *As grandezas que aumentam e diminuem proporcionalmente de gênero em gênero chamam-se escalares.*
>
> *A primeira das grandezas escalares é*
>
> 1. *O lado ou a raiz*
> 2. *O quadrado*
> 3. *O cubo.*
> 4. *O quadrado quadrado.*
> 5. *O quadrado cubo.*
> 6. *O cubo cubo.*
> 7. *O quadrado quadrado cubo.*
> 8. *O quadrado cubo cubo.*
> 9. *O cubo cubo cubo.*
>
> *E as outras que seguem são designadas através do mesmo método e seqüência.*
>
> *Os gêneros das grandezas comparadas na ordem na qual foram enunciadas as escalares são:*
>
> 1. *O comprimento ou largura.*
> 2. *O plano.*
> 3. *O sólido.*
> 4. *O plano plano.*
> 5. *O plano sólido.*
> 6. *O sólido sólido.*
> 7. *O plano plano sólido.*
> 8. *O plano sólido sólido.*

> 9. *O sólido sólido sólido.*
>
> *E os outros que seguem são designados através do mesmo método e seqüência* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 7-8, tradução nossa).

Essa maneira de denotar as grandezas está associada ao cumprimento da lei dos homogêneos. Na concepção de Viète, não se podia trabalhar com grandezas heterogêneas, logo, quando fosse necessário escrever uma relação que envolvesse grandezas heterogêneas, essa diferença devia ficar clara. Isso era feito através da denominação usada após a grandeza. Por exemplo, na expressão $Aplano + ZporB$, A é uma grandeza de dimensão dois enquanto, Z e B têm dimensão 1. Reparem que o produto de duas grandezas de dimensão 1 gera uma grandeza de dimensão dois e, por esta razão, a soma de *A*, que tem dimensão 2, com *ZB* pode ser realizada.

Antes de apresentar a lista de escalas e gêneros, para nos precaver de algum de problema quanto ao uso da lei dos homogêneos, Viète sinaliza que:

> *Se uma grandeza é acrescentada a uma grandeza, ela lhe é Homogênea.*
>
> *Se uma grandeza é retirada de uma grandeza, ela lhe é Homogênea.*
>
> *Se uma grandeza é multiplicada por uma grandeza, aquela que é o produto será Heterogênea a todas duas.*
>
> *Se uma grandeza é aplicada a uma outra grandeza, aquela que fica é Heterogênea a todas duas* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 7, tradução nossa).

Com estas observações, Viète mostra de que maneira as grandezas devem se comportar quando operamos com elas. Como a lei dos homogêneos deve ser respeitada, a lista de escalas e gêneros determina de que maneira as grandezas serão representadas quando comparadas.

4.2.5 *Das Regras e Preceitos da Logística Speciosa*

No capitulo IV, Viète apresenta, por fim, as regras que governam as quatro operações elementares: a adição, a subtração, a multiplicação e a divisão. É neste capítulo, portanto, que Viète fornece os procedimentos de cálculo simbólico com grandezas abstratas. Antes de falarmos sobre estas regras, gostaríamos de lembrar que, de acordo com a última citação da seção 4.2.4, duas grandezas só poderiam ser adicionadas ou subtraídas se fossem homogêneas. Por outro lado, quando multiplicadas, as grandezas não precisavam necessariamente ser homogêneas e o resultado seria heterogêneo a ambas as grandezas. Fica evidente que, para calcular com grandezas abstratas, Viète se inspira nas operações geométricas e, por esta razão, considera o aspecto dimensional da multiplicação e da divisão. Por outro lado, considera grandezas de dimensão superior a três, o que, de certa forma, o distancia da geometria.

Após a definição literal de cada uma das quatro regras para as operações, Viète as enuncia simbolicamente, começando pela expressão "*Sejam duas grandezas A e B*". Esta afirmação marca o fato de Viète considerar duas grandezas quaisquer para enunciar a operação. Em seguida, ele tece observações sobre cada operação, como mostraremos a seguir.

Sobre a adição, primeiramente ele lembra que não se pode trabalhar com grandezas heterogêneas e que é preciso designar de modo conveniente as grandezas que estão sendo somadas e que não são comprimentos ou larguras. Por exemplo, no caso da soma, temos que dizer "*A cubo mais B sólido*". No final das observações sobre adição, ele afirma que: "*Os Algebristas costumam marcar o sinal do acréscimo pelo símbolo* +" (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 10, tradução nossa).

Sobre a subtração, ele começa por afirmar que "*É preciso subtrair a menor da maior*", mostrando a sua preocupação em manipular apenas grandezas positivas. Prossegue mostrando como a subtração é representada: "*A menos B*" no caso de comprimentos e larguras e "*A quadrado menos B plano*" no caso de áreas. Faz, então, a seguinte afirmação: "*Se D está perto de B e se é preciso subtrair B menos D de A o resto será A menos B mais D, pois subtraindo a grandeza B subtrai-se mais do que era preciso, portanto, é preciso recompensar pela adição daquela grandeza*" (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 12, tradução nossa).

Em linguagem atual, ele queria justificar que $A - (B - D) = A - B + D$. Com isso, a recompensa sempre é feita, quaisquer que sejam as grandezas que estão sendo subtraídas. Esta observação exprime o que hoje chamamos de "propriedade distributiva", juntamente com a regra dos sinais. Queremos dizer que $A - (B - D) = A + (-1)(B - D) = A + (-1)B - (-1)D = A - B + D$. Ou seja, na segunda igualdade, usamos a propriedade distributiva e na terceira, a regra dos sinais.

Para concluir, ele introduz o símbolo "–" para simbolizar a operação de subtração e termina com a seguinte observação:

> *Mas, uma vez que não se exprime qual das duas grandezas é a maior ou a menor, e de qualquer forma se faz a subtração, a marca da diferença é ==, que se diz 'menos', mas com incerteza. Por exemplo, se propusesse A quadrado e B plano, a diferença seria A quadrado == B plano ou B plano == A quadrado* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 12, tradução nossa).

Como, na concepção de Viète, sempre se deve subtrair a menor da maior, ele introduziu o símbolo "=="[36] para marcar a subtração de duas grandezas quando não se sabe qual das duas é a maior, ou seja, o símbolo "==" representa o módulo da diferença. Esta observação realça uma fraqueza de sua álgebra: Viète não considerava grandezas negativas. Por outro lado, esta mesma observação indica a generalidade do método analítico de Viète: uma vez que grandezas negativas não eram consideradas, Viète precisou mostrar como seria representada simbolicamente uma diferença que, eventualmente, poderia gerar uma grandeza negativa.

Para a multiplicação, Viète começa observando que o produto é heterogêneo às grandezas que o geraram. Assim como para as outras operações, ele sinaliza que, se as duas grandezas fossem comprimentos ou larguras, a multiplicação seria representada, por exemplo, como "*A por B*", caso contrário, seria preciso designá-las pela nomeação conveniente, ficando representada, por exemplo, por "*A quadrado por B*" ou "*A cubo por B plano*". E prossegue afirmando que:

> *Quando o nome de uma grandeza que é positiva for multiplicado pelo nome de uma outra grandeza também positiva, o que for produzido também será positivo, e aquilo que for multiplicado por uma que é negativa será negativo.*
>
> *Como conseqüência desta regra, é preciso que o produto pela multiplicação mútua dos nomes afetados de negação seja positivo* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 14, tradução nossa).

Com esta observação, Viète enuncia explicitamente a regra dos sinais. Para concluir esta regra, exibe parte das denominações dos produtos entre grandezas que aumentam de gênero em gênero. Por exemplo: "*O lado multiplicado por si mesmo produz o quadrado*"; "*O lado pelo quadrado cubo faz o cubo cubo*"; e "*O cubo pelo quadrado cubo faz o quadrado cubo cubo*".

Na quarta e última regra Viète mostra como as grandezas se comportam quando divididas por outras grandezas. Como Witmer observa (WITMER, 1983, p. 16), para Viète, existia uma

[36] O símbolo que Viète utilizava era parecido com o sinal de igual que usamos na notação moderna só que alongado. Por esta razão, utilizaremos nesta dissertação dois sinais de igual seguidos "==" para indicar este símbolo.

diferença entre divisão e aplicação. Na aplicação, o gênero do quociente é heterogêneo ao gênero da grandeza aplicada. Por exemplo, a aplicação do plano por um comprimento dá outro comprimento que, por sua vez, é heterogêneo ao plano. Por outro lado, na divisão, o quociente é homogêneo ao gênero da grandeza dividida. Por exemplo, a divisão da reta em três partes dá três retas homogêneas.

Como nas outras regras, Viète começa mostrando como esta operação deve ser representada, através de uma pequena linha, como na notação atual para frações: "*Por exemplo,* $\frac{Bplano}{A}$ *para aquela que marca a largura que se obtém da aplicação de B plano pelo comprimento A*" (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 17, tradução nossa).

Observamos que, na parte superior, temos a grandeza de maior dimensão. Assim como na multiplicação, Viète apresenta, em seguida, uma lista mostrando como as aplicações poderiam aparecer: "*O quadrado aplicado ao lado produz o lado*"; "*O quadrado cubo aplicado ao lado produz o quadrado quadrado*"; e "*O quadrado cubo aplicado ao quadrado produz o cubo*".

Ele termina a exposição desta regra dizendo que na parte mais alta (numerador) ou na parta mais baixa (denominador) podem aparecer grandezas adicionadas, subtraídas, multiplicadas ou divididas. Sendo assim, Viète fecha este capítulo exibindo as regras de manipulação de frações. Por exemplo:

"$\frac{BporA}{B}$ *é dito A*"

"$\frac{Aplano}{B}$ *adicionado à Z a soma será* $\frac{Aplano + ZporB}{B}$"

"*se for preciso multiplicar* $\frac{Aplano}{B}$ *por* $\frac{Zquadrado}{G}$*, o produto será* $\frac{Aplano\_por\_Zquadrado}{B\_por\_G}$"

"*se for preciso aplicar* $\frac{Bcubo}{Z}$ *à* $\frac{Acubo}{Dplano}$ *o resultado será* $\frac{Bcubo\_por\_Dplano}{Z\_por\_Acubo}$".

Podemos perceber que, apesar das grandezas terem sido representadas por letras e as operações terem sido realizadas de maneira abstrata, as equações de Viète eram bem próximas de sentenças. Ou seja, apesar de ter introduzido uma nova maneira de representar as operações, com o uso dos símbolos “+”, “–”, além do traço de fração para indicar a divisão, Viète não representa simbolicamente toda a equação.

Em todo caso, neste capítulo, Viète mostra a sua preocupação, por um lado, com o efeito das quatro operações sobre a dimensão das grandezas representadas pelas letras utilizadas, por outro lado, com as notações. Além disso, ele enuncia regras de manipulação dos símbolos que exprimem propriedades das operações, como a comutatividade da multiplicação, a distributividade da multiplicação em relação à soma e as regras de manipulação das frações – somar, subtrair, multiplicar ou dividir aplicações (CHARBONNEAU, 2005. p. 68).

4.2.6 *Das Regras da Zetética*

Sobre o capítulo V, Charbonneau afirma que:

> *No capitulo V, ‘Das regras da zetética’, Viète trata, finalmente, das regras de manipulação das equações e do vocabulário utilizado. Por exemplo, a escolha das vogais para as incógnitas e das consoantes para as grandezas dadas. Mas esta nova palavra ‘zetética’, que aparece no título deste capítulo, o que significa? Para entender, devemos ir além da logística speciosa e retornar à razão de ser da arte analítica, que é resolver os problemas* (CHARBONNEAU, 2005. p. 69).

Na expectativa de resolver todos os problemas, Viète apresenta, neste quinto capítulo, um conjunto de 14 regras, introduzindo o novo vocabulário e também as regras de manipulação das equações. Esse conjunto de regras pode ser entendido como passos a serem seguidos na resolução de um problema. A título de curiosidade apresentamos algumas dessas regras:

> *A maneira de se praticar a Zetética consiste quase que completamente pelas regras que se seguem:*
>
> *[...]*
>
> *4. As grandezas, tanto as dadas quanto aquelas que são procuradas, serão comparadas conforme a condição da questão, adicionando, subtraindo, multiplicando e dividindo, de maneira que a lei dos Homogêneos seja preservada.*

> *É então evidente que, ao fim, encontraremos qualquer coisa igual à grandeza que procuramos ou a uma de suas potências, aquela que aumentará, e aquela que ou é obtida totalmente a partir das grandezas dadas ou é obtida em parte a partir das grandezas dadas e das grandezas desconhecidas, ou através de um de seus graus paradoxos.*
>
> *5. A fim de que a operação seja facilitada por um artifício, será necessário distinguir as grandezas dadas das desconhecidas por um símbolo constante perpétuo e bem claro, por exemplo, designa-se as grandezas desconhecidas pela letra A ou outra vogal E, I , O U, Y e as dadas, pelas letras B, C, D ou outras consoantes.*
>
> *6. Os produtos de grandezas dadas serão acrescentados entre si ou subtraídos conforme a condição da questão, e serão reunidos em um único produto, que constituirá o Homogêneo da comparação ou, através da medida dada, será uma das partes da equação* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 21-23, tradução nossa).

Na quarta regra, Viète lembra a lei dos homogêneos. Já na quinta regra, chama a atenção para o uso de vogais para grandezas procuradas e consoantes para as grandezas conhecidas. Este, portanto, deve ser um padrão em todas as resoluções de problemas. Na sexta regra, por sua vez, Viète define o que é o *homogêneo de comparação*, a parte da equação sem vogais, ou seja, conhecida.

Witmer traduziu a sexta regra da seguinte maneira:

> *Termos formados exclusivamente por grandezas dadas são somados a ou subtraídos um do outro de acordo com o sinal de suas afecções e consolidados em um único. Este será o termo homogêneo de comparação ou a constante, coloque-o de um lado da equação* (VIÈTE apud WITMER, 1983, p.24, tradução nossa).

Citamos esta tradução para mostrar como o texto de Vasset é, muitas vezes, de difícil compreensão e a comparação com outras traduções, como as de Witmer, Vaulézard e Ritter, foi fundamental na elaboração deste trabalho.

A sétima regra afirma que:

> *7. Da mesma forma, termos formados por quantidades dadas e pelo mesmo grau de ordem menor são somados a ou subtraídos um do outro de acordo com o sinal de sua afecção e consolidados em um só. Este é o termo homogêneo de afecção ou o termo homogêneo de ordem menor* (VIÈTE apud WITMER, 1983, p.24, tradução nossa).

Viète mostra, por estas regras, como as grandezas devem ser manipuladas, evidenciando a sua preocupação em apresentar a sua arte de maneira axiomática. Os itens 9, 10 e 11 falam sobre a manipulação da equação, utilizando as noções comuns apresentadas no capítulo II da *Isagoge*. A título de exemplo, observemos a nona regra:

> *9. Portanto, se ocorrer que um Homogêneo sob a medida dada esteja misturado a um Homogêneo sub-gradual, será preciso realizar a antítese. A antítese é realizada quando as grandezas que afetam, ou que são afetadas, passam de um lado da equação a outro, com o signo de afecção contrário. Esta operação não muda a equação, ainda que seja preciso demonstrar este fato* (VIÈTE apud RITTER, 2004, p. 29, tradução nossa).

Viète queria dizer que, quando passam de um lado para outro da equação, as grandezas trocam de sinal, ou seja, as que estavam sendo somadas de um lado passam a ser subtraídas do outro e vice-versa.

Vejamos de que maneira Viète justifica esta possibilidade:

> *A igualdade não é modificada pela antítese.*
>
> *PRIMEIRA PROPOSIÇÃO*
>
> *Seja proposto que A quadrado menos D plano seja igual a G quadrado menos B por A. Diz-se que A quadrado mais B por A é igual à G quadrado mais D plano e que para esta transposição, através da marca da nomeação contrária, a equação não é modificada. De fato, uma vez que A quadrado menos [D] plano é igual à G quadrado menos B por A, se somarmos a uma parte e outra D plano mais B por A, segue pela noção comum que A quadrado menos D plano mais D plano mais B por A é igual à G quadrado menos B por A mais D plano mais B por A. E uma vez que a nomeação negativa na mesma parte da equação destrói o positivo em tal equação, assim, D plano desaparece de um lado e B por A de outro, o que resta é A quadrado mais B por A igual à G quadrado mais D plano* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 24-25, tradução nossa).

Para justificar essa propriedade, Viète utiliza um exemplo: mostra que a igualdade $Aq - Dp = Gq - BA$ é equivalente $Aq + BA = Gq + Dp$. Para justificar esse fato, ele afirma que basta somar às duas partes $Dp + BA$. Pela noção comum nº3, apresentada no capítulo II da *Isagoge*, a igualdade não é modificada. Além disso, ele destaca que, se de um mesmo lado da equação tivermos uma grandeza com a nomeação negativa e essa mesma grandeza com a nomeação positiva, uma cortaria a outra, não sobrando nada.

Em notação atual, a antítese (ou transposição) nada mais é do que a passagem de um termo de um membro para o outro da equação. Ou seja, considerando o exemplo apresentado por Viète, ele mostra que, quando passamos *Dp* para o lado direito da equação, este termo, que estava sendo subtraído, será somado e *BA,* que estava sendo subtraído do lado direito, será somado ao lado esquerdo.

$$\begin{array}{l} Aq - Dp = Gq - BA \\ \downarrow \textit{transposição} \downarrow \\ Aq + BA = Gq + Dp \end{array}$$

Podemos esquematizar da seguinte maneira as outras duas regras, *hipobibasme* (depressão) e *parabolismo* (redução):

$$\begin{array}{l} Ac + BAq = ZpA \\ \downarrow \textit{hipobibasme} \downarrow \\ Aq + BA = Zp \end{array} \qquad \begin{array}{l} BAq + DpA = Zs \\ \downarrow \textit{parabolismo} \downarrow \\ Aq + \dfrac{DpA}{B} = \dfrac{Zs}{B} \end{array}$$

Dando seqüência àquelas três regras de manipulação, Viète prossegue dizendo que:

> *12. Depois de tudo isso, uma equação pode ser dita estar claramente expressa e na ordem própria. [Pode ser] reescrita, se você desejar, como uma proporção, mas com este cuidado particular: o produto dos termos extremos [da proporção] corresponde à potência mais os termos homogêneos de nomeação e o produto dos termos do meio corresponde à constante.*
>
> *13. Daqui,a proporção construída propriamente pode ser definida como uma série de três ou quatro grandezas expressas tanto em termos puros ou afetados, quanto em termos dados, exceto o termo procurado bem como sua potência e seus graus de ordem menor* (VIÈTE apud WITMER, 1983, p.27, tradução nossa).

Fica claro por estas regras que, na resolução dos problemas, Viète desejava chegar a uma proporção envolvendo grandezas dadas e a grandeza procurada. Finalmente, Viète encerra este capítulo mostrando o quanto Diofanto serviu como fonte de inspiração para a sua arte:

> *Diofanto usou a Zetética o mais sutilmente de todos naqueles livros que foram coletados na Aritmética. Ali, exibe seguramente este método nos números, mas não nos símbolos, para os quais, contudo, pode ser usado. Por isso a sua ingenuidade e rapidez de pensamento devem ser admiradas, para as coisas que parecem ser muito sutis e difíceis de entender na Logística Numerosa, mas que são completamente familiares e até mesmo fáceis na Logística Speciosa* (VIÈTE apud WITMER, 1983, p.27, tradução nossa).

Nesta passagem, Viète mostra o desejo de ir além de seu mestre. Diofanto usou este método da *zetética* para os números, mas não para os símbolos, como ele estava propondo. Na *logística speciosa*, alguns fatos importantes que eram mascarados pela particularidade dos números, tornam-se mais simples e familiares.

