UFRJ – Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
Mestrado em Ensino de Matemática

Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática.

Francisco Quaranta Neto

Dissertação de Mestrado

Orientação:
Luiz Carlos Guimarães

Co-orientação:
Tatiana Roque

Rio de Janeiro
Dezembro / 2008

Tradução Comentada da Obra ″Novos Elementos das Seções Cônicas″ (Philippe de La Hire - 1679) e sua Relevância para o Ensino de Matemática.

Francisco Quaranta Neto

Dissertação submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro – IM/UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

____________________________________ (Orientador)
Luiz Carlos Guimarães

____________________________________ (Co-orientadora)
Tatiana Roque

____
João Bosco Pitombeira

____
Oswaldo Vernet

____
Gerard Grimberg

____
Francisco Roberto Pinto Mattos

NETO, FRANCISCO QUARANTA.

Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o Ensino de Matemática: UFRJ/CCMN/IM, 2008.

ix, 310p. il.

Dissertação de Mestrado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

1. Philippe de La Hire. 2. Ensino de Cônicas 3. Tradução

AGRADECIMENTOS

A todos aqueles que, direta ou indiretamente, intencionalmente ou não, contribuíram para aumentar a minha motivação na realização desse mestrado.

À minha esposa Danielle (Minha Linda) e ao meu filho lindo Leonardo (Leleco Perereco) *que certamente ficarão felizes com o fim dessa dissertação.*

Aos meus pais, irmãos, tios, sobrinhos, primos (enfim, toda a família) *por tudo o que me ensinaram durante a nossa convivência.* ***Em especial, à minha mãe Liomar e à minha irmã Lió*** *pela relação afetuosa que temos o prazer de desfrutar,* ***ao meu tio Demócrito (sempre presente)*** *pelo seu imprescindível apoio e* ***à minha tia Elinor*** *pelo apoio lingüístico.*

Aos alunos e professores do CAP-UERJ. Em especial, aos professores Francisco, Novaes e Maria Ignez *pelo apoio, pelo intercâmbio e por todas as oportunidades que me proporcionaram.*

Aos colegas e aos professores do Mestrado *pelo prazer da convivência e pelo grande aprendizado durante esses últimos 32 meses.* ***Em especial, às colegas Malu, Rosa e Beth*** *pelas suas amizades,* ***à colega Luciana*** *pela sua parceria e* ***ao professor Vitor Giraldo*** *pelo seu indispensável apoio nos mais diversos momentos.*

Ao meu orientador Luiz Carlos Guimarães *que sugeriu o tema desta dissertação e conduziu habilmente o seu desenvolvimento. Além disso, através do seu impressionante conhecimento matemático, me fez repensar e aprimorar a minha atuação como professor, educador e pesquisador.*

À minha co-orientadora Tatiana Roque *por ter me apresentado o fantástico mundo da História da Matemática.*

RESUMO

NETO, Francisco Quaranta. **Tradução Comentada da Obra "Novos Elementos das Seções Cônicas" (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o Ensino de Matemática.**
Orientador: Luiz Carlos Guimarães. Rio de Janeiro: UFRJ/CCMN/IM, 2008. Diss.

A ausência de outras visões sobre um assunto pode resultar numa incapacidade do professor em justificar a sua importância. O ensino atual de cônicas no Brasil possui uma abordagem normalmente limitada ao universo da Geometria Analítica. A partir da propriedade bifocal, são deduzidas as equações. Além disso, quase nada é apresentado. O reconhecimento de uma elipse, por exemplo, é feito apenas através da sua equação. Nenhuma outra propriedade das cônicas é apresentada, explorada ou provada.

Este trabalho apresenta o texto: "***Novos elementos das seções cônicas***" de Philippe de La Hire (**1679).** Pela primeira vez, foi traduzido para o Português. A obra possui um enfoque baseado na matemática grega, utilizando apenas Geometria Euclidiana. Define as cônicas através da propriedade bifocal exclusivamente no plano. A obra apresenta **61** proposições sobre as três cônicas. Elas são exibidas separadamente com a seguinte seqüência para cada curva: definição e construção da cônica, definições de apoio e um conjunto de proposições são provadas a partir desta definição bifocal.

Esta dissertação contém um resumo da História das Cônicas e uma Biografia sobre Philippe de La Hire. Além de traduzida, a obra foi descrita, comentada e complementada. Foi feita ainda uma comparação com um livro didático relevante do século XX (F. I. C.).

Buscamos oferecer um material não usual sobre cônicas que permita ao professor uma ampliação das formas de abordagem de um assunto historicamente tão importante. Ficará mais fácil justificar por que estas curvas têm aplicação na Astronomia, na confecção de equipamentos luminosos, no Desenho Projetivo, na Acústica e em tantos outros campos.

ABSTRACT

NETO, Francisco Quaranta. **Tradução Comentada da Obra ″Novos Elementos das Seções Cônicas″ (Philippe de La Hire - 1679) e sua relevância para o Ensino de Matemática.**
Orientador: Luiz Carlos Guimarães. Rio de Janeiro: UFRJ/CCMN/IM, 2008. Diss.

To prove the importance of a subject matter, a teacher needs different ways of exhibiting it. Nowadays, Brazilian teaching of conics is usually restricted to Analitic Geometry. From the focus property, equations are obtained. That's all. The equation becomes the only source to recognize an ellipse, for instance. No more property is explained, proved or developed.

This work introduces to Brazilians Philippe de La Hire's text: "New Elements of Conic Sections" (1679). For the first time, this book is translated to Portuguese. It is based on greek math, using Euclidean Geometry. Conics are defined from the focus property in the plane only. The text has 61 propositions about the three conics. They aren´t shown together. Each conic is defined and constructed, others helpful definitions are stated and a set of propositions are proved from this definition.

This dissertation owns a brief of conic history and a biography about Philippe de La Hire. After translated, La Hire's book was detailed, analyzed and increased. A comparison with a didactic book from twenty's (F. I. C.) was made.

We intend to offer a new material to teachers in order to improve what they teach. It will be easier to explain why these curves are so used in Astronomy, Optics, Acoustics and others fields of knowledge.

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – Histórico e fundamentos da pesquisa

A que as pessoas normalmente associam as palavras “cônicas”, “elipse”, “parábola” e “hipérbole”?

É provável que a maioria responda muito pouco sobre elas ou simplesmente nada. Para as pessoas que escolheram alguma profissão que necessita de um maior suporte da matemática, aumenta a chance de alguma lembrança. Possivelmente, aparecerão menções ao fato de serem curvas[1] e também à existência de uma fórmula associada à cada uma delas.

Conforme mostra o Programa de Acesso à Escola à Engenharia (Antiga Escola Polytechnica) da UFRJ de 1907 [13], este assunto já mereceu maior destaque e profundidade no ensino. Eram cobradas as construções contínuas e por pontos, a existência dos eixos de simetria, o conceito de excentricidade, vários traçados de retas tangentes às curvas, projeções sobre os eixos, áreas, etc. Não somente as curvas cônicas eram exploradas, como também várias outras (cissóide, espiral, ciclóide, epiciclóide, hélice). Atualmente, o ensino de matemática no Brasil não dedica grande atenção ao tema. Vamos fazer, a seguir, um breve relato do que é usualmente ensinado no nosso país sobre esse assunto nos dias atuais.

No ensino fundamental, apenas a parábola faz parte do programa. É ensinada na última série sob a forma de função quadrática ou do "Segundo Grau". A sua fórmula algébrica é apresentada juntamente com a sua representação gráfica. Serve como um bom exemplo de função, mas a sua íntima ligação com o universo das cônicas costuma ser ignorada pelos professores durante a sua apresentação. O objetivo se restringe à introdução do conceito de função.

Na primeira série do ensino médio, a parábola volta a ser objeto de estudo dentro de um contexto mais amplo e aprofundado do estudo das funções. Novamente, nenhum vínculo com as cônicas é sequer mencionado pela maioria dos professores. As habilidades na manipulação das equações analíticas e o entendimento dos papéis de cada parâmetro é o foco desse conteúdo.

Na terceira e última série do ensino médio, finalmente as cônicas aparecem no programa escolar. Mas vale frisar que, por uma série de motivos, esse tópico sequer chega a ser ensinado por boa parte dos professores. Quando acontece, se restringe normalmente a um curto período (uma a duas semanas) e o enfoque se concentra nas equações analíticas cujas demonstrações costumam se basear na caracterização bifocal. As formas das equações mais usadas são: para a elipse, $\frac{x}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; para a hipérbole, $\frac{x}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$; para a parábola, $y=\frac{x^2}{4p}$. Uma minoria estende a idéia e trabalha com um sistema de coordenadas retangulares cuja origem não esteja no vértice da cônica e foi alterada através uma translação ou também a idéia de troca da posição dos eixos X e Y entre si. Elas são representadas no plano cartesiano e assim surgem as formas geométricas das curvas. Os parâmetros ***a, b*** e ***c*** são apresentados para a elipse e para a hipérbole. Para a parábola, surge o parâmetro ***p***, mas normalmente nenhuma ligação com o estudo anterior de funções quadráticas é feita. A seguir, vêm os exercícios que costumam se resumir a uma manipulação algébrica das suas equações. O mais grave é que nenhuma ligação entre as três curvas é feita. Parece que elas surgem de "planetas" diferentes. A propriedade das assíntotas é pouco desenvolvida. É possível que muitos alunos cheguem a terminar o ano letivo desconfiando que a hipérbole é uma parábola que foi duplicada e refletida.

Obs. 1 – Usaremos os termos "cônicas", "seções cônicas" ou "curvas cônicas" para fazer referência nesse texto às seguintes curvas: elipse, parábola e hipérbole.

No ensino superior, volta a ser estudada em cursos da área tecnológica. Usualmente, nas cadeiras de cálculo, geometria analítica e álgebra linear. As cônicas aparecem na cadeira de cálculo como uma ferramenta para a construção geométrica das superfícies no espaço originadas pelas funções reais de duas variáveis reais. Na geometria analítica, o enfoque reside puramente nas equações analíticas. Já na álgebra linear, é feita uma conexão entre as equações com vetores e matrizes e, a partir dos determinantes destas matrizes, é deduzida qual é o tipo da cônica e a sua localização no plano cartesiano, permitindo entender, por exemplo, a rotação dos eixos X e Y**.**

O conhecimento acumulado ao longo da história das seções cônicas é, porém, muito mais rico que isso. Diversos autores apresentaram muitas outras caracterizações para tais curvas ao longo de cerca de 24 séculos de história. Ou seja, existem várias outras formas das cônicas serem definidas e apresentadas. As primeiras caracterizações vieram da Grécia Antiga e se serviam de um cone como elemento de partida. Muitas outras surgiram: a que utiliza o foco e diretriz, a caracterização bifocal, a que usa as equações analíticas, a que faz uso de ângulos como parâmetros, as construções mecânicas, a que utiliza matrizes e determinantes (álgebra linear), etc. Se existem várias formas de se apresentar as cônicas, por que apenas a caracterização feita através das equações dessas curvas e originada da caracterização bifocal sobreviveu para o ensino do início deste nosso século XXI?

E nós, admiradores da matemática, saímos com mais perdas ou ganhos com esse encolhimento do papel atribuído às cônicas?

1.2 – Objetivos

Os livros didáticos direcionados para o ensino de cônicas possuem uma extrema concentração na caracterização dessas curvas através das equações. Ou seja, para a maior parte das pessoas, falar em cônicas é o mesmo que falar nas equações das cônicas. Há uma excessiva concentração nessa caracterização, quando sabemos que existem várias outras. Por exemplo, uma outra caracterização é a que utiliza um ponto (foco) e uma reta (diretriz). Esta idéia de usar um ponto e uma reta para caracterizar as cônicas surgiu ainda na Grécia Antiga (ver Euclides e Aristée no capítulo 2), mas a linguagem geométrica sintética usual naquela época foi abandonada. É muito difícil encontrar um texto voltado para o ensino atual de cônicas que explore essas curvas por meio da geometria euclidiana sintética. Vale destacar que a geometria euclidiana faz parte do conteúdo do programa do ensino fundamental. Ou seja, acredita-se que esta forma de apresentar a geometria apresenta vantagens didáticas. Por que o estudo atual das cônicas se restringe a uma única linguagem geométrica? Por que outras caracterizações não estão presentes nos livros didáticos?

Consciente que essas questões comportam diversas respostas sob as mais diferentes visões da Matemática, essa proposta de dissertação surgiu quando conhecemos a obra do Matemático Francês **Philippe de La Hire** de **1679: "*Novos elementos das seções cônicas*".** A partir da caracterização bifocal, ela apresenta diversas propriedades sobre as três curvas, utilizando exclusivamente a geometria euclidiana sintética (a ferramenta dos gregos) nas suas demonstrações. Sem nenhuma influência da linguagem analítica como conhecemos hoje!

Philippe de La Hire escreveu três obras sobre cônicas nos anos de 1673, 1679 e 1685. A primeira obra apresenta conteúdo original, apresentando idéias novas sobre o conhecimento das cônicas da época. Oferece dois métodos para o estudo dessas curvas: o primeiro no espaço utilizando geometria projetiva e o segundo no plano. Ela, porém, não teve fácil compreensão, recebendo muitas críticas. La Hire sentiu a necessidade de escrever uma nova obra que tivesse maior simplicidade e fosse de mais fácil compreensão e visualização. Então escreveu a segunda obra, "*Novos elementos das seções cônicas*", apresenta 61 proposições sobre a parábola, elipse e hipérbole. Provavelmente todas elas já eram conhecidas. A novidade da obra está na abordagem isolada de cada curva no plano, totalmente desvinculada do cone. Ao desvincular do espaço, não podia mais definir as cônicas a partir das seções feitas no cone. Escolheu a propriedade relativa às distâncias dos pontos das curvas aos focos (caracterização bifocal). Ele achava que isso facilitava o entendimento das curvas e permitia obter rapidamente um razoável conjunto de propriedades das curvas. Ele não foi o primeiro a fazer tal caracterização, conforme cita Bongiovanni [1] ao relatar a obra dos irmãos árabes Muhammad, Ahmad e Hasan, conhecidos como Banu Musa. Mas foi, dentre a bibliografia a que tivemos acesso, o primeiro autor a fazer um tratado com um grande número de proposições demonstradas a partir desta caracterização bifocal.

Essa forma bifocal de definir as cônicas acabou chegando aos nossos dias, assim como o estudo isolado de cada uma delas no plano, exatamente como fez La Hire na referida obra. O Matemático Francês Henri Lebesgue em sua obra “Lês Coniques” [13] faz uma crítica dizendo que essa abordagem compromete a unificação entre elas. Ele cita Philippe de La Hire como o responsável por essa abordagem bifocal. Boa ou ruim, o fato é que essa abordagem teve mais fácil compreensão para os iniciantes, conforme cita Coolidge [5]. Ela acabou alcançando o ensino nos dias atuais.

Conseqüentemente, esta obra do Philippe de La Hire parece ter relevância para a história do ensino das cônicas. Além disso, o nosso fascínio pela descoberta da íntima relação existente entre as curvas cônicas e a geometria plana euclidiana somou-se a essa possível relevância histórica para o ensino. Esses dois motivos justificam a escolha desse texto como o foco da nossa dissertação.

O estudo dessa obra tornou-se o tema da nossa dissertação de mestrado. Explorar as suas potencialidades para a formação do professor e para o ensino se constitui no nosso objetivo genérico principal.

Nossos objetivos mais específicos são:

- Fazer uma tradução para o Português de um texto didático e abrangente sobre as curvas cônicas (capítulo 4). (a **primeira** tradução dessa obra para o Português!)
- Oferecer alternativas ao professor. Além de melhorar a sua formação, este texto pode ampliar as visões do ensino por ele ministrado.
- Ampliar e complementar o texto com as novas proposições (capítulo **7**).
- Fazer a comparação do referido texto com um texto relevante para o ensino de cônicas no século XX em nosso país (capítulo 8).

1.3 – Descrição

Será feita, a seguir, uma síntese dos capítulos presentes nesta dissertação.

No capítulo **2**, é feito um resumo da história das cônicas. Ele tem maior destaque para o período que vai desde o surgimento das curvas na Grécia Antiga até o século XVII, uma vez que La Hire escreve as suas três obras sobre as cônicas nas três últimas décadas deste século. A caracterização bifocal tem participação privilegiada durante o capítulo.

No capítulo **3**, é apresentada uma Biografia de Philippe de La Hire. Ela é uma tradução de uma parte de um livro editado em 1699, cujo autor é Bernard de Fontenelle. Ele era secretário da Academia Real de Ciências da França. Fez, então, um livro com biografias dos membros dessa academia, da qual fazia parte Philippe de La Hire.

No capítulo **4**, é feita a tradução para o Português do livro **"*Novos elementos das seções cônicas*"**. Não temos qualquer notícia a respeito de uma versão desta obra para a nossa língua. Como fonte para essa tradução para o Português, utilizamos inicialmente uma outra tradução feita para o Inglês por Brian Robinson em 1723. Em seguida, conseguimos o original em Francês completo com as suas três partes (as outras duas não têm as cônicas como centro das atenções). Esse processo de tradução gerou 4 versões, cada uma com características próprias. O texto final em Português ficou com 75 páginas e foi feito a partir do original em Francês com manutenção fiel da linguagem usada na época por La Hire.

O capítulo **5** foi dedicado aos comentários sobre as traduções (para o Português e para o Inglês). Proposição a proposição, foram comentados detalhes das traduções, com destaque para a feita para o Português. Como a Tradução de 1723 para o Inglês serviu de fonte inicial para a nossa dissertação, tornaram-se pertinentes comentários também sobre essa tradução para o Inglês.

O objetivo do capítulo **6** foi descrever a Obra. Proposição a proposição, são comentados detalhes no texto que merecem atenção. Aspectos relevantes que merecem comparações com a abordagem atual das cônicas. Aspectos que merecem críticas no texto. No final, é feita uma conclusão que destaca as características gerais da obra.

Já no **sétimo** capítulo, são apresentadas 8 novas proposições que não fazem parte do texto de La Hire. Percebemos que a grande maioria das 61 proposições presentes na obra original possui equivalência entre as três curvas cônicas. Foi elaborada uma tabela de equivalências e a partir das lacunas existentes nessa tabela foram "criadas" as novas proposições com argumentação idêntica à usada por La Hire em 7 das 8 novas proposições.

No capítulo **8,** a fim de explorar a sua possível relevância para o ensino das curvas cônicas, foi feita uma comparação da Obra "*Novos elementos das seções cônicas*" com um livro de grande uso didático, conhecido como F. I. C.. Este livro teve um papel marcante no ensino da geometria no Brasil e em outros países e parece ter funcionado como referência para o programa do concurso de acesso à Escola de Engenharia (atualmente vinculada à UFRJ) durante uma boa parte do século XX.

Finalmente surge o capítulo **9**, que conclui o trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 2

A RELEVÂNCIA DA OBRA

2.1 – Fontes da pesquisa

A fim de justificar a importância de uma obra ou de um autor para a história de uma ciência, torna-se necessária a implementação de um breve relato sobre o desenvolvimento dessa ciência ou, pelo menos, de parte dela. O que foi feito por outros autores antes dessa obra, o contexto em que ela se inseriu e como essa obra foi avaliada e utilizada pelos expoentes dessa área de conhecimento são questões cruciais que precisamos responder minimamente.

No nosso caso, objetivamos avaliar a importância da obra ***"Novos elementos das seções cônicas"*** **(Philippe de La Hire – 1679)** para a história do ensino de matemática. Precisamos, portanto, fornecer um conjunto mínimo de informações que contribua para a compreensão da evolução do assunto "Seções Cônicas". Os passos relevantes do seu processo histórico ou, pelo menos, da parte que se relaciona com o referido texto, merece ser alvo de uma exposição. Tal exposição pode ajudar na obtenção de respostas preliminares para perguntas relevantes do tipo: como surgiram as seções cônicas? Que problemas tentavam resolver? Por que passaram a fazer parte do ensino da matemática? Qual das abordagens apresentadas prevaleceu no ensino dos dias atuais?

A leitura dos textos mais citados e usados como referência no assunto pelos autores matemáticos a que tivemos acesso é indispensável para uma descrição fiel do processo evolutivo das curvas denominadas cônicas. Essa tarefa, porém, é de difícil execução, quase inexeqüível. Seja pela quantidade de obras consideradas cruciais nesse processo, ou pelo fato de exigir a fluência em, no mínimo, dez línguas diferentes ou pela dificuldade de compreender textos escritos em outras épocas que faziam uso de um conjunto de ferramentas diferente do atual, isto é, um outro aparato simbólico.

Contentar-nos-emos com uma síntese da história das cônicas de menor qualidade. Serão utilizadas, por nós, as opiniões dos comentadores da história dessas curvas. Selecionamos alguns autores que relataram a história dessas 3 curvas: Michel Chasles e seu livro *"Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie"* (1837), Vincenzo Bongiovanni e sua tese de Doutorado *"Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre em formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif"* (2001) e Julian Lowell Coolidge e sua obra *"History of the Conic Sections and Quadric Surfaces"* (1945).

As obras completas que consultamos para esse resumo foram as três de Philippe de La Hire sobre cônicas. As duas primeiras são originais em Francês. A primeira, de 1673, *"Nouvelle methode en geometrie pour les sections des coniques et cylindriques"*. A segunda, de 1679, possui três partes: *"Nouveaux elemens des sections coniques", "Les lieux geometriques"* e *"La construction, ou la effection das equations"*. A terceira foi a tradução da Obra *"Sectiones conicae in novem libros distributae"* para o Francês feita em 1995 por Jean Peyroux, originalmente feita em Latim em 1685.

2.2 – Um resumo da história das curvas cônicas

Neste resumo sobre a história destas três curvas, serão priorizados os tópicos e os autores que se relacionam mais diretamente com a obra de Philippe de La Hire, alvo dessa dissertação. Conseqüentemente, muitos autores e obras relevantes para a história dessas curvas serão citados superficialmente, ou omitidos, por não se relacionarem diretamente com o nosso objeto de estudo. Imaginamos que essa omissão não impeça nem comprometa alcançar os objetivos da presente dissertação.

Serão comentados, a seguir, mais de 30 autores cujas obras apresentaram alguma relevância para o desenvolvimento do conhecimento sobre as seções cônicas.

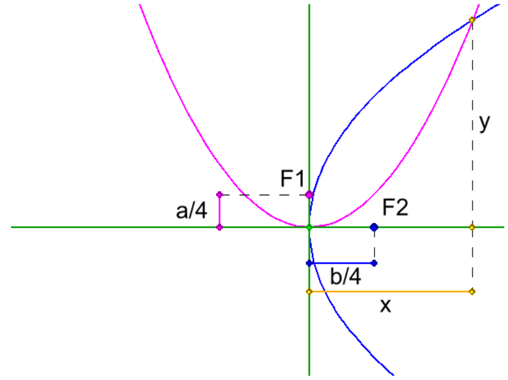
2.2.1 – O período grego

O surgimento e as primeiras obras relevantes sobre as curvas cônicas ocorreram na civilização que foi o berço da Matemática como ciência: a Grécia antiga. Ela abrange a região que inclui o país que hoje chamamos de Grécia e diversos países adjacentes como Itália, Egito, Turquia, etc. Falavam, principalmente, o grego e foram a principal fonte de textos matemáticos importantes durante um período que vai do século VII a.C. até o século VI d.C.

MENECHME

Segundo Coolidge [**5**] e Bongiovanni [1], o primeiro autor que fala sobre as curvas cônicas é Menechme. Durante o quarto século antes de Cristo, surgiram alguns problemas que tiveram grande importância para os gregos, uma vez que a sua solução através da régua e do compasso (a ferramenta usual grega) não era obtida: a trisseção de um ângulo, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo. Várias soluções foram propostas pelos gregos para tais problemas ao longo de vários séculos. A duplicação do Cubo teve uma solução proposta por Menechme. Ele partiu de duas proporções denominadas "dois meios proporcionais" anteriormente apresentadas por Hipócrates e sugeriu a construção de curvas até então desconhecidas. A solução do problema seria a interseção entre duas parábolas ou também entre uma parábola e uma hipérbole.

Em linguagem moderna, $\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{b}$. Fazendo $\boldsymbol{b = 2a}$ e resolvendo o sistema de equações, a medida $\boldsymbol{x}$ será a solução do problema da duplicação do volume de um cubo de lado a. Fazendo o gráfico das equações $y=\frac{x^2}{a}$ e $x=\frac{y^2}{b}$, sendo F1 e F2 os focos das parábolas, tem-se (ver figura ao lado):



O novo lado do cubo cujo volume foi duplicado é dado pala medida de **x.**

Bongiovanni afirma na página 30 de [1]:

> *" Dans la recherche d'une courbe satisfaisant la condition $y^2 = px$, expression écrite en langage moderne, Ménechme introduit la parabole. Cette nouvelle courbe, obtenue comme section d'un cône circulaire droit par un plan perpendiculaire à une génératrice, fut appelée à cette époque 'section du cône droit rectangle' ou 'orthotome' et plus tard nommée 'parabole' "*

Menechme introduziu a curva que hoje chamamos "*Parábola"* e, possivelmente, fez a associação com uma seção do cone circular reto formada por um plano paralelo à geratriz e a denominou "Seção de um cone reto retângulo" ou "Orthotome". Bongiovanni cita, nas páginas 29 e 32 de [1], os autores que atribuem esse pioneirismo a Menechme: Eratóstenes (276 a.C.), Próclus (400d. C.) e Eutocius (500 d.C.). Diz ainda que embora não haja qualquer texto que mostre seu conhecimento também da elipse, Eratóstenes se refere às três curvas como "Tríade Menechmiana".

EUCLIDES e ARISTAEUS

Pappus (final do século IV depois de Cristo), no livro VII da sua coleção, atribui a Euclides (285 a.C.), na obra *"Lugar geométrico na superfície"*, quatro lemas (235 a 238) que caracterizam as três cônicas através de um ponto (foco) e de uma reta (diretriz), de acordo com Michel Chasles (pág. 43 de [4]). Em linguagem moderna, quando uma curva possui um ponto genérico cuja razão entre as distâncias deste ponto até um outro ponto dado e uma reta dada é igual a um, então esta curva é uma parábola. Quando menor que um, é uma elipse.

Quando maior que um, é uma hipérbole. Tal caracterização pode ter surgido na obra de Aristaeus (350 a.C.). Estas duas obras estão perdidas.

ARQUIMEDES

Com Arquimedes (287 – 212 a.C.), surge uma caracterização que define as três curvas como seções de um cone. Bongiovanni afirma na página 38 de [1]:

> *" Archimède (287 avant J.-C. conçoit aussi les coniques comme intersections de cônes de révolution, d'angles d'ouvertures différents, par des plans perpendiculaires à une génératrice.*
>
> *Par cône acutangle, il entend un cône circulaire droit dont les côtés qui sont les intersections de sa surface et du plan conduit par l'axe, forment un angle aigu. Si ces intersections forment un angle droit, le cône s'appelle rectangle, et si elles forment un angle obtus, le cône s'appelle obtusangle. "*

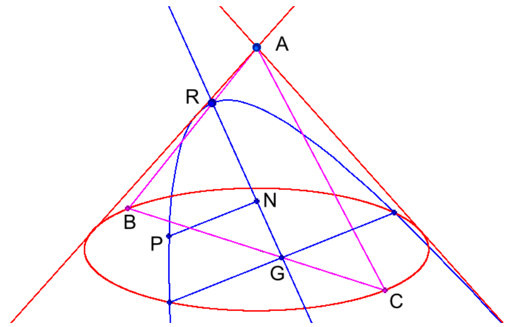
Arquimedes faz a seguinte classificação para cones retos ou de revolução: *retângulo* quando o ângulo formado entre as geratrizes que pertencem a um dado plano que passa pelo vértice do cone e pelo centro da circunferência da base é reto; *obtusângulo*, quando este ângulo é obtuso e *acutângulo,* quando é agudo. Surge o termo "Orthotome" (parábola) para a seção cônica obtida quando o plano de corte é perpendicular a uma geratriz de um cone retângulo. "Oxythome" (elipse), quando esta seção é feita no cone acutângulo. "Amblytome" (hipérbole), quando feita no cone obtusângulo (Coolidge confirma parte dessa denominação). Bongiovanni atribuiu essa classificação de cônicas à obra de Aristeu e Euclides. Designava o *eixo* da parábola por "diâmetro", os *diâmetros* por "linhas paralelas ao diâmetro" e o *parâmetro* por "linha que se estende até o eixo". Ele afirma na página 40 de [1] que Arquimedes apresentou, como propriedade fundamental para a parábola, a razão constante entre o quadrado da ordenada e a abscissa (pedaço do eixo que vai do pé da ordenada até o vértice). Para a elipse, a razão constante entre o quadrado da ordenada e o produto dos pedaços do eixo originados pela interseção com a ordenada (página 40 de [1]). Para a hipérbole, a razão constante entre o quadrado da ordenada e o produto das distâncias entre os vértices e a interseção com a ordenada (página 41 de [1]).

APOLÔNIO

Os três comentadores consultados apontam Apolônio (262 ou 245? – 190 a.C.) como o autor que mais contribuiu para a expansão do conhecimento das cônicas. Sua obra sobre essas curvas é composta por oito livros. Os 4 primeiros apresentam principalmente resultados já conhecidos, enquanto os quatro últimos mostram, na sua maior parte, a originalidade e a genialidade desse "Grande Geômetra" (termo usado por Coolidge). Segundo Michel Chasles (página 17 de [4]) e Bongiovanni (página 42 de [1]), Apolônio é o primeiro a apresentar uma caracterização unificadora ao afirmar que as conhecidas seções cônicas podem ser obtidas a partir de um mesmo cone oblíquo de base circular. Até então, os cones eram retos e distintos para cada cônica. O cone passa a ser composto por duas partes iguais e simétricas ao vértice. Assim surge o segundo ramo da hipérbole. Para se obter a parábola, deve-se cortar este cone por um plano paralelo a uma de suas geratrizes AB ou AC (ver figura abaixo). Para a elipse, o plano de corte intercepta os dois lados AB e AC do triângulo ABC (que ele chama de "Triângulo pelo Eixo") e este contém o Eixo (linha reta que une o vértice do cone ao centro do círculo). Para a hipérbole, o plano de corte intercepta apenas um dos lados (AB ou AC) do triângulo ABC, sem ser paralelo ao outro lado.

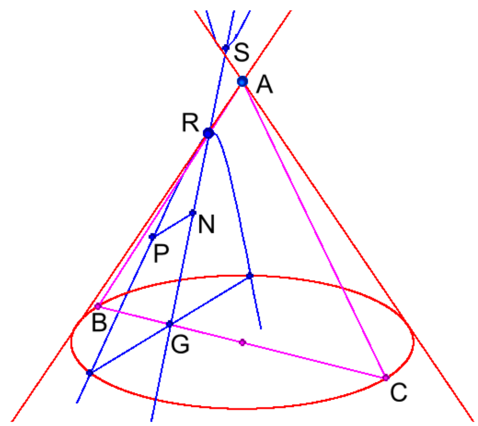
Ele apresenta uma propriedade fundamental e válida para as três cônicas que iguala o quadrado cujo lado é a ordenada NP (segmento perpendicular ao eixo da cônica que une um ponto da cônica ao eixo) a um retângulo onde um dos lados é a parte do eixo que vai do vértice até a ordenada e o outro é um segmento que se relaciona com o que chama "Lactus Eretum" (Chasles diz ainda que os autores modernos usaram os termos "Lactus Retum" e Parâmetro). Bongiovanni afirma que Apolônio é pioneiro também ao usar pela primeira vez os termos "parábola", "hipérbole" e "elipse" para designar as seções cônicas (páginas 51, 54 e 57, respectivamente de [1]). Na parábola, o quadrado da ordenada NP é igual ao retângulo cujos lados são o segmento (abscissa) NR e o parâmetro p. A palavra 'parábola' significa aplicação e pode ser entendida como igualdade. Na elipse, o quadrado da ordenada NP é menor que este retângulo (a palavra ‘elipse’ significa falta). Na hipérbole, é maior (a palavra ‘hipérbole’ significa excesso).

Como propriedade fundamental da parábola, afirma em linguagem moderna (página 46 de [1]): $NP^2 = p \cdot NR$, onde p é o parâmetro $\frac{AR \cdot BC^2}{AB \cdot AC} = p$.



Como propriedade fundamental da hipérbole afirma (página 53 de [1]) em linguagem moderna:

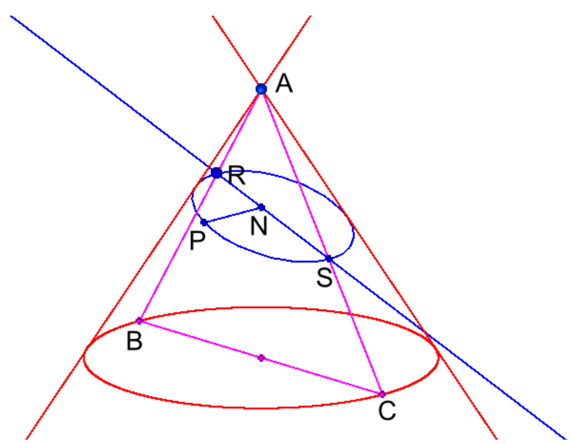
$NP^2 = p \cdot NR + p \cdot NR^2 / 2RS$ onde p é o parâmetro. Note que o quadrado da ordenada NP é maior que o retângulo $p \cdot NR$



Como propriedade fundamental da elipse afirma (página 56 de [1]) em linguagem moderna:

$NP^2 = p \cdot NR - p \cdot NR^2 / 2RS$

onde p é o parâmetro. Note que o quadrado da ordenada NP é menor que o retângulo $p \cdot NR$



Chasles afirma (página 19 de [4]) que Apolônio apresenta ainda as propriedades das assíntotas no livro 2. Na proposição 37 do livro 3, ele mostra uma propriedade que servirá mais de 18 séculos depois para a teoria dos pólos e das polares de Philippe de La Hire. Apresenta, *pela primeira vez*, “os pontos originados pela aplicação” (que depois Kepler chamaria de focos) na proposição 45 do livro 3. Define-os como sendo pontos da reta que contém o eixo cuja distâncias aos vértices desse eixo produzem um retângulo que equivale a um quarto da figura (retângulo cujos lados são o eixo e o parâmetro desse eixo). A partir da definição dos focos, apresenta as propriedades óticas. Nas primeiras 23 proposições do livro 4, enuncia a divisão harmônica verificada pelas retas que cruzam o plano da cônica. No livro 5 (página 20 de [4]), mostra toda sua originalidade a respeito de máximos e mínimos de áreas formadas com a utilização das cônicas. Nas proposições 12, 22, 30 e 31 do livro 7, cria resultados sobre os diâmetros conjugados. O oitavo livro foi perdido, mas foi reconstituído por Halley e pelo árabe Ibn al-Haytham.

Sobre a propriedade bifocal, Bongiovanni afirma (página 62 de [1]) sobre Apolônio:

> *" La proposition LI du livre III démontre que la différence des distances de chaque point d'une hyperbole aux deux foyers est constante et égale à la longueur de l'axe transverse "*

Diz que na proposição 51 do livro 3, apresenta a propriedade bifocal da hipérbole: a diferença das distâncias de um ponto qualquer da hipérbole aos focos é constante e igual ao eixo. Na proposição seguinte, apresenta a propriedade da soma constante para a elipse.

Essas são as propriedades que virariam uma caracterização das cônicas na obra de La Hire, alvo dessa dissertação.

DIOCLES

Diocles (por volta de 190 a.C.) explorou o potencial das propriedades que envolvem os focos através das 16 proposições da sua obra “Espelhos ardentes”. Apresentou diversas aplicações para as propriedades óticas das cônicas, partindo da caracterização Foco e

Diretriz. Bongiovanni afirma na página 64 de [1]: *" L'oeuvre de Dioclès utilize la propriété foyer-directrice pour résoudre des problèmes de réflexion des rayons lumineux. "*

PAPPUS

Chasles afirma (página 28 de [4]) que Pappus foi um autor com grande originalidade que desenvolveu novos resultados e que também reapresentou diversos resultados criados por autores que o precederam nos oito livros da sua "Coleção Matemática". Na proposição 129 do seu livro VII, apresenta o conceito da Razão Anarmônica que quando igual a 1 é chamada de Harmônica e que serve de base para o método original de Philippe de La Hire em seu livro de 1673. Segundo Bongiovanni, Pappus apresentou a caracterização Foco-Diretriz sobre as cônicas feita por Euclides e / ou Aristeu. Utilizou tal definição para a resolução do problema da trisseção de um ângulo, entre outras coisas.

SERENUS

Chasles afirma (página 47 de [4]) que Serenus (contemporâneo de Pappus) apresenta a elipse como uma seção feita através um cilindro e não somente através do cone.

2.2.2 – Os Árabes

Os árabes tiveram papel essencial na manutenção de diversas obras gregas. Os 4 últimos livros de Apolônio sobre cônicas, por exemplo, só chegaram a nós através de suas traduções (o último foi supostamente reconstituído). Além de utilizar as seções cônicas para resolver os problemas clássicos gregos, eles também se destacaram pela sua aplicação na Ótica, na Estática e na Astronomia. Os autores árabes que citarei a seguir foram apresentados por Bongiovanni [1] que, por sua vez, teve como fonte as traduções de Roshdi Rashed. Apenas para Ibn Al-Haytham é que Bongiovanni utiliza também uma outra fonte: J. P. Hogendijk.

BANU MUSA

Os irmãos Muhammad, Ahmad e Hasan, conhecidos como Banu Musa (final do século IX d.C.), traduziram as "Cônicas de Apolônio". Em seguida, escreveram obras próprias. Em uma delas, é observada a definição bifocal da elipse sem referência ao cone.

Bongiovanni afirma na página 73 de [1]:

> *" Rashed, R. dans les Actes du Colloque de la SIHPAI (1997) présente un article intitulé 'Les commencements des mathématiques archimédiennes en arabe : Banu Musa' où on peut observer la définition bifocale de l'ellipse sans référence au cône. Il signale que les frères Banu Musa ont laissé divers ouvrages de géométrie et que selon le témoignage des mathématiciens al Sijzi et Ibn al-Samh (mort en 1035), al-Hasan a rédigé un ouvrage sur l'ellipse intitulé 'Sur une figure ronde oblongue'. Une version d'une compilation de cet ouvrage nous est parvenue et selon le livre d'Ibn al-Samh 'le cheminement d'al-Hasan Ibn Musa s'articule de la manière suivante: il part de la figure circulaire allongée définie par la proprieté bifocale : MF + MF' = 2a, où 2a est la longueur du grand axe, pour ensuite établir que la section plane d'un cylindre de révolution par un plan non parallèle aux bases a les mêmes propriétés que cette courbe. Il passe ensuite à la determination de l'axe de l'ellipse, pour enfin étudier les propriétés de ses cordes, ses flèches, etc.' "*

Podemos deduzir que o texto de Hasan utiliza a soma das distâncias de um ponto M da elipse aos focos F e F' (igual ao comprimento do Eixo Maior) como caracterização da elipse. Depois, parte para provar que uma curva com essa propriedade é a mesma que aquela obtida por Serenus quando seccionou um cilindro de revolução por um plano não paralelo à base circular. Em seguida, determina o eixo da elipse e estuda as propriedades das cordas e das flechas, etc. Vale frisar que, após caracterizar as cônicas através do plano, ele passa para o espaço.

IBRAHIM SINAM

Na primeira metade do século seguinte, Ibrahim Sinam apresenta uma nova construção no plano para uma parábola que usava a eqüidistância dos seus pontos até uma reta e um ponto (página 74 de [1]). Séculos depois, Johannes Werner (1522) e Claude Mydorge (1641) utilizam essa construção em suas obras sobre as curvas cônicas.

AL-QUHI

Na segunda metade do século X, Al-Quhi mostrou que os lugares geométricos de centros de círculos poderiam ser usados para obtenção das cônicas, embora permanecesse com a mesma caracterização de Apolônio. Para a elipse e para a hipérbole, usou um círculo diretor que imediatamente produzia a propriedade bifocal.

IBU SAHL

Outro contemporâneo seu, Ibu Sahl, apresenta propriedades óticas também através da refração em lentes e não apenas através da reflexão em espelhos. Criou equipamentos para a construção das cônicas. Para a parábola, utilizou a propriedade do foco e da diretriz. Para a elipse e para a hipérbole, explorou as propriedades óticas.

IBN AL-HAYTHAM

Na primeira metade do século XI, Ibn Al-Haytham, reformou a ótica geométrica ao utilizar construções geométricas oriundas das seções do cone. Deu origem a novos problemas que puderam ser resolvidos através das cônicas.

AL-KHAYYAM

Na segunda metade do século XI, Al-Khayyam, usou sistematicamente as cônicas para a solução de equações de terceiro grau.

AL-TUSI

Al –Tusi, um seguidor de Al-Khayyam da segunda metade do século XII, continuou e aprofundou seu trabalho de resolução de equações através das cônicas. Usou propriedades fundamentais apresentadas pelos gregos para fazer novas caracterizações.

2.2.3 – O renascimento cultural da Idade Moderna

Após um grande período de poucos progressos no conhecimento científico no velho continente, ressurge o interesse pela legado dos gregos e, por conseqüência, pelas curvas cônicas na Europa. Dois novos métodos para visualização das cônicas surgem: um que as interpreta como projeção de um círculo e outro que utiliza retas como referências, as conhecidas coordenadas da geometria analítica.

JOHANNES WERNER e MAUROLICO

Bongiovanni (página 85 de [1]) cita René Taton para afirmar que Johannes Werner (1522) dá os primeiros passos na direção do entendimento das cônicas sob um ponto de vista projetivo. Maurolico prossegue nessa nova abordagem.

KEPLER

Kepler (1571 – 1630) pesquisa a trajetória dos planetas do sistema solar e afirma ser a elipse a curva descrita pela terra no seu movimento ao redor do sol, estando a referida estrela em um dos focos dessa elipse. Bongiovanni afirma (páginas 85 e 86 de [1]) que essa descoberta causa grande impacto e impulsiona o estudo dessas curvas. Kepler retoma a abordagem grega que parte do cone. Em outra obra (onde utiliza a hipérbole para medições do fenômeno da reflexão) faz uma apresentação unificada das cônicas. Ele obtém uma das cônicas a partir de outras, por deformação, sem se servir do cone. Através de uma interpretação mecânica e intuitiva, apresenta pela primeira vez a parábola como limite de uma elipse ou de uma hipérbole (página 86 de [1]). A sua construção da parábola utiliza a eqüidistância dos seus pontos até o foco e até a diretriz. É pioneiro também no uso da palavra “foco”. Inova, outra vez, ao afirmar que a parábola possui o segundo foco no infinito, introduzindo esse conceito de “Infinito” na geometria, de acordo com Chasles (página 56 de [4]).

CLAUDE MYDORGE

Chasles afirma (página 88 de [4]) que Claude Mydorge (1585 – 1647) é o primeiro Francês a escrever tratados sobre cônicas (1631 e 1641) retomando o legado grego. Segundo Coolidge [5], suas demonstrações são mais simples que as feitas por Apolônio. De acordo também com Bongiovanni, na página 88 de [1], ele usa pela primeira vez a palavra “parâmetro” para descrever um elemento fundamental das seções cônicas.

GRÉGOIRE DE SAINT-VICENT

Grégoire de Saint-Vicent (1584 – 1667) calcula, pela primeira vez, a área entre a hipérbole a as assíntotas, de acordo com Chasles (página 92 de [4]). Embora utilize como caracterização aquela de Apolônio, faz outras abordagens, entre elas a obtenção das cônicas por transformações geométricas partindo, por exemplo, de retas. Coolidge afirma (página 35 de [5]) que sua obra de 1647 contém 204 teoremas sobre elipse, 364 sobre parábola e 249 sobre hipérbole.

DESCARTES

Motivado pela tentativa de resolução de um famoso problema proposto por Pappus no seu sétimo livro, Descartes (1596 – 1650) lança em um apêndice do seu *“Discurso do Método”* as bases da "Geometria Analítica Moderna". Seu método traz a álgebra para dentro universo predominante da geometria da época.

Bongiovanni afirma na página 100 de [1]:

> *" Cette méthode permet une simplification des méthodes d'Apollonius et permet l'étude de nouvelle courbes. Pour rechercher les propriétés d'une courbe il suffit de choisir comme définition une propriété géometrique caractéristique de cette courbe et de l'exprimer au moyen d'une équation entre les coordonnées d'un point quelconque de la courbe. Le traitment de cette équation permet de trouver toutes les autres propriétés de la courbe. "*

Descartes afirma que para investigar as várias propriedades geométricas de uma curva é necessário que se conheça uma delas que será usada como definição e exprimir por meio de uma equação as coordenadas de um ponto qualquer dessa curva. Inicia um novo método (” classificação das curvas por meio das equações. Em outra obra, utiliza construções mecânicas simples (conhecidas como as “Construções do Jardineiro”) para a elipse e para a hipérbole. Para a primeira curva, usa um fio, dois pinos e um lápis e para a segunda, os mesmos elementos e uma régua a mais. Tais construções são justificadas de maneira imediata pela propriedade bifocal da soma e da diferença constante.

FERMAT

Fermat (1601 – 1665) também classifica as curvas pela sua equação. Seu método consiste em manipular as coordenadas de um ponto da curva até que propriedades familiares apareçam. Produz as equações das cônicas, segundo Bongiovanni (páginas 103 e 104 de [1]).

VAN SCHOOTEN

Van Schooten (1615 – 1660), discípulo de Descartes, publica um tratado "Description organique des coniques" que fornece vários métodos de descrição das cônicas por movimento contínuo, de acordo com Chasles (página 98 de [4]).

Entre eles, um proposto por Proclus, que gera a elipse através do movimento de um ponto contido num segmento cujas extremidades deslizam sobre um par de retas (essa construção é conhecida hoje como "Compasso Elíptico", pois pode ser usada para uma construção mecânica da elipse).

GIRARD DESARGUES

Para Chasles (páginas 74 a 88 de [4]), Girard Desargues (1593 – 1662) trata as cônicas sem se servir do "Triângulo pelo Eixo" proposto por Apolônio, lançando as bases da geometria projetiva. Vê as cônicas como perspectivas de um círculo como base, visto a partir do vértice do cone, dentro de um plano secante de projeção que pode ser uma mesa. Isto permitiu transportar para as cônicas as propriedades válidas para o círculo. Este tratamento permitiu o primeiro tratamento unificado de diversas cônicas incluindo o círculo e um par de retas. Sua abordagem permite uma generalização maior que qualquer outra. Ao procurar as propriedades do círculo que se conservavam por perspectiva, introduziu um novo objeto matemático: a involução. Uma grande parte da sua obra publicada em 1639 se dedica a este conceito. Parte da sua produção, inclusive o resultado que ficou conhecido como "Teorema de Desargues", só foi descoberta em 1845 graças a uma cópia feita por Philippe de La Hire.

BLAISE PASCAL

Na mesma visão projetiva, Blaise Pascal (1623 – 1662) enuncia em sua obra de 1640 (com 17 anos!) o teorema do hexagrama místico que ocupa lugar central na sua teoria de cônicas. Segundo Chasles (página 70 de [4]), este teorema produz uma aplicação importante: qualquer cônica é completamente definida por cinco pontos. Esta obra foi perdida, mas foi teve o seu início resgatado por Leibniz (1676) e, na sua totalidade, por M. Bossut (1779).

BONAVENTURA CAVALIERI, JAN DE WITT E ISAAC NEWTON

Nas páginas 106 a 110 de [1], Bongiovanni afirma que Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), Jan de Witt (1629 – 1672) e Isaac Newton (1643 – 1727) apresentam construções das cônicas a partir de retas sem se servir do cone. Este último, interessado no movimento dos planetas, tem especial interesse na geração das cônicas a partir da reta tangente que representa a velocidade do planeta. Jan de Witt é citado por La Hire no prefácio do livro "Novos elementos das seções cônicas" como uma referência para a sua época, embora achasse o seu método de obtenção das cônicas confuso.

PHILIPPE DE LA HIRE

Philippe de La Hire (**1640 – 1718**) escreve três obras (**1673, 1679** e **1685**) exclusivamente sobre as seções cônicas.

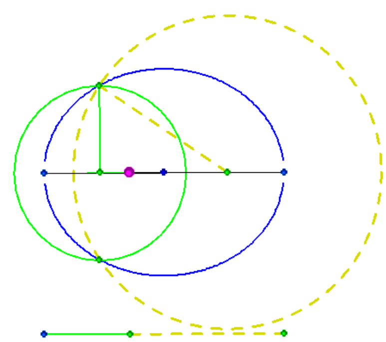
Nessa época, acabara de surgir a geometria analítica de Descartes e seu status era crescente no meio matemático. La Hire escreveu a primeira e a terceira obras segundo influência da geometria sintética grega. Já a segunda obra utiliza a nova abordagem analítica nos dois últimos livros, mas mantém a linguagem sintética no primeiro livro.

1 – A primeira obra, de 1673 [8], *"Nouvelle methode en geometrie pour les sections des superfícies coniques et cylindriques qui ont pour bases des circles, ou des paraboles, des elipses, & des hyperboles"* tem duas partes. Na primeira parte, enuncia 20 lemas sobre divisão harmônica que usam retas e circunferência para, em seguida, utilizá-los em 30 proposições relativas às seções de um cone. Na segunda parte, a partir de retas no plano, obtém curvas exclusivamente no plano que prova serem aquelas obtidas como seções de um cone. Denomina essas curvas por "planicônicas". Não é muito bem compreendido nessa obra, o que de alguma forma motiva o surgimento da obra de 1679.

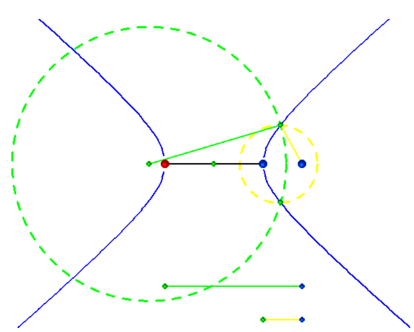
2 – A segunda obra (1679 – tema central dessa dissertação – [6]) tem 452 páginas, fora o prefácio da primeira parte e é dividida em três livros.

O primeiro livro *"Novos elementos das seções cônicas"* faz uma abordagem exclusivamente no plano. Caracteriza as cônicas separadamente, a partir da propriedade bifocal. Seu enfoque é sintético.

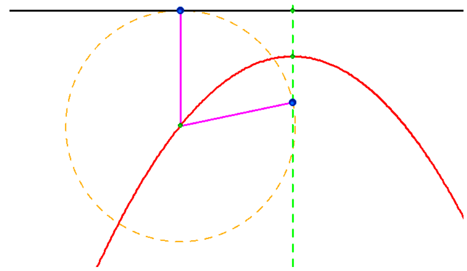
Para a elipse, utiliza como caracterização a soma das distâncias de um ponto qualquer da curva a dois pontos dados (focos) constante e igual a um segmento dado. Sua construção utiliza dois círculos centrados nos focos e cuja soma dos raios vale um segmento dado.



Para a hipérbole, a diferença constante entre as distâncias de um ponto qualquer da curva a dois pontos dados (focos) e igual a um segmento dado. Sua construção utiliza dois círculos centrados nos focos e cuja diferença dos raios vale um segmento dado.



Para a parábola, utiliza a distância de um ponto qualquer P da curva até um ponto dado (foco) igual à distância de P até uma reta dada.



Tais caracterizações são usadas, em seguida, para provar 17 proposições sobre a parábola, 20 sobre a elipse (mais dois lemas) e 24 sobre a hipérbole; ao final, faz 5 problemas de construção das cônicas a partir de outros dados que não sejam os focos.

O segundo livro *“Os Lugares geométricos”* apresenta diversos lugares geométricos e as respectivas equações analíticas que os representam. Em seguida, faz uma série de definições a respeito dos lugares geométricos e apresenta modelos básicos de equações a fim de transformar equações mais complicadas nesses modelos. Por fim, associa determinadas equações a lugares geométricos pré-definidos fazendo as demonstrações. Seu enfoque é totalmente analítico.

O terceiro livro *“A construção das equações analíticas”* faz a construção geométrica das soluções das equações analíticas, utilizando os lugares geométricos apresentados no segundo livro. Seu enfoque é também analítico. Vale frisar que essa obra de 1679 (principalmente os dois últimos livros) é citada por Boyer [2], Chasles [4] e por Fontenelle [12] como de grande relevância para a história da geometria analítica.

3 – A terceira obra, de 1685 [9] – *“Sectiones conicae in novem libros distributae”* ou *“Grand Livre des Sections Coniques”* na tradução para o Francês – é a mais abrangente entre as três obras. Volta a utilizar a divisão harmônica e a sua ocorrência no espaço. Retoma a primeira e a segunda obras e as expande, organizando as suas 304 proposições em 9 livros. No final, faz uma comparação com as proposições dos livros de Apolônio, mostrando quais foram cobertas pela sua obra, podendo o leitor comparar quais os caminhos percorridos nas suas demonstrações pelos dois autores. Esta é a obra que tornou La Hire realmente conhecido em toda a Europa. É considerado o seu livro de maior destaque, entre os mais de **13** que escreveu, conforme cita Fontenelle em [12].

2.2.4 – A opinião de comentadores sobre a obra de La Hire (1679).

MICHEL CHASLES – [4]

Michel Chasles utiliza cerca de 12 páginas das cerca de 565 do seu livro sobre métodos em geometria para La Hire, sendo 1 relativa à obra sobre a qual escrevemos.

Na página 127 de [4], afirma que diversos autores tiveram essa obra como referência:

> *" Dans le traité de 1679, De La Hire définit les sections coniques des courbes, telles que la somme ou la différence des distances de chacun de leurs points à deux points fixes, est constante, ou bien dont chaque point est à égale distance d'un point et d'une droite fixes. De ce seul point de départ, il conclut un grand nombre de propriétés de ces courbes.*
>
> *Cette manière de présenter la théorie des coniques a été adoptée par plusieurs géomètres, qui en ont fait la base de leurs ouvrages; tels que marquis de Lhopital, R. Simson, Guisnée, Mauduit, etc. "*

Chasles se concentra na primeira e terceira obras e faz diversos comentários ressaltando a originalidade de La Hire. Mas indica que a Obra de 1679 serviu de referência para outras obras feitas posteriormente. Entre elas destacamos a do Marquês de L'Hôpital [14] que apresentaremos mais adiante.

VINCENZO BONGIOVANNI – [1]

Nas 96 páginas do seu resumo histórico das cônicas, Vincenzo Bongiovanni [1] dedica 6 páginas a La Hire, sendo 3 relativas à obra que nos concentramos nessa dissertação. Não faz qualquer comentário sobre qual seria a relevância dessa obra de Philippe de La Hire. Ao contrário de Chasles e Coolidge, dedica sua maior atenção a esta obra de 1679.

JULIAN COOLIDGE – [5]

Julian Coolidge dedica 5 páginas a La Hire, sendo 1 relativa à obra que escolhemos, dentre as 154 páginas do seu resumo histórico relativas às cônicas. Ele faz o seguinte comentário sobre a referida obra: "It would be hard to find a book offering an easier introduction to the conics". Coolidge, portanto, considera fácil a compreensão dessa obra. Talvez seja este o seu maior mérito: a simplicidade. Como fala La Hire no seu prefácio, para a leitura do texto se faz necessário apenas os seis primeiros livros de Euclides, ou seja, a geometria euclidiana usual. Coolidge dedica maior atenção à terceira obra (1685).

CARL B. BOYER – [2] e [3]

Além dos três comentadores já citados, tivemos acesso ainda a dois livros de Carl B. Boyer: "*History of analitic geometry*" [2] e "*A History of mathematics*" [3]. Neles, fica evidente a influência da segunda obra de La Hire sobre cônicas para a geometria analítica.

La Hire é citado como inovador quando apresenta, pela primeira vez (página 211 de [6]), uma equação analítica para uma superfície (no caso, um parabolóide de equação $\mathbf{2ax + a^2 = y^2 + z^2}$, em linguagem atual)[1].

Boyer escreve na página 121 de [2]: *"This is important as the first example of a surface given analytically by means of an equation"*

Na página 412 de [3]: *"Lahire provided one of the first examples of a surface given analytically through an equation in three unknows – which was the first real step toward solid analytic geometry"*.

Boyer afirma que La Hire teve pelo menos um termo usado na parte analítica da sua obra adotado pela maior parte da comunidade matemática: a "Origem" do par de eixos coordenados que está página 216 de [6].

Na página 121 de [2] afirma: *“Of Lahire’s notation analytic, only the word 'origin' was retained by his successors”*. Diz ainda, na página 411 de [3]: “Of his analytic language only the term 'origin' survived."

Esta divisão em três partes da segunda obra de La Hire (um início sobre cônicas, seguido da definição de lugares geométricos e, finalmente, da construção geométrica das equações) foi seguida por outros autores como Jacques Ozanam (citado na página 126 de [2]):

> *“This triple division of the new geometry – made up of first a general theory of conics; then a study of equations, especially of second degree; and finally the application of intersecting curves to the solution of equations – had become a tradition which persisted well into the following century”*

Também foi seguido por N. Guisnée, como mostra na página **149** de [2]: *“This work is a direct continuation of the tradition set in the preceding century by Descartes, de Witt, Lahire e Ozanam”*.

La Hire transita com habilidade nas duas geometrias existentes na sua época, o que suscita os seguintes comentários de Boyer na página **119** de [2]:

> *“Lahire was one of the very exceptional geometers who were able to appreciate both the analitic and synthetic developments in the theory of conic sections”*. Já na página **412** de [3]: *“He was the first modern specialist in geometry, both analitic and synthetic”*.

2.2.5 – Os autores posteriores a La Hire que usaram a caracterização bifocal

MARQUIS DE L’HOPITAL [14]

Na obra *“Traité analytique des sections coniques, et de leur usage pour la resolution des equations dans les problèmes tant determinés qu' indeterminés"* (1707), obtida por nós

Obs. 1: Boyer comete um erro tanto na obra mais geral [3] quanto na mais específica [2] ao indicar a superfície que aparece no segundo livro da obra de 1679 de La Hire. Em vez da equação do parabolóide mostrada acima (presente em La Hire [**6**]), Boyer escreve uma equação de um cone $\mathbf{x^2 + 2ax + a^2 = y^2 + z^2}$, supostamente escrita por La Hire.

através de uma tradução para o Inglês de 1723 ("*An analytick treatise of conick sections, and their use for resolving of equations in determinate and indeterminate problems*), Guillaume L'Hopital segue a mesma caracterização bifocal da soma, diferença e eqüidistância usada por La Hire na obra que é alvo do nosso estudo, mas faz uma construção mecânica, em vez da construção por pontos usada por La Hire. A partir desta caracterização, demonstra 481 proposições. Montucla se refere na página 169 do volume 2 de [15] ao fato dessa obra póstuma sobre cônicas ser uma referência no gênero e ter como base a obra de Philippe de La Hire:

> *" M. de La Hire servit utilement les mathématiques dès la fin du siècle dont nous parlons, par divers ouvrages et divers mémoires relatifs à l'analyse des lignes courbes, et à la construction des équations supérieures; mais son travail à cet égard le cède en tout point à celui de M. de l'Hôpital, ouvrage posthume de ce savant géomètre, et qui a long-temps été réputé comme classique en ce genre. "*

Mesmo achando-a inferior à de L'Hopital, ele deixa claro que a obra de La Hire serviu de base para esta obra seguinte.

GABRIEL-MARIE

Frère Gabriel-Marie, em seu tratado de geometria conhecido como F. I. C. [10], adota a mesma caracterização bifocal da soma, diferença e eqüidistância usada por La Hire e demonstra 86 proposições a partir desta definição. Esta obra será mostrada com mais detalhes no capítulo 8, pois essa obra será comparada com o texto de Philippe de La Hire.

DANDELIN

Chasles afirma na página 286 de [4] que Dandelin fornece uma maneira rápida de se obter os focos da seção cônica dados o cone e o plano de corte. Como mostra o F. I. C. [10] na proposição 818, ele utiliza a propriedade bifocal para justificar que a curva obtida na seção de corte é uma cônica.

2.2.6 – Autor posterior a La Hire que criticou sua caracterização bifocal

HENRI LEBESGUE [13]

Henri Lebesgue, em seu livro sobre cônicas de **1942**, faz uma nova proposta para o ensino das cônicas e critica a forma como eram ensinadas as seções cônicas. Ao analisar o programa escolar da época, discorda da forma isolada como eram apresentadas as três curvas. Na página 1 [13], ele inicia o seu livro dizendo:

> *" Le caractère arbritaire et disparate des définitions des trois coniques m'avait choquè dès mes années d'études au Lycée. Ce n'est pourtant que très tardivement, et egacé d'avoir à faire faire chaque année aux élèves de l'École de Sèvres des leçons à partir de ces définitions, que je me suis décidé à exprimer mon opinion ..."*

Ele não acha as três definições para as curvas cônicas usadas bem conectadas. Na página 2 [13], diz:

> *"Mais il faudrait à une élève une singulière pénétration pour deviner pourquoi on envisage, plutôt que d'autres, le lieu des points dont la somme des distances à deux points fixes a une valeur donée; et pourquoi, par exemple, après avoir envisagé le lieu analogue relatif à le différence, on ne passe pas au produit des distances, mais au lieu des points également distants d'un point et d'une droite."*

E prossegue criticando a caracterização bifocal na página 3 [13]:

> *" Autre étrangeté Après avoir étudié trois lieux, arbitraires et disparates en apparence, on avoue qu'il s'agissait d'un seul et même lieu : celui des points définis par un foyer, une directrice et une excentricité. Pourquoi ne l'avoir pas dit un début, pourquoi ne pas avoir étudié un seul lieu arbitraire et non trois? "*

Nas páginas **5** e **6** de [13], atribui a La Hire a origem dessa caracterização:

> "*Cet exposé avait été imaginé à l'époque des débuts de la theorie géometrique; il est dû, dans son príncipe, à de La Hire (1640 – 1718), qui y fut conduit par l'étude des engrenages, des épicycloides, des constructions de cercles, des systèmes de cercles.*

> *La découverte de Dandelin tard venue n'a pas été utilisée, comme il eût été possible, pour revenir à la définition d'Apollonius ne pouvait être pour eux que provisoire, il n'y avait aucun advantage considérable à utiliser la définition provisoire d'Apollonius plutôt que celle de La Hire".*

Lebesgue acha a abordagem bifocal (usada por La Hire no livro de 1679) ruim por não permitir uma unificação das cônicas. O seu livro defende o uso de outra caracterização ("Foco e Diretriz") e uma outra forma de exposição.

2.2.7 – Conclusão

Este breve resumo mostra que a propriedade bifocal surge pela primeira vez na história na obra de Apolônio que faz a sua definição a partir da seção do cone. Não assume, entretanto qualquer papel de destaque, ou seja, não constitui uma caracterização.

Os árabes propõem aplicações da propriedade bifocal, principalmente as propriedades óticas. Um deles, al-Hasan (um dos irmãos conhecidos como Banu Musa), vai além ao propor uma caracterização bifocal, mas em seguida ele vai provar que ela implica na caracterização espacial originada no cilindro, ou seja, retorna ao espaço. Não explora essa sua caracterização para a obtenção de novas propriedades.

Na página 125 de [4], Charles afirma que toda caracterização das curvas cônicas fazia uso do cone, até a obra de Descartes: *Jusqu'à Descartes, il n'y avait eu qu'une maniére de concevoir la génération des coniques, c'était dans le solide; c'est-à-dire, dans le cône à base circulaire. "*

A partir do século XVI, a caracterização bifocal começa a ganhar mais destaque, pois ela permite as construções contínuas das cônicas. Kepler, Descartes e Van Schooten propõem construções mecânicas para a obtenção dessas curvas. Algumas outras caracterizações surgem: por meio de retas, por meio da geometria projetiva, por meio das equações analíticas. Apesar dessas novas categorias de caracterização, além da usual obtida através do cone, essa caracterização que se servia dos focos foi a que teve maior utilização nos textos direcionados para o ensino das cônicas, juntamente com a caracterização analítica.

Embora não tenha sido a caracterização bifocal das cônicas aquela que mais atenção dedicou, La Hire tem o mérito de fazer um tratado sobre cônicas que obtém um grande conjunto de proposições a partir desta caracterização bifocal, o que se constitui uma novidade para a época. São 61 propriedades geradas a partir das distâncias aos focos. Outros autores seguem essa proposta (L'Hopital, R. Simson, Guisnée, Mauduit, Ozanam) conforme citam Chasles [4] e Boyer [2]. Essa caracterização se vincula imediatamente à geometria analítica e passa a ser muito utilizada para a descrição das curvas cônicas.

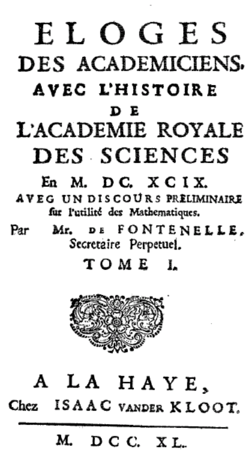
Já Lebesgue não gosta dessa caracterização. Não vamos entrar no mérito da questão, ou seja, discutir quais as vantagens e desvantagens da caracterização bifocal. Embora tudo o que foi aqui colocado já forneça elementos para o início de uma discussão, este não é o objetivo dessa dissertação. Queremos nos concentrar na defesa da relevância de Philippe de La Hire para a história do ensino das cônicas.

Finalmente, observando a forma como o ensino de cônicas é feito hoje e também a partir das fontes consultadas, podemos desconfiar claramente da importância histórica dessa obra para o ensino. Embora conscientes da necessidade de uma maior pesquisa para dar mais força à nossa conjectura, temos elementos suficientes, sob o nosso ponto de vista, para dar a essa obra uma maior atenção e fazer dela o tema da nossa dissertação. Um texto didático que pode contribuir na formação do professor merece ser alvo de investigação.

CAPÍTULO 3

Dados sobre Philippe de La Hire

As informações sobre Philippe de La Hire que serão expostas a seguir, foram extraídas de um tributo aos cientistas da Academia Real de Ciências (França) feito por Bernard de Fontenelle (1657 – 1757) em 1699 e reeditada em 1740. La Hire figura entre os 58 acadêmicos homenageados nessa obra por ter sido eleito membro, em 1678, dessa academia que havia sido fundada em 1666. Bernard de Fontenelle era secretário da Academia Real de Ciências e esse vínculo sugere uma pista sobre como se deu o seu contato com La Hire. A seguir é mostrada a capa da obra:


ELOGES
DES ACADEMICIENS.
AVEC L'HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES SCIENCES
En M. DC. XCIX.
AVEC UN DISCOURS PRELIMINAIRE
sur l'utilité des Mathematiques.
Par Mr. DE FONTENELLE,
Secretaire Perpetuel.
TOME I.

A LA HAYE,
Chez ISAAC VANDER KLOOT.
M. DCC. XL.

3.1 – Um resumo do tributo a Philippe de La Hire feito por Bernard de Fontenelle (o texto original está no apêndice F).

La Hire nasceu em Paris em 18 de março de 1640.

Seu pai, Laurent de La Hire, era pintor da corte real e professor da Academia de Pintura e Escultura. Ele era conhecido por seus títulos e, principalmente, por jamais ter tido um mestre que lhe ensinasse, o que lhe trazia grande reputação.

O destino parecia lhe reservar essa mesma profissão. Ele dominava perfeitamente o desenho, inclusive a perspectiva, tão necessário ao pintor, embora muito negligenciado. Apesar de os Quadrantes não se relacionarem diretamente com a pintura, ele estudava também a Gnomonique (métodos universais para traçar os relógios solares ou quadrantes sobre qualquer tipo de superfície) por ser uma espécie de perspectiva. O mais leve pretexto que lhe foi suficiente para ampliar o seu conhecimento sobre o encaixe de círculos que formam a esfera e suas projeções sobre diferentes planos, o que acabou impregnando o seu espírito com extrema naturalidade. O universo de Platão parece ter se apoderado da sua alma. Aquele jovem pintor se tornaria, então, um grande geômetra.

Ele perdeu seu pai aos 17 anos. Após uma enfermidade contínua, ele sucumbiu diante de um violento ataque do coração. Ele achou que uma permanência na Itália, que era extremamente necessária para a sua arte, poderia ser útil para o seu equilíbrio naquele momento. Ele partiu para a Itália em 1660.

No país onde o Saber da Antiguidade deixou uma influência maior do que em qualquer outro e onde tais vestígios fizeram surgir excelentes obras modernas, ele não fez outra coisa senão direcionar sua atenção para os diferentes objetos que se misturavam na sua imaginação sobre as "Sementes do Belo". Mas em Veneza, onde a vida é mais ociosa, a menos que você não se permita ceder a tais tentações, ele se dedicou intensamente à geometria, principalmente às seções cônicas de Apolônio. A geometria começa a prevalecer na sua preferência, ainda que encoberta de forma árdua e assustadoramente soberana nos Livros Clássicos. A atenção que reservava aos modernos ia ficando reduzida.

A vida que levava na Itália lhe agradava. Sua personalidade sábia e séria se ligava a um país onde todo estrangeiro é sério e sábio. O ambiente de folia reinante não o afetava. Ele desejava prolongar a sua permanência (já estava há 4 anos), quando sua mãe, a quem era muito ligado, clamou o seu retorno à França.

Ao retornar, ele continua seus estudos em geometria, sempre de forma profunda e contínua. Desargues (que era um dos poucos matemáticos de Paris) e Abraham Bosse (famoso gravador) haviam feito a primeira parte de um tratado sobre o corte de pedras, assunto que era novidade na época. Quando começaram a fazer a segunda parte, eles se embaraçaram e procuraram La Hire, que utilizou sete proposições da sua teoria sobre as cônicas. Bosse o publicou como uma brochura em folhas. Foi assim que La Hire se tornou conhecido como Geômetra.

Ele aumentou sua fama por causa de duas obras que viriam em 1673 e 1679. Ele se concentrou nas seções cônicas, exceto por um pequeno tratado sobre a ciclóide, curva muito popular na época.

Enfim, sua popularidade aumentou muito, em pouco tempo, a ponto de ser feito membro da Academia Real de Ciências em 1678.

No ano seguinte, ele publica um volume com três tratados que tinham por título: o primeiro, *"Novos elementos das seções cônicas"*; o segundo, *"Os lugares geométricos";* o terceiro, "*A construção ou efetuação das equações"*. Os dois últimos são feitos para desenvolver os mistérios da "Geometria de Descartes". Este autor deixou muito a ser decifrado, muito a ser esclarecido. Esta á a característica dos livros originais. Seu livro era próprio para produzir muitos outros, ainda bastante originais. Exatamente o que ocorreu com o livro de La Hire. Seus princípios eram bem expostos, apesar da dificuldade natural deste assunto. Trinta anos depois, já bastante conhecido dos geômetras, uma questão foi colocada na Academia na ocasião dos escritos do Sr. Rolle. La Hire precisou apenas consultar a sua obra para retomar sua argumentação. Ele não tinha dúvida da validade dos seus princípios e discutia a questão da universalidade, a forma como poderiam ser aplicados, pois são suscetíveis a uma infinidade de graus, diferenças e de esquisitices aparentes durante a sua prática.

Sr. Colbert havia concebido um mapa geral do reino francês mais exato que todos os precedentes. Hábeis engenheiros já haviam trabalhado nos mapas dos litorais, mais importantes que os demais por causa dos portos do Mediterrâneo. Suas obras tinham sido feitas em partes isoladas e para uni-las, era necessário fazer observações celestes, o que demandava uma certa habilidade. Por isso que o Sr. Picard e La Hire foram designados pelo Rei para irem a Bretanha em 1679 e no ano seguinte para a Guyenne. Eles fizeram uma correção muito importante no litoral de Gascônia, ao retificar uma curva, o que provocou uma redução de terras. De forma que o Rei chegou a falar, em tom de brincadeira, que sua viagem só lhe havia causado prejuízo. Prejuízo que enriqueceu a geografia e que tornava mais segura a navegação.

Em 1681, La Hire se separou de Picard para determinar a localização de Calais e Dunxerque. Ele mediu também a largura do Estreito de Calais desde a ponta do Bastião de Risban que está no litoral do Mediterrâneo na direção de Bolonha até o Chateau Douvre na Inglaterra. Ele achou 21360 toesas (unidade de medida da época). Ele tinha medido na borda do Mediterrâneo por volta de 2500 toesas que foi o fundamento da sua obra *"Triângulos"*. Esse tipo de atividade não exigia uma teoria requintada, mas sim uma grande destreza, uma grande precisão do operador, atuação delicada e precauções engenhosas. Enfim, sua grande utilidade compensava o pouco do brilho geométrico. O público prestava um grande favor aos geômetras quando eles colocavam em prática os seus saberes. Eles se sacrificavam pelo prazer e pela glória das altas especulações.

Para finalizar um mapa geral, La Hire foi ao litoral de Provence em 1682. Em todas as suas viagens, ele não se furtava ao direito de fazer diversas observações. Seja sobre agulha imantada, sobre as refrações, sobre a altura das montanhas através de um barômetro. Ele não seguia apenas as ordens do Rei, mas também o seu gosto e seu prazer pelo conhecimento.

No mesmo ano de 1682, ele fez um tratado sobre a "Gnomonique" e o reimprime em 1698, ampliado e embelezado. Esta ciência não era mais que uma prática, relegada na maior parte das vezes aos operários pouco inteligentes e grosseiros que não reconheciam os ponto onde falhavam, pois cada um se contentava com o seu quadrante e nenhuma comparação era feita. La Hire ilumina a "Gnomonique" com os princípios e as demonstrações que tornam as operações mais seguras e fáceis. Para não retornar ao estado antigo, ele teve o cuidado de imprimir as demonstrações de uma forma diferente das operações, o que deu aos simples operários a comodidade de saltar onde quisessem.

Nós já falamos do famoso meridiano iniciado pelo Sr. Picard no ano de 1669. La Hire continuou o lado norte de Paris em 1683, uma vez que o Sr. Cassini ficou responsável pelo lado sul, mas nem um nem outro finalizaram sua tarefa. Sr. Colbert, então morto em 1683, teve sua grande empreitada interrompida. O Sr. De Louvois delegou a diversos geômetras da academia os grandes nivelamentos necessários para os aquedutos e aos condutores de água que foram planejados pelo Rei. Em 1684, La Hire fez o nivelamento do pequeno Rio de Eure que passa pelo Chartres. Ele achou a nascente a 10 léguas além dos arredores de Chartres. Ela era 81 pés mais alto que o reservatório da Grota de Versailles. Esta novidade foi agradavelmente compensada pelos ministros do Rei, uma vez que as águas do Eure eram captadas a 25 léguas de Versailles. Mas La Hire imaginava que antes do início da parte mais pesada da obra, seria bom retomar o nivelamento, pois ele poderia ter se enganado em qualquer medição ou em algum cálculo. Ele temia que um erro poderia provocar no ministro uma desconfiança sobre o seu conhecimento. O Sr. de Louvois, impaciente em servir ao Rei segundo seus gostos, sustenta que La Hire não teria se enganado e estava obstinado dentro de sua perigosa modéstia. La Hire não concorda e recomeça o nivelamento que diferirá do primeiro de um ou dois pés.

Ele fez vários outros nivelamentos por ordem do mesmo ministro, pois ele se tornara um perito na questão de conduzir águas. Aquele trabalho feito em Versailles elevou para um nível mais alto a ciência do "Nivelamento e Hidráulica". O Rei pagava as despesas de viagem dos matemáticos que ele empregava. La Hire, por causa do seu escrúpulo e da sua superstição, apresentava ao Sr. de Louvois o relatório diário, onde nem as frações eram negligenciadas. O ministro, com um desprezo servil, rasgava sem lê-los e exigia de suas liderados o mesmo comportamento.

Ele estava tão familiarizado a La Hire que era comum largar tudo para ouvir as suas exposições com o intuito de aprender, uma vez que o espírito das ciências e o da corte não eram incompatíveis.

Em 1685, foi finalizada sua grande obra intitulada "*Sectiones conicae in novem libros distributa*". Ele contém toda a teoria das seções cônicas, sobre a qual ele já havia se debruçado antes. Pela primeira vez, toda a teoria era deduzida a partir de princípios novos e muitos simples. Esta obra alcançou grande reputação na comunidade científica européia. La Hire passou a ser respeitado como um autor original em um assunto que perpassa por toda a geometria e tem grande utilidade, pois serve como base para especulações mais elevadas.

Dois anos depois, La Hire se mostra como astrônomo, ao fornecer tabelas sobre o sol e sobre a lua e um método mais fácil para o cálculo dos eclipses. Ele se envolve, em 1689, com um problema importante da Astronomia: a descrição de uma máquina de sua invenção que mostra todos os eclipses passados e todos os que estavam por vir. Os meses e os anos lunares e suas epactas. Esta máquina era muito simples e continha um pêndulo que movimentava a máquina. Um imperador da China observou a máquina e recomendou que seus Mandarins da Astronomia fossem observá-la.

As tabelas sobre o sol e sobre a lua (que La Hire fez em 1687) foram corrigidas, em seguida, por vários observadores, mas os seus fundamentos também valiam para todos os outros planetas. Ele publica em 1702 uma reunião dessas idéias sob o título *"Tabula astronômica Ludovici Magni Jussu et Munificentia exaratae"*. Temos que levar em conta o contexto daquela época. Nós repetiremos, contudo, que dentro daquelas tabelas todos os movimentos dos astros são obtidos imediatamente de um farto conjunto de observações assíduas e não de alguma hipótese de curva descrita pelos corpos celestes. Portanto, não se pode ter uma Astronomia mais pura e mais isenta que essa mistura de imaginações humanas.

La Hire fornece (em 1689) uma de suas primeiras tabelas, um pequeno tratado de geometria prática sob o título *"Escola de Agrimensores"*. Ele foi reimpresso em 1692, bem ampliado. A rapidez dessa reimpressão mostra a grande utilidade deste pequeno livro que só seria comprado por quem de fato o utilizasse, além de justificar o fato da astronomia se rebaixar à agrimensura.

Em 1694, torna público os seus quatro tratados que foram impressos ao fim do segundo volume das Memórias da Academia em 1692 e 1693.

O primeiro destes tratados é sobre a Epiciclóide. Curva compreendida através da mesma formação geral da ciclóide só que com mais detalhes e que lhe sucedeu quando ela foi quase esgotada pelos geômetras. La Hire se envolveu com esse tema por um duplo charme: sua novidade e sua dificuldade. Ele descobriu tudo o que se relaciona com a Epiciclóide: suas tangentes, suas retificações, seus quadrantes, seus desenvolvimentos. É tudo que se pode ter sobre uma curva na mais sublime geometria.

Um fruto bastante útil desse trabalho, segundo sua própria opinião, foi direcionada para a "Mecânica", felicidade muito rara entre as curvas curiosas. Ela teve reflexo nas máquinas que possuíam engrenagens, pois os dentes faziam sobre os outros esforços muito grandes, o que provocavam as suas quebras. Para diminuir essas rupturas, além da vantagem de distribuir os esforços ao longo da estrutura, precisava-se dar aos dentes um outro formato que seria determinado pela geometria. Para os dentes terem essa propriedade desejada, La

Hire descobriu que eles deveriam ter a forma de um arco da Epiciclóide. Ele executou sua idéia com sucesso no Chateau de Beaulieu a 8 léguas de Paris em uma máquina para elevar água.

Conseguir uma aplicação para uma descoberta de uma nova curva não é tarefa simples. Mas o caso da aplicação da epiciclóide na engrenagem constitui uma exceção, uma vez que é impensável atualmente uma máquina motora sem engrenagens. Apesar de sua monstruosa utilidade, sua descoberta foi negligenciada.

O segundo tratado dos quatro que nós falamos era uma explicação sobre os principais efeitos do gelo e do frio. O terceiro era sobre as diferenças entre os sons da corda de uma trombeta marinha. O quarto era sobre os diferentes acidentes da visão.

Este último é o mais curioso e o mais interessante. É uma ótica inteira, não uma ótica geométrica que só aborda os raios refletidos, mas uma ótica física que leva em consideração a geometria e que considera uma luneta viva, animada, muito complicada na sua construção, sujeita a diversas mudanças que se chama olho. La Hire examinou tudo que pode chegar à vista segundo as diferentes constituições do olho ou os diferentes acidentes que podem surgir. Estas pesquisas específicas, quando bem aprofundadas, envolvem um grande número de fenômenos, a maior parte complicados, singulares, contrários em aparência uns dos outros e que não têm menos dificuldade que as pesquisas mais gerais.

La Hire, em 1695, fez o seu *"Tratado de Mecânica"*. Ele não se contentou com a teoria desta ciência que ele funda com demonstrações exatas. Ele se liga fortemente a tudo que se tem de principal para a prática das artes. Ele se eleva mesmo até os princípios da arte divina que é construir o universo.

Aqueles que não conhecem um matemático podem imaginar que um geômetra, um mecânico, um astrônomo não podem estar no mesmo matemático. Mas quando se é um pouco mais instruído e se observa mais de perto, vê-se um homem inteiro que abraça uma certa parte da matemática em toda a sua extensão. Um homem raro e de extremo vigor de gênio que pode abraçar todos até um certo ponto. Um gênio mesmo, mas que não se furta a um trabalho assíduo e perseverante. La Hire une as duas habilidades e se constitui um verdadeiro matemático universal. Além disso, tinha grande conhecimento dos detalhes das Artes, caminho tão conhecido e tão pouco percorrido. Pode-se dizer que em La Hire residia uma verdadeira academia de ciências.

E ainda tem mais. Ele foi por muito tempo professor de arquitetura, onde o objeto é diferente de tudo que já foi falado que ele fez. Ele ocupa cada cargo como se tivesse uma única ocupação. Acrescente a La Hire ainda um bom desenhista e um hábil pintor de paisagem.

Em 1702, gravou dois planisférios de 16 polegadas de diâmetro com os desenhos que havia feito. As posições principais foram determinadas por suas próprias observações.

Em 1704, o Rei resolve colocar dentro dos dois últimos pavilhões de Marli dois grandes globos. Como a obra durava um certo tempo, ele teve a curiosidade de ir assistir. Ele delegou a La Hire que se engajou nas explicações e nos discursos sobre a ciência e se percebia sua alegria para desempenhar tal tarefa. É uma vantagem rara um sábio cair no gosto de um príncipe, como também um príncipe cair no gosto de um sábio.

Outra obra de La Hire que relataremos, cujo recenseamento não pode ser preciso por causa da multidão, encontra-se uma grande quantidade de revelações importantes que ele divulgava, seja pelos jornais, seja dentro das Histórias da Academia, mas principalmente esta última. Não havia época do ano que ele não as enriquecesse com vários presentes igualmente consideráveis, seja pela beleza, seja pela variedade.

Ele fez infinitamente mais que dar ao público excelentes obras de sua própria composição; ele contribuiu com obras de outras pessoas. Sr. Picard, que muito trabalhou na ciência do "Nivelamento", quando ficou doente, entregou a La Hire tudo o que havia feito sobre o assunto e pediu que ele o imprimisse com as modificações que julgasse necessárias. La Hire cumpriu o seu desejo e publicou um livro em 1684 intitulado *"Tratado de Nivelamento do Sr. Picard acrescido de uma luz do Sr. de la Hire com suas adições"*. Paralelamente, ele publica, em 1686, o *"Tratado de Nivelamento das Águas e de outros Corpos Fluidos"*, obra póstuma do Sr. Mariotte, onde uma parte foi passada a limpo quando ele morreu e a outra foi colocada sobre os papéis do autor que foram encontrados segundo sua vista. Pode-se crer que a sua generosidade em trabalhar em obras dos outros se deve aos laços de amizade que por eles nutria. Mas isso não diminui a sua glória de executar estas tarefas.

Tudo o que aqui foi dito sobre as mais diferentes obras que nos deu, nos dá uma idéia não somente da assiduidade em seu escritório, mais ainda da saúde muito firme e muito vigorosa que possuía. Ele aprontou das suas desde que se curou das enfermidades da juventude e de suas grandes palpitações do coração por causa de uma febre quartã, curada inesperadamente. Ele passou a confiar muito na natureza, diminuindo muito a sua estima pela medicina. Todo os seus dias eram ocupados pelos estudos e suas noites pelas observações astronômicas. Nenhum divertimento era capaz de lhe tirar do trabalho. Nenhum outro exercício corporal que não fosse ir ao Observatório da Academia de Ciências, dar aulas de arquitetura, idem no Colégio Real onde ele também era professor. Poucos conseguem compreender a felicidade de um solitário por uma escolha todos os dias renovada. Ele teve a sorte de não ser minado lentamente pela idade nem ter uma velhice longa e inerte. Quanto a seu espírito, ele jamais envelheceu. Depois das enfermidades de um mês ou dois, ele morreu sem agonia em 21 de abril de 1718 com a idade de 78 anos.

Ele foi casado duas vezes e teve oito filhos. Cada um dos seus casamentos forneceu um acadêmico.

Dentro de todas as suas obras em matemática, ele se serviu da "Síntese", a maneira de demonstrar dos clássicos pelas linhas e pelas proporções entre as linhas, freqüentemente difícil por sua concentração e por sua complicação. Não é que ele não conhecesse a "Análise Moderna", mais rápida e menos embaraçada, mas ele tinha conhecido na sua juventude o outro método que se tornou seu hábito. Além disso, as verdades geométricas descobertas pelos clássicos são incontestáveis, o que nos leva a crer também que esse método não pode ser abandonado sem algum perigo. Enfim, os novos métodos que são de alguma forma fáceis, funcionam como uma espécie de glória a que temos que nos resignar.

Ele tinha uma polidez exterior, uma circunspeção, uma prudente timidez do seu país que ele amava tanto. Ele era eqüitativo e desinteressado, não somente na verdadeira Filosofia, mas também no Cristianismo. Sua motivação habitual de examinar tantos objetos diferentes e discutir com curiosidade, aprisionou a sua visão da religião, uma piedade sólida, isenta de desigualdades e singularidades que reinou sobre todo o curso da sua vida.

CAPÍTULO 4

TRADUÇÃO DA OBRA

"NOVOS ELEMENTOS DAS SEÇÕES CÔNICAS”

(PHILIPPE DE LA HIRE – 1679)

PREFÁCIO DO AUTOR

Já faz alguns anos que eu publiquei um tratado sobre as seções cônicas em um novo método, onde eu demonstrei suas principais propriedades dentro de um cone. Mas aqueles que não estão muito familiarizados com demonstrações sobre interseções entre plano e sólido têm muita dificuldade para entender, mesmo sendo simples quando compreendidas. Isto me impulsionou a procurar uma outra maneira de, sem me servir do cone, descrever simplesmente as linhas curvas sobre um plano para demonstrar as mesmas propriedades observadas dentro do sólido. Mesmo achando-a a mais simples e bela de todas, eu tive que abandonar aquela proposta, uma vez que não foram superadas as dificuldades encontradas.

Mas eu fiquei satisfeito em reduzir as seções cônicas ao plano, as quais nomeei planicônicas. Eu aplicarei a essas seções cônicas as mesmas demonstrações que eu fiz para os sólidos. E eu posso dizer que esta obra teve a boa sorte de merecer a aprovação de muitos nobres geômetras.

Embora seja muito vantajoso agradar renomados geômetras, nós priorizamos como o principal foco dessa obra esquecer o conhecimento prévio daqueles que desejam entender os mistérios da natureza. E eu acho que eles ficarão satisfeitos em descobrir várias formas de fazer a mesma coisa. Então, pode-se escolher o caminho preferido.

Eu não enumerarei os vários importantes autores que escreveram sobre este tema, nem seus métodos para descrever as curvas. Eu falarei apenas da diferença entre o meu método e o de Mr. De Witt, o qual vem sendo considerado o melhor.

Ele faz uso de um método particular para descrever cada seção. Especialmente na parábola e na hipérbole fica um emaranhado de linhas que formam certos ângulos entre si. Isto quer dizer que fica difícil ter uma clara e plena idéia da formação das curvas para quem deseja aprender.

Já a descrição que eu utilizo, feita a partir das propriedades principais dos focos, tem como regra apenas uma linha que na elipse é igual à soma e na hipérbole é igual à diferença entre duas outras linhas que vão dos focos até o ponto da curva descrita. E na parábola, a soma e a diferença são iguais, uma vez que seus focos pertencem a seu eixo, supõe-se que um deles esteja a uma infinita distância do outro. Assim, as linhas que unem um ponto qualquer da curva aos focos terão soma e diferença igual à linha que está localizado no infinito.

Estas são as propriedades que estão sendo muito utilizadas em geometria, especialmente na astronomia e na ótica.

Eu acredito que Mr. de Witt não visualizou um método harmonioso para a descrição das curvas que simplificasse as demonstrações. Ele não o trouxe para a elipse quando se empenhou em demonstrar as propriedades dos diâmetros. A demonstração que eu forneço tem conformidade com os clássicos, mas ela é mais simples. Este livro contém todas as propriedades elementares das seções cônicas e a geometria requerida não vai além dos seis primeiros livros de Euclides, ou seja, um conteúdo que foi demonstrado de diversas formas por outros renomados geômetras. Eu não mudei de forma alguma os nomes dados por Apolônio às curvas: primeiro porque eram os termos mais familiares e segundo porque eu usei exatamente a mesma ordem de apresentação que ele usou.

A parábola leva este nome pela igualdade que existe entre o quadrado da ordenada de um diâmetro e o retângulo cujos lados são o parâmetro e a parte do diâmetro compreendida entre sua extremidade e o encontro com a ordenada. É o que eu demonstro na proposição 1 e no corolário da proposição 14.

A elipse é assim nomeada por causa do quadrado da ordenada de um diâmetro que se compara em grandeza ao retângulo formado pelo parâmetro e pela parte do diâmetro compreendida entre sua extremidade e seu encontro com a ordenada subtraído de um retângulo que possui um lado igual àquela parte do diâmetro e é semelhante à figura (retângulo cujos lados são o parâmetro e o diâmetro), como demonstro nas proposições 5 e 18.

A hipérbole é assim nomeada por causa do quadrado da ordenada de um diâmetro que se compara em grandeza ao retângulo formado pelo parâmetro e pela parte do diâmetro compreendida entre sua extremidade e o encontro com a ordenada somado a um retângulo que possui um lado igual àquela parte do diâmetro e é semelhante à figura (retângulo cujos lados são o parâmetro e o diâmetro), como demonstro nas proposições 3 e 22.

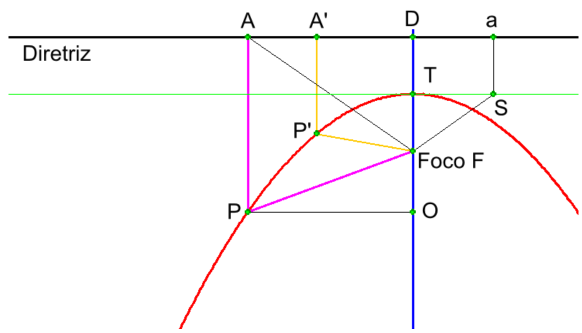
Neste tratado, você encontrará o que há de mais importante no primeiro livro de Apolônio, as propriedades das assíntotas (segundo livro), as primeiras proposições do terceiro livro, bem como as que tratam dos focos.

Já sobre proporções, eu uso composição, divisão e igualdade de razões. Porque eu acho que o meu leitor sabe inverter, alternar ou inverter os termos de uma proporção.

PARTE 1 – A PARÁBOLA

A GÊNESE DA PARÁBOLA.

Se sobre um plano for traçada uma linha* reta ***AD*** e um ponto ***F*** fora desta reta. Eu afirmo que podem ser encontrados uma infinidade de pontos tais como ***P***, ***P'*** de forma tal que a linha ***FP*** (traçada do ponto **F** até cada ponto **P**) seja igual à ***PA*** (traçada do mesmo ponto ***P,*** perpendicularmente à ***AD*****).



De um ponto qualquer a seu gosto da linha ***AD***, como ***A***, traçam-se ***AP*** perpendicular à ***AD*** e ***FA*** de modo que o ângulo ***AFP*** seja igual ao ângulo ***FAP***. O ponto ***P*** será um daqueles procurados. Portanto, uma infinidade de outros pontos podem ser encontrados.

COROLÁRIO.

Pelo ponto ***F***, trace uma linha ***FD*** perpendicular à ***AD***; é evidente que a linha que passa pelos pontos ***P*** cortará ***FD*** igualmente em duas partes em ***T***. Da mesma forma, aquela linha ***PP'T*** pode ser aumentada infinitamente, afastando-se infinitamente da linha ***FD*** prolongada no sentido de ***F***.

* *La Hire utiliza o termo* ***"linha"*** *com o significado de segmento, reta, semi-reta ou uma curva qualquer. O contexto é que define qual é o mais adequado.*

: A reta* ***AD *utilizada na geração da parábola é hoje denominada* ***"Diretriz"***

Obs. 1: *os termos* ***"vértice"*** *e* ***"abscissa"*** *não são usados por La Hire, mas Robinson já os utiliza.*

Obs. 2: *atualmente, é usual colocar um par de eixos perpendiculares* ***XY*** *com origem no vértice da parábola e seu eixo de simetria coincidindo com o eixo Y; neste caso chamamos de* ***"abscissa"*** *o que La Hire chama de* ***"ordenada"*** *e de* ***"ordenada"*** o que Robinson chamava de ***"abscissa"***. *O termo "Origem" relativo à interseção entre um par de eixos coordenados é devido a La Hire que o utilizou justamente na segunda parte dessa obra.*

Obs. 3: *embora não defina, La Hire utiliza o conceito de* ***"interior"*** *e* ***"exterior"*** *para uma parábola;* ***"interior"*** *seria o conjunto de ponto cujos segmentos que os unem ao foco não interceptam a parábola e* ***"exterior"*** *seria o conjunto de pontos cujos segmentos que os unem ao foco interceptam a parábola.*

DEFINIÇÕES.

1.

A linha PP'T formada pelos pontos P é denominada ***Parábola***.

2.

O ponto F, o ***Foco*** da parábola.

3.

A linha DFO é o ***Eixo***.

4.

A linha PO traçada por um ponto P da parábola perpendicularmente ao eixo é chamada ***Ordenada*** do eixo.

5.

Todas as linhas internas à parábola e paralelas ao eixo são denominadas ***Diâmetros***.

6.

Uma linha reta que encontra a parábola em apenas um único ponto e que não passa por dentro é chamada ***Tangente*** no referido ponto.

PROPOSIÇÃO I.

Admita a geração precedente da parábola. Eu afirmo que o quadrado de qualquer ordenada ***PO*** é igual ao retângulo de duas vezes ***FD*** por ***TO***, a parte do eixo contida entre a extremidade ***T*** e ***O*** (o ponto onde ele encontra a ordenada).

Na figura anterior, ***DO*** é igual[*] à ***AP*** que é igual à ***FP*** pela geração da parábola. O quadrado de ***FP*** é igual ao de ***FO*** mais o quadrado de ***PO***. O quadrado de **DO** é igual ao quadrado de **FO** mais duas vezes o retângulo ***OT***, ***DF***, uma vez que se retirarmos dos quadrados iguais ***FP*** e ***DO*** o quadrado de ***FO***, restarão o quadrado de ***PO*** e o retângulo ***OT***, ***DF*** que serão iguais, que é o que foi proposto.

COROLÁRIO 1.

É evidente pelo que foi demonstrado acima que o quadrado de cada ordenada é igual a um retângulo sob uma mesma linha cujos lados são o dobro de ***FD*** e ***TO***, a parte do eixo compreendida entre sua extremidade ***T*** e ***O***, onde ele encontra a ordenada.

DEFINIÇÃO 7.

A linha igual a duas vezes FD é chamada ***Parâmetro*** do eixo.

COROLÁRIO 2.

É visível que o foco dista da extremidade do eixo um quarto do parâmetro.

COROLÁRIO 3.

Percebe-se claramente ainda que os quadrados de cada ordenada estão entre si como as partes do eixo compreendidas entre a extremidade e aqueles pontos onde cada uma delas encontra sua respectiva ordenada também estão, pois todos eles são iguais a retângulos cujas bases são as partes do eixo e cuja altura comum é o parâmetro.

PROPOSIÇÃO II.

A linha reta ***TS*** traçada pelo ponto ***T***, paralela à ***PO***, toca[**] a parábola no mesmo ponto ***T***.

- *Consulte a figura anterior.*

Primeira parte – Suponhamos que a linha ***TS*** (veja figura inicial) encontre a parábola em outro ponto como ***S***. Ao traçar ***Sa*** paralela ao eixo, ***FS*** e ***Sa*** serão iguais (pela geração da parábola). ***FS*** será igual à ***FT*** (porque ***FT***, ***TD*** e ***Sa*** serão iguais), o que é um absurdo, pois no

* *O termo **"igual"** usado para polígonos significa equivalente (mesma área).*

** *O verbo **"tocar"** terá sempre o significado de tangenciar.*

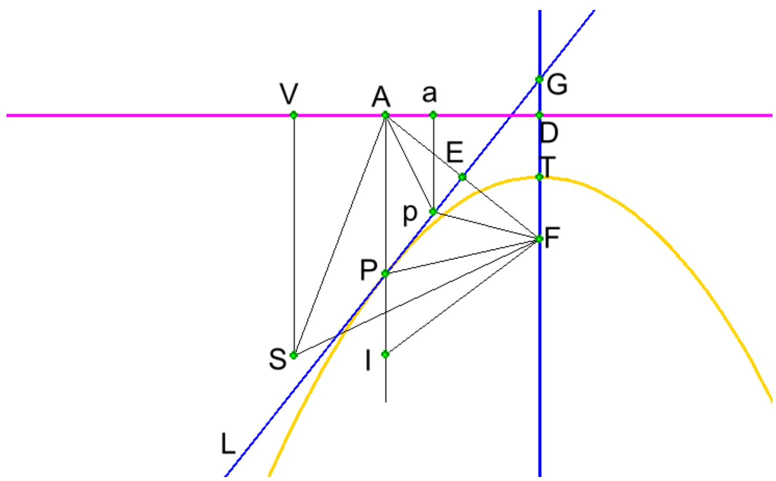
Obs. 4: *La Hire usa o resultado que conhecemos hoje como "Teorema de Pitágoras" na demonstração dessa proposição, mas ele não utiliza esse termo.*

triângulo retângulo ***FTS***, o lado ***FS*** oposto ângulo reto é maior que os outros dois lados.

Segunda parte – É ainda menos possível que ***TS*** seja interior à parábola, pois a parábola estaria entre ***Da*** e ***TS***. Logo, a proposição é verdadeira.

PROPOSIÇÃO III.

As mesmas coisas admitidas anteriormente. Eu afirmo que um diâmetro ***PI*** pode encontrar a parábola em somente um ponto e que só passa em seu interior.



Suponha que o diâmetro encontre a parábola em outro ponto como ***I***; pela geração as linhas ***IF*** e ***IA*** são iguais. Mas ***PF*** e ***PA*** são iguais pela mesma razão; portanto ***PF*** e ***PI*** somados se igualam à ***IF***, o que é um absurdo; pois quaisquer dois lados de um triângulo colocados juntos são maiores que o terceiro.

Além disso, a parábola sempre se afasta, de pouco em pouco, do seu eixo pela geração; ela se afasta também do diâmetro ***PI***. É o que se desejava demonstrar.

PROPOSIÇÃO IV.

As mesmas coisas admitidas acima. Trace a linha ***FA*** que é dividida igualmente em ***E*** e trace ***PE***. Eu afirmo que a linha reta ***PE*** toca a parábola num único ponto (fig. anterior).

Primeira parte – Se ***PE*** não tocasse a parábola em ***P***, encontrando-a em outro ponto ***p***. Desenhe ***pF*** até o foco e ***pa*** paralela ao eixo. A linha ***pE*** é perpendicular à base do triângulo isósceles ***FpA*** uma vez que ela a divide igualmente em **E**. Logo ***Ap*** e ***Fp*** são iguais* e ***ap*** é igual à ***Fp*** pela geração da parábola, portanto ***ap*** será igual à ***Ap***, o que é um absurdo, pois o ângulo ***paA*** é reto. Portanto a linha ***PE*** encontra a parábola somente em ***P***.

Segunda parte – Se fosse possível que a parábola após o ponto ***P*** estivesse sempre do outro lado da linha ***EPL*** com respeito ao eixo, ou seja, permita que a parte ***PL*** da linha ***EPL*** seja interior à parábola. A partir de qualquer um dos pontos como ***S*** da suposta parábola exterior a linha ***LP***, trace ***SF*** até o foco e ***SV*** paralela ao eixo; pela geração da parábola, ***SF*** e ***SV*** serão iguais. Mas ***SA*** é maior que ***SV***, pois o ângulo ***SVA*** é reto; ***SA*** será, portanto, maior que ***SF***, o que é um absurdo, uma vez que a linha ***EPL*** divide igualmente ***AF*** e é perpendicular a ela. Conseqüentemente, a proposição é verdadeira.

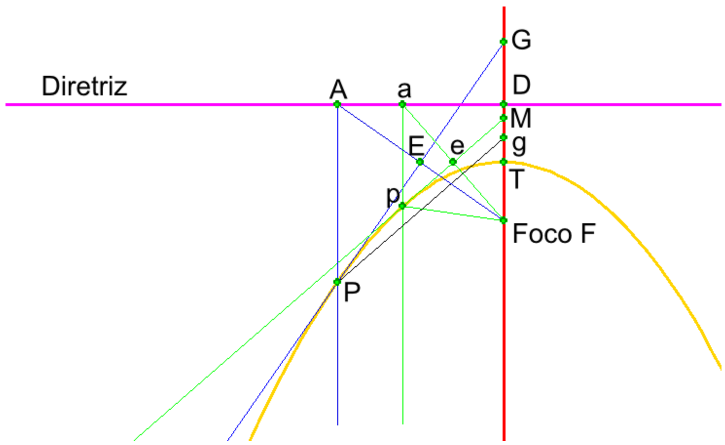
COROLÁRIO.

É evidente que o ângulo ***FGE***, formado pela tangente ***PG*** e o eixo, é igual ao ângulo ***FAD***, que é igual ao ângulo ***APE*** ou ***FPE***; pois os dois triângulos ***FGE*** e ***FAD*** são retângulos e têm um ângulo comum em ***F***. Igualmente, o ângulo no ponto ***A*** do triângulo ***PAE*** é igual ao ângulo ***AFD***, por causa das linhas paralelas ***PA***, ***FD*** e o triângulo ***FPE*** é igual e semelhante* ao triângulo ***APE***. É também claro, que o triângulo ***PFG*** é isósceles.

PROPOSIÇÃO V.

Pode existir apenas uma linha, como ***PEG***, que toca a parábola no mesmo ponto ***P***.

* *Para justificar **Ap** = **Fp**, pode-se usar a congruência dos triângulos **pEA** e **pEF**.*



Suponha que fosse possível que outra tangente como ***Pg*** tocasse a parábola no mesmo ponto ***P***. A partir do foco ***F***, trace ***Fa*** perpendicular à ***Pg***. ***Fa*** encontrará ***AD*** em algum ponto ***a***, visto que a tangente ***Pg*** sempre encontra o eixo e não pode nunca ser paralela a ele, pois seria um diâmetro e passaria interiormente à parábola. Ao desenhar ***ap*** paralela ao eixo, ela cruza a parábola em ***p***, sendo ***pF*** igual à ***pa*** pela geração da parábola. Sendo ***Fa*** dividida em duas igualmente em ***e***, então a linha reta ***peM*** tocará a parábola em ***p*** pela proposição anterior e será paralela à ***Pg***. Mas a tangente ***PE*** encontra a outra tangente ***pe*** fora da parábola, uma vez que ambas são tangentes. Assim, ***Pg*** (paralela à ***pe***) passará dentro da parábola, o que é um absurdo, pois supusemos que era tangente e, conseqüentemente, deveria estar fora. Portanto, o que foi proposto é verdadeiro.

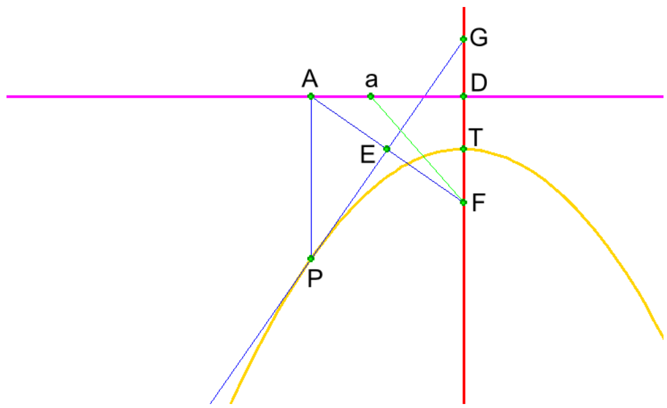
COROLÁRIO.

É evidente, a partir da demonstração acima, que todas as tangentes encontram tanto o eixo como também todos os diâmetros e que elas também cruzam entre si, uma vez que pela quarta proposição elas não são paralelas.

PROPOSIÇÃO VI.

Obter uma tangente que, do mesmo lado que a parábola e a tangente, faça um ângulo com o eixo menor que qualquer ângulo dado; desde que o ângulo dado não seja maior que um reto.

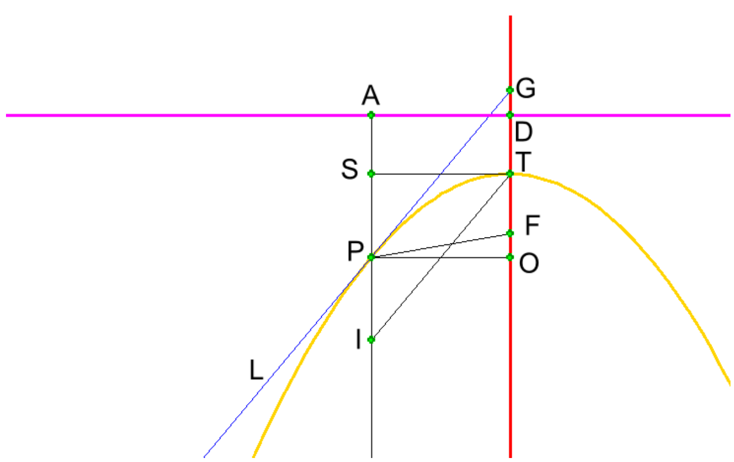
* *Quando usado para triângulo, o termo **"igual e semelhante"** significa congruente.*



Permita traçar a linha ***Fa*** de tal forma que o ângulo ***FaD*** possa ser igual ao ângulo dado; então tome o ponto ***A***, no outro lado de ***a*** com relação ao eixo. É evidente que o ângulo ***FAD*** será menor que o ângulo dado ***FaD***. Pelo corolário da proposição ***4***, a linha ***PEG*** traçada por ***P*** (onde a linha paralela ***AP*** ao eixo encontra a parábola) e pelo ponto ***E*** (que divide ***FA*** em duas igualmente) será a tangente à parábola no ponto ***P***. Fará com o eixo um ângulo ***PGF*** igual ao ângulo ***FAD*** que é menor que o ângulo dado ***FaD***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO VII.

Supondo as mesmas coisas como anteriormente. Eu afirmo que a parte do eixo ***TG*** compreendida entre sua extremidade ***T*** e o ponto ***G*** (onde a tangente o encontra) é igual a ***TO*** que é a parte contida entre a mesma extremidade ***T*** e ***O***, onde a ordenada ***PO*** traçada pelo ponto de tangência ***P*** encontra o eixo.



Pelo corolário da proposição ***4,*** o triângulo ***PGF*** é isósceles. Portanto, ***FG*** é igual à ***FP*** e ***PA*** é igual à ***DO*** (da geração da parábola), porque ***PO*** é paralela à ***AD***. Se de linhas iguais ***FG*** e ***DO*** forem retiradas linhas iguais ***FT*** e ***DT***, as linhas restantes ***TG*** e ***TO*** serão iguais. É o que foi proposto.

COROLÁRIO.

Se a tangente ***TS*** for traçada pelo ponto ***T***, sendo prolongada até encontrar o diâmetro ***API*** e se a linha ***TI*** for desenhada paralela à tangente ***PG***, conclui-se então que ***PS*** e ***PI*** são iguais, pois ***PS*** é igual à ***TO*** e ***PI*** é igual à ***TG***.

PROPOSIÇÃO VIII.

As coisas permanecendo iguais como antes. Eu afirmo que o ângulo ***IPL,*** formado pela tangente ***PL*** e o diâmetro ***PI*** traçado pelo ponto de tangência ***P***, é igual ao ângulo ***FPG*** formado pela tangente ***LPG*** e pela linha ***FP*** traçada do foco F até o ponto de tangência ***P***, de tal forma que estes dois ângulos estejam sobre a mesma tangente por **P**.

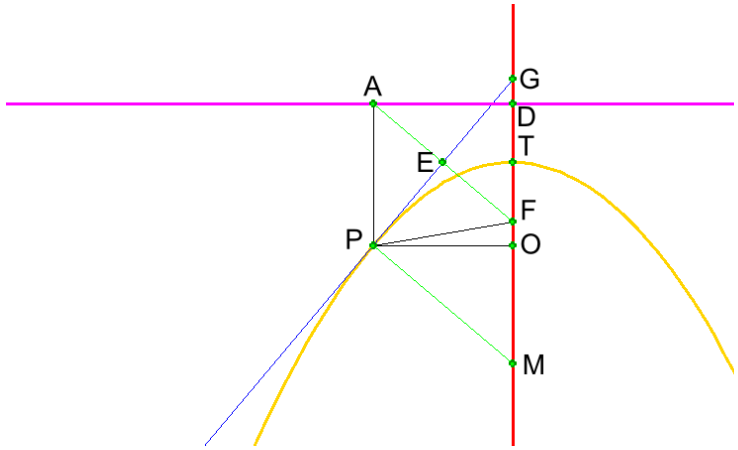
Na figura anterior, pelo corolário da proposição ***4***, o ângulo ***FPG*** é igual ao ângulo ***GPA*** que é igual ao ângulo ***IPL.*** Assim o ângulo ***IPL*** é igual ao ângulo ***FPG***. È o que foi proposto.

COROLÁRIO.

É também visível que o ângulo ***LPF*** é igual ao ***GPI***, pela adição do ângulo comum ***FPI*** aos ângulos iguais ***IPL*** e ***FPG***.

PROPOSIÇÃO IX.

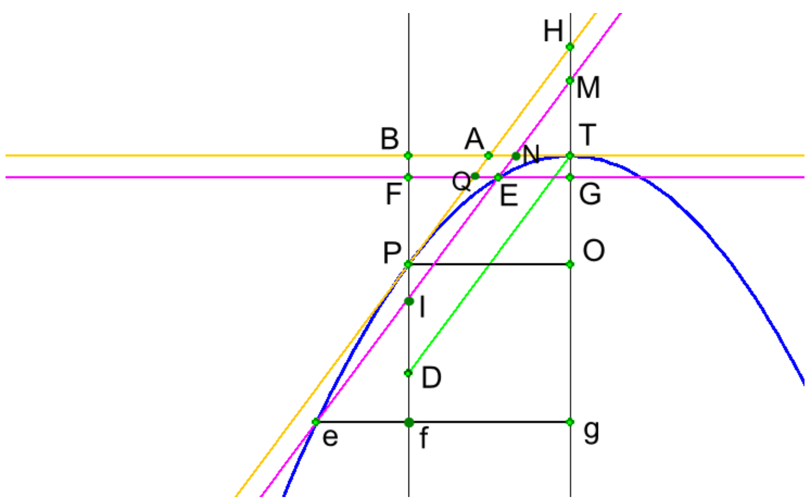
Se for traçada ***PM*** perpendicular à tangente pelo ponto de tangência ***P***, em seguida prolongada até encontrar o eixo em ***M***. Eu afirmo que a linha ***OM*** (contida entre o ponto ***O*** da ordenada e o ponto ***M***) é metade do parâmetro do eixo.



A linha ***PG*** é perpendicular à ***FA*** pela proposição ***4***. Assim ***AF*** e ***PM*** são paralelas. Como os triângulos ***ADF*** e ***POM*** são iguais e semelhantes, por causa das paralelas ***PA*** e ***DM***, ***AD*** e ***PO***, então ***OM*** é igual à ***DF*** que é metade do parâmetro pela definição de parâmetro.

PROPOSIÇÃO X.

Na parábola ***PET***, cujo eixo é ***TO***, trace a tangente ***PH*** pelo ponto ***P*** que encontra o eixo em ***H*** e também outra tangente ***TB*** pela extremidade ***T*** que encontra o diâmetro ***DPB*** prolongado até ***B***. Então o triângulo ***TAH*** formado pelas duas tangentes e pelo eixo será igual e semelhante ao triângulo ***BAP*** formado pelas tangentes e o diâmetro ***PI*** prolongado.



Ao desenhar a ordenada ***PO*** do eixo, ***TO*** é igual à ***TH*** (pela proposição ***7***). Como ***BP*** é igual à ***TO***, então ***BP*** é igual à ***TH***. Estas linhas ***BP*** e ***TH*** são também paralelas. Assim os triângulos ***TAH*** e ***BAP*** são iguais e semelhantes. É o que foi proposto.

COROLÁRIO.

Ao traçar ***TD*** paralela à ***TH***, se for adicionado o quadrilátero ***TDPA*** a cada um dos triângulos iguais, o triângulo ***TDB*** será igual ao paralelogramo ***TDPH*** que é igual ao retângulo ***TOPB***, porque eles têm bases iguais ***TO*** e ***TH***. Este retângulo ***TOPB*** é ainda igual ao triângulo ***POH***.

PROPOSIÇÃO XI.

As mesmas coisas sendo supostas como antes. Se forem traçadas ***EG*** e ***EM*** paralelas às tangentes ***PAH*** e ***BAT*** pelo ponto ***E*** da parábola, eu afirmo que o triângulo ***EGM*** é igual ao retângulo ***GTBF*** (figura anterior).

Por causa das paralelas, o triângulo ***POH*** está para o triângulo ***EGM*** como o quadrado de ***PO*** para o quadrado de ***EG***[*]. Mas pelo corolário ***3*** da proposição ***1***, o quadrado de ***PO*** está para o quadrado de ***EG*** como ***TO*** para ***TG***. Também ***TO*** está para ***TG*** como o retângulo ***TOPB*** para o retângulo ***TGFB***. Pela igualdade das razões, o triângulo ***POH*** está para o triângulo ***EGM*** como o retângulo ***TOPB*** para o retângulo ***TGFB***. Mas o triângulo ***POH*** é igual ao retângulo ***TOPB***, pelo corolário da proposição precedente. Portanto o triângulo ***EGM*** é igual ao retângulo ***TGFB***. É o que foi proposto.

Da mesma maneira, o triângulo ***egM*** pode ser demonstrado igual ao retângulo ***TgfB***.

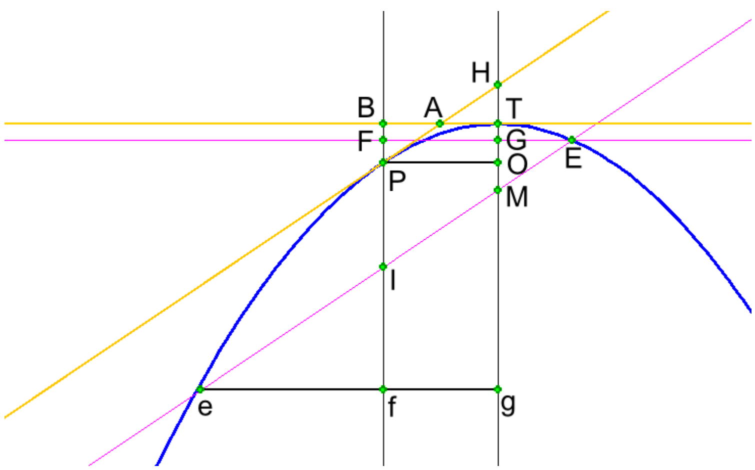
PROPOSIÇÃO XII.

As mesmas coisas sendo admitidas. Eu afirmo que o triângulo ***EFI*** é igual ao paralelogramo ***PIMH*** (figura anterior).

* N*a **1ª** proporção, o paralelismo implica na semelhança dos triângulos **POH** e **EGM**.*

Se o ponto ***E*** estiver entre ***P*** e ***T***, pelo corolário da proposição ***10***, o triângulo ***POH*** é igual ao retângulo ***POTB***. Se destes retirarmos partes iguais, no caso do triângulo ***POH***, o triângulo ***MEG*** e no caso do retângulo ***POTB***, o retângulo ***TGFB*** igual ao triângulo ***MEG***. Novamente, se de cada um for retirado o quadrilátero ***PQGO***, restará o quadrilátero ***EQHM*** igual ao triângulo ***QFP***. Para cada um deles, se for adicionado o quadrilátero comum ***PIEQ***, o paralelogramo ***PIMH*** será igual ao triângulo ***EFI***.

Mas se o ponto ***E*** estiver do outro lado de ***T*** em relação a ***P***, pela proposição ***10***, o triângulo ***ABP*** é igual ao triângulo ***ATH***. Adicionando aos dois a figura comum ***PIMTA***, o paralelogramo ***PIMH*** será igual ao quadrilátero ***IMTB***. Se deste for retirado o retângulo ***GTBF*** e adicionado o triângulo ***GEM*** (igual ao retângulo ***GTBF***, pela proposição ***11***), então o paralelogramo ***PIMH*** será igual ao triângulo ***EFI***. É o que foi proposto.



Finalmente, se o ponto ***E*** estiver no outro lado de ***P*** como em ***e***. O triângulo ***TAH*** será igual ao triângulo ***ABP***, pela proposição ***10***. Se a cada um for adicionada a figura ***TgfPA***, o quadrilátero ***HgfP*** será igual ao retângulo ***TgfB*** que é igual ao triângulo ***geM*** pela proposição precedente. Se o quadrilátero comum ***MgfI*** for retirado da figura quadrilátera ***HgfP*** e do igual triângulo ***Mge***, então sobrarão o paralelogramo ***PIMH*** e o triângulo igual ***efI***. É o que foi proposto em todos os casos.

PROPOSIÇÃO XIII.

As mesmas coisas sendo admitidas*. Se, pelo ponto ***E*** da parábola, for traçada a linha reta ***Ee*** paralela à tangente ***PH***, eu afirmo que ***Ee*** encontrará a parábola em outro ponto ***e***, como também será dividida em duas igualmente em ***I*** pelo diâmetro ***PI***, traçado pelo ponto de tangência ***P***.

Se ***BT*** for a tangente, a primeira parte da proposição é evidente a partir da geração da parábola. Mas se outra tangente for traçada como ***PH***, pela proposição ***6,*** uma tangente pode ser encontrada formando um ângulo com o eixo menor que o ângulo ***GHP*** do mesmo lado do eixo. Assim, esta tangente encontrará a tangente ***PH*** em um lado de ***P*** e a tangente ***TA*** encontrará ***PH*** no seu outro lado. A linha ***Ee***, sendo paralela à ***PH*** e possuindo um ponto na parábola, também encontrará as duas tangentes ou fora da parábola ou nela, em cada lado do diâmetro ***PI***. Assim, cruzará a parábola em **2** pontos ***E*** e ***e***, que é a **1ª** parte da proposição.

Pela proposição precedente, o triângulo ***EFI*** é igual ao paralelogramo ***PIMH***, que é também igual ao triângulo ***efI***. Como os dois triângulos são iguais e também semelhantes por causa das paralelas que os formam, então ***EI*** é igual à ***eI***. É o que foi proposto.

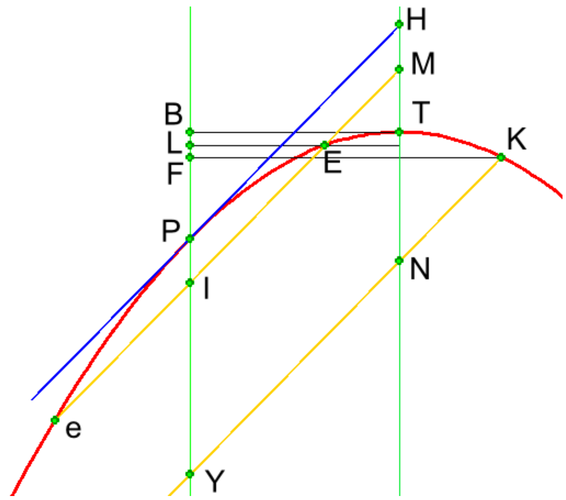
❖ *Consulte a figura anterior.*

DEFINIÇÃO 8.

Chamam-se ***Ordenadas de um Diâmetro*** àquelas linhas paralelas à tangente que passa pela extremidade desse diâmetro, da mesma forma que as perpendiculares ao eixo são chamadas suas ordenadas.

PROPOSIÇÃO XIV.

Supondo sempre as mesmas coisas colocadas nas proposições precedentes. Eu afirmo que os quadrados das ordenadas ***EI*** e ***KY*** de um mesmo diâmetro ***PI*** estão um para o outro assim como as partes deste diâmetro ***PI*** e ***PY***, compreendidas entre sua extremidade ***P*** e os pontos ***I*** e ***Y*** onde ele encontra as ordenadas.



Sendo os triângulos ***ELI*** e ***KFY*** semelhantes, o triângulo ***ELI*** está para o triângulo ***KFY*** como o quadrado de ***EI*** para o quadrado de ***KY***. Mas pela proposição precedente, o triângulo ***ELI*** é igual ao paralelogramo ***PIMH*** e o triângulo ***KFY*** é igual ao paralelogramo ***PYNH***. Estes paralelogramos estão um para o outro como ***PI*** para ***PY***; assim o quadrado de ***EI*** está para o quadrado de ***KY***, como ***PI*** para ***PY***. É o que foi proposto.

È a mesma coisa se as ordenadas forem tomadas no outro lado do diâmetro como ***eI***, pois elas são iguais às precedentes (pela proposição ***13***).

DEFINIÇÃO DE PARÂMETRO (9).

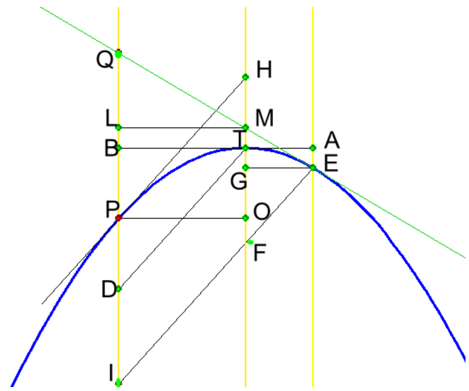
A terceira proporcional de qualquer parte do diâmetro (como ***PI***) e sua respectiva ordenada deste diâmetro pelo ponto ***I*** (como ***IE***) é chamada ***Parâmetro*** do diâmetro ***PI***.

COROLÁRIO.

É evidente que os quadrados de todas as ordenadas de um diâmetro (como ***KY*** é uma ordenada do diâmetro ***PY***) são iguais ao retângulo sob o parâmetro e ***PY*** (a parte do diâmetro que está contida entre a extremidade ***P*** e ***Y***, o ponto onde a ordenada o encontra).

PROPOSIÇÃO XV.

Se for traçada uma tangente ***EQ*** pelo ponto ***E*** da parábola que encontra um diâmetro ***PQ*** em ***Q*** e se pelo mesmo ponto ***E*** for traçada uma ordenada ***EI*** desse diâmetro, eu afirmo que ***PQ*** e ***PI*** são iguais.



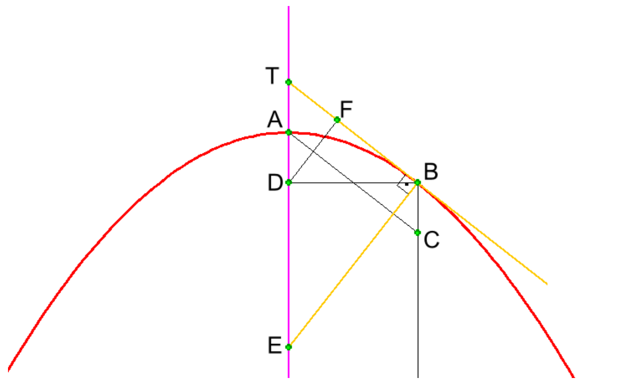
Trace o eixo ***TF***, a tangente ***BTA*** pelo ponto ***T***, a tangente ***PH*** por ***P*** que será paralela à ***EI***, (pela proposição ***13***), ***TD*** paralela à ***EI***, como também ***ML***, ***EG***, ***PO***, paralelas à ***BA***. Pelo corolário **3** da proposição **1**, o quadrado de ***PO*** (ou seu igual ***BT***) está para o quadrado de ***EG*** como ***TO*** para ***TG,*** ou como seus dobros ***BD*** para ***MG***. Por causa das linhas paralelas, o quadrado de ***BT*** está para o quadrado de ***GE*** como o quadrado de ***BD*** para o quadrado de ***GF***. Portanto, o quadrado de ***BD*** está para o quadrado de ***GF*** como ***BD*** está para ***MG*** e conseqüentemente ***GF*** é a média proporcional* entre ***BD*** e ***MG***. Do mesmo modo, o quadrado de ***BT*** ou o quadrado de ***LM*** está para o quadrado de ***GE*** como o quadrado de ***QL*** para o quadrado de ***MG***. Assim, o quadrado de ***QL*** está para o quadrado de ***MG*** como ***BD*** está para ***MG***: ***QL*** então é a média proporcional entre ***BD*** e ***MG***. Conseqüentemente ***GF*** e ***QL*** são iguais. Se a elas forem adicionadas as linhas ***LB*** e sua igual ***TG*** e também as linhas iguais ***BP*** e ***TH***, então as duas somas serão iguais entre si. Logo ***PQ*** será igual à ***FH*** que é igual à ***PI*** pelo paralelismo. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XVI.

Na parábola ***AB***, seu eixo é ***AE*** e seu diâmetro é ***BC***. Da extremidade ***B*** do diâmetro ***BC***, trace ***BD*** uma ordenada do eixo. Eu afirmo que o parâmetro do diâmetro ***BC*** excede o parâmetro do eixo ***AE*** em ***4*** vezes a parte do eixo interceptado ***AD***.