4.2.7 *Do Exame dos Teoremas Pela Porística*

Como dissemos na seção 4.2.1, a *porística* é a fase do método analítico mais difícil de ser interpretada. Vejamos as observações feitas por Viète:

> *A Zetética estando completa, os analistas passam da hipótese à tese e apresentam os teoremas que surgiram da sua descoberta na forma prescrita pela arte, de acordo com as leis* ($\kappa\alpha\tau\alpha\_\pi\alpha\nu\tau o S,\_\kappa\alpha\theta\_\alpha\upsilon\tau\alpha,\_\kappa\alpha\theta o\lambda o\upsilon\_\pi\rho\omega\tau o\upsilon$[37]).
>
> *Estes teoremas, ainda que demonstrados e bem fundados na zetética, ainda estão sujeitos às leis da síntese, que é considerada como o método mais racional de demonstração. Se necessário, eles são confirmados por ela, o que constitui um grande milagre da arte da invenção. Assim, se refaz o caminho da análise. Isso é por si só [uma forma de] análise e, graças à introdução da logística speciosa, não é mais algo difícil. Mas se alguma descoberta não familiar é encontrada [...] a porística deve ser tentada primeiro. Será fácil retornar à síntese mais à frente. Exemplos disso são dados por Theon nos "Elementos", por Apolônio de Perga nas "Cônicas" e por Arquimedes em vários livros* (VIÈTE apud WITMER, 1983, p.27-28, tradução nossa).

Podemos entender esta fase como a da verificação. Isto é, enquanto a *zetética* pode ser considerada como a arte de traduzir o problema, a *porística* pode ser considerada como o momento da arrumação e de confirmação de fatos não demonstrados que, eventualmente, apareceram durante a *zetética*.

Viète destaca ainda a importância da síntese quando diz que ela é *"considerada como a via de demonstração mais conhecida da Lógica e que, quando os teoremas são confirmados por esta via, trata-se de um grande elogio, que traduz a aprovação da arte"* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p.28-29, tradução nossa). Fica claro, portanto, a valor do raciocínio sintético. Sempre

[37] Estas "leis" expostas por Aristóteles na *Analítica Posterior*, Livro 1, Parte IV, governam a relação do atributo a um sujeito. Um atributo é $\kappa\alpha\tau\alpha\_\pi\alpha\nu\tau o S$ se é predicado em todas as instâncias nas quais o sujeito aparece; é $\kappa\alpha o\_\alpha\upsilon\tau\alpha$ se é um elemento do sujeito essencial e não acidental; e é $\kappa\alpha\theta o\lambda o\upsilon\_\pi\rho\omega\tau o\upsilon$ se "é completamente convertível com o sujeito" (WITMER, 1983, p.28).

que for preciso "*será necessário primeiramente tentar a via da Porística, da qual o regresso à síntese é fácil*" (VIÈTE apud VASSET, 1630, p.29, tradução nossa).

Ou seja, não esquecendo a soberania da síntese na Matemática, Viète mostrou a sua preocupação em ser rigoroso no tratamento de questões ainda não demonstradas: toda vez que se deparasse com elas seria preciso exibir um procedimento que pudesse ser percorrido tanto no sentido analítico, quanto no sentido sintético. Mesmo que a arte analítica de Viète permitisse que o caminho analítico pudesse ser sempre percorrido, era preciso que esse caminho pudesse ser percorrido no sentido contrário, através de um procedimento sintético, sempre que necessário. A via da *porística*, portanto, era aquela que permitia que uma solução fosse entendida tanto através da análise, quanto através da síntese.

4.2.8 *Do Ofício da Rética*

Neste capítulo, Viète explica a *exegética*, última fase do seu método analítico:

> *Uma equação estando estabelecida com uma grandeza procurada, a Rética ou Exegética, que é a parte restante da análise e pertence especialmente à ordem geral da arte (como logicamente deveria ser, uma vez que as outras duas estão mais preocupadas com padrões do que regras), realiza a sua função. E o faz com números, se o problema a resolver preocupa-se com um termo que deve ser extraído numericamente, e comprimentos, superfícies e corpos, se é uma questão para exibir a própria grandeza. No último caso, o analista se transforma em geômetra realizando a construção depois de ter encontrado a solução que é um analogismo da verdade. No primeiro, ele se torna um aritmético, resolvendo numericamente qualquer potência apresentada, pura ou afetada. Traz adiante exemplos da sua arte, tanto aritméticos quanto geométricos, de acordo com os termos da equação que ele encontrou ou a própria proporção derivada dela* (VIÈTE apud WITMER, 1983, p.28-29, tradução nossa).

Como dissemos na seção 4.2.1, a *exegética* é a resolução efetiva do problema que utiliza os resultados obtidos nas outras duas fases. Para exibir a resposta do problema, Viète observava a proporção encontrada no final da *zetética*. Como os problemas podiam ser aritméticos ou geométricos, era preciso ter habilidades tanto na Geometria quanto na Aritmética.

No caso de problemas geométricos, era preciso saber exibir uma construção através da proporção encontrada. Já no outro caso, era preciso saber obter numericamente, a partir daquela proporção, o que Viète tinha por costume chamar de *lado*, ou seja, o que era procurado no problema (a quantidade desconhecida). Por exemplo, a proporção $\frac{S+R}{S}=\frac{G}{E}$ é a proporção que resolve a *zetética III* do *Primeiro Livro das Zetéticas*. Na concepção de Viète, *S*, *R* e *G* eram símbolos utilizados para representar grandezas conhecidas e *E*, para a grandeza procurada[38]. Logo, se $S = 3$, $R = 2$ e $G = 60$, então teríamos $\frac{3+2}{3}=\frac{60}{E}$, logo $E = 3 \cdot 12 = 36$, pois, para manter a proporção existente entre os numeradores, é preciso que *E* seja 12 vezes 3, ou seja, 36. No caso geométrico, por outro lado, era preciso saber construir a quarta proporcional.

Podemos dizer que, para exercer o ofício da *rética*, era preciso ser possuidor das habilidades necessárias para exibir a solução a partir da proporção obtida na *zetética*, seja em um problema numérico ou geométrico.

4.2.9 *Definições das Equações e o Epílogo da Arte*

Finalmente, no oitavo e último capítulo, Viète apresenta uma seqüência de 29 itens que explicam, na linguagem da sua arte analítica, o que é uma equação, bem como seus termos, além de dizer o que aquele que conhece a análise deve fazer quando se depara com um problema numérico ou geométrico. Por exemplo:

> *1. Quando se pronuncia simplesmente a palavra equação, em análise, entende-se como a igualdade ordenada conhecidamente pela Zetese.*
>
> *[...]*
>
> *10. O primeiro grau paradoxo da potência é a raiz que está sendo procurada. A última, aquela que é um grau mais baixa do que a potência, se chama usualmente epanaphore ou sub-relativo.*
>
> *[...]*
>
> *16. A grandeza certa a qual as outras são comparadas se chama Homogêneo de comparação* (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 31-33, tradução nossa).

E no vigésimo quinto item, Viète enuncia a *neusis* a fim de suprir as deficiências da Geometria:

---

[38] Cf. seção 4.2.6.

> *Para suprir quaisquer deficiências geométricas da geometria no caso de equações cúbicas ou bi-quadráticas, [a arte analítica] assume que é possível desenhar, a partir de qualquer ponto, uma reta intersectando quaisquer duas retas dadas, o segmento formado entre as duas retas sendo prescrito de antemão.*
>
> *Isso sendo concedido – mais ainda, não é mais uma suposição difícil – problemas famosos que foram chamados até aqui de irracionais podem ser resolvidos de acordo com a arte: o problema mesográfico, aquele da trissecção de um ângulo, a descoberta do lado do heptágono e todos os outros que recaem em fórmulas para as equações nas quais os cubos, puros ou afetados, são comparados com sólidos e quartas potências com plano plano* (VIÈTE apud Witmer, 1983, p.32, tradução nossa).

A observação feita após a enunciação do procedimento da *neusis* enaltece a arte analítica, visto que, com ela, seria possível resolver alguns problemas clássicos que até aquele momento não possuíam solução. Viète conclui que, com a *neusis* tida como axioma, é possível resolver qualquer problema que recaísse em equações de ordem 3 e 4.

A *neusis* já era conhecida pelos gregos e consistia no procedimento de intercalar uma reta de tamanho dado entre duas linhas – retas ou círculos – cujas posições fossem dadas. Tal procedimento resolvia, por exemplo, o problema da trissecão do ângulo, mas para realizá-lo era preciso uma régua graduada, o que não era aceito na geometria grega.

Viète percebeu que, para resolver os problemas gregos que não possuem solução com régua e compasso, ele deveria aceitar a *neusis* como um novo axioma. De acordo com Barbin e Boyé, a introdução da *neusis* como um novo axioma gerou uma análise capaz de resolver os problemas que recaem atualmente em equações do terceiro grau sem a utilização das cônicas – escolha feita por Omar Khayyam e Descartes, respectivamente, antes e depois de Viète (BARBIN & BOYÉ in BARBIN et al., 2005, p.3-4). Percebemos o pragmatismo de Viète: se para resolver todos os problemas seria preciso considerar a *neusis* como um axioma, que isso fosse feito. Foi o que ele fez.

O último item, fecha a *Isagoge*, mostrando a real ambição de Viète ao apresentar a arte analítica:

"*Finalmente, a Arte Analítica sendo revestida de sua tripla forma de Zetética, Porística e Exegética, resolve o problema, o mais relevante e excelente de todos os outros problemas que é RESOLVER TODOS OS PROBLEMAS*" (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 36, tradução nossa).

Podemos concluir agora pelo que anunciamos na seção 4.1: Viète escreveu a sua *Introdução à Arte Analítica* no padrão grego, na expectativa de que esta nova axiomática pudesse resolver todos os problemas.

Podemos ver por suas citações que Viète conhecia bem a Matemática dos gregos, uma vez que introduziu a *neusis* como uma ferramenta de construção legítima. Sua maior inspiração veio da obra de Diofanto. Mas não esqueçamos que Viète queria superar os antigos, o que fica claro quando afirma, por exemplo, que a sua *logística speciosa* para as letras vai além do que a *logística numerosa* de Diofanto tinha feito para os números na *Aritmética*. Sua logística é mais geral que a de Diofanto e, na geometria, ele soube como agregar a *neusis* à sua arte, permitindo resolver alguns problemas famosos que não podiam ser resolvidos com régua e compasso.

Para concluir, gostaríamos de destacar mais uma vez que, mesmo que não tenha sido esse o seu propósito, a maior contribuição do trabalho de Viète foi a introdução do uso de letras para representar tanto grandezas conhecidas, como desconhecidas, tanto grandezas numéricas quanto geométricas, propiciando uma generalidade inédita. Isso permitiu que os problemas fossem enunciados de uma forma geral e também que pudessem ser resolvidos por um método geral.

O procedimento usado na resolução dos problemas não dependia mais da natureza dos dados do problema e, portanto, poderia ser usado para qualquer problema. Não importa aqui a especificidade do problema e, de fato, os problemas tratados por Viète não eram particularizados, mas gerais. Isto permitiu também uma transformação do enunciado, em que se tornou possível dizer, por exemplo, como fez Viète: "*Dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontrar os lados*". Este é um grande avanço, em termos de generalidade, em relação aos enunciados árabes particulares, como "*Um Mal e dez Jidhr igualam trinta e nove denares*".

4.3 *Os Cinco Livros das Zetéticas*

Depois de apresentar de maneira axiomática a sua nova álgebra, Viète estuda uma seqüência de problemas que ele chamou de *zetéticas*, por analogia com a primeira fase da sua arte analítica. Tratam-se de cinco livros. Como poderemos perceber nos exemplos apresentados em seguida, os problemas estudados no primeiro livro recaem em equações do 1º grau, enquanto as *zetéticas* do segundo livro, por exemplo, são equivalentes a equações quadráticas. Nesta dissertação, a título de exemplo, estudamos apenas os resultados obtidos por Viète no *Primeiro `Livro das Zetéticas.*

Antes de apresentarmos algumas *zetéticas*, gostaríamos de recapitular a forma na qual Viète apresenta a sua arte:

> *É então uma 'nova álgebra' [...] que Viète põe em prática. Eis aqui sua abordagem, aquela que ele descreveu.*
>
> *- Escreva com letras as relações entre as grandezas do problema: as grandezas desconhecidas pela letra A ou outra vogal E, I , O U, Y e as dadas pelas letras B, C, D ou outras consoantes. [...]*
>
> *- Respeite a lei dos homogêneos, ou seja, a dimensão das grandezas. [...]*
>
> *- Extraia as grandezas desconhecidas das grandezas dadas: para tanto, aprendemos a transformar as equações para resolvê-las através de fórmulas literais pré-estabelecidas. [...]*
>
> *- Aplique a um problema particular: é a primeira etapa do método. Uma vez a fórmula geral obtida, substituímos as letras pelos números do problema particular que temos que resolver. [...]* (GUICHARD in BARBIN et al., 2005, p.21-22, tradução nossa).

Este esquema mostra claramente o modo como Viète organiza a solução das *zetéticas*. Observando a resolução das *zetéticas* do primeiro livro, percebemos que a primeira frase da resolução, em geral, é a repetição do enunciado da *zetética*, identificando as grandezas dadas com consoantes. Em seguida, Viète supõe conhecida a grandeza que quer determinar (a grandeza desconhecida) e a denota por uma vogal. Enuncia, então, uma relação que determina a grandeza desconhecida, pois exibe uma proporção cuja quarta proporcional é a grandeza desconhecida e todas as outras são conhecidas. Feito isso, ele justifica a veracidade da solução apresentada utilizando palavras. No final do procedimento, apresenta um exemplo numérico que satisfaz as condições do problema e da solução.

Nas *zetéticas* do primeiro livro, Viète não introduz o uso simultâneo de duas grandezas desconhecidas. Na primeira *zetética*, como veremos a seguir, ele quer determinar dois lados conhecendo a diferença e a soma. Primeiro ele trabalha com o que chamou de “menor lado” e encontra uma relação que o determina. Em seguida, supõe conhecido o outro lado e estabelece uma outra relação, independente da primeira.

Para algumas *zetéticas*, como a de número VII, por exemplo, ele não explicita as partes nas quais deseja dividir o lado; entretanto, observa que o que foi encontrado é suficiente para a determinação das partes. Neste sentido, poderíamos dizer que Viète esquece a natureza do problema, pois não se preocupa em retornar e determinar as partes nas quais o lado foi dividido.

Para exemplificar estas observações, apresentamos dois problemas encontrados no *Primeiro Livro das Zetéticas*.

4.3.1 *Zetética Primeira* – livro 1

ZETÉTICA PRIMEIRA

Dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontrar os lados.

A diferença dada entre dois lados sendo B, e o agregado dos lados sendo D, encontrar os lados.

O menor lado sendo A, portanto, o grande será A+B, e o agregado dos lados 2A+B, como o agregado é dado, a saber D; porque 2A+B é igual a D, pela antítese 2A será igual a D–B. E todas as quantidades se reduzem à metade, A será igual à metade de D menos a metade de B.

Ou seja, o lado maior sendo E, o menor será E–B, e o agregado dos lados 2E–B, como o agregado é dado, a saber D; porque 2E–B é igual a D, pela antítese 2E sendo igual à D+B, todas as quantidades estando reduzidas à metade, E será igual à metade de D [mais] a metade de B.

Portanto, dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontra-se os lados. Pois:

> *Se subtrairmos a metade da diferença da metade do agregado dos lados, o que resta será igual ao menor lado; e se adicionarmos, o total será igual ao maior lado.*
>
> *E é isso mesmo que a Zetese nos ensina.*
>
> *B sendo 40* *D 100* *A faz 30* *E 70.*
>
> (VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 36, tradução nossa)

Observemos que este problema se reduz ao seguinte sistema linear de equações: $\begin{cases} x - y = B \\ x + y = D \end{cases}$.

Para ser resolvido, ele recai em uma equação do 1º grau ($2x = B + D$, por exemplo).

A primeira coisa que Viète fez foi associar duas consoantes às grandezas dadas, a diferença (*B*) e a soma (*D*) dos lados. Logo em seguida, chamou um dos lados procurados de A e concluiu que *2A+B=D*. Usando a *antítese*, chegou a *2A=D – B* e com o *parabolismo*, determinou o lado $A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}$[39].

Como falamos anteriormente, Viète não trabalhava com duas grandezas desconhecidas ao mesmo tempo e, por isso, depois de apresentar a solução para o menor lado, exibiu uma solução similar para o outro lado, utilizando novamente a *antítese* e o *parabolismo*. Para concluir, observou que subtraindo da metade da soma dos lados a metade da diferença entre eles, encontramos o menor lado; e somando a este resultado à diferença, encontramos o maior lado. Neste momento, Viète justifica discursivamente a solução apresentada. E para terminar, apresenta um caso particular, ou seja, se a diferença fosse 40 e a soma 100, os lados seriam 30 e 70.

[39] Cf. seção 4.2.6.

4.3.2 *Zetética IV*

ZETÉTICA IV

Dados os dois lados menores que o justo e a razão das faltas, encontrar o verdadeiro e o justo lado.

Dado os dois lados faltantes em relação ao justo, o primeiro B, o segundo D, e a razão: o que falta ao primeiro está para o que falta ao segundo assim como R está para S, é preciso encontrar o verdadeiro e o justo lado.

O que falta ao primeiro sendo A, portanto, B+A será o verdadeiro e justo lado.

Uma vez que R está para S, assim como A está para $\frac{SporA}{R}$*, então* $\frac{SporA}{R}$ *será o que falta ao segundo lado: Isso porque [*$D+\frac{SporA}{R}$*] será também o verdadeiro e justo lado. Portanto,* $\frac{D+SporA}{R}$ *será igual a B+A, e todas as quantidades estando multiplicadas por R, D por R + S por A será igual a B por R + R por A. E a equação estando ordenada, D por R == B por R, será igual a R por A == S por A.*

De onde aparece que, R == S está para R assim como [D == B está para A].

O que falta ao segundo sendo E, então D+E será o lado justo: pois como S está para R, assim como E está para $\frac{RporE}{S}$*, então* $\frac{RporE}{S}$ *será o que falta ao primeiro.* $B+\frac{RporE}{S}$ *será assim o verdadeiro e justo lado e, portanto, será igual a D+E. E todas as quantidades estando multiplicadas por S, B por S + R por E, será igual a D por [S] + S por E, e a equação estando ordenada, D por S == B por S, será igual a R por E == S por E.*

De onde resulta que R == S está para S assim como [D ==B está para E].

Logo, dois lados menores que o justo estando dados, assim como a razão entre as faltas, o verdadeiro e justo lado se encontrará.

Porque:

A verdadeira diferença entre dois lados faltantes, que é também a diferença entre as faltas elas mesmas, está para a verdadeira falta no primeiro ou segundo lado assim como a diferença entre as faltas análogas no primeiro ou segundo lado. Adicionado propriamente a falta, seguindo a exigência do caso, chega-se ao verdadeiro e justo lado.

Sendo B76.	*D4.*	*R1.*	*S4.*
A faz 24	*E96*		

De outra maneira

Dados os dois lados menores que o justo, com a razão das faltas, encontrar o verdadeiro e justo lado.

Dados os dois lados faltantes em relação ao justo, o primeiro B, o segundo D, e a razão: o que falta ao primeiro está para o que falta ao segundo assim como R está para S, é preciso encontrar o lado justo.

Sendo ele A, portanto A–B será o que falta ao primeiro, e A–D o que falta ao segundo: pois A–B está para A–D assim como R está para S, R por A – R por D será igual a S por A – S por B, e a transposição sendo feita como a arte requer, S por A == R por A será igual a [S] por B == R por D, portanto $\frac{SporB == RporD}{S == R}$ *é igual a A.*

Logo, dados dois lados menores que o justo, com a razão das faltas, o verdadeiro e o justo lado será encontrado; considerando que:

A diferença entre o retângulo sob o primeiro lado faltante e sob a falta do segundo e o retângulo sob o segundo lado faltante e sob a falta do primeiro aplicado à diferença das faltas semelhantes, dá o verdadeiro e justo lado requeridos.

Sendo B76. D4. R1. S4. A faz 100.

(VIÈTE apud VASSET, 1630, p. 41-44, tradução nossa).

Primeiramente, é importante observar os termos usados por Viète nesta *zetética*. É uma constante em seu trabalho o uso da expressão “verdadeiro e justo lado” para denotar o lado procurado. O termo “falta” se refere à diferença entre dois lados. Como os lados dados são menores que o lado procurado, então faz sentido fazer (lado procurado) – (lado dado), é essa diferença que Viète chama de “falta”. Da mesma forma, quando os lados dados são maiores que o lado procurado, ele chama de “excesso” a diferença (lado dado) – (lado procurado). Como dissemos, Viète não considera números negativos, tanto que ele precisou introduzir o símbolo “==” para representar o módulo da diferença[40].

Em notação moderna, esta *zetética* pode ser reescrita da seguinte maneira $\frac{x-K}{x-M} = L$, onde x representa o lado procurado, K e M os dois lados menores que x e L a razão entre os defeitos. Esta expressão é equivalente a uma equação do 1º grau, ou seja, uma equação do tipo $ax + b = 0$, onde $a = L - 1$ e $b = K - ML$.

[40] Cf. seção 4.2.5.

Na primeira solução apresentada, ao invés de supor conhecido o lado, Viète supôs conhecidas as faltas e mostrou como determinar a solução. Assim como na primeira *zetética*, ele exibiu dois procedimentos independentes e parecidos. Após a explicação discursiva, e um pouco confusa, de que as faltas de fato podem ser encontradas a partir dos dados, ele afirmou que era possível determinar o lado procurado somando ao lado menor a sua respectiva falta. E para concluir esta solução, exibiu um caso particular.

Após a primeira solução, Viète escreveu "De outra maneira" e prosseguiu exibindo uma outra solução. Ele enunciou a *zetética*, associou consoantes aos dados do problema e supôs conhecido o lado procurado. Manipulou os dados de acordo com as leis da sua arte chegando a seguinte expressão $\frac{SB == RD}{S == R} = A$, que resolve o problema, uma vez que S, B, R, D são todas grandezas conhecidas.

Em ambas as soluções, como Viète não sabe qual dos dois lados menores era o maior e, na sua solução, era preciso representar a diferença, ele usou a notação apropriada para esta situação, ou seja, o símbolo "==". O uso deste símbolo pode ser observado, por exemplo, na expressão que aparece no parágrafo anterior, $\frac{SB == RD}{S == R} = A$, que é um misto da notação de Viète com a nossa, uma vez que Viète não representava simbolicamente a expressão completa. Para indicar esta expressão, ele escrevia "$\frac{SporB == RporD}{S == R}$ *é igual a A*".

Este problema é interessante, pois Viète apresenta duas soluções. A primeira é uma solução implícita, ao passo que a segunda determina diretamente o lado procurado. Contudo, ele não explicou a razão para ter apresentado duas soluções.

Como pudemos perceber, nas resoluções, Viète vai explicando tudo que está sendo feito de forma discursiva. Para cada passagem, escreve a razão pela qual ela pode ser realizada. É importante destacar também que Viète não representa simbolicamente a expressão toda e não utiliza o símbolo para a igualdade (=). Como vimos nos exemplos apresentados, e podemos confirmar na tradução apresentada em anexo a esta dissertação, ele escrevia "será igual" ou "sendo igual", ao invés de representar a igualdade toda como fazemos atualmente.

Este modo de apresentar os problemas torna a leitura das resoluções um pouco complicada para nós, pois as expressões encontram-se misturadas às justificativas. É nesse sentido que, como dissemos na introdução, o estudante de História da Matemática tem que ter paciência e cautela para entender as passagens na notação usada na época. Entretanto, para entender as dificuldades e avanços representados pela invenção da arte analítica, é preciso, ao mesmo tempo, saber ler os argumentos na forma na qual foram apresentados e saber adaptá-los a uma linguagem mais moderna. Foi o que fizemos na tradução do *Primeiro Livro das Zetéticas* apresentada no Anexo.

5 Conclusão

Como afirma Bos em (BOS, 2001), Viète introduziu e promoveu a idéia de que a álgebra era o próprio método de análise de problemas, tanto na Geometria, quanto na Teoria dos números. Tendo como inspiração a análise utilizada por Diofanto, para os números na *Aritmética*, Viète pretendia restaurar a análise dos antigos a fim de resolver todos os problemas. A sua arte analítica é um método universal para resolver problemas cuja principal ferramenta é a álgebra que, por sua vez, se constitui em um método de cálculo simbólico envolvendo grandezas abstratas. Podemos afirmar que estas grandezas são abstratas ainda que, ao realizar os cálculos, Viète tenha considerado o aspecto dimensional, ou seja, tenha se inspirado na Geometria.

Ele propôs a *logística speciosa*, um sistema formal abstrato definido por suposições básicas sobre grandezas, dimensões e escalas e por axiomas envolvendo as operações. Devido à abstração do seu sistema e à introdução de letras para representar os parâmetros do problema, o trabalho de Viète constitui um passo muito importante para o desenvolvimento da álgebra simbólica.

Entretanto, parece que o próprio Viète subestimou o valor da representação simbólica, por ser amante das palavras e das frases, como é possível perceber ao longo da sua *Isagoge*. A simbolização incompleta não permitiu que Viète, assim como seus seguidores, desfrutassem de todo o poder da álgebra. É importante destacar que foi pela simbolização incompleta, e não por algum obstáculo intrínseco à sua nova álgebra (como a interpretação dimensional das grandezas), que não foi possível desfrutar de todos os avanços que a álgebra de Viète poderia proporcionar.

Isso não desvaloriza o trabalho de Viète. Introduzindo o uso de letras para representar parâmetros, além das grandezas desconhecidas, Viète equipou os matemáticos com o que se tornou uma das ferramentas essenciais da Matemática: a álgebra. A "nova álgebra" de Viète era uma criação matemática abstrata e ousada, totalmente atípica para a época, o que demonstra o profundo conhecimento de Viète sobre questões matemáticas fundamentais.

No entanto, como afirma Panza em (PANZA, 2007), Viète apresentou a sua nova álgebra como uma arte, ou seja, como um sistema de técnicas, e não como uma disciplina ou uma teoria. A álgebra foi praticada na sua forma primitiva pelos matemáticos gregos e a principal contribuição de Viète consiste na reformulação de tal arte, de tal maneira que o que é de fato novo não é a própria arte, mas a forma na qual ela passa a ser apresentada. De acordo com o próprio Viète, a sua nova álgebra teria também sido apresentada pelos árabes e mais ainda pelos matemáticos medievais, mas a sua reformulação revelava uma técnica geral escondida naquela álgebra, apenas implicitamente aplicada a casos individuais. A nova técnica se aplica à solução de problemas que, uma vez corretamente formulados, resolvem vários problemas ao mesmo tempo.

Panza sinaliza também que, mesmo que não se possa afirmar que Viète tenha estudado o trabalho de Al-Khayyam, poderíamos entender que, no título do conjunto de seus livros, Viète considerou o significado de álgebra implícito nos trabalhos de Al-Khayyam. Ou seja, a álgebra como a arte de transformar condições quantitativas, usando tanto um formalismo apropriado relativo às operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, extração de raiz e resolução de equações polinomiais aplicadas a números indeterminados, quanto inferências geométricas apropriadas.

Mesmo que, antes de Viète, tenham sido estabelecidas analogias entre o formalismo aplicado para os números e as inferências geométricas – como foi o caso dos árabes –, Viète foi o primeiro a chegar à definição de um novo formalismo relacionado a quantidades abstratas que atendia aos problemas independentemente da sua interpretação como problemas numéricos ou geométricos. Foi a *Isagoge* de Viète que definiu tal formalismo e propôs a sua utilização para "restaurar" o método de análise e síntese problemática, usado amplamente pelos gregos. Quando Viète associou a álgebra a uma arte antiga, no título de seus trabalhos, ele estava se referindo a um sistema de técnicas que ele queira unificar e desenvolver dentro de um novo contexto metodológico.

Como mostramos, a grande diferença entre a estratégia de Viète e a de Al-Khayyam para a redução de um problema a outro mais simples é que, enquanto o árabe precisava interpretar seus problemas como aritmético ou geométrico para poder realizar a sua análise, Viète conseguia realizar esta análise sem a necessidade de nenhuma interpretação preliminar. Isso pôde acontecer porque, para Viète, a análise era um procedimento abstrato, associado a grandezas abstratas.

A contribuição de Viète para a Matemática subseqüente é muito valiosa, uma vez que permitiu que as equações fossem escritas e entendidas de maneira geral. Com a simbologia introduzida, as relações entre os coeficientes e as raízes de uma equação puderam ser eterminadas. Além disso, devido à apresentação axiomática, a álgebra pôde se libertar da geometria constituindo um novo domínio da Matemática:

> *Quais são as grandes contribuições da nova álgebra?*
>
> *- A possibilidade de escrever as fórmulas. Isso vai permitir, com as melhoras do simbolismo de Descartes, um progresso resplandecente das matemáticas bem como das ciências físicas e mecânicas. É difícil imaginar como os contemporâneos e os antecessores de Viète faziam para expressar as relações entre grandezas: deveria passar pela geometria. É suficiente ler a lei da queda livre de Galileu (1638) para se convencer do momento decisivo que vai se operar.*
>
> *- A conseqüente utilização de fórmulas literais possibilitando a descoberta de novos teoremas. É assim que Viète descobre as relações entre as raízes e os coeficientes de uma equação.*
>
> *- Enfim, é a possibilidade aberta de resolver os problemas gerais para o cálculo ao passo que anteriormente apenas a geometria e o raciocínio permitiam tratar os problemas em toda a sua generalidade. Assim, o célebre problema da trissecção do ângulo é reduzido à resolução de uma equação de terceiro grau: 'O analista resolve os problemas mais famosos chamados até agora de irracionais tais como o problema mesográfico, a divisão do ângulo em três partes iguais, a invenção do lado do Heptágono e todos os outros que caem nestes tipos de equações'. E é graças a essa formulação algébrica que o problema da trissecção do ângulo e as outras construções com régua e compasso, que permaneceram sem resposta durante 2000 anos, vão encontrar suas soluções no curso do século XIX. É também a chave da resolução de Viète para o problema de Adrien Romain: uma equação do 45º grau equivalente à divisão de um ângulo em 45 partes iguais feitas em três etapas (em três partes, depois cada uma das três em três, e finalmente cada uma das nove em cinco).*
>
> *Será preciso uma quarentena de anos para os cientistas se apropriarem deste novo cálculo, mas então o progresso será muito rápido: criação do cálculo diferencial e integral, desenvolvimento em séries, resolução de problemas de ótica, cinemática e dinâmica* (GUICHARD, in BARBIN et al., 2005. p. 23-24).

Referências Bibliográficas

ABGRALL, P. *Naissance de l'algèbre ou que sait-on aujourd'hui des commencements de l'algèbre comme discipline*. Brasília: École d'été d'Histoire des Mathématiques, mar. 2008.

AL-KHAYYAM, O. *L'algèbre d'Omar Alkayyani. Tradução* de F. Woepcke, 1851. Disponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99503d/f73.table> Acesso em 26 agosto 2008.

BOS, H.J.M. *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction*. New York: Springer-Verlag, 2001.

BARBIN, E. et al. *François Viète: um mathématicien sous la Renaissance.* Paris: Vuibert, 2005.

______. *L'héritage du 3ème degré: Cardan, Viète, Descartes* in BORIAUD, J-Y., éd. La pensée scientifique de Giordano Cardano, Les belles lettres, à paraître.

CAHIERS FRANÇOIS VIETE. Nantes: s.n., v. único, n.7, 2004.

EUCLIDES. *The Thirteen Books of the Elements, 2 ed. v. 1 : Books I and II*. Tradução de T. L. Heath. New York : Dover, 1956.

______. *The Thirteen Books of the Elements, 2 ed. v. 1 : Books X - XIII*. Tradução de T. L. Heath. New York : Dover, 1956.

______. *The Data of Euclid*. Traduzido do texto de Menge por George L. McDowell e Merle A. Sokolik, intr. de Richard Delahide Ferrier. Baltimore: Union Square Press, 1993.

______. .; ITIO, Shuntario,. *The Medieval Latin translation of the Data of Euclid***.** Tokyo: University of Tokyo Press, Boston: Birkhäuser, c1980.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP : Editora da Unicamp, 2002.

PANZA, Marco. *What is new and what is old in Viète's analysis restitute and algebra nova, and where do they come from? Some reflections on the relations between algebra and analysis before Viète*. Paris: , 2007. Disponível em <http://halshs.archives-ouvertes.fr/docs/00/14/64/15/PDF/RHMAlgebra(4).pdf>. Acesso em 11 abril 2008.

PAPPUS. *Book 7 of the Collection*. Tradução de A. Jones. New York : Springer, 1986.

RASHED, R. *Al-Khwārizmī - Le commencement de l'algèbre*. Paris, Librairie A. Blanchard, 2006.

ROQUE, T. *A Matemática através da história*. Notas de aula do curso de História da Matemática. UFRJ, 2006.

VIETE, François. *L'Algèbre nouvelle de Mr Viète.* Tradução de A. Vasset, 1630. Disponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k108864f>. Acesso em 28 maio 2007.

______. *In Artem Analyticem Isagoge: Seorism excussa ab Opere restitute Mathematica Analyseos, Seu Algebrâ novâ*. 1591. Diponível em <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k108865t/f1>. Acesso em 28 maio 2007.

______. *The Analytic Art by François Viète.* Tradução de T. Richard Witmer. Ohio: Kent State University Press, 1983.

______. *La Nouvelle Algèbre de M. Viète.* Tradução de Vaulézard. Paris, Fayard, 1630.

Sites consultados:

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/, primeiro acesso em 26/04/2007

http://es.geocities.com/christianjqp1/especial/biografia/biografia/viete1.htm, em 12/12/2007

http://www.col-camus-soufflenheim.ac-strasbourg.fr/Page.php?IDP=296&IDD=0, em 22/08/08

http://www.dma.ens.fr/culturemath/ em 22/08/08

http://www.france-pittoresque.com/perso/44.htm em 22/08/08

http://www.universalis.fr/encyclopedie/S182651/VIETE_F.htm em 22/08/08

http://encyclopedie.snyke.com/articles/francois_viete.html em 22/08/08

http://www.prof2000.pt/users/andrepache/matetavira/tarefa7/alkhwarizmi.htm em 22/08/08

Anexo

INTRODUÇÃO À ARTE ANALÍTICA OU NOVA ÁLGEBRA
François Viète

CAPÍTULO PRIMEIRO

Da definição e divisão da análise e das coisas que servem à zetética.

Encontra-se na Matemática uma certa maneira de procurar a verdade, que diz-se ter sido primeiramente inventada por Platão, que Theon chamou Análise e que, para ele, define a suposição daquilo que procuramos como se estivesse concedido para chegar a uma verdade procurada, por meio das conseqüências; ao contrário, a Síntese é a suposição de uma coisa concedida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos pelo meio das conseqüências. Apesar de os anciãos terem proposto apenas dois tipos de análise, a saber, a Zetética[41] e a Porística[42], para as quais a definição de Theon fazem bastante sentido, é conveniente estabelecer ainda uma terceira espécie que será chamada de Retique ou Exegética[43]. Assim, a Zetética é aquela por meio da qual encontramos a igualdade por meio da proporção que existe entre a grandeza que procuramos e aquela que é dada. A Porística é aquela pela qual examinamos a verdade de um teorema já conhecido por meio da igualdade ou proporção. A Exegética é aquela pela qual encontramos a quantidade ou grandeza procurada por meio da igualdade ou proporção obtida. Dessa forma, toda a Arte Analítica, exercendo estes três ofícios[44], pode ser definida como a doutrina de descobertas corretas na Matemática. E quanto à Zetética, ela se pratica com o uso da lógica, através de silogismos e (enthymenes) que são fundamentados e enfatizados com os mesmos símbolos[45] dos quais tiram-se conclusões das igualdades e proporções, os quais devem ser considerados e emprestados das noções comuns e dos Teoremas já demonstrados por meio da própria Análise. Ora, a forma de praticar a Zetética é uma arte particular, que não exerce mais seu raciocínio pelos números; o que se fazia anteriormente pela negligência da Análise dos anciãos, mas pela Logística Speciosa, empregada recentemente com este fim e muito melhor para comparar grandezas entre elas do que aquela dos números, e que propõe primeiramente a

---

[41] *Zetética, zetese* de $\varsigma\eta\tau\varepsilon\omega$, procurar; zetética significa em sentido próprio procurar, investigar; zetese, a ação de procurar, questão. Viète deu o nome de zetética ao método analítico considerado como um método de investigação por excelência. (Revista François Viète)

[42] Porística, porisma de $\pi o\rho\iota\varsigma\omega$, em sentido próprio “abrir passagem”, no sentido figurado “encontrar, descobrir, conseguir”. Parece que Viète designa por Porismas certas proposições demonstradas fora dos Elementos, através delas demonstra-se outras pelo método porístico ou sintético; com efeito, por este método se entende uma passagem através da quantidade conhecida pra se chegar à descoberta da desconhecida. (Revista François Viète)

[43] *Retique exegética*. É difícil traduzir esses dois adjetivos. *Retique* deriva $\rho\eta\tau o\varsigma$ que em grego tem numerosos significados: fixa, regrada/ regra/régua, determinada sob certas condições, em seguida um plano interrompido, uma marcha determinada. *Exegética*, *Exegese* derivam de $\varepsilon\xi\eta\gamma\varepsilon o\mu\alpha\iota$, interpretar. A exegese para os anciãos é a explicação de coisas divinas, dos mistérios: método rético exegético parece, portanto, significar “método que conduz a maneira de regrar determinadas a penetrar os mistérios mais profundos dos matemáticos.” (Revista François Viète)

[44] Triplo Ofício: encontrar a igualdade e proporção da coisa procurada com a dada; examinar esta igualdade e proporção e exibir a coisa procurada (Vaulezard).

[45] A palavra símbolo significa enunciação de uma verdade incontestável ou axioma ou de uma verdade elementar demonstrada que serve de fundamento para a ciência.

lei dos Homogêneos, estabelecendo e derivando dela a ordem ou escala solene, na qual os graus das grandezas, que aumentam ou diminuem de gênero em gênero, são proporcionais a estas grandezas, servindo, portanto para designar e distinguir as grandezas quando comparadas.

****

CAPÍTULO II

Dos símbolos, das equações e das proporções.

O método analítico admite como demonstrados os símbolos mais conhecidos das igualdades e proporções que se encontram nos *Elementos*, como os que seguem:

1. Que o todo é igual a suas partes.

2. Que coisas iguais a uma mesma são iguais entre si.

3. Que se coisas iguais são acrescentadas a coisas iguais, então os todos são iguais.

4. Que se coisas iguais são retiradas de coisas iguais, então os restos são iguais.

5. Que se multiplica coisas iguais por coisas iguais, então os produtos são iguais.

6. Que se divide coisas iguais por coisas iguais, então os quocientes são iguais.

7. Que se quaisquer coisas são diretamente proporcionais, então são proporcionais ao contrário e vice-versa.

8. Que se coisas proporcionais semelhantes[46] são acrescentadas a coisas proporcionais semelhantes, então os todos são proporcionais.

9. Que se coisas proporcionais semelhantes são retiradas de coisas proporcionais semelhantes, então os restos são proporcionais.

10. Que se multiplica coisas proporcionais por coisas proporcionais, então os produtos são coisas proporcionais.

11. Que se divide coisas proporcionais por coisas proporcionais, então os quocientes são proporcionais.

12. Que a igualdade ou razão definitivamente não é modificada por uma multiplicação ou divisão comum [de seus termos].

13. Que aquilo que se faz com todos os segmentos é igual ao que se faz através de todos[47].

---

[46] Viète chama de *proporções semelhantes* às proporções cujo resultado é o mesmo. (Revista François Viète)

14. Que aquilo que se faz sucessivamente através de quaisquer grandezas, ou provém da divisão sucessiva delas, é igual a qualquer ordem que elas têm na multiplicação ou divisão[48].