* *O termo **"média proporcional"** significa média geométrica*

Obs. 5:As proposições a seguir, **16** e **17**, só constavam na versão em Inglês. Portanto, a tradução foi feita literalmente a partir do texto de Brian Robinson. O que implicará em mudanças na simbologia.



Trace ***BT*** (tocando a parábola em ***B*** e encontrando o eixo em ***T***), ***BE*** perpendicular à tangente em ***B***, ***DF*** paralela à ***BE*** e ***AC*** paralela à ***BT***. A linha ***AC*** será uma ordenada do diâmetro ***BC*** (como definido pela proposição ***13***) e conseqüentemente será igual à ***TB*** e ***BC*** igual à ***AT*** (por causa das linhas paralelas) que é igual a ***AD*** pela proposição ***7***. ***DE*** é igual ao semiparâmetro do eixo (pela proposição ***9***).

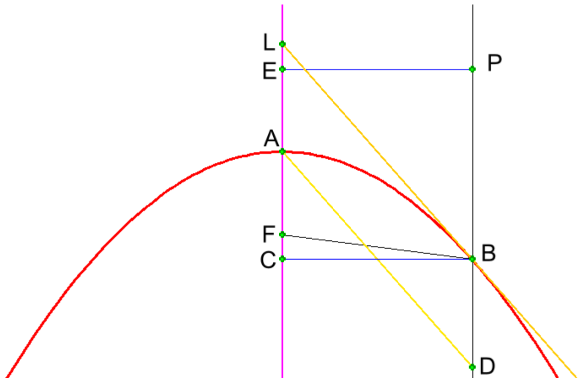
Assuma que a linha reta ***P**** seja igual ao parâmetro do eixo e ***p*** seja igual ao parâmetro do diâmetro ***BC***. Pela proposição ***1*** e pelo corolário da proposição ***14***, ***ACq***** está para ***BDq,*** como o retângulo ***BC x p*** está para o retângulo ***AD*** (igual à ***BC***) ***x P***. Mas estes retângulos, tendo alturas iguais, estão um para o outro como ***p*** para ***P***. Pela semelhança dos triângulos, o quadrado de ***BT*** está para o quadrado de ***BD*** como ***BT*** para ***BF*** e ***BT*** está para ***BF*** como ***ET*** para ***ED***. Como ***ET*** é igual ***DT*** (ou ***DA*** duas vezes) tomado em conjunto com ***DE*** (que é igual a ***P/2***) então ***ET*** está para ***ED*** como ***2ET*** para ***2ED***. Já que ***2ET*** é igual a ***4DA*** + ***P*** e ***2ED*** = ***P***, portanto ***ET*** está para ***ED*** como ***4DA*** + ***P*** está para ***P***. Combinando as proporções, ***p*** estará para ***P*** como ***4DA*** + ***P*** está para ***P***. Logo ***p*** é igual ***4DA*** + ***P***. **C. Q. D.**

COROLÁRIO.

É evidente, a partir desta proposição, que os parâmetros daqueles diâmetros que estão mais distantes do eixo são maiores que os parâmetros daqueles diâmetros que estão mais perto dele. Pois o quadrado de ***BD*** está para o quadrado de ***AC*** como o parâmetro do eixo, para o parâmetro do diâmetro ***BC***.

PROPOSIÇÃO XVII.

Na parábola ***AB*** cujo eixo é ***AC***, trace o diâmetro ***BD*** e ***FB*** do foco ***F*** até ***B*** (a extremidade do diâmetro ***BD***). A linha ***FB*** será igual a *¼* do parâmetro deste diâmetro.



AE é igual à ***AF*** (pela construção da parábola) que é igual a *¼* do parâmetro do eixo. Pela última proposição, o parâmetro do diâmetro ***BD*** excede o parâmetro do eixo de **4** vezes **AC**. Como ***AE*** é igual a *¼* do parâmetro do eixo,então ***CE*** é igual a *¼* do parâmetro do diâmetro ***BD***. Mas ***CE*** é igual à ***BP*** que é igual à ***BF***. Portanto, ***BF*** é igual a *¼* do parâmetro pertencendo ao diâmetro. **C. Q. D.**

COROLÁRIO.

Visto que nós temos uma nova e simples forma de determinar o parâmetro de qualquer diâmetro, já que ele é sempre o quádruplo da linha desenhada da extremidade do referido diâmetro até o foco da parábola.

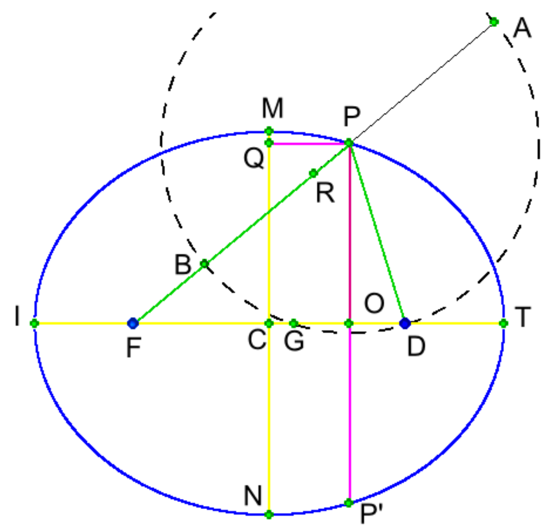
* *Atribuir uma única letra para um segmento não é um recurso usado por La Hire neste livro.*

** ***ACq*** *significa* AC^2*, ou seja* ***q*** *no fim de duas letras maiúsculas significa quadrado.*

PARTE 2 – A ELIPSE

A GÊNESE DA ELIPSE.

Se sobre um plano for traçada uma linha reta ***IT*** dividida em duas igualmente em ***C*** e os pontos ***F*** e ***D*** forem tomados na mesma linha igualmente distantes de ***C***. Eu afirmo que se podem encontrar tantos pontos ***P*** quantos desejados, de tal forma que duas linhas ***PF*** e ***PD***, traçadas do ponto ***P*** até os dois pontos ***F*** e ***D***, sendo unidas, serão iguais à linha ***IT***.



Se dividirmos ***IT*** de qualquer forma em duas partes, fazendo uma delas o semidiâmetro de um círculo cujo centro seja ***F*** e a outra parte, o semidiâmetro de um círculo cujo centro seja ***D***. Estes dois círculos se interceptarão em dois pontos ***P*** e ***P'***, um deles acima e o outro abaixo da linha ***IT***, igualmente distantes dela. A linha ***POP'*** que une os dois pontos ***P*** e ***P'*** será perpendicular a ela. Seguindo da mesma maneira, um infinito número de pontos pode ser encontrado como ***P***; que era o que devia ser feito.

COROLÁRIO.

É evidente que a linha que passa por ***P*** e ***P'*** passará através de ***I*** e ***T*** e que a linha ***PTP'I*** incluirá o espaço*. Também é claro que todas as linhas ***POP'*** (perpendiculares a ***IT*** e limitadas pela curva ***PTP'I*** em cada lado de ***IT***) serão divididas em duas igualmente em ***O*** pela mesma linha ***IT.***

* *"Incluir o espaço" significa ser uma curva fechada.*

DEFINIÇÕES.

1.

A linha formada por PTP’I é denominada **Elipse**.

2.

O ponto C, o **Centro** da elipse.

3.

A linha reta IT, o **Grande Eixo** (Brian usou “Eixo Transversal” e hoje, “Eixo Maior”).

4.

A linha reta NCM perpendicular a IT, que passa pelo centro C, limitada pela elipse, é chamada **Pequeno Eixo** (Brian chamou “Eixo Conjugado” e hoje é usado “Eixo Menor”).

5.

Os pontos F e D, são chamados **Focos**.

6.

Linhas retas traçadas dos pontos da elipse, perpendiculares ao eixo, são denominadas **Ordenadas dos Eixos**, como PO é uma ordenada do eixo IT.

7.

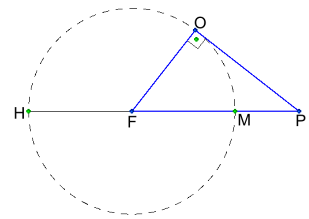
Todas as linhas retas que passam pelo centro C, limitadas em cada extremidade pela elipse, são chamadas **Diâmetros**.

8.

Uma linha reta que encontra a elipse em apenas um único ponto é chamada **Tangente** à elipse nesse ponto.

LEMA.

Em todo triângulo retângulo ***FOP***, o retângulo formado por ***PH*** (soma da hipotenusa ***FP*** e um lado ***FO***) e por ***MP*** (a diferença entre eles) é igual ao quadrado do outro lado ***PO***.



Tendo ***F*** como centro e ***FO*** como semidiâmetro, ao desenhar o círculo ***MOH*** e prolongar ***PF*** até ***H***, o lado ***PO*** tocará o círculo em ***O***, por causa do ângulo reto. Assim o retângulo formado por ***PM*** e ***PH*** é igual ao quadrado de ***PO***. É o que foi proposto**.**

PROPOSIÇÃO I.

A elipse formada de acordo com o método precedente. Eu afirmo que o quadrado de uma ordenada ***PO*** do grande eixo **IT** está para o retângulo ***IO, OT*** (as partes do grande eixo formadas pelo encontro com a ordenada) como o retângulo ***IF, FT*** para o quadrado de ***IC*** ou de ***CT***.

Na figura inicial de elipse, após prolongar ***FP*** até ***A***, faça ***FA*** igual à ***IT*** e divida-a em duas igualmente em ***R***. Tendo o ponto ***P*** como centro e ***PD*** ou seu igual ***PA*** como semidiâmetro, descreva o círculo ***ADB*** que encontrará ***AF*** em ***B*** e ***IT*** em ***G***, se os pontos ***O*** e ***D*** não coincidirem. Se eles coincidirem, os três pontos ***D***, ***O*** e ***G*** coincidirão e o círculo toca a linha ***IT*** em ***O***. Mas seguindo a primeira suposição que os três pontos ***D***, ***O***, ***G*** não coincidem; por causa do círculo* ***ADB***, o retângulo ***FA, FB*** é igual ao retângulo ***FD***, ***FG***. Assim ***FA*** está para ***FD*** como ***FG*** para ***FB***; suas metades ***FR*** ou seu igual ***CT*** está para ***CD***, como ***CO*** está para ***RP***. Por composição, ***CT*** está para ***CT*** mais ***CD*** como ***CO*** para ***CO*** mais ***RP***. Conseqüentemente ***CT*** está para ***CO*** como ***CT*** mais ***CD*** para ***CO*** mais ***RP***. Compondo novamente, ***CT*** está para ***CT*** mais ***CO*** (que somados são iguais à ***IO***) como ***CT*** mais ***CD*** (que

* *Onde La Hire escreveu "por causa do círculo" lê-se hoje "por Potência de Ponto".*

somados são iguais à ***ID***) para ***CT*** mais ***CD*** mais ***CO*** mais ***RP***. Mas ***CT*** mais ***CD*** mais ***CO*** mais ***RP*** (que é igual a ***FR*** mais ***RP*** mais ***FC*** mais ***CO***) é igual à soma de ***FP*** e ***FO***. Assim ***CT*** está para ***IO*** como ***ID*** para ***FP*** mais ***FO***.

Da mesma maneira, retomando a proposição acima, ***CT*** para ***CD*** como ***CO*** para ***RP***. Por divisão, ***CT*** está para ***CT*** menos ***CD*** como ***CO*** para ***CO*** menos ***RP***. Conseqüentemente, ***CT*** está para ***CO*** como ***CT*** menos ***CD*** para ***CO*** menos ***RP***. Dividindo novamente, ***CT*** está para ***CT*** menos ***CO*** (que é igual à ***OT***) como ***CT*** menos ***CD*** (que é igual à ***DT***) para ***CT*** menos ***CD*** menos ***CO*** mais ***RP***. Mas ***CT*** menos ***CD*** menos ***CO*** mais ***RP*** (que é igual a ***FR*** mais ***RP*** menos ***FC*** menos ***CO***) é igual à diferença entre ***FP*** e ***FO***. Assim ***CT*** está para ***OT*** como ***DT*** para a diferença entre ***FP*** e ***FO***.

Se fizermos retângulos com as grandezas das últimas proporções encontradas nos dois últimos parágrafos e se forem tomados em ordem multiplicando cada um, teremos o quadrado de ***CT*** para o retângulo ***IO, OT*** como o retângulo ***ID, DT*** para o retângulo da soma de ***FP*** e ***FO*** pela sua diferença que é igual ao quadrado de ***PO*** pelo lema precedente.

Se os pontos ***D***, ***G*** e ***O*** coincidirem, a demonstração será a mesma, sendo ***FG***, ***FO***, e ***FD*** iguais, o que não provocará qualquer alteração.

PROPOSIÇÃO II.

As mesmas coisas anteriormente admitidas. Eu afirmo que o retângulo ***ID, DT*** é igual ao quadrado de ***CM*** que é metade do pequeno eixo.

Na figura inicial de elipse, suponha que ***MC*** seja uma ordenada. Pela proposição anterior, o quadrado de ***CT*** está para o retângulo ***IC, CT*** (que é igual ao quadrado de ***CT***) como o retângulo ***ID, DT*** para o quadrado de ***MC***. Portanto, o quadrado de ***MC*** é igual ao retângulo ***ID, DT*** (ou ***IF, FT*** que é igual a ele). É o que foi proposto.

❖ *Consulte a figura inicial de elipse.*

PROPOSIÇÃO III.

Supondo a elipse como antes. Eu afirmo que o quadrado do pequeno eixo ***NM*** está para o quadrado de grande eixo ***IT*** como o quadrado de uma ordenada ***PO*** do grande eixo para o retângulo ***IO, OT***.

Pela primeira proposição, o quadrado de ***CT*** está para o retângulo ***ID, DT*** que é igual pela proposição precedente ao quadrado de ***CM***, como o retângulo ***IO, OT*** para o quadrado de ***PO***. Mas o quadrado de ***IT*** é o quádruplo do quadrado de ***CT*** e o quadrado de ***NM*** é também o quádruplo do quadrado de ***CM***. Portanto o quadrado de ***IT*** está para o quadrado de ***NM*** como o retângulo ***IO, OT*** para o quadrado de ***PO***. É o que foi proposto.

- *Consulte a figura inicial de elipse.*

PROPOSIÇÃO IV.

Eu afirmo ainda que o quadrado de ***PQ*** (ordenada do pequeno eixo) está para o retângulo ***NQ, QM*** (as partes do mesmo eixo formadas pela interseção ***Q*** com a ordenada) como o quadrado do grande eixo ***IT*** para o quadrado do pequeno eixo ***NM***.

Pelas proposições ***1*** e ***2***, o quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***CM,*** como o retângulo ***IO, OT*** (que é igual ao quadrado de ***CT*** menos o quadrado de ***CO***) para o quadrado de ***PO***. Por divisão, o quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***CT*** menos o quadrado de ***CT*** mais o quadrado de ***CO*** como o quadrado de ***CM*** para o quadrado de ***CM*** menos o quadrado de ***PO***. Pela proposição precedente, o quadrado de ***IT*** está para o quadrado de ***NM*** como o quadrado de ***CO*** ou ***PQ*** para o retângulo ***NQ, QM*** (que é igual ao quadrado de ***CM*** menos o quadrado de ***PO*** ou ***CQ***). É o que foi proposto.

- *Consulte a figura inicial de elipse.*

DEFINIÇÕES.

9.

Na figura da proposição 5, a terceira proporcional a dois eixos é chamada de **Parâmetro** do Eixo que vem primeiro na proporção, de forma que se o grande eixo IT estiver para o pequeno eixo NM, como o pequeno eixo para a linha reta YT, esta YT será chamada de **Parâmetro do Grande Eixo**. O mesmo vale para o pequeno eixo.

10.

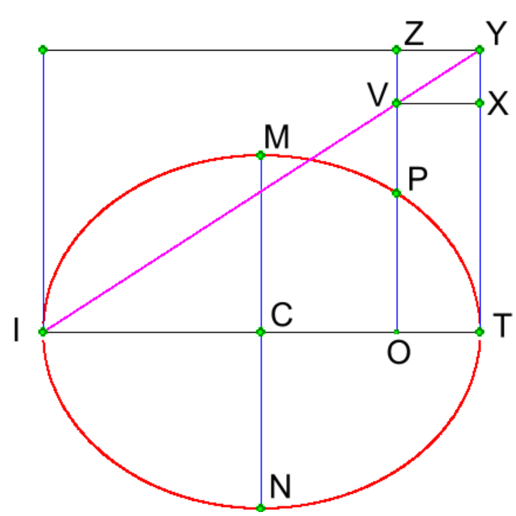
A ***Figura de um Eixo*** é um retângulo formado por este eixo e seu parâmetro, como a figura do grande eixo IT é o retângulo IT, TY.

COROLÁRIO.

É evidente que o quadrado de um dos eixos é igual à *figura* do outro eixo.

PROPOSIÇÃO V.

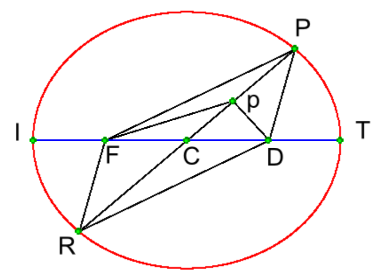
Suponha uma elipse construída como antes, o quadrado de uma ordenada ***PO*** do eixo ***IT*** é igual ao retângulo ***OTXV*** aplicado sobre o parâmetro ***TY*** deste eixo e cuja altura é a parte ***TO***, compreendida entre sua extremidade ***T*** e a interseção ***O*** com a ordenada ***PO***. O retângulo ***OTXV*** é menor que o retângulo ***OTYZ*** de um retângulo ***VXYZ*** que é semelhante e semelhantemente posicionado à figura ***IY***.



Pela proposição ***3*** (ou ***4)***, o quadrado de ***NM*** está para o quadrado de ***IT***, como o quadrado de ***PO*** para o retângulo ***IO, OT***. Pela propriedade do parâmetro, o quadrado de ***NM*** está para o quadrado de ***IT***, como ***YT*** para ***IT***. Mas* ***YT*** está para ***IT*** como também ***VO*** para ***IO***, ou melhor, o retângulo ***VO, OT*** para o retângulo ***IO, OT***, sendo ***TO*** a altura comum a ambos. Pelas razões iguais, o quadrado de ***PO*** está para o retângulo ***IO, OT,*** como o retângulo ***VOTX*** para o retângulo ***IOT***. Assim o quadrado de ***PO*** é igual ao retângulo ***OTXV***, que é igual ao retângulo ***OTYZ*** retirando o retângulo ***VY***, semelhante e semelhantemente posicionado na *figura* ***IY***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO VI.

Todos os diâmetros, como ***PR***, são divididos igualmente pelo centro ***C***.

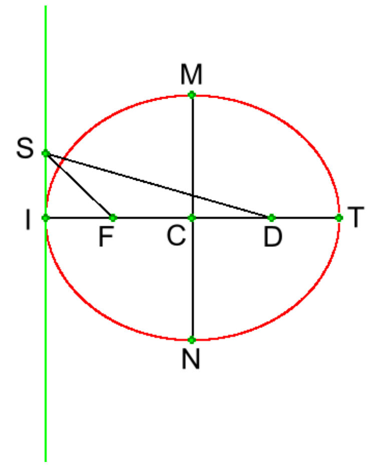


Se fosse possível que ***CP*** superasse ***CR***, faça ***Cp*** igual à ***CR***. Ao desenhar até os focos as linhas ***Fp***, ***Dp***, ***FR***, ***DR***, ***FP*** e ***DP***, os dois triângulos ***CDp*** e ***CER*** serão iguais e semelhantes, como também serão os triângulos ***CDR*** e ***CFp,*** pois ***CD***, ***CF*** e ***CR***, ***Cp*** são iguais e os ângulos opostos ao ponto C são iguais. Assim, ***FR*** é igual à ***Dp*** e ***DR*** à ***Fp***. A soma de ***Fp*** e ***Dp*** será igual à ***IT***, pois a soma de ***FR*** e ***DR*** é igual a ele, pela geração da elipse. Mas a soma de ***FP*** e ***DP*** é também igual à ***IT***, logo a soma ***Fp*** e ***Dp*** é igual à soma de ***FP*** e ***DP***, o que é um absurdo. Assim a proposição é correta.

* *Foi utilizada a semelhança dos triângulos* ***IOV*** *e* ***ITY***.

PROPOSIÇÃO VII.

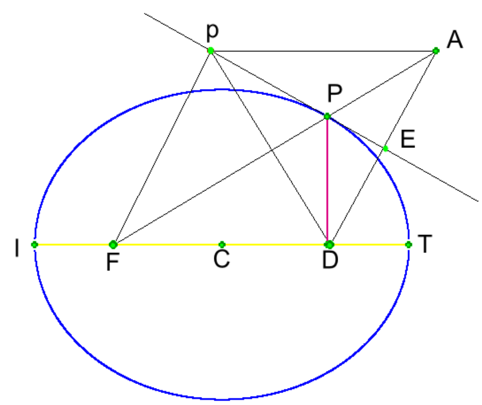
Uma linha reta ***SI*** que é perpendicular ao Grande Eixo e encontra sua extremidade **I** toca a elipse neste ponto.



Se ***SI*** não tocasse a elipse no ponto **I** apenas, ela a encontraria também em outro ponto **S**. Trace as linhas ***FS*** e ***DS*** até os focos. Pela geração, as linhas ***FS*** e ***DS*** somadas são iguais à ***IT***. Por causa do triângulo retângulo ***FIS***, ***FS**** é maior que ***FI***. Assim ***DS*** deve ser menor que ***TF*** ou seu igual ***DI***, o que é um absurdo, uma vez que ***DS*** é oposto ao ângulo reto ***I*** do triângulo ***DIS***. Portanto, a proposição é verdadeira.

PROPOSIÇÃO VIII.

As mesmas coisas sendo admitidas como na primeira proposição, trace a linha ***DA*** e divida-a em duas igualmente em ***E***. Eu afirmo que a linha ***PE*** tocará a elipse no ponto ***P***.

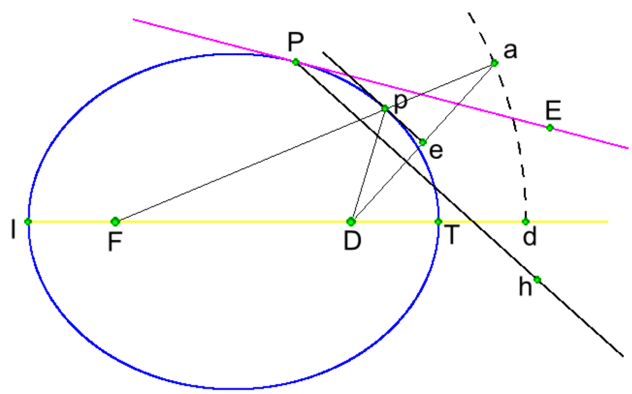


* *La Hire não usa o termo hipotenusa.*

Se ***PE*** não tocar a elipse no ponto ***P***, ela a encontrará em algum outro ponto como ***p***. Pela geração, ***Fp*** e ***pD*** somados serão iguais a ***FP*** e ***PD*** somados e ambos se igualam à ***FA***. Mas ***pD*** é igual à ***pA***, pois ***pE*** é perpendicular a ***AD*** e a divide em duas igualmente. Assim ***Fp*** e ***pA*** juntos serão iguais à ***FA,*** o que é um absurdo, pois dois lados juntos do triângulo ***FpA*** não podem ser iguais ao outro lado ***FA***. Assim a linha reta ***PE*** tocará a elipse em ***P***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO IX.

Em uma elipse ***IPT***, eu afirmo que não pode ser traçada mais que uma tangente ***PE*** por um mesmo ponto ***P***.



Suponha que fosse de outra forma e que a linha ***Ph*** tocasse também a elipse no ponto ***P.*** Do foco ***D***, trace ***Da*** perpendicular à ***Ph***. Com centro ***F*** e semidiâmetro ***Fd*** igual à ***IT***, descreva o círculo ***da*** encontrando ***Da*** em ***a***. Divida ***Da*** em duas partes igualmente em ***e***. Trace ***Fa*** que encontra a elipse em qualquer ponto ***p***. Trace ***Dp*** e ***pe*** que, passando pelo ponto médio da linha ***Da,*** será perpendicular à ***Da***, pois ***Dp*** e ***pa*** são iguais pela geração da elipse. Assim a linha ***pe*** tocará a elipse no ponto ***p***, pela proposição precedente. Mas ***Ph*** é também perpendicular à ***Da***, assim ***Ph*** e ***pe*** serão paralelas. As tangentes ***Ph*** e ***pe*** nunca se encontrarão uma com a outra exceto fora da elipse. Como a elipse passa pelos pontos ***P*** e ***p***, então a linha ***Ph*** paralela à ***pe*** encontrará necessariamente as linhas ***Fp*** e ***Dp*** no interior da elipse. ***Ph*** passa, portanto, dentro da elipse e não a tocará como foi inicialmente suposto. Esta linha não poderá coincidir com a tangente ***pe***, pois pela proposição precedente ela encontraria a elipse em dois pontos ***P*** e ***p***. Existe, portanto, apenas uma linha que tocará a elipse num mesmo ponto.

PROPOSIÇÃO X.

As mesmas coisas sendo supostas. Eu afirmo que os ângulos ***FPp*** e ***DPE***, formados pela tangente ***PE*** e pelas linhas ***PF*** e ***PD*** traçadas pelo ponto de tangência ***P,*** são iguais.

O triângulo ***DPA*** é isósceles e ***PE*** divide a base em duas igualmente. Assim o ângulo ***DPE*** é igual ao ângulo ***APE***. Mas os ângulos ***FPp*** e ***APE*** são iguais*. O ângulo ***FPp*** é, portanto, igual a ***DPE***. É o que foi proposto.

COROLÁRIO.

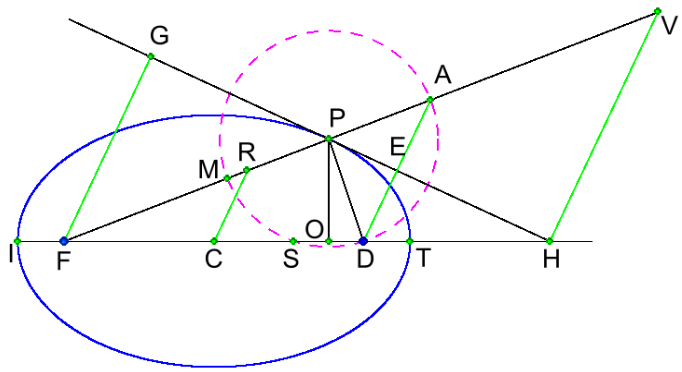
Se o ângulo comum ***FPD*** for adicionado aos dois ângulos, é evidente que o ângulo ***EPF*** será igual ao ângulo ***DPp***.

❖ *Consulte a figura da proposição **8**.*

PROPOSIÇÃO XI.

Supondo ainda as mesmas coisas, a tangente ***PE*** encontra o eixo ***IT*** em ***H***. Eu afirmo que ***CO*** está para ***CT*** como ***CT*** para ***CH***.

* *Atualmente, usaríamos o termo "Opostos pelo Vértice (**O. P. V.**)".*



Dos pontos ***F, C*** e ***H***, trace ***FG, CR*** e ***HV*** paralelas à ***DA***. ***FA*** será dividida em duas igualmente em ***R*** assim como ***FD*** é dividida em duas igualmente em ***C***. Dos triângulos semelhantes, ***FP*** está para ***AP*** como ***FG*** para ***AE*** (ou seu igual ***DE***), ***FG*** está para ***DE*** como ***FH*** para ***DH*** e ***FH*** está para ***DH*** como ***FV*** para ***VA***. Pelas razões iguais, ***FP*** está para ***PA*** como ***FV*** para ***VA***. Por divisão, ***FP*** menos ***PA*** (que é igual a duas vezes ***RP***) está para ***PA*** como ***FV*** menos ***VA*** (que é igual à ***FA***) está para ***VA***. Mas ***2RP*** está para ***FA*** como suas metades, no caso, ***RP*** para ***RA***. Pelas razões iguais, ***RP*** está para ***PA*** como ***RA*** para ***VA***. Por composição, ***RP*** está para ***RP*** mais ***PA*** (que é igual à ***RA***) assim como ***RA*** está para ***RA*** mais ***VA*** (que é igual à ***RV***). As linhas ***RP, RA*** e ***RV*** são proporções contínuas e assim o quadrado de ***RA*** é igual a retângulo ***RP, RV***.

Por causa do círculo[*] ***ASDM***, como na primeira proposição, que encontra o grande eixo em ***D*** e ***S***, ou no ponto ***O*** somente, se ***O*** e ***D*** coincidirem, então ***FD*** estará para ***FA*** como ***FM*** para ***FS***; suas metades, ***CD*** está para ***RA*** como ***RP*** para ***CO***. Mas[**] ***CD*** está para ***RA*** como ***CH*** para ***RV***. Pelas razões iguais, ***CH*** está para ***RV*** como ***RP*** para ***CO***. O retângulo dos extremos ***CH, CO*** é igual ao retângulo dos meios ***RP, RV***. Como no parágrafo precedente, o retângulo ***RP, RV*** foi demonstrado ser igual ao quadrado de ***RA*** que é igual à ***CT***; pois ***FA*** é igual à ***IT*** pela geração da elipse. Por isso ***CO*** está para ***CT*** como ***CT*** para ***CH***. **C. Q. D.**

* *Essa etapa pode ser justificada através do conceito da potência de um ponto.*

** *Já esta proporção, através do Teorema de Tales.*

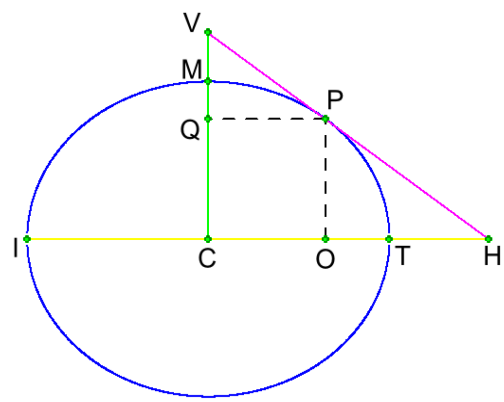
COROLÁRIO.

Como as linhas ***CO, CT*** e ***CH*** estão em proporção contínua, pode-se demonstrar que, se servindo da inversão do método de demonstração do primeiro parágrafo dessa proposição, ***IO*** está para ***OT*** como ***IH*** para ***HT***. Como foi obtido que ***FV*** está para ***VA*** como ***FP*** para ***PA,*** demonstra-se que as linhas ***RP, RA*** e ***RV*** estarão em proporção contínua.

A linha ***IH*** é dita ser dividida, pelos pontos ***O*** e ***T***, em ***3*** partes harmonicamente.

PROPOSIÇÃO XII.

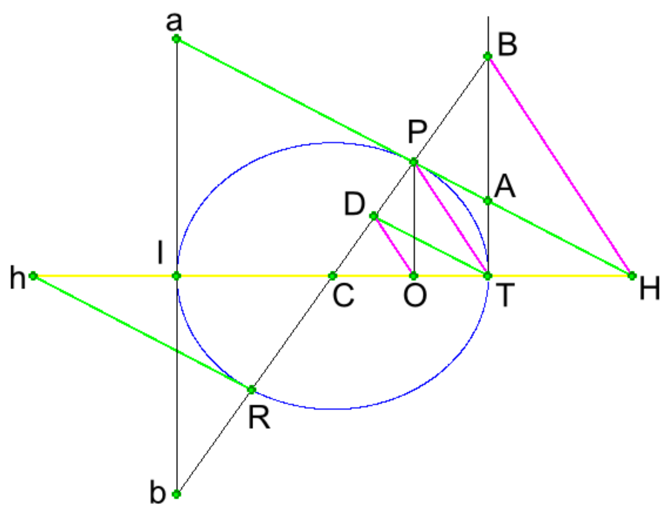
Considerando sempre as mesmas coisas. Se a tangente ***PH*** encontra o pequeno eixo em ***V***, trace ***PQ*** uma ordenada desse eixo. Eu afirmo: ***CQ*** está para ***CM*** como ***CM*** para ***CV***.



Pela proposição passada, é evidente que o quadrado de ***CO*** está para o quadrado de ***CT*** como ***CO*** para ***CH***. Mas pela proposição ***4***, o quadrado de ***CO*** ou de ***QP*** está para o quadrado de ***CT*** como o quadrado de ***CM*** menos o de ***CQ*** (pois é igual ao retângulo ***NQ, QM***) para o quadrado de ***CM***. Por causa dos triângulos semelhantes, ***CO*** está para ***CH*** como ***VQ*** para ***CV***. Pelas razões iguais, ***VQ*** está para ***CV*** como o quadrado de ***CM*** menos o quadrado de ***CQ*** para o quadrado de ***CM***. Pela divisão, ***CV*** está para ***CV*** menos ***VQ*** (que é igual à ***CQ***) como o quadrado de ***CM*** para o quadrado de ***CM*** menos o quadrado de ***CM*** mais o quadrado de ***CQ***, isto é, ***CV*** está para ***CQ*** como o quadrado de ***CM*** para o quadrado de ***CQ***. Por isso, ***CQ*** está para ***CM*** como ***CM*** está para ***CV***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XIII.

Na elipse ***IPT*** cujo eixo é ***IT***, ***BT*** é uma tangente pela extremidade ***T*** e ***PA*** é outra tangente encontrando ***BT*** em ***A*** e o eixo em ***H***. Se pelo ponto de tangência ***P*** da tangente ***PA*** for traçado o diâmetro ***CP*** que encontra a tangente em ***B***, eu afirmo que os triângulos ***PAB*** e ***TAH*** são iguais.



Pelo ponto ***T,*** trace ***TD*** paralela à tangente ***PH*** e à ordenada ***PO*** do eixo. Por causa das paralelas, ***CD*** está para ***CP*** como ***CT*** para ***CH***. Mas pela proposição ***11***, ***CT*** está para ***CH*** como ***CO*** para ***CT*** e pelas paralelas, ***CO*** está para ***CT*** como ***CP*** está para ***CB***. Pelas razões iguais, ***CD*** está para ***CP*** como ***CP*** está para ***CB***. Pela mesma razão, ***CD*** está para ***CP*** como ***CO*** está para ***CT***. Da mesma maneira, ***CP*** está para ***CB*** como ***CT*** está para ***CH***. As linhas ***DO, PT*** e ***BH*** serão, portanto, paralelas umas às outras. Os triângulos ***PTB*** e ***PTH*** têm como base comum uma das paralelas e suas alturas são limitadas pela outra paralela, logo serão iguais entre si. Dos quais se retira o triângulo comum ***PAT***, os restantes ***PAB*** e ***TAH*** serão iguais. É o que foi proposto.

COROLÁRIO I.

É evidente, pela mesma razão, que os triângulos ***PDT*** e ***POT*** são iguais entre si. Se a estes forem adicionados os triângulos iguais ***PTB*** e ***PTH***, o quadrilátero ***POTB*** será igual ao quadrilátero ***PDTH***, ou ainda pela adição dos mesmos triângulos iguais ao mesmo triângulo ***POT*** (ou o triângulo ***PDT***), o quadrilátero ***POTB*** será igual ao triângulo ***POH***, ou ainda o quadrilátero ***PDTH*** será igual ao triângulo ***DTB***. É também visível que, pela mesma razão, o triângulo ***CTB*** é igual ao triângulo ***CPH***.

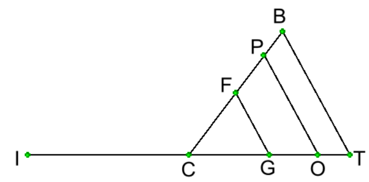
COROLÁRIO II.

Trace a tangente ***Ib***. É evidente que os triângulos ***Pab*** e ***IaH*** são iguais. Pois ***Ib*** é paralela à ***BT***, assim os triângulos ***CIb*** e ***CTB*** são semelhantes e como o lado ***CI*** de um é igual ao lado homólogo ***CT*** do outro, eles serão também iguais. Portanto, o triângulo ***CIb*** será igual ao triângulo ***CPH*** que é igual ao triângulo ***CTB***. Se a estes triângulos iguais for adicionado o quadrilátero comum ***ICPa***, os triângulos ***Pab*** e ***IaH*** serão iguais. Mas é ainda mais evidente que aquilo que foi demonstrado para triângulos compreendidos entre as linhas ***CT*** e ***CP*** pode ser demonstrado da mesma forma para ***CI*** e ***CR***. Assim a tangente no ponto ***R*** deve ser paralela à tangente ***PH***. Pois o triângulo ***CPH*** é igual ao triângulo ***CTB*** que é igual ao triângulo ***CIb***. E supondo que a tangente em ***R*** encontre o eixo em ***h***, pode-se demonstrar, da mesma maneira acima, que o triângulo ***CIb*** é igual ***CRh***. Assim pelas razões iguais, o triângulo ***CRh*** é igual ao triângulo ***CPH***. Mas nesses triângulos iguais, o ângulo ***RCI*** é igual ao ***PCH*** e o lado ***CR*** um dos lados que forma o ângulo é igual ao lado ***CP*** do outro, pela proposição ***6***. Assim os triângulos são semelhantes*, mas contrariamente posicionados, ***Rh*** portanto é paralelo à ***PH*** seu lado homólogo.

LEMA.

Seja um triângulo ***CTB*** cujo lado ***CT*** é prolongado até ***I*** e ***CI*** igual à ***CT***. De pontos ***O*** e ***G*** quaisquer no lado ***CT***, trace ***OP*** e ***GF*** paralelas à ***TB***. Eu afirmo que o retângulo ***IO, OT*** está para o retângulo ***IG, GT*** como o quadrilátero ***OTBP*** para o quadrilátero ***GTBF***.

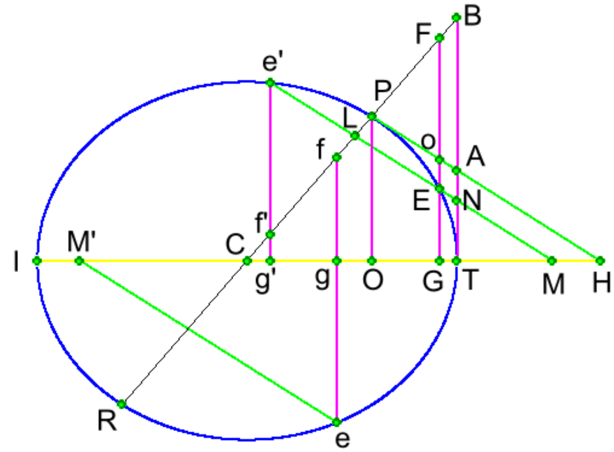
* *Para provar a congruência entre CRh e CPH, La Hire utiliza um lado congruente (CR e CP), um ângulo congruente (RCI e PCH) e uma área igual. Esta última acarreta uma altura congruente, o que é suficiente para provar a congruência. A semi-reta que parte da extremidade do segmento congruente e que forma o ângulo congruente com o lado tem interseção única com a paralela cuja distância para o segmento é a altura comum.*



O quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***CO*** como o triângulo ***CTB*** para o triângulo ***COP***. Por divisão, o quadrado de ***CT*** menos o quadrado de ***CO*** está para o quadrado de ***CT*** como o triângulo ***CTB*** menos o triângulo ***COP*** para o triângulo ***CTB***. Da mesma maneira, o quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***CG*** como o triângulo ***CTB*** para o triângulo ***CGF***. Por divisão, o quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***CT*** menos o quadrado de ***CG*** como o triângulo ***CTB*** para o triângulo ***CTB*** menos o triângulo ***CGF***. Por causa das razões iguais, o quadrado de ***CT*** menos o quadrado ***CO*** está para o quadrado de ***CT*** menos o quadrado de ***CG*** como o triângulo ***CTB*** menos o triângulo ***COP*** (que é igual ao quadrilátero ***OTBP***) para o triângulo ***CTB*** menos o triângulo ***CGF*** (que é igual ao quadrilátero ***GTBF***). Mas o quadrado de ***CT*** menos o quadrado de ***CO*** é igual ao retângulo ***IO, OT***. Da mesma forma, o quadrado de ***CT*** menos o quadrado de ***CG*** é igual ao retângulo ***IG, GT***, pois o ponto ***C*** divide igualmente ***IT***. Assim o retângulo ***IO, OT*** está para o retângulo ***IG, GT*** como o quadrilátero ***OTBP*** para o quadrilátero ***GTBF***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XIV.

As mesmas coisas sendo admitidas como nas proposições precedentes. Se por qualquer ponto ***E*** da elipse for traçada ***LEM*** paralela à tangente ***PH*** e ***FEG*** paralela à tangente ***BT***, eu afirmo que o triângulo ***EGM*** é igual ao quadrilátero ***GTBF***.



Por causa das paralelas, o triângulo ***POH*** está para o triângulo ***EGM*** como o quadrado de ***PO*** para o quadrado de ***EG.*** Mas pela terceira proposição, é evidente que o quadrado de ***PO*** está para o quadrado de ***EG*** como o retângulo ***IO, OT*** para retângulo ***IG, GT***. Como ***IT*** é dividida igualmente em duas por ***C*** e pelo lema precedente, o retângulo ***IO, OT*** está para o retângulo ***IG, GT*** como o quadrilátero ***OTBP*** para o quadrilátero ***GTBF***. Pelas razões iguais, o triângulo ***POH*** está para triângulo ***EGM*** como o quadrilátero ***OTBP*** para o quadrilátero ***GTBF***. Mas pelo corolário ***1*** da proposição precedente, o triângulo ***POH*** é igual ao quadrilátero ***OTBP***. Portanto, o triângulo ***EGM*** é igual ao quadrilátero ***GTBF***. É o que se desejava demonstrar.

Demonstrando da mesma forma, se o ponto ***E*** estiver com em ***e*** (mesma figura acima), o triângulo ***egM*** será igual ao quadrilátero ***gTBf***, pois ***eg*** é admitida como uma ordenada do eixo.

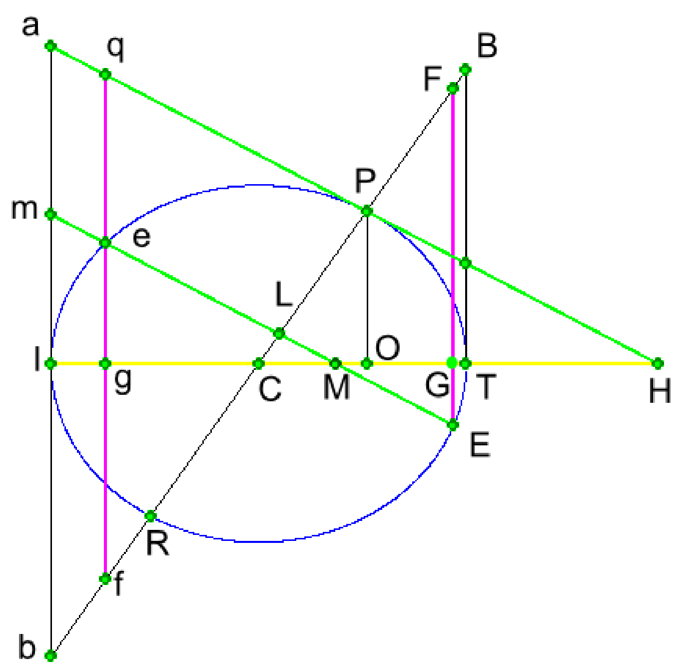
E se o ponto ***g*** cortar o eixo em algum lugar de ***CI*** (figura da proposição **15**) pode ser demonstrado, seguindo da mesma forma, que o triângulo ***egM*** é igual ao quadrilátero ***gIbf,*** pois a mesma demonstração servirá para todos, considerando somente o que foi dito no corolário ***2*** da proposição passada.

PROPOSIÇÃO XV.

As mesmas coisas sendo admitidas. Eu afirmo que o triângulo ***ELF***, ou ainda ***eLf***, é igual ao quadrilátero ***LPHM***.

Pelo corolário ***1*** da proposição ***13***, o triângulo ***CTB*** é igual ao triângulo ***CPH*** (veja figura anterior). Destes dois triângulos iguais, retira-se o quadrilátero comum ***CGEL***. Tirando ainda do primeiro triângulo o quadrilátero ***GTBF*** e do segundo, o triângulo ***EGM*** (igual a este quadrilátero, pela proposição precedente), então sobrará o triângulo ***ELF*** igual ao quadrilátero ***LPHM***. É o que foi proposto.

Se o ponto ***E*** estiver no outro lado de ***T*** em relação a ***P*** e o ponto ***L*** estiver sempre sobre ***CP***. Dos triângulos iguais ***CTB*** e ***CPH,*** subtrai-se o triângulo comum ***CML***. Do primeiro remanescente, retira-se o quadrilátero ***GTBF*** e adiciona-se seu igual, o triângulo ***EGM***. Obtém-se o triângulo ***ELF*** igual ao quadrilátero ***LPHM***. É o que foi proposto.

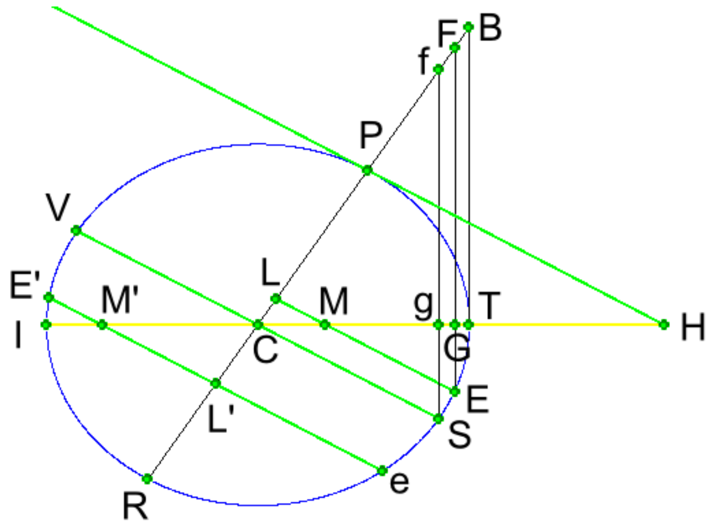


Mas se o ponto ***E*** estiver sobre ***e'*** no outro lado de ***P*** com relação a ***T*** (figura da proposição **14**) e a ordenada ***e'g'*** estiver sobre ***CT.*** Pela proposição ***14***, o triângulo ***e'g'M'*** é igual ao quadrilátero ***g'TBf'***. Se desses iguais, a figura comum ***f'g'GEL*** for retirada e ainda, se o triângulo ***EGM*** for retirado do primeiro e o quadrilátero ***GTBF*** (igual ao triângulo ***EGM***) for retirado do segundo, então sobra o triângulo ***e'f'L*** igual ao ***EFL***. Mas o triângulo ***EFL*** foi demonstrado acima ser igual ao quadrilátero ***LPHM***. Assim, o triângulo ***e'f'L*** é igual a ***LPHM***. É o que foi proposto.

Mas se no caso precedente, o ponto ***M*** estiver sobre o eixo entre o centro e a extremidade ***T*** (figura da prop. ***16***), o triângulo ***egM*** será igual ao quadrilátero ***gTBf***. Se o quadrilátero comum ***fgML*** for retirado destes iguais, sobrará o triângulo ***eLf*** igual ao quadrilátero ***LMTB***, do qual se retira ***GTBF*** e se adiciona o triângulo igual ***EGM***. Tem-se que triângulo ***ELF*** será igual ao quadrilátero ***LMTB***. Conseqüentemente, o triângulo ***eLf*** é igual ao triângulo ***ELF*** que é igual ao quadrilátero ***LPHM***, como foi demonstrado acima. É o que foi proposto.

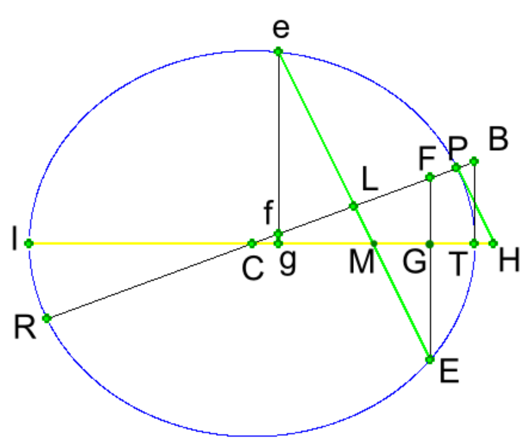
Enfim, se o ponto ***g*** estiver sobre ***IC*** (figura acima). Pelo corolário ***1*** da proposição ***13***, o triângulo ***aPb*** é igual ao triângulo ***aIH***. Se destes iguais for retirada a figura comum ***aPLegIa***, do primeiro retira-se ainda o quadrilátero ***gIbf*** e do segundo o triângulo igual ***egM*** (pela proposição ***14***), então sobrará o triângulo ***eLf*** igual ao quadrilátero ***LPHM***. É o que foi proposto.

Para todos os outros casos onde o ponto ***L*** estiver sobre ***CR*** (figura seguinte), a demonstração será a mesma, como se pode facilmente perceber, considerando o que foi dito no corolário ***2*** da proposição ***13***. Se o ponto ***L*** coincidir com ***C***, o ponto ***E*** estará em ***S*** ou ***V*** (a linha ***VCS*** sendo paralela à ***PH***). O triângulo ***CfS*** será então igual ao triângulo ***CPH***; o que eu penso ser mais do que suficiente para a demonstração da proposição.



PROPOSIÇÃO XVI.

Na elipse cujo eixo é ***IT***, todas as linhas retas (como ***Ee***) paralelas à tangente ***PH*** (que encontra o eixo em ***H***) são divididas em duas igualmente em ***L*** pelo diâmetro ***RCL*** traçado pelo ponto ***P*** de tangência.



Ao colocar as coisas conforme a proposição anterior, é evidente pela mesma proposição que os triângulos ***ELF*** e ***eLf*** são iguais entre si, pois cada um deles é igual ao quadrilátero ***LPHM***. Eles são também semelhantes, por causa das paralelas que os compõem. Portanto ***EL*** é igual à ***eL***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XVII.

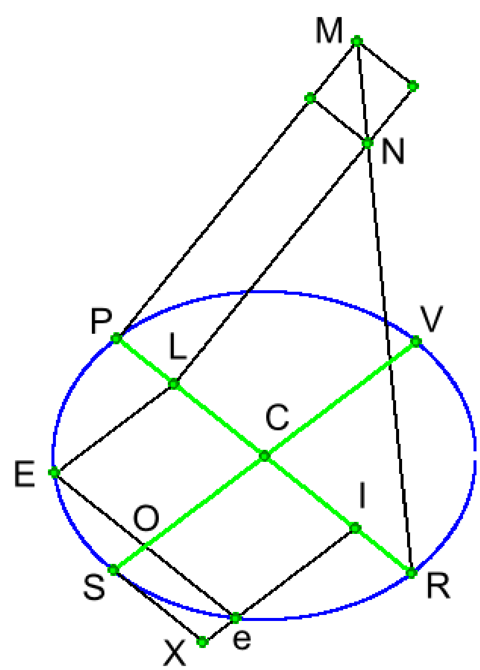
As mesmas coisas sendo admitidas. Se o diâmetro ***VCS*** for traçado paralelo à tangente ***PH***, eu afirmo que o quadrado de ***VS*** está para o quadrado de ***RP*** como o quadrado de ***EL*** para o retângulo ***RL, LP***. (segunda figura da proposição **15**)

Pela proposição ***14***, O triângulo ***CSf*** é igual ao triângulo ***CPH***. O triângulo ***LEF*** é igual ao quadrilátero ***LPHM***. Estes triângulos ***CSf*** e ***LEF*** são semelhantes. Assim eles estão um para o outro como o quadrado de ***CS*** para o quadrado de ***LE***. O quadrado de ***CS*** estará, portanto, para o quadrado de ***LE*** como o triângulo ***CPH*** para o quadrilátero ***LPHM***. Mas porque ***RP*** é dividida em duas igualmente por ***C***, o triângulo ***CPH*** está para o quadrilátero ***LPHM*** como o quadrado de ***CP*** para o retângulo ***RL, LP***, pelo lema da proposição ***14***. Assim, o quadrado de ***CS*** está para o quadrado de ***LE*** como o quadrado de ***CP*** para o retângulo ***RL, LP***. Ou melhor, o quadrado de ***CS*** está para o quadrado de ***CP*** (ou seus quádruplos) o quadrado de ***VS*** está para o quadrado de ***RP,*** como o quadrado de ***LE*** para o retângulo ***RL, LP***.

Se o ponto ***E*** estiver em ***e*** e ***L*** estiver em ***L'*** sobre ***CR***, prolongue ***eL'*** até ***E'***. Demonstra-se, da mesma forma, que o quadrado de ***L'E'*** está para o retângulo ***RL', L'P*** como o quadrado de ***VS*** está para o quadrado de ***RP***. Mas pela proposição precedente, ***eL'*** é igual à ***E'L'***. É por isso que a proposição é verdadeira em todos os casos.

PROPOSIÇÃO XVIII.

Supondo sempre as mesmas coisas. Se a linha reta ***Ee*** for traçada paralela ao diâmetro ***RP***, eu afirmo que ***Ee*** é dividida em duas igualmente em ***O*** pelo diâmetro ***VS*** e que o quadrado do diâmetro ***PR*** está para o quadrado do diâmetro ***VS*** como o quadrado de ***EO*** está para o retângulo ***VO, OS***.



Trace ***EL*** e ***el*** paralelas à ***VS***. Pela proposição passada, o quadrado de ***EL*** está para o retângulo ***RL, LP*** como o quadrado de ***el*** para o retângulo ***Rl, lP***. Mas ***EL*** e ***el*** são iguais. Assim o retângulo ***RL, LP*** se iguala ao retângulo ***Rl, lP***. Conseqüentemente as linhas ***CL*** e ***Cl*** são iguais, como também seus iguais ***EO*** e ***eO***, que era a primeira parte da proposição.

A segunda parte, pela proposição passada, o quadrado de ***CP*** está para o quadrado de ***CS*** como o quadrado de ***CP*** menos o quadrado de ***CL*** (igual ao retângulo ***RL, LP***) para o quadrado de ***LE.*** Por divisão, o quadrado de ***CP*** está para o quadrado de ***CP*** menos o retângulo ***RL, LP*** (igual ao quadrado de ***CL*** ou seu igual ***EO***) como o quadrado de ***CS*** para o quadrado de ***CS*** menos o quadrado de ***LE*** ou seu igual ***CO*** (que é igual ao retângulo ***VO, OS***). O quadrado de ***CP*** estará, portanto, para o quadrado de ***CS,*** ou melhor, seus quádruplos, o quadrado de ***RP*** para o quadrado de ***VS*** como o quadrado de ***EO*** para o retângulo ***VO, OS***. É o que foi proposto.

COROLÁRIO.

É evidente que a linha ***SX*** paralela à ***OE***, traçada pela extremidade ***S*** do diâmetro ***VS,*** toca a elipse no ponto ***S***, o que é o contrário das proposições passadas.

DEFINIÇÕES.

11.

Os diâmetros RP e VS cujas propriedades estão demonstradas nas duas proposições anteriores são chamados **Conjugados** um do outro.

12.

A linha reta EL paralela ao diâmetro VS, é chamada **Ordenada** do outro diâmetro RP e reciprocamente EO é uma **Ordenada** de VS.

13.

Se você faz RP para VS como VS para PM, esta terceira proporcional PM é chamada **Parâmetro** do diâmetro RP. Da mesma maneira para o diâmetro VS. É aparente que os dois diâmetros conjugados são os meios proporcionais entre seus parâmetros.

14.

O retângulo formado pelo diâmetro RP e seu parâmetro PM (como RM) é chamado a **Figura** deste diâmetro RP.

PROPOSIÇÃO XIX.

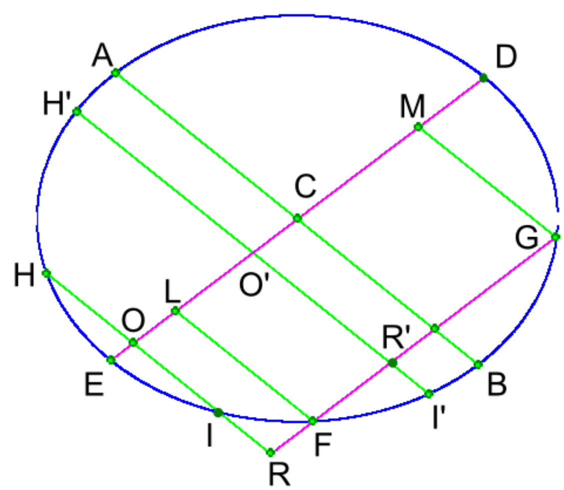
O quadrado de uma ordenada ***EL*** do diâmetro ***RP*** é igual ao retângulo ***PN*** aplicado sobre o parâmetro ***PM*** deste diâmetro e cuja altura é a parte ***PL*** do seu diâmetro, compreendida entre sua extremidade ***P*** e a ordenada ***EL***. O retângulo ***PN*** é menor que o retângulo ***MP, PL*** de um retângulo ***NM*** que é semelhante e posicionalmente semelhante à *figura* ***RM***.

Pelas duas proposições anteriores, o quadrado de ***RP*** está para o quadrado de ***VS*** como o retângulo ***RL, LP*** para o quadrado de ***LE.*** Mas o quadrado de ***RP*** está para o quadrado de ***VS*** como ***RP*** para ***PM*** e ***RP*** está para ***PM*** como ***RL*** para ***LN****. Mas o retângulo ***RL, LP*** está para o retângulo ***NL, LP*** como ***RL*** para ***NL***. Assim o retângulo ***RL, LP*** está para o quadrado de ***LE*** como o retângulo ***RL, LP*** para o retângulo ***PN***. O quadrado de ***EL*** é, portanto, igual ao retângulo ***PN***. É o que foi proposto.

- *Consulte a figura anterior.*

PROPOSIÇÃO XX.

Se na elipse ***ADBE***, duas linhas retas ***HI*** e ***FG*** forem traçadas paralelas a dois diâmetros conjugados ***AB*** e ***DE***, se encontrando em um ponto ***R*** fora da elipse. Eu afirmo que o retângulo ***HR, RI*** está para o retângulo ***FR, RG*** como o quadrado de ***AB*** para o quadrado de ***DE***.



Trace ***FL*** e ***GM*** ordenadas do diâmetro ***ED***. Elas serão paralelas à ***AB***, pela proposição ***16*** ou ***17***. Pelas mesmas, o quadrado de ***LF*** está para o quadrado de ***OI*** como o retângulo ***EL,***

* *Semelhança dos triângulos **RPM** e **RLN**.*

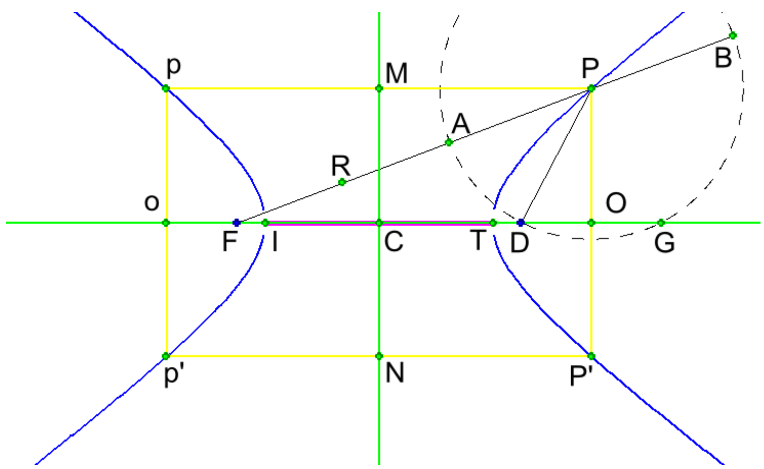
LD para o retângulo ***EO, OD***. Se o ponto ***R*** estiver fora da elipse, pela divisão, o quadrado de ***LF*** menos o quadrado de ***OI*** (igual ao retângulo ***HR, RI***) está para o quadrado de ***OI*** como o retângulo ***EL, LD*** menos o retângulo ***EO, OD*** (igual ao retângulo ***LO, OM***, ou melhor, o retângulo ***FR, RG***) para o retângulo ***EO, OD***. Mas se o ponto ***R*** estiver dentro da elipse, pela divisão, o quadrado de ***OI*** menos o quadrado de ***LF*** ou de ***OR*** (igual ao retângulo ***HR, RI***) está para o quadrado de ***OI*** como o retângulo ***EO, OD*** menos o retângulo ***EL, LD*** (igual ao retângulo ***LO, OM***, ou melhor, o retângulo ***FR, RG***) para o retângulo ***EO, OD***. Mas pela mesma proposição ***17***, o quadrado de ***OI*** está para o retângulo ***EO, OD*** como o quadrado de ***AB*** para o quadrado de ***ED.*** Assim, o retângulo ***HR, RI*** está para o retângulo ***FR, RG*** como o quadrado de ***AB*** para o quadrado de ***DE***. É o que foi proposto.

PARTE 3 – A HIPÉRBOLE

A GÊNESE DA HIPÉRBOLE.

Se, sobre um plano, for traçada uma linha reta ***IT*** que o ponto ***C*** divide em duas igualmente e os pontos ***F*** e ***D*** forem tomados sobre a mesma linha prolongada pelos dois lados igualmente distantes de ***C***. Eu afirmo que se podem encontrar tantos pontos quantos se queiram, como ***P*** e ***p***, de tal forma que a linha reta ***PF*** exceda ***PD*** da grandeza de ***IT***, ou ainda, que ***pD*** exceda sempre ***pF*** da mesma grandeza de ***IT***.

Tome ***FP*** tão grande quanto você queira, desde que ele não seja menor que ***FT***. A diferença entre ***FP*** e ***IT*** será sempre maior, ou pelo menos igual à ***DT***. Assim, se o ponto ***F*** for o centro de um círculo com semidiâmetro ***FP*** e se ***D*** for o centro de outro círculo com semidiâmetro ***DP***, estes dois círculos irão necessariamente se interceptar em dois pontos, como ***P*** e ***P’***, em cada lado da linha ***IT***. Ou, pelo menos, se tocarão no ponto ***T (***ou ***I)***, no caso de ***P*** e ***T*** coincidirem (***p*** e ***I***). Podem-se encontrar diferentes pontos ***P***, se forem tomadas diferentes linhas ***FP***. Da mesma forma, tantos pontos ***p*** quantos forem desejados.



COROLÁRIO.

É evidente a partir desta geração que a linha reta que une os dois pontos ***P*** e ***P’*** (***p*** ou ***p’***), as interseções dos dois círculos, será perpendicular à ***FD*** e será dividida em duas igualmente pela mesma linha ***FD***. É ainda evidente que os pontos ***P*** formarão uma linha que passará por ***T*** e os outros pontos ***p,*** uma outra que passará por ***I***. Vê-se ainda que as linhas ***PTP'*** e ***pIp'*** não incluirão o espaço*, nem ambas juntas, nem cada uma isoladamente. Elas se estendem infinitamente, se afastando sempre da linha reta ***IT*** e do ponto ***C***, uma de um lado e a outra do outro.

DEFINIÇÕES.

1.

As linhas curvas PTP' e pIp' são denominadas, cada uma delas separadamente, **Hipérbole** e conjuntamente, **Hipérboles opostas**.

2.

O ponto C, **Centro** da hipérbole ou das hipérboles Opostas.

3.

A linha reta IT, **Eixo Determinado** (hoje também conhecido como "Eixo Real").

4.

A linha reta NCM que passa pelo centro C e é perpendicular a IT, **Eixo Indeterminado** (hoje também conhecido como "Eixo Imaginário").

5.

Os pontos F e D, os **Focos**.

6.

As linhas retas, como PO, traçadas dos pontos de uma hipérbole (ou das hipérboles Opostas) e perpendiculares a um dos eixos, são denominadas **Ordenadas** desse eixo**.**

7.

Todas as linhas retas que passam pelo centro C são chamadas **Diâmetros**. Aquelas que encontram as hipérboles Opostas são os **Determinados** e as outras, **Indeterminados**.

* *Ele quer dizer que os ramos da hipérbole são curvas abertas.*

8.

Uma linha reta que encontra a hipérbole em apenas um ponto e que não passa no seu interior é chamada **Tangente** nesse ponto.

PROPOSIÇÃO I.

A hipérbole estando formada. Eu afirmo que o quadrado da ordenada ***PO*** do eixo determinado ***IT*** está para o retângulo ***IO, OT*** (as partes do eixo formadas pela sua interseção ***O*** com a ordenada e pelas extremidades deste eixo) como o retângulo ***IF, FT*** (ou ***TD, DI*** que é igual a ele) para o retângulo ***IC, CT*** (que é o quadrado de ***CT***).

Na figura inicial, trace ***FP*** e prolongue-a até ***B***, de tal forma que ***PB*** seja igual à ***PD***. Tendo o ponto ***P*** como centro e com o semidiâmetro ***PD***, descreva o círculo ***BGD***, encontrando ***FP*** em ***A*** e ***IT*** em ***D*** e ***G***. ***FA*** será igual à ***IT***, pela geração, sendo dividida em duas igualmente em ***R***. Por causa do círculo ***ADGB***, o retângulo ***FA, FB*** é igual ao retângulo ***FD, FG***. Assim, ***FA*** está para ***FD*** como ***FG*** para ***FB***; suas metades, ***FR*** (ou seu igual ***CT***) está para ***CD*** como ***CO*** para ***RP***. Por composição, ***CT*** está para ***CT*** mais ***CD*** como ***CO*** para ***CO*** mais ***RP***, ou ainda, ***CT*** está para ***CO*** como ***CT*** mais ***CD*** para ***CO*** mais ***RP***. Por nova composição, ***CT*** está para ***CT*** mais ***CO*** (igual à ***IO***) assim como ***CT*** mais ***CD*** (igual à ***ID***) para ***CT*** mais ***CD*** mais ***CO*** mais ***RP***. Mas ***CT*** mais ***CD*** mais ***CO*** mais ***RP*** (ou seus iguais, ***FR, FC, CO e RP***) são iguais à soma ***FP + FO***. Assim ***CT*** está para ***IO*** como ***ID*** para ***FP*** e ***FO*** unidos.

Da mesma forma, retomando a proposição acima, ***CT*** está para ***CD*** como ***CO*** para ***RP***. Por divisão, ***CT*** está para ***CD*** menos ***CT*** como ***CO*** para ***RP*** menos ***CO*** e ***CT*** está para ***CO*** como ***CD*** menos ***CT*** para ***RP*** menos ***CO***. Mas ainda por divisão, ***CT*** está para ***CO*** menos ***CT*** (igual à ***OT***) como ***CD*** menos ***CT*** (igual à ***DT***) para ***RP*** menos ***CO*** menos ***CD*** mais ***CT***. Mas

RP menos ***CO*** menos ***CD*** mais ***CT*** (ou seus iguais ***RP*** menos ***CO*** menos ***FC*** mais ***FR***) é igual à diferença entre ***FP*** e ***FO***. Assim ***CT*** está para ***OT*** como ***DT*** para ***FP*** menos ***FO***.

Se fizermos retângulos tomados em ordem com as grandezas das últimas proporções encontradas nos dois últimos parágrafos, teremos o quadrado de ***CT*** para o retângulo ***IO, OT*** como o retângulo ***ID, DT*** para o retângulo formado pela soma entre ***FP*** e ***FO*** e pela diferença dos mesmos, que é igual ao quadrado de ***PO*** pelo lema da proposição ***1*** de elipse. É o que devia ser demonstrado.

Se o círculo ***BDA*** tocar ***IT*** em ***D***, isto é, se o ponto ***O*** coincidir com ***D***, que é a mesma coisa, a demonstração será a mesma, mas ainda mais simples, pois quantidades diferentes tornar-se-ão iguais.

COROLÁRIO.

É evidente que os quadrados das ordenadas do eixo estão entre si como os retângulos contidos sob as partes deste eixo compreendidas entre suas extremidades e os pontos onde ele encontra as mesmas ordenadas.

PROPOSIÇÃO II.

A linha reta ***Pp,*** traçada entre as hipérboles opostas e paralela ao eixo determinado ***IT***, encontra o eixo indeterminado ***NM*** em um ponto ***M*** que a divide em duas igualmente.

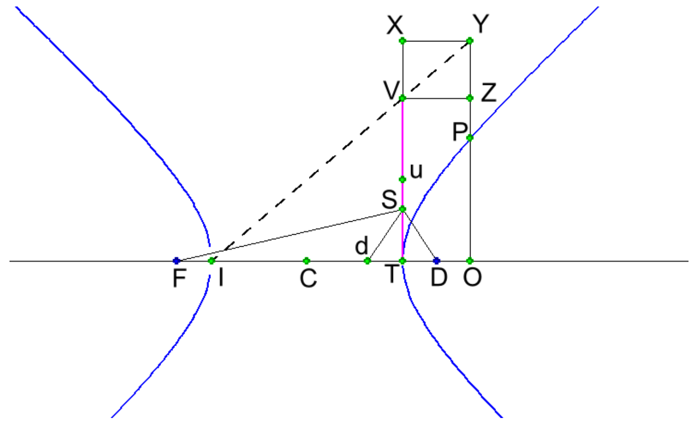
Esta proposição é suficientemente evidente a partir da geração, pois se ***D*** for feito o centro de um círculo e ***FP*** seu semidiâmetro e se ***F,*** o centro de outro círculo e ***DP*** seu semidiâmetro. Assim*, estes dois círculos se interceptarão no ponto ***p***, de tal forma que ***po,*** sendo uma ordenada do eixo ***IT***, será igual à ***PO*** e igualmente ***pM*** será igual à ***PM***.

- *Consulte a figura inicial.*

DEFINIÇÕES 9 e 10.

Se você faz o quadrado de CT para o retângulo ID, DT como CT para Tu, a linha TV (o dobro de Tu) é chamada **Parâmetro** do Eixo Determinado.

* *Para justificar por que **PM = MP'**, usa-se a congruência de triângulos **FDP** e **FDp**.*



O retângulo IV formado pelo eixo IT e seu parâmetro é chamado **Figura** do eixo IT.

COROLÁRIO.

É evidente que a *figura* ***IV*** é igual a ***4*** vezes o retângulo ***ID, DT***, pois ***IT*** está para ***TV*** como o quadrado de ***IT*** está para quatro retângulos ***ID, DT***.

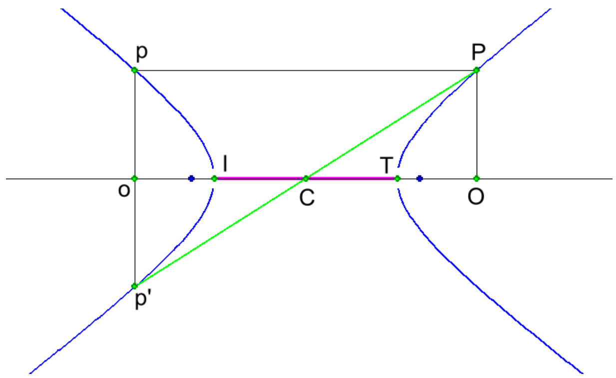
PROPOSIÇÃO III.

O quadrado da ordenada ***PO*** do eixo determinado ***IT*** é igual ao retângulo ***OTXY*** aplicado sobre o parâmetro ***TV*** e cuja altura é a parte ***TO*** desse eixo, compreendida entre a sua extremidade ***T*** e sua interseção ***O*** com a ordenada O retângulo ***OTXY*** excede o retângulo ***OTVZ*** de um retângulo ***VZYX*** que é semelhante e semelhantemente colocado na *figura* de ***IT***.

As mesmas coisas propostas como acima. Pela proposição ***1***, o quadrado de ***CT*** está para o retângulo ***ID, DT*** como o retângulo ***IO, OT*** para o quadrado de ***PO.*** Mas pela definição de *figura****,*** o quadrado de ***CT*** está para o retângulo ***ID, DT*** como o quadrado de ***IT*** para a *figura*, ou como ***IT*** para ***TV***. Pelas razões iguais, ***IT*** está para ***TV*** como o retângulo ***IO, OT*** para o quadrado de ***PO.*** Mas o retângulo ***IO, OT*** está para o retângulo ***YO, OT*** como ***IO*** para ***YO*** assim como ***IT*** para ***TV***. Por causa das razões iguais, o retângulo ***IO, OT*** está para o quadrado de ***PO*** como o retângulo ***IO, OT*** para retângulo ***YO, OT***. Conseqüentemente, o retângulo ***YO, OT*** é igual ao quadrado de ***PO***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO IV.

Se for traçado o diâmetro ***PC*** por qualquer ponto ***P*** de uma das hipérboles opostas. Eu afirmo que ele, sendo prolongado além de ***C***, encontrará a outra hipérbole oposta e o ponto ***C*** o dividirá em dois igualmente.



Trace ***PO*** uma ordenada do eixo ***IT*** e faça ***Co*** igual à ***CO***. Trace ***pop'*** ordenadas dos dois lados do eixo. É evidente, pela proposição ***2***, que ***p'o*** é igual à ***PO***. Ela é também perpendicular à ***oO***. Assim*, ***p'P*** passará pelo centro e formará apenas uma linha reta com ***PC*** que foi inicialmente desenhada. Ela será também dividida em duas igualmente em ***C***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO V.

Uma perpendicular ***TX***, traçada em relação ao eixo e que encontra sua extremidade ***T***, toca a hipérbole neste ponto.

Suponha que ***XT*** não toque a hipérbole, mas a encontre em algum outro ponto ***S***, que é diferente de ***T***, se for possível. Tome ***Td*** igual à ***TD***, ***Fd*** será igual à ***IT*** e ***Sd*** será igual à ***SD***. Mas pela geração da hipérbole, ***IT*** e ***SD*** juntos (ou ainda seus iguais ***Fd*** e ***Sd***) são iguais à ***FS*** que é um lado do triângulo ***FSd*** igual à soma dos dois outros lados ***Fd*** e ***dS***, o que é um absurdo. Portanto, a perpendicular ***XT*** não encontra a hipérbole, exceto no ponto ***T***. Eu afirmo

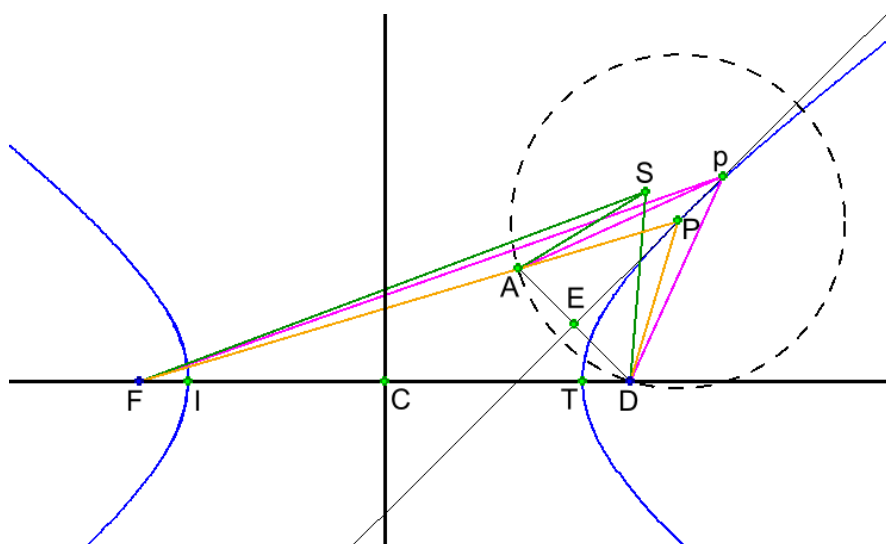
* *Para uma justificativa mais detalhada, poderia ser usada a congruência dos triângulos **Cop'** e **COP**.*

também que ***XT*** não pode passar no interior da hipérbole, quando prolongada, pois pela geração da hipérbole, é evidente que a hipérbole se afasta mais e mais do eixo indeterminado que é paralelo à ***XT***. Portanto, a linha ***XT*** toca a hipérbole em ***T***. É o que foi proposto.

❖ *Veja figura da proposição **2**.*

PROPOSIÇÃO VI.

As mesmas coisas admitidas como na primeira proposição. Se ***DA*** for traçada e dividida em duas igualmente em ***E***, eu afirmo que a linha ***PE*** tocará a hipérbole no ponto ***P***.



Suponha que seja de outra forma e que ***PE*** encontre a hipérbole em qualquer outro ponto ***p***, se possível. Pela geração da hipérbole, a diferença das linhas ***Fp*** e ***pD*** é igual à diferença das linhas ***FP*** e ***PD*** que é igual a ***FA***. Mas, pela hipótese, ***PE*** é perpendicular à ***AD*** e a corta em duas igualmente em ***E***. Assim ***pA*** é igual à ***pD***. Tem-se, portanto, a diferença entre os lados ***Fp*** e ***pA*** igual ao outro lado ***FA***, o que é um absurdo.

Mas se a linha reta ***EP,*** prolongada além de ***P***, estiver sempre no interior da hipérbole, é nítido que a hipérbole passará no outro lado de ***EP*** com relação ao eixo ***IT***. Portanto, trace de qualquer um dos seus pontos, como ***S***, as linhas ***SF*** e ***SD*** até os focos. Pela geração, a linha

IT (ou ***FA*** que é igual a ela) juntamente com ***SD*** será igual á ***SF***. Mas estando o ponto ***S*** do outro lado da linha ***EP*** em relação ao ponto ***D***, a linha ***SA*** deve ser menor que ***SD***. Assim ***SA*** e ***FA*** juntos serão menores que ***SF,*** o que é um absurdo, pois as três linhas são lados do triângulo ***FAS***. A proposição é, portanto, verdadeira.

PROPOSIÇÃO VII.

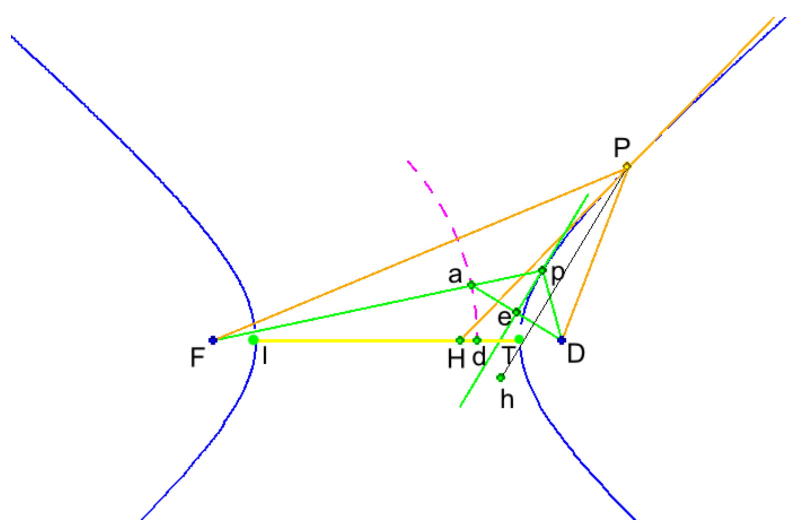
Se a linha reta ***PE*** tocar a hipérbole no ponto ***P*** e ***PF*** e ***PD*** forem traçadas até os focos, eu afirmo que os ângulos ***FPE*** e ***DPE*** são iguais.

Com centro ***P***, descreva o círculo ***DA*** com semidiâmetro ***PD***. Pela proposição ***6***, o triângulo ***DPA*** é isósceles e ***PE*** corta a base em duas igualmente. Assim o ângulo ***DPE*** é igual ao ângulo ***FPE***. É o que foi proposto.

❖ *Veja figura da proposição **6**.*

PROPOSIÇÃO VIII.

As mesmas coisas sendo colocadas como na proposição ***6***. Eu afirmo que, pelo ponto ***P***, não se pode traçar mais que uma tangente ***PH***.

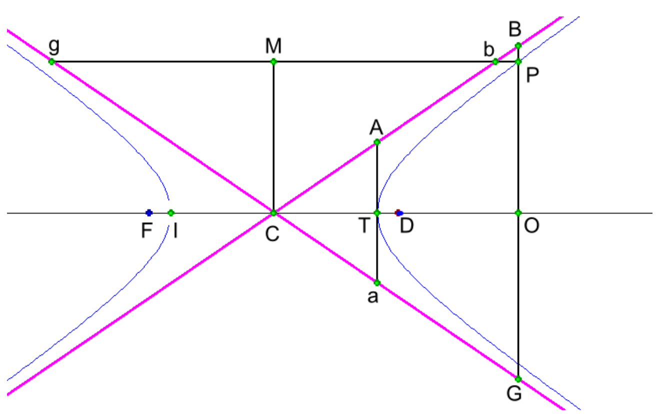


Suponha que ***Ph*** seja também uma outra tangente, se possível. Do foco ***D***, trace ***Da*** perpendicular à ***Ph***. Trace o círculo ***da*** com centro ***F*** e com semidiâmetro ***Fd*** igual à ***IT*** que encontrará ***Da*** em ***a***. Divida ***Da*** em duas igualmente em ***e***. Trace ***Fa*** prolongada até encontrar a hipérbole em ***p***, una ***pD*** e ***pe.*** Pela geração da hipérbole, ***pD*** e ***ap*** serão iguais e ***pe*** (traçada no interior do triângulo isósceles ***apD*** e que divide a base ***Da*** em duas igualmente) será perpendicular à ***Da***. Portanto, a linha ***pe*** será paralela à ***Ph***. Mas pela proposição ***6***, ela toca a hipérbole em ***p***. Portanto, ***pe*** encontrará a tangente à hipérbole no ponto ***T*** em algum ponto fora da hipérbole, uma vez que são ambas tangentes. Assim a paralela ***Ph*** passa no interior da hipérbole, pois a hipérbole vai de ***P*** até ***p***. A ordenada pelo ponto ***p*** encontra ***Ph*** no interior da hipérbole, o que é um absurdo, pois ***Ph*** foi assumida tangente. Portanto, só pode ser traçada uma única tangente ***PH*** pelo ponto ***P***. É o que foi proposto.

DEFINIÇÃO DAS ASSÍNTOTAS (11).

Se for traçada a linha reta ***aTA*** perpendicular ao eixo ***IT*** por uma das extremidades ***T*** do eixo ***IT***. Faça o quadrado de ***TA*** igual ao retângulo ***ID, DT***. Tome ***Ta*** igual à ***TA***. Pelo centro ***C*** e pelos pontos ***A*** e ***a***, trace as linhas ***AC*** e ***aC*** indeterminados em ambos os lados do centro.

Estas linhas são chamadas **Assíntotas** da hipérbole ou das hipérboles opostas.



COROLÁRIO.

É evidente que as assíntotas de uma hipérbole são também assíntotas da outra que é oposta.

PROPOSIÇÃO IX.

Se a ordenada de uma hipérbole for prolongada até ela encontrar as assíntotas em ***B*** e ***G***, eu afirmo que o retângulo ***GP, PB*** é igual ao quadrado de ***TA***.

Na figura anterior, as linhas ***TA*** e ***OB*** são paralelas. Assim, o quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***TA*** como o quadrado de ***CO*** para o quadrado de ***OB***[*] e o quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***TA*** como o quadrado de ***CO*** menos o quadrado de ***CT*** (igual ao retângulo ***IO, OT***) para o quadrado de ***OP.*** Pelas razões iguais, o quadrado de ***CO*** está para o quadrado de ***OB*** como o quadrado de ***CO*** menos o quadrado de ***CT*** para o quadrado de ***OP***, ou ainda o quadrado de ***CO*** está para o quadrado de ***CO*** menos o quadrado de ***CT*** como o quadrado de ***OB*** para o quadrado de ***OP.*** Por divisão, o quadrado de ***CO*** está para o quadrado de ***CO*** menos o quadrado de ***CO*** mais o quadrado de ***CT*** (igual ao quadrado de ***CT***) como o quadrado de ***OB*** para o quadrado de ***OB*** menos o quadrado de ***OP***, ou ainda o quadrado de ***CO*** está para o quadrado de ***OB*** (como também o quadrado de ***CT*** para o quadrado de ***TA***) como o quadrado de ***CT*** para o quadrado de ***OB*** menos o quadrado de ***OP*** (igual ao retângulo ***GP, PB***)***.*** Assim o retângulo ***GP, PB*** é igual ao quadrado de ***TA***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO X.

Se for traçada uma linha reta ***Pg*** paralela ao eixo ***IT*** por um ponto qualquer ***P*** da hipérbole, encontrando as duas assíntotas em ***b*** e ***g***, eu afirmo que o retângulo ***gP, Pb*** é igual ao quadrado de ***CT***.

Na figura anterior, pela posição das assíntotas, a linha ***bg***[**] é dividida em duas igualmente em ***M*** pelo eixo ***CM***. Por causa dos triângulos semelhantes, o quadrado de ***OB*** está

** Foi utilizada a semelhança entre os triângulos **CTA** e **COB***

*** Pode-se usar congruência de triângulos para uma justificativa mais cuidadosa.*

para o quadrado de ***CM*** (ou seu igual ***PO***) como o quadrado de ***CO*** (ou seu igual ***MP***) para o quadrado de ***Mb.*** Por divisão, o quadrado de ***OB*** está para o quadrado de ***OB*** menos o quadrado de ***OP*** como o quadrado de ***MP*** para o quadrado de ***MP*** menos o quadrado de ***Mb***. Ou ainda, o quadrado de ***OB*** menos o quadrado de ***PO*** (igual ao retângulo ***GP, PB***) está para o quadrado de ***MP*** menos o quadrado de ***Mb*** (igual ao retângulo ***gP, Pb***) como o quadrado de ***OB*** para o quadrado de ***MP*** ou de ***CO***. Mas o quadrado de ***OB*** está para o quadrado de ***CO*** como o quadrado de ***TA*** para o quadrado de ***CT.*** Assim, pela mesma razão, o retângulo ***GP, PB*** está para o retângulo ***gP, Pb*** como o quadrado de ***TA*** para o quadrado de ***CT.*** Mas o retângulo ***GP, PB*** é igual ao quadrado de ***TA***, pela proposição passada. Assim, o retângulo ***gP, Pb*** é igual ao quadrado de ***CT***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XI.

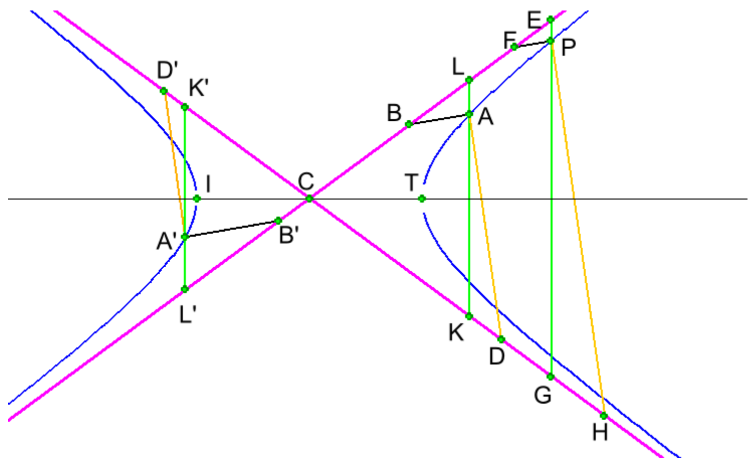
Eu afirmo que a hipérbole e suas assíntotas se aproximam continuamente, quanto mais ambas forem prolongadas, uma da outra. Nunca se encontrarão, já que a parte ***PB*** da ordenada do eixo, contida entre a hipérbole e sua assíntota, pode ser feita menor que uma linha dada.

Pela proposição ***9***, o retângulo ***GP, PB*** é igual ao quadrado de ***TA***; mas ***GB*** aumenta quanto mais ela se afasta de ***C***. Assim ***PB*** continuamente diminui, mas não pode nunca ser nula, pois para tanto o retângulo ***GP, PB*** seria nulo, o que contradiria a proposição mencionada. Assim, a hipérbole e a assíntota nunca se encontram. Enfim, se for feito um retângulo onde um dos lados será menor que qualquer linha dada, ele será igual ao quadrado de ***TA.*** A soma dos dois lados deste retângulo como ***GB***, sendo aplicado no interior do ângulo feito pelas assíntotas perpendicularmente ao eixo ***IT***, então o ponto ***P*** de divisão dos lados do retângulo estará na hipérbole, pela proposição ***9***. Assim, ***PB*** é menor que uma linha dada. É o que foi proposto.

- *Veja figura anterior.*

PROPOSIÇÃO XII.

Se dois pontos ***P*** e ***A*** forem tomados na hipérbole ou cada ponto em cada hipérbole oposta. Se forem traçadas duas linhas retas ***PH*** e ***AD*** paralelas entre si por esses **2** pontos, limitadas por uma das assíntotas ***CD***. Da mesma maneira, se pelos mesmos pontos ***P*** e ***A*** forem traçadas duas outras linhas ***PF*** e ***AB*** também paralelas entre si e limitadas pela outra assíntota ***CB***. Então, eu afirmo que o retângulo ***PH, PF*** é igual ao retângulo ***AD, AB***.



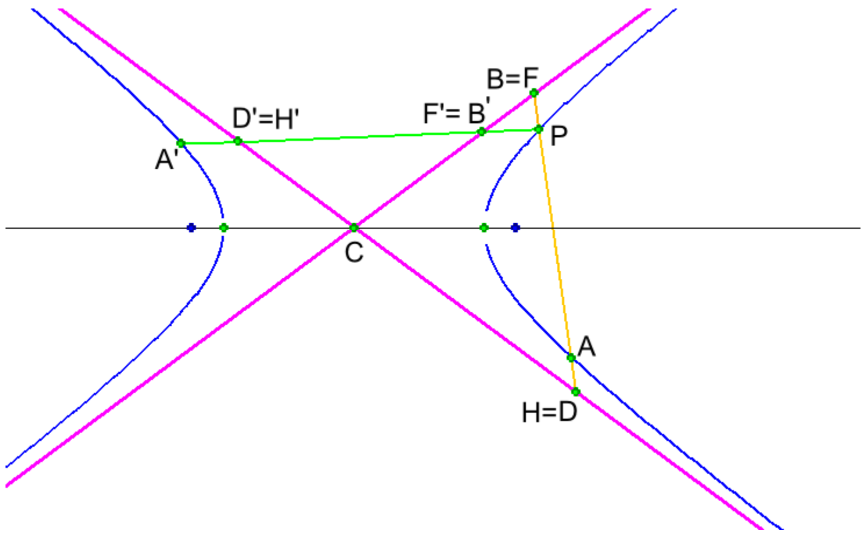
Pelos pontos ***P*** e ***A***, trace as perpendiculares ao eixo ***EPG*** e ***LAK*** limitadas pelas assíntotas em ***EG*** e ***LK***. Por causa das paralelas, os triângulos ***EPF*** e ***LAB, PGH*** e ***AKD*** são semelhantes. Assim ***EP*** está para ***PF*** como ***LA*** para ***AB e PG*** está para ***PH*** como ***AK*** para ***AD***. Se fizermos, portanto, os retângulos com os termos das duas proporções precedentes colocados em ordem, então surgirá o retângulo ***EP, PG*** para o retângulo ***PF, PH*** como o retângulo ***LA, AK*** para o retângulo ***AB, AD***. Mas o retângulo ***EP, PG*** é igual ao retângulo ***LA, AK***, pois eles são iguais aos quadrados de uma mesma linha reta (proposição ***9***). Assim, o retângulo ***PF, PH*** é igual ao retângulo ***AB, AD***. É o que foi proposto.

COROLÁRIO.

É evidente que o que foi demonstrado acima, para dois pontos somente, pode ser demonstrado da mesma maneira para qualquer número de pontos desejado.

PROPOSIÇÃO XIII.

Se for traçada uma linha reta ***PA***, a seu gosto, que encontra uma hipérbole (ou ainda, as duas hipérboles opostas) nos pontos ***P*** e ***A*** e as assíntotas em ***F*** e ***D***, então eu afirmo que as partes desta linha ***PF*** e ***AD*** (compreendidas entre a hipérbole ou entre as hipérboles opostas e suas assíntotas) são iguais entre si.

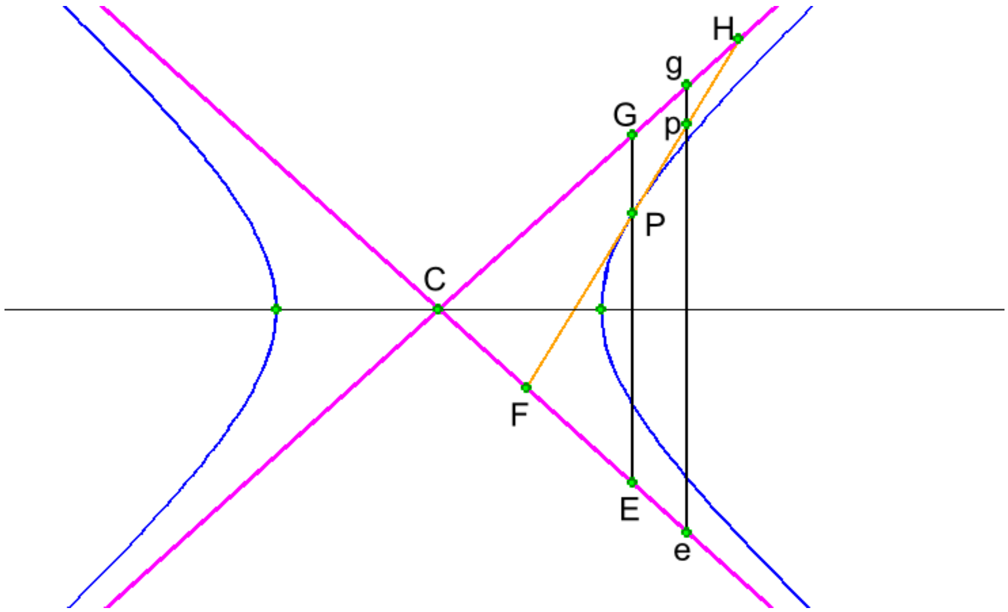


Pela proposição precedente, o retângulo ***PF, PH*** é igual ao retângulo ***AD, AB***, pois as linhas ***PF*** e ***PH*** são paralelas, sendo unidas diretamente, como também ***AD*** e ***AB***. Mas as somas ***HF*** e ***DB*** ou as diferenças dos lados destes retângulos iguais são iguais, sendo a mesma linha reta*. Assim os lados de cada um desses retângulos são também iguais, no caso ***PF*** igual à ***AD*** e ***PH*** igual à ***AB***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XIV.

Se uma linha reta ***FH*** toca uma hipérbole em ***P***, eu afirmo que ela encontra as assíntotas em ***F*** e ***H*** e o ponto de tangência ***P*** a divide em duas igualmente.

* *Em linguagem atual:* ***PF · (PA + AD) = AD · (PA + PF)*** *implica em* ***PF = AD***.

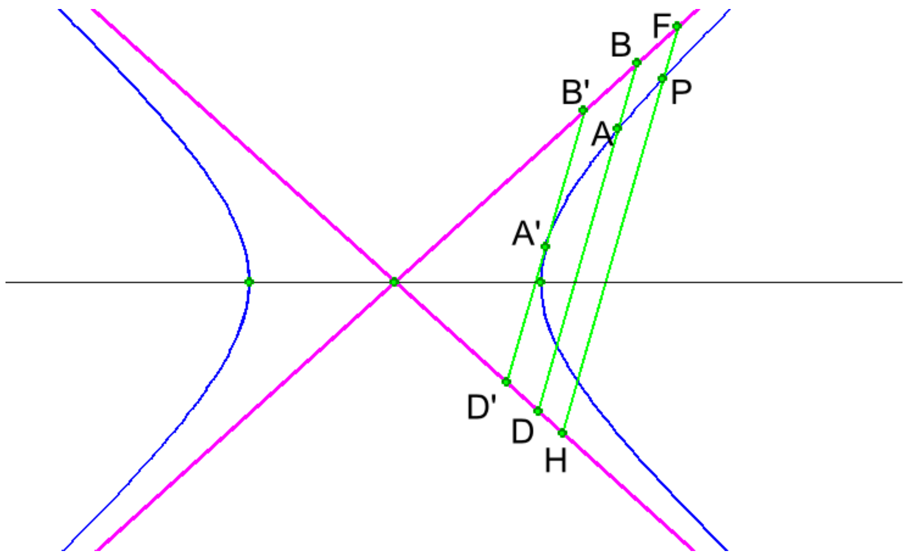


Em primeiro lugar, pelo ponto ***P***, trace ***EPG*** uma perpendicular do eixo. Se a tangente em ***P*** não encontrasse as assíntotas, ela seria paralela a uma delas e poderia ser ***CG*** se fosse possível. Pela proposição ***11***, pode-se encontrar uma linha menor que ***PG*** que seja paralela à ***PG*** e esteja compreendida entre a hipérbole e a assíntota. Esta linha prolongada necessariamente encontra a tangente ***FPH*** paralela à ***CG*** no interior da hipérbole, o que é absurdo, pois ***FPH*** foi admitida tangente. Portanto, uma tangente encontra ambas as assíntotas. É a primeira parte da proposição.

Em segundo lugar, se ***PH*** não fosse igual à ***PF***, então ela seria maior, se fosse possível. Marque ***Hp*** igual à ***FP*** e trace ***epg*** paralela à ***EPG***. Por causa das partes iguais ***PF*** e ***Hp*** e pelas paralelas ***ge*** e ***GE***, ***pg*** está para ***PG*** como ***Hp*** para ***HP*** e ***Hp*** está para ***HP,*** ou seus iguais ***FP*** para ***Fp*** como ***PE*** para ***pe***. Pelas razões iguais, ***pg*** está para ***PG*** como ***PE*** para ***pe***. Assim, o retângulo ***PG, PE*** é igual ao retângulo ***pg, pe***. Pela recíproca da proposição ***9,*** o ponto ***p*** será um ponto da hipérbole. Portanto, ***FPH*** encontrará a hipérbole em dois pontos ***P*** e ***p,*** contrariando a hipótese que assumiu ser ***FPH*** tangente. Assim a proposição é verdadeira.

PROPOSIÇÃO XV.

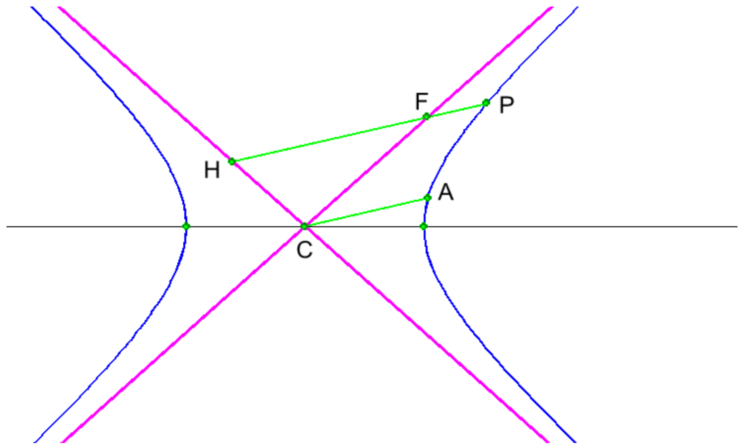
Se, pelos pontos ***P*** e ***A*** de uma hipérbole, forem traçadas linhas retas quaisquer ***FH*** e ***BD*** paralelas entre si e que encontram as assíntotas cada uma delas nos pontos ***F, H*** e ***B, D***. Então, eu afirmo que o retângulo ***PF, PH*** é igual ao retângulo ***AB, AD*** ou ao quadrado de ***A'B'***, caso ***B'D'*** toque a hipérbole no ponto ***A'***.



Esta proposição é evidente por causa das proposições ***12*** e ***14***, pois as linhas ***PF, PH*** e ***AB, AD*** são paralelas entre si. Se ***B'D'*** for tangente no ponto ***A'***, o ponto ***A'*** a divide em duas igualmente, pela proposição ***14***.

PROPOSIÇÃO XVI.

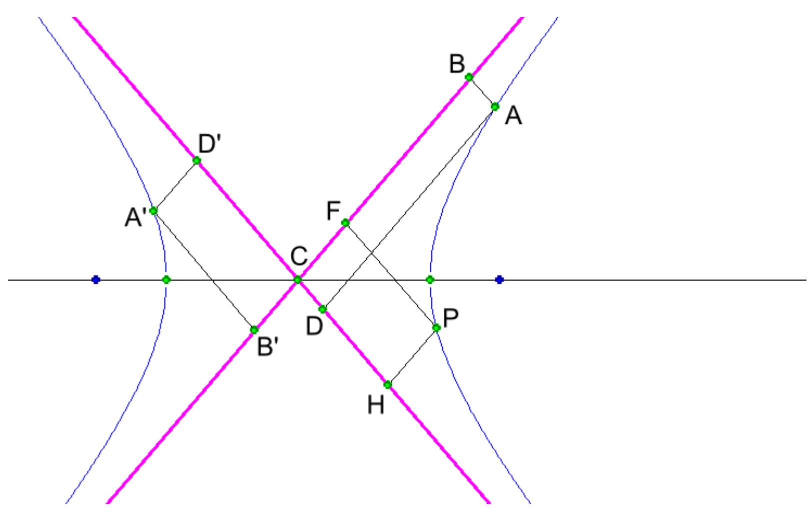
Se for traçada a linha reta ***PH*** paralela ao diâmetro determinado ***CA*** pelo ponto ***P*** da hipérbole, eu afirmo que ***PH*** encontra as assíntotas nos pontos ***F*** e ***H*** e o retângulo ***PF, PH*** é igual ao quadrado de ***CA***.



Como ***CA*** é interior ao ângulo feito pelas assíntotas, é evidente que ***PH*** (que é paralela à ***CA***) deve encontrar as assíntotas em ***F*** e ***H***. Mas pela proposição ***12***, as linhas paralelas ***AC*** e ***PF*** encontram a assíntota ***CF***. ***AC*** e ***PH***, sendo também paralelas, encontram a outra assíntota ***CH***. O retângulo ***AC, AC*** (que é o quadrado de ***AC***) é igual ao retângulo ***PF, PH***. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XVII.

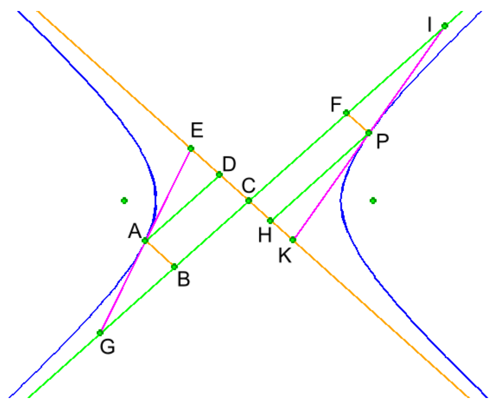
Se pelos pontos ***P*** e ***A*** de uma hipérbole (ou de hipérboles opostas) forem traçadas as linhas ***PF, PH*** e ***AB, AD*** paralelas às suas assíntotas, eu afirmo que o paralelogramo ***PFCH*** é igual ao paralelogramo ***ABCD***.



Pela proposição ***12***, o retângulo ***PF, PH*** é igual ao retângulo ***AB, AD***. Portanto ***PH*** está para ***AD*** como ***AB*** para ***PF***. Mas o ângulo ***FPH*** é igual ao ângulo ***BAD***. Portanto, os paralelogramos ***CP*** e ***CA*** são iguais. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XVIII.

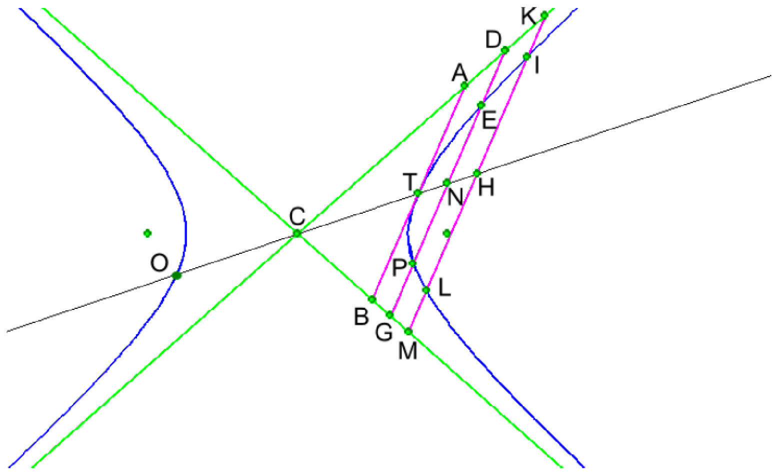
Sejam as linhas retas ***KI*** e ***EG*** tangentes a uma mesma hipérbole ou às hipérboles opostas. Eu afirmo que os triângulos ***KCI*** e ***EGC*** (compreendidos entre as tangentes e as assíntotas) são iguais entre si.



Pelos pontos de tangência ***P*** e ***A***, trace ***AB, AD*** e ***PF, PH*** paralelas às assíntotas. Pela proposição precedente, os paralelogramos ***CA*** e ***CP*** são iguais. Mas, como as tangentes são divididas em duas igualmente pelos seus pontos de tangência (corolário da proposição ***14***), o paralelogramo ***CP*** será metade do triângulo ***CIK*** e o paralelogramo ***CA*** será também metade de ***CEG***. Assim, os triângulos são iguais. É o que foi proposto.

PROPOSIÇÃO XIX.

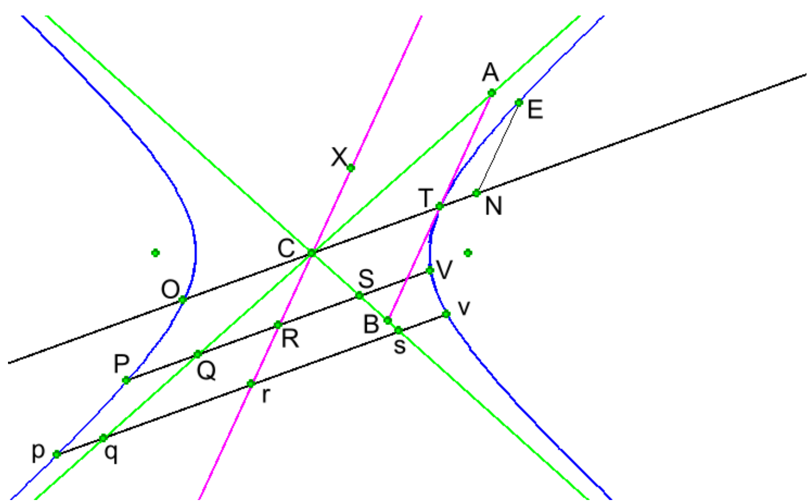
Se uma linha reta ***BTA*** tocar uma hipérbole em ***T*** e se outras linhas quaisquer como ***PE*** e ***LI*** forem traçadas paralelas a esta tangente e limitadas pela hipérbole, eu afirmo que o diâmetro ***OCT*** traçado por ***T*** dividirá as paralelas ***PE*** e ***LI*** em duas igualmente em ***N e H***.



Pela proposição ***14***, a tangente ***BA*** é dividida em duas igualmente em ***T***. Assim, ***PE*** e ***LI*** sendo prolongadas até as assíntotas em ***G, D, M, K***, então ***GD*** e ***MK*** serão também divididas em duas igualmente nos pontos ***N*** e ***H*** pelo diâmetro ***CT****. Mas pela proposição ***13***, ***GP é*** igual à ***ED*** e ***ML*** é igual à ***IK***. Assim, ***PN*** é igual à ***NE*** e ***LH*** é igual à ***HI***. É o que devia ser demonstrado.

PROPOSIÇÃO XX.

Sejam uma linha reta ***AB*** que toca uma hipérbole no ponto ***T***, o diâmetro ***XCR*** paralelo à tangente ***AB*** e outro diâmetro ***OCT*** que passa pelo ponto de tangência ***T***. Eu afirmo que todas as paralelas (como ***PV*** e ***pv***) ao diâmetro ***OT*** limitadas pelas hipérboles opostas são divididas em dois igualmente em ***R*** e ***r*** pelo diâmetro ***XCR***.



* *Pode-se justificar esse resultado por semelhança de triângulos.*

Como ***AB*** é paralela à ***XC*** e é dividida em duas igualmente em ***T***, deduz-se que ***QS*** e ***qs*** compreendidas entre as assíntotas e paralelas à ***CT*** serão também divididas em duas igualmente em ***R*** e ***r****. Mas pela proposição **13**, ***PQ*** é igual à ***SV*** e ***pq*** é igual à ***sv***. Assim ***PR*** é igual à ***RV*** e ***pr*** é igual à ***rv***. É o que foi proposto.

DEFINIÇÕES.

12.

Os diâmetros OT, XR que possuem as propriedades demonstradas nas duas últimas proposições são chamados **Conjugados** um do outro.

13.

A linha reta EN paralela a um dos dois conjugados XC é chamada **Ordenada** do outro diâmetro OT e reciprocamente, VR é uma **Ordenada** do diâmetro XC.

PROPOSIÇÃO XXI.

O quadrado da ordenada ***EN*** do diâmetro determinado ***OT*** está para o retângulo ***ON, TN*** (as partes deste diâmetro compreendidas entre suas extremidades ***O*** e ***T*** e a interseção com a ordenada) como o quadrado de ***AT*** está para o quadrado de ***CT***.

Por causa dos triângulos semelhantes, o quadrado de ***DN*** está para o quadrado de ***TA*** como o quadrado de ***CN*** para o quadrado de ***CT.*** Por divisão, o quadrado de ***DN*** menos o quadrado de ***TA*** *(*que é igual ao retângulo ***GE, ED*** pela proposição ***15***), que é igual ao quadrado de ***EN***, está para o quadrado de ***TA*** como o quadrado de ***CN*** menos o quadrado de ***CT*** (igual ao retângulo ***ON, TN***) para o quadrado de ***CT***. Assim, o quadrado de ***EN*** está para o quadrado de ***TA*** como o retângulo ***ON, TN*** para o quadrado de ***CT***.

❖ *Veja figura da proposição **19**.*

* *Pode-se justificar esse resultado por semelhança de triângulos.*

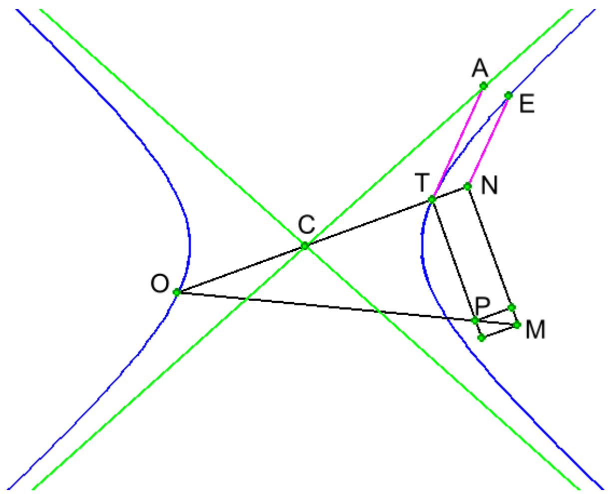
COROLÁRIO.

É evidente que os quadrados das ordenadas ***EN*** e ***IH*** de um diâmetro determinado ***OT*** estão entre si como os retângulos ***ON, TN*** e ***OH, TH***, feitos pelas partes do diâmetro que são compreendidas entre suas extremidades ***O*** e ***T*** e as interseções ***N*** e ***H*** das mesmas ordenadas.

DEFINIÇÕES.

14.

Se fizermos CT para TA como TA para a metade de TP, a linha reta TP é chamada o **Parâmetro** do diâmetro determinado OT.



15.

O retângulo OP formado pelo diâmetro determinado OT e por seu parâmetro é chamado ***Figura*** do diâmetro OT.

PROPOSIÇÃO XXII.

O quadrado de uma ordenada ***EN*** do diâmetro determinado ***OT*** é igual ao retângulo ***TM*** aplicado sobre o parâmetro ***TP*** e cuja altura é a parte ***TN*** do diâmetro, compreendida entre sua extremidade ***T*** e sua interseção ***N*** com a ordenada. O retângulo ***TM*** excede o retângulo ***PT, TN*** de um retângulo ***PM***, que é semelhante e semelhantemente posicionado à *figura* ***OP***.

Na figura acima, pela formação do parâmetro do diâmetro, ***OT*** está para ***TP*** como o quadrado de ***CT*** para o quadrado de ***TA***. Pela proposição precedente, o quadrado de ***CT*** está para o quadrado de ***TA*** como o retângulo ***ON, TN*** para o quadrado de ***NE.*** Mas o retângulo ***ON, TN*** está para o retângulo ***MN, TN*** como ***ON*** para ***MN***, assim como* ***OT*** para ***TP***. Pelas razões iguais, o retângulo ***ON, TN*** está para o quadrado de ***NE*** como o retângulo ***ON, TN*** para retângulo ***MN, TN***. Assim o quadrado de ***NE*** é igual ao retângulo ***MN, TN***. É o que devia ser demonstrado.

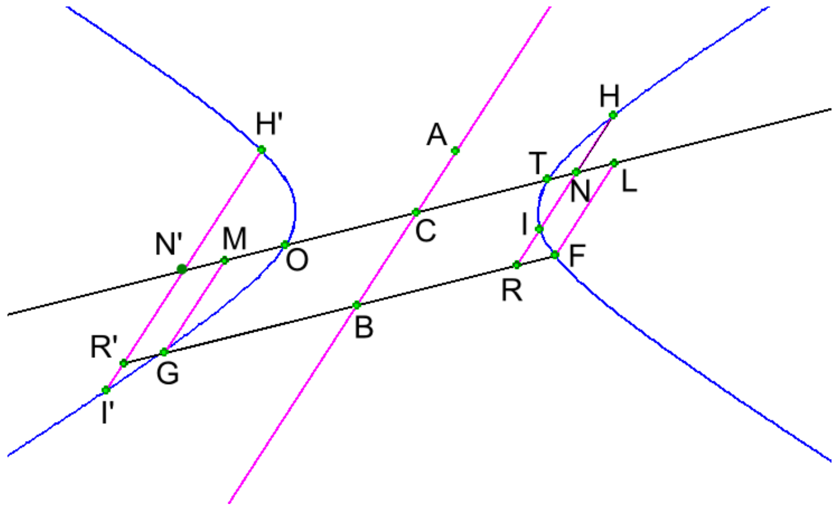
COROLÁRIO.

Se o parâmetro ***TP*** for igual ao diâmetro ***OT***, deduz-se da formação do parâmetro que ***TA*** será igual à ***CT*** que foi dita ser metade do mesmo parâmetro. Mas é também evidente, pela demonstração da proposição ***18,*** que o triângulo ***ABG*** é retângulo em ***B***, se o diâmetro traçado do centro ***C*** até o ponto de tangência ***A*** for igual à tangente ***AG*** compreendida entre o ponto de tangência ***A*** e a assíntota. Isso ocorre porque o triângulo ***CAG*** será isósceles e a base ***CG*** deve ser dividida em duas igualmente em ***B*** pela linha ***AB*** que é paralela à outra assíntota ***CE***. Assim, se as assíntotas de uma hipérbole se interceptam formando ângulos retos, todos os diâmetros e parâmetros serão iguais. Se um diâmetro for igual ao seu parâmetro em uma hipérbole, todos os outros também o serão e as assíntotas estarão formando ângulos retos. É ainda mais evidente que uma hipérbole cujas assíntotas não formam ângulos retos, não pode ter qualquer parâmetro igual ao seu diâmetro.

PROPOSIÇÃO XXIII.

Se duas linhas retas ***HI*** e ***FG*** paralelas aos dois diâmetros conjugados ***AB*** e ***OT*** (pertencentes a hipérboles opostas) se encontram em um ponto ***R***, então eu afirmo que o retângulo ***FR, RG*** está para o retângulo ***HR, RI*** como o diâmetro ***OT*** para seu parâmetro.

* *Foi utilizada a semelhança dos triângulos **OTP** e **ONM**.*

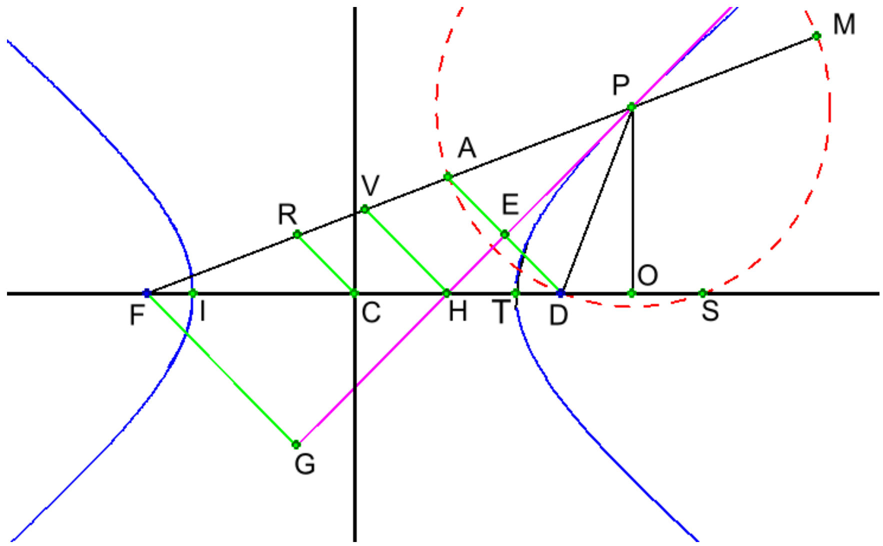


Ao traçar ***FL*** e ***GM*** ordenadas do diâmetro ***OT***, elas serão paralelas à ***AB*** pela definição de diâmetros conjugados e ***OT*** divide ***HI*** em duas igualmente em ***N*** pela proposição ***19***. Da mesma maneira, ***GF*** é dividida em duas igualmente pelo diâmetro ***AB***. Mas como ***CO*** é igual à ***CT*** e ***ML*** é igual à ***GF***, então ***TL*** é igual à ***OM***. Pelo corolário da proposição ***21***, o quadrado de ***LF*** está para o quadrado de ***NI*** como o retângulo ***OL, LT*** para o retângulo ***ON, NT***. Se o ponto ***R*** estiver no exterior das hipérboles opostas, por divisão, o quadrado de ***LF*** menos o quadrado de ***NI*** (igual ao retângulo ***HR, RI***) está para o quadrado de ***NI*** como o retângulo ***OL, LT*** menos o retângulo ***ON, NT*** (igual ao retângulo ***MN, NL*** ou seu igual o retângulo ***FR, RG***, pois ***MO*** é igual à ***TL***) para o retângulo ***ONT***. Portanto, o retângulo ***HR, RI*** está para o quadrado de ***NI*** como o retângulo ***FR, RG*** para o retângulo ***ON, NT***.

Mas se o ponto ***R*** estiver como em ***R’*** no interior de uma das hipérboles opostas, por divisão, o quadrado de ***N’I’*** menos o quadrado de ***LF*** ou ***GM*** ou ***NR*** que são todos iguais entre si (igual ao retângulo ***H’R’, R’I’***) está para o quadrado de ***N’I’*** como o retângulo ***ON’, N’T*** menos o retângulo ***OL, LT*** que é igual ao retângulo ***OM, MT*** (igual ao retângulo ***FR’, R’G***) para o retângulo ***ON’, N’T***. Mas nesses **2** casos, pela proposição ***21*** e pela definição de parâmetro, o retângulo ***ON, NT*** está para o quadrado de ***NI*** como o diâmetro ***OT*** para o seu parâmetro. Por causa das razões iguais, o retângulo ***FR, RG*** está para o retângulo ***HR, RI*** como o diâmetro ***OT*** para o seu parâmetro. É o que devia ser demonstrado.

PROPOSIÇÃO XXIV.

Em uma hipérbole ***PT*** cujo eixo é ***IT*** e centro é ***C***, sejam ***H*** o ponto de encontro entre a tangente ***PH*** e o eixo e ***PO*** uma ordenada ao eixo que passa pelo ponto de tangência ***P***. Eu afirmo que ***CH*** está para ***CT*** como ***CT*** para ***CO***.



Sendo os pontos ***F*** e ***D*** os focos, ***P*** o centro e ***PD*** o semidiâmetro, descreva o círculo ***MSDA*** e a linha ***DA***. A tangente ***PH*** irá dividir ***DA*** em duas igualmente em ***E*** pela proposição ***6***. Pelos pontos ***F, C*** e ***H***, trace ***FG, CR*** e ***HV*** paralelas à ***DA***. ***FA*** será dividida em duas igualmente em ***R***, porque ***FD*** o é em ***C***.

Por causa dos triângulos semelhantes, ***FP*** está para ***PA*** como ***FG*** para ***AE*** (ou ***DE*** seu igual), ***FG*** está para ***DE*** como ***FH*** para ***DH*** e ***FH*** está para ***DH*** como ***FV*** para ***VA***. Pelas razões iguais, ***FP*** está para ***PA*** como ***FV*** para ***VA***. Por divisão, ***FP*** menos ***PA*** (igual à ***FA***) está para ***PA*** como ***FV*** menos ***VA*** (igual à ***2RV***) para ***VA***. Mas ***FA*** está para ***2RV*** como suas metades ***RA*** para ***RV***. Pelas razões iguais, ***RA*** está para ***PA*** como ***RV*** para ***VA***. Compondo, ***RA*** está para ***RA*** mais ***PA*** (igual à ***RP***) como ***RV*** para ***RV*** mais ***VA*** (igual à ***RA***). Assim ***RA*** está para ***RP*** como ***RV*** para ***RA***. Portanto, o quadrado de ***RA*** é igual ao retângulo ***RP, RV***.

Agora, por causa do círculo ***MSDA****, como na primeira proposição, ***FD*** está para ***FA*** como ***FM*** para ***FS***, suas metades, ***CD*** está para ***RA*** como ***RP*** para ***CO***. Mas ***CD*** está para ***RA*** como ***CH*** para ***RV***. Pelas razões iguais, ***RP*** estará para ***CO*** como ***CH*** para ***RV***. O retângulo formado pelos extremos, sendo igual ao retângulo formado pelos meios desta proporção, o retângulo ***CH, CO*** é igual ao retângulo ***RP, RV***. Mas o retângulo ***RP, RV*** foi demonstrado acima ser igual ao quadrado de ***RA*** e ***RA*** é igual à ***CT***. Por isso, o quadrado de ***CT*** é igual ao retângulo ***CH, CO***. Portanto ***CH*** estará para ***CT*** como ***CT*** para ***CO***. É o que foi proposto.

COROLÁRIO.

Uma vez que ***CH*** está para ***CT*** como ***CT*** para ***CO***, pela inversão da demonstração que foi feita no primeiro parágrafo dessa proposição, demonstra-se que ***IO*** estará para ***OT*** como ***IH*** para ***HT***. A linha ***IO*** é dita dividida harmonicamente nos pontos ***I, O, T, H***.

* *Usou o lema **1** de elipse que reconhecemos hoje como "Potência de Ponto".*

PARTE 4

As descrições das seções cônicas em um plano

As descrições de linhas curvas que foram feitas pelo movimento contínuo de um ponto sobre um plano com máquinas estão tão sujeitas a erros que não é recomendado ser usado mais de uma vez. É por isso que eu estou inclinado a pensar que, para tais descrições, deve-se encontrar uma quantidade muito grande de pontos por um modo confortável, pelos quais pode ser traçada a linha curva desejada. Como freqüentemente acontece, obtém-se uma pequena parte da linha curva e, portanto, deve ser achado um grande número de pontos, de tal forma que não haja um erro considerável ao desenhar a curva pelos pontos encontrados.

As descrições das seções cônicas que eu apresentei no início das demonstrações de cada uma são geralmente consideradas as mais simples, quando os focos ou eixos são conhecidos. Seria desnecessário procurar por qualquer outra, quando aquelas coisas são dadas. Mas, como freqüentemente acontece, existem situações onde outros dados serão usados para descrever as seções, por exemplo, descrever uma parábola sendo fornecidos somente uns dos seus diâmetros, seu parâmetro e o ângulo que a ordenada faz com esse diâmetro. A elipse, seus dois diâmetros conjugados sendo fornecidos. A hipérbole, o ângulo feito pelas assíntotas e qualquer ponto da curva sendo dados, ou ainda um diâmetro e seu parâmetro. Por último, para qualquer das **3** seções, o diâmetro com uma de suas ordenadas. Por isso, sou persuadido a descrever estas linhas para os casos propostos. Fico satisfeito em fornecer uma contribuição para uma das partes das mais relevantes da geometria.

PROBLEMA 1.

Um diâmetro de uma seção cônica sendo dado, além da ordenada desse diâmetro. Encontrar seu parâmetro e, na elipse, determinar seu diâmetro conjugado.

PARA A PARÁBOLA.

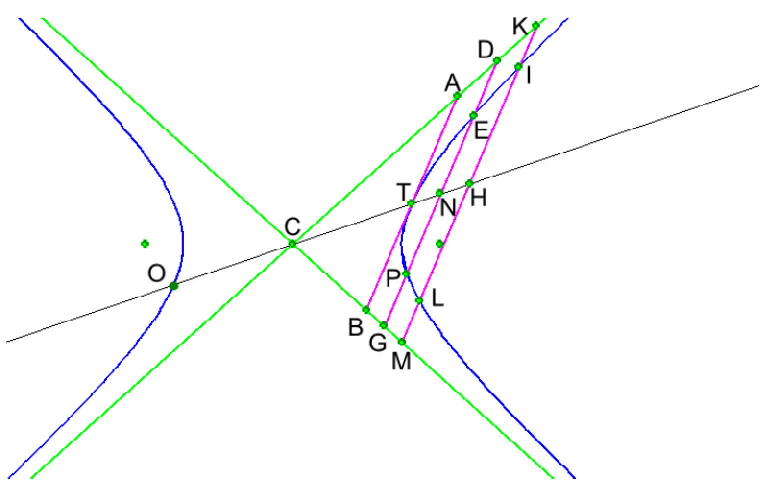
Se fizermos a parte do diâmetro compreendido entre sua extremidade e seu encontro com a ordenada para sua ordenada assim como sua ordenada para uma terceira, em proporção contínua. É evidente pela definição de parâmetro de um diâmetro da parábola que esta terceira proporcional é o parâmetro procurado.

PARA A ELIPSE E HIPÉRBOLE.