O principal símbolo[49] das igualdades e proporções que é de grande importância durante toda a Análise é este aqui:

15. Que se existem três ou quatro grandezas e que se o produto dos extremos é igual ao produto do meio pelo meio, ou dos meios, então as grandezas são proporcionais.

E contrariamente.

16. Que se existem três ou quatro grandezas e que se existe a mesma razão da primeira para a segunda, e da segunda para a terceira, ou da terceira para a quarta, então aquilo que se obtém através dos extremos será igual aquilo que se obtém através dos meios.

Portanto, a proporção pode ser dita "estabelecida da igualdade" e a igualdade a "resolução da proporção".

****

CAPÍTULO III

Da lei dos Homogêneos, dos graus e gêneros e das grandezas comparadas.

A primeira lei e regra perpétua das igualdades e proporções, aquela que se refere aos Homogêneos, é chamada a regra dos Homogêneos, é a seguinte:

"Os Homogêneos se comparam aos Homogêneos"

Porque, como dizia Adrastus, não se sabe como os Heterogêneos se comportam entre si.

Tanto que

Se uma grandeza é acrescentada a uma grandeza, ela lhe é Homogênea.

Se uma grandeza é retirada de uma grandeza, ela lhe é Homogênea.

Se uma grandeza é multiplicada por uma grandeza, aquela que é o produto será Heterogênea a todas as duas.

Se uma grandeza é aplicada[50] a uma outra grandeza, aquela que retorna é Heterogênea a todas as duas.

---

[47] O produto de diferentes partes por um mesmo número é igual ao produto da soma das partes pelo número. (Revista François Viète). O retângulo ou produto feito através de uma grandeza e as partes de um todo é igual ao retângulo através desta mesma grandeza e o todo. (Witmer, 1983)

[48] Multiplicações sucessivas de grandezas e divisões sucessivas de grandezas produzem o mesmo resultado independente da ordem na qual a multiplicação ou divisão dos termos é feita. (Witmer, 1983)

[49] Viète frequentemente usa esta propriedade fundamental das proporções: transformar as proporções em igualdade e vice-versa (Revista François Viète).

[50] Aplicar: o gênero do quociente é heterogêneo ao gênero da grandeza aplicada. A aplicação do plano por um comprimento dá outro comprimento que não é homogêneo com o plano.

Muito da névoa e obscuridade da análise dos anciãos foi causada pela negligência as regras a seguir:

As grandezas que aumentam e diminuem proporcionalmente de gênero em gênero chamam-se escalas.
A primeira das grandezas escalares é

O lado ou a raiz.
2. O quadrado.
3. O cubo.
4. O quadrado quadrado.
5. O quadrado cubo.
6. O cubo cubo.
7. O quadrado quadrado cubo.
8. O quadrado cubo cubo.
9. O cubo cubo cubo.

E as outras que seguem são designadas através do mesmo método e seqüência.

Os gêneros das grandezas comparadas na ordem na qual foram enunciadas as escalas[51], são:

10. O comprimento ou largura.
11. O plano.
12. O sólido.
13. O plano plano.
14. O plano sólido.
15. O sólido sólido.
16. O plano plano sólido.
17. O plano sólido sólido.
18. O sólido sólido sólido.

E os outros que seguem são designados através do mesmo método e seqüência.

O grau ao qual a grandeza comparada substitui a partir do lado ou comprimento, na seqüência de graus escalares, se chama potência.

Todos os outros graus inferiores se chamam graus paradoxos, ou graus que servem de passagem.

A potência é pura quando ela é livre de todas as nomeações.

A potência nomeada é aquela que se encontra associada a um Homogêneo através do grau paradoxo da potência e de uma grandeza coeficiente emprestada.

As grandezas emprestadas através daquelas e através de um grau paradoxo é feita qualquer coisa Homogênea à potência, e aquilo que afeta a mesma potência, se chama sub-gradual.

****

Dividir: o quociente da divisão é homogêneo ao gênero da grandeza dividida (?). Divisão da reta em três partes dá três retas homogêneas.

[51] Estas quantidades são os produtos de fatores comuns. Assim, em uma equação do 3º grau, como a homogeneidade existe, é preciso que o coeficiente do quadrado seja um comprimento, o da primeira potência, um plano. O termo conhecido um sólido.

CAPÍTULO IV

Das regras e preceitos da Logística Speciosa

A Logística Numerosa é aquela que é praticada pelos números.

E a Speciosa é aquela que é praticada pelas espécies ou formas, como por exemplo, as letras do alfabeto.

Os preceitos ou regras da Logística Speciosa são quatro, assim como na numerosa.

A PRIMEIRA REGRA

Acrescentar uma grandeza a uma grandeza.

Sejam duas grandezas A e B. É preciso acrescentar uma a outra.

Uma vez que é preciso acrescentar uma grandeza a uma grandeza, e que os Homogêneos não se misturam aos Heterogêneos, as duas grandezas propostas são Homogêneas. Ou, no máximo, não possuem diversidade de gênero. Recorre acrescentá-las comodamente pela marca da união ou do acréscimo, e serão assim somadas A mais B se as grandezas forem simplesmente comprimento ou largura.

Mas se elas aumentam seguindo uma escala ou se elas se comunicam em gênero àquelas que aumentam, elas serão designadas pela denominação que lhes convêm. Por exemplo, será dito A quadrado mais B plano ou A cubo mais B sólido, e assim por diante.

Os Algebristas costumam marcar o sinal do acréscimo pelo símbolo +.

A II REGRA

Subtrair uma grandeza de uma grandeza.

Sejam duas grandezas A e B, uma maior que a outra. É preciso subtrair a menor da maior.

Uma vez que é preciso subtrair uma grandeza de uma grandeza, e que as grandezas de mesmo gênero não afetam mais aquelas que são de outro gênero, as duas grandezas propostas são do mesmo gênero. Ou, no máximo, não introduzem diferença de gênero. Portanto, a menor será comodamente subtraída da maior por meio da fórmula de separação ou subtração e serão indicadas pela diferença A menos B, se são simples comprimentos ou larguras.

Mas se elas aumentam de acordo com a escala, ou se elas se comunicam em gênero, elas serão designadas pela denominação conveniente. Por exemplo, A quadrado menos B plano ou A cubo menos B sólido, e da mesma maneira para as outras.

A operação não se exerce de outra maneira se a grandeza que se faz subtrair já é nomeada, o todo e suas partes não devem ser estimados com regras diferentes. Como se de A fosse preciso subtrair B mais D. O resto será A menos B menos D, subtraindo as grandezas B e D separadamente.

Mas se D está perto de B e se é preciso subtrair B menos D de A, o resto será A menos B mais D, subtraindo a grandeza B subtrai-se mais do que era preciso, portanto, é preciso recompensar pela adição daquela grandeza.

Os Analistas têm o costume de representar a subtração pela marca – e que esta nomeação foi chamada por Diofante $\lambda\varepsilon\iota\psi\iota$, que é dito diminuição, assim como a nomeação da adição (?? $\pi\alpha\rho\xi\iota$??) foi dita aumento.

Mas uma vez que não se exprime qual das duas grandezas é a maior ou a menor, e de qualquer forma se faz a subtração, a marca da diferença é == que se diz menos, mas com incerteza, como se propusesse A quadrado e B plano, a diferença será A quadrado == B plano ou B plano == A quadrado.

A III REGRA

Multiplicar uma grandeza por uma grandeza.

Sejam duas grandezas A e B. É preciso multiplicar uma pela outra.

Uma vez que é preciso multiplicar uma grandeza por uma outra grandeza, elas produzirão pela sua multiplicação uma grandeza que lhes será Heterogênea, é dita de diversos gêneros e, portanto, aquela que será o produto será comodamente indicada pela palavra por ou através de como A por B ou como qualquer outra que se desejar agregar que tal grandeza é feita através de A e B, isso se A e B são simples comprimentos ou larguras.

Mas se elas aumentam seguindo a escala ou se elas se comunicam em gênero às quantidades que aumentam de acordo com elas, é preciso colocar as denominações das grandezas escalares ou daquelas que se comunicam em gênero. Por exemplo, A quadrado por B ou A quadrado por B plano ou B sólido e o mesmo para as outras.

Se as grandezas que serão multiplicadas ou uma delas são de vários nomes[52], não acontecerá nenhuma diversidade na operação, como o todo é igual às suas partes, e, portanto, os produtos dos segmentos de uma grandeza são iguais ao produto pelo todo. E quando o nome de uma grandeza que é positiva for multiplicado pelo nome de uma outra grandeza também positiva, o que for produzido também será positivo, e aquilo que for multiplicado por uma que é negativa será negativo.

Como conseqüência desta regra, é preciso que o produto pela multiplicação mútua dos nomes afetados de negação seja positivo, como quando A–B for multiplicado por D–G. Tanto que o que provém de A que é positivo por G. que é negativo, permanece negativo, que é muito negado ou diminuído, pois a grandeza A. que deve ser multiplicada não é absolutamente inteira. A mesma coisa acontece com o que provém da multiplicação de B que é afetada de negação por D positivo permanece negativo, que é de novo muito negada, ou diminuída, pois a grandeza D que deve ser multiplicada não é absolutamente inteira; portanto, em recompensa, uma vez que B afetado pelo negativo é multiplicado por G afetado pelo negativo o que eles produzem é positivo.

As denominações dos produtos de grandezas que aumentam proporcionalmente de gênero em gênero são aquelas que se seguem

O lado multiplicado por si mesmo produz o quadrado.
O lado pelo quadrado faz o cubo.
O lado pelo cubo faz o quadrado quadrado.
O lado pelo quadrado quadrado faz o quadrado cubo.
O lado pelo quadrado cubo faz o cubo cubo.

E vice-versa, o quadrado pelo lado será o cubo. O cubo pelo quadrado[53] será o quadrado quadrado. De novo.

O quadrado multiplicado por si mesmo faz o quadrado quadrado.
O quadrado pelo cubo faz o quadrado cubo.
O quadrado pelo quadrado quadrado faz o cubo cubo.
E vice-versa. De novo.
O cubo por si mesmo faz o cubo cubo.
O cubo pelo quadrado quadrado faz o quadrado quadrado cubo.

---

[52] A palavra *nome* aqui tem o sentido de *termo*.
[53] Repare que aqui deveria aparecer lado no lugar de quadrado.

O cubo pelo quadrado cubo faz o quadrado cubo cubo.
O cubo pelo cubo cubo faz o cubo cubo cubo.
E vice-versa, preservando a mesma ordem.
Igualmente são o Homogêneos.
A largura multiplicada pelo comprimento faz o plano.
A largura pelo plano faz o sólido.
A largura pelo sólido faz o plano plano.
A largura pelo plano plano faz o plano sólido.
A largura pelo plano sólido faz o sólido sólido.
E ao contrário.
O plano pelo plano faz o plano plano.
O plano pelo sólido faz o plano sólido.
O plano pelo plano plano faz o sólido sólido.
E ao contrário.
O sólido multiplicado pelo sólido faz o sólido sólido.
O sólido pelo plano plano faz o plano plano sólido.
O sólido pelo plano sólido faz o plano sólido sólido.
E vice-versa, preservando a mesma ordem.

A IIII REGRA

Aplicar uma grandeza a uma outra grandeza

Sejam duas grandezas, a saber A e B. É preciso aplicar uma à outra.

Uma vez que é preciso aplicar uma outra grandeza, e que os Homogêneos são aplicados aos Heterogêneos, a mais alta à mais baixa, as grandezas propostas são Heterogêneas.

Seja, então, A um comprimento, B um plano, portanto, traça-se uma pequena linha entre B plano, a mais alta, e A a mais baixa, que é esta aquela que se fará a aplicação.

Mas estas grandezas serão denominadas pelos graus que lhes conservam ou aqueles que são fixados em escala dos proporcionais ou Homogêneos. Por exemplo, $\frac{Bplano}{A}$ para aquela que marca a largura que se obtém da aplicação de B plano pelo comprimento A.

Que se enuncia que B sendo cubo, A plano, por $\frac{Bcubo}{Aplano}$ irá causar a largura que vem da aplicação de B cubo à A plano.

E se enuncia que B sendo cubo, A comprimento por $\frac{Bcubo}{A}$ representará o plano que resulta da aplicação de B cubo à A e assim sucessivamente.

O mesmo se obterá com as grandezas de dois ou mais nomes.

As denominações dos produtos[54] de aplicação de grandezas que aumentam pelos graus da escala, proporcionalmente de gênero em gênero, são aquelas que se seguem:

O quadrado aplicado ao lado produz o lado.
O cubo aplicado ao lado produz o quadrado.
O quadrado quadrado aplicado ao lado produz o cubo.
O quadrado cubo aplicado ao lado produz o quadrado quadrado.
O cubo cubo aplicado ao lado produz o quadrado cubo.

---

[54] Aqui tem um erro, pois não é produto e sim aplicações.

E vice-versa.
Diz-se que o cubo aplicado ao quadrado dá o lado.
O quadrado quadrado aplicado ao cubo produz o lado, etc. De novo.
O quadrado quadrado aplicado ao quadrado produz o quadrado.
O quadrado cubo aplicado ao quadrado produz o cubo.
O cubo cubo aplicado ao quadrado produz o quadrado quadrado.
E vice-versa. De novo.
O cubo cubo aplicado ao cubo produz o quadrado quadrado.
O quadrado cubo cubo aplicado ao cubo produz o quadrado cubo.
O cubo cubo cubo aplicado ao cubo produz o cubo cubo.
E vice-versa, preservando consecutivamente a mesma ordem.
Igualmente são os Homogêneos.
O plano aplicado à largura produz o comprimento.
O sólido aplicado à largura produz o plano
O plano plano aplicado à largura produz o sólido.
O plano sólido aplicado à largura produz o plano plano.
O sólido sólido aplicado à largura produz o plano sólido.
E vice-versa.
O plano plano aplicado ao plano produz o plano.
O plano sólido aplicado ao plano produz o sólido.
O sólido sólido aplicado ao plano produz o plano plano.
E vice-versa.
O sólido sólido aplicado ao sólido produz o sólido.
O plano plano sólido aplicado ao sólido produz o plano plano.
O plano sólido sólido aplicado ao sólido produz o plano sólido.
O sólido sólido sólido aplicado ao sólido produz o sólido sólido.
E vice-versa, preservando a mesma ordem.

De resto, sendo adição ou subtração de grandezas, multiplicação ou divisão, a aplicação não impede que as regras especificadas anteriormente não tenham lugar, visto que na aplicação uma grandeza, tanto aquela que é mais alta quanto a que é mais baixa, pode ser multiplicada por uma mesma grandeza, por meio desta operação nada é somado ou subtraído ao gênero, ou ao valor da grandeza da aplicação, uma vez que o que a multiplicação adicionou, a apalicação retira ao memso tempo.

Por exemplo, $\frac{BporA}{B}$ é dito A e $\frac{B\_por\_Aplano}{B}$ é A plano.

Portanto, a adição $\frac{Aplano}{B}$ adicionado à Z a soma será $\frac{Aplano + ZporB}{B}$.

Ou se é preciso fazer $\frac{Aplano}{B}$ adicionado $\frac{Zquadrado}{G}$, a soma será $\frac{G\_por\_Aplano + B\_por\_Zquadrado}{B\_por\_G}$.

A subtração que é feita de $\frac{Aplano}{B}$ subtraído Z, o resto será $\frac{A.plano - Z.porB.}{B.}$.

Ou $\frac{A.lano}{B}$ subtraído $\frac{Zquadrado}{G}$, o resto será $\frac{Aplano\_por\_G - Zquadrado\_por\_B}{B\_por\_G}$.

E a multiplicação $\frac{Aplano}{B} porB$, o produto será $A.plano$.

Ou se for preciso multiplicar $\frac{Aplano}{B}$ por Z, o produto será $\frac{A.lano}{B} porZ$.

E finalmente se for preciso multiplicar $\frac{Aplano}{B}$ por $\frac{Zquadrado}{G}$, o produto será $\frac{Aplano\_por\_Zquadrado}{BporG}$.

A aplicação que é preciso aplicar $\frac{Acubo}{B}$ à D, as duas grandezas estando multiplicadas por B, produzirá $\frac{A.cubo}{BporD}$.

Ou se for preciso aplicar B por G à $\frac{Aplano}{D}$ as duas grandezas estando multiplicadas por D, produzirá $\frac{B\_por\_G\_por\_D}{Aplano}$.

E finalmente se for preciso aplicar $\frac{Bcubo}{Z}$ à $\frac{Acubo}{Dplano}$ o resultado será $\frac{Bcubo\_por\_Dplano}{Z\_por\_Acubo}$.

****

CAPÍTULO V

Das regras da Zetética

A maneira de se praticar a Zetética consiste quase que completamente pelas regras que se seguem:

1. Se for questão de comprimento e a igualdade ou proporção estiver escondida através dos envelopes de coisas que são propostas, o comprimento procurado será um lado.

2. Se for questão de um plano e a igualdade ou proporção estiver escondida através dos envelopes disso que é proposto, o plano que procuramos será um quadrado.

3. Se for questão de solidez e a igualdade ou proporção estiver escondida através dos envelopes de coisas propostas, a solidez que procuramos será um cubo. Então a grandeza em questão aumentará ou descenderá da mesma forma para todos os graus das grandezas comparadas[55].

[55] A grandeza procurada será então por sua própria potência elevada ou abaixada seguindo o grau das grandezas comparadas. (Revista François Viète)

4. As grandezas, tanto as dadas quanto aquelas que são procuradas, serão comparadas conforme a condição da questão, adicionando, subtraindo, multiplicando e dividindo, de maneira que a lei dos Homogêneos seja preservada.

É então evidente que no fim encontraremos qualquer coisa igual à grandeza que procuramos ou a uma de suas potências, aquela que aumentará, e aquela que é ou é obtida totalmente a partir das grandezas dadas ou é obtida em parte a partir das grandezas dadas e das grandezas desconhecidas, ou através de um de seus graus paradoxos.

5. A fim de que aquela operação seja ajudada por qualquer artifício, será necessário distinguir as grandezas dadas das desconhecidas por um símbolo constante perpétuo e bem claro, por exemplo, designa-se as grandezas desconhecidas pela letra A ou outra vogal E, I , O U, Y e as dadas pelas letras B, C, D ou outras consoantes.

6. Os produtos de grandezas dadas serão acrescentados entre si ou subtraídos conforme a condição da questão, e serão reunidos em um único produto, que constituirá o Homogêneo da comparação ou através da medida dada, será uma das partes da equação[56].

7. Semelhantemente, os produtos de grandezas dadas e através de um mesmo grau paradoxo, serão acrescentados um ao outro, e subtraídos segundo a condição da questão, e sendo reunidos em um produto, que será o Homogêneo da nomeação, ou o Homogêneo gradual (sub-gradual)[57].

8. Os Homogêneos graduais (sub-graduais) acompanham a potência que lhes nomeia, ou que lhe nomeia, e serão a outra parte da equação com a mesma potência, e portanto o Homogêneo produzido através da medida dada, será enunciado de potência, aquela potência levará a designação de seu gênero ou ordem puramente, se ela é sem nomeação ou mistura; caso contrário, se ela é nomeada pelos Homogêneos de nomeação (de afecção), será preciso designar, tanto elas quanto os gêneros da nomeação, que semelhantemente os graus, que a qualidade da grandeza, que serve de coeficiente ou grau[58].

9. E, portanto, se chegar a um Homogêneo através da medida dada sendo misturada com um Homogêneo gradual (sub-gradual), será preciso a antítese, aquela que se faz uma vez que as grandezas que nomeiam, ou que são nomeadas passam de um lado da equação a outro, através das marcas da nomeação contrária. Por esta operação a equação não é modificada, se bem que é preciso demonstrá-la.

---

[56] *Homogêneo de comparação*. É o termo conhecido da soma de termos conhecidos. (Revista François Viète) Termos formados exclusivamente por grandezas dadas são somados a ou subtraídos de outros de acordo com o símbolo de sua nomeação (i.e., positivo ou negativo) e consolidados em um único. Este será o termo homogêneo de comparação ou o constante e coloque-o de um lado da equação. (Witmer, 1983)

[57] Homogêneo de nomeação. São os termos que contêm os graus inferiores a incógnita.
Da mesma forma, termos formados por quantidades dadas e pelo mesmo grau de ordem menor são somados a ou subtraídos de um outro de acordo com o seu sinal de sua afeição e consolidados em um. Este é o termo homogêneo de nomeação ou o termo homogêneo de ordem menor. (Witmer, 1983)

[58] Deixe estes termos homogêneos de ordem menor com a potência que eles afetam ou pela qual eles são afetados e coloque-os e a potência no outro lado da equação. Assim, o termo constante será designado de acordo com a natureza e ordem da potência. Será chamado de pura se [a potência] é livre de nomeação. Mas se [a potência] é acompanhada por termos homogêneos de afeição, mostre isso pelos [próprios] símbolos de nomeação e de grau junto com qualquer termo suplementar que são seus coeficientes. (Witmer, 1983)

A igualdade não é modificada pela antítese.
PRIMEIRA PROPOSIÇÃO

Seja proposto que A quadrado menos D plano seja igual a G quadrado menos B por A. Diz-se que A quadrado mais B por A é igual à G quadrado mais D plano e que para esta transposição, através da marca da nomeação contrária, a equação não é modificada. De fato, uma vez que A quadrado menos B [59] plano é igual à G quadrado menos B por A, se somarmos a uma parte e outra D plano mais B por A, segue pela noção comum que A quadrado menos D plano mais D plano mais B por A é igual à G quadrado menos B por A mais D plano mais B por A. E uma vez que a nomeação negativa na mesma parte da equação destrói o positivo em tal equação, assim, D plano desaparece de um lado e B por A de outro, o que resta é A quadrado mais B por A igual à G quadrado mais D plano.

10. Se todas as grandezas dadas estiverem multiplicadas por um grau do desconhecido, e que, portanto, não se encontra Homogêneos sob a mesma, será necessário servir-se do Hypobibasma.
    O Hypobibasma é uma diminuição igual da potência e dos graus paradoxos, preservando a ordem da escala, até que Homogêneo de grau mais baixo se encontre reduzido a um Homogêneo puro, que será comparado a todos os outros termos. Por meio desta operação a igualdade não é modificada. É o que será demonstrado a seguir.

Que a igualdade não é modificada por meio da Hypobibasma
SEGUNDA PROPOSIÇÃO

Que A cubo mais B por A quadrado sendo igual a Z plano por A. Diz-se que por Hypobibasma A quadrado mais B por A é igual a Z plano.

Porque é o mesmo que dividir todos os sólidos por um divisor comum, pelo meio da qual a igualdade não é modificada, como será determinado adiante.

11. Se o mais alto grau da quantidade desconhecida se encontra aumentado, não substitui de ser mesmo, mas é multiplicado por qualquer grandeza, será necessário servir-se do parabolismo[60].
    O parabolismo é a aplicação comum de todos os Homogêneos, cuja equação é composta de uma grandeza dada pela qual o mais alto grau da grandeza desconhecida se encontra multiplicado, a fim de que seu grau dê a denominação de potência, e que a equação o substitua. Por meio desta operação a igualdade não é modificada. Isto também é preciso demonstrar.

Que a igualdade não é modificada pelo parabolismo.
TERCEIRA PROPOSIÇAO

Que se propõe B por A quadrado mais D plano por A igual à Z sólido. Diz-se pelo parabolismo que A quadrado mais $\frac{Dplano\_por\_A}{B}$ é igual a $\frac{Zsólido}{B}$. De fato, dividir todos os sólidos da equação por um divisor comum não modifica a igualdade, como é determinado adiante.

---

[59] O correto seria D e não B como aparece no texto original.

[60] Se o mais alto grau da grandeza procurada não existe por ele mesmo, mas está multiplicado por qualquer grandeza dada, faremos o Parabolismo. (Revista François Viète)

12. E quando a igualdade for assinalada é expressa para ser, se quisermos, reduzida a um analogismo, com certa precaução que os fatos pelos extremos sejam representados através da potência e pelos Homogêneos da nomeação; e se o que é feito através dos meios seja representado pelos Homogêneos através da medida dada[61].

13. Ou tirar-se-á aquela definição de analogismo ordenado, que é um arranjo de três ou quatro grandezas, tanto conhecidas em termos puros ou nomeadas, quanto todas sendo dadas, exceto aquela da qual é questão ou sua potência e seus graus paradoxos a sua potência[62].

14. Finalmente a equação estando assim ordenada, a Zetética terá cumprido seu objetivo e seu ofício.

No seu livro *Aritmética*, Diofante exerceu a Zetética sutilmente: de qualquer forma ele deixou, como se exerce pelos números, (ainda que se seja servido da speciosa), a fim de devolver sua sutileza mais recomendável, pelo meio de que as coisas que parecem mais sutis e abstrusas ao aritmético, que pratica os números, são a eles que se servem das espécies mais fáceis e abastadas[63].

****

CAPÍTULO VI

Do exame dos Teoremas pela Porística

A Zetese estando acabada, a análise passa da hipótese à tese, e arruma os teoremas que surgiram da sua descoberta na forma prescrita pela Arte de acordo com as leis "conformemente ao todo, por si, e segundo universal primeiramente" (grego?), aqueles teoremas, ainda que demonstrados pela Zetese, ainda estão sujeitos às leis da síntese, que é considerada como a via de demonstração mais conhecida da Lógica e quando há necessidade são confirmados por ela com um grande elogio e aprovação da arte que deu a invenção. E devido àquilo se refaz o caminho da análise. Isso é por si só uma forma de análise e graças à Logística Speciosa recentemente introduzida. Mas se se propõe uma descoberta não familiar ou qualquer coisa encontrada inesperadamente, será necessário primeiramente tentar a via da Porística, da qual o regresso à síntese é fácil, em conformidade com os exemplos trazidos por

---

[61] E quando considerarmos a igualdade claramente expressa, diremos que ela está ordenada. [...] (Revista François Viète)
Depois de tudo isso, uma equação pode ser dita estar claramente expressa e na ordem própria. [Deve ser] reescrita, se você desejar, como uma proporção, mas com este cuidado particular: o produto dos termos extremos [da proporção] corresponde à potência mais os termos homogêneos de nomeação e o produto dos termos do meio corresponde à constante. (Witmer, 1983)

[62] Daqui a proporção construída propriamente pode ser definida como uma série de três ou quatro grandezas expressas tanto em termos puros ou nomeados quanto em termos dados exceto o termo procurado bem como sua potência e seus graus de ordem menor. (Witmer, 1983)

[63] Diofante usou a Zetética o mais sutilmente de tudo naqueles livros que foram coletados na Aritmética. Lá exibe seguramente este método nos números, mas não nos símbolos, para os quais, contudo, pode ser usado. Por isso a sua ingenuidade e rapidez de pensamento devem ser admiradas, para as coisas que parecem ser muito sutis e difíceis de entender na Logística Numerosa, mas que são completamente familiares e até mesmo fáceis na Logística Speciosa. (Witmer, 1983)

Theon nos seus *Elementos*, por Apolônio de Perga nas suas *Cônicas*, por Arquimedes nos seus vários livros[64].
****

CAPÍTULO VII

Do ofício da Rética

A equação da grandeza procurada estando ordenada, a Rética ou Exegética que devemos considerar como sendo a parte que resta da análise, e pertence particularmente ao estabelecimento da arte, as duas outras olham mais os exemplos que os preceitos, como é necessário atribuir aos lógicos, exerce o seu ofício tanto no que concerne aos números, se a grandeza se deve exprimir em número, quanto no que concerne aos comprimentos, superfícies e corpos, se é necessário exibir realmente a grandeza em questão. Nesta passagem a análise se mostra toda para fazer a Geometria, trabalhando e aperfeiçoando verdadeiramente a sua obra, após resolver um semelhante à verdade; e de abundante se faz parecer aritmético, na resolução de números, qualquer potência, seja ela pura ou nomeada; e seja na Aritmética ou na Geometria as provas são feitas como quer a sua arte, de acordo com a condição da equação, e do analogismo que se tira.

Entretanto todo tipo de nomeação geométrica não tem habilidade exigida (?). Porque cada problema tem a sua beleza: de fato, este tipo é prevalece a todos os outros, aquele que demonstra não a composição da obra, por meio da equação, mas mais a equação por meio da composição, se o trabalhador do conhecimento da Geometria e da análise dissimule este último, e como se almeja a construção da obra, atualiza seu problema sintético, e explica: depois para ajudar os aritméticos concebe e demonstra seu teorema, de acordo com a proporção ou igualdade que a identifica[65].

---

[64] Zetética estando completa, os analistas passam da hipótese à tese e arrumam/apresentam os Teoremas que surgiram da sua descoberta na forma prescrita pela Arte de acordo com as leis (coisas escritas em grego $\kappa\alpha\tau\alpha\_\pi\alpha\nu\tau o S,\_\kappa\alpha\theta\_\alpha\upsilon\tau\alpha,\_\kappa\alpha\theta o\lambda o\upsilon\_\pi\rho\omega\tau o\upsilon$ (*)).

Aqueles Teoremas, ainda que demonstrados e bem fundados pela Zetese, ainda estão sujeitos às leis da síntese, que é considerada como o método mais racional de demonstração. Se necessário eles são confirmados por ela este sendo uma grande maravilha da arte inventiva. Assim, se refazia o mesmo caminho da análise. Isso é por si só [uma forma de] análise e graças à introdução da Logística Speciosa, não é mais difícil. Mas se alguma descoberta não familiar é encontrada ou foi encontrada inesperadamente e a sua verdade deve ser pesada e investigada, a via da Porística deve ser tentada primeiramente. Será fácil voltar à síntese mais à frente. Exemplos disso são dados por Theon no "Elementos", por Apolônio de Perga na "Cônicas" e por Arquimedes nos seus vários livros.

(*)"Estas "leis" expostas por Aristóteles no Posterior Analytic, Livro 1, Parte IV, governam a relação atributo para assunto/sujeito. Um atributo é $\kappa\alpha\tau\alpha\_\pi\alpha\nu\tau o S$ se é predicado em cada exemplo no qual o atributo aparece; é $\kappa\alpha o\_\alpha\upsilon\tau\alpha$ se é um elemento do assunto essencial e não acidental; e é $\kappa\alpha\theta o\lambda o\upsilon\_\pi\rho\omega\tau o\upsilon$ se "é completamente mutável com o objeto" (Smith)" (Witmer, 1983)

[65] Uma equação estando estabelecida com uma grandeza procurada, Rética ou Exegética, que é a parte restante da análise e pertence especialmente à ordem geral da arte (como logicamente deveria desde que as outras duas [são mais preocupadas com] padrões do que regras), realiza a sua função. E o faz com ambos números, se o problema a resolver preocupa-se com um termo que deve ser extraído numericamente, e comprimentos, superfícies e corpos, se é uma questão de exibir a própria grandeza. No último caso, o analista se transforma em geômetra realizando a construção depois de ter encontrado a solução que é um analogismo da verdade. No primeiro, ele se torna um aritmético, resolvendo numericamente qualquer potência apresentada, pura ou afetada. Traz adiante exemplos da sua arte, tanto aritmético quanto geométrico, de acordo com os termos da equação que ele encontrou ou a própria proporção derivada dela.

É verdade que nem toda construção geométrica é elegante, para cada problema particular tem os seus próprios refinamentos. É também verdade que [aquela construção] é preferida a qualquer outra que deixe claro não a estrutura do trabalho a partir da equação, mas sim a equação a partir da estrutura; assim a estrutura é por si só

****

CAPÍTULO VIII

Definições das equações e o epílogo da arte

1. Quando se pronuncia simplesmente a palavra equação, em análise, entende-se como a igualdade ordenada conhecidamente pela Zetese[66].

2. Tanto que a equação é a comparação de uma grandeza certa [dada] com uma grandeza incerta [procurada].[67]

3. A grandeza incerta [procurada] é uma raiz ou uma potência[68].

4. De novo, a potência é ou pura ou nomeada.

5. A nomeação é ou por negação ou por afirmação [positiva ou negativa].

6. Quando o Homogêneo nomeado é o negativo da potência, a negação é direta[69].

7. Ao contrário, quando a potência é a negativa do Homogêneo através do grau, a negação é invertida[70].

8. O grau sub-gradual servindo de medida na medida do Homogêneo de nomeação[71].

---

demonstrada (**). Então um geômetra habilidoso, embora completamente experiente na análise, esconde o fato e, enquanto pensa sobre a realização do seu trabalho, esclarece e explica seu problema sinteticamente. Depois, como uma ajuda para os aritméticos, ele explica e demonstra seu teorema com a equação ou proporção que ele vê nele.

(**)Como Ritter observa, esta passagem é obscura. Ele ilustra o que Viète está falando assim: “Encontrar um retângulo igual a um quadrado dado, a soma das suas dimensões sendo igual a uma reta dada. Poder-se-ia encontrar os lados resolvendo as equações $xy = k^2$, $x + y = l$, mas Viète prefere uma solução como a seguinte que seja indicada pela composição das equações. A partir de uma análise delas, resulta que, de fato, k é a média proporcional entre x e y, segmentos de um diâmetro dado *l*, donde [segue] a construção geométrica conhecida por médias (meias proporcionais) na qual se pode determinar o valor de x e y de maneira algébrica.” (Witmer, 1983)

[66] Em análise a palavra “equação” significa a própria igualdade construída de acordo com [as leis da] Zetética. (Witmer, 1983)

[67] A Revista François Viète nº7 observa que o uso das palavras *compatio* e *comparare* em *Itaque Aequatio est maqnitudinis incertae cum certa comparatio* (esta frase é frase original correspondente ao item 2 deste capítulo). Ela afirma que Viète as utilizou no sentido de “igualdade, ser igual”, entretanto como não existe a “igualdade” no sentido absoluto da palavra já que temos a presença do conhecido e do desconhecido, Viète n’a pás voulu se servir des mots “aequalitas, aequare”. (Revista François Viète)

[68] Viète usou a palavra radix [raiz] em dois sentidos: Em alguns lugares ele a utiliza como sinônimo para latus [lado], a primeira potência; em outros (por exemplo nos itens 13 e 14 deste capítulo) ele a utiliza para denotar a menor de uma série de potências (por exemplo, x^3, x^6, x^9, etc), não importando o que a menor seja. (Witmer, 1983)

[69] Quando o termo homogêneo nomeado for subtraído de uma potência, a negação é direta. (Revista François Viète)

[70] Quando, ao contrário, a potência for subtraída de um termo homogêneo nomeado em um grau de ordem menor, a negação é inversa. (Revista François Viète)

9. Ora é o que é feito na parte incerta da equação, tanto a ordem da potência dos graus, quanto a qualidade da nomeação sendo designada, e nomeadamente que as grandezas emprestadas e soubsgraduel sendo dadas[72].

10. O primeiro grau paradoxo da potência é a raiz que está em questão [procurada]. A última, aquela que é mais baixa um grau que a potência, se chama usualmente epanaphora ou sub-relativo.

11. O grau paradoxo é recíproco [*complemento de*] a um outro grau paradoxo, quando pela multiplicação de um pelo outro, a potência é produzida. Portanto, a grandeza emprestada é recíproca do grau que ela tem[73].

12. Os graus paradoxos de uma raiz que é um simples comprimento são os que são representados pelas escalas.

13. Os graus paradoxos de uma raiz plana são os seguintes:

	quadrado		plano
Os	quadrado quadrado	ou os	quadrado do plano
	cubo cubo		cubo do plano

E consecutivamente guardando a mesma ordem.

14. Os graus paradoxos de uma raiz sólida são:

	cubo		sólido
os	cubo cubo	ou	o quadrado do sólido
	cubo cubo cubo		o cubo do sólido

15. Os quadrado, quadrado quadrado, quadrado cubo cubo, e aqueles que são continuamente feitos através dos mesmos são potências de meio simples, as outras são de meio múltiplo.

16. A grandeza certa a qual as outras são comparadas se chama Homogêneo de comparação.

17. Nos números, os Homogêneos de comparação são as unidades[74].

18. Quando a raiz que é procurada consiste na sua base é comparada a uma grandeza Homogênea dada, a equação é absolutamente simples[75].

---

[71] Witmer chama atenção para o fato de este item dar margem para diferentes leituras e traduz a seguinte forma: Em um termo homogêneo de nomeação, o coeficiente diz quantas [unidades a serem contadas ou unidades de medida existem] e o termo de ordem menor é a unidade contada ou a própria unidade de medida. (Witmer, 1983)

[72] Na parte desconhecida da equação, é preciso indicar a ordem tanto da potência quanto dos graus, e a qualidade ou o sinal de nomeação; e dar também as grandezas associadas sub-graduais (Revista François Viète).
No lado da equação desconhecido, o lugar tanto da potência quanto dos termos subordinados devem ser mostrados assim como o sinal ou qualidade de qualquer nomeação. O mesmo deve ser dado aos coeficientes. (Witmer, 1983)

[73] Qualquer termo menor que a potência é o complemento de [outro] termo menor se o produto dos dois é [do mesmo grau da] a potência. Assim um coeficiente é o complemento do termo que o sustenta. (Witmer, 1983)

[74] Nas [equações] numéricas os Homogêneos de comparação são números puros. (Witmer, 1983)

[75] Quando a incógnita é uma primeira potência e isso é igualado a um termo homogêneo dado, a equação é absolutamente simples (Witmer, 1983)

19. Quando a potência da raiz que é procurada encontra-se livre de qualquer tipo de nomeação, é comparada a uma potência Homogênea dada, a equação é simples.

20. Quando a potência da raiz em questão está nomeada através de um grau designado e um coeficiente dado, é comparada a uma grandeza Homogênea dada, a equação é polinomial, de acordo com a abundância e variedade das nomeações[76].

21. Tanto que aos graus paradoxos de uma potência de tanta nomeação pode ser envolvida.
    Se bem que o quadrado pode ser nomeado através do lado.
    O cubo através do lado e do quadrado.
    O quadrado quadrado através do lado, do quadrado e do cubo.
    O quadrado cubo através o lado, do quadrado e do cubo.
    E nesta ordem e de maneira infinita.[77]

22. Os analogismos resolvidos e tirados designam-se das equações das quais eles são tirados[78].

23. O analista é suficientemente munido para o que diz respeito à Aritmética do que lhe é necessário, quando sabe[79]
    Acrescentar um número a um número.
    Subtrair um número de um número.
    Multiplicar um número por um número.
    Dividir um número por um número.

Além disso, a arte afasta o método de resolução de todas as potências, tanto as puras, quanto as nomeadas (que os anciãos ignoraram, assim como os modernos.)[80]

24. No que se refere à exegética da Geometria, ela põe à parte as nomeações mais regulares, pelo meio das quais as equações dos lados e dos quadrados são explicadas completamente[81].

---

[76] Quando a potência da incógnita é afetada pelo produto por um termo de ordem menor e por um coeficiente dado e é igualada a um termo homogêneo dado, a equação é polinomial de acordo com número e a variedade das nomeações. (Witmer, 1983)
[77] Uma potência pode ter tantas nomeações quanto os graus que existem abaixo dela. Assim, um quadrado deve ser nomeado pela primeira potência; um cubo, pela primeira potência e pelo quadrado; a quarta potência, pela primeira potência, pelo quadrado e pelo cubo; a quinta potência, pela primeira potência, pelo quadrado, pelo cubo [e pela quarta potência]; e assim sucessivamente numa série infinita. (Witmer, 1983)
[78] Proporções são classificadas de acordo com, e recebem seus nomes de, os tipos de equações nas quais elas se resolvem. (Witmer, 1983)
[79] O Analista, instruído pela Exegética naquilo que se relaciona à Aritmética diz: (Revista François Viète)
[80] O analista treinado na exegética aritmética [numérica] sabe como:
somar um número a outro número
subtrair um número de outro número
multiplicar um número por outro número
dividir um número por outro número
O [analista] arte vai além, ensina a resolução de [todas] as potências seja qual for, tanto pura quanto afetada, [esta última sendo] algo entendido pelos velhos e novos matemáticos. (Witmer, 1983)
[81] Por Exegética naquilo que se relaciona à Geometria o analista escolhe e revisa as construções mais fundamentais tais que da maneira destas construções as equações dos Lados e dos Quadrados são completamente explicadas. (Revista François Viète)

25. Para os cubos e quadrados, ela necessita que a Geometria suplante, por si mesma, suas deficiências.
    De qualquer ponto que se deseje tirar uma reta que intersecta duas retas quaisquer de qualquer segmento possível que seja.[82]
    Isso dado (pois o postulado não é difícil de se executar mecanicamente) ela resolve os mais célebres problemas, até aqui chamados de irracionais, de acordo com a arte, o mesográfico da divisão do ângulo em três partes iguais, a invenção do lado do heptágono e todos os outros que caem nas fórmulas de equações, aquelas nas quais os cubos são comparados aos sólidos, os quadrados quadrados aos planos planos seja puramente seja com afecção[83].