Se for feito um retângulo formado pelas partes do diâmetro formadas pela interseção da ordenada com o seu diâmetro para o quadrado daquela ordenada como o diâmetro está para a quarta proporcional, esta quarta proporcional será o parâmetro deste diâmetro. Na elipse, ao encontrar a média proporcional entre o diâmetro e seu parâmetro, traça-se uma linha paralela à ordenada pelo centro igual à média proporcional encontrada e que seja dividida em duas igualmente pelo centro. Nós teremos o diâmetro conjugado ao diâmetro proposto, como é evidente pela definição de parâmetro do diâmetro na elipse e na hipérbole e pelas proposições ***17*** e ***18*** da elipse.

PROBLEMA 2.

Em uma hipérbole, um diâmetro determinado sendo dado juntamente com seu parâmetro e com o ângulo que este diâmetro faz com sua ordenada. Descrever as assíntotas.

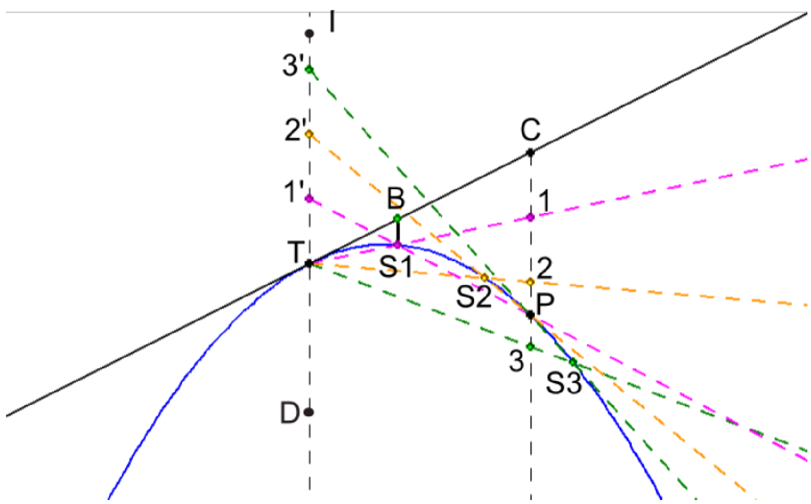


Seja o diâmetro dado ***OT*** e o ângulo ***ONE*** que este diâmetro faz com sua ordenada. Pela extremidade ***T,*** trace ***ATB*** paralela à ***EN***. Ao encontrar ***AB***, uma média proporcional entre o diâmetro ***OT*** e seu parâmetro, marque ***TA*** e ***TB*** cada um igual à metade de ***AB***. Pelo centro e pelos pontos ***A*** e ***B***, prolongue ***CA*** e ***CB*** em cada lado do centro ***C***. Eu afirmo que ***CA*** e ***CB*** são as assíntotas da hipérbole proposta.

A proposição é evidente pela geração do parâmetro de um diâmetro da hipérbole.

PROBLEMA 3.

A linha reta ***ITD*** sendo um diâmetro da parábola, o ponto ***P*** sendo um dos seus pontos e a linha ***CT*** sendo a tangente pela extremidade ***T*** desse diâmetro, ou melhor, o ângulo ***DTC*** igual ao ângulo que o diâmetro faz com sua ordenada. Descrever a parábola.



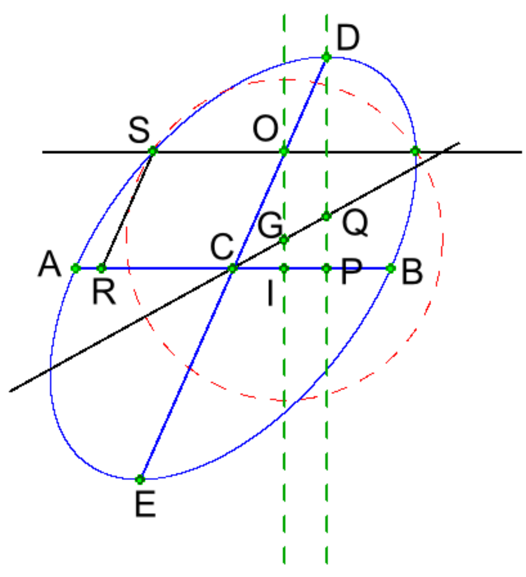
Pelo ponto ***P***, trace ***CP*** paralela à ***TD*** e prolongue-a no sentido de ***P***. Marque sobre ***CP*** as partes ***C1***, ***12***, ***23***, ***34***, etc. iguais entre si, com o tamanho qualquer, começando pelo ponto ***C*** onde ***CP*** encontra ***TC***. Marque as mesmas partes ***T1'***, ***1'2'***, ***2'3'***, etc. sobre o diâmetro ***TD*** prolongado para o outro lado de ***T***, começando pelo mesmo ponto ***T***. Ao traçar ***P1'*** e ***T1***, elas se encontram em ***S1***. Eu afirmo que o ponto ***S1*** é um dos pontos da parábola desejada.

Trace ***S1B*** paralela à ***DT***. Por causa dos triângulos semelhantes, ***TBS1***, ***TC1*** e ***1'TS1***, ***S1P1***, tem-se que ***BS1*** está para ***C1*** ou seu igual ***T1'*** como ***TB*** para ***TC*** e também ***T1'*** está para ***1P*** mais ***T1'*** ou seu igual ***C1*** (igual à ***CP***) como ***TS1*** para ***T1***, ou como ***TB*** para ***TC***. Assim ***BS1*** está para ***CP*** em uma razão dupla de ***TB*** para ***TC***. Mas também o quadrado de ***TB*** está para o quadrado de ***TC*** em uma razão dupla dos seus lados ***TB*** e ***TC***. Assim, o quadrado de ***TB*** está para o quadrado de ***TC*** como ***BS1*** para ***CP***. O ponto ***P***, sendo um dos pontos da parábola, é evidente pela proposição ***14*** de parábola, que ***S1*** será também um ponto da parábola desejada.

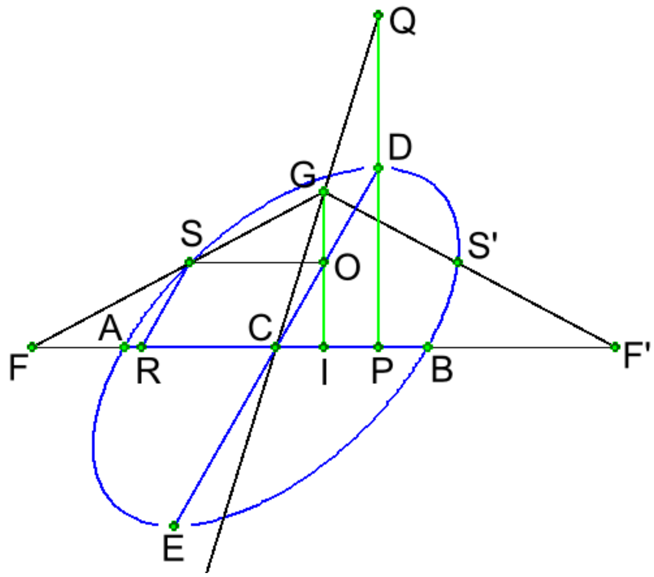
Demonstra-se da mesma forma que ***S2***, a interseção de ***P2'*** e ***T2*** e ***S3***, a de ***P3'*** e ***T3***, e assim por diante, serão pontos da mesma parábola e se as partes ***C1***, ***C2***, etc. forem tomados tão pequenas você pode achar vários pontos muito próximos um do outro.

PROBLEMA 4.

As linhas retas ***AB*** e ***ED*** que se dividem mutuamente em duas igualmente em ***C***, sendo dadas como os diâmetros conjugados de uma elipse. Descrever esta elipse.



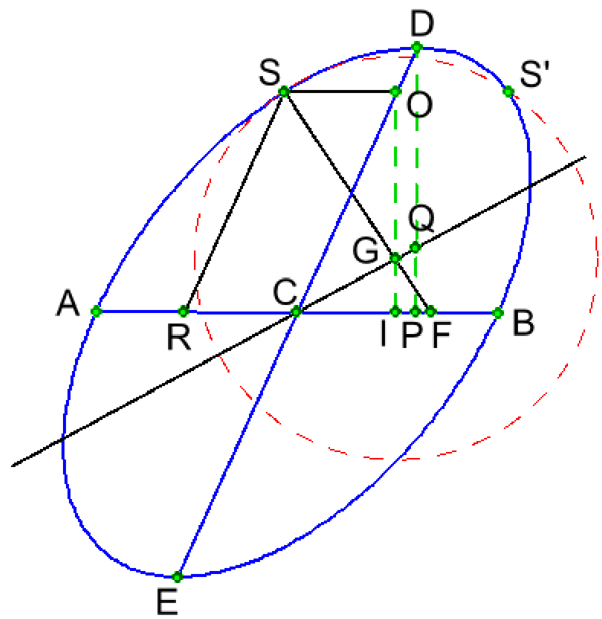
Pela extremidade ***D*** de qualquer um dos diâmetros, trace ***DP*** perpendicular a outro diâmetro conjugado ***AB***. Prolongue-a pelos dois lados e sobre ela tome ***DQ*** de um lado ou



de outro de ***D*** igual à metade ***CA*** do diâmetro ***AB***. Pelo ponto ***C*** e pelo ponto ***Q***, trace a linha ***CQ***, prolongando-a de um lado ou de outro de ***C***. De qualquer ponto ***O*** do diâmetro ***DE***, trace as linhas retas ***OS*** paralela à ***CA*** e ***OG*** paralela à ***DQ***. Com centro ***G*** e semidiâmetro ***GS*** igual à ***CA***, descreva o arco ***S*** encontrando ***OS*** em ***S***. Eu afirmo que o ponto ***S*** é um dos pontos da elipse requerida.

Por causa dos triângulos semelhantes ***CDQ*** e ***COG***, o quadrado de ***CD*** está para o quadrado de ***CO*** ou de ***RS*** paralela à ***CD*** assim como o quadrado de ***DQ*** ou de ***GS*** ou de ***CA*** que são todos iguais, para o quadrado de ***OG***. Mas o quadrado de ***OG*** é igual à diferença entre os quadrados de ***GS*** e ***SO***, pois o triângulo ***GOS*** é retângulo em ***O***. Da mesma forma, o quadrado de ***GO*** é igual à diferença dos quadrados de ***CA*** e ***CR*** que são iguais à ***GS*** e ***SO***. A diferença entre os quadrados de ***CA*** e ***CR*** é igual ao retângulo ***BR, RA***, pois ***AB*** é dividida em duas igualmente em ***C***. Assim, o quadrado de ***CD*** está para o quadrado de ***RS*** como o quadrado de ***CA*** para o retângulo ***BR, RA***. Pela proposição ***18*** da elipse, o ponto ***S*** é um ponto da elipse desejada. Da mesma forma, para uma infinidade de outros pontos.

OUTRA MANEIRA DE DESCRIÇÃO PARA A MESMA CONSTRUÇÃO.



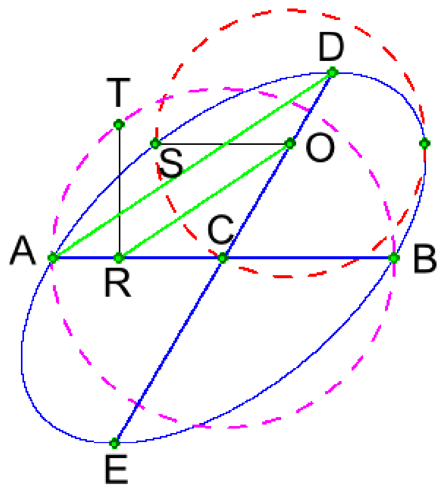
Ao traçar ***CQ*** como acima e tomando qualquer ponto ***G*** de ***CQ*** como centro e semidiâmetro ***GF*** igual à ***QP***, descreva o arco ***F*** cortando ***CB*** em ***F***. Prolongue ***FG*** até ***S*** e trace ***GS*** igual à ***CA***. Eu afirmo que o ponto ***S*** é um ponto da elipse desejada.

Por ***G***, trace ***IGO*** paralela à ***DQP***. ***FG*** ou seu igual ***PQ*** estará para ***GI*** como ***DQ*** ou seu igual ***GS*** para ***GO***. Assim, se ***SO*** for desenhada será paralela à ***CA***, pode-se demonstrar como acima que o ponto ***S*** é um ponto da elipse desejada.

Se as linhas AB e DE forem os eixos.

Se as linhas ***AB*** e ***DE*** forem os eixos, pode-se servir do método precedente, pois é visível que a linha ***CQ*** coincidirá sobre ***CD*** e que ***QP*** será a diferença (na primeira figura) e a soma (na segunda figura deste problema) dos dois semi-eixos. Os pontos ***G*** devem ser tomados sobre ***CD*** e se repete o resto da construção. A demonstração será a mesma que a anterior.

OUTRA MANEIRA DE DESCRIÇÃO COM O AUXÍLIO DE UM CÍRCULO.

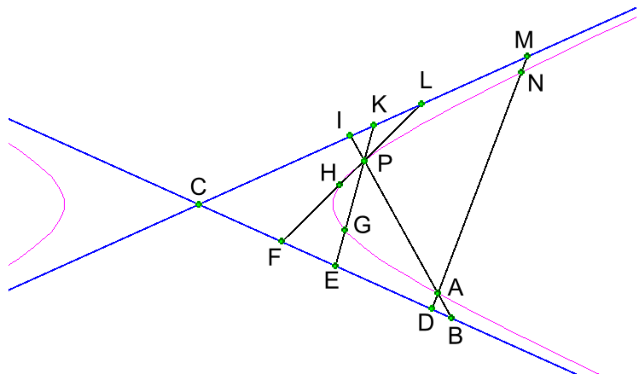


Se um quarto do círculo for feito com centro ***C*** e semidiâmetro ***CA***. Trace ***AD*** e construa uma perpendicular até a circunferência do círculo pelo ponto ***R*** do diâmetro ***CA***. Esta perpendicular será a média proporcional entre ***BR*** e ***RA***. Trace ***RO*** paralela à ***AD*** e ***OS*** paralela à ***CA*** igual à média proporcional entre ***BR*** e ***RA***. Eu afirmo que ***S*** está na elipse.

Pela construção, o quadrado de ***CD*** está para o quadrado de ***CA*** como o retângulo ***EO, OD*** para o retângulo ***BR, RA*** (igual ao quadrado de ***OS***). Assim, o quadrado de ***CD*** está para o quadrado de ***CA***, ou melhor, o quadrado de ***ED*** está para o quadrado de ***BA*** como o retângulo ***EO, OD*** para o quadrado de ***OS***. Pela prop. ***18*** de elipse, o ponto ***S*** é um ponto da elipse procurada.

PROBLEMA 5.

As assíntotas ***CD*** e ***CM*** sendo dadas juntamente com um ponto da hipérbole. Descrever a hipérbole.



Por ***P***, trace a seu gosto ***BPI, EPK*** e ***FPL*** limitadas pelas assíntotas. Constrói-se ***BA*** igual à ***PI, EG*** igual à ***PK*** e ***FH*** igual à ***PL***. Eu afirmo que os pontos ***A, G*** e ***H*** estão na hipérbole requerida. Isto é evidente pela proposição ***13*** da hipérbole.

E se por qualquer um dos pontos encontrados como ***A***, forem traçadas ainda outras linhas como ***DM***, faça ***MN*** igual à ***DA***. É evidente, pela mesma razão, que o ponto ***N*** está na hipérbole.

Fim do Tratado das Seções Cônicas

CAPÍTULO 5

COMENTÁRIOS SOBRE AS TRADUÇÕES

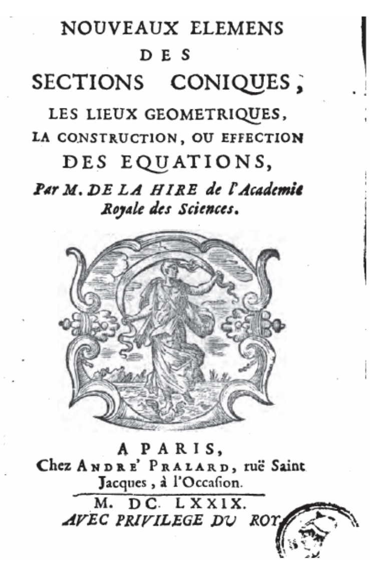
5.1 – As fontes da tradução para o Português

Foram duas, as versões eletrônicas utilizadas como referências na tradução dessa obra para o Português.

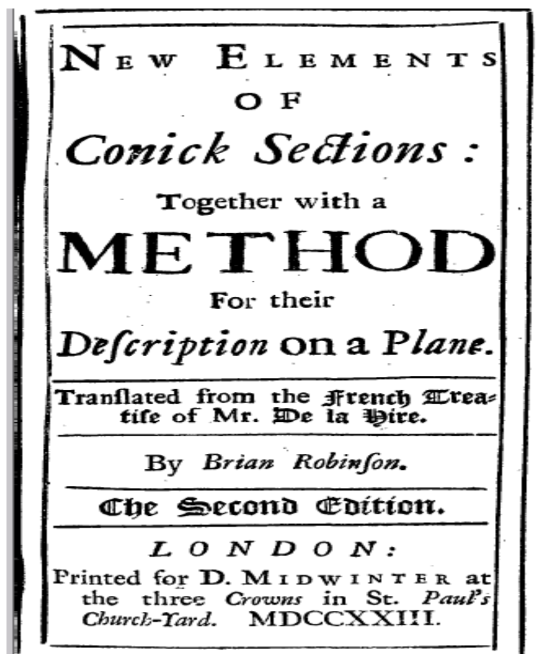
A primeira [6], em Francês, foi publicada em *1679*. É mais completa, visto que possui as três partes citadas no capítulo anterior: "Novos elementos das seções cônicas" (181 páginas), "Os lugares geométricos" (118 páginas) e "A construção das equações analíticas" (162 páginas).

Em relação ao primeiro livro sobre cônicas que iremos focar, ele contém 176 páginas (mais 5 do prefácio) divididas 4 partes. Possui 38 definições, 2 lemas, 61 proposições, 5 problemas e 70 figuras (17 de parábola, 24 de elipse, 22 de hipérbole e 7 dos problemas).

Nesta versão [6], entretanto, faltam parte do prefácio e algumas páginas do primeiro livro: *20 e 21* (parábola); *38, 39, 60 e 61* (elipse); *118* e *119* (hipérbole). Eis a sua capa:



A segunda [7], em Inglês, é fruto de uma tradução feita do Francês para o Inglês por Brian Robinson em *1723*. Em versão digital, a segunda edição desta tradução é composta por *131* páginas divididas 4 partes. Faz 38 definições, 2 lemas, 61 proposições, 54 figuras (12 de parábola, 19 de elipse, 18 de hipérbole e 5 dos problemas) e 5 problemas.. Ela, entretanto, só contém a primeira parte da obra "Novos elementos das seções cônicas". A segunda e a terceira parte, provavelmente, não foram traduzidas. Ou seja, o foco do Brian Robinson estava nas cônicas, uma vez que a segunda e a terceira partes não tratam de cônicas prioritariamente. Ela é bastante fiel ao texto original. As suaves diferenças serão citadas mais adiante. Esta versão teve para nós grande importância, pois foi a primeira fonte que obtivemos. Não possui falta de páginas como na versão em Francês. Eis a sua capa:



NEW ELEMENTS
OF
Conick Sections:
Together with a
METHOD
For their
Deſcription on a *Plane.*

Tranſlated from the French Treatiſe of Mr. De la Hire.

By *Brian Robinſon.*

The Second Edition.

LONDON:
Printed for D. MIDWINTER at the three *Crowns* in St. *Paul's Church-Yard.* MDCCXXIII.

Uma observação relevante é que o texto em Francês apresenta ***15*** proposições sobre parábola, enquanto a tradução para o Inglês possui ***17*** proposições. A numeração da obra original não possui interrupção o que permite especulações sobre quem escreveu as proposições *XVI* e *XVII*. O estilo de escrita e argumentação parecem semelhante ao resto da obra. Cabem duas possíveis explicações: ou La Hire as incorporou numa edição seguinte à que possuímos ou elas foram adicionadas por alguém, possivelmente por Robinson.

5.2 – Cronologia e as versões da tradução para o Português

No final de *2006*, foi por nós obtida a segunda edição da versão em Inglês traduzida por Robinson.

Em agosto de *2007*, foi finalizada a primeira versão da tradução feita para o Português a partir desta tradução feita por Brian Robinson. Foi feita quase uma transliteração, com máxima fidelidade ao original, mantendo inclusive pontuação e a apresentação.

Em setembro, foi feita a primeira revisão e a segunda versão. Nesta, foram feitas algumas adaptações à linguagem atual.

Em janeiro de *2008*, tivemos acesso a uma versão digital do original em Francês feita por La Hire com as três partes da obra. No mês seguinte, finalizamos a terceira versão com mais adaptações à linguagem atual, principalmente na simbologia, mas ainda com extrema fidelidade ao texto original.

Finalmente, em julho de 2008, após a qualificação do mestrado, preparamos a quarta e última versão (atual e definitiva), desta vez sem nenhuma adaptação aos termos matemáticos atuais. Ou seja, retornamos ao espírito da primeira versão, só que feita a partir do texto original e com adaptação apenas à pontuação da Língua Portuguesa.

A versão final da tradução para o Português ficou com 75 páginas e 54 figuras (12 de parábola, 17 de elipse, 18 de hipérbole e 7 dos problemas).

Faremos, a seguir, comentários sobre a tradução para o Português, assim como sobre a tradução para o Inglês feita por Robinson. Seguiremos a seqüência do texto do La Hire, proposição a proposição, fazendo observações sobre cada alteração feita pelas duas traduções.

5.3 – Descrição das modificações realizadas nas duas traduções do texto: *“NOVOS ELEMENTOS DAS SEÇÕES CÔNICAS”* de Philippe de La Hire (1679)

Parte 1 - A PARÁBOLA

A Gênese da Parábola

Na tradução para o Português, foi evitada a repetição de letras para falar de pontos diferentes na figura. Em vez de *P* e *P*, usou-se *P* e *P’*.

Definições

La Hire definiu **Parábola**, **Foco**, **Eixo**, **Ordenada**, **Diâmetro** e **Tangente**. Brian Robinson adiciona as definições de **Vértice e abscissa** na sua tradução. Na tradução para o Português, foram mantidas as definições originais. Vale frisar que La Hire já utiliza os objetos matemáticos definidos a mais por Brian Robinson. Apenas não atribuiu nenhum nome especial para eles.

Proposição 1

Uma figura foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da página ***2*** de [6]. Brian utiliza uma letra minúscula para representar cada segmento, enquanto na tradução para o Português, foi mantida a simbologia original. Já a definição de "Parâmetro do Eixo" foi numerada de forma acumulativa na tradução para o Português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

Proposição 2

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções. É a primeira proposição onde La Hire não colocou uma figura.

Proposição 3

O parágrafo final foi retirado na tradução para o Inglês, pois a prova foi completada anteriormente. Este parágrafo retirado repete algo que já foi parcialmente dito no corolário da construção. Optamos por mantê-lo na tradução para o Português.

Proposição 4

A figura sobre o enunciado dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da página 8 de [6]. Brian comete um erro na tradução ao afirmar que o ponto *S*, que é assumido como sendo da parábola e também (pela hipótese do absurdo) foi assumido fora da reta tangente, pertence à reta tangente (Página *11* em [6] e *9* em [7]).

Proposições 5, 6 e 7

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções. O texto de Robinson comete um erro no enunciado da proposição **7** ao usar a palavra "contract" em vez de "contact".

Proposição 8

A figura sobre o seu enunciado foi retirada nas duas traduções, pois é cópia da figura da proposição **7**.

Proposição 9

Ela está faltando em [6]. Conseqüentemente, utilizamos o texto do Robinson [7]. Nenhuma modificação foi feita na tradução para o Português.

Proposição 10

A figura sobre o enunciado foi retirada na tradução para o Inglês, uma vez que é uma cópia da figura da proposição 11. Foi feita a troca de BP por PI no enunciado dessa proposição traduzida para o Português, pois o diâmetro foi definido sendo interior à parábola. Além disso, a figura que é igual a da 11 foi mantida, algo provavelmente feito por La Hire, embora não esteja presente em [6].

Proposição 11

A figura foi retirada na tradução para o Português, uma vez que é uma cópia da figura da proposição 10. Na tradução para o Inglês, ela foi mantida.

Proposição 12

Uma das duas figuras existentes no original sobre o enunciado foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da proposição 10.

Proposição 13

A definição de "Ordenada do Diâmetro" foi numerada de forma acumulativa na tradução para o Português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração. É a segunda proposição onde La Hire não colocou uma figura.

Proposição 14

Na tradução para o Inglês, Brian utilizou o termo "Abscissa" de um diâmetro na definição do "Parâmetro do Diâmetro", mas não o definiu. A definição de "Parâmetro do Diâmetro" foi numerada de forma acumulativa na tradução para o Português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

Proposição 15

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Proposições 16 e 17

Elas estão ausentes na versão eletrônica em Francês [6], estando apenas na tradução do Brian Robinson [7].

Na décima sexta, há um erro no seu enunciado ao se referir à parábola AFB, uma vez que F não pertence à curva. Robinson usa outra simbologia ao se referir a um retângulo citando seus lados separados pelo sinal de vezes e a simbologia que significa elevar ao quadrado ganha um q em vez do símbolo 2 sobrescrito à direita.

Na décima sétima, algumas letras, que representam pontos na figura 13, foram trocadas na tradução para o Português com o intuito de ficar mais parecido com a figura anterior (12).

Parte 2 - ELIPSE

A Gênese da Elipse

Na tradução para o Português, foi evitada a repetição de pontos para falar de um ponto genérico *P* que Brian utilizou no texto e La Hire na figura. Em vez de *P* e *P*, usou-se *P* e *P'*.

Definições

As páginas do original de La Hire, relativas às definições, estão faltando na versão eletrônica [6]. Supomos que ele tenha definido os conceitos de **Elipse, Centro**, **Grande Eixo, Pequeno Eixo**, **Focos**, **Ordenada**, **Diâmetro** e **Tangente**. Os termos "Grande eixo" e "Pequeno Eixo" são usados durante o texto. Brian Robinson faz uma modificação na sua tradução e usa o termo "Eixo Transversal" substituindo o "Grande Eixo" e "Eixo Conjugado" substituindo o "Pequeno Eixo". Não define, porém, **Vértice e abscissa,** como fez na parábola.

Lema 1

Nenhuma alteração foi feita pelas traduções. Vale frisar que hoje conhecemos essa propriedade descrita como "Potência de um Ponto" em relação a uma Circunferência.

Proposição 1

A figura sobre o enunciado foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura inicial da elipse. Corrigimos ainda um erro cometido no original e na tradução que trocou a letra F pela letra P no final da demonstração (PO em vez de FO).

Proposições 2 e 3

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções. É a terceira e a quarta proposições do texto onde La Hire não colocou figura.

Proposição 4

La Hire não coloca figura para a proposição. A figura sobre as definições apresentadas é retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura da proposição **5**. A numeração das definições é mudada de 1 e 2 para 9 e 10 na versão para o Português para melhor identificação.

Proposição 5

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Proposição 6

Brian corrige uma letra errada usada na figura do texto de La Hire para um dos focos (E em vez de F). Na tradução para o Português, tanto na figura quanto no texto, foi retomada a letra F em função da busca de uniformidade uma vez que os focos foram sempre chamados de D e F.

Proposições 7, 8 e 9

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Proposição 10

No original, está faltando o corolário.

Na tradução para o Inglês, está presente uma figura inadequada. La Hire (quinta vez) e a nossa tradução não colocaram figura, apenas se referem à figura da proposição **8**.

Proposição 11

A décima primeira proposição está em parte faltando no original. A seguir, vai uma prova do corolário, uma vez que não foi demonstrada na obra. O corolário diz que o segmento IH é dividido harmonicamente pelos pontos O e T.

Da proposição 11: $CT \cdot CT = CO \cdot CH \rightarrow CT \cdot CT = (CT - TO) \cdot (CT + TH) \rightarrow$

$CT \cdot TO + TH \cdot TO = CT \cdot TH \rightarrow HC \cdot TO = CT \cdot TH \rightarrow (IH - IC) \cdot TO = CT \cdot TH \rightarrow$

$$IH \cdot TO = IC \cdot TH - IC \cdot TO \rightarrow IH \cdot TO = IC \cdot OH \quad (1)$$

Da proposição 11: $CO \cdot OH = CT \cdot CT \rightarrow \quad CO \cdot OH = (CO + OT) \cdot (CH - HT) \rightarrow$ $OT \cdot CH - OT \cdot TH = CO \cdot TH \rightarrow OT \cdot CT = CO \cdot TH \rightarrow OT \cdot CT + TH \cdot CT = CO \cdot TH + TH \cdot CT \rightarrow IC \cdot OH = IO \cdot TH \qquad (2)$

De (1) = (2), tem-se: $IH \cdot TO = IO \cdot TH$.

Proposições 12 e 13

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Lema 2

Brian se refere a um quadrilátero como “figura quadrilátera”.

Proposição 14

As duas traduções reduziram de quatro figuras para uma, visto que existem duas figuras diferentes e as outras duas são repetidas. Dessas duas diferentes, uma foi feita e a outra omitida, pois é igual à figura da proposição 15. Robinson erra ao fazer referência à segunda figura dessa proposição.

Proposição 15

As duas traduções reduziram de três para duas figuras. Dessas duas, uma foi feita e a outra omitida, visto que uma delas é igual à figura da proposição 16. Robinson erra ao fazer referência às figuras usadas no primeiro, quarto e quinto parágrafos da demonstração. Na tradução para Português, há na segunda figura uma mudança nas letras repetidas que tanto La Hire e Brian utilizam. O objetivo é evitar confusão de interpretação.

Proposição 16

La Hire fez referência a outras figuras onde também se verifica esta proposição. As duas traduções não sentiram tal necessidade.

Proposição 17

Uma figura foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da segunda figura da proposição 15. O texto do Robinson comete quatro erros: a letra f em vez de e, a letra L em vez de E, falta um quadrado de RP (todos os três no último parágrafo da página 66) além de uma referência errada da figura.

Proposição 18

A numeração das definições foi modificada na tradução para o Português para facilitar a identificação.

Proposição 19

Brian adicionou uma figura desnecessária, uma vez que é uma cópia da figura da proposição 18. La Hire (sexta vez) e a tradução para o Português não colocaram figura.

Proposição 20

Na tradução para o Português, foi corrigida uma troca de letra feita por La Hire e por Brian: *AB* em vez de *AD*. Também foi corrigida uma troca feita apenas no texto original: *LF* em vez de *LE*. Foi corrigida uma troca no texto em inglês: *OI* em vez de *DI*.

Parte 3 – HIPÉRBOLE

A Gênese da Hipérbole

Como a hipérbole tem dois ramos, La hire utilizou letras diferentes para cada ramo, mas para pontos no mesmo ramo utilizou a mesma letra. Robinson repetiu essa escolha. Na tradução para o Português, foi evitada essa repetição. Foi adicionado P’ para o outro ponto no mesmo ramo de P e p’ para o outro ponto no mesmo ramo de p.

Definições

La Hire definiu os conceitos de **Hipérbole, Centro**, **Eixo Determinado, Eixo Indeterminado**, **Focos**, **Ordenada**, **Diâmetro Determinado e Indeterminado** e **Tangente**. Brian Robinson não definiu **Vértice e abscissa,** como fez na parábola.

Proposição 1

A figura sobre o enunciado foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura inicial de hipérbole. Brian corrige um erro cometido no original que trocou *RP – CO* por CO – RP na segunda parte da demonstração. Mas sua tradução contém um erro ao trocar *IO* por *TO* ao fim do primeiro parágrafo. A tradução para o Português corrige esses erros.

Proposição 2

La Hire não colocou uma figura nova e utilizou a anterior. Na sua demonstração, a conclusão da congruência dos segmentos *PM* e *pM* é obtida sem a devida justificativa. Brian tenta dar alguma justificativa (cita ângulo reto), mas é insuficiente. A congruência de triângulos poderia ter sido usada.

No corolário, Brian introduz uma justificativa algébrica para obter a conclusão desejada. A tradução para o Português retira esse aditivo por parecer desnecessário, deixando exatamente como fez La Hire.

As definições de "Parâmetro do Eixo" e de "Figura de um Eixo" foram numeradas de forma acumulativa na tradução para o Português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

Proposição 3

A figura dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura na definição de Parâmetro do Eixo**.**

Uma outra seqüência de prova pode utilizar os mesmos argumentos utilizados por La Hire, só que com a ordem trocada:

Por semelhança: $IT / TV = IO / OY$. *Multiplicando por IT e TO:* $IT^2 / IT \cdot TV = IO \cdot OT / OY \cdot OT$. *Pela prop. 2:* $CT^2 / ID \cdot DT = IO \cdot OT / OY \cdot OT$. *Pela prop. 1:* $IO \cdot OT / PO^2 = IO \cdot OT / OY \cdot OT$. *Assim,* $PO^2 = OY \cdot OT$.

Proposição 4

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

O argumento da congruência de triângulos poderia ser usado para detalhar a demonstração.

Proposição 5

Essa é a sétima proposição do texto onde La Hire não colocou uma figura e utiliza uma anterior.

Para dar uma outra justificativa para a segunda parte da proposição, propõe-se a seguinte demonstração:

Na figura da proposição 6, podemos concluir que, se A é um ponto no exterior da hipérbole, então $|FA - DA| < IT$. *Para justificar este fato basta considerar P o ponto da hipérbole sobre o prolongamento de FA e notar que: (1)* $PA = FP - FA$ *por construção; (2)* $DP < DA + PA$ *pela desigualdade triangular e (3)* $|FP - DP| = IT$ *por construção. De (1), (2) e (3) podemos concluir que* $|FA - DA| < |FP - DP| = IT$.

Pela desigualdade triangular para o triângulo FSd, temos que: $FS < Fd + Sd$. *Logo* $FS - Fd\ (=FD) < Fd = IT$. *Logo S é exterior.*

Proposição 6

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Uma outra justificativa para a segunda parte da proposição pode ser feita usando as mesmas idéias que as usadas na proposição anterior só que em vez do ponto *S*, usa-se o ponto *p* da reta tangente *PE* e o triângulo *FpA*.

Proposição 7

Essa é a oitava proposição do texto onde La Hire não colocou uma figura e utiliza uma anterior.

Na tradução de Robinson há um provável erro de impressão no enunciado que troca o ângulo *FPE* por *EPE*, além de trocar o ponto P da hipérbole por T.

Proposição 8

Está faltando o corolário em [6]. A definição de Assíntota foi numerada de forma acumulativa na tradução para o Português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais não houve numeração.

Proposição 9

Provavelmente La Hire fez uma figura (a página está faltando). Nas duas traduções ela foi retirada, uma vez que é uma cópia da figura imediatamente anterior**.**

Proposição 10

A figura dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura imediatamente anterior**.** Na tradução para o Português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

Proposição 11

Essa é a nona proposição do texto onde La Hire não colocou uma figura e utiliza uma anterior.

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Uma outra justificativa, em linguagem atual, para a proposição é a seguinte: *como* $PB = TA^2 / PG$ *e pela proposição 1, quanto mais distante do centro estiver o ponto O, maior será o segmento PG. Conseqüentemente, PG pode ser feito tão grande quanto se queira. Assim, fazendo o limite de* TA^2 / PG *quanto PG tende para infinito, obtém-se um segmento PB tendendo para zero.*

Proposição 12

Na tradução para o Português, foi corrigida uma troca de letras que foi feita apenas no texto de Robinson (o triângulo *KAD* em vez de *KHD*).

Proposição 13

Na tradução para o Português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

Proposição 14

Na tradução para o Português, foi corrigida uma troca de letras (*PF* em vez de *pF*) feita pelo texto em Inglês, como também o uso inadequado do termo Ordenada feito nos dois textos.

Com as ferramentas atuais, a segunda parte da demonstração dessa proposição pode ser obtida a partir da proposição 13 quando, no limite, os pontos P e A se tornam um único ponto, ou seja, a secante vira tangente.

Proposição 15

No enunciado dessa proposição, as duas traduções separaram as letras P, F e B, D, já que La Hire se refere aos pontos escrevendo-os juntos: PF e BD.

Na tradução para o Português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

Proposição 16

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Proposição 17

Vale ressaltar que o segundo ponto A da hipérbole pode estar no outro ramo (A') como insinua a figura existente no original.

A fórmula atual do cálculo da área do paralelogramo (produto dos lados consecutivos e do seno do ângulo entre eles) poderia ser usada para finalizar a demonstração.

Proposição 18

Na tradução para o Português, a figura teve alguns pontos e segmentos retirados. Eles ressaltavam a possibilidade de os pontos da hipérbole que ilustram a proposição estarem no mesmo ramo. Eles tornavam a figura mais carregada.

Proposição 19

Na tradução para o Português, foi corrigida uma troca de letras feita por Brian (*PN* em vez de *ON*).

Proposição 20

Na tradução para o Inglês, foi omitido o uso da proposição *13*. As definições de "Diâmetros Conjugados" e de "Ordenada do Diâmetro" foram numeradas de forma acumulativa na tradução para o Português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais houve outra numeração.

Proposição 21

Essa é a décima proposição do texto onde La Hire não colocou uma figura e utiliza uma anterior. Mas ele coloca uma figura para definições seguintes.

Na tradução para o Português, é corrigida uma troca de letra na definição de parâmetro de diâmetro (*CT* em vez de *CA*) existente na versão em Inglês.

As definições de "Parâmetro do Diâmetro" e de "Figura do Diâmetro" foram numeradas de forma acumulativa na tradução para o Português, para fins de facilitação na identificação, enquanto nas demais houve outra numeração.

Proposição 22

A figura dessa proposição foi retirada nas duas traduções, uma vez que é uma cópia da figura anterior**.**

Proposição 23

Na tradução para o Português, foi evitada a repetição de letras para pontos diferentes, algo feito no original e na outra tradução.

Proposição 24

Na tradução para o Inglês, aparece uma letra C indevida na última linha do texto.

Parte 4 - AS DESCRIÇÕES DAS SEÇÕES CÔNICAS EM UM PLANO

Problema 1

É a primeira vez que um resultado não possui figura para auxiliar o entendimento.

Problema 2

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

Problema 3

Na tradução para o Português, o ponto i virou 1, o ponto I virou 1', o ponto II virou 2', o ponto III virou 3', etc. Buscou-se símbolos mais simples.

Problema 4

A terceira e a quarta figuras são retiradas na tradução para o Inglês, pois é repetição das duas primeiras. Mas a tradução para o português só retira a quarta, pois a terceira sofreu uma pequena modificação. E ainda nesta tradução, uma nova figura é acrescentada na tradução para o português na última descrição que utilizou o círculo.

Problema 5

Nenhuma modificação foi feita nas duas traduções.

CAPÍTULO 6

DESCRIÇÃO E COMENTÁRIOS SOBRE A OBRA

6.1 – Uma breve descrição da obra completa de 1679

O texto publicado por Philippe de La Hire em 1679 [6] tem 452 páginas, fora o prefácio da primeira parte. É dividido em três partes:

- A primeira aborda as seções cônicas: **"Novos elementos das seções cônicas"**. Ela apresenta diversas propriedades das cônicas a partir de uma definição que utiliza o(s) foco(s), de forma isolada e totalmente no plano.
- A segunda parte, "**Os lugares geométricos",** apresenta diversos lugares geométricos e as respectivas equações analíticas que os representam. Em seguida, faz uma série de definições a respeito dos lugares geométricos e apresenta modelos básicos de equações a fim de reduzir equações mais complicadas nesses modelos. Por fim, associa determinadas equações aos lugares geométricos pré-definidos fazendo as demonstrações.
- A terceira, **"A construção das equações analíticas"**, faz a construção geométrica das soluções das equações analíticas, utilizando os lugares geométricos apresentados anteriormente e suas respectivas equações.

Embora as três partes possuam algum vínculo, a ligação mais forte existente é entre a segunda e a terceira partes. Elas possuem um perfil analítico e o seu alvo reside na relação entre as curvas e suas respectivas equações analíticas.

Já a primeira parte tem um enfoque sintético. Ela pode ser considerada um outro livro. A segunda e a terceira partes utilizam esta primeira parte como motivação e ponto de partida para a descrição de lugares geométricos através de equações.

Conforme visto no capítulo anterior, foi feita a tradução da primeira parte "Novos elementos das seções cônicas", exclusivamente. Exatamente como fez Brian Robinson, em 1723. A motivo da escolha desta parte está na crença de que, além de um texto histórico relevante, ela merece ser lida por outras pessoas interessadas no tema em razão da sua simplicidade e da sua atualidade. É um texto que pode servir para ampliar o conhecimento sobre as curvas cônicas através de um enfoque sintético, o que enriquece a formação do professor que, na sua maioria, conhece apenas o enfoque analítico predominante nos dias de hoje. Além disso, pode servir de aplicação para conteúdos do programa de ensino de geometria nos ensinos fundamental e médio do Brasil.

O presente texto irá, conseqüentemente, abordar apenas esta primeira parte da obra de Philippe de La Hire sobre as seções cônicas. A obra será descrita e comentada, sob um ponto de vista atual. O conteúdo das proposições, a forma como La Hire as demonstrou, a interligação entre propriedades análogas das diferentes cônicas e a conexão com a linguagem utilizada atualmente.

6.2 – A descrição do livro *"Novos elementos das seções cônicas"*

Neste livro, La Hire apresenta separadamente cada uma das cônicas, exclusivamente no plano, em 176 páginas. Ele define cada uma delas a partir de uma propriedade em relação aos focos e enuncia um conjunto de proposições sobre cada curva. Sobre a parábola faz 17 teoremas, sobre a elipse faz 20 teoremas e 2 lemas e sobre a hipérbole mais 24 teoremas. Ao final, faz uma descrição das seções cônicas onde propõe cinco problemas de construção das cônicas a partir de outros dados que não sejam os focos. Será feita, a seguir, a descrição desse texto, proposição a proposição, com os comentários que consideramos pertinentes para sua efetiva execução.

Parte 1 - A PARÁBOLA

La Hire definiu a "Parábola" no plano através da propriedade da eqüidistância dos seus pontos a um ponto dado (Foco) e a uma reta dada (hoje chamada “Diretriz”).

Fez uma construção que obtém um ponto P da parábola através de um triângulo isósceles PAF de base AF, onde F é o foco, A pertence à diretriz e PA é perpendicular à diretriz .

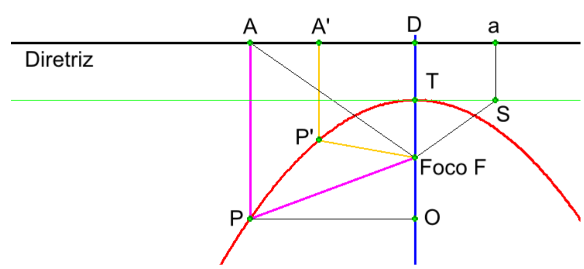
No corolário, ao afirmar que o ponto T pertence à curva, deixou claro o seu conhecimento sobre esse ponto especial hoje chamado “vértice”, embora não utilize nenhum termo especial para ele.

A seguir, veio uma série de definições. Chamou a curva construída de "**Parábola"** e diversos elementos geométricos que podem ser evidenciados na construção são nomeados: o **Foco F** como aquele ponto usado na definição de parábola, o **Eixo**[1] como a reta perpendicular à diretriz que contém o foco, **Ordenada** como o segmento perpendicular ao eixo limitado pela parábola e pelo eixo, **Diâmetro**[2] como uma semi-reta paralela ao eixo limitada pela parábola e interior a ela e **Tangente** como a reta exterior à parábola que a cruza em apenas um ponto.

O texto contém **17** proposições sobre a parábola e mais **3** definições: **Parâmetro do Eixo, Ordenada de um Diâmetro** e **Parâmetro do Diâmetro**. Estas proposições e definições serão descritas a seguir.

PROPOSIÇÃO 1

*O quadrado da ordenada de um ponto **P** qualquer da parábola é igual ao produto da distância*[3] *entre o vértice **T** e a projeção **O** perpendicular de **P** sobre o eixo e de uma constante que é igual ao dobro da distância entre o foco **F** e a interseção **D** entre o eixo e a diretriz, ou seja,* $PO^2 = TO \cdot 2FD$.



Obs. 1 : La Hire não usou o termo simetria, pois este só viria a ser utilizado por Legendre cerca de 150 anos depois.
Obs. 2 : ele definiu diâmetro como uma semi-reta, mas o utiliza no texto como uma reta..
Obs. 3 : Essa distância é hoje chamada “Ordenada”, uma vez que é a projeção ortogonal sobre o eixo Y que coincide com o eixo da parábola e é perpendicular ao eixo X. A origem desse par de eixos costuma ficar no vértice T.

Na demonstração dessa proposição, utilizou o paralelismo existente entre o eixo e a projeção ortogonal do ponto P da parábola, a eqüidistância de P ao foco e à diretriz e o resultado que conhecemos hoje por Teorema de Pitágoras.

No primeiro corolário, definiu uma constante 2· FD que chama Parâmetro do Eixo (hoje também chamada distância focal mínima por ser a menor entre as cordas que passam pelo foco).

No segundo corolário, informou que a distância entre o foco e o vértice FT corresponde ¼ do parâmetro, ou seja, T é o ponto médio de FD.

No terceiro corolário, concluiu que as razões entre os quadrados das ordenadas de dois pontos da parábola e suas respectivas abscissas (segundo Robinson) são iguais entre si e ao parâmetro, propriedade apresentada pela primeira vez por Arquimedes página 40 de [1].

Esta proposição será usada na proposição 16 e o seu corolário 3, na proposição 11.

Esta primeira proposição vem a ser aquela que, segundo Vicenzo Bongiovanni em sua Tese de Doutorado [1], foi utilizada por Apolônio para justificar a origem do termo "Parábola". Em grego, significa "superposição" e foi usado por Euclides em "Os Elementos" para expressar a idéia de igualdade entre as áreas de duas figuras. No nosso caso, há equivalência entre as áreas de um quadrado cujo lado é a ordenada e um retângulo cujos lados são abscissa e o Parâmetro. O próprio Philippe de La Hire faz um comentário sobre as três cônicas a partir dessa proposição, no prefácio da sua obra [6].

A sua demonstração em linguagem analítica atual ficaria assim: sendo $\boldsymbol{x}$ a abscissa, $\boldsymbol{p}$ o parâmetro *2FD* e *y* a ordenada *TO,* aplica-se o Teorema de Pitágoras para o triângulo POF, onde $PF = y + p / 4$, $PO = x$ e $FO = y - p / 4$. Ao desenvolvermos, surge a equação analítica atual $y = x^2 / p$.

PROPOSIÇÃO 2

*A reta paralela à diretriz e que passa pelo vértice **T** é uma tangente à parábola (figura da proposição **1**).*

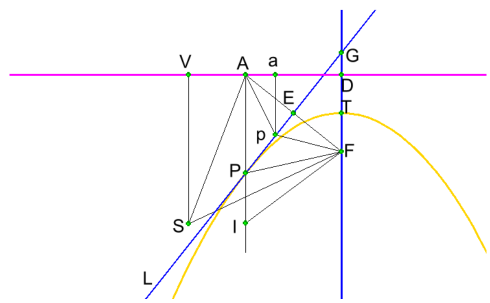
Na sua prova, sugeriu que pudesse existir outra interseção, por absurdo, além do vértice T. Utilizou paralelismo, a definição de parábola e o triângulo retângulo para concluir ser o vértice a única interseção entre a parábola e essa reta. Em seguida, provou que todos os pontos da reta são exteriores à parábola, seguindo a sua definição de tangente.

Vale comentar que ele não definiu o que é exterior e interior, mas conhecia claramente o seu significado, uma vez que a parábola divide o plano em duas regiões: interior seria a região onde está o foco e exterior, a outra região.

Essa proposição faz parte daqueles teoremas que chamaremos de "*visualmente perceptíveis*". Para quem tem mínima familiarização com a cônica, fica a forte intuição da validade do resultado pela simples observação de um desenho da curva e dos elementos.

PROPOSIÇÃO 3

*Um diâmetro sempre cruza a parábola em um único ponto **P***



Para prová-lo, utilizou a definição de parábola e a desigualdade triangular. Ela também é uma proposição visualmente perceptível.

Vale frisar que, embora o conceito de "Diâmetro" da parábola apresentado por La Hire pareça ser diferente do conceito de "Diâmetro" da elipse e da hipérbole que ele apresenta a seguir, eles são todos equivalentes. Isso é verdade, pois a parábola possui o centro e o segundo foco infinitamente distantes do primeiro foco, o que torna o diâmetro paralelo ao eixo que contém os focos, algo que não acontece com a elipse e a hipérbole. Assim, o diâmetro da parábola continua passando pelo centro e unindo dois pontos da cônica, exatamente como acontece com os diâmetros da elipse e na hipérbole.

PROPOSIÇÃO 4

*Se o ponto **A** é a projeção perpendicular do ponto **P** da parábola sobre a diretriz, a mediatriz de **FA** é tangente à parábola por **P** (figura da proposição **3**).*

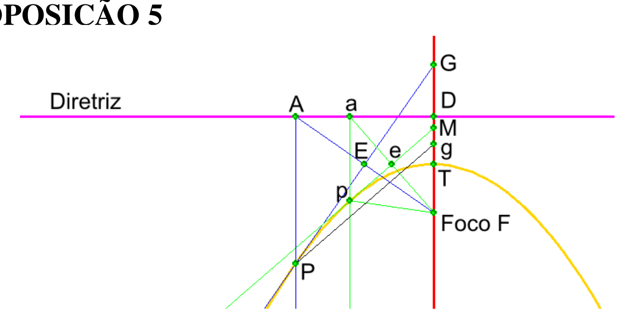
Provou inicialmente a unicidade da interseção (redução ao absurdo, usando a definição de parábola, a desigualdade triangular e o triângulo retângulo) e, em seguida, o fato de serem os pontos da reta exteriores à parábola, também por absurdo.

No corolário, afirmou serem congruentes os ângulos *FGE*, *FAD*, *APE* e *FPE*. Igualmente, os ângulos *PAE* e *AFD*. Por conseguinte, o triângulo *FPE* é congruente ao triângulo *APE* e o triângulo *PFG* é isósceles de base PG.

Essa proposição será utilizada nas demonstrações das proposições 5, 6 e 9, como seu corolário nas proposições 7 e 8.

PROPOSICÃO 5

*Por um ponto **P** da parábola só existe uma única*



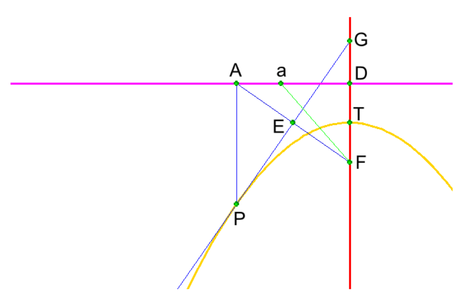
Ele provou por absurdo, supondo que exista uma segunda tangente por P. Mas utilizou o fato da parábola ser uma curva convexa algo que não foi provado.

É uma proposição visualmente perceptível.

No corolário, diz que uma reta tangente qualquer tem interseção com todos os diâmetros, com o eixo e com todas as outras tangentes.

PROPOSIÇÃO 6

*Dado um ângulo menor que 90°, é sempre possível achar uma tangente por um ponto **P** que forme com o eixo um ângulo **PGF** menor que o ângulo dado.*



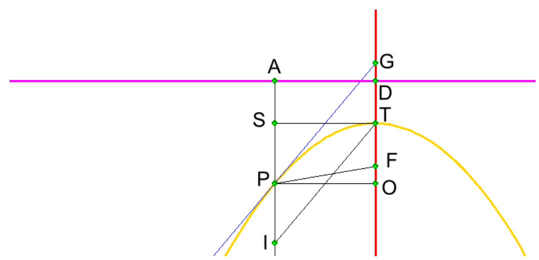
Na prova, utilizou a proposição 4. Ele a utilizará para provar a proposição 13.

Esta proposição utilizou um fato já afirmado por La Hire na construção feita no início da obra: dado um ponto da parábola, sempre existirá outro mais distante do vértice que o primeiro. Além disso, enfatizou o fato de quanto mais distante do vértice estiver um ponto P da parábola, menor será o ângulo que a tangente por este ponto forma com o eixo.

La Hire não apresentou proposições análogas a esta para elipse e hipérbole, apesar de existirem.

PROPOSIÇÃO 7

Sendo ***G*** *a interseção da tangente por* ***P*** *com o eixo e* ***O*** *a projeção ortogonal de* ***P*** *sobre o eixo, o vértice* ***T*** *é o ponto médio do segmento* ***GO****.*



Na demonstração dessa proposição, fez uso do paralelismo das construções, da definição de parábola, do corolário da proposição 4 e de subtração de quantidades iguais.

No corolário, conclui ser P o ponto médio de SI (sendo S a projeção de T sobre o diâmetro por P e I a interseção da reta paralela à tangente por P que passa por T e o diâmetro por P).

Essa proposição será utilizada nas provas das proposições 10, 15 e 16.

PROPOSIÇÃO 8

Uma tangente por ***P*** *forma com o diâmetro por* ***P*** *e com a reta* ***PF*** *ângulos congruentes (figura da proposição 7).*

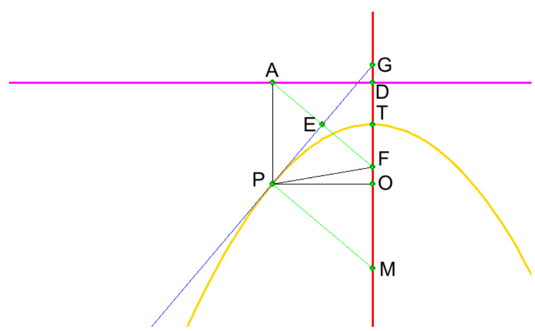
Na sua prova, usou ângulos opostos pelo vértice, o triângulo isósceles do corolário da proposição 4 e a propriedade transitiva.

Na proposição, os ângulos eram agudos. No seu corolário, conclui novamente a congruência só que para ângulos obtusos.

Esta propriedade ressalta uma característica da parábola muito usada na Física e com muitas aplicações práticas. Um raio de luz que chega paralelamente ao eixo de uma parábola, ao bater na superfície refletora parabólica, retorna obrigatoriamente pelo foco, qualquer que tenha sido o ponto P de contato. Se esses raios forem muito numerosos, o foco será um ponto de convergência de numerosos raios refletidos. Como exemplo, o receptor de ondas eletromagnéticas de uma antena parabólica e a lâmpada de um farol de um carro são colocados no foco comum das inúmeras parábolas formadas pela superfície refletora existente nos dois equipamentos. É então chamada de propriedade ótica.

PROPOSIÇÃO 9

*O segmento **OM** é metade do Parâmetro do Eixo (sendo **O** a projeção perpendicular de **P** sobre o eixo e **M** a interseção da perpendicular à tangente por **P** que passa por **P** e o eixo).*



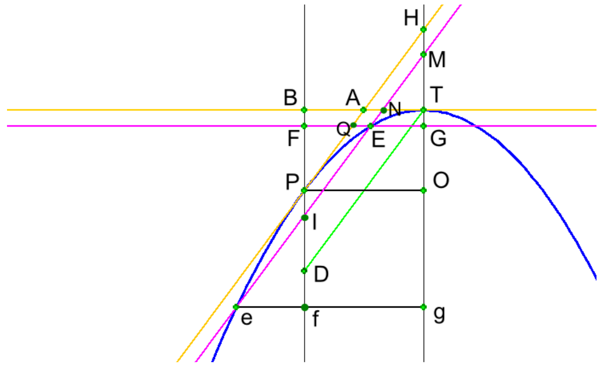
Utilizou o paralelismo, a proposição 4 e a congruência entre os triângulos ADF e POM na prova desse proposição.

Esta proposição será utilizada para provar a proposição 16.

PROPOSIÇÕES 10, 11 e 12

Nessas três proposições, são apresentadas congruências e/ou equivalência entre polígonos. As provas utilizam adição e subtração de polígonos equivalentes.

Na décima: *os triângulos **TAH** e **BAP** são congruentes.*



Na sua demonstração, usou paralelismo e a proposição **7**.

No seu corolário, afirma serem equivalentes os polígonos *TDB* e *TDPH*, assim como *TOPB* e *POH*.

Esta proposição será usada nas proposições 11 e 12.

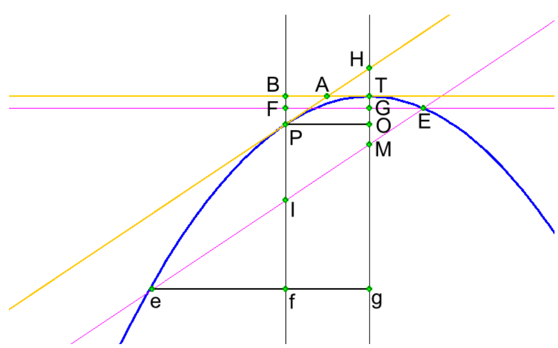
Na décima primeira: *o triângulo **EGM** é equivalente ao quadrilátero **GTBF.** (figura da proposição **10**).*

Na sua demonstração, utilizou paralelismo, semelhança entre os triângulos EGM e POH e os corolários das proposições 1 e 10.

Analogamente, demonstrou que egM é equivalente ao quadrilátero TgfB.

Esta proposição será usada na proposição 12.

Na décima segunda: *o triângulo **EFI** é equivalente ao paralelogramo **PIMH.***



Na sua demonstração, fez uso das proposições 10 e 11. Provou o mesmo resultado para três possíveis localizações do ponto E da parábola: a primeira que está na figura da proposição 10 e as outras duas mostradas nesta figura.

Analogamente mostrou que efI é equivalente ao paralelogramo PIMH.

Esta proposição será usada nas proposições 13 e 14.

PROPOSIÇÃO 13

*Se for traçada uma reta secante à parábola e paralela à tangente **PH** pelo ponto **E** da parábola, então esta reta encontrará a parábola em outro ponto **e**. Além disso, o segmento **EI** é igual ao **Ie**, sendo **I** pertencente ao diâmetro **PI** (figura da proposição **12**).*

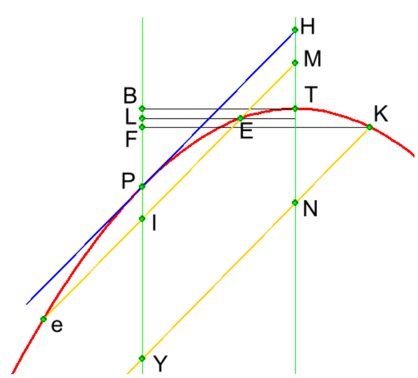
Na demonstração da primeira parte, fez uso do paralelismo, da definição de tangente e da proposição 6. Na segunda parte, usou a transitividade decorrente da proposição 12. Outra forma de enunciar a 2ª parte desta proposição seria: um segmento paralelo à tangente por P e limitado pela parábola (no círculo chamaríamos de corda) é dividido ao meio pelo diâmetro por P.

Esta proposição será usada nas proposições 15 e 16.

Definiu "Ordenada de um Diâmetro", que generaliza o conceito de "Ordenada de um Eixo", sendo que não se verifica mais a perpendicularidade entre eles nesse caso geral.

PROPOSIÇÃO 14

*Os quadrados das ordenadas **EI** e **KY** de um mesmo diâmetro por **P** estão um para o outro, assim como as partes deste diâmetro **PI** e **PY**.*



Na sua demonstração, usou semelhança de triângulos e a proposição **12.**

No corolário, afirmou que o quadrado da ordenada de um diâmetro é equivalente ao retângulo de lados iguais à sua respectiva parte do diâmetro e ao parâmetro desse diâmetro.

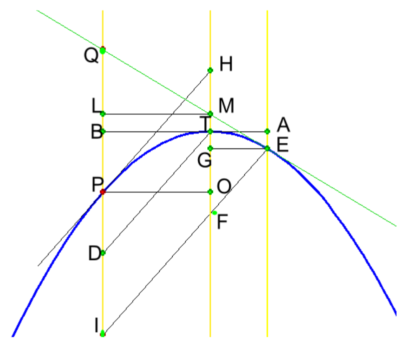
Este corolário será usado na proposição 16.

Definiu "Parâmetro de um Diâmetro" como a razão entre o quadrado de uma ordenada e sua respectiva parte do diâmetro.

Essa proposição nada mais é do que uma generalização da primeira proposição, ou seja, conclui que o quadrado de uma ordenada é igual ao produto da sua respectiva parte do diâmetro pelo parâmetro, sejam eles relativos a um diâmetro qualquer ou ao diâmetro especial que é o Eixo. Como o eixo pode ser visto como um caso particular de diâmetro, então se constata a generalização.

PROPOSIÇÃO 15

*O ponto da parábola **P** é o ponto médio do segmento **IQ**.*



Na sua demonstração, usou o corolário 3 da proposição 1, a semelhança dos triângulos BTD e GEF como também QLT e GEM e as proposições 7 e 13.

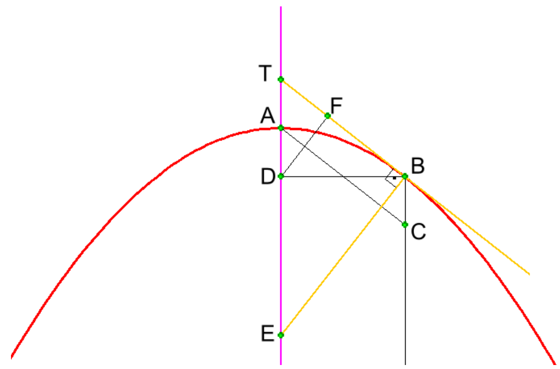
Esta proposição é uma generalização da sétima proposição. Ela pode ser assim enunciada: uma tangente por E e uma ordenada (// à esta tangente) concorrentes num mesmo ponto E da parábola interceptam o diâmetro por P em dois pontos cujo ponto médio é P. Quando o ponto P coincide com o vértice T, a proposição 15 vira a proposição 7.

PROPOSIÇÕES 16 E 17

La Hire mostrou propriedades do parâmetro do diâmetro nestas duas proposições.

Na décima sexta, apresentou uma visualização geométrica para o "Parâmetro do Diâmetro".

*O parâmetro do diâmetro por **P** excede o parâmetro do eixo em **4· TO**.*



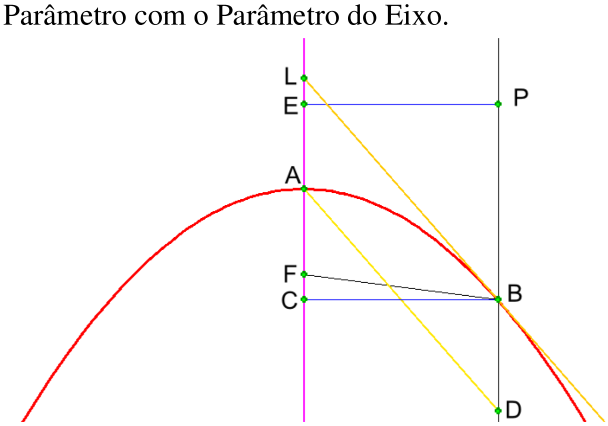
Na prova, fez uso de semelhança de triângulos BDT e BFD como também EBT e DFT e as proposições 1, 7, 9, 13 e o corolário da 14. Ela será utilizada na proposição 17.

No corolário, conclui que quanto mais distante estiver um diâmetro do eixo maior será o seu parâmetro.

Esta proposição será usada na proposição 17.

Na décima sétima, mostra a relação deste Parâmetro com o Parâmetro do Eixo.

*O segmento que une um ponto **B** da parábola ao foco é ¼ do parâmetro do diâmetro por **P**.*



Na prova, utilizou a definição de parábola, a proposição 16 e o corolário da 2 da proposição 1.

No corolário, afirmou que, uma vez conhecida a parábola, este teorema apresenta uma forma muito simples de se achar o parâmetro de qualquer diâmetro.

Parte 2 - A ELIPSE

La Hire definiu a elipse no plano através da propriedade da soma constante das distâncias dos pontos da curva a dois pontos dados (Focos). Essa soma é igual ao segmento dado IT.

Fez uma construção que obtém dois pontos P e P' da elipse através da interseção de dois círculos centrados nos focos e com raios que somados valem IT.

Afirmou que o segmento IT é perpendicular ao segmento PP', percebendo que o segmento IT funciona como um eixo de simetria, embora não utilize esse termo. Diz que o ponto T pertence à curva, deixando claro o seu conhecimento desse ponto especial hoje chamado vértice, embora não utilize nenhum termo específico para ele.

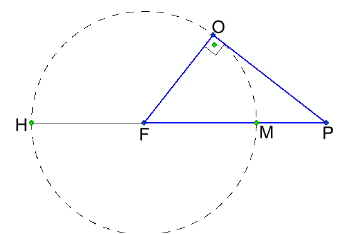
A seguir, veio uma série de definições. Chamou a curva construída de "**Elipse**" e diversos elementos geométricos que podem ser evidenciados na construção: ***o*** **Centro *C*** como o ponto médio do segmento IT**,** ***o Grande*** **Eixo** como aquele segmento *IT* usado na definição (hoje comumente chamado "Eixo Maior" e chamado por Robinson "Eixo Transversal")***, o Pequeno*** **Eixo** *MN* como o segmento perpendicular ao Grande Eixo que contém o centro e é limitado pela elipse (hoje comumente chamado "Eixo Menor" e chamado por Robinson "Eixo Conjugado")***, os*** **Focos** *F e D* como aqueles pontos usados na definição de elipse***, as*** **Ordenadas de um Eixo** como os segmentos perpendiculares ao eixo limitados pela elipse e pelo eixo**, os Diâmetros** como os segmentos que passam pelo centro e unem dois pontos da elipse **e as Tangentes** como as retas exteriores à elipse que a cruzam em apenas um ponto.

Ao contrário da parábola, ele parece não ter definido a tangente como uma reta que contém apenas pontos exteriores, exceto o ponto de tangência, apesar de obviamente conhecer essa característica. Nas demonstrações, onde provou que determinada reta é uma tangente, ele não demonstrou que tal reta é exterior.

O texto contém 20 proposições, 2 Lemas e mais 6 definições sobre a elipse: **Parâmetro do Eixo, Figura do Eixo**, **Diâmetros Conjugados**, **Ordenada de um Diâmetro** e **Parâmetro do Diâmetro e Figura de um Diâmetro**. Estas proposições, lemas e definições serão descritas a seguir.

LEMA 1

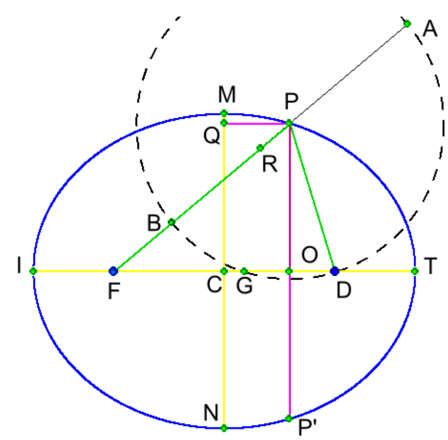
*Sejam o círculo de centro **F** e raio **FO**, o ponto **P** externo ao círculo, os pontos **H** e **M** interseções da reta **PF** com o círculo. Então:*
$\underbrace{(FP+FO)}_{PH}\cdot\underbrace{(FP-FO)}_{PM}=PO^2$.



Este lema é um resultado que chamamos hoje de Teorema de Pitágoras, mas aplicado ao círculo vira o conceito atual de "Potência de um Ponto" em relação ao círculo.

PROPOSIÇÃO 1

*O quadrado do semi-eixo maior **CT** da elipse está para o produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo extremo **O** da ordenada **PO** assim como o produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo foco **D** está para o quadrado da ordenada **PO** do eixo maior, ou seja,* $\dfrac{CT^2}{IO\cdot OT}=\dfrac{ID\cdot DT}{PO^2}$.



É a prova mais longa entre todas as proposições sobre elipse. Sua demonstração utilizou a definição de elipse, o lema 1, diversas propriedades de proporção e multiplicação de quantidades iguais.

Essa proposição será usada nas proposições 2, 3 e 4.

Equivale à proposição 1 de parábola (será mostrado na proposição 1 de hipérbole).

Esta proposição dá origem à equação analítica usual da elipse, pois *CT* é o semi-eixo maior *a*, *PO* = *y* (ordenada), $ID \cdot DT$ é o quadrado do semi-eixo menor *b* (proposição 2) e *CO* = *x* (abscissa). Substituindo: $\frac{a^2}{(a+x)(a-x)} = \frac{b^2}{y^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$.

PROPOSIÇÃO 2

*O produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo foco **D** é igual ao quadrado do semi-eixo menor **CM**, ou seja, $ID \cdot DT = CM^2$ (figura da proposição **1**).*

A prova é imediata a partir da proposição 1 quando a ordenada do eixo maior coincide com o semi-eixo menor, ou seja, quando P coincide com M.

Em linguagem atual, $(a + c) \cdot (a - c) = b^2$, o que resulta na relação Pitagórica entre os parâmetros a (semi-eixo maior), b (semi-eixo menor) e c (metade da distância focal): $a^2 = b^2 + c^2$. Essa proposição será usada nas proposições 3 e 4.

PROPOSIÇÕES 3 e 4

*O quadrado de um eixo da elipse está para o quadrado do outro eixo, assim como o quadrado de uma ordenada deste último eixo está para produto das partes deste eixo formadas pelo extremo desta ordenada (figura da proposição **1**).*

Na proposição 3, a ordenada PO do Eixo Maior: $\frac{NM^2}{IT^2} = \frac{PO^2}{IO \cdot OT}$.

Na proposição 4, a ordenada PQ do Eixo Menor: $\frac{PQ^2}{NQ \cdot QM} = \frac{IT^2}{NM^2}$.

A prova da terceira proposição combinou as duas primeiras proposições.

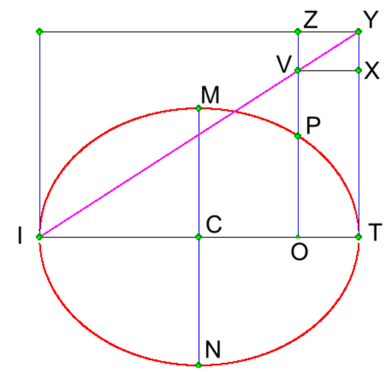
A prova da quarta também usou as mesmas proposições, além de usar paralelismo e propriedades de uma proporção.

A proposição 3 será usada nas proposições 5 e 14, enquanto a 4 será usada na 12.

La Hire definiu "Parâmetro YT de um Eixo" (figura seguinte) como a razão entre o quadrado do outro eixo e o seu eixo. Em seguida, "Figura de um Eixo" como o retângulo cujos lados são este Eixo e o seu Parâmetro. Note que a definição de Parâmetro da elipse é aparentemente diferente da que foi usada na parábola. Veremos, mais adiante, na definição de parâmetro da hipérbole que as três definições são equivalentes.

PROPOSIÇÃO 5

*O quadrado cujo lado é a ordenada **PO** somado com o retângulo **VXYZ** (que é semelhante à figura do eixo **IT**) é equivalente à figura IY que é o retângulo de lados **IT** e **TY**, ou seja,* $PO^2 = VO \cdot OT$.



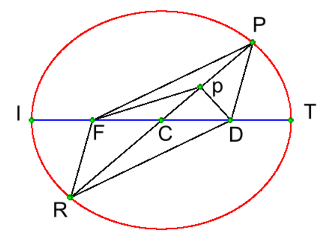
A sua demonstração usou a proposição 3, a definição de parâmetro, a semelhança entre os triângulos IVO e IYT e a propriedade transitiva.

Esta proposição vem a ser aquela que, segundo Vicenzo Bongiovanni em sua tese de doutorado [1], foi utilizada por Apolônio para justificar a origem do termo “Elipse”. Em grego, significa “falta” e foi usado por Euclides em “Os elementos” para expressar a idéia de uma área menor que a de uma figura dada. No nosso caso, o quadrado cujo lado é a ordenada é menor que o retângulo cujos lados são uma parte do eixo entre o vértice e o extremo da ordenada e o seu parâmetro. O próprio Philippe de La Hire faz um comentário sobre as três cônicas a partir dessa propriedade, no prefácio da sua obra.

Este resultado pode ser comparado com a proposição 1 de parábola ($PO^2 = TO \cdot TY$), da seguinte forma: o quadrado da ordenada PO é menor que o produto da projeção TO pelo parâmetro TY.

PROPOSIÇÃO 6

*Todos os diâmetros são divididos ao meio pelo centro **C**.*



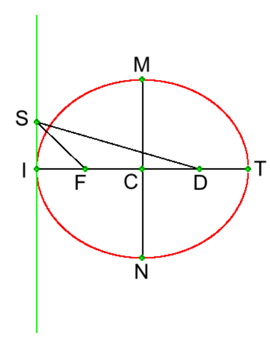
Ele provou por absurdo, supondo que C não fosse o ponto médio, mas sim p. Entretanto, para completar a sua prova, seria necessário um lema que limitasse a dois pontos as interseções entre uma reta e a elipse.

Essa proposição será usada na proposição 17.

Equivale à proposição 3 de parábola, pois se mantivermos fixos o foco F da elipse e seu vértice mais próximo I e afastarmos o seu centro C de um ponto P da elipse que tenha ordenada constante, geraremos outras elipses. Se afastarmos infinitamente, a elipse vira uma parábola e esse diâmetro passa a ter uma única interseção com a cônica e ficará paralelo ao eixo, resultando na proposição 3 de parábola.

PROPOSIÇÃO 7

*Uma reta perpendicular ao eixo maior **IT**, que cruza sua extremidade **I**, tangencia a elipse neste ponto **I**.*



Ele demonstrou, por absurdo, que a interseção é única, usando a definição de elipse e a propriedade do triângulo retângulo.

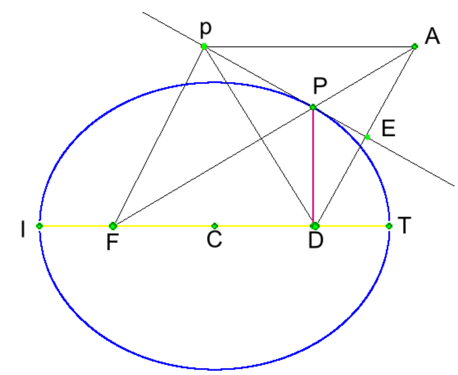
Se ele tivesse definido tangente como fez na parábola, faltaria provar que todos os pontos desta reta são exteriores.

Ela equivale à proposição 2 de parábola.

Esta proposição é uma daquelas que chamamos de “visualmente perceptível”.

PROPOSIÇÃO 8

*A mediatriz do segmento **DA** é tangente à elipse no ponto **P** (sendo **F** e **D** focos e **A** o prolongamento de **FP** com **PA** = **PD**).*

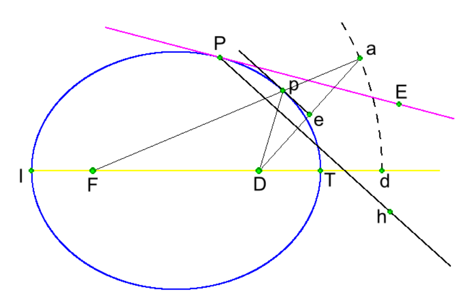


Ele provou, por absurdo (supôs que o ponto p fosse um segundo ponto da elipse), que a interseção é única, usando a definição de elipse, o triângulo isósceles pAD e a desigualdade triangular. Se ele tivesse definido tangente como fez na parábola, faltaria provar que todos os pontos desta reta são exteriores.

Esta proposição equivale à proposição 4 de parábola. A diferença está na localização do ponto A: na parábola está sobre uma reta e na elipse está sobre um círculo (La Hire assim afirmou na proposição 9). Atualmente, o denominamos “Círculo Diretor”. Quando a elipse vira uma parábola, o raio do "Círculo Diretor" cresce infinitamente, transformando-o numa reta (diretriz).

PROPOSIÇÃO 9

*A tangente à elipse que passa pelo ponto **P** é única.*



Ele provou, por absurdo (supôs que o ponto Ph fosse a segunda tangente), que a interseção é única, utilizando paralelismo, congruência de triângulos e as definições de elipse e tangente. La Hire usou também o fato da elipse ser convexa (quando afirmou: "*a linha Ph paralela à pe encontrará necessariamente as linhas Fp e Dp no interior da elipse*"), algo que não foi provado no seu texto.

Ela equivale à proposição 5 de parábola.

Durante a prova, ele utilizou um círculo que vem a ser o "Círculo Diretor" da elipse (círculo de centro em um dos focos e raio igual ao segmento de referência IT). Embora não o tenha definido nem explorado, resta a desconfiança que ele já conhecia alguma coisa sobre as propriedades excepcionais desse círculo.

PROPOSIÇÃO 10

*A tangente por um ponto **P** da elipse forma com os segmentos que unem **P** aos focos (hoje chamados raios vetores) ângulos congruentes (figura da proposição **8**).*

Na sua prova, usou a definição de elipse, ângulos opostos pelo vértice, o triângulo isósceles DPA e a propriedade transitiva.

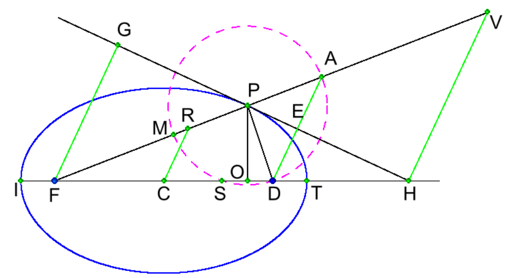
No corolário, afirmou que os ângulos *EPF* e *DPp* são congruentes.

Ela equivale à proposição 8 de parábola, sendo que o foco D da parábola está sobre o diâmetro PI e infinitamente distante do foco F.

Esta propriedade ressalta uma característica da elipse usada na Física e com aplicações práticas. Se uma fonte de luz for colocada em um dos focos da elipse, os raios de luz emitidos refletirão na superfície refletora elíptica e voltarão todos na direção e no sentido do outro foco, qualquer que tenha sido o ponto P da elipse. O outro foco será o ponto mais bem iluminado da região, formando uma imagem real. Essa propriedade é conhecida, então, como propriedade ótica.

PROPOSIÇÕES 11 E 12

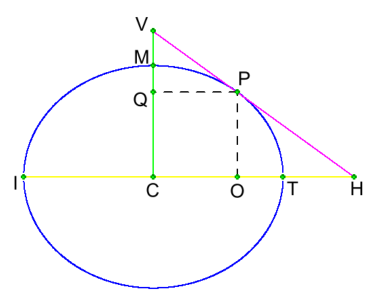
*O semi-eixo é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro **C** até as interseções do eixo com a ordenada por **P** e com a tangente que passa por **P**.*



Na proposição 11, sendo o segmento CT o semi-eixo maior: $\frac{CO}{CT}=\frac{CT}{CH}$.

Na demonstração da proposição 11, ele utilizou a definição de elipse, o lema 1, a semelhança dos triângulos FPG e PAE, FGH e DEH, FAD e FVH, o Teorema de Tales e propriedades de proporção. No seu corolário, afirmou que os pontos O e T dividem harmonicamente o segmento IH, ou seja, IO $\cdot$ TH = IH $\cdot$ OT.

Esta proposição será usada nas proposições 12 e 13.



Na proposição 12, sendo o segmento CM o semi-eixo menor: $\frac{CQ}{CM}=\frac{CM}{CV}$.

Já na demonstração da proposição 12, usou as proposições 4 e 11, semelhança dos triângulos VQP e VCH e propriedades de proporção.

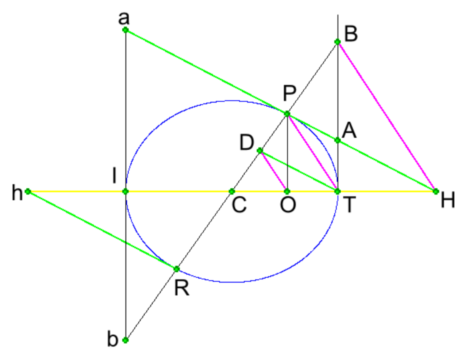
A proposição 11 equivale à proposição 7 de parábola. Se manipularmos o resultado $\frac{CO}{CT}=\frac{CT}{CH}$ da elipse, podemos dar origem à propriedade TO = TH da parábola. Fazendo: CT^2 = (CT + TH) (CT – TO) $\rightarrow$ CT $\cdot$ TH = CT $\cdot$ TO + TO $\cdot$ TH $\rightarrow$ TH = TO + $\frac{TO \cdot TH}{CT}$. Fazendo o limite dessa expressão quanto CT tende ao infinito, temos que $\lim_{CT \to \infty} TH = \lim_{CT \to \infty} \left(TO + \frac{TO \cdot TH}{CT} \right)$ e assim TH = TO que é a proposição 7 de parábola.

O corolário da proposição 11 foi o único momento da parte de elipse onde La Hire usou a divisão harmônica, ferramenta que foi utilizada com muito mais intensidade na suas obras de 1673 e 1685.

PROPOSIÇÕES 13, 14 e 15

Nessas três proposições, são apresentadas equivalências entre polígonos. As provas utilizam adição e subtração de áreas iguais, entre outras coisas.

Na décima terceira: *os triângulos* ***PAB*** *e* ***TAH*** *são equivalentes.*



Na sua demonstração, usou paralelismo, semelhança de triângulos COP e CTB e a proposição 11.

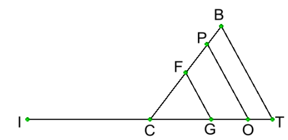
No corolário 1, afirmou serem equivalentes os triângulos *PDT* e *POT*, os triângulos *CTB* e *CPH*, os quadriláteros POTB e PDTH e os triângulos POH e DTB.

No corolário 2, afirmou serem equivalentes os triângulos *CIb* e *CPH*, assim como os triângulos *Pab* e *IaH*. Além disso, a reta *Rh* é paralela à *PH*, ou seja, as tangentes que passam pelas extremidades de um mesmo diâmetro são paralelas entre si.

Seus corolários serão usados nas proposições 14 e 15.

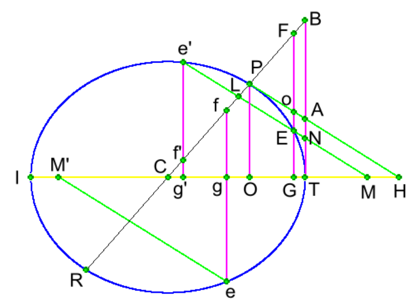
Ela equivale à proposição 10 de parábola.

No lema 2, mostrou uma proporção entre dois retângulos e dois trapézios: *o Sendo o segmento **CI** igual ao **CT** e os segmentos **OP** e **FG** paralelos ao **TB**, então o retângulo **IOT** : retângulo **IGT** :: trapézio **POTB** : trapézio **FGTB**.*



Na sua demonstração, utilizou semelhança de triângulos e propriedades de proporção. Este lema será usado na proposição 14 e 17.

Na décima quarta: *o triângulo **EGM** é equivalente ao quadrilátero **GTBF**.*



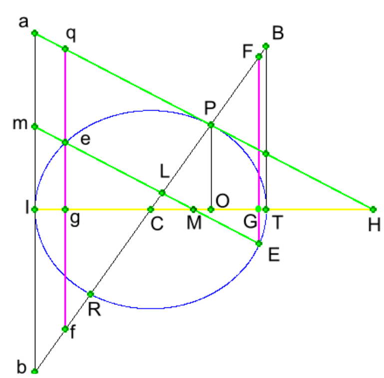
Na sua demonstração, utilizou semelhança de triângulos POH e EGM, a proposição 3, o corolário 2 da proposição 14 e o lema 2.

Essa proposição será usada na proposição 17.

Faz a demonstração análoga para o ponto *E* em duas outras posições.

Ela equivale à proposição 11 de parábola.

Na décima quinta: *o triângulo **ELF** é equivalente ao quadrilátero **LPHM**.*



Na sua demonstração, fez uso do corolário 1 da proposição 13 e da subtração de quantidades iguais.

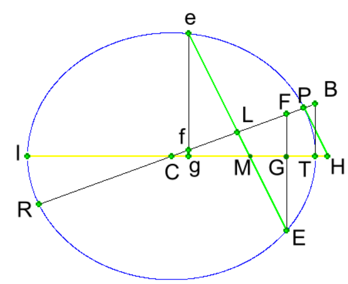
Fez a demonstração análoga para o ponto *E* em cinco outras posições. E indica que outras posições utilizam as demonstrações já mostradas.

Essa proposição será usada nas proposições 16 e 17.

Ela equivale à proposição 12 de parábola.

PROPOSIÇÃO 16

*Todos os segmentos de extremos na elipse (cordas) paralelos a uma tangente por **P** são divididos ao meio pelo diâmetro por **P**.*



Na sua demonstração, fez uso da semelhança entre os triângulos ELF e efL e da proposição 15.

É análoga à segunda parte da proposição 13 de parábola.

Essa proposição será usada nas proposições 18 e 20.

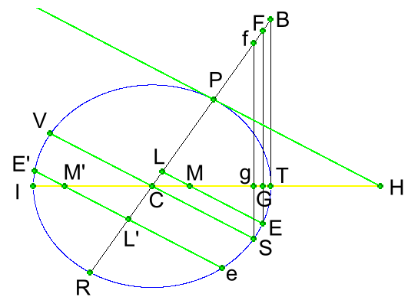
Esta proposição cria as condições para a definição dos “Diâmetros Conjugados”.

Outra forma de enunciar esta proposição seria: um segmento paralelo à tangente por P e limitado pela elipse (corda) é dividido ao meio pelo diâmetro por P.

PROPOSIÇÕES 17 e 18

*O quadrado do diâmetro por um ponto **P** da elipse está para o quadrado do diâmetro paralelo à tangente por **P** assim como o quadrado da ordenada deste último diâmetro está para produto das partes deste diâmetro formadas por esta ordenada.*

Na proposição 17, sendo a ordenada *EL* paralela à tangente por P, então: $\frac{VS^2}{RP^2} = \frac{EL^2}{RL \cdot LP}$.

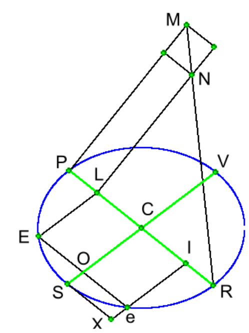


Na sua demonstração, fez uso da semelhança dos triângulos CSf e LEF, das proposições 6, 14 e 15, do lema 2 e da propriedade transitiva.

Essa proposição será usada nas proposições 18, 19 e 20.

A proposição 18 afirmou que ***EO = eO***.

Disse ainda que se a ordenada *EO* for paralela ao diâmetro por P, então: $\frac{RP^2}{VS^2} = \frac{EO^2}{VO \cdot OS}$.



Na sua demonstração, usou as proposições 16 e 17 e uma propriedade de uma proporção.

Seu corolário diz que a reta paralela à ordenada EO que passa por V ou S é tangente à elipse, mas não faz a prova.

Essa proposição será usada na proposição 19.

A primeira parte da proposição 18 é análoga à segunda parte da proposição 13 de parábola.

Definiu **Diâmetros Conjugados** RP e VS, **Ordenada** EL **do Diâmetro** RP **e Ordenada** EO **do Diâmetro** VS, **Parâmetro** PM de um diâmetro, **Figura** de um diâmetro.

Essas **2** proposições nada mais são do que uma generalização das proposições 3 e 4 de elipse, pois quando os diâmetros passam pelo vértice eles são os eixos da elipse.

Na elipse, a definição de o parâmetro PM do diâmetro RP (= VS^2 / RP) se transforma na definição de "Parâmetro de um Diâmetro" de parábola quando, pela junção com a proposição 17 de elipse: $PM = \dfrac{EL^2 \cdot RP}{RL \cdot LP} = \dfrac{EL^2 \cdot RP}{RP \cdot LP - LP^2} = \dfrac{EL^2}{LP - LP^2 / RP}$. Quando fazemos RP tender para o infinito, teremos: PM = EL^2 / LP que nada mais que a razão entre o quadrado da ordenada EL e a projeção de E sobre o eixo RP (definição de “Parâmetro" da parábola).

PROPOSIÇÃO 19

*O quadrado da ordenada **EL** somado com o retângulo **MN** (que é semelhante à figura **LM** do diâmetro **VS**) é equivalente ao retângulo **LM**, ou seja,* $EL^2 = PL \cdot LN$ *(figura da proposição **18**).*

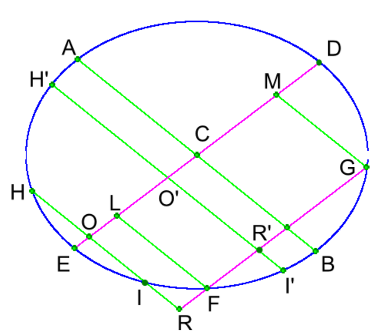
Na sua demonstração, usou a semelhança dos triângulos RPM e RLN, as proposições 17 e 18 e a propriedade transitiva.

Esta proposição generaliza a proposição de elipse 5, quando o diâmetro vira um eixo.

Ela equivale ao corolário da proposição 14 de parábola.

PROPOSIÇÃO 20

*Se dois segmentos **HI** e **FG**, limitados pela elipse, são paralelos aos dois diâmetros conjugados **AB** e **DE** se cruzam em **R**, então o retângulo **HR·RI** : retângulo **FR·RG** :: AB^2 : DE^2.*



Sua prova utilizou a proposição 17, além de propriedades de proporção e a propriedade transitiva.

Esta proposição pode ser considerada uma generalização para o conceito de "Potência de um Ponto" em relação a um Círculo. A expressão $HR \cdot RI / AB^2$ seria a potência do ponto R em relação à elipse, sendo *AB* um diâmetro e *HRI* um segmento paralelo a esse diâmetro limitado pela elipse. Esse ponto *R* pode ser interior ou exterior à elipse.

Existem duas situações para a elipse onde os diâmetros conjugados são iguais (AB = DE): quando a elipse vira um círculo (todos os seus diâmetros são iguais) e quando os diâmetros da elipse são simétricos entre si em relação aos eixos da elipse. Nesses casos, os retângulos $HR \cdot RI$ e $FR \cdot RG$ serão equivalentes.

Parte 3 - A HIPÉRBOLE

La Hire definiu a hipérbole no plano através da propriedade da diferença constante entre as distâncias dos pontos da curva a dois pontos dados (Focos). O valor dessa diferença é dado por um segmento IT.

Fez uma construção que obtém dois pontos P e p no mesmo ramo hipérbole através da interseção de dois círculos com centro nos focos e com raios cuja diferença vale IT. Visualiza dois ramos distintos da hipérbole.

Ao afirmar que a reta IT é perpendicular ao segmento Pp, percebe que a reta IT funciona como um eixo de simetria, embora não utilize esse termo. Ao dizer que o ponto T pertence à curva, evidencia o seu conhecimento desse ponto especial hoje chamado vértice, embora não utilize também nenhum termo para ele.

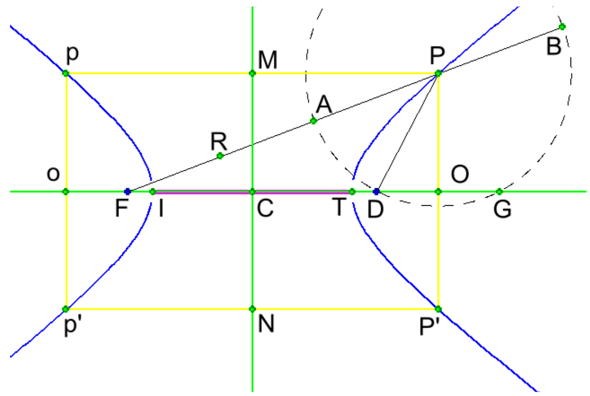
A seguir, veio uma série de definições. Chamou a curva construída por "**Hipérbole"** e diversos elementos geométricos que podem ser evidenciados na construção: o **Centro** *C* como o ponto médio do segmento IT**,** o **Eixo Determinado** como aquele segmento *IT* usado na definição (Chasles [4] chamava "Eixo Transverso" e hoje também conhecido como "Eixo Real")**,** o **Eixo Indeterminado** *MN* como a reta perpendicular ao Eixo Determinado que passa pelo centro (Chasles chamava "Eixo Conjugado" e hoje também conhecido como "Eixo Imaginário")**,** os **Focos** *F e D* como aqueles pontos usados na definição de hipérbole**,** as **Ordenadas de um Eixo** como os segmentos perpendiculares ao eixo limitados pela hipérbole e pelo eixo**,** os **Diâmetros (Determinado e Indeterminado)** como as retas que passam pelo centro **e a Tangente** como as retas exteriores à hipérbole que a cruzam em apenas um ponto**.**

O texto contém 24 proposições e mais 7 definições sobre a hipérbole: **Parâmetro do Eixo, Figura do Eixo**, **Assíntotas**, **Diâmetros Conjugados**, **Ordenada de um Diâmetro** e

Parâmetro do Diâmetro e Figura de um Diâmetro. Estas proposições e definições serão descritas a seguir.

PROPOSIÇÃO 1

O quadrado da ordenada ***PO*** *do eixo determinado está para o produto das partes do eixo determinado formadas pelo extremo* **O** *da ordenada assim como o produto das partes do eixo determinado formadas pelo foco* ***D*** *está para o quadrado do semi-eixo determinado* ***CT*** *da hipérbole:* $\frac{PO^2}{IO \cdot OT} = \frac{ID \cdot DT}{CT^2}$.



É a prova mais longa entre todas as proposições sobre hipérbole. Utilizou a definição de hipérbole, o lema 1 de elipse, diversas propriedades de proporção e multiplicação de quantidades iguais. Esta proposição e sua prova são idênticas à proposição 1 de elipse.

Essa proposição será usada nas proposições 3 e 9.

Esta proposição dá origem à equação analítica atual da hipérbole, pois *CT* é o semi-eixo real *a*, *PO* = *y* (ordenada), $ID \cdot DT$ é o quadrado do semi-eixo imaginário *b* e *CO* = *x* (abscissa). Substituindo, obtém-se: $\frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{b^2}{a^2} \rightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Entendendo a parábola como o limite de uma elipse ou de uma hipérbole quando um dos focos se afasta infinitamente do outro, pode ser mostrado que esta proposição equivale à proposição 1 de parábola. Se invertermos os extremos da proporção, multiplicarmos por 4, o numerador e denominador do lado esquerdo da equação e fizermos as seguintes trocas: $2 \cdot CT$ por $ID + DT$ e $IO = ID \pm DO$, então $\frac{(ID + DT)^2}{4 \cdot (ID \pm DO) \cdot OT} = \frac{ID \cdot DT}{PO^2}$. Logo, $(ID + DT)^2 \cdot PO^2 = 4 \cdot ID \cdot DT(ID \pm DO) \cdot OT$. Dividindo por ID^2, obteremos

$PO^2\left(1+\frac{2DT}{ID}+\frac{DT^2}{ID^2}\right)=4\cdot OT\cdot DT\left(1\pm\frac{DO}{ID}\right)$. Se afastarmos o vértice *I* infinitamente do foco *D* e do vértice *T*, ou seja, se fizermos o limite da expressão acima quando *ID* tende para infinito, então $\lim\limits_{ID\to\infty} \mathrm{PO}^2\,(1+2\,.\frac{\mathrm{DT}}{\mathrm{ID}}+\frac{\mathrm{DT}^2}{\mathrm{ID}^2})=\lim\limits_{ID\to\infty} 4\,.\mathrm{OT}\,.\mathrm{DT}\,(1\pm\frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{ID}})\to PO^2 = 4\,DT\cdot OT$. Este resultado vem a ser a proposição *1* da parábola.

PROPOSIÇÃO 2

*O eixo indeterminado **NM** divide o segmento **PP'**, paralelo ao **IT**, em partes iguais (figura da proposição **1**).*

A prova da proposição usou a própria construção da hipérbole para concluir a igualdade entre PM e MP'. Poderíamos justificar essa igualdade de segmentos através da congruência dos triângulos FDP e FDp.

Essa proposição será usada na proposição 4.

Na construção da elipse e da hipérbole, ele afirmou (com outras palavras) ser o segmento IT um eixo de simetria (não o faz para a parábola, por isso criamos a proposição 18 de parábola).

Na elipse, entretanto, ele não afirmou ser o Eixo Menor um eixo de simetria, mas deu várias pistas, deixando claro que conhecia essa propriedade. Por isso, no capítulo das novas proposições, será feita essa prova para a elipse (proposição 21).

Já na hipérbole, ele criou essa proposição que faz do Eixo Indeterminado um eixo de simetria, pois a utilizará na proposição 4.

Em seguida, definiu Parâmetro de um Eixo Determinado como a razão entre o quádruplo da área do retângulo de lados ID e DT e o eixo determinado IT. Definiu, logo após, Figura de um Eixo como o retângulo cujos lados são o Eixo e seu Parâmetro.

Essa definição de Parâmetro do Eixo Determinado da hipérbole, $\frac{4 \cdot ID \cdot DT}{IT}$, embora pareça diferente, é a mesma que foi usada para o Parâmetro do Grande Eixo da elipse (Parâmetro do Eixo IT = $\frac{NM^2}{IT}$), pois pela proposição 2 de elipse $NM^2 = 4 \cdot ID \cdot DT$. Mas como ele não definiu (para a hipérbole) NM como um segmento especial, então preferiu utilizar o retângulo de lados ID e DT, que foi o mesmo do qual partiu na elipse. Para a parábola, essa definição também vale, pois $\frac{4 \cdot ID \cdot DT}{IT} = \frac{4 \cdot (IT \pm DT) \cdot DT}{IT} = 4 \cdot DT \pm \frac{4 \cdot DT^2}{IT}$ (sendo o mais para hipérbole e o menos para a elipse). Fazendo o limite da expressão quando IT tende para infinito, o parâmetro fica igual a $4 \cdot DT$ o que vem a ser a definição de parâmetro dada para a parábola por La Hire. Assim, pode-se afirmar que a definição de parâmetro $\frac{4 \cdot ID \cdot DT}{IT}$ vale para as três cônicas.

Em linguagem moderna, o parâmetro seria $\frac{4 \cdot ID \cdot DT}{IT} = \frac{4 \cdot (a+c) \cdot |a-c|}{2a}$.

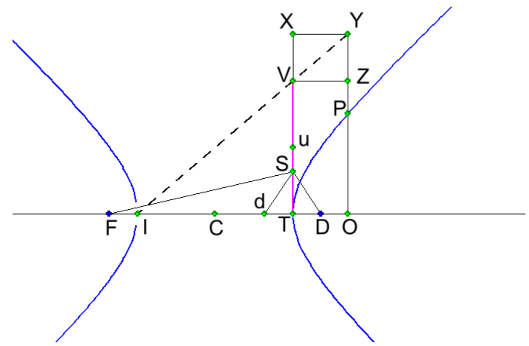
Na elipse, como a > c, então $|a-c| = a-c$. Então existe um triângulo retângulo de catetos b e c e hipotenusa a e $(a + c)(a - c) = b^2$. O parâmetro fica $\frac{2 \cdot b^2}{a}$.

Na hipérbole, como c > a, então $|a-c| = c-a$. Então existe um triângulo retângulo de catetos b e a e hipotenusa c e $(a + c)(c - a) = b^2$. O parâmetro fica $\frac{2 \cdot b^2}{a}$.

Na parábola, como a e c tendem para o infinito, então o parâmetro do eixo fica $\frac{4 \cdot (2a \pm DT) \cdot DT}{2a} = 4 \cdot DT \pm \frac{2DT^2}{a}$. Fazendo o limite com a tendendo para o infinito, o parâmetro fica $4 \cdot DT$.

PROPOSIÇÃO 3

*O quadrado de lado **PO** subtraído do retângulo **VXYZ** (que é semelhante à figura do eixo **IT**) é equivalente ao retângulo de lados **TO** e o parâmetro **TV**), ou seja,* $PO^2 = TX \cdot TO$.



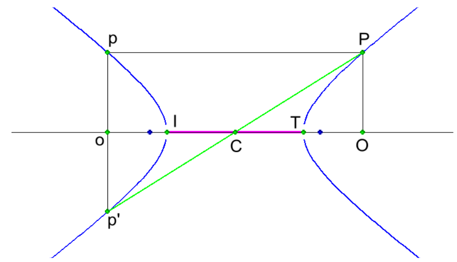
A demonstração dessa proposição usou a semelhança entre os triângulos ITV e IOY, a proposição 1, a definição de Parâmetro e a propriedade transitiva.

Esta proposição vem a ser aquela que, segundo Vicenzo Bongiovanni em sua tese de doutorado, foi utilizada por Apolônio para justificar a origem do termo "Hipérbole". Em grego significa "excesso" e foi usado por Euclides em "Os elementos" para expressar a idéia de uma área maior que a de uma figura dada. No nosso caso, o quadrado cujo lado é a ordenada é maior que o retângulo cujos lados são uma parte do eixo (entre o vértice e a ordenada) e o seu parâmetro. O próprio Philippe de La Hire fez um comentário, no prefácio da sua obra, sobre as diferenças entre as três curvas a partir da comparação entre as áreas do quadrado de lado igual a ordenada e de um retângulo onde um dos lados é o parâmetro e o outro é o segmento que vai do vértice T até o pé da ordenada O.

Se colocarmos um par de eixos ortogonais no vértice T do Eixo (Determinado ou Maior), poderemos chamar TO de abscissa (como fez Robinson). Na parábola, o quadrado da ordenada é igual ao produto da abscissa pelo parâmetro (proposição 1 de parábola); na elipse, é menor (proposição 5 de elipse) e na hipérbole, é maior. E tanto a falta, quanto o excesso, são dados por um retângulo semelhante à Figura do Eixo IT (retângulo de lados o Eixo e seu Parâmetro) e que um dos lados igual à abscissa TO.

PROPOSIÇÃO 4

*Qualquer diâmetro da hipérbole é dividido ao meio pelo centro **C**.*



Nessa prova, utilizou a proposição 2. Para uma justificativa mais cuidadosa, poderia ter usado a congruência dos triângulos COP e Cop'.

Essa proposição será usada na proposição 23 de hipérbole.

Esta proposição equivale à proposição 6 de elipse e à 3 de parábola.

PROPOSIÇÃO 5

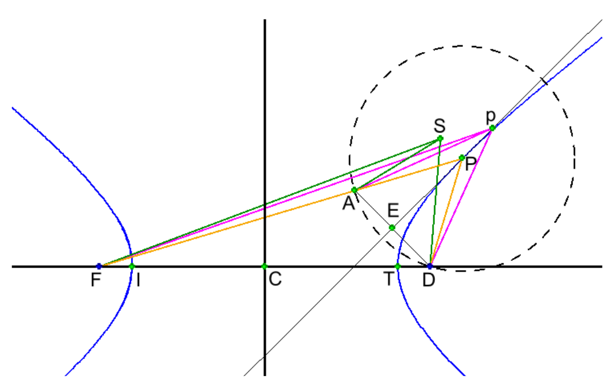
*A reta perpendicular ao eixo determinado **IT** pelo ponto **T** é tangente à hipérbole (figura da proposição **3**).*

Ele provou, por absurdo, que a interseção é única, usando as definições de tangente e hipérbole e a desigualdade triangular. Em seguida, provou que todos os pontos desta reta são exteriores. Esta segunda parte, porém, não é rigorosa, pois assume que o formato da hipérbole é conhecido.

Esta proposição equivale à proposição 7 de elipse e à 2 de parábola.

PROPOSIÇÃO 6

*A reta mediatriz ao segmento **DA** é tangente à hipérbole no ponto **P** (sendo **F** e **D** focos e **A** o prolongamento de **FP** com **PA** = **PD**).*



Ele provou, por absurdo, que a interseção é única, através da definição de hipérbole e a desigualdade triangular e a propriedade de um triângulo isósceles. Em seguida, provou que todos os pontos desta reta são exteriores.

Essa proposição será usada nas proposições 7 e 8 de hipérbole.

Esta proposição equivale à proposição 8 de elipse e à 4 de parábola.

PROPOSIÇÃO 7

*A tangente por um ponto **P** da hipérbole forma com os segmentos que unem **P** aos focos (hoje chamados raios vetores) ângulos congruentes (figura da proposição **6**).*

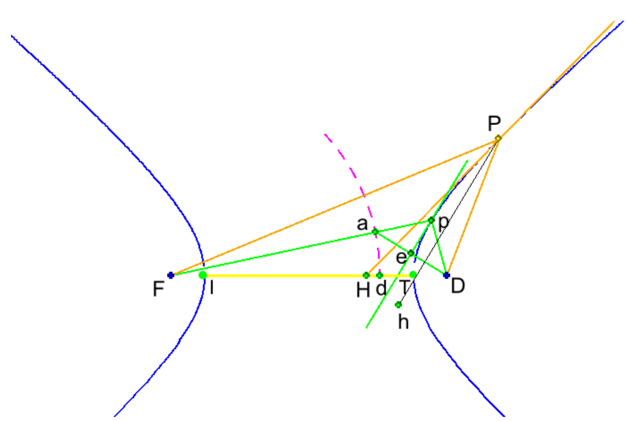
Ele demonstrou essa proposição utilizando a proposição 6 e a propriedade de um triângulo isósceles.

Esta propriedade ressalta uma característica da hipérbole muito usada na Física e com muitas aplicações práticas. Se uma fonte de luz for colocada em um dos focos da hipérbole, os raios de luz emitidos refletirão na superfície refletora hiperbólica e todos voltarão no sentido oposto, mas na direção do outro foco, qualquer que tenha sido o ponto P de contato. O outro foco será o ponto mais bem iluminado da região, formando uma imagem virtual. É conhecida, então, como propriedade ótica.

Esta proposição equivale à proposição 10 de elipse e à proposição 8 de parábola.

PROPOSIÇÃO 8

*A tangente à hipérbole que passa pelo ponto **P** é única.*



Ele provou, por absurdo (supondo que Ph fosse a outra tangente por P), que a interseção é única. Para tanto, usou as definições de hipérbole e tangente, a proposição 6 e a propriedade de um triângulo isósceles.

Esta proposição equivale à proposição 9 de elipse e à 5 de parábola.

Definiu as "Assíntotas" de uma hipérbole. Para tanto (figura seguinte), utilizou um segmento TA cujo quadrado vem a ser equivalente ao retângulo de lados ID e DT. Na elipse, esse segmento foi o semi-eixo menor. Na hipérbole, ele não atribui nenhum nome especial. Hoje, chamamos de semi-eixo imaginário. No capítulo das novas proposições, foi feita uma nova definição para Eixo Indeterminado como um segmento e não como uma reta.

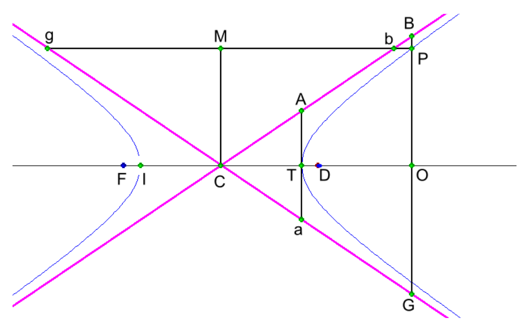
No corolário, afirma que as retas *CA e Ca* são assíntotas dos dois ramos.

*As proposições seguintes (de **9 a 18**) tratam de propriedades das assíntotas.*

PROPOSIÇÕES 9 e 10

*Seja uma reta paralela a um dos eixos que cruza as duas assíntotas nos pontos **B(b)** e **G(g)** e a hipérbole em **P**. O produto da distância de **P** até **B(b)** e **G(g)** é igual ao quadrado desse semi-eixo.*

Na proposição 9, sendo o semi-eixo o segmento *TA* (chamado hoje também por "imaginário"), então: $\boldsymbol{GP \cdot PB = TS^2}$.



La Hire provou essa proposição utilizando a definição de assíntota, a semelhança dos triângulos CTA e COB, as propriedades de proporção, a proposição 1 e a propriedade transitiva.

Essa proposição será usada nas proposições 10, 11 e 12 de hipérbole.

A proposição 9 pode também ser escrita $GP \cdot PB = ID \cdot DT$, uma vez que TA^2 foi obtido pelo retângulo de lados formados pela distância do foco D até os vértices I e T.

Na proposição 10, sendo o semi-eixo o segmento *CT* (que hoje chamamos também por "Real")*: **gP · Pb = CT²** (figura da proposição **9**).*

Provou essa proposição utilizando a definição de assíntota, a semelhança dos triângulos CTA, CMb e COB, as propriedades de proporção, a proposição 9 e a propriedade transitiva.

PROPOSIÇÃO 11

*A hipérbole e suas assíntotas se aproximam continuamente uma da outra quanto mais ambas forem prolongadas e nunca se encontrarão, pois a parte **PB** da ordenada contida entre a hipérbole e sua assíntota poderá ser feita menor que qualquer linha dada. (figura da proposição **9**)*

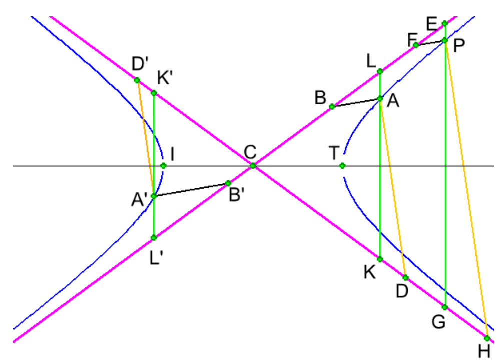
Para sua demonstração, utilizou a proposição 9.

Essa proposição será usada na proposição 14 de hipérbole.

O conceito atual de limite pode ser usado nessa proposição.

PROPOSIÇÃO 12

*Sejam dois segmentos **PH // AD** limitados pela assíntota **CD** e outros dois segmentos **PF // AB**, limitados pela outra assíntota **CB**. Então, **PH ·PF = AD ·AB**.*



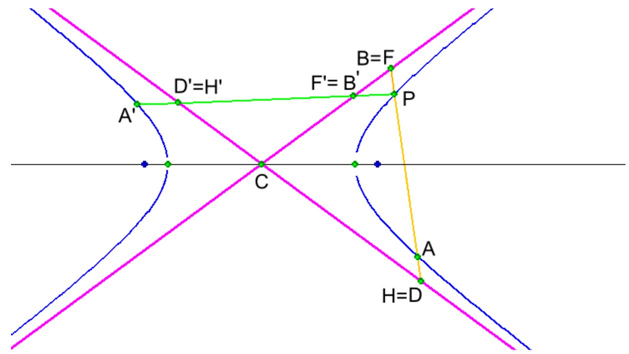
Para sua demonstração, utilizou semelhança entre os triângulos *EPF* e *LAB, PGH* e *AKD*, a proposição 9 e multiplicação de quantidades iguais.

Essa proposição será usada nas proposições 13, 15, 16 e 17.

Relendo essa proposição, o produto de segmentos da reta que une o ponto *P* da hipérbole até pontos quaisquer F e H de assíntotas diferentes é igual ao produto de outros dois segmentos paralelos aos primeiros da reta que une outro ponto qualquer *A* da hipérbole até os pontos B e D das mesmas assíntotas anteriores, respectivamente.

PROPOSIÇÃO 13

*Uma reta cruza as assíntotas em **F** e **D** e a hipérbole em **A** e **P**. A distância de uma das interseções **F** desta reta com a hipérbole até a interseção mais próxima com a assíntota é a mesma da outra interseção **D** até a outra assíntota, ou seja, **PF = AD**.*

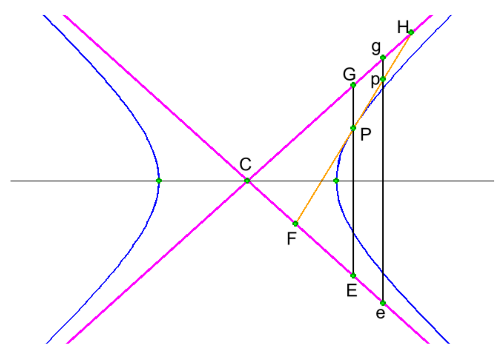


Na prova, utilizou-se a proposição 12 ($PH \cdot PF = AD \cdot AB$) sendo que os quatro segmentos estavam contidos numa mesma reta. Em linguagem atual: $PF \cdot (PA + AD) = AD \cdot (PA + PF)$ *implica em* $PF = AD$.

Essa proposição será usada nas proposições 19 e 20.

PROPOSIÇÃO 14

*Um segmento tangente à hipérbole por **P** sempre cruza as duas assíntotas (**F** e **H**) e **P** é seu ponto médio.*



Ele provou essa proposição utilizando a semelhança dos triângulos *GPH* e *gpH, FPE* e *Fpe*, as proposições 9 e 11 e a propriedade transitiva.

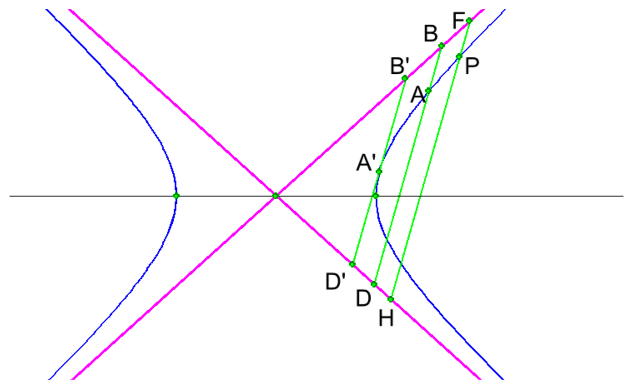
Essa proposição será usada nas proposições 15, 18, 19 e 20.

A propriedade verificada na proposição anterior para uma secante pode também ser observada, por limite, para a reta tangente.

PROPOSIÇÕES 15 e 16

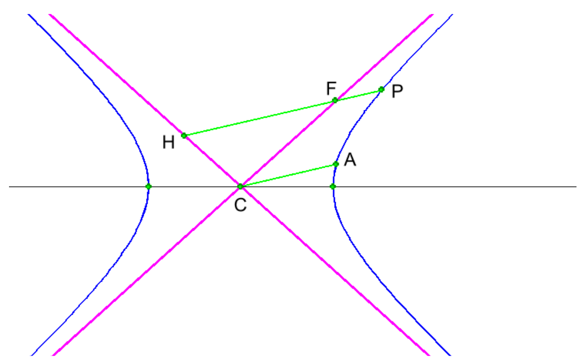
*Seja uma reta que cruza as duas assíntotas em dois pontos **F** e **H** e a hipérbole em **P**. O produto da distância de **P** até **F** e **H** é constante e igual ao quadrado de um segmento paralelo à reta e que passa pelo ponto **A' (A)** de tangência.*

Na proposição *15*, sendo esse segmento tangente à hipérbole e limitado por A' e pela assíntota em B', então: ***PF . PH = AB . AD = A'B'²***.



Ele demonstrou essa proposição utilizando o paralelismo e as proposições 12 e 14.

Na proposição 16, sendo esse segmento o semidiâmetro limitado por A e pelo centro *C*, então: ***PF . PH = AC²***.



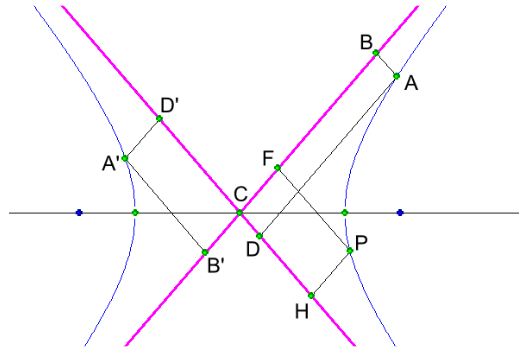
Ele demonstrou essa proposição utilizando o paralelismo e a proposição 12.

Se os pontos A e A' coincidirem, os segmentos CA e A'B' serão semidiâmetros conjugados, conceito que será definido adiante.

Estas proposições generalizam as proposições 9 e 10 de hipérbole quando o diâmetro vira um eixo.

PROPOSIÇÃO 17

*Todos paralelogramos cujos lados são paralelos às assíntotas e cujos vértices opostos são o centro **C** e pontos da hipérbole tem áreas iguais.*



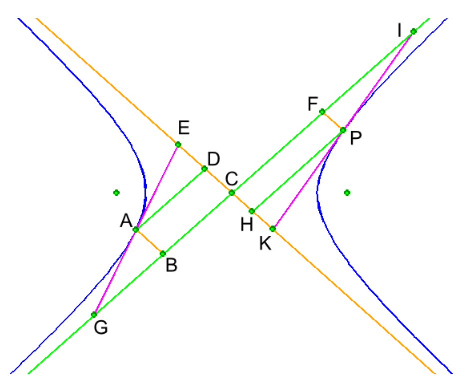
Sua prova utilizou paralelismo e a proposição 12.

Essa proposição será usada na proposição 18.

Essa proposição possui ligação com um modelo usado para o estudo de grandezas denominadas inversamente proporcionais. Caso as assíntotas sejam perpendiculares (ver corolário da proposição 22), a hipérbole será denominada eqüilátera. Neste caso, o paralelogramo ABCD vira um retângulo. Conseqüentemente, o produto CD · CB será a sua área que é constante pela presente proposição. Se interpretarmos com a linguagem analítica, o segmento C sendo a abscissa x e o segmento CB sendo a ordenada y, o produto y · x será constante. Duas variáveis cujo produto não se altera formam a idéia desse modelo que tem grande aplicação em muitas fórmulas da física e da química apresentadas no ensino médio.

PROPOSIÇÃO 18

*Os triângulos cujos vértices são o centro **C** e dois pontos nas assíntotas e o lado oposto a **C** é tangente à hipérbole tem área constante.*



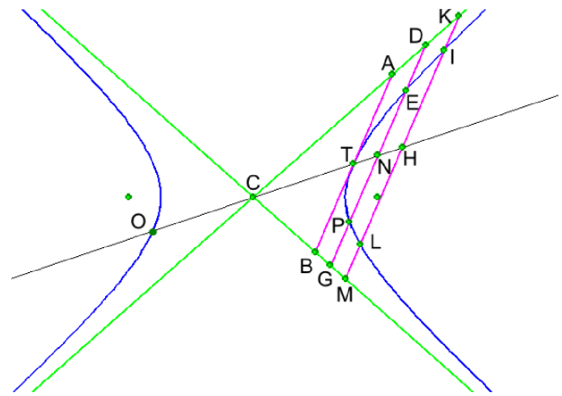
Sua demonstração usa as proposições 14 e 17.

Relendo essa proposição, a área de um triângulo formado por uma tangente à hipérbole e as suas assíntotas é constante, qualquer que seja a tangente escolhida.

PROPOSIÇÃO 19 e 20

Os segmentos paralelos entre si e limitados por dois pontos da hipérbole são divididos ao meio por um mesmo diâmetro.

Na proposição 19, sendo os segmentos paralelos a uma tangente por T e o diâmetro sendo o Determinado, pois passa por T, então: ***H*** *é o ponto médio de* ***LI*** *e* ***N,*** *de* ***PE*****.**

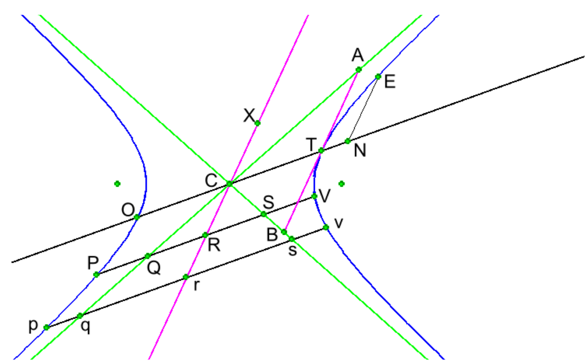


Sua prova utilizou paralelismo e as proposições 13 e 14. Para uma argumentação mais detalhada, usa-se a semelhança entre os triângulos CDG e CKM.

Essa proposição será usada na proposição 21 e 23.

Esta proposição equivale à proposição 16 de elipse e à 13 de parábola.

Na proposição 20, sendo os segmentos paralelos a um diâmetro por T e o diâmetro sendo o Indeterminado, pois é paralelo à tangente por T, então: ***R*** *é o ponto médio de* ***PV*** *e* ***r****, de* ***qs*****.**



Sua demonstração usou paralelismo e as proposições 13 e 14. Para uma argumentação mais detalhada, usou-se a semelhança entre os triângulos CQS e Cqs.

La Hire definiu "Diâmetros Conjugados" da forma idêntica a que fez com a elipse. Em seguida, define "Ordenada de um Diâmetro" como fez na elipse e na parábola.

PROPOSIÇÃO 21

*A razão entre o quadrado da ordenada **EN** de um semidiâmetro **CT** e o produto dos segmentos que vão do pé **N** da ordenada até **O** e **T** é igual à razão entre o quadrado do semidiâmetro **AT** e o quadrado do semidiâmetro conjugado **CT**:* $EN^2 : ON \cdot NT :: AT^2 : CT^2$ *(veja figura da proposição **19**).*

Sua prova usou semelhança entre os triângulos *CTA* e *CND*, propriedades de proporção e a proposição 19.

No seu corolário, afirmou que os quadrados das ordenadas e as partes dos dímetros formam uma proporção.

Essa proposição será usada na proposição 22 e 23.

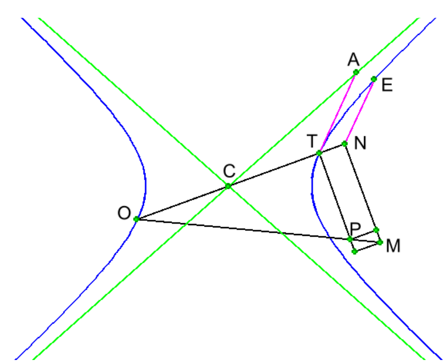
Esta proposição generaliza a proposição 1 de hipérbole quando o diâmetro é um Eixo.

Esta proposição equivale à proposição 17 de elipse.

Definiu "Parâmetro de um Diâmetro" e "Figura de um Diâmetro". A definição é equivalente à usada na proposição 18 para o "Parâmetro do Diâmetro" e "Figura de um Diâmetro" de uma elipse.

PROPOSIÇÃO 22

*O quadrado de lado **EN** subtraído pelo retângulo **PM** (que é semelhante à figura do diâmetro **OT**) é equivalente ao (retângulo de lados **TN** e o parâmetro **PT** do diâmetro **OT**), ou seja,* $EN^2 = TN \cdot NM^2$.



Sua demonstração usou a definição de Parâmetro, a semelhança entre os triângulos *OTP e ONM*, multiplicação de quantidades iguais, a propriedade transitiva e a proposição 21.

No corolário, diz que se o diâmetro *OT* for igual ao seu parâmetro *PT*, então as assíntotas de uma hipérbole serão perpendiculares entre si e todos os diâmetros e os respectivos parâmetros serão iguais. Vale a recíproca: numa hipérbole, cujas assíntotas não são perpendiculares, o diâmetro será diferente do seu parâmetro.

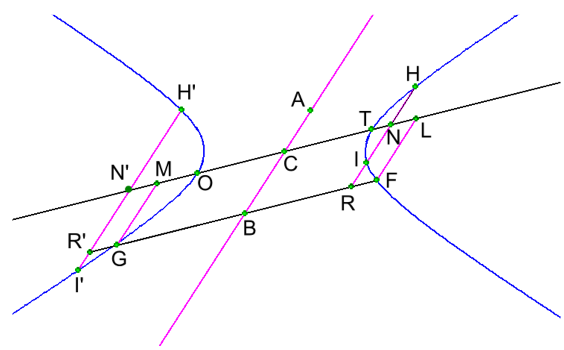
Hoje, chamamos a esse caso especial de "Hipérbole Eqüilátera". Vale destacar que neste caso, os semi-eixos real **a** e imaginário **b** são iguais. A justificativa é que como o parâmetro **p** é igual ao eixo real (p = 2a) e a definição de parâmetro diz que $p = 2b^2 / a$, então a = b. Vale destacar ainda que a diagonal de um quadrado de lado a (ver nova definição 4 de hipérbole no capítulo 7) coincide com metade da distância focal 2c, ou seja, $c = a\sqrt{2}$.

Esta proposição generaliza a proposição 3 de hipérbole, pois o diâmetro vira um Eixo.

Ela equivale ao corolário da proposição 14 de parábola e à proposição 19 de elipse.

PROPOSIÇÃO 23

Sejam os segmentos FG e HI paralelos aos diâmetros conjugados por T que se encontram em R. O retângulo HR ˙ RI : retângulo FR ˙ RG :: PT : OT.



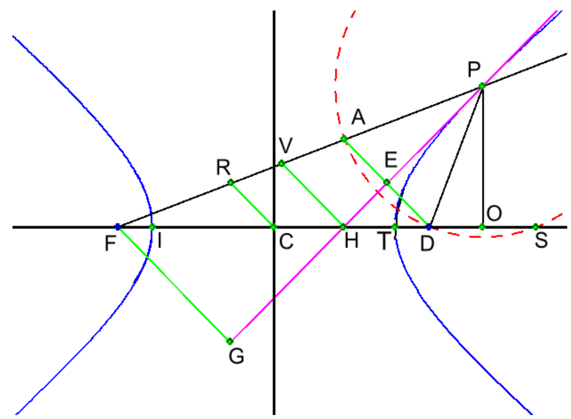
Sua demonstração usou a definição de Parâmetro, paralelismo, multiplicação de quantidades iguais, as propriedades de proporção, a propriedade transitiva e as proposições 4, 19 e 21.

Ela equivale à proposição 20 de elipse, ou seja, ela representa a ampliação do conceito de potência de ponto do círculo para as cônicas.

Existe uma situação para a hipérbole onde *OT* é igual à *PT*: quando a hipérbole é eqüilátera e o ângulo entre as assíntotas é reto (ver proposição 22 de hipérbole). Nesse caso, os retângulos HR · RI e FR · RG serão equivalentes.

PROPOSIÇÃO 24

*O semi-eixo **CT** é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro **C** até a interseção **O** do eixo com a ordenada e até a interseção **H** do eixo com a tangente que passa por **P**:*
***CH : CT :: CT : CO**.*



Sua demonstração usou o lema 1 de elipse, a semelhança entre os triângulos *FGP* e *AEP, FGH* e *DEH*, *FVH* e *FAD*, as propriedades de proporção, a propriedade transitiva e a proposição 6.