26. Depois que todas as grandezas são ou retas ou superfícies ou corpos que o uso munido para encontrar as proporções para acima da tripla, ou todas as maiores que a quádrupla nas coisas humanas, senão as seções dos ângulos, afim de que se chegue ao conhecimento dos ângulos pelos lados das figuras, ou dos lados pelos ângulos.[84]

27. Se bem que ela sinaliza e descobre o mistério das seções dos ângulos desconhecidos até o presente, ou pela Aritmética, ou pela Geometria.
    Tendo a razão dos ângulos, encontra-se a razão dos lados.
    E faz como um número a um número, assim um ângulo a um ângulo[85].

28. Ela não compara a linha reta à linha curva, porque o ângulo é qualquer coisa entre a linha reta e a figura plana; e, portanto, a lei dos Homogêneos parece repelir[86].

29. Finalmente, a arte Analítica sendo revestida de sua tripla forma de Zetética, Porística e Exegética, resolve o problema, o mais relevante e excelente de todos os outros problemas que é RESOLVER TODOS OS PROBLEMAS.

[O analista treinado] na exegética geométrica vai selecionar e rever as construções padrões nas quais equações lineares e quadráticas podem ser completamente explicadas. (Witmer, 1983)

[82] Este problema se reduz de fato a uma equação de terceiro grau. (Revista François Viète)

[83] Para suprir quaisquer deficiências geométricas da geometria no caso de equações cúbicas ou bi quadrática, [a arte analítica] assume que
[É possível] desenhar, a partir de qualquer ponto, uma reta intersectando quaisquer duas retas dadas, o segmento formado entre as duas retas sendo prescrito de antemão.
Isso sendo concedido – mais ainda, não é mais uma suposição difícil – problemas famosos que foram chamados até aqui de irracionais podem ser resolvidos artificiosamente: o problema mesográfico, aquele da trissecção de um ângulo, a descoberta do lado do heptágono e todos os outros que recaem com aquelas fórmulas para as equações nas quais os cubos, puros ou afetados, são comparados com sólidos e quartas potências com plano plano. (Witmer, 1983)

[84] E que então (já que todas as grandezas são retas, superfícies ou corpos) podemos encontrar nas coisas humanas um grande uso de proporções acima da razão tripla ou mesmo quádrupla, se não está na seção de ângulos de maneira que possamos obter os ângulos das figuras pelos lados seja os lados pelos ângulos. (Revista François Viète)
Desde que todas as grandezas sejam ou retas ou superfícies ou sólidos, do que as usadas antes são proporções acima da triplicada ou, no máximo, quadriplicada relação exceto, talvez, na secção de ângulos tal que deve-se derivar de ângulos de figuras a partir de seus lados ou os lados a partir dos ângulos? (Witmer, 1983)

[85] Daqui o mistério das seções dos ângulos, até agora não fora percebido tanto aritmeticamente quanto geometricamente, é agora esclarecido, e [a arte analítica] mostra
como encontrar a razão dos lados, dada a razão dos ângulos;
como construir um ângulo [na mesma razão] para outro assim como um número está para outro. (Witmer, 1983)

[86] Uma linha reta não pode ser comparada a uma curva. Desde que um ângulo seja qualquer coisa no meio do caminho entre uma linha reta e uma figura plana, isso [ie, tal comparação] pode ser visto como repugnante à lei dos termos homogêneos. (Witmer, 1983)

FIM.

****

O PRIMEIRO LIVRO DAS ZETÉTICAS

ZETÉTICA PRIMEIRA

Dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontrar os lados.

A diferença dada de dois lados sendo B, e o agregado dos lados sendo D, encontrar os lados.

O menor lado sendo A, portanto, o grande será A+B, e o agregado dos lados 2A+B, como o agregado é dado, a saber D; é porque 2A+B sendo igual a D; e pela antítese 2A será igual a D–B. E todas as quantidades se reduzem à metade, A será igual à metade de D menos a metade de B.

Ou seja, o lado maior sendo E, o menor será E–B, e o agregado dos lados 2E–B, como o agregado é dado, a saber D; é porque 2E–B sendo igual a D. E pela antítese 2E sendo igual à D+B, e todas as quantidades estando reduzidas à metade, E será igual à metade de D menos[87] a metade de B.

Portanto, dados a diferença entre dois lados e o agregado dos lados, encontra-se os lados. Pois

Se subtrairmos a metade da diferença da metade do agregado dos lados, o que resta será igual ao menor lado; E se adicionarmos o total, será igual ao maior lado.

E é isso mesmo que a Zetese nos sinaliza (?).

B sendo 40 D 100 A faz 30 E 70.

Sejam B a diferença entre os lados procurados e D, a soma deles.

Se chamarmos de A o menor lado, então A + B será o maior lado e, portanto, a soma será 2A + B.

Assim,

$$2A + B = D$$

E pela antítese,

$$2A = D - B$$

Donde temos que

$$A = \frac{D}{2} - \frac{B}{2}$$

Por outro lado, se chamarmos de E o maior lado, então o menor lado será $E - B$ e, portanto, $2E - B$ será a soma dos lados.

Logo,

$$2E - B = D$$

E, pela antítese,

$$2E = D + B$$

E, portanto,

---

[87] O correto seria mais e não menos como aparece no texto original.

$$E = \frac{D}{2} + \frac{B}{2}$$

Assim, subtraindo da metade da soma dos lados a diferença entre eles, encontramos o menor lado; e somando a este resultado a diferença, encontramos o maior lado.

ZETÉTICA II

Dados a diferença entre dois lados e a razão entre eles, encontrar os lados.

A diferença dada dos dois lados sendo B, e a razão dada do menor lado ao maior, sendo como R está para S, encontrar os lados.

O menor lado sendo A, então o maior será A+B; isto porque A está para A+B, como R está para S; E por conseqüência S por A é igual à R por A + S por B, e pela transposição S por A – R por A, é igual à R por B. E o analogismo estando resolvido, S–R está para R, como B está para A.

Ou o lado maior sendo E, então o lado menor será E–B; isto porque E está para E–B, como S está para R; portanto, R por E será igual à S por E – S por B, e pela transposição S por E – R por B será igual à S por B, donde vem o analogismo, estando resolvido que como S–R está para S, assim B está para E.

Então a diferença dos dois lados estando dada e a sua razão, encontraremos os lados. Pois

Como a diferença de dois lados semelhantes está para o lado semelhante o maior ou o menor, então a diferença dos verdadeiros lados está para o verdadeiro lado, o maior ou menor.

Sendo B12, R2. S3. A faz 24. E 36.

Sejam B a diferença entre os lados e $\frac{R}{S}$ a razão do menor lado para o maior.

Se chamarmos de A o menor lado, então A + B será o maior lado.
Assim,

$$\frac{A}{A+B} = \frac{R}{S}$$

Daí,

$$SA = RA + RB$$

E pela transposição,

$$SA - RA = RB$$

Com o analogismo resolvido,

$$\frac{S-R}{R} = \frac{B}{A}$$

Por outro lado, se chamarmos de E o maior lado, então o menor lado será $E - B$.
Logo,

$$\frac{E}{E-B} = \frac{S}{R}$$

Daí,

$$RE = SE - SB$$

E pela transposição,

$$SE - RB = SB$$

E com o analogismo resolvido,

$$\frac{S-R}{S}=\frac{B}{E}$$

ZETÉTICA III

Dadas a soma dos lados e a razão entre eles, encontrar os lados.

A soma de dois lados sendo G e a razão do menor para o maior, como R está para S, encontrar os lados.

O menor lado sendo A, portanto o maior será G–A; isso porque A está para G–A assim como R está para S. E, portanto S por A será igual a R por G, e pela transposição ou síntese, S por A + R por A será igual a R por G.

De onde aparece o analogismo, estando resolvido que como S+R está para R, assim como G está para A.

Ou o maior lado sendo E, o menor será G–E; isso porque como E está para G–E, assim R está para S[88]. E, portanto R por E será igual a R por G[89] – S por E e a transposição sendo feita, assim como a arte requer, S por E + R por E será igual a S por G.

De onde se chegará que como S+R está para S, assim como G está para E, portanto a soma de dois lados e a razão que existe entre eles sendo conhecida, os lados serão dados.

Porque

Como a soma de dois lados semelhantes está para o lado semelhante maior ou menor, assim a soma dos verdadeiros lados está para o verdadeiro lado maior ou menor.

G sendo 60 R2. S3. A será 26.[90] E36.

Sejam G a soma de dois lados e $\frac{R}{S}$ a razão do menor lado para o maior.

Se chamarmos de A o menor lado, $G-A$ será o maior lado.
Assim,

$$\frac{A}{G-A}=\frac{R}{S}$$

Daí,

$$SA=RG-RA$$

E pela transposição,

$$SA+RA=RG$$

Pelo analogismo,

$$\frac{S+R}{R}=\frac{G}{A}$$

Por outro lado, se E é o maior lado, então $G-E$ será o menor lado.
Daí,

$$\frac{E}{G-E}=\frac{S}{R}$$

[88] O correto seria S está para R e não R está para S como aparece no texto original. No entanto, o raciocínio seguinte considera a razão correta.

[89] O correto seria S por G e não R por G como aparece no texto original. Da mesma forma, o raciocínio seguinte considera o produto correto.

[90] Considerando estas condições, o menor lado deve ser 24 e não 26.

Logo,

$$RE = SG - SE$$

E pela transposição,

$$SE + RE = SG$$

Pelo analogismo,

$$\frac{S+R}{S} = \frac{G}{E}$$

ZETÉTICA IV

Dados os dois lados menores que o justo e a razão dos defeitos, encontrar o verdadeiro e o justo lado.

Dado os dois lados faltantes do justo, o primeiro B, o segundo D, e a razão dada do defeito do primeiro ao defeito do segundo assim como R está para S, é preciso encontrar o verdadeiro e o justo lado.

O defeito do primeiro sendo A, portanto, B+A será o verdadeiro e justo lado.

Uma vez que como R está para S, assim como A está para $\frac{SporA}{R}$ então $\frac{SporA}{R}$ será o defeito do segundo lado: Isso porque $\frac{D+SporA}{R}$ [91] será também o verdadeiro e justo lado. Portanto, $\frac{D+SporA}{R}$ será igual a B+A, e todas as quantidades estando multiplicadas por R, D por R + S por A será igual a B por R + R por A. E a equação estando ordenada D por R == B por R, será igual a R por A == S por A.

De onde aparece que como R == S está para R, assim como D está para A == B[92].

Ou o defeito do segundo sendo E, então D+E será o lado justo: uma vez que como S está para R, assim como E está para $\frac{RporE}{S}$, então $\frac{RporE}{S}$ será o defeito do primeiro: Isso porque $\frac{B+RporE}{S}$ [93] será assim o verdadeiro e justo lado, e, portanto será igual a D+E. E todas as quantidades estando multiplicadas por S, B por S + R por E, será igual a D por G[94] + S por E, e a equação estando ordenada D por S == B por S, será igual a R por E == S por E.

De onde resulta que como R == S está para S, assim como D está para E == B[95].

Tanto que dois lados menores que o justo sendo dado, com a razão dos defeitos, o verdadeiro e justo lado se encontrará.

Porque

---

[91] Ele usa a fração $\frac{D+SporA}{R}$, mas o correto seria $D+\frac{SporA}{R}$. O raciocínio seguinte considera o correto.

[92] O texto diz que R == S está para R, assim como D está para A == B, mas o correto é R == S está para R, assim como D == B está para A.

[93] No texto aparece a fração $\frac{B+RporE}{S}$, mas o correto é $B+\frac{RporE}{S}$. Como nos outros erros, o raciocínio seguinte não considera este erro.

[94] O correto não é D por G e sim D por S.

[95] Assim como na outra relação, o texto diz que R == S está para S, assim como D está para E == B, mas o correto seria R == S está para S, assim como D ==B está para E.

Como a diferença dos defeitos semelhantes está para o defeito semelhante do primeiro ou segundo lado, assim como a verdadeira diferença dos lados faltantes, que é também dos defeitos está para o verdadeiro defeito do primeiro ou segundo lado: o qual o defeito estando adicionado seguindo a exigência do caso, chega-se ao verdadeiro e justo lado.

Sendo B76. D4. R1. S4. A faz 24 E96.

Sejam B e D os dois lados menores que o lado procurado. E seja $\frac{R}{S}$ a razão entre o defeito de B e o defeito de D.

Chamando de A o defeito de B, então B + A será o lado procurado (1).

Podemos reescrever a relação $\frac{R}{S}$, como $\frac{A}{\frac{SA}{R}}$, dessa forma, $\frac{SA}{R}$ será o defeito de D e, portanto, $D+\frac{SA}{R}$ é também o lado procurado (2).

De (1) e (2),

$$D+\frac{SA}{R}=B+A$$

De onde se tem que

$$DR+SA=BR+RA$$

Que pode ser reescrita da seguinte maneira

$$DR == BR = RA == SA$$

Daí,

$$(D == B)R=(R == S)A$$

E, portanto, chegamos a seguinte proporção,

$$\frac{R == S}{R}=\frac{D == B}{A}$$

Por outro lado, chamando de E o defeito de D, então D + E será o lado procurado (3).

Como $\frac{S}{R}$ é igual a $\frac{E}{\frac{RE}{S}}$, então $\frac{RE}{S}$ é o defeito de B, assim, $B+\frac{RE}{S}$ também é o lado procurado (4).

Logo, de (3) e (4),

$$B+\frac{RE}{S}=D+E$$

Assim,

$$BS+RE=DS+SE$$

Que pode ser reescrita como

$$DS == BS = RE == SE$$

Donde se tem que

$$(D == B)S=(R == S)E$$

E, portanto, chegamos a seguinte proporção

$$\frac{R == S}{S} = \frac{D == B}{E}$$

De outra maneira

Dados os dois lados menores que o justo, com a razão dos defeitos encontrar o verdadeiro e justo lado.

Dados os dois lados faltantes do justo, o primeiro B, o segundo D, e a razão dada do defeito do primeiro ao defeito do segundo, como R está para S, é preciso encontrar o lado justo.

Sendo este A, portanto A–B será o defeito do primeiro, e A–D o defeito do segundo: pois A–B está para A–D, assim como R está para S, R por A – R por D, será igual a S por A – S por B, e a transposição sendo feita como a arte requer, S por A == R por A, será igual a R por B[96] == R por D, portanto $\frac{SporB == RporD}{S == R}$ é igual a A.

Tanto que dados dois lados menores que o justo, com a razão dos defeitos, o verdadeiro e o justo lado se encontrarão; considerando que

A diferença entre o retângulo sob o primeiro lado faltante, e sob o semelhante defeito do segundo: E o retângulo sob o segundo lado faltante e através sob o semelhante defeito do primeiro aplicado à diferença dos defeitos semelhantes, dá o verdadeiro e justo lado requeridos.

Sendo B76. D4. R1. S4. A faz 100.

Sejam B e D os dois lados menores que o lado que procuramos. E seja $\frac{R}{S}$ a razão entre o defeito de B e o defeito de D.

Chamando de A o lado procurado, então, A – B será o defeito de B e o A – D, o defeito de D.

Logo, $\frac{A-B}{A-D} = \frac{R}{S}$.

Daí, $RA - RD = SA - SB$.

Pela transposição, $SA == RA = SB == RD$.

Isto é, $(S == R)A = SB == RD$

Daí, $\frac{SB == RD}{S == R} = A$

ZETÉTICA V

Dados os lados maiores que o justo, e a razão dos excessos, encontrar o verdadeiro e justo lado.

[96] O correto é S por B e não R por B, como aparece n texto.

Dados dois lados maiores que o justo: o primeiro B, o segundo D e a razão dada dos excessos do primeiro ao excesso do segundo, como R está para S, encontrar o verdadeiro e justo lado.

O excesso do primeiro sendo A, então B–A será o lado requerido: uma vez que como R está para S assim como A está para $\frac{SporA}{R}$ então $\frac{SporA}{R}$ será o excesso do segundo; Isso porque $\frac{D - SporA}{R}$ [97] será assim o verdadeiro e justo lado, portanto igual a B–A. E todas as quantidades sendo multiplicadas por R, D por R – S por A será igual a B por R – R por A. E a equação sendo ordenada D por R == B por R, será igual a S por A == R por A.

De onde se resulta que como S==R está para R, assim como D==A[98] está para A.

Ou o excesso do segundo sendo E, então D–E será o verdadeiro e justo lado, ou porque como S está para R. assim como E está para $\frac{RporE}{S}$ então $\frac{RporE}{S}$ será o excesso do primeiro; Isso porque $B - \frac{RporE}{S}$ será também o verdadeiro e justo lado. Portanto igual a D – E. E todas as quantidades sendo multiplicadas por S, B por S – R por E, será igual a D por S – B por E[99]. E a equação sendo ordenada D por S == B por S, será igual a S por E – [100]R por E.

De onde resulta que como S == R está para S. assim como D == B está para E.

Dados dois lados maiores que o justo, com a razão dos excessos, o justo lado se encontrará.

Porque

Como a diferença dos excessos semelhantes está para o excesso semelhante do primeiro ou segundo lado, assim como a verdadeira diferença dos lados maiores que o justo (que são também dos excessos) está para o verdadeiro excesso do primeiro ou segundo lado, o qual sendo subtraído dos lados maiores que o justo, seguindo a exigência do caso, restará o verdadeiro e justo lado.

Sendo B60. D40.[101] S3. R1. A faz 40. E120.

Sejam B e D os dois lados maiores que o lado procurado. E seja $\frac{R}{S}$ a razão entre o excesso de B e o excesso de D.

Chamando de A o excesso de A, então B – A será o lado procurado (1).

Uma vez que $\frac{R}{S}$ é o mesmo que $\frac{A}{\frac{SA}{R}}$, então $\frac{SA}{R}$ será o excesso de D.

Logo, $D - \frac{SA}{R}$ é o lado procurado (2).

---

[97] Ele usa $\frac{D - SporA}{R}$, ao invés de $D - \frac{SporA}{R}$

[98] O correto seria D==B e não D==A.

[99] S por E e não B por E como ele usa.

[100] Aqui ele deveria utilizar ==, ao invés de –.

[101] Na verdade, ele está considerando B140, como pode ser observado mais a frente.

De (1) e (2), $D - \frac{SA}{R} = B - A$.
Daí, $DR - SA = BR - RA$.
E, portanto, $DR == BR = SA == RA$.
Daí, $(D == B)R = (S == R)A$.
Resultando que $\frac{S == R}{R} = \frac{D == B}{A}$.
Por outro lado, chamando de E o excesso de D, D – E será o lado procurado (3).
Podemos reescrever $\frac{S}{R}$ como $\frac{E}{\frac{RE}{S}}$. Dessa forma, $\frac{RE}{S}$ será o excesso de B. E, por isso, $B - \frac{RE}{S}$ é o lado procurado (4).
Assim, de (3) e (4), temos que $B - \frac{RE}{S} = D - E$.
Logo, $BS - RE = DS - SE$.
Daí, $DS == BS = SE == RE$.
Ou seja, $(D == B)S = (S == R)E$.
E, portanto, $\frac{S == R}{S} = \frac{D == B}{E}$.

De outra maneira

Dados dois lados maiores que o justo, e a razão dos excessos, encontrar o verdadeiro e justo lado.

Sendo de novo os dois lados excedentes do justo, o primeiro B, o segundo D, e a razão do excesso do primeiro ao excesso do segundo, como R está para S, encontrar o verdadeiro e justo lado.

Sendo este A, então B–A será o excesso do primeiro, e D–A o excesso do segundo. E uma vez que B–A está para D–A, assim como R está para S. E por conseqüência R por D – R por A, será igual a S por B – S por A. E a transposição sendo feita, como a arte requer, S por A – R por A, será igual a S por B – R por D, portanto $\frac{SporB - RporD}{S - R}$ será igual a A.

Dados dois lados maiores que o justo com a razão dos excessos, o verdadeiro e justo lado se encontrará, uma vez que:

A diferença entre o retângulo sob o primeiro lado maior e o semelhante excesso do segundo lado: E o retângulo através sob o segundo lado maior que o justo: E o excesso semelhante do primeiro lado aplicado à diferença dos excessos semelhantes. Dá o verdadeiro e justo lado.

Sendo B60. D140. S3. R1. A faz 20.

Sejam B e D os dois lados maiores que o lado procurado. E seja $\frac{R}{S}$ a razão entre o excesso de B e o excesso de D.

Chamando de A o lado procurado, então B – A é o excesso de B e D – A é o excesso de D.

Como $\frac{B-A}{D-A}=\frac{R}{S}$, então $RD-RA=SB-SA$.

Pela transposição, $SA-RA=SB-RD$.

Ou seja, $(S-R)A=SB-RD$.

Portanto, $\frac{SB-RD}{S-R}=A$.

ZETÉTICA VI

Dados dois lados, um menor que o justo e o outro maior que o justo, e a razão do defeito ao excesso, encontrar o lado justo.

Dados os dois lados, B o menor que o justo, o outro D maior que o justo, e a razão do defeito ao excesso sendo dada como R está para S, encontrar o verdadeiro e justo lado.

O defeito sendo A, então o verdadeiro e justo lado será B+A: como R está para S, assim A está para $\frac{SporA}{R}$, então $\frac{SporA}{R}$ será o excesso; Isso porque $D-\frac{SporA}{R}$ será também o verdadeiro e justo lado, e, portanto, será igual a D+A[102]. E todas as quantidades estando multiplicadas por R, D por R – S por A será igual a B por R + R por A. E a equação estando ordenada R por A + S por A será igual a D por R – B por R.

De onde resulta que como S+R está para R, assim como D – B está para A.

Ou o excesso sendo E, portanto, o lado justo será D – E: como S está para R, assim E está para $\frac{RporE}{S}$ então $\frac{RporE}{S}$ será o defeito; Isso porque $B+\frac{RporE}{S}$ será também o verdadeiro e justo lado, que, portanto, será igual a D – E. E todas as quantidades multiplicadas por S, B por S + R por E será igual a D por S – S por E. E a equação estando ordenada. R por E + S por E, será igual a D por S – B por S.

De onde resulta que como S+R está para S assim como D – B está para E.

Assim, dois lados, um menor e o maior que o justo sendo dados, com a razão do defeito ao excesso, o verdadeiro e justo lado se encontrará. Pois

Como o agregado do defeito e excesso semelhantes está para o defeito ou excesso semelhante; assim como a verdadeira diferença do maior e do menor (que é a soma do verdadeiro defeito e do excesso) está para o verdadeiro defeito ou excesso, que estando somados ou subtraídos, seguindo a exigência do caso, encontramos o verdadeiro e justo lado requerido.

Sendo B60. D180. R1. S3. A faz 20. E100.[103]

---

[102] B+A, e não D+A como aparece no texto.

[103] Para os valores de B, D, R e S dados, A faz, na verdade, 30 e E, 90. Mas, Witmer diz que "*1591 tem S 3. Se isso fosse correto, Van Schooten observa, A deveria ser 30 e E 90. Ele sugere que S seja 5, como aqui, onde, ele diz que E será 150, e todos os outros termos permanecem o mesmo.*"

Sejam B o menor lado e D o maior lado. E seja $\frac{R}{S}$ a razão entre o defeito de B e o excesso de D.

Chamando de A o defeito de B, então B+A é o lado procurado. (1)

Já que $\frac{R}{S}$ pode ser reescrito como $\frac{A}{\frac{SA}{R}}$, então $\frac{SA}{R}$ é o excesso de D.

Assim $D-\frac{SA}{R}$ é também o lado procurado. (2)

De (1) e (2), $D-\frac{SA}{R}=B+A$.

Daí, $DR-SA=BR+RA$.

Ou seja, $RA+SA=DR-BR$.

Daí, $(R+S)A=(D-B)R$

De onde resulta que $\frac{S+R}{R}=\frac{D-B}{A}$.

Por outro lado, chamando de E o excesso de D, então D – E é o lado procurado. (3).

A razão $\frac{S}{R}$ pode ser reescrita como $\frac{E}{\frac{RE}{S}}$; assim, $\frac{RE}{S}$ é o defeito de B.

Logo, $B+\frac{RE}{S}$ é também o lado procurado (4).

De (3) e (4), $B+\frac{RE}{S}=D-E$.

Daí, $BS+RE=DS-SE$.

Logo, $RE+SE=DS-BS$.

Ou seja, $(R+S)E=(D-B)S$.

De onde resulta que, $\frac{S+R}{S}=\frac{D-B}{E}$.

De outra maneira

Dados dois lados, um menor e outro maior que o justo, e a razão do defeito ao excesso, encontrar o verdadeiro e justo lado.

Sendo de novo dois lados dados, B o menor que o justo, o outro D maior que o justo, e a razão do defeito ao excesso estando dada como R está para S, é preciso encontrar o verdadeiro e justo lado.

Este sendo A, então A – B será o defeito e D – A será o excesso; Isso porque como A – B está para D – A assim como R está para S; e R por D – R por A, por conseqüência será igual a S por A – S por B. E a transposição estando feita, como a arte requer, S por A + R por A é igual a R por D + S por B. Portanto, $\frac{RporD+SporB}{S+R}$ será igual a A.

Assim, dois lados , um menor e o outro maior que o justo estando dados, com a razão do defeito ao excesso. O verdadeiro e justo lado se encontrará.

Pois

O agregado daquilo que está feito sob o semelhante defeito e o maior lado, e daquilo que está feito sob o semelhante excesso e o menor lado aplicado ao agregado do excesso e defeito semelhante, dará o verdadeiro e justo lado requerido.

Sendo B60. D180. R1. A faz 80.[104]

Sejam B o menor lado e D o maior lado. E seja $\frac{R}{S}$ a razão entre o defeito de B e o excesso de D.

Chamando de A o lado procurado, A – B é o defeito de B e D – A é o excesso de D.

Daí $\frac{A-B}{D-A}=\frac{R}{S}$.

Logo, $RD-RA=SA-SB$.

Pela transposição, $SA+RA=RD+SB$.

Ou seja, $(S+R)A=RD+SB$.

Portanto, $\frac{RD+SB}{S+R}=A$.

ZETÉTICA VII

Dado um lado, dividi-lo em duas partes tais que certas partes e porções limitadas de uma das partes estando somadas a certas partes e porções da outra, sendo iguais à soma dada.

Sendo B o lado dado que é preciso dividir em duas partes, tais que a porção da primeira parte que está para o total na razão de D a B somadas às porções de outra parte, que tenham ao seu total a razão de F à B, sendo iguais à H.

A porção que a primeira parte deve contribuir sendo A, então a porção da segunda será H – A . E como D está para B assim com A está para $\frac{BporA}{D}$, portanto, $\frac{BporA}{D}$ será o total da primeira parte: do outro lado, pois como F está para B assim como H – A está para $\frac{BporH-BporA}{F}$, portanto, $\frac{BporH-BporA}{F}$ será o total da segunda parte. Ou as duas partes são iguais ao lado inteiro, então $\frac{BporA}{D}+\frac{BporH-BporA}{F}$ será igual a B.

Isso porque a equação estando ordenada, é sabido (?) que todas as quantidades estando multiplicadas por D e por F, e divididas por B, e a transposição estando feita como a arte requer, se por ventura as porções entre as quais D é o numerador são maiores que aquelas cujo F é o numerador, $\frac{HporD-FporD}{F-D}$[105] será igual a A.

De onde resulta que D – F está para H – F assim como D está para A.

Ou a porção que se deve contribuir para a segunda parte, por H sendo E, então a porção que a primeira parte deve fornecer será H – E e como F está para B assim como E está

---

[104] Repare que falta o dado sobre o valor de S. Usando S igual a 3 como anteriormente, A deveria fazer 90. Witmer escreve *Sendo B 60, D180, R1 e S 5, A faz 80.*

[105] No texto aparece $\frac{HporD-FporD}{F-D}$, mas o correto é $\frac{HporD-FporD}{D-F}$.

para $\frac{BporE}{F}$, portanto, $\frac{BporE}{F}$ será o total da segunda parte. E como D está para B assim como H – E está para $\frac{BporH - BporE}{D}$ $\frac{BporH - BporE}{D}$ será o total da segunda[106] parte. Ora, acontece que as referidas duas partes são iguais ao lado proposto, para dividir então $\frac{BporE}{D} + \frac{BporH - BporE}{D}$ [107] serão iguais a B, portanto, a equação estando ordenada, isto é todas as quantidades estando multiplicadas por F e D e divididas por B, a transposição estando feita como requerido, se por ventura as porções das quais D é o numerador são maiores que aquelas das quais F é o numerador $Dpor\frac{F - HporF}{D - F}$ [108] será igual a E, de onde é evidente que como D – F está para D – H assim como F está para E.

Então, as partes das porções estando dadas cada parte está similarmente dada, a saber $\frac{BporA}{D}$ será a primeira e $\frac{DporE}{E}$ [109] a segunda.

Tanto que podemos dividir um lado dado de tal maneira que as porções limitadas de uma das partes estando somada às partes limitadas da outra parte serão iguais à certa soma dada.

Pois

O lado estando dividido de acordo com a razão das porções que cada uma das partes requeridas deve contribuir. Como

As partes semelhantes que se devem contribuir para a primeira parte (pois a primeira parte deve contribuir mais que a segunda) menos as porções semelhantes que se devem contribuir para a segunda.

São as porções semelhantes que se devem contribuir para a primeira parte.

Assim a soma prescrita das partes limitadas que se devem contribuir para a primeira parte menos as porções semelhantes que se devem fornecer para a segunda parte.

É a verdadeira porção que a primeira parte deve contribuir.

Ou

Como as porções semelhantes que se devem contribuir para a primeira parte menos as partes semelhantes que se devem contribuir para a segunda parte.

São as porções semelhantes que se devem contribuir para a segunda parte.

Assim as porções semelhantes fornecem para a primeira parte menos a soma das porções limitadas.

São a verdadeira porção que se deve fornecer para a segunda parte.

---

[106] Este será o total da primeira parte e não o da segunda, como está escrito.

[107] O correto seria $\frac{BporE}{F} + \frac{BporH - BporE}{D}$ e não $\frac{BporE}{D} + \frac{BporH - BporE}{D}$ como aparece no texto.

[108] No texto aparece $Dpor\frac{F - HporF}{D - F}$ com o sentido de $\frac{DporF - HporF}{D - F}$.

[109] A segunda parte é $\frac{BporE}{F}$ e não $\frac{DporE}{E}$.

O lado todo foi dividido na razão das frações para ser contribuído pelos segmentos, assim [1] como fração análoga para ser contribuída pelo primeiro segmento (se for maior que [para ser contribuído por] o segundo, menos a fração análoga para ser contribuída pelo segundo está para a fração análoga para ser contribuída pelo primeiro , assim como a soma prescrita das contribuições menos de a fração análoga prescrita do segundo está para a verdadeira fração do primeiro, ou [2] como a fração análoga da fração para ser contribuída pelo primeiro segmento menos a fração análoga para ser contribuída pelo segundo está para a fração análoga para ser contribuída pelo segundo, assim como a fração análoga para ser contribuída pelo primeiro menos a soma prescrita das contribuições está para a verdadeira fração para ser contribuída pelo segundo.)

Sendo B60. D20. F12. H14. composição de A e E. A faz5.
E9.

Ou é certo que a soma das porções H que é limitada devem ser a média entre D e F, a saber que aquela é menor, e esta maior, como aqui (?) 14 é menor que 20 e maior que 12.

Além disso, é claro que H, a soma das contribuições deveria ser prescrita com encontrando-se entre D e F, sendo o primeiro menor e o último maior. Assim, neste caso, 14 é menor que 20 e maior que 12.

Seja B o lado que se deseja dividir. Seja H a soma das partes e porções dada.

Sabe-se ainda que a primeira parcela da soma H está para a primeira parte do lado B assim como $\frac{D}{B}$. Da mesma fora, a segunda parcela da soma H está para a segunda parte do lado B assim como $\frac{F}{B}$.

Suponha, portanto, que A seja a porção que a primeira parte deve contribuir, ou seja, A é a primeira parcela da soma H. Assim, H – A é a segunda porção.

Repare que, uma vez que $\frac{D}{B} = \frac{A}{\frac{BA}{D}}$, então $\frac{BA}{D}$ é exatamente igual à primeira parte do lado B.

Da mesma forma, como H – A é a segunda porção e uma vez que $\frac{F}{B} = \frac{H-A}{\frac{BH-BA}{F}}$, então, $\frac{BH-BA}{F}$ é exatamente a segunda parte do lado B.

Assim, $\frac{BA}{D} + \frac{BH-BA}{F} = B$.

Dessa forma, para obter a equação ordenada, deve-se primeiramente multiplicar todas as quantidades por DF ($BAF + BHD - BAD = BDF$) e depois dividir por B ($AF + HD - AD = DF$). Com a transposição chegamos a $HD - FD = AD - AF$. Que podemos reescrever como $\frac{HD-FD}{D-F} = A$.

Ou seja, $\frac{D-F}{H-F} = \frac{D}{A}$.

Por outro lado, se a porção que se deve contribuir para a segunda parte for E, então, H – E será a parcela da soma H.

Uma vez que $\frac{F}{B} = \frac{E}{\frac{BE}{F}}$, então $\frac{BE}{F}$ é exatamente a segunda parte da lado B. Além disso, como $\frac{D}{B} = \frac{H-E}{\frac{BH-BE}{D}}$, então $\frac{BH-BE}{D}$ será a primeira parte do lado B.

Assim, $\frac{BE}{F} + \frac{BH-BE}{D} = B$.

Para ordenar a equação, temos que multiplicar tudo por FD ($BED + BHF - BEF = BFD$), dividir tudo por B ($ED + HF - EF = FD$), fazer a transposição ($DF - HF = ED - EF$). Assim, $\frac{DF-HF}{D-F} = E$; ou seja, $\frac{D-F}{D-H} = \frac{F}{E}$.

Repare que conhecendo as partes das porções, A e E, poderemos determinar as partes nas quais o lado B será dividido. A primeira parte será, portanto, $\frac{BA}{D}$ e a segunda, $\frac{BE}{F}$.

ZETÉTICA VIII

Dividir o lado dado em duas partes, tais que certas porções da primeira parte subtraídas de certas partes e porções da segunda parte, igualmente a diferença prescrita.

Sendo o lado dado B, que é preciso dividir em duas partes, tais que a porção da primeira parte tendo o total da mesma parte na razão de D à B, subtraído da segunda parte, que está para o total da mesma segunda parte, a razão de F à B, o que restará sendo igual a H; É necessário lembrar que a divisão será completamente diferente, se as porções maiores devessem tomar sobre a primeira, que não estão sobre a segunda parte, ainda que numa ou outra o procedimento seja totalmente semelhante.

Sendo então as porções cujo D é o numerador, maiores ou menores que aqueles cujo numerador é B e que a porção que se deve contribuir para a primeira parte sendo A, então a porção que se deve contribuir para a segunda será A – H, e uma vez que D está para B assim como A está para $\frac{BporA}{D}$, então $\frac{BporA}{D}$ será a primeira parte: Similarmente, uma vez que como F está para B assim como A – H está para B por A – B por H[110], B por A – B por H [111]será a segunda parte. Ou as duas partes são iguais a todo o lado B, então $\frac{BporA}{D} + \frac{BporA - BporH}{F}$ será igual a B, e a equação estando ordenada D por F $\frac{+DporH}{D+F}$ [112]será igual a A.

De onde resulta que D+F está para F+H assim como D está para A.

---

[110] Deveria ser $\frac{BporA - BporH}{F}$, ao invés de B por A- B por H como está no texto.

[111] Idem 29.

[112] Deveria estar escrito $\frac{DporF + DporH}{D+F}$ e não D por F $\frac{+DporH}{D+F}$ como aparece no texto.

Do outro lado a porção que se deve contribuir para a menor parte sendo A – H, portanto ela permanece se subtrairmos H de $\frac{FporD + HporD}{D+F}$ e esta sendo então E, portanto, D por F – H por F será igual a E[113], de onde é evidente que como D+F está para D – H assim com F está para E. Ou as porções das partes estando dadas, das quais $\frac{BporA}{D}$ é a primeira e $\frac{BporE}{F}$ a segunda.

Tanto que pode-se dividir um lado de tal maneira que certas partes e porções da primeira parte subtraídas de certas partes e porções da segunda parte permanecem iguais à diferença prescrita.

Pois

O lado dado estando cortado de acordo com a razão das porções que se devem contribuir para as partes requeridas.

Como

As porções semelhantes que se devem tomar sobre a primeira e a segunda partes.
São a diferença das porções semelhantes que se devem fornecer para a segunda parte.
Assim as porções semelhantes que se devem tomar sobre a primeira parte.
São as verdadeiras porções que se devem fornecer para a primeira parte.

Ou

Como as porções semelhantes que se devem fornecer, tanto para a primeira quanto para a segunda partes.

São as porções semelhantes que se devem contribuir para a primeira parte menos a diferença prescrita das porções requeridas.

Assim as porções semelhantes que se devem tomar sobre a segunda parte.
São as verdadeiras porções a serem tomadas sobre a segunda parte.

Sendo B84. D28. F21. H7. A faz 16 E9.

Ou resulta que H que é a diferença das porções requeridas, deve estar prescrita tal que ela sendo menor que as porções cujo D é o numerador e que se devem tomar sobre a primeira parte que deve exceder, seguindo a suposição, sendo que estas porções sendo maiores ou menores que aquelas que se devem fornecer para a segunda parte, como o último caso 7 é menor que 21[114].

Seja B o lado que se deseja dividir. Seja H a diferença das partes e porções dada.

Sabe-se ainda que a primeira parcela da soma H está para a primeira parte do lado B assim como $\frac{D}{B}$. Da mesma fora, a segunda parcela da soma H está para a segunda parte do lado B assim como $\frac{F}{B}$.

---

[113] O correto seria “ $\frac{DporF - HporF}{D+F}$ será igual a E” e não apenas D por F – H por F será igual a E.

[114] Deveria ser 28 e não 21 como aparece no texto.

É necessário lembrar que a divisão será completamente diferente, se as porções maiores devessem tomar sobre a primeira, que não si c'estoit sobre a segunda parte, ainda que numa ou outra o procedimento seja totalmente semelhante.

Suponha, portanto, que A seja a porção que a primeira parte deve contribuir, ou seja, A é a primeira parcela da diferença H. Assim, A – H é a segunda porção.

Repare que, uma vez que $\frac{D}{B} = \frac{A}{\frac{BA}{D}}$, então $\frac{BA}{D}$ é exatamente igual à primeira parte do lado B.

Da mesma forma, como A – H é a segunda porção e uma vez que $\frac{F}{B} = \frac{A-H}{\frac{BA-BH}{F}}$, então, $\frac{BA-BH}{F}$ é exatamente a segunda parte do lado B.

Assim, $\frac{BA}{D} + \frac{BA-BH}{F} = B$.