No corolário, diz que *IO* estará para *OT* como *IH* para *HT*. A linha *IO* é dita dividida harmonicamente nos pontos *I, O, T, H*. Nesse livro, essa é a única proposição de hipérbole onde aparece a divisão harmônica.

Esta proposição equivale à proposição 11 de elipse e à 7 de parábola.

Parte 4 – DESCRIÇÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

La Hire comentou que a forma como apresentou as cônicas é a mais simples, se forem dados os focos e o eixo.

Nesta parte 4, ele apresentou outras formas de se obter as cônicas a partir de outros dados, que não sejam os focos e o eixo.

Apresentou cinco problemas. No problema 1, pede-se o parâmetro dados um diâmetro e sua ordenada, problema que aplica às 3 cônicas. No problema 2, são pedidas as assíntotas e no 5, a hipérbole. No problema 3, trata da obtenção de uma parábola. No problema 4, trata da obtenção de uma elipse.

PROBLEMA 1

Sendo dados um diâmetro da seção cônica e sua ordenada, encontrar seu parâmetro. Na elipse, determinar também seu diâmetro conjugado.

Resolveu para a parábola utilizando a definição de "Parâmetro de Diâmetro" que surge na proposição 1.

Resolveu para a elipse utilizando as proposições 17 ou 18, além da definição de parâmetro de diâmetro. Utilizou a média geométrica entre o diâmetro e o seu parâmetro para encontrar o outro diâmetro.

Resolveu para a hipérbole utilizando as proposições 21 e a definição de "Parâmetro de Diâmetro".

PROBLEMA 2

Em uma hipérbole, sendo dados um diâmetro determinado, seu parâmetro e o ângulo que este diâmetro faz com sua ordenada, deseja-se descrever as assíntotas.

Ele resolveu utilizando as definições de "Parâmetro de Diâmetro" e de "Assíntotas" de uma hipérbole.

PROBLEMA 3

Sendo dados um diâmetro da parábola por ***T****,* ***P*** *como um dos seus pontos e a reta tangente por* ***T****. Deseja-se descrever a parábola.*

Ele resolveu utilizando o corolário da proposição 14 e semelhança de triângulos.

A construção proposta não encontra o eixo da parábola.

PROBLEMA 4

Descrever uma elipse, sendo dados os diâmetros conjugados ***AB*** *e* ***ED****.*

Ele resolveu utilizando o corolário da proposição 18, Pitágoras e semelhança de triângulos. Faz duas outras descrições para a mesma construção proposta e também particulariza para o caso dos diâmetros serem os eixos.

PROBLEMA 5

Dadas as assíntotas ***CD*** *e* ***CM****, além de um ponto* ***P*** *da hipérbole, descrevê-la.*

Ele resolve utilizando a proposição 13.

6.3 – Resumo de todas as proposições

PARÁBOLA

- A proposição **1** apresenta a equação analítica atual.
- As proposições **2, 4, 5, 6, 7, 8 e 9** falam das propriedades da reta tangente.
- A proposição **3** fala do diâmetro.
- As proposições **10, 11 e 12** mostram equivalência entre áreas formadas por elementos da parábola.
- A proposição **13** mostra propriedade entre o diâmetro e uma corda.
- A proposição **14** generaliza a proposição **1**.
- A proposição **15** generaliza a proposição **7**.
- As proposições **16** e **17** falam das propriedades do Parâmetro do Diâmetro.

ELIPSE

- As proposições **1, 3 e 4** apresentam resultados que equivalem à equação analítica atual.
- A proposição **2** apresenta o Semi-Eixo Menor.
- A proposição **5** apresenta o Parâmetro do Eixo.
- A proposição **6** fala de uma propriedade do diâmetro.
- As proposições **7, 8, 9, 10, 11 e 12** apresentam propriedades da reta tangente.
- As proposições **13, 14 e 15** mostram equivalência entre áreas formadas por elementos da elipse.
- A proposição **16** apresenta propriedade entre diâmetro e corda.
- A proposições **17** e **18** generalizam as proposições **3** e **4**.
- A proposição **19** generaliza a proposição **5** (Parâmetro do Diâmetro).
- A proposição **20** apresenta uma propriedade que pode ser chamada de Potência de ponto em relação a uma elipse.

HIPÉRBOLE

- Proposição **1**: apresenta resultados que equivalem à equação analítica atual.
- Proposição **2**: apresenta a simetria da hipérbole.
- Proposição **3**: apresenta o Parâmetro do Eixo.
- Proposição **4**: fala de uma propriedade do diâmetro.
- Proposições **5**, **6**, **7**, **8** e **24**: falam das propriedades da reta tangente.
- Proposições **9**, **10**, **11**, **12**, **13**, **14**, **15**, **16**, **17** e **18**: mostram propriedades que envolvem as assíntotas.
- Proposições **19** e **20**: apresentam os diâmetros Conjugados.
- Proposição **21**: generaliza a proposição **1**.
- Proposição **22**: generaliza a proposição **3**.
- Proposição **23**: apresenta uma propriedade que pode ser chamada de potência de ponto em relação a uma hipérbole.

6.4 – O que foi usado nas demonstrações das proposições?

Proposições	PARÁBOLA	ELIPSE	HIPÉRBOLE
Lema 1		AI TP	
1	// DP TP	DE L1 PPR x	DH L1 PPR x
2	// DP TP	P1	DH // CT
3	DP DT	P1 P2	ST P1 DPT PT
4	DP DTG TP TI PT	// P1 P2 PPR	P2
5	// DP P4 DTG	ST P3 DPT PT	DH DT DTG
6	P4	DE ST	DH DT DTG TI
7	// DP CP4 –	DE TP	P6 TI
8	TI CP4 OPV PT	DE DT DTG TI	DTG DH TI P6
9	// P4 CT	// CT DTG DE	DA ST PPR P1 PT
10	// P7	TI P8 OPV PT	DA ST PPR P9 PT
11	// ST C3P1 PPR PT CP10	DE ST TT PPR PT	P9
12	P10 P11 + –	ST P4 P11 PPR PT	ST P9 x
13	P6 // DTG P12	// ST CT P11 PT +	P12 + –
Lema 2		ST PPR PT	
14	ST P12 : PT	ST P3 C2P13 L2 PT	P9 P11 ST PT
15	C3P1 // ST PT P7 P13 +	C1P13 –	// P12 P14
16	// ST TT PT P1 P7 P9 P13 CP14	ST P15	// P12
17	DP PT P16 C2P1	ST P6 P14 P15 L2 PPR PT	// P12
18		P16 P17 PPR	P14 P17
19		ST P17 P18 PT	// ST P13 P14
20		P17 PPR PT	ST P13 P14
21			ST P19 PPR
22			DPT ST P21 PT x
23			// DPT P4 P19 P21 PPR PT
24			L1 ST PPR TT P6 PT

LEGENDA

// – Paralelismo
DP – Definição de Parábola
DE – Definição de Elipse
DH – Definição de Hipérbole
DA – Definição de Assíntota
DPT – Definição de Parâmetro
DTG – Definição de Tangente
TP – Teorema de Pitágoras
ST – Semelhança de triângulos
TT – Teorema de Tales
TI – Triângulo Isósceles
DT – Desigualdade Triangular
CT – Congruência de triângulos

OPV – Ângulos opostos pelo Vértice
AI – Ângulo inscrito
PT – Propriedade Transitiva
P_ – Proposição _
C_P_ – Corolário _ da Proposição _
L_ – Lema _
PPR – Propriedades de Proporção
+ – Adição de quantidades iguais
– – Subtração de quantidades iguais
x – Multiplicação de quant. iguais
: – Divisão de quantidades iguais

Resumo das propriedades usadas nas demonstrações

A partir da tabela anterior, podemos identificar as idéias que foram mais utilizadas por La Hire para demonstrar as proposições desse livro. Serão descritas na tabela a seguir:

IDÉIAS GEOMÉTRICAS		FREQUÊNCIA DE UTILIZAÇÃO NAS 61 PROPOSIÇÕES
Proposições anteriores:	**Parábola**	23
	Elipse	20
	Hipérbole	27
Semelhança de triângulos e Teorema de Tales		27
Propriedade transitiva		24
Paralelismo (quinto postulado de Euclides)		19
Propriedades de proporção		15
Definição de reta tangente		8
Definições:	**Parábola**	7
	Elipse	7
	Hipérbole	5
Triângulo isósceles		6
Teorema de Pitágoras		4
Desigualdade triangular		4
Congruências de triângulos		4

6.5 – Conclusões e comentários sobre as características do primeiro livro de Philippe de La Hire de 1679

O Uso da caracterização bifocal.

As proposições foram justificadas essencialmente através da caracterização bifocal. Observando a tabela anterior, podemos verificar que todas as proposições de todas as três cônicas usaram a definições inicial, ou seja, a caracterização feita a partir dos focos das cônicas foi utilizada direta ou indiretamente (através de uma proposição que usou diretamente a definição) na demonstração das **61** proposições do texto. O uso foi direto em **19** proposições e indireto em **42** proposições.

A interação entre as proposições.

O texto mostrou-se bastante encadeado. A maior parte das proposições (**35**) foram usadas para demonstrar proposições seguintes. Já em **26** delas, não houve aproveitamento para proposições seguintes. Abaixo, serão listadas estas proposições que não foram utilizadas para resultados posteriores:

- Parábola: 2, 3, 5, 8, 15, e 17.
- Elipse: 5, 7, 8, 9, 10, 12, 19 e 20.
- Hipérbole: 3, 5, 7, 8, 10, 15, 16, 18, 20, 22, 23 e 24.

A Linguagem Grega.

O uso de equivalência entre polígonos

La Hire utilizou no texto das proposições e das demonstrações a Equivalência entre Polígonos com grande freqüência. A seguir, serão citadas as proposições onde este uso de polígonos com áreas iguais aparece:

- Parábola (1, 10, 11, 12 e 14)
- Elipse (1, 2, 3, 4, 5, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 e 20)
- Hipérbole (1, 3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 21, 22 e 23)

Ao todo, somando as **5** de parábola, as **13** de elipse e as **16** de hipérbole, totalizam **34** proposições que utilizam a equivalência de áreas.

As propriedades mais freqüentes nas demonstrações

Na tabela anterior que mostrou as ferramentas mais utilizadas, vemos que tirando as próprias proposições do texto, as idéias geométricas mais comuns usadas como argumento de demonstração foram as seguintes:

- Semelhança de triângulos
- Propriedade transitiva

- Paralelismo
- Propriedades de proporção

Estas 4 idéias, além da Equivalência entre Áreas, fazem parte da linguagem usual grega. Ou seja, o que La Hire afirma no prefácio sobre o uso dos primeiros 6 livros dos "Elementos" de Euclides se confirma. Ele realmente utiliza apenas a linguagem sintética típica da matemática grega.

A definição de "*Tangente*".

A definição de "Tangente" a uma cônica foi feita por La Hire exigindo que seus pontos fossem exteriores à cônica (exceto o ponto da tangência) na parábola e na hipérbole. Faltam as páginas do original em Francês da parte de elipse. Nas provas onde aparece a reta tangente, ele não fez a demonstração da segunda parte (que exige que a reta tenha apenas pontos exteriores). Isso nos leva a desconfiar que ele possa não ter definido a reta tangente à elipse da mesma forma que fez com as outras duas. A tradução para o Inglês não contém essa exigência. Assim, ele pode não ter exigido que os pontos fossem exteriores, talvez pelo fato da elipse ser a única curva fechada entre as três apresentadas e, conseqüentemente, fica mais clara a noção de interior e exterior. La Hire, talvez, tenha tirado a exigência da reta tangente ser exterior por achar tal característica clara e perceptível.

As definições de "*Ordenada*" e "*Diâmetro*" modificadas por La Hire durante o texto.

La Hire define "Ordenada" para a hipérbole e "Diâmetro" da parábola, da elipse e da hipérbole de uma forma, mas durante o texto os utiliza outra maneira.

No caso da Ordenada, a definiu como a distância de um ponto da cônica até o eixo, mas utilizou também o mesmo termo para o segmento que é o dobro da definição anterior, ou seja, que une dois pontos da cônica através de uma perpendicular ao eixo (proposições 4 e 14 de hipérbole, página 130 em La Hire [6] e 98 em Robinson [7]).

No caso do diâmetro da parábola, o definiu como uma semi-reta (embora não use esse termo), mas o utilizou como reta (corolário da proposição 5, corolário da proposição 7 e problema 3 da parte 4). Neste caso, podemos desconfiar da origem dessa dupla utilização pelo fato de ele tratar o diâmetro como uma linha. Esta possui um conceito mais abrangente, podendo significar tanto reta como semi-reta.

No caso do diâmetro da elipse e da hipérbole (demonstração da proposição 20 de hipérbole), ele chamou também por "Diâmetro" aquilo que chamaríamos semidiâmetro, ou seja, metade do diâmetro.

A generalização do conceito de "*Parâmetro do Eixo*".

O conceito de "Parâmetro do Eixo Determinado" usado por La Hire para a hipérbole $4 \cdot ID \cdot DT / IT$ se aplica, na verdade, para as três curvas (no caso da elipse, chamou por "Parâmetro do Grande Eixo"), como foi citado durante este capítulo da descrição na proposição 2 de hipérbole. Sendo que, no caso da parábola, fica simplificado ao quádruplo da distância entre o foco e o vértice ($4 \cdot DT$). Atualmente esse parâmetro é chamado também por Corda Focal Mínima por ser a menor das cordas que passam pelo foco.

A definição de "*Figura de um Eixo*".

La Hire definiu "Figura de um Eixo" como o produto do Eixo (que é um segmento) e o Parâmetro desse Eixo. Ele o fez para a elipse (tanto em relação ao Grande Eixo quanto ao Pequeno Eixo) e para a hipérbole (apenas para o Eixo Determinado, embora fosse possível fazê-lo também para o Eixo Indeterminado conforme sugerimos através da nova definição 4 no capítulo **7** das novas proposições), mas não para a parábola. O motivo é que o Eixo na parábola é uma reta (ou seja, é infinitamente grande).

A "Figura de um Eixo" equivale ao quadrado do outro Eixo. Só existe na elipse e na hipérbole pelo motivo citado acima.

A definição de "*Figura de um Diâmetro*".

Da mesma forma, definiu "Figura de um diâmetro" como o produto do diâmetro (que é um segmento) e o Parâmetro desse diâmetro. Na elipse, definiu duas *figuras* para um dado par de diâmetros conjugados. Na hipérbole, apenas para o diâmetro determinado, embora fosse possível fazê-lo também para o "Diâmetro Indeterminado". Na parábola, nenhuma definição foi feita pelo mesmo motivo citado no parágrafo anterior.

A "Figura de um Diâmetro" equivale ao quadrado do outro diâmetro. Só existe na elipse e na hipérbole pela razão acima citada.

A localização da origem dos Eixos Coordenados.

Atualmente, a forma usual de se escrever as equações das cônicas coloca a origem do par de eixos ortogonais no centro da cônica (elipse e da hipérbole) e no vértice (parábola). Essa escolha simplifica as equações das cônicas, mas dificulta a interligação entre as cônicas, uma vez que a variável **x** tem significados diferentes para a parábola e para a elipse e a hipérbole. Se todos fossem postos no vértice, as equações da elipse e da hipérbole ficariam maiores, mas a interligação ficaria mais nítida.

O papel do eixo que contêm os focos.

O Grande Eixo (Eixo Maior da elipse) e o Eixo Determinado (Eixo real da hipérbole) desempenham o mesmo papel e são associados a uma determinada quantidade (número). Na parábola, esse segmento se transforma em reta e, assim, não pode ser associado a número algum.

Equivalência de áreas servindo para a demonstração de uma propriedade das "Ordenadas de um Diâmetro" de uma cônica.

A ordenada de um diâmetro que é limitado por um ponto P da cônica é metade da corda (paralela à tangente à cônica que passa por P) que a contém. Para provar essas proposições (13 na parábola, 16 e 18 na elipse e 19 e 20 na hipérbole), La Hire utilizou a última das proposições sobre equivalências entre áreas formadas com elementos das cônicas (12 na parábola e 15 na elipse), exceto na hipérbole, uma vez que não fez essas proposições sobre equivalências de áreas. Estas proposições são feitas no capítulo das novas proposições (proposições 27, 28 e 29 do capítulo 7).

A proposição 6 da parábola.

Esta proposição parece ter chegado “de Pára-Quedas” na obra de La Hire. Ela só é enunciada para ser usada na demonstração da proposição 13 de parábola. Mas ela poderia ser enunciada de forma análoga para a elipse e para a hipérbole.

Na elipse, existe reta tangente em qualquer direção.

Na hipérbole, só existem tangentes cujos ângulos com o eixo real estejam entre 90° e o ângulo formado entre a assíntota e o eixo real. Ou seja, só existem tangentes paralelas aos Eixos Indeterminados. A partir dessa idéia, podemos entender a assíntota como uma direção que separa os diâmetros Determinados dos Indeterminados.

La Hire trabalhou com objetos análogos de formas diferentes.

Centro como ponto médio de um diâmetro.

As proposições 6 de elipse e 4 de hipérbole são análogas, mas tiveram demonstrações diferentes. A primeira foi por absurdo supondo que o centro não dividisse o diâmetro ao meio, enquanto a segunda foi por congruência de triângulos.

Definição de "Parâmetro de um Eixo".

La Hire define Parâmetro de um Eixo como um segmento para a parábola (Proposição 1 – o quádruplo da distância entre o foco eo vértice) e como uma razão para a elipse (Proposição 5 – entre o quadrado de um eixo pelo outro eixo) e para a hipérbole (Proposição 3 – entre o retângulo cujos lados são as distâncias do foco aos dois vértices pelo outro eixo).

6.6 – Propostas de definições que podem ser deduzidas desse texto

Um outro "Eixo Indeterminado".

La Hire define o "Eixo Indeterminado" da hipérbole através de uma reta. Mas na elipse ele o definiu (Eixo Menor) através de um segmento. Por analogia, poderia ser feita uma outra definição para este eixo através de um segmento de reta, como será feita no capítulo das novas proposições. Essa nova definição utiliza também uma "ordenada NO especial" como foi feito na elipse para o Eixo Menor. Só que em vez de passar pelo centro (o que é impossível para a hipérbole), esta ordenada está a uma distância do centro igual à diagonal do quadrado cujo lado é o Semi-Eixo Real (ou Determinado). Da proposição 1 de hipérbole, se comprova que $NO^2 = ID . DT$.

La Hire não dá nenhum nome especial a este segmento aA (= NOM) que usou para definir a assíntota e que hoje chamamos por "Eixo Imaginário".

Conseqüentemente, o "Pequeno Eixo" (Eixo Menor da elipse) e o "Eixo Indeterminado" (Eixo imaginário da hipérbole) também podem desempenhar o mesmo papel ao serem associados a uma determinada quantidade (número). Na parábola, esse segmento se transforma em reta localizada no infinito e, assim, não pode ser associado a nenhum número.

Um outro "Diâmetro Indeterminado Conjugado" na hipérbole.

La Hire define o "Diâmetro Indeterminado Conjugado" da hipérbole através de uma reta. Pode ser feita uma outra definição para este diâmetro através de um segmento de reta. Essa nova definição (ver capítulo 7) utiliza também uma "ordenada NO especial desse diâmetro" como foi feito na elipse para o diâmetro conjugado. Só que em vez de passar pelo centro, está a uma distância do centro igual à diagonal do quadrado do semidiâmetro real (ou determinado). A partir da proposição 21 de hipérbole, se comprova que NO = AT.

Os diâmetros conjugados da hipérbole e da elipse desempenham papeis análogos.

No caso da parábola, o segmento que representa o diâmetro se transforma em reta e logo não equivale a nenhum número.

Conceito de "Potência de Ponto" para uma cônica.

As proposições 20 de elipse, 23 de hipérbole e 18 de parábola apresentam um resultado que pode ser entendido como uma generalização de conceito de potência de ponto P para uma circunferência.

Sendo A, B, C e D pontos da cônica e P a interseção das retas AB (paralela a um diâmetro) e CD (paralela ao diâmetro conjugado ao primeiro):

$$\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB} = \frac{diâmetro\left(// \, CD\right)}{seu \text{ parâmetro}} = \frac{diâmetro^{2}\left(// \, CD\right)}{diâmetro^{2}\left(// \, AB\right)}.$$

A reta AB pode ter qualquer direção.

Para a elipse e para a hipérbole, podemos afirmar que o produto entre as distâncias do ponto P até dois pontos A e B de uma cônica e o quadrado do diâmetro conjugado ao diâmetro paralelo ao segmento AB é constante e independe do ponto P escolhido, ou seja, PA · PB · diâmetro^2 (// CD) = constante. Este produto seria a "Potência do Ponto P de uma elipse ou de uma hipérbole".

No caso da parábola, PD e o diâmetro tendem ao infinito, e a fórmula se reduz a PA · PB = PC · p. A reta AB só pode ser paralela à diretriz. Tal demonstração será feita no capítulo das novas proposições (proposição 19 do capítulo 7).

Vale frisar que no caso da elipse e da hipérbole, uma vez escolhido um ponto P qualquer do plano que contém a cônica, a direção AB que será escolhida não pode ser qualquer, já que não será qualquer reta que passa por P que interceptará a cônica. Na parábola, a limitação é ainda maior, já que a direção AB escolhida só poderá ser perpendicular ao Eixo. Isto decorre do fato dos diâmetros na parábola serem todos paralelos ao eixo, algo que não acontece na elipse e na hipérbole onde existem infinitas direções possíveis para o diâmetro.

Outra observação bem interessante é que essa proposição relativa à potência de um ponto para a cônica é um caso geral das proposições iniciais propostas por La Hire para cada uma das cônicas. Ou seja, as proposições 1 de parábola, 1 de elipse e 1 de hipérbole podem ser deduzidas diretamente dessa definição de Potência aqui apresentada, tomando o ponto P sobre o Eixo da Cônica.

CAPÍTULO 7

COMPLEMENTAÇÃO DA OBRA:

NOVAS PROPOSIÇÕES

No texto feito por La Hire, embora ele apresente as três curvas (parábola, elipse e hipérbole) separadamente, existe forte interligação entre as proposições de cada curva.

Elaboramos então uma tabela mostrando tal analogia. A curva escolhida como referência foi a elipse. Suas proposições foram analisadas em ordem crescente e, a seguir, foram observadas as proposições equivalentes das duas outras curvas. Neste capítulo serão usados os termos atuais usados para cônicas.

7.1 – Analogia entre as proposições das diferentes cônicas na obra de Philippe de La Hire

	PROPOSIÇÕES		
	Parábola	**Elipse**	**Hipérbole**
Uma proporção entre o quadrado da ordenada do eixo (maior ou determinado), o produto das distâncias do pé da ordenada até os vértices, o produto das distâncias do foco aos vértices e o quadrado do semi-eixo (maior ou determinado).	**1 (*)**	**1**	**1**
Equivalência entre um quadrado cujo lado é o semi-eixo menor (imaginário) e um retângulo cujos lados são as distâncias do foco até os vértices.	**Não possui essa propriedade**	**2**	**25**
Uma proporção entre o quadrado da ordenada de um eixo, o produto das distâncias do pé da ordenada até os vértices, 2º eixo ao quadrado e 1º eixo ao quadrado.	**Não possui essa propriedade**	**3 4**	**26**
Definição do parâmetro de um eixo da cônica.	**1**	**5**	**3**
O centro é o ponto médio do diâmetro da cônica.	**3 (*)**	**6**	**4**
A reta que passa pelo vértice e é perpendicular à reta que passa pelos focos é tangente à cônica no vértice.	**2**	**7**	**5**

A mediatriz PE do segmento DA é tangente à cônica em P (sendo D o foco, P um ponto da cônica, A um ponto do círculo diretor e E o ponto médio de DA).	**4**	**8**	**6**
A reta tangente à cônica por P é única.	**5**	**9**	**8**
Congruência entre ângulos formados pela tangente por P e pelos segmentos que vão de P aos focos F e D.	**8 (*)**	**10**	**7**
Relação entre as distâncias do centro da cônica ao vértice, ao pé da ordenada do ponto P e ao ponto que a tangente por P cruza o eixo de simetria.	**7 (*)**	**11** **12**	**24**
Equivalência entre triângulos formados pela tangente por P, pela tangente pelo vértice, pelo prolongamento do diâmetro e pelo eixo que contém os focos.	**10**	**13**	**27**
Equivalência entre um triângulo e um quadrilátero formados pela tangente pelo vértice T, pelo eixo que contém os focos, pelo segmento paralelo à reta tangente por T, pelo segmento paralelo à tangente por P e pelo diâmetro por P.	**11**	**14**	**28**
Equivalência entre um triângulo e um quadrilátero formados pela tangente por P, pelo eixo que contém os focos, pelo segmento paralelo à reta tangente pelo vértice T, pelo segmento paralelo à tangente por P e pelo diâmetro por P.	**12**	**15**	**29**
Um diâmetro por P divide ao meio qualquer corda paralela à reta tangente por P ou um diâmetro paralelo à tangente por P divide ao meio a corda paralela ao diâmetro por P (diâmetros conjugados). (caso geral da proposição 2 de hipérbole).	**13 (*)**	**16** **18(1ª** **parte)**	**19** **20**
Uma proporção entre quadrado da ordenada de um diâmetro PR, o produto das distâncias do pé da ordenada até as extremidades desse diâmetro, o quadrado do diâmetro conjugado a PR e o quadrado do diâmetro PR (caso geral das proposições 3 e 4 de elipse).	**Não possui essa propriedade**	**17** **18(2ª** **parte)**	**21**
Definição do "Parâmetro de um Diâmetro" da cônica (caso geral da proposição 5 de elipse, 1 de parábola e 3 de hipérbole).	**14**	**19**	**22**
Uma proporção entre quadrado do diâmetro PR, o quadrado do diâmetro conjugado a PR, o produto das partes de uma corda HI paralela ao diâmetro PR formadas por outra corda FG paralela ao diâmetro conjugado a PR e o produto das partes da corda FG formadas pela corda HI. (Conceito atual de Potência de ponto para uma cônica).	**19 (*)**	**20**	**23**
Propriedades com assíntotas.	**Não possuem essas propriedades**		**9, 10, 11,** **12, 13, 14,** **15, 16, 17 e**

			18
Uma corda perpendicular ao eixo (indeterminado ou menor) é dividida ao meio por ele.	**18**	**21**	**2**
Generalização da proposição 7 de parábola, trocando eixo por diâmetro.	**15**	**Existem, mas ainda não foram feitas.**	
Ângulo da tangente com o eixo da parábola.	**6**		
Propriedades dos parâmetros do eixo e do diâmetro.	**9, 16 e 17**		

*** Fazendo o limite da elipse ou da hipérbole que leve um dos focos e um dos vértices para o infinito mantendo fixo os demais.**

Os números **em azul** indicam que a propriedade também vale para a curva em questão, mas esteve ausente do texto de La Hire. Como podemos observar da tabela, ele deixou algumas poucas lacunas, fazendo proposições para uma ou duas cônicas, mas deixando de fazer para a(s) restante(s). Este capítulo se propõe a completar parte destas lacunas.

As demonstrações propostas a seguir para algumas dessas lacunas (5 proposições para a hipérbole, 1 para a elipse e 2 para a parábola) seguem uma argumentação idêntica e, a maior parte das vezes, igual à usada por La Hire. Apenas na demonstração de uma proposição (19 de parábola), a argumentação será diferente da forma que foi normalmente utilizada pelo matemático francês. Será feita também uma nova definição para o Eixo Indeterminado da hipérbole que viabilizam as novas proposições 25 e 26 de hipérbole.

7.2 – Cinco outras proposições para a hipérbole e uma definição modificada

La Hire faz 15 definições para a hipérbole. Na quarta definição, ele define Eixo Indeterminado como sendo uma reta. Poderia ser feita uma outra definição para este eixo como sendo um segmento de reta, a fim de aproximar do tratamento dado à elipse.

Nova definição 4 – Seja CO a diagonal do quadrado de lado CT (o Semi-Eixo Determinado). O segmento NOM, correspondente ao dobro da Ordenada cuja distância até o centro vale CT, é denominado "*Eixo Indeterminado*" da hipérbole (veja figura 1).

Com essa definição, é possível obter (para a hipérbole) as proposições equivalentes às proposições 2 e 3 de elipse.

Da mesma maneira, poderíamos definir um novo "Diâmetro Indeterminado" através de um segmento e não através de uma reta como fez La Hire. Bastaria fazer uma "Ordenada de um Diâmetro" cujo pé da Ordenada estivesse a uma distância igual ao semidiâmetro multiplicado por $\sqrt{2}$ (diagonal de um quadrado cujo lado é o Semidiâmetro Determinado). Neste caso, a medida dessa Ordenada seria o *"Semidiâmetro Indeterminado"*.

A proposição 25 proposta a seguir é análoga à 2 de elipse.

PROPOSIÇÃO XXV

As mesmas coisas anteriormente admitidas. Eu afirmo que o retângulo ***ID, DT*** é igual ao quadrado de ***NO*** que é metade do eixo indeterminado (ou imaginário).

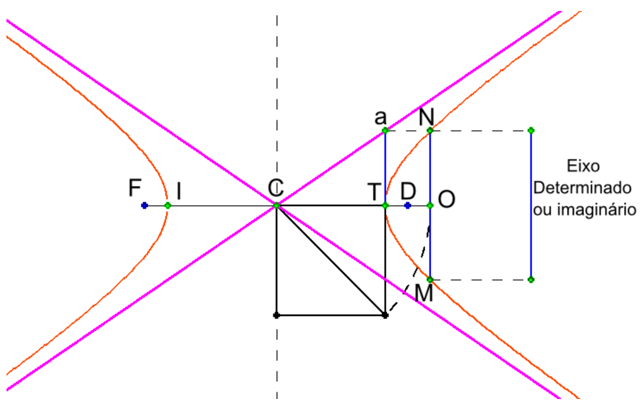


Figura 1

PROVA

Suponha que ***NO*** seja uma ordenada do eixo IT. Pela proposição 1 de hipérbole, o quadrado de *CT* está para o retângulo *IO, OT* (que é igual ao quadrado de *CT*) como o retângulo *ID, DT* para o quadrado de *NO*. Portanto, o quadrado de *NO* é igual ao retângulo *ID, DT* (ou *IF, FT* que é igual a ele). É o que foi proposto.

A proposição 26 proposta a seguir é análoga à 3 de elipse.

PROPOSIÇÃO XXVI

*O quadrado do Eixo Imaginário **aA** (equivale ao Pequeno Eixo **NM** da elipse) da hipérbole está para o quadrado do Eixo Real **IT**, assim como o quadrado da Ordenada **PO** do Eixo Real está para produto das partes deste Eixo formadas pela extremidade desta Ordenada (figura **1**), ou seja,* $aA^2 / IT^2 = PO^2 / IO \cdot OT$.

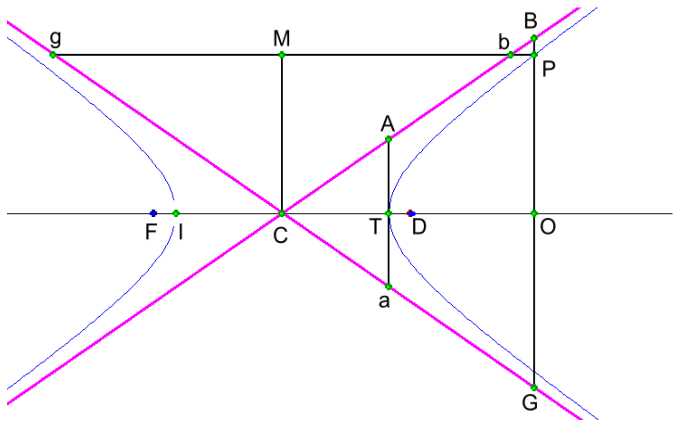


Figura 2 (Definição das assíntotas)

PROVA

Pela proposição ***1*** $\dfrac{CT^2}{\underbrace{ID \cdot DT}_{\Pr op..25 = TA^2}} = \dfrac{IO \cdot OT}{PO^2}$. Seus dobros: $\dfrac{\overbrace{4 \cdot CT^2}^{IT^2}}{\underbrace{4 \cdot TA^2}_{aA^2}} = \dfrac{IO \cdot OT}{PO^2}$ **C. Q. D.**

As proposições 27, 28 e 29 propostas a seguir são análogas à 13, 14 e 15 de elipse e as 10, 11 e 12 de parábola, respectivamente. Elas apresentam equivalências de áreas entre polígonos que possuem pontos nas cônicas.

PROPOSIÇÃO XXVII

*Se **BT** é tangente à hipérbole, então os triângulos **PAB** e **TAH** são equivalentes.*

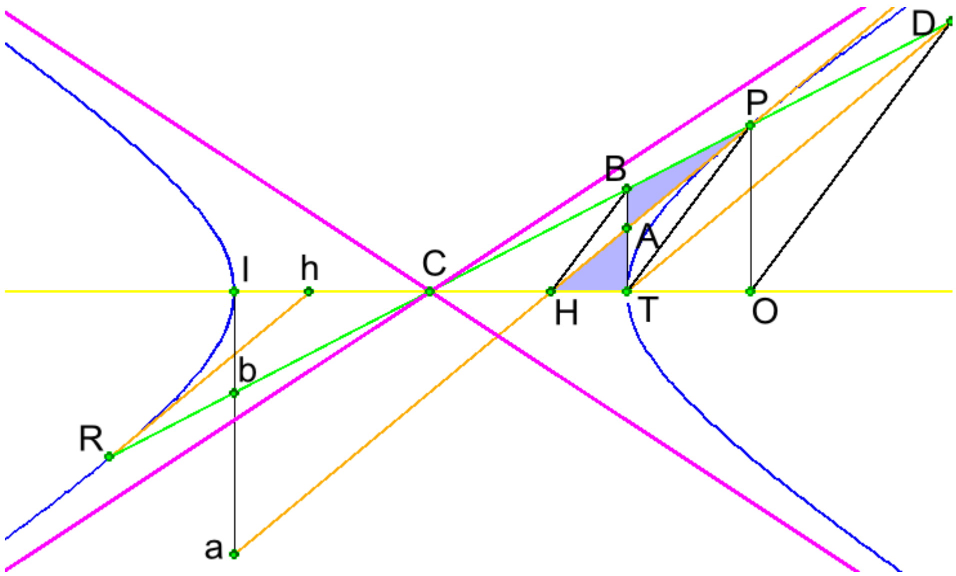


Figura 3

PROVA

Pelo ponto *T*, desenhe *TD* paralela à tangente *PH* e *PO* uma ordenada ao eixo. Do paralelismo, $\frac{CD}{CP} = \frac{CT}{CH}$. Pela proposição 24, $\frac{CT}{CH} = \frac{CO}{CT}$ e $\frac{CO}{CT} = \frac{CP}{CB}$. Por transitividade $\frac{CD}{CP} = \frac{CP}{CB}$ e, pela mesma razão, $\frac{CD}{CP} = \frac{CO}{CT}$ e $\frac{CP}{CB} = \frac{CT}{CH}$. Portanto os segmentos *DO, PT* e *BH* serão paralelos uns aos outros e os triângulos *PTB* e *PTH*, que têm a mesma base *PT* e mesma altura, serão equivalentes. Do qual surgem o triângulo comum *PAT* e os restantes *PAB* e *TAH* terão a mesma área. **C. Q. D.**

COROLÁRIO 1

Serão também equivalentes: os triângulos *PDT* e *POT*, os quadriláteros *POTB* e *PDTH* (pela adição dos triângulos equivalentes *PTB* e *PTH*), o quadrilátero *POTB* e o triângulo *OPH* (pela adição do triângulo *POT*), o quadrilátero *PDTH* e o triângulo *DTB* (pela adição do triângulo *PDT)*, o triângulo *CTB* e o triângulo *CPH* (pela adição do *PCO*),

COROLÁRIO 2

Desenhe a tangente *Ib*. Pode-se concluir que os triângulos *Pab* e *IaH* são equivalentes. Pois *Ib // BT*. Assim os triângulos *CIb* e *CTB* são semelhantes e, como *CI = CT,* são equivalentes também. Portanto os triângulos *CIb, CPH e CTB* serão equivalentes. Finalmente, os triângulos *Pab* e *IaH* serão equivalentes, pela adição do quadrilátero *ICPa*.

O que foi demonstrado para triângulos compreendidos entre os segmentos *CT* e *CP* pode, da mesma forma, ser demonstrado para aqueles compreendidos entre *CI* e *CR*. Vamos, a seguir, provar que a tangente *Rh* deve ser // à tangente *PH*. O triângulo *CPH* é equivalente ao triângulo *CTB*, que é congruente ao triângulo *CIb*. Pode ser demonstrado, de forma análoga à feita nesta proposição, que o triângulo *CIb* é equivalente a *CRh*. Assim, o triângulo *CRh* é equivalente ao triângulo *PCH*. Mas nesses triângulos equivalentes, o ângulo *RCh = PCH* e *CR = CP* (pela proposição *4*), então *Ch = CH.* Assim, esses triângulos são semelhantes. *Rh*, portanto, é paralelo a *PH* seu lado homólogo.

PROPOSIÇÃO XXVIII

*Seja um ponto qualquer **E** da hipérbole e as retas **ELM** (// tangente **PH**) e **EFG** (// à tangente **BT**). O triângulo **EGM** é equivalente ao quadrilátero **GTBF**.*

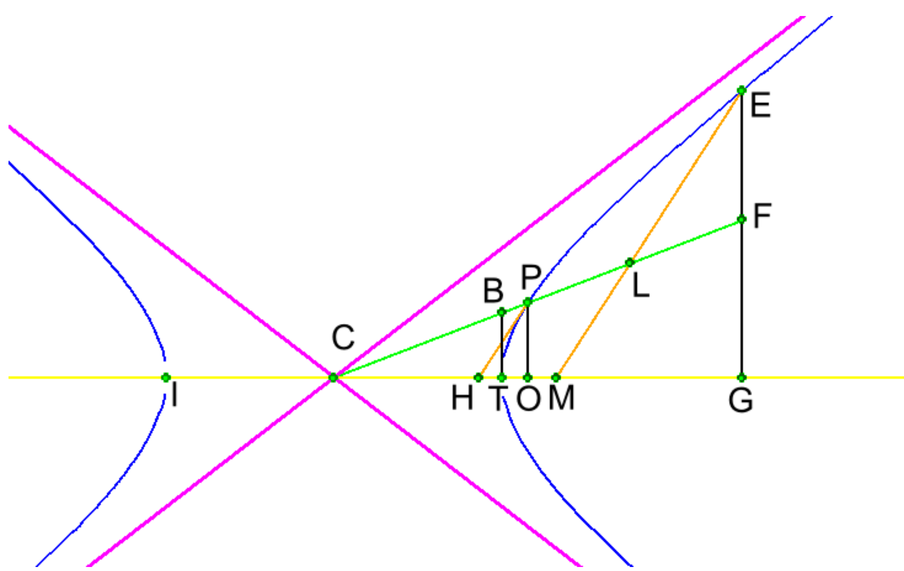


Figura 4

PROVA

Por semelhança de triângulos, $\dfrac{PO \cdot OH}{EG \cdot GM} = \dfrac{PO^2}{EG^2}$. Pela proposição **1**, $\dfrac{PO^2}{EG^2} = \dfrac{IO \cdot OT}{IG \cdot GT}$.

Como **IC = CT**, pelo lema **2**, $\dfrac{IO \cdot OT}{IG \cdot GT} = \dfrac{OTBP}{GTBF}$. Por transitividade, $\dfrac{PO \cdot OH}{EG \cdot GM} = \dfrac{OTBP}{GTBF}$.

Pelo corolário **1** da proposição ***27***, o triângulo ***POH*** é equivalente ao quadrilátero ***OTBP***. Portanto, o triângulo ***EGM*** é equivalente ao quadrilátero ***GTBF***. **C. Q. D.**

Se o ponto ***E*** estivesse em qualquer outra posição da hipérbole, por processo análogo, chega-se novamente à mesma conclusão.

PROPOSIÇÃO XXIX

*O triângulo **ELF** é equivalente ao quadrilátero **LPHM**.*

Na figura 4, dos equivalentes *EGM* e *GTBF (*proposição *28)*, retira-se o quadrilátero comum *FGML*. Sobrarão então o triângulo *ELF* equivalente ao quadrilátero *LMTB*, do qual se adiciona o triângulo *CTB* e se retira o triângulo equivalente *CPH*. Assim, o triângulo *ELF* será equivalente ao quadrilátero *LPHM*. **C. Q. D.**

Se o ponto *E* estivesse em qualquer outra posição da hipérbole, por processo análogo, chega-se novamente à mesma conclusão.

7.3 – Uma outra proposição para a elipse

A proposição proposta a seguir é análoga a 2 de hipérbole. Trata da simetria da curva em relação ao Eixo Menor. A simetria em relação ao Eixo Maior é dita por La Hire no corolário da construção.

PROPOSIÇÃO XXI

*O segmento **Pp** traçado entre os pontos P e p da elipse, paralelo ao eixo maior **IT,** encontra o eixo menor **NM** em um ponto **Q** e **PQ = Qp**.*

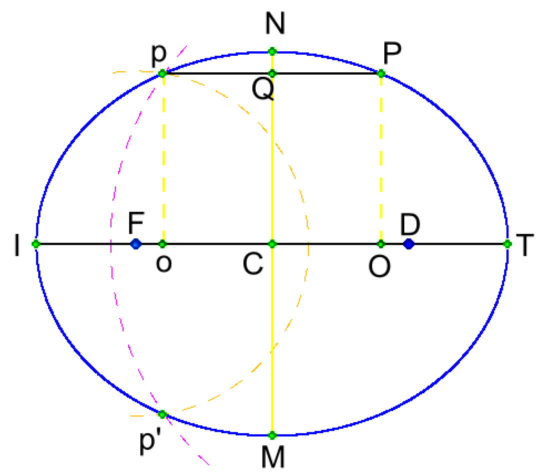


Figura 5

PROVA

Se o ponto D for feito o centro de um círculo com raio FP e F o centro de outro círculo com raio DP, então os dois círculos se interceptarão nos pontos p e p'. Os triângulos FDP e FDp são congruentes (LLL). Logo suas alturas po e PO serão iguais, assim como DO e Fo. Logo, $CO = Co$ e, pelo paralelismo, $PQ = pQ$. **C. Q. D.**

7.4 – Duas outras proposições para a parábola

A proposição proposta a seguir é análoga a 21 de elipse e a 2 de hipérbole. Aborda a simetria da curva em relação ao Eixo definido por La Hire.

PROPOSIÇÃO XVIII

*O segmento **Pp** traçado entre os pontos P e p da parábola perpendicular ao eixo **FT,** encontra este eixo em um ponto **O** e **PO = Op**.*

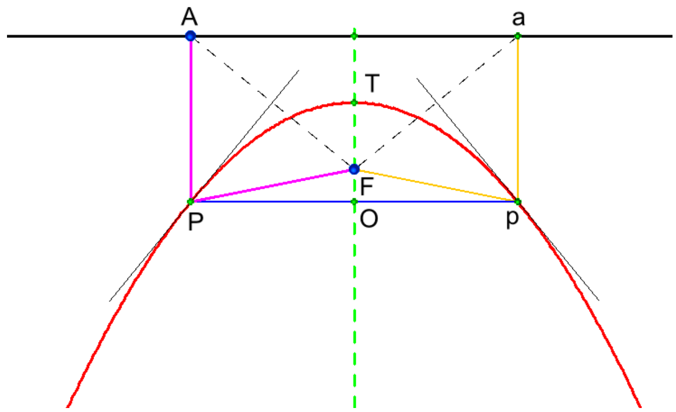


Figura 6

PROVA

Se o foco *F* for feito o centro de um círculo com raio *FP*, então este círculo cruzará o segmento *Pp* nos pontos *P* e *p*. Os triângulos retângulos *FOP* e *FOp* são congruentes (*LLA*). Logo os lados *po* e *PO*. **C. Q. D.**

A proposição proposta a seguir é análoga a 20 de elipse e a 23 de hipérbole que podem ser interpretadas como uma generalização do conceito de Potência de um ponto em relação a um Círculo para uma Cônica.

PROPOSIÇÃO XIX

Seja a reta ***AB*** perpendicular ao diâmetro que passa pelo ponto **C** da parábola, encontrando-o em ***P***, um ponto que não esteja na parábola; então, $PA \cdot PB = PC \cdot p$

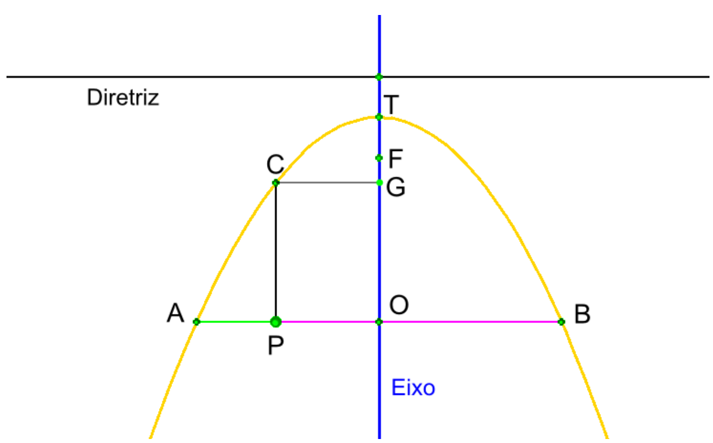


Figura 7

PRIMEIRA DEMONSTRAÇÃO

Interpretando a parábola como o limite de uma elipse, quando se mantém fixo o vértice T e afasta-se infinitamente o vértice I, temos da proposição 20 de elipse: $\frac{PC \cdot PD}{PA \cdot PB} = \frac{IT^2}{NM^2}$. Pela definição de parâmetro p, $\frac{IT = (IF + FT)}{p} = \frac{IT^2}{NM^2}$. Sendo E o ponto médio de CD e H, de IT, então PC $\cdot$ PD = PC $\cdot$ (PE + ED) = PC $\cdot$ (2PE + PC) = PC $\cdot$ (2HT – 2OT + PC) = PC $\cdot$ (IF + FT – 2OT + PC). Por transitividade, $\frac{\mathrm{PC}\,.\,(\mathrm{IF}+\mathrm{FT}-2\mathrm{OT}+\mathrm{PC}).}{PA \cdot PB} = \frac{IF + FT}{p}$.Alternando: $\frac{\mathrm{PC}\,.\,(\mathrm{IF}+\mathrm{FT}-2\mathrm{OT}+\mathrm{PC}).}{IF + FT} = \frac{PA \cdot PB}{p}$.

Mantendo os pontos F, T, O e G fixos e fazendo IF tender para o infinito, tem-se no limite:

$$\lim_{FT \to \infty} \frac{\mathrm{PC}\,.\,(\mathrm{IF}+\mathrm{FT}-2\mathrm{OT}+\mathrm{PC})}{IF + FT} = \mathrm{PC}.$$ Assim, PA $\cdot$ PB = PC $\cdot$ p. **C. Q. D.**

SEGUNDA DEMONSTRAÇÃO

Repartindo os segmentos: PA $\cdot$ PB = (AO – OP) $\cdot$ (AO + OP) = $AO^2 - OP^2$.

Como AO e OP são ordenadas, pela proposição 1 de parábola, AO^2 = TO $\cdot$ p e OP = $(CG)^2$ = TG $\cdot$ p.

Assim, por substituição, $AO^2 - OP^2$ = TO $\cdot$ p – TG $\cdot$ p = (TO – TG) $\cdot$ p = GO (=PC) $\cdot$ p.

C. Q. D.

CAPÍTULO 8

COMPARAÇÃO ENTRE O TEXTO DE PHILIPPE DE LA HIRE DE 1679 COM UM LIVRO DIDÁTICO RELEVANTE DO SÉCULO XX (F. I. C.)

Um dos objetivos dessa dissertação é investigar a possível influência desse texto de 1679 de Philippe de La Hire no ensino atual. Procuramos, então uma obra relevante para o ensino de cônicas do século XX. Dentre outras, escolhemos a que desconfiávamos ser de maior relevância no Brasil: "Elementos de geometria" do F. I. C. Este livro foi escrito pelo membro Gabriel Marie (conhecido como F. G. M.) de uma irmandade cristã cujas iniciais do seu líder eram F. I. C. (Frère Ignace Chaput). Este livro parece ter tido grande utilização no ensino de geometria em vários países do mundo ocidental. No Brasil, teve uma tradução e adaptação da 14ª edição feita por Raja Gabaglia em 1954 [10]. Constatamos também que as outras edições em Português não apresentaram alterações expressivas.

8.1 – O Programa de acesso à Escola Polytechnica

A fim de confirmar essa possível relevância, consultamos o Programa de Acesso da Escola de Engenharia da UFRJ (antiga Escola Polytechnica) de 1907 [11] existente na Biblioteca de Obras Raras do CT-UFRJ. Consultamos também o programa de acesso de outros anos das décadas de 20, 30 e 40 e praticamente não observamos modificações com este de 1907.

A parte que fala das curvas notáveis (página 16 de [11]) será descrita, a seguir:

PROGRAMA DE ACESSO (1907)

142 – *Ellipse, como logar geométrico. Traçado da ellipse por movimento contínuo e por pontos. Dos eixos, do centro, dos vértices e da excentricidade da elipse.*

143 – *Traçar uma tangente a ellipse: 1º, por um ponto sobre a curva; 2º, por um ponto fôra da curva; 3º, parallelamente a uma recta dada. Normal a ellipse.*

144 – *Theorema: a projeção de um circulo sobre o plano é uma elipse.*

145 – *Área de uma ellipse.*

146 – *Hyperbole, como logar geométrico. Traçados da hyperbole por movimento contínuo e por pontos. Dos eixos, do centro, dos vértices e da excentricidade da hyperbole. Hyperbole eqüilátera.*

147 – *Traçar uma tangente a hyperbole: 1º, por um ponto sobre a curva; 2º, por um ponto fôra da curva; 3º, parallelamente a uma recta dada. Normal a hyperbole.*

148 – *Asymptotas da hyperbole; traçado da hyperbole pelas propriedades segmentares.*

149 – *Parabola, como logar geométrico. Traçado da ellipse por movimento contínuo e por pontos. Do eixo, do vértice e da parabola. A parabola como limite para que tende uma ellipse.*

150 – *Traçar uma tangente a parabola: 1º, por um ponto sobre a curva; 2º, por um ponto fôra da curva; 3º, parallelamente a uma recta dada.*

151 – *Da Área do segmento parabolico.*

152 – *Formula de Simpson para avaliar aproximadamente áreas planas; sua extensão à determinação de volumes.*

153 – *Secções cônicas. Theorema de Dandelin.*

Os tópicos *154* a *159* incluem outras curvas: cissóide, espiral, ciclóide, epiciclóide e espiral.

Analisando esse programa, vemos uma enorme coincidência entre os tópicos apresentados e as proposições existentes no F. I. C. [10]. Faremos, a seguir, uma associação entre esses tópicos e as proposições do F. I. C.:

Tópico do Programa de Acesso	Proposição do F. I. C.
142	613, 614, 615, 619 e 620
143	627, 628,629 e 631
144	634
145	637
146	642, 643, 644, 649, 650 e 651
147	664, 665, 666, 667, 668, 669 e 670
148	657, 658, 659, 660 e 661
149	672, 673, 674, 675, 676 e 681
150	693, 694 e 695
151	696, 697 e 698
152	Item V da terceira parte do apêndice
153	816, 817, 818 e 819

Os tópicos que falam de outras curvas usuais (**154** a **159**) estão, também, plenamente e identicamente contemplados no texto do F. I. C..

Existe uma coincidência na ordem e na forma de apresentação das proposições. Parece uma cópia do que é apresentado no texto do F. I. C..

A caracterização usada para as cônicas é a mesma, assim como a utilização tanto da construção por pontos como a construção contínua. Um bom exemplo dessa semelhança é o problema de traçar uma tangente à cônica que o F. I. C. resolve primeiro para um ponto na curva, depois para um ponto fora e finalmente sendo paralela a uma direção dada. O Programa de Acesso apresenta exatamente os mesmos problemas e os coloca na mesma ordem. O F. I. C. apresenta fórmulas para as áreas da elipse e do segmento parabólico, mas não o faz para o segmento hiperbólico, da mesma forma que o Programa de Acesso. Não tem um único item desse Programa que não seja plenamente coberto dentro do texto do F. I. C..

Assim, nossa desconfiança da relevância do F. I. C. para o ensino foi reforçada por essa observação do Programa de Acesso à Escola Polythechnica.

Partimos, assim, para uma comparação entre o texto de La Hire de 1679 com essa tradução do F. I. C. de 1954. Esta comparação será mostrada a seguir e será feita em dois sentidos: primeiramente, do texto do F. I. C. para o texto de La Hire; depois, do texto de La Hire para o do F. I. C..

8.2 – Comparação entre o livro do F. I. C. com o de La Hire

"Elementos de geometria" do F. I. C. [10]

e

"Novos elementos das seções cônicas" de Philippe de La Hire [6]

Serão listadas, a seguir, as proposições 613 a 698 do livro "Elementos de geometria" do F. I. C. (F. G. M.) que se referem ás seções cônicas. Em seguida, será comentada, em azul, a presença ou não de cada proposição na obra de Philippe de La Hire.

Nas proposições de 608 a 612, o F. I. C. apresentou um conjunto de definições para curvas quaisquer. Definiu ***Eixo, Vértice, Centro, Tangente, Normal, Corda dos Contatos*** (ele já havia definido antes ***Corda***), ***Curva Convexa***, ***Coordenadas Retilíneas*** e ***Equação de uma curva***.

8.2.1 – Proposições sobre elipse no F. I. C.

613 – Definições.

- **Elipse** è uma curva plana, tal que a soma das distâncias de qualquer de seus pontos a dois outros pontos fixos situados no seu plano é constante.
- Os pontos fixos são os **Focos**.
- **Raios Vetores** são as retas que unem um ponto qualquer da curva aos dois focos.
- Seja **AA'** um comprimento constante, **F** e **F'** dois pontos fixos; se para cada ponto da curva **MN**, tivermos **MF + MF' = AA'**, essa curva é uma elipse. A soma constante representa-se por **2a.**
- A distância **FF'** dos focos chama-se **Distância Focal** e representa-se por **2c**. Para que o triângulo **MFF'** seja possível, é necessário que tenhamos: **FF' < MF + MF'**, isto é **2c < 2a**.
- **Círculos Diretores** da elipse são as circunferências descritas de cada foco como centro e de raio igual a **2a**. A elipse tem dois círculos diretores.
- **Círculo Principal** é o círculo descrito do centro da elipse, e de raio **a**.

Ele apresentou a mesma definição para a ***elipse*** que La Hire. Definiu igualmente os ***Focos***. Definiu a mais: ***Raios Vetores, Distância Focal, Círculo Diretor e Principal***, além de justificar o fato do segmento **AA’** ser maior que a distância focal (**a > c**). Tais conceitos, entretanto, eram claramente conhecidos e usados por La Hire.

614 – Traçado da elipse pelo modo contínuo.

Para descrever a elipse com um movimento contínuo, conhecendo os focos e a soma constante dos raios vetores, se fixa em cada foco uma das extremidades de um fio de comprimento **2a**; depois, com um lápis ou uma ponteira de traçar, estende-se o fio em todos os sentidos fazendo escorregar a ponta sobre o plano.

Na sua obra, La Hire não optou pela construção pelo modo contínuo. Essa construção contínua apresentada pelo **F. I. C.** é hoje conhecida como **“Construção do Jardineiro”** e faz parte de uma das obras de Descartes. Por ser conseqüência imediata da Definição Bifocal anterior, é bastante razoável que fosse conhecida por La Hire.

615 – Traçado da elipse por pontos.

Pode-se traçar a elipse por pontos, conhecendo os focos e **2a**. A partir do meio **O** da distância focal, tomemos **OA = OA' = a**. Seja **D** um ponto qualquer tomado entre os focos e sobre **AA'** e com **AD** e **DA'** cuja soma é igual a **2a**. Descrevamos duas circunferências de raios **AD** e **DA’**, uma tendo **F** como centro e a outra o ponto **F'**; os pontos de intersecção dessas circunferências pertencem à elipse.

Observações

1ª. Para que as duas circunferências se cortem, é necessário que tenhamos **FF' > DA'— DA** ou **FF' > DA — DA'**. Esta diferença dos dois raios é igual a **2OD**; donde se segue que o ponto **D** deve ficar entre **F** e **F'.**

2ª. Quando o ponto **D** está em **F** ou em **F’**, a diferença dos raios é igual à **FF'**, e as circunferências descritas dos centros **F** e **F'** são tangentes em **A** ou em **A'**.

3ª. Quando o ponto **D** está em **O**, os raios são iguais, e determinam os pontos **B** e **B'** que pertencem à perpendicular levantada no meio de **FF'**.

4ª. O raio máximo é **F'A = a + c** e o raio mínimo é **FA = a — c**. Os dois traçados mostram que a curva é limitada em todos os sentidos. A elipse é, portanto, uma curva fechada.

Esta construção é exatamente a mesma que foi proposta por La Hire.

Escólio I – Ele não apresentou explicitamente, mas parecia conhecer bem essa condição para a interseção das circunferências, uma vez que, na construção análoga da hipérbole, ele apresentou a condição necessária para a interseção.

Escólio II – La Hire afirmou, no corolário da Gênese da elipse, que os extremos do segmento **IT** (**AA'**) pertencem à elipse.

Escólio III – La Hire utilizou essa idéia na proposição **2** de elipse. Portanto a conhecia, embora não a tenha explicitado.

Escólio IV – La Hire falou explicitamente que a elipse "inclui o espaço", algo que interpretamos ser o mesmo que ser fechada. Quanto ao raio máximo e mínimo, ele não explicita, mas parecia conhecer o fato, pois eles acontecem quando os pontos **A** e **A'** são obtidos (Corolário da Gênese).

616 – Uma reta não pode encontrar uma elipse em mais de dois pontos.

Sejam **F** e **F'** os focos de uma elipse, **XX'** uma reta e dois pontos **M** e **M'** tais que se tenha: **FM + MF' = FM' + M'F' = 2a**.

Vamos provar que para qualquer outro ponto **O** de **XX'**, a soma das distâncias aos focos **F** e **F'** é menor ou maior que **2a**...

Na proposição **6** de elipse, La Hire mostrou que já conhecia o fato de os diâmetros cortarem a elipse em dois pontos, tanto que afirmou na sua demonstração ser absurdo encontrar um terceiro ponto para a interseção de uma reta com a elipse. Na proposição **9**, ele utilizou o fato de ser a elipse convexa na sua demonstração, porém, não fez a demonstração, como o **F. I. C.**.

617 – Quando um ponto está dentro da elipse, a soma de suas distâncias aos dois focos é menor que 2a. Quando o ponto está fora, é maior que 2a.

1ª – Unamos aos focos um ponto interior qualquer **C**; prolonguemos **F'C** até **M**, e tiremos **MF**, temos: **CF + CF' < MF + MF'** ou **< 2a**.

2ª – Unamos aos focos um ponto exterior qualquer **D**, e tiremos **FN**, temos: **DF + DF' > NF + NF'** ou > **2a**. Logo...

La Hire definiu que a tangente à parábola e à hipérbole possuem apenas pontos exteriores e provou que uma determinada reta é a tangente à cônica na proposição **4** de parábola e na **6** de hipérbole, obedecendo a essa definição. Mas não o fez para a elipse.

Ele não utilizou esse caminho para a demonstração escolhido pelo **F. I. C.**. Ele provou por absurdo, admitindo ser a tangente interior.

A tradução do **F. I. C.** trocou **FN** por **PN** na segunda parte da demonstração.

618 – Corolário da 617.

Conforme a soma das distâncias de um ponto aos dois focos é superior, inferior ou igual a **2a**, o ponto está fora, ou dentro, ou na elipse. A elipse é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.

Na definição de elipse, La Hire apresentou essa soma das distâncias como sendo igual ao segmento **IT**. Nada afirma, porém, sobre pontos exteriores e interiores. Por ser essa propriedade visualmente perceptível, desconfio que ele tivesse plena consciência dela.

619 – A elipse tem para eixos a reta que passa pelos focos e a mediatriz da reta que une os focos; e tem para centro o ponto de encontro dos eixos.

Seja **M** um ponto qualquer da elipse. Prolonguemos as perpendiculares **MP** e **MV** e o segmento **MO**. Tomemos **PM' = PM**, **VN = VM**, **ON' = OM**. Determinamos, assim, os pontos simétricos de **M** em relação a **AA'**, a **BB'** e ao ponto **O**. Basta provar que esses pontos pertencem à curva.

1ª. FF' é perpendicular ao meio de **MM'**; portanto **MF = M'F**, e **MF' = M'F'**, donde **M'F + M'F' = MF + MF' = 2a.** Logo **M'** é um ponto da elipse (n. **618**).

2ª. Os trapézios retângulos **OFMV** e **OF'NV** podem ser superpostos, porque as suas bases são iguais; portanto **MF = MF'**, e os ângulos em **F** e **F'** são iguais. Os triângulos **FF'M** e **FF'N** são congruentes por terem um ângulo igual compreendido entre lados iguais. Portanto **NF = MF'** e **NF' = MF**. Assim, **NF + NF' = MF + MF' = 2a**. Logo o ponto **N** pertence à elipse.

3ª. Como as retas **MN'** e **FF'** se cortam ao meio, a figura **MFN'F'** é um paralelogramo, e temos: **N'F + N'F' = MF + MF' = 2a**. Assim o ponto **N'** pertence à curva.

Portanto **AA'** e **BB'** são os eixos e seu ponto de intersecção **O** é o centro da curva. A perpendicular levantada no meio de **FF'** encontra a curva nos pontos **B** e **B'**, igualmente afastados dos focos. O comprimento **BO = OB'** representa-se por **b**; e como **BF = a**, temos b < a. A reta **AA'** ou **2a** é o eixo maior da elipse; **BB'** ou **2b** é o eixo menor. O triângulo retângulo **BOF** fornece a relação pitagórica $\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$.

La Hire conhecia os três resultados. O primeiro explicitou no corolário da construção da elipse, mas não provou. O segundo não explicitou nem provou. O terceiro explicitou e provou na proposição **6**. Quanto à relação pitagórica, é conseqüência direta da proposição **2**.

620 – Escólio.

- A razão **c/a** chama-se excentricidade da elipse; ela varia de **0** a **1**. Quando **b = a**, a excentricidade é nula, e a elipse é um círculo. Quando **b** é nulo, a excentricidade **c/a = l** e a elipse está reduzida ao eixo maior.

- A elipse tem quatro vértices: **A, A', B, B'**.
- Para determinar os focos, conhecendo os eixos, é preciso descrever um arco de círculo do ponto **B** como centro e **a** como raio; a intersecção deste arco com **AA'** faz conhecer **F** e **F'**.

La Hire nada afirmou sobre a excentricidade. Mas em relação aos quatro vértices conhecia claramente a sua existência como mostrou na introdução da construção e na proposição **2**, embora não os tenha definido. Quanto à possibilidade de achar os focos, dados os eixos, imagino que conhecia em virtude da proposição **2**, embora não tenha explicitado.

621 – A tangente à elipse faz ângulos iguais com os raios vetores do ponto de contato (Demonstração de J. Serret).