Dessa forma, para obter a equação ordenada, deve-se primeiramente multiplicar todas as quantidades por DF ($BAF + BAD - BHD = BDF$) e depois dividir por B ($AF + AD - HD = DF$). Com a transposição chegamos a $DF + DH = AF + AD$. Que podemos reescrever como $\frac{DF+DH}{D+F} = A$.

Ou seja, $\frac{D+F}{F+H} = \frac{D}{A}$.

Por outro lado, como a porção que se deve contribuir para a menor parte é A – H, então A – H é o que resta da subtração de H de $\frac{DF+DH}{D+F}$. Chamemos esta diferença, ou seja, a segunda parcela da diferença H de E.

$$\frac{DF+DH}{D+F} - H = A - H = E$$

Daí, $\frac{DF-HF}{D+F} = E$. E, portanto, $\frac{D+F}{D-H} = \frac{F}{E}$.

Repare que conhecendo as partes das porções, A e E, poderemos determinar as partes nas quais o lado B será dividido. A primeira parte será, portanto, $\frac{BA}{D}$ e a segunda, $\frac{BE}{F}$.

ZETÉTICA IX

Encontrar dois lados cuja diferença estando prescrita e mais certas partes e porções do primeiro lado somadas à certas partes e porções do outro lado igualmente a soma prescrita.

B sendo a diferença dada de dois lados, é necessário que a porção do primeiro esteja para o seu total a razão de D à B, somada à porção do segundo lado tendo ao seu total a razão de F à B, sendo igual a soma dada H e que é preciso encontrar os dois lados ou o primeiro lado é o maior ou o menor: se é o maior e a porção que contribui sendo A, então a porção que o segundo contribui será H – A, e como D está para B assim como A está para $\frac{BporA}{D}$. $\frac{BporA}{D}$ será o maior lado.

De novo, uma vez que como F está para B assim como H – A está para $\frac{EporH - BporA}{F}$[115], $\frac{EporH - BporA}{F}$[116] será o menor lado. Isso porque $\frac{BporA}{D} - \frac{BporH - BporA}{F}$ será igual a B, e a equação estando ordenada, $\frac{DporF + DporH}{F + D}$ será igual a A.

De onde resulta que F+D está para F+H assim como D está para A. Agora uma vez que a porção que se deve contribuir para o segundo lado é H – A, por esta razão esta mesma porção permanecerá de H tendo subtraído $\frac{FporD + HporD}{F + H}$.

Esta mesma porção sendo E, então $\frac{HporF - DporF}{F + D}$ será igual a E: de onde se resulta que como F+D está para D – H[117] assim como F está para E.

O segundo caso, que a porção que se deve contribuir para o primeiro lado sendo menor, então a porção que se deve contribuir para o segundo[118] lado será H – E: e como H[119] está para B assim como E está para $\frac{BporE}{F}$. $\frac{BporE}{F}$ será o segundo e maior lado pela identidade da razão, pois D está para B assim como H – E está para $\frac{BporH - BporE}{D}$. $\frac{BporH \quad - BporE}{D}$ será o primeiro e menor: Isso porque $\frac{BporE}{F} - \frac{BporH - BporE}{D}$ será igual a B, e a igualdade estando ordenada $\frac{FporH - FporD}{D +}$[120] será igual a E: de onde se resulta que como D+F está para H+D assim como F está para E. Ou como a parte e porção que se deve fornecer para o primeiro lado é H – E e que permanecerá quando H for subtraído de $\frac{HporF + DporF}{F + D}$ será igual a E.

Que esta mesma porção sendo A, então $\frac{HporD - FporD}{F + D}$ será igual a A.

De onde segue que como F+D está para H – F assim como D está para A.

As porções estando dadas, todos os lados são dados, pois $\frac{BporA}{D}$ é o primeiro lado, $\frac{BporE}{F}$ o segundo.

---

[115] O correto seria $\frac{BporH - BporA}{F}$ e não $\frac{EporH - BporA}{F}$ como aparece no texto.

[116] Idem a 34.

[117] H – D e não D – H como consta no texto original.

[118] Primeiro lado e não segundo lado.

[119] F e não H.

[120] Deve ser $\frac{FporH + FporD}{D + F}$. O texto está um pouco apagado no denominador; de qualquer forma o numerador aparece errado no texto original, pois lá consta F por H – F por D.

Então, encontra-se dois lados dos quais a diferença é aquela que é prescrita e além disso as partes e porções de um de seus somadas às partes e porções limitadas pelo outro lado são iguais à soma prescrita. Pois

A diferença prescrita estando dividida de acordo com a razão de porções semelhantes que se devem contribuir para os dois lados. Como

As partes e porções que se devem contribuir para o maior e menor lado.

São a soma prescrita das porções que se devem fornecer para os dois lados mais as partes e porções semelhantes do menor lado.

Assim as partes e porções semelhantes que se devem fornecer para o maior lado.

São as partes e porções que se devem contribuir para o maior lado.

Ou

Como as partes e porções que se devem contribuir para o maior e menor lado.

São a soma prescrita das porções que os dois lados semelhantes devem fornecer menos as partes e porções que o maior lado deve contribuir.

Assim as partes e porções semelhantes que se devem fornecer para o menor lado.

São as verdadeiras partes e porções que se devem fornecer para o lado menor.

B sendo 84. D28. F21. H98. A será 68. E30.

É tudo evidente que a soma das partes e porções que se devem contribuir deve estar prescrita tal que ela sendo menor que as partes e porções cujo B é o numerador e que se devem contribuir para o maior lado como no exemplo proposto 98 é maior que 28.

Seja B a diferença prescrita dos dois lados procurados. Seja H a soma das partes e porções dos lados dada.

A primeira parcela da soma H está para o primeiro lado assim como $\frac{D}{B}$, bem como a segunda parcela da soma H está para o segundo lado assim como $\frac{F}{B}$.

Suponha que o primeiro lado seja o maior e seja A a primeira parcela da soma H. Daí, H – A será a segunda parcela. Além disso, como $\frac{D}{B} = \frac{A}{\frac{BA}{D}}$, então $\frac{BA}{D}$ é exatamente igual ao primeiro e maior lado.

Por outro lado, como $\frac{F}{B} = \frac{H - A}{\frac{BH - BA}{F}}$, então, $\frac{BH - BA}{F}$ é o menor lado.

Assim, $\frac{BA}{D} - \frac{BH - BA}{F} = B$.

$BAF - BHD + BAD = BDF$

$AF - HD + AD = DF$

$DF + DH = AF + AD$

E a equação estando ordenada, $\frac{DF + DH}{F + D} = A$.

De onde resulta que $\frac{F + D}{F + H} = \frac{D}{A}$.

Como H – A é a porção que se deve contribuir para a segunda parte, então, $H-\dfrac{FD+HD}{F+D}=H-A$ e chamando esta diferença de E temos que:

$$HF+HD-FD-HD=EF+ED$$
$$HF-FD=EF+ED$$
$$HF-FD=E(F+D)$$
$$\frac{HF-DF}{F+D}=E$$

De onde resulta que $\dfrac{F+D}{D-H}=\dfrac{F}{E}$.

Suponha agora que o primeiro lado seja o menor.

Como H – E é o que se deve contribuir para o primeiro lado.

Uma vez que $\dfrac{F}{B}=\dfrac{E}{\frac{BE}{F}}$, então, $\dfrac{BE}{F}$ será o segundo e maior lado.

Por outro lado, $\dfrac{D}{B}=\dfrac{H-E}{\frac{BH-BE}{D}}$, $\dfrac{BH-BE}{D}$ será o primeiro e menor lado.

Assim, $\dfrac{BE}{F}-\dfrac{BH-BE}{D}=B$.

$$BED-BHF+BEF=BFD$$
$$ED-HF+EF=FD$$
$$FH+FD=ED+EF$$

A igualdade estando ordenada $\dfrac{FH+FD}{D+F}=E$

De onde resulta que $\dfrac{D+F}{H+D}=\dfrac{F}{E}$.

Uma vez que a parte e porção que se deve contribuir para o primeiro lado é H – E e que $H-E=H-\dfrac{HF+DF}{F+D}$. Chamando, então, esta diferença de A, então:

$$H-\frac{HF+DF}{F+D}=A$$
$$HF+HD-HF-DF=AF+AD$$
$$HD-FD=AF+AD$$
$$\frac{HD-FD}{F+D}=A$$

De onde resulta que $\dfrac{F+D}{H-F}=\dfrac{D}{A}$.

Repare que as porções estando descobertas fica fácil determinar os lados, pois $\dfrac{BA}{D}$ é o primeiro lado e $\dfrac{BE}{F}$, o segundo.

ZETÉTICA X

Encontrar dois lados dos quais a diferença sendo prescrita e que em outras certas partes e porções do primeiro lado estando subtraídas de certas e porções do segundo. O que resta (?) deve ser igual à diferença que é dada.

B sendo a diferença dada, e a porção do primeiro lado tendo ao lado inteiro a razão de B a D[121], estando diminuída da porção do segundo lado, tendo seu total a razão de F à B, sendo igual a H, é preciso encontrar os dois lados.

O primeiro lado é o maior ou o menor, sendo que se exige deste das partes e porções maiores, que não são do segundo, pois se chega a mesma coisa de qualquer maneira que se faça.

As partes e porções cujo D é o numerador sejam as maiores que se devem fornecer para o maior lado.

O primeiro caso, aquele que o primeiro lado sendo aquele sobre o qual as maiores partes e porções se devem tomar e que a parte e porção que se deve fornecer sendo A, então a parte e porção que a segunda deve fornecer será A – H, afim de que a diferença destas partes e porções que se devem fornecer seja H, depois que assim que o primeiro lado é o que excede, o primeiro lado será $\frac{BporA}{D}$, o segundo $\frac{BporA - BporH}{F}$, portanto, $\frac{BporA}{D} - \frac{BporA - BporH}{F}$ será igual a B, e a igualdade estando ordenada, se as partes e porções das quais F é o numerador são maiores que aquelas cujo D é o numerador, $\frac{FporD - HporD}{F - D}$ será igual a A, de onde resulta que como F==D está para F==H assim como D está para A. Mas depois que a porção que o segundo lado deve contribuir é A – H, esta mesma porção permanecerá se de H subtrair-se $\frac{FporD == DporH}{F == D}$

Esta mesma porção sendo E, então $\frac{FporD == FporH}{F == D}$ será igual a E, de onde segue que como F==D está para D==H assim como F está para E.

Se ao contrário as partes e porções que têm D como numerador são maiores que aquelas que têm F por numerador, como D – F está para H – F assim como D está para A e como D – F está para H – D assim como F está para E.

Como segundo caso, o primeiro lado sendo o menor e a porção que se deve contribuir sendo A, então a porção que o segundo e maior lado deve fornecer será A – H, o primeiro lado será $\frac{BporA}{D}$, o segundo será $\frac{BporA - BporH}{F}$, então $\frac{BporA - BporH}{F} - \frac{BporA}{D}$ será igual B, e a equação estando ordenada $\frac{FporD + HporD}{D - F}$ será igual a A, de onde resulta que como D – F está para F+H assim como D está para A. Ou depois que A – H é a porção que o segundo e maior lado devem fornecer, se de $\frac{FporD + HporD}{D - F}$ subtrai-se H,esta então é E. Portanto, $\frac{DporF + HporF}{D - F}$ será igual a E, de onde segue que como D – F está para D+H assim como F está para E. A seqüência de procedimentos mostra evidentemente que o

[121] O correto é D a B.

primeiro lado no segundo caso devem contribuir uma parte e porção maiores que aquelas que se devem fornecer para o segundo.

Finalmente as porções dos lados estando dadas, os lados inteiros serão dados, pois $\frac{BporA}{D}$ será o primeiro lado e $\frac{BporE}{F}$ o segundo.

Então encontra-se dois lados, dos quais a diferença é aquela que é prescrita e as outras (?) partes e porções de um subtraídas de certas partes e porções do segundo são iguais a diferença proposta. Pois

Dividindo a diferença dos lados que é proposta segundo a razão das porções que se devem fornecer para os lados, se o primeiro lado é o maior deles e se a porção exigida sendo a maior.

Como

As porções semelhantes que se devem contribuir para o primeiro lado menos as porções semelhantes que se devem fornecer para o segundo.

São a diferença das porções que é prescrita menos a porção semelhante que se deve fornecer para a segunda.

Assim será a porção semelhante que se deve fornecer para o primeiro lado.

As porções semelhantes que se devem fornecer para o primeiro lado.

Ou

Como as porções semelhantes que se devem fornecer para o primeiro lado menos as porções semelhantes que se devem fornecer para o segundo lado.

São a diferença das porções que é prescrita menos as porções semelhantes que se devem fornecer para o primeiro lado.

Assim as porções semelhantes que se devem fornecer para o segundo lado.

São a verdadeira porção que se deve contribuir para o segundo lado.

Que se exige do primeiro e maior lado das partes e porções menores, os mesmos analogismos têm lugar invertendo apenas os sinais de menos.

Mas enquanto que o primeiro lado do qual as partes e porções sofrem considerado pela pergunta, é o menor dos lados procurados, é muito certo que se deve fornecer as partes e porções maiores e se chega assim que. Como

As porções semelhantes que se devem contribuir para o primeiro lado menos as porções semelhantes que se devem fornecer para o segundo lado.

São as partes e porções que se devem fornecer para o segundo lado mais a diferença prescrita das porções que se devem contribuir de maneira semelhante.

Assim as partes e porções que se devem fornecer para o segundo lado.

São as partes e porções que se devem fornecer para o segundo lado.

Ou

Como as porções semelhantes que se devem fornecer para o primeiro lado menos as porções semelhantes que se devem fornecer para o segundo lado.

São as porções semelhantes que se devem fornecer para o segundo lado mais a diferença prescrita das porções que se devem fornecer igualmente. (?)

Assim as porções que se devem fornecer para o primeiro lado.

São as verdadeiras porções que se devem fornecer para o primeiro lado.

Enfim são três casos. O primeiro é quando o primeiro lado, a saber aquele do qual as porções sofrem a diminuição considerada pela pergunta, é o maior dos dois lados e que deve fornecer as maiores partes e porções.

O segundo caso quando o mesmo lado é o maior e que se exige dele as menores partes e porções.

O terceiro caso quando o mesmo primeiro lado é o menor dos dois lados e que se exige dele as maiores partes e porções, pois não se pode exigir os menores. (?)

Para o primeiro caso, é preciso que H sendo prescrito tal que ele sendo maior que as partes e porções semelhantes do primeiro segmento, e por conseqüência maiores que as partes e porções cujo F é o numerador.

Para o segundo caso, é preciso que ela seja menor que aquela cujo D e F são os numeradores.

Para o terceiro caso, H é ou menor ou maior que as partes e porções cujo D ou F são os numeradores, portanto, o terceiro caso pode não estar de modo algum diferente do primeiro ou segundo.

B sendo 12 a diferença dos dois lados D4. F3. H9. a diferença da qual A excede F, porque H é maior que D ou F e $\frac{BporA}{D}$ é o primeiro e maior lado, ou o menor.

Primeiramente se é o maior, A faz 24. E15. e $\frac{BporA}{D}$ é 72. o primeiro e maior lado, $\frac{BporE}{F}$ faz 60.o segundo e menor lado; e a diferença de seus dois lados é B, aquela que é prescrita.

Em segundo lugar, $\frac{BporA}{D}$ sendo o menor lado, A faz 48. E39. e $\frac{BporA}{D}$144. $\frac{BporE}{F}$156 e a diferença prescrita entre eles é B.

De novo, sendo primeiramente B48. a diferença dos dois lados sendo 16 F12. H10. a diferença da qual A ultrapasse E, pois H é menor que D ou F e que D é maior que F, é necessário que $\frac{BporA}{D}$ seja o menor lado e $\frac{BporE}{F}$ o maior lado: Desta maneira A faz 88. E78. e $\frac{BporA}{D}$264. $\frac{BporE}{F}$312 e a sua diferença B aquela que é prescrita.

Em segundo lugar, ou D sendo 12. F16. se B é 48. H10., é necessário que $\frac{BporA}{D}$ seja o maior lado e por fim A é 18. E8. e $\frac{BporA}{D}$72 e $\frac{BporE}{F}$24 que fazendo a diferença é B aquela que é prescrita.

Seja B a diferença dada dos dois lados procurados. Seja H a soma das partes e porções dos lados dada.

A primeira parcela da diferença H está para o primeiro lado assim como $\frac{D}{B}$. Já a segunda parcela da diferença H está para o segundo lado assim como $\frac{F}{B}$.

Caso 1: o primeiro lado é o maior e a porção dele também é a maior.

Suponha que a porção que este lado fornece seja A. Daí, a porção do segundo é A – H.

Assim, como $\frac{D}{B} = \frac{A}{\frac{BA}{D}}$, então, $\frac{BA}{D}$ é o primeiro lado e como $\frac{F}{B} = \frac{A-H}{\frac{BA-BH}{F}}$, então, $\frac{BA-BH}{F}$ é o segundo lado.

Portanto, $\frac{BA}{D} - \frac{BA-BH}{F} = B$.

$$BAF - BAD + BHD = BDF$$
$$AF - AD + HD = DF$$
$$FD - HD = AF - AD$$

E a igualdade estando ordenada (se as partes e porções das quais F é o numerador são maiores que aquelas cujo D é o numerador) $\frac{FD-HD}{F-D} = A$

De onde resulta que $\frac{F == D}{F == H} = \frac{D}{A}$.

Como a porção que o segundo lado deve contribuir é A – H, então $\frac{FD == DH}{F == D} - H$ também é a porção que o segundo lado deve contribuir. Chamando esta porção de E, então:

$$\frac{FD == DH}{F == D} - H = E$$
$$FD == DH == HF + HD = EF == ED$$
$$FD == FH = EF == ED$$
$$\frac{FD == FH}{F == D} = E$$

De onde resulta que $\frac{F == D}{D == H} = \frac{F}{E}$.

As porções que tem D no numerador são maiores que aquelas que têm F por numerador.

Como $\frac{D-F}{H-F} = \frac{D}{A}$ e como $\frac{D-F}{H-D} = \frac{F}{E}$.

Caso 2: O primeiro lado é o menor.

Chame de A a porção que o primeiro lado deve contribuir. Daí, A – H será a porção que o segundo e maior lado deverá fornecer.

Da mesma forma, o primeiro lado será $\frac{BA}{D}$ e o segundo, $\frac{BA-BH}{F}$. Assim, como $\frac{BA-BH}{F}$ é maior que $\frac{BA}{D}$, então, $\frac{BA-BH}{F} - \frac{BA}{D} = B$.

$$BAD - BHD - BAF = BFD$$
$$AD - HD - AF = FD$$
$$FD + HD = AD - AF$$

A equação estando ordenada, $\frac{FD+HD}{D-F} = A$.

De onde resulta que $\frac{D-F}{F+H} = \frac{D}{A}$.

Repare que $A - H = \frac{FD + HD}{D - F} - H$. Chamando de E esta diferença:

$$\frac{FD+HD}{D-F}-H=E$$

$$FD+HD-DH+FH=ED-EF$$

$$DF+FH=ED-EF$$

Portanto, $\frac{DF+HF}{D-F}=E$, de onde resulta que $\frac{D-F}{D+H}=\frac{F}{E}$.

Viète faz a seguinte observação “A seqüência de procedimentos mostra evidentemente que o primeiro lado no segundo caso devem contribuir uma parte e porção maiores que aquelas que se devem fornecer para o segundo”, ele está falando na verdade que, neste segundo caso, A é maior que E. Ou seja, ela consegue perceber que $\frac{FD+HD}{D-F}=A$ é maior que $\frac{DF+HF}{D-F}=E$, que se reduz ao fato de D ser maior que F. O que é verdade, pois antes do segundo caso ele faz exatamente esta observação, justamente o que eu não entendi!!!

Repare que conhecendo as porções fica evidente determinar os lados, pois o primeiro é dado por $\frac{BA}{D}$ e o segundo por $\frac{BE}{F}$.

FIM