Consideremos uma secante qualquer **MM'**. De um dos focos, baixemos a perpendicular **FC** e tomemos a linha **CF_1** igual a **CF**. Tracemos **$F'F_1$**, unamos o ponto **D** ao foco **F** e o ponto **M** aos três pontos **F', F, F_1**. Demonstremos primeiramente que o ponto **D** está situado entre os pontos de intersecção **M** e **M'** e depois que a secante **MM'** faz ângulos iguais com **DF** e **DF'**.

1ª – Temos $MF_1 = MF$ e $DF_1 = DF$, portanto $DF' + DF = F'F$. Ora $MF' + MF_1 = MF' + MF = 2a$. Como $F'F_1$ é menor que $MF' + MF_1$ ou **2a**, logo $DF' + DF < 2a$.

A soma das distâncias do ponto **D** aos dois focos sendo menor que **2a**, o ponto **D** está no interior da elipse (**618**). Assim, está situado entre **M** e **M'**.

2ª – Os ângulos **FDM** e **F'DM'** são congruentes, porque cada um deles é congruente ao ângulo **MDF_1**.

Os resultados precedentes são exatos para uma secante qualquer, por conseqüência, por mais próximos que estejam os pontos **M** e **M'.** Porém, no limite, quando **M'** se confunde com **M**, a secante se torna uma tangente. — Logo...

La Hire apresentou este resultado na proposição **10**. Mas a demonstração do **F. I. C.** mostrou que o resultado é mais geral, valendo para secantes e não apenas para tangentes.

622 – Corolários da 621.

1ª – Todos os pontos da tangente, excetuando o ponto de contato, estão fora da curva. Com efeito, temos **HF' + HF ou HF' + HF > 2a**. Isso resulta, aliás, de ser a elipse uma curva convexa (**616**).

2ª – A normal **MN** é bissetriz do ângulo dos raios vetores do ponto de contato, porque os ângulos que ela forma com **MF** e **MF'** têm para complemento os ângulos iguais que a tangente forma com os mesmos raios.

La Hire provou o primeiro corolário para parábola (proposição **4**) e hipérbole (proposição **6**), mas não o fez para elipse. Já o segundo corolário não foi explicitado por La Hire, mas pensamos ser conhecido por ele, uma vez que sua dedução é imediata e tem fácil visualização. A tradução do **F. I. C.** possui um erro: trocou o sinal de **>** por **<**.

623 – Escólios.

I. A tangente **MT** é perpendicular ao meio de **FF$_1$**.

II. A reta **F'F$_1$** que une um foco ao ponto simétrico de outro foco em relação à tangente, passa pelo ponto de contato **M**.

III. Nos vértices da elipse, as tangentes são perpendiculares a um dos eixos.

O escólio **I** foi apresentado na proposição **8** sobre elipse por La Hire. O ponto **A** que aparece no seu texto foi obtido na primeira proposição com **PA = PD**.

O escólio **II** fez parte da construção da proposição **1** sobre elipse. O ponto **M** do **F. I. C.** equivale ao ponto **P** em La Hire.

O escólio **III** é apresentado na proposição **7** sobre elipse. La Hire provou para um vértice do Eixo Maior, mas não faz para o Eixo Menor. O **F. I. C.** não fez a prova para caso algum, só afirmou que o resultado vale para os dois eixos.

624 – O lugar do ponto simétrico a um foco em relação a uma tangente qualquer é o Círculo Diretor descrito do outro foco.

Seja $\mathbf{F_1}$ o ponto simétrico do foco **F** em relação à tangente **MT**, a reta $\mathbf{F'F_1}$ passa pelo ponto de contato (n. **623, II**). Como a tangente é perpendicular ao meio de $\mathbf{FF_1}$, a reta $\mathbf{F'F_1 = MF' + MF = 2a}$. Logo, o ponto $\mathbf{F_1}$, simétrico ao foco **F**, está sobre o Círculo Diretor descrito do foco **F'**.

La Hire apresentou, na proposição **1,** o início da formação do Círculo Diretor. Na proposição **9**, ele traçou um arco desse Círculo Diretor, dando pistas que conhecia a sua propriedade da eqüidistância ao foco **F** de um valor igual ao Eixo Maior. Apenas não o definiu.

625 – Escólios.

A elipse é o lugar dos pontos **M** igualmente distantes de um circulo $\mathbf{F_1G}$ e de um ponto **F** situado no círculo. Portanto, quando uma circunferência **N** passa pelo ponto **F**:

I. Se o seu centro está dentro da elipse, ela não encontra o círculo diretor;

II. Se o centro está na curva, ela lhe é tangente;

III. Se o centro está fora da elipse, ela corta o círculo diretor em dois pontos; porque este centro **N** está mais próximo do círculo diretor que do foco **F**.

Pode-se utilizar o círculo diretor para traçar a elipse por pontos, quando se conhece os focos e o valor **2a**: traça-se $\mathbf{F'F_1}$ e depois a perpendicular levantada no meio de $\mathbf{FF_1}$, que é tangente à curva. O ponto de contato está na intersecção da tangente e do raio $\mathbf{F'F_1}$ (**n. 623, II**).

La Hire não citou esta propriedade do Círculo Diretor em qualquer parte do seu texto.

626 – O lugar geométrico das projeções dos focos sobre as tangentes à elipse é a circunferência descrita sobre o eixo maior como diâmetro.

Seja uma tangente qualquer **MT** e o círculo diretor relativo ao foco **F'**. Tracemos **OC**. Temos: **FC = ½ FF_1**; **OF = ½ FF'**; portanto **OC**, que une os meios dos lados **FF'** e **FF_1**, é igual a ½ **F'F = a**; assim o lugar do ponto **C** é o círculo descrito do centro da elipse com **a** para raio. Este círculo é o Círculo Principal da elipse (n. **613**).

Pela dedução bem simples, imagino que La Hire sabia desse resultado. Uma pista surge na figura da proposição **8** de elipse**,** onde os pontos **E, I e T** são eqüidistantes de **C** (por causa da semelhança entre os triângulos **CDE** e **FDA)**. Ou seja, o ponto **E** é um ponto genérico deste círculo apresentado na proposição.

Outro motivo, ainda mais forte, que nos leva a acreditar que esse resultado já era conhecido por La Hire é que o **F. I. C.** chama esta proposição **626** de Teorema de La Hire.

PROBLEMAS

627 – Tirar uma tangente à elipse, por um ponto tomado na curva.

Seja **M** o ponto dado na curva. Tiremos os raios vetores do ponto de contato; prolonguemos **FM** e tiremos a bissetriz do ângulo exterior **F'MC;** esta bissetriz é tangente; porque os ângulos **FMT** e **F'MT'** são iguais (n.**621**) ...

Embora La Hire não tenha proposto tal construção, a propriedade usada da congruência entre os ângulos **T'MC, T'MF'** e **TMF** (figura **433** do **F. I. C.**) era por ele conhecida conforme mostrou a proposição **10**.

628 – Escólio.

Para termos a normal num ponto **M** dado sobre a curva, basta tirar a bissetriz do ângulo **FMF'** dos dois raios vetores (n. **622, 2ª**).

Esse resultado não foi explicitado por La Hire, mas penso que era conhecido por ele, uma vez que sua dedução é imediata a partir da proposição **10**.

629 – Tirar uma tangente à elipse, por um ponto dado fora da curva.

Seja **P** o ponto fora da curva e **CD** o Círculo Diretor relativo ao foco **F'**. A circunferência descrita com o raio **PF** corta o Círculo Diretor nos pontos **C** e **D** (n. **625, III**). Unamos estes pontos ao foco **F**; as perpendiculares levantadas no meio de **FC** e de **FD** são tangentes (n. **623, I**), e passam pelo ponto **P**, centro dos arcos **CF** e **FD**; as retas **F'C** e **F'D** fazem conhecer os pontos de contato (n. **623, II**).

La Hire não citou esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

630 – Escólio.

- Por um ponto dentro da curva, não há tangente possível.
- Por um ponto tomado na curva, há uma.
- Por um ponto exterior há duas (n. **625, III**).

La Hire afirmou na proposição **9** que a tangente que passa por um ponto da elipse é única. Na demonstração dessa proposição, utilizou o fato da tangente não possuir pontos interiores. O único dos três resultados que ele não faz qualquer citação é para a tangente que passa por um ponto externo à elipse.

631 – Tirar à elipse uma tangente, paralela a uma linha dada.

Descrevamos o Círculo Diretor relativo ao foco **F**, tiremos a perpendicular **FG** à reta dada **xy**. As perpendiculares **MT** e **NV** levantadas no meio das retas **FE** e **FG** são tangentes (n. **623, I**) e os raios **F'E** e **F'G** determinam os pontos de contato (n. **623, II**).

La Hire não citou esta construção em qualquer momento da sua obra.

632 – Escólios.

I. A corda dos contatos MN passa pelo centro da elipse.

Com efeito, as tangentes sendo perpendiculares ao meio de **Fg** e de **FG**, e a linha **F'G** sendo igual a **F'g**, os três triângulos **gMF, gF'G** e **FNG** são isósceles e todos os seus ângulos agudos são iguais. Portanto as linhas **NF'** e **FM** são paralelas e o mesmo se dá com **MF** e **F'N**. Assim a figura **FMF'N** é um paralelogramo e a diagonal **MN**, corda dos contatos (n. **602**), passa pelo ponto **O**, meio da outra diagonal **FF'**.

II. As soluções dadas para os diversos problemas das tangentes não exigem que a curva esteja traçada: basta conhecer os focos e 2a.

No corolário **2** da proposição **13** de elipse, La Hire mostrou o paralelismo entre as tangentes que passam pelos extremos de uma corda da elipse. Este resultado é a recíproca desse primeiro escólio.

Já o segundo escólio, deveria ser conhecido por La Hire, visto que ele atesta, no início da quarta parte, a sua preferência pela construção da cônica por pontos em detrimento da construção mecânica.

O texto da tradução do **F. I. C.** tem problemas nas letras.

633 – Teorema de Poncelet

1°. As tangentes à elipse por um ponto exterior formam ângulos iguais com as retas que unem este ponto aos dois focos.

2°. A reta que une o ponto exterior a um dos focos é bissetriz do ângulo formado pelos raios vetores que vão deste foco aos dois pontos de contato.

La Hire não citou esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

Existe um erro no texto da tradução do **F. I. C.**, pois a reta **PE** não passa por **M** nem a **PE'** por **M'**.

634 – A projeção de um círculo sobre um plano é uma elipse. (Demonstração de Mr. Courcelle).

La Hire não apresentou esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

635 – As ordenadas da elipse estão para as ordenadas correspondentes do círculo principal numa razão constante.

La Hire não citou esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

636 – Escólios.

I. A razão b / a pode variar de zero até a unidade. Esta razão é igual a zero quando o círculo é perpendicular ao plano de projeção; a elipse reduz-se então a uma reta. A razão é igual a 1 quando o círculo é paralelo ao plano.

II. Se descrevermos um círculo que tenha o eixo menor para diâmetro, as abscissas correspondentes da elipse e deste círculo estão na razão b / a.

La Hire não apresentou esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

637 – A área da elipse é igual ao produto dos semi-eixos pelo número constante π.

La Hire não citou esta propriedade em qualquer parte da sua obra.

A tradução do **F. I. C.** tem erro na grafia do π.

638 – Corolários.

1°. Para avaliar uma área limitada por um arco de elipse, por exemplo, o segmento HIJ ou o setor OHIJ, é preciso determinar a área correspondente no círculo principal, multiplicando-o pela razão b / a.

2°. A elipse πab é média proporcional entre os círculos πa^2 e πb^2 descritos sobre os eixos, pois $\sqrt{\pi a^2 \cdot \pi b^2} = \pi ab$

La Hire não apresentou esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

639 – Sem construir a curva, achar os pontos de interseção de uma reta com uma elipse cujos eixos são conhecidos.

La Hire não citou esta propriedade em qualquer instante da sua obra.

640 – Outro meio.

Para determinar os pontos de intersecção duma reta XX' e de uma elipse que não está traçada, mas da qual se conhecem os focos F', F e o comprimento 2a do eixo maior, pode-se indicar uma solução que se aplica às três cônicas.

La Hire não apresentou esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

641 – Um ponto qualquer de uma reta cujas extremidades escorregam respectivamente sobre duas retas retangulares, descreve uma elipse cujos

eixos estão sobre as retas retangulares e cujo centro está no ponto de intersecção dos eixos.

La Hire não citou esta propriedade em qualquer parte da sua obra.

8.2.2 – Resumo da comparação entre as proposições de elipse

F. I. C.	La Hire
613	D1, D5 e Gênese
614	Não tem
615	E1– ± E2– Gênese E3– CP2 E4– Gênese
616	(P6 e P9)*
617	1ª – ± 2ª – ±
618	(D1 e Gênese)*
619	1ª – Gênese* 2ª – ± 3ª – (P6 e P2)*
620	E1– Não tem E2 – Gênese * E3 – P2*
621	P10*
622	C1 – ± C2 – P10*
623	E1 – P8 * E2 – P8* E3 – P7*
624	P8*
625	Não tem
626	P8*
627	P10*
628	P10*
629	Não tem
630	P9*
631	Não tem
632	E1 – Corolário 2 da P13 E2 – Não tem
633	Não tem
634	Não tem
635	Não tem
636	Não tem
637	Não tem
638	Não tem
639	Não tem
640	Não tem
641	Não tem

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.

- O símbolo “±” significa que, embora a proposição não tenha sido enunciada por La Hire, ele dá pistas durante a obra indicando que parecia conhecê-la.
- A letra **E** significa Escólio.
- A letra **C** significa Corolário.
- A letra **P** significa Proposição.
- A letra **D** significa Definição.

Conclusão

Em cerca de **15** das **29** proposições do **F. I. C.** para a elipse, o resultado foi explicitado por Philippe de La Hire ou parecia ser conhecido por ele. Em cerca de **14** delas não há qualquer menção feita no texto de La Hire.

8.2.3 – Proposições sobre hipérbole

642 – Definições.

- **Hipérbole** é uma curva plana tal que a diferença das distâncias de cada um de seus pontos a dois pontos fixos situados no seu plano é constante.
- Os pontos fixos chamam-se **Focos.**
- **Raios Vetores** são as retas que unem um ponto qualquer da curva aos dois focos.
- Sejam **AA'** um comprimento constante, **F** e **F'** dois pontos fixos; se para cada ponto **M** ou **N** da curva tivermos: **MF – MF’ = AA'**, ou **NF – NF' = AA'** a curva é uma hipérbole. A diferença constante **AA'** representa-se por **2a**.

- A distância **FF'** dos focos chama-se **Distância Focal,** e representa-se por **2c**. Para que os triângulos **MFP'** e **NFP'** sejam possíveis, é preciso ter: **FF' > MF' — MF** e **FF > NF -- NF'**, isto é **2c > 2a.**
- **Círculos Diretores** da hipérbole são os círculos descritos de cada foco como centro com **2a** para raio.
- A hipérbole tem dois Círculos Diretores.

La Hire apresentou a mesma definição para a ***hipérbole*** que o **F. I. C.**. Definiu igualmente os ***Focos***. O **F. I. C.** definiu a mais: ***Raios Vetores, Distância Focal, Círculo Diretor***, além de justificar o fato do segmento **AA'** ser menor que a distância focal (**a < c**). Tais conceitos, entretanto, são claramente conhecidos e usados por La Hire.

643 – Traçado da hipérbole pelo modo contínuo.

Para descrever a hipérbole com movimento contínuo, conhecendo os focos e **2a**, toma-se uma régua mais comprida do que a distância focal e um fio igual ao comprimento da régua diminuída de **2a**. Fixam-se as extremidades desse fio em **C,** sobre a régua, e em **F**.

Estendendo-se o fio no comprimento da régua, fazendo mover a extremidade desta em torno de **F'**, o ponteiro há de descrever um ramo da curva, pois temos sempre: **MF' – MF = 2a**. Fixando o fio em **F'**, e colocando a régua em **F**, obtemos um segundo ramo da curva, situado à esquerda da perpendicular **OY**.

Na sua obra, La Hire não optou pela construção pelo modo contínuo.

644 – Traçado da hipérbole por pontos.

Pode-se traçar a hipérbole por pontos quando se conhecem os focos e **2a**. A partir do meio **O** da distância focal, tomemos **OA = OA' = a**. Seja **D** um ponto qualquer tomado sobre **AA'**, além dos focos; com raios **DA** e **DA'** cuja diferença é igual a **2a**, descrevamos duas circunferências, uma do ponto **F** como centro e a outra do ponto **F'**. Os pontos de intersecção das circunferências pertencem à hipérbole.

É exatamente a mesma construção proposta por La Hire no início da terceira parte do texto (hipérbole).

645 – Observações.

1ª. Para que as duas circunferências se cortem, é necessário que se tenha **FF' < DA + DA'**. Esta soma dos dois raios é igual a **2 · OD**; donde resulta que o ponto **D** nunca deve ser tomado entre **F** e **F'.**

2ª. Quando o ponto **D** está em **F**, a soma dos raios é igual à **FF'** e as circunferências descritas dos centros **F** e **F'** são tangentes em **A** ou em **A'**,

3ª. Os menores raios que se podem utilizar para um mesmo ponto têm para comprimento **c – a** e **c + a.**

4ª. A perpendicular **OY** levantada no meio de **FF'**, sendo o lugar dos pontos igualmente afastados dos focos, não pode encontrar a curva. No traçado contínuo, é preciso que a régua e o fio tenham para diferença **2a**, nada, porém, limita o seu comprimento; também no traçado por pontos, os raios das circunferências secantes podem aumentar indefinidamente. Portanto, a hipérbole é composta de duas partes separadas e os ramos da curva estendem-se indefinidamente acima e abaixo de **OX**.

Corolário I – La Hire apresentou explicitamente essa propriedade na gênese da hipérbole.

Corolário II – La Hire afirmou que os extremos do segmento **IT** (**AA'**) pertencem à hipérbole no corolário da construção da hipérbole.

Corolário III – La Hire utilizou essa informação ao afirmar que **I** e **T** pertencem à hipérbole.

Corolário IV – La Hire definiu Eixo Indeterminado justamente com essa propriedade de não interceptar a curva.

646 – Uma linha reta não pode encontrar uma hipérbole em mais de dois pontos. Por conseqüência, a hipérbole é uma curva convexa.

Embora La Hire não tenha explicitado essa proposição, ele parecia conhecê-la, uma vez que definiu diâmetro determinado e provou (na proposição **4**) que um diâmetro cruza a hipérbole em dois pontos e (na proposição **5**) mostrou que uma reta perpendicular pelo vértice cruza a hipérbole em um único ponto.

647 – Para qualquer ponto fora da hipérbole, a diferença das distâncias aos focos é maior ou é menor ao que 2a.

Um ponto é interior quando ele se acha em uma das duas regiões do plano onde estão os focos e exterior quando está entre as duas partes separadas da curva.

1ª. Unamos o ponto interior **C** aos dois focos e tiremos **MF**. Temos: **CF < CM + MF**, portanto **CF' – CF > CF' – (CM + MF)** ou **CF'– CF > MF'– MF** logo **CF'– CF > 2a.**

2ª Unamos o ponto exterior **D** aos dois focos, e tiremos **F'N**. Temos: **F'D < NF' + ND** portanto **F'D – DF < NF' + ND – DF** ou **F'D – DF < NF' – NF**, logo **F'D – DF < 2a** Logo,..

Embora La Hire não tenha explicitado este resultado, ele usou os termos "interior" e / ou "exterior" nas proposições **5, 6** e **8** e na definição **8** de hipérbole, deixando evidências que conhecia essa proposição.

648 – Escólio.

Conforme a diferença das distâncias de um ponto aos dois focos é maior, menor, ou igual a **2a,** o ponto é interior ou exterior à hipérbole, ou pertence a esta curva. Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos é constante.

Mesmo sem explicitar este resultado, La Hire fala de interior e / ou exterior nas proposições **5, 6** e **8** e nas definições **1** e **8** de hipérbole, deixando evidências que sabia dessa proposição.

649 – A hipérbole tem para eixos a reta que passa pelos focos e a perpendicular levantada ao meio da reta que une estes mesmos focos. Ela tem para centro o ponto de encontro dos eixos.

Seja **M** um ponto qualquer da hipérbole. Prolonguemos as perpendiculares **MP** e **MV** e a linha **MO**. Tomemos **PM' = PM**, **VN = VM**, **ON' = OM**. Os pontos **M', N e N'** são os simétricos de **M** em relação a **AA'**, a **BB'** e ao ponto **O**; basta provar que esses pontos **M', N** e **N'** pertencem à curva.

1ª. FF' é perpendicular ao meio de **MM'.** Portanto **M'F = MF** e **M'F' = MF'**; donde **M'F' – M'P = MF' – MF = 2a**; logo **M'** é um ponto da hipérbole (n. **642**).

2ª. Os trapézios retângulos **OFMV** e **OF'NV** podem ser superpostos, porque as suas bases são iguais; portanto **NF' = MF**, e os ângulos em **F** e **F'** são iguais. Os triângulos **FF'N, FF'M** são iguais por terem um ângulo igual compreendido entre lados iguais; logo **NF = MF'**; e visto que **NF' = MF**, temos: **NF – NF' = MF' – MF = 2a**; logo **N** pertence à hipérbole.

3ª. As retas **MN'** e **FF'** se cortam pelo meio, a figura **MFN'F'** é, pois, um paralelogramo e a diferença de dois lados adjacentes é igual à diferença dos outros dois lados; assim **N'F – N'F' = MF' – MF = 2a**. Logo, **AA'** e a perpendicular **YY'** são os eixos, e sua intersecção é o centro da curva.

Apesar de La Hire enunciá-las de outra forma, as três afirmações estão presentes no seu texto: primeira, na construção da hipérbole, a segunda na proposição **2** e a terceira na proposição **5**.

650 – Escólios.

I – Quando uma curva tem dois eixos, sua intersecção é o centro da curva. **AA'** é chamado **Eixo Transverso** da hipérbole. O outro eixo não encontra a curva chama-se **Eixo não–Transverso**.

II – Quando se levanta uma perpendicular ao Eixo Transverso no ponto **A**, e do centro, com o raio **OF** igual a **c**, corta-se esta perpendicular em **L**, o comprimento **AL**, aplicado de **O** para **B** e para **B'**, é considerado, por analogia ao que tem lugar na elipse, como o comprimento do Eixo não–Transverso. O triângulo retângulo **AOL** fornece a relação: $\mathbf{LO^2 = AO^2 + AL^2}$ ou $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$. A razão **c/a** chama-se excentricidade da hipérbole.

La Hire definiu Eixos Determinado e Indeterminado (definições **3** e **4**) como retas, enquanto o **F. I. C.** os define como Transverso (Real) e não–Transverso (Imaginário), respectivamente, tratando-os como segmentos. Quando definiu assíntota (definição **11**), utilizou o segmento **AL** como o lado de um quadrado equivalente a um retângulo de lados **ID** e **DT**, enquanto o **F. I. C.** encontrou o segmento **AL** através da interseção **L** de uma perpendicular ao Eixo Transverso (**2a**) que passa pelo vértice **A** e de uma circunferência com centro no centro da cônica e raio **c** igual à metade da distância focal. Ele então chamou o segmento **AL** de **b** que vem a ser um cateto do triângulo retângulo de cateto **a** e hipotenusa **c**. Já excentricidade, não foi definida por La Hire.

651 – I. Hipérbole Eqüilátera é a hipérbole que tem os dois eixos iguais.

Neste caso, $c^2 = 2a^2$ e $c = a\sqrt{2}$.

II. A hipérbole tem dois vértices: A e A'.

La Hire citou a hipérbole Eqüilátera na proposição **22** (sem falar em $\sqrt{2}$) e apresentou os vértices sem defini-los na construção da hipérbole.

652 – A tangente à hipérbole é bissetriz do ângulo dos raios vetores do ponto de contato.

Consideremos uma secante qualquer **MM'**. De um dos focos baixemos a perpendicular **FC** e tomemos a linha $\mathbf{CF_1}$ igual a **CF**; tiremos $\mathbf{F'F_1}$. Unamos o ponto **D** (interseção entre $\mathbf{F'F_1}$ e **MM'**) ao foco **F** e o ponto **M** aos três pontos **F, F'** e $\mathbf{F_1}$. Demonstremos primeiramente que o ponto **D** está situado entre os pontos de intersecção **M** e **M'** e em seguida que a secante **MM'** forma ângulos iguais com **DF** e **DF'**.

1°. Temos $\mathbf{MF = MF_1}$ e $\mathbf{DF_1 = DF}$, portanto $\mathbf{DF' - DF = F'F_1}$. Ora, $\mathbf{MF' - MF_1 = MF' - MF = 2a}$. Porém $\mathbf{F'F_1}$ é maior do que $\mathbf{F'M - MF_1}$ ou **2a**; logo $\mathbf{DF' - DF > 2a}$. A diferença das distâncias do ponto **D** aos dois focos sendo maior do que **2a**, o ponto **D** é interior à hipérbole (n. **648**), ele está, portanto, situado entre **M** e **M'**.

2°. Os ângulos **FDM e F'DM** são iguais, porque cada um deles é igual ao ângulo $\mathbf{MDF_1}$. Os resultados precedentes são exatos para qualquer secante, por conseqüência, por mais próximos que estejam os pontos **M** e **M'**. Porém no limite, quando **M'** se confunde com **M**, a secante se torna uma tangente (n. **609**). Logo...

La Hire apresentou este resultado na proposição **7**. A demonstração do **F. I. C.** mostrou, porém, que o resultado é muito mais geral, pois prova para uma secante que (no limite) vira uma tangente.

653 – Corolários.

1°. Todos os pontos da tangente, exceto o ponto de contato, estão fora da curva; pois temos: $\mathbf{HF' - HF < F'F}$ ou **2a**; isto resulta aliás de que a hipérbole é uma curva convexa.

2°. A normal **MN** é bissetriz do ângulo exterior formado pelos raios vetores do ponto de contato; porque ela é perpendicular à bissetriz interior.

La Hire apresentou este primeiro resultado na proposição **6**, fazendo a prova de outra forma. O segundo corolário, por ser de imediata demonstração e de fácil visualização, pensamos que deveria ser conhecido por ele.

654 – Escólios.

I. A tangente MT é perpendicular ao meio de FF_1.

II. A reta $F'F_1$, que une um foco ao ponto simétrico do outro foco em relação à tangente, passa pelo ponto de contato.

III. Nos vértices da hipérbole, as tangentes são perpendiculares ao eixo transverso.

La Hire apresentou este primeiro resultado na proposição **6**. O segundo na proposição **1**, com mudança na ordem da apresentação. O terceiro, na proposição **5**.

655 – O lugar do ponto simétrico de um foco em relação a uma tangente qualquer é o Círculo Diretor descrito do outro foco.

Seja F_1 o ponto simétrico do foco **F** em relação à tangente **MT**; a reta $F'F_1$ passa pelo ponto de contato (n. **654, II**) e, visto que a tangente é perpendicular ao meio de FF_1, a reta $F'F_1 = MF' - MF = 2a$. Logo o ponto F_1, simétrico do foco **F**, está sobre o Círculo Diretor descrito do foco **F'**.

La Hire mostrou (na proposição **1**) uma construção que gera um ponto **A** (F_1), simétrico do foco **D (F)** que sabemos ser um ponto do Círculo Diretor. Ele afirmou que **FA,** por ser igual a **IT**, é constante. Logo, ele sabe que o lugar geométrico gerado por **A** é um círculo de raio **IT** e centro **F**.

656 – Escólios. A hipérbole é o lugar dos pontos M igualmente afastados de um círculo F_1G e de um ponto F situado fora desse círculo.

Por conseqüência, quando uma circunferência passa pelo ponto **F**:

I. Se o centro está dentro da hipérbole, ela não encontra o círculo diretor; porque esse centro **N** está mais perto do foco do que do círculo diretor;

II. Se o centro está sobre a curva, esta lhe é tangente;

III. Se o centro está fora da hipérbole, ela corta o círculo diretor em dois pontos; porque esse centro **N** está mais próximo do círculo diretor do que do foco **F**.

Pode-se utilizar o círculo diretor para construir a hipérbole por pontos quando se conhecem os focos e **2a**. Tira-se $\mathbf{FF_1}$; a perpendicular **CT** levantada no meio de $\mathbf{FF_1}$ é tangente à curva (n. **654, I**) e o ponto de contato está na interseção da tangente e do raio $\mathbf{F'F_1}$ (n. **654, II**).

La Hire não citou esta propriedade do Círculo Diretor.

657 – Definição. Assíntotas da hipérbole são as tangentes cujo ponto de contato está infinitamente distante do vértice da curva.

La Hire primeiro definiu a assíntota a partir de outra construção que produz a mesma reta gerada pela construção do **F. I. C.**. Depois, na proposição **11**, fala da infinita aproximação entre a assíntota e a hipérbole. Mas não afirma ser a assíntota uma reta tangente.

658 – A hipérbole tem duas assíntotas, que passam pelo centro da curva.

A reta $\mathbf{FF_1}$ que une o foco **F** a um ponto qualquer do Círculo Diretor relativo a **F'**, pode tornar-se tangente desse círculo; seja **FG** essa posição especial. A perpendicular **HD**, levantada no meio dessa reta, é tangente à hipérbole (n. **654, I**) e o ponto de contato é dado pelo prolongamento do raio **F'G** (n. **654, II**). Mas as retas **HD** e **F'G**, perpendiculares a **FG**, são paralelas. Portanto, o ponto de contato está infinitamente distante do vértice **A** e a linha **HD** é assíntota do ramo **AM**. Além disto, esta linha **DH** é paralela à **FG** (base do triângulo **FGF'**) e é tirada pelo ponto **H**, meio de **FG**. Logo ela passa pelo ponto **O**, meio do terceiro lado $\mathbf{FF_1}$. Por causa da simetria dos pontos da curva em relação ao centro, a linha **DOD'** é assíntota da parte inferior do ramo da esquerda. A tangente **FG'** dá a outra assíntota **TOT''**. Logo, a hipérbole tem duas assíntotas e elas passam pelo centro da curva.

La Hire construiu as assíntotas como retas que passam pelo centro, o que dispensa essa proposição.

659 – Os eixos são as bissetrizes dos ângulos formados pelas assíntotas.

Com efeito, as retas **DOD'** e **TOT''** formam ângulos iguais com **FP',** pois os ângulos **FF'G** e **FF'G'** são iguais.

La Hire assumiu, já na definição de assíntota, que elas formam ângulos congruentes ao Eixo Determinado.

660 – As assíntotas são dirigidas segundo as diagonais do retângulo construído sobre os dois eixos.

No vértice, levantemos uma perpendicular **AL**, limitada pela assíntota; os triângulos retângulos **HOF** e **AOL** são iguais, porque têm um ângulo agudo comum, e $\mathbf{OH = \frac{1}{2} \cdot F'G = a = OA}$ portanto $\mathbf{OL = OF = c}$. Por conseguinte (n. **656, I**), $\mathbf{AL = b}$, valor do semi-eixo não transverso. Logo as assíntotas são dirigidas segundo as diagonais do retângulo construído sobre os dois eixos.

La Hire assumiu já na definição de assíntota que esse triângulo retângulo **AOL** tem um cateto **TA** $\mathbf{(AL = b)}$ tal que seu quadrado é equivalente a um retângulo de lados **ID** e **DT**. Estes, por sua vez, valem o que o **F. I. C.** chamaria de $\mathbf{c + a}$ e $\mathbf{c - a}$, respectivamente. Logo seu produto $\mathbf{c^2 - a^2}$ é igual a $\mathbf{AL^2 = b^2}$, gerando assim o mesmo triângulo retângulo.

661 – Corolários.

1ª – A distância **FH** do foco até a assíntota é igual a **b**.

2ª – As assíntotas da hipérbole eqüilátera cortam-se em ângulos retos.

Porque **a = b**, e o retângulo dos eixos torna-se um quadrado.

La Hire não comentou quanto vale a distância do foco até a assíntota em qualquer trecho da sua obra. Já o segundo resultado, ele apresentou no corolário da proposição **22**.

662 – O lugar das projeções dos focos sobre as tangentes à hipérbole é o círculo descrito sobre o eixo transverso como diâmetro.

Suponhamos uma tangente qualquer **MC**, e o Círculo Diretor descrito do foco **P'**; tracemos **OC**. Temos $\mathbf{FC = \frac{1}{2} \cdot FF_1}$; $\mathbf{OF = \frac{1}{2} \cdot FF'}$. Portanto **OC**, que une os meios dos lados **FF'** e $\mathbf{FF_1}$, é igual a $\mathbf{\frac{1}{2} \cdot F'F_1 = a}$; assim o lugar do ponto **C** é o círculo descrito do centro da hipérbole com o raio **a**.

La Hire não comentou em qualquer trecho da sua obra essa propriedade.

663 – Escólio. As projeções dos focos sobre as assíntotas pertencem ao círculo descrito sobre AA' e as linhas projetantes, tais como FH, são tangentes a esse círculo.

La Hire não apresentou essa propriedade em sua obra.

PROBLEMAS

664 – Tirar uma tangente à hipérbole por um ponto sobre a curva.

Seja **M** o ponto dado sobre a curva: basta traçar a bissetriz **MT** dos raios vetores do ponto de contato (n. **652**).

La Hire apresentou essa propriedade em sua obra na proposição **7**.

665 – Tirar uma tangente à hipérbole por um ponto fora da curva.

Sejam **P** o ponto exterior dado e **CD** o Círculo Diretor relativo ao foco **F'**. A circunferência descrita com o raio **PF** corta o círculo diretor em dois pontos **C** e **D** (n. **656, III**); unamos estes pontos ao foco **F**. As perpendiculares levantadas no meio de **FC** e de **FD** são tangentes (n. **654, I**) e passam pelo ponto **P**, centro dos arcos **CF** e **FD**. A reta **F'DM** gera o ponto de contato **M**.

La Hire não apresentou essa construção em sua obra.

666 – Escólio.

- Por um ponto dentro da curva, não há tangente possível.
- Por um ponto tomado na curva, há uma.
- Por um ponto exterior há duas (n. **656, III**).

La Hire apresentou as propriedades **I** e **II** na definição de tangente e na proposição **8**, respectivamente. Nada falou sobre as duas tangentes que existem por um ponto exterior.

667 – Se o ponto exterior dado se acha compreendido em um dos ângulos das assíntotas dos quais AA' é bissetriz, as duas tangentes tocam no mesmo ramo.

Se o ponto está nos ângulos que têm por bissetriz o Eixo não–Transverso, cada ramo tem sua tangente.

La Hire não mostrou essa construção em sua obra.

668 – Tirar à hipérbole uma tangente paralela a uma reta dada.

Descrevamos o círculo diretor relativo ao foco **F'** e pelo outro foco **F**, baixemos a perpendicular **FEG** sobre a reta dada **xy**. As perpendiculares **MT** e **NV**, levantadas no meio das retas **FE** e **FG**, são tangentes (n. **654**) e os raios **F'E** e **F'G** determinam os pontos de contacto (n. **654**).

La Hire não apresentou essa construção em sua obra.

669 – Para que a construção anterior seja possível, é necessário que a reta xy faça com FF' um ângulo pelo menos igual ao formado pela assíntota com FF'.

La Hire não mostrou essa construção em sua obra, mas apresentou os conceitos de "Diâmetro Determinado e Indeterminado". Eles se diferenciam um do outro justamente pelo ângulo entre a assíntota e o eixo.

670 – Escólios.

1ª – A corda dos contatos MN passa pelo centro da hipérbole.

Com efeito, as tangentes sendo perpendiculares ao meio de **FE** e de **FG** e a linha **F'G** sendo igual a **F'E**, os três triângulos **EMF, EF'G** e **EFG** são isósceles, todos os seus ângulos em **G, E, F**, são iguais; portanto, as linhas **MF** e **F'N** são paralelas; o mesmo acontece com **MF** e **F'N**; assim a figura **MFNF'** é um paralelogramo e a diagonal **MN**, corda dos contatos, passa pelo ponto **O**, meio da outra diagonal. Esta propriedade pertence a todas as curvas com centro.

2ª – As soluções dadas para os diversos problemas das tangentes não exigem que a curva seja traçada; basta conhecer os focos e 2a.

La Hire não apresentou essa propriedade para a hipérbole em sua obra, mas o fez na propriedade análoga para a elipse (corolário **2** da proposição **13**). Sobre a possibilidade da realização dessas construções sem a necessidade das curvas, ele falou dessa sua preferência por traçado ponto a ponto em vez do modo contínuo na introdução da parte **4** da obra.

Podemos desconfiar que conhecia essa proposição, uma vez que no traçado por pontos a curva não está feita.

671 – Área da hipérbole.

A área de um segmento de hipérbole não é dada por uma fórmula elementar. Podem ser empregadas as fórmulas aproximadas, uma das quais, a de Poncelet, já foi explicada em n. **357**.

La Hire não apresentou essa propriedade em sua obra.

8.2.4 – Resumo da comparação entre as proposições de hipérbole

F. I. C.	La Hire
642	D1, D5 e Gênese
643	Não tem
644	Gênese
645	E1– ± E2– Gênese E3– Gênese E4– Gênese
646	±
647	±
648	±
649	1ª – Gênese 2ª – P2 3ª – P4*
650	E1 – D3 e D4 E2 – D11
651	1ª – P22 2ª – Gênese
652	P7
653	C1 – P6* e D8* C2 – ±
654	E1– P6* E2– P6* E3– P5*
655	±
656	Não tem
657	(D11 e P11)*
658	(D11 e P11)*
659	(D11 e P11)*
660	(D11 e P11)*
661	C1 – Não tem C2 – P22
662	Não tem
663	Não tem
664	P7*
665	Não tem
666	E1– D8* E2– P8* E3– Não tem
667	Não tem
668	Não tem
669	±
670	1ª – ± 2ª – ±
671	Não tem

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.
- O símbolo "±" significa que, embora a proposição não tenha sido enunciada por La Hire, ele dá pistas durante a obra mostrando que parecia conhecê-la.
- A letra **E** significa Escólio. A letra **C** significa Corolário.
- A letra **P** significa Proposição. A letra **D** significa Definição.

Conclusão

Em cerca de **16** das **30** proposições do **F. I. C.** sobre hipérbole, o resultado foi explicitado por Philippe de La Hire ou parecia ser conhecido por ele. Em cerca de **14** delas, não há qualquer comentário no texto de La Hire.

8.2.5 – Proposições sobre a parábola

672 – Definições.

- **A Parábola** é uma curva plana na qual cada ponto está igualmente afastado de uma reta fixa dada e de um ponto fixo dado em seu plano.
- O ponto fixo chama-se **Foco**.
- A reta dada chama-se **Diretriz**.
- Chama-se **Raio Vetor** a reta que une o foco a um ponto qualquer da curva.
- Seja **F** um ponto fixo e **CD** uma reta fixa. Se, para cada ponto da curva **MAM'**, temos **MF = MC**, esta curva é uma parábola.
- O ponto **A**, meio da perpendicular **FD**, pertence à curva.

- A parábola não pode estender-se do lado da diretriz oposto ao foco; porque qualquer ponto **E**, tomado desse lado, está mais próximo da diretriz do que do foco.
- A distância **FD** do foco à diretriz chama-se **Parâmetro** e representa-se por **p**.

La Hire apresentou a mesma definição para a parábola que o **F. I. C.**. Definiu igualmente o ***Foco***. O **F. I. C.** definiu a mais: ***Diretriz*** *e* ***Raio Vetor.*** Tais conceitos, entretanto, são claramente conhecidos e usados por La Hire. A sua definição de ***Parâmetro*** equivale à metade do Parâmetro definido por La Hire.

673 – Traçado da parábola pelo modo contínuo.

Para descrever a parábola com movimento contínuo, conhecendo a diretriz e o foco, coloca-se um dos lados do ângulo reto de um esquadro sobre a diretriz. Um fio igual ao outro lado do ângulo reto está fixo, por suas extremidades ao vértice **G** do esquadro e ao foco **F**. Se fizermos escorregar o esquadro ao longo da diretriz, o ponteiro que estende o fio aplicando-o contra **CG**, descreve uma parte da parábola, pois que temos constantemente **MF = MC**.

La Hire não apresentou construção pelo modo contínuo em sua obra.

674 – Traçado da parábola por pontos.

Pode-se traçar a parábola por pontos, conhecendo a Diretriz e o Foco. Do foco, baixemos a perpendicular **FD** sobre a diretriz e tomemos o meio **A** do parâmetro **FD**. Por um ponto **G** da reta **FD**, tiremos uma reta qualquer **MM'**, paralela à diretriz. Com centro em **F** e com raio **DG** da diretriz à sua paralela, descrevamos uma circunferência; os pontos de intersecção desta circunferência e da reta **MM'** pertencem à parábola.

La Hire apresentou outra construção em sua obra. Mas a propriedade que essa construção se baseou é a eqüidistância entre um ponto e reta dada que vem a ser a mesma de La Hire.

675 – Observações.

1ª – Para que a circunferência corte a paralela **MM'**, é preciso que tenhamos **GD > GF**; do que resulta que o ponto **G** deve se achar sempre além de **A** em relação à diretriz.

2ª – Quando o ponto **G** está em **A**, a circunferência é tangente à paralela; porque **AF = AD** e o contato tem lugar no ponto **M**.

La Hire apresentou outra construção.

676 – Escólio.

No traçado contínuo, é preciso que o fio e o lado do esquadro tenham comprimentos iguais, mas nada limita esses comprimentos. No traçado por pontos, a reta paralela, sempre situada do lado do foco em relação à reta paralela à diretriz por **G**, pode afastar-se indefinidamente da diretriz. Logo, a parábola é uma curva completamente situada na região do plano onde se acha o foco. Ela é contínua e se estende indefinidamente a partir do ponto **A** no sentido de **AM** e de **AM'.**

La Hire falou sobre essas propriedades na gênese de parábola.

677 – Todo ponto interior da parábola está mais próximo do foco do que da diretriz, enquanto todo ponto exterior está mais afastado dele.

1ª – Do ponto interior **B**, tiremos **BC** perpendicular sobre a diretriz e unamos o foco aos pontos **M** e **B**. Temos: **BF < BM + MF** ou **BF < BM + MC** ou, enfim, **BF < BC**.

2ª – Do ponto exterior **G**, tiremos a perpendicular **GB**, e unamos o foco aos pontos **N** e **G**. Temos: **GP > NF – NG**, ou **GF > NE – NG**, ou enfim **GF > GE**. Logo, todo ponto interior está mais próximo e todo ponto exterior está mais afastado do foco do que da diretriz.

La Hire citou essa propriedade na demonstração da segunda parte da proposição **2**.

678 – Escólio.

Conforme a distância de um ponto ao foco seja inferior, superior ou igual à distância desse mesmo ponto à diretriz, esse ponto é interior ou exterior à parábola ou pertence a essa curva. Assim a parábola é o lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de uma reta e de um ponto dados.

La Hire mostrou essa propriedade na demonstração da segunda parte da proposição **2**, além da própria definição de parábola.

679 – A parábola tem para eixo a perpendicular à diretriz pelo foco.

Seja **M** um ponto qualquer da parábola; baixemos a perpendicular **MP** e tomemos **PM' = PM**. Vamos demonstrar que **M'** simétrico com o ponto dado, pertence à curva. Para isso tiremos **MF, MC, M'F** e **M'C'**, distâncias dos pontos **M** e **M'** ao foco e à diretriz. Desde que **DP** é perpendicular à diretriz e a **MM'** em seu meio **P**, temos: **FM' = FM. M'C' = MC**; portanto **M'F = M'C'**. Logo, o ponto **M'** pertence à parábola (n. **678**). Portanto, a perpendicular **FD** é um eixo (n. **608**).

La Hire apresentou essa propriedade de simetria na definição **3**. Mas não utilizou esse termo.

680 – Escólios.

- **O ponto M é o único vértice da curva.**
- **A parábola não tem centro.**

La Hire desenvolveu essa propriedade do vértice único no corolário da gênese e na definição **1.** Quanto a não ter centro, ele não explicitou. Mas na definição **5**, ele apresentou o diâmetro sendo paralelo ao eixo. Esta definição é compatível com as que foram feitas para as outras duas cônicas, se o centro estiver no infinito. Também no prefácio, ele mostra que sabe que o centro está no infinito.

681 – A parábola é o limite para o qual tende uma elipse da qual um vértice e o foco mais próximo ficam fixos, enquanto o eixo maior aumenta indefinidamente.

Descrevamos o Círculo Diretor relativo ao foco **F'**. Para um ponto qualquer **M** da elipse, temos: **MB = MF**. Os pontos **D, A** e **F** sendo fixos, o foco **F'** afasta-se cada vez mais quando o eixo maior aumenta. A perpendicular **DL** é o limite para o qual tende o Círculo Diretor que lhe é tangente no ponto **D**, a reta **MB**, normal ao círculo, tende a tornar-se paralela ao eixo, ou perpendicular a **DL**, temos sempre **NE = MF**. A figura limite é a parábola **NA**, **A** é o vértice, **F** o foco e **DL** a diretriz. Logo...

La Hire não apresentou essa propriedade, mas conhecia claramente o forte vínculo entre as três curvas, conforme citou no prefácio.

682 – Escólio. Por ser a elipse uma curva convexa, pode concluir-se que a parábola é uma curva convexa.

Este modo de considerar a parábola permite deduzir das propriedades da elipse muitas propriedade da parábola: por exemplo, o teorema seguinte (n. **683**).

La Hire não colocou essa propriedade, mas utilizou essa propriedade na demonstração da proposição **9** de elipse. Além disso, na primeira parte da proposição **13**, afirmou que uma reta paralela a uma tangente corta a parábola necessariamente em **2** pontos, o que tem ligação com o fato da parábola ser convexa.

683 – A tangente à parábola forma ângulos iguais com o raio vetor do ponto de contato e a paralela ao eixo tirada por este mesmo ponto.

Consideremos uma secante qualquer **MM'**. Do foco, baixemos a perpendicular **FC** e tomemos a linha $\mathbf{CF_1}$ igual a **CF**. Pelo ponto $\mathbf{F_1}$ tiremos uma paralela ao eixo. Esta paralela corta a secante no ponto **D**. Tiremos as linhas que indicam as distâncias dos pontos **M** e **D** ao foco e à diretriz. A circunferência descrita do ponto **M**, com o raio **MF** ou **MP**, é tangente à diretriz em **P** e encontra **DH** no ponto $\mathbf{F_1}$ simétrico de **F**. Este ponto $\mathbf{F_1}$ está, pois, situado entre a diretriz e o foco; logo $\mathbf{DF_1 < DH}$. As oblíquas **DF** e $\mathbf{DF_1}$ são iguais; portanto **DF** é menor que **DH**. O ponto **D**, estando mais próximo do foco do que da diretriz, está situado no interior da curva (n. **677**). A reta $\mathbf{F_1D}$ paralela ao eixo passa sempre entre os pontos de intersecção **M** e **M'**. Além disso, são iguais os ângulos **M'DG,** $\mathbf{MDF_1}$ e **MDF** e isto tem lugar por mais próximos que estejam os pontos **M** e **M'**. Mas no limite, quando **M'** se confunde com **M**, a secante torna-se tangente (n. **609**). Logo...

La Hire apresentou esta propriedade na proposição **8**. A demonstração do **F. I. C.** mostra, porém, que o resultado é mais geral, pois vale também para uma secante.

684 – Corolários.

1ª – A tangente num ponto M da parábola é perpendicular ao meio da reta $\mathbf{FF_1}$ que une o foco à projeção do ponto de contato sobre a diretriz.

O triângulo $\mathbf{FMF_1}$ tem dois lados iguais e a tangente é bissetriz do ângulo no vértice (n. **683**).

2ª – Todos os pontos da tangente à parábola, exceto o ponto de contato, estão fora da curva.

Segundo o teorema precedente, para um ponto qualquer **H** da tangente, temos $\mathbf{HF = HF_1}$. Assim **HF > HL**. Logo, a parábola é uma curva convexa.

La Hire mostrou a primeira propriedade na proposição **4**. Já a segunda, apareceu na definição **6** e na demonstração da proposição **4**.

O **F. I. C.** volta a demonstrar o que já tinha afirmado na proposição **682**.

685 – Escólios.

I. A paralela ao eixo, tirada pelo ponto F1 simétrico ao foco em relação à tangente, passa pelo ponto de contato.

II. A normal MN é bissetriz ao ângulo formado pelo raio vetor do ponto de contato e pela paralela ao eixo tirado por esse mesmo ponto.

Pois os ângulos que ela forma com **MF** e **MC** têm por complementos os ângulos iguais que a tangente forma com essas mesmas linhas.

III. O foco está a igual distância do ponto de contato, do ponto em que a tangente corta o eixo e do pé da normal.

Pois o triângulo **MFT** tem dois ângulos iguais: o ângulo **MTC = FMT**; logo **FM = FT**. Além disso**,** **MF = MF**$_1$. Logo **FM = FN**.

IV. No vértice, a tangente é paralela à diretriz e a normal é dirigida segundo o eixo.

La Hire apresentou a primeira propriedade na proposição **4**; a segunda é conseqüência direta da proposição **8**; a terceira é conseqüência direta da figura da proposição **9** e da figura da proposição **9;** a quarta é apresentada na proposição **2**.

686 – O lugar do ponto simétrico do foco em relação a uma tangente qualquer é a diretriz da parábola.

Seja $\mathbf{F_1}$ o ponto simétrico de **F** em relação à tangente **MT**. A paralela ao eixo conduzida pelo ponto $\mathbf{F_1}$ passa pelo ponto de contato (n. **685, II**). Como a tangente é perpendicular ao meio de $\mathbf{FF_1}$ (n. **684**), a reta $\mathbf{MF_1 = MF}$; logo o ponto $\mathbf{F_1}$, simétrico do foco, está sobre a diretriz.

La Hire exibiu esta propriedade na construção de parábola e da proposição **4**, só que com a ordem de exposição invertida.

687 – Escólios.

I. A parábola é o lugar dos pontos igualmente afastados de uma reta $\mathbf{DF_1}$ e de um ponto F situados em seu plano.

Por conseguinte, quando uma circunferência passa pelo ponto **F**:

I – Se o centro está no interior da parábola, ela não encontra a diretriz; porque este centro está mais perto do foco do que da diretriz.

II –Se o centro está sobre a curva, ela lhe é tangente;

III –Se o centro está fora da parábola, ela corta a diretriz em dois pontos; porque este centro **N** está mais próximo da diretriz do que do foco.

II. Pode-se utilizar a diretriz e o foco para traçar a parábola por pontos.

Unamos o foco a um ponto qualquer $\mathbf{F_1}$ da diretriz. A perpendicular **CT**, levantada no meio de $\mathbf{FF_1}$ é tangente à curva (n. **693**). O ponto de contato está na interseção da tangente **MT** e de $\mathbf{F_1G}$ paralela ao eixo (n. **685, II**).

La Hire não apresentou explicitamente as partes **1** e **3** deste primeiro escólio, mas usou uma argumentação que mostra ter noção da sua existência na demonstração da proposição **2**. A parte **2** está incluída na definição **1**.

O segundo escólio, porém, foi explicitado na construção de parábola e na proposição **4**.

688 – O lugar das projeções do foco sobre as tangentes à parábola é a tangente ao vértice.

Abaixemos do foco a perpendicular **FCF$_1$** sobre uma tangente qualquer **MT**; o ponto **F'** da diretriz é o simétrico do foco (n. **686**), portanto **FC = CF$_1$**; mas **FA = AD**; logo, a reta **AC** é paralela à diretriz; é a tangente ao vértice (n. **685, IV**).

La Hire não comentou em qualquer trecho da sua obra essa propriedade. Ela é análoga às proposições **626** e **662** do **F. I. C.**. Ou seja o Círculo Principal vira uma reta tangente.

689 – Definições.

Na parábola, chama-se sub-tangente à projeção sobre o eixo, da parte de uma tangente compreendida entre o ponto de contato e o ponto em que a tangente corta o eixo.

A sub-normal é a projeção sobre o eixo, da parte de uma normal compreendida entre o ponto de contato e o ponto em que esta normal corta o eixo.

La Hire não apresentou estas definições, mas o objeto dessas definições é utilizado nas proposições **7** e **9**.

690 – Observações.

1ª –A sub-tangente é dividida em duas partes iguais pelo vértice da curva.

O triângulo **MFT** é isósceles (n. **685**). A projeção do foco sobre a tangente divide MT em duas partes iguais; mas a tangente ao vértice é paralela à ordenada MP. Logo **AP = AT**.

2ª – A sub-normal é constante: é igual ao parâmetro.

Os triângulos retângulos $\mathbf{F_1DF}$ e **MPN** são iguais, porque $\mathbf{F_1D = PM}$ e as hipotenusas são paralelas. Logo **PN = FD** e a sub-normal é igual à distância do foco à diretriz, isto é, ao parâmetro (n. **672**).

La Hire mostrou a primeira propriedade na proposição **7** e a segunda propriedade, na proposição **9**.

O **F. I. C.** utiliza um triângulo isósceles **MFT** na demonstração da primeira observação e a congruência dos triângulos $\mathbf{F_1DF}$ e **MPN** na segunda.

691 – O quadrado da ordenada de um ponto qualquer da parábola está para sua abscissa numa razão constante.

Representemos a abscissa **AP** por **x** e a ordenada **MP** por **y**. O triângulo retângulo **NMT** formado pelo eixo, a tangente e a normal, dá a relação: $\mathbf{y^2}$ ou $\mathbf{MP^2 = TP \cdot PN}$. Mas **TP = 2AP = 2x** (n. **690, 1°**) **PN = p** (n. **690, 2°**), portanto $\mathbf{y^2 = 2x \cdot p}$ donde $\mathbf{y^2 / x = 2p}$ = quantidade constante.

La Hire apresentou esta propriedade na proposição **1**, mas utilizou outra demonstração e não usou a linguagem analítica do **F. I. C.**.

692 – Escólio.

Os quadrados das ordenadas de dois pontos M e W da parábola estão entre si como as abscissas desses mesmos pontos.

$\mathbf{MP^2 = 2AP.\ p}$, $\mathbf{M'P'^2 = 2AP'.\ p}$. Donde $\mathbf{MP^2 / M'P'^2 = AP / AP'}$. Pode-se enunciar esta propriedade por esta forma: Os quadrados das cordas perpendiculares ao eixo da parábola são proporcionais às distâncias destas cordas ao vértice.

La Hire mostrou esta propriedade no corolário da proposição **1**.

PROBLEMAS

693 – Tirar uma tangente à parábola por um ponto sobre a curva.

Seja **M** o ponto dado sobre a curva.

1ª solução: Projetemos **M** sobre a diretriz, unamos **M** ao foco, tiremos a bissetriz do ângulo **FMF$_1$** (n. **683**), ou levantemos uma perpendicular no meio de **FF$_1$** (**684**).

2ª solução. Tomemos **FT = FM**, e tiremos **TM** (**n. 685**).

3ª solução. Quando não se conhece o foco, toma-se **AT = AP** (**n. 690**); levanta-se a perpendicular **PM** e une-se **T** a **M**.

4ª solução (fig. **474**). A sub-normal sendo constante e igual a **p**, isto é, à distância do foco à diretriz (n. **684, 2°**) toma-se **PN = FD**, tira-se a normal **NM** e uma perpendicular **MT** a esta normal.

La Hire não apresentou esta construção, mas conhecia todas as propriedades utilizadas, pois é apenas uma inversão da construção que ele propôs.

694 – Tirar uma tangente à parábola, por um ponto dado fora da curva.

Seja **P** o ponto exterior dado. Deste ponto como centro, com a distância **PF** como raio, descrevamos uma circunferência. Ela corta a diretriz em dois pontos (n. **684**). A perpendicular levantada no meio de **BF** é tangente (n. **684**) e passa pelo ponto **P**, centro do arco **BF**. A paralela ao eixo dá o ponto de contato **M**. Existe uma outra tangente **PN**.

La Hire não mostrou esta construção em qualquer trecho da sua obra.

695 – Tirar à parábola uma tangente paralela a uma reta dada.

Do foco baixemos uma perpendicular à reta dada **xy**. A perpendicular levantada no meio de **FF$_1$** é tangente à parábola (n. **684**) e, além disso, é paralela a **xy**.

La Hire não apresentou esta construção em qualquer parte da sua obra.

ÁREA DE PARÁBOLA

Lema

696 – A paralela ao eixo, tirada pelo ponto de concorrência de duas tangentes à parábola, passa no meio da corda dos contatos.

Sejam as duas tangentes **PM** e **PN**. Projetemos os três pontos **M, P** e **N** sobre a diretriz e provemos que **HP** passa pelo meio de **MN**, corda dos contatos. Sendo **PM** perpendicular ao meio de **BF** (n. **684**), as distâncias **PB** e **PF** são iguais. Assim também **PF = PE**. Logo **PB = PE**. O triângulo **BPE** sendo isósceles, a perpendicular **PH** cai no meio da base e as paralelas eqüidistantes **EN, HP e BM** dividem a secante **MN** em duas partes iguais.

La Hire não exibiu esta propriedade em qualquer momento da sua obra.

697 – Corolários.

1°. As tangentes PM e PN, consideradas desde o ponto de concorrência até aos pontos de contanto têm projeções iguais sobre a diretriz, pois que temos HE = HB.

2°. A reta PG, que une o ponto de concorrência das tangentes ao meio da corda dos contatos, è paralela ao eixo.

La Hire não apresentou esta propriedade em qualquer trecho da sua obra.

.

698 – A área do segmento parabólico limitado pela curva e por uma perpendicular ao eixo, vale 2/3 do retângulo que tem por dimensões a corda considerada e a parte do eixo compreendida entre esta corda e o vértice.

La Hire não desenvolveu esta propriedade em qualquer instante da sua obra.

8.2.6 – Resumo da comparação das proposições de parábola

F. I. C.	La Hire
672	D1, D2 e D7*
673	Não tem
674	±
675	±
676	Gênese
677	2ª parte da demonstração de P2*
678	(2ª parte da demonstração de P2 e D1)*
679	D3*
680	E1 – Gênese E2 – No prefácio e D5*
681	±
682	P9 (de elipse)* e P13*
683	P8
684	C1 – 1ª de P4* C2 – (2ª de P4 e D6)*
685	E1 – P4* E2 – P8* E3 – P9* E4 – P2*
686	(Gênese e P4)*
687	1ª – P2* e D1 2ª – (P4 e Gênese)*
688	Não tem
689	(P7 e P9)*
690	E1 – P7 E2 – P9
691	P1*
692	Corolário de P1*
693	Gênese*
694	Não tem
695	Não tem
696	Não tem
697	Não tem
698	Não tem

- O símbolo estrela “*” significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.
- O símbolo “±” significa que, embora a proposição não tenha sido enunciada por La Hire, ele dá pistas durante a obra indicando que parecia conhecê-la.
- A letra **E** significa Escólio. A letra **C** significa Corolário.
- A letra **P** significa Proposição. A letra **D** significa Definição.

Conclusão

Em cerca de **17** das **27** proposições do **F. I. C.** sobre parábola, o resultado foi explicitado por Philippe de La Hire ou parecia ser conhecido por ele. Não há no texto do La Hire qualquer menção a **10** destas proposições.

8.3 – Comparação entre o livro do La Hire com o do F. I. C. (sentido oposto)

“Novos elementos das seções cônicas”

de Philippe de La Hire [6]

e

“Elementos de geometria”

do F. I. C. (F. G. M.) [10]

Seguindo a ordem proposta por La Hire em seu texto, cada proposição será descrita. Em seguida, será identificada onde ela aparece no texto do **F. I. C.**, caso apareça.

8.3.1 – Parte 1 - A Parábola

GÊNESE DA PARÁBOLA E SEU COROLÁRIO

A definição para a parábola que La Hire utilizou – eqüidistância entre um ponto (Foco) e uma reta (Diretriz) – é a mesma que o F. I. C. apresentou na proposição 672. Ele retornou a essa definição para uma ampliação do conceito para pontos interiores e exteriores no primeiro escólio da proposição 687.

A construção usada foi diferente da que o F. I. C. utilizou na proposição 674, (embora também tenha utilizado a eqüidistância entre um ponto e uma reta), mas ela apareceu também nas proposições 686 e 693 (primeira solução). Apareceu ainda na 687, onde foi apresentada uma construção por pontos para a parábola muito parecida com aquela proposta por La Hire.

No corolário, La Hire afirmou que a parábola pode se estender indefinidamente o que foi feito pelo F. I. C. na proposição 676. Apresentou o ponto T do eixo que pertence também à parábola, algo feito pelo F. I. C. na proposição 680, onde disse que o vértice é único. Ainda nessa proposição 680, foi dito que o centro está no infinito, algo que La Hire deixou claro conhecer no prefácio.

DEFINIÇÕES 1 A 6

La Hire definiu a curva construída como **Parábola** (D1) da mesma forma que o F. I. C. na proposição 672. Definiu ainda, exatamente como o F. I. C., o **Foco F** (D2) que equivale à 672 no F. I. C., o **Eixo** (D3) que a proposição 608 do F. I. C. prova a mais que é um eixo de simetria na proposição 679, **Ordenada** (D4) que equivale à proposição 611 do F. I. C., **Diâmetro** (D5) que o F. I. C. não definiu, e **Tangente** (D6) que equivale à 609 do F. I. C.. As definições de tangente, ordenada e eixo no F. I. C. são feitas em proposições anteriores às cônicas e que servem para curvas em geral. A definição de tangente não exigiu que seus pontos sejam todos exteriores (exceto o ponto de contato) como fez La Hire.

PROPOSIÇÃO 1

*O quadrado da ordenada de um ponto **P** qualquer da parábola é igual ao produto da distância entre o vértice **T** e a projeção **O** perpendicular de **P** sobre o eixo e de uma constante que é igual ao dobro da distância entre o foco **F** e a interseção **D** entre o eixo e a diretriz, ou seja,* $\boldsymbol{PO^2 = TO \cdot 2FD}$.

Esta proposição apareceu na 691 do F. I. C., só que com a linguagem analítica. La Hire definiu o parâmetro como o quádruplo da distância entre o vértice e o foco, enquanto o

F. I. C. o definiu como o dobro dessa distância (672 do F. I. C.). O seu corolário 3 é equivalente à proposição (692 do F. I. C.).

PROPOSIÇÃO 2

*A reta paralela à diretriz e que passa pelo vértice **T** é uma tangente à parábola.*

Esta proposição foi apresentada pelo F. I. C. na 685 (quarto escólio) como um caso particular de um caso mais geral apresentado no primeiro corolário da 684.

PROPOSIÇÃO 3

*Um diâmetro sempre cruza a parábola em um único ponto **P**.*

Esta proposição não foi mostrada no F. I. C., embora essa questão que trata das interseções de uma reta com a cônica tenha sido desenvolvida na proposição 616 de elipse.

PROPOSIÇÃO 4

*Se o ponto **A** é a projeção perpendicular do ponto **P** da parábola sobre a diretriz, a mediatriz de **FA** é tangente à parábola por **P**.*

A recíproca desta proposição foi mostrada no primeiro e no segundo corolários da 684 do F. I. C., uma vez que a proposição 683 provou uma propriedade que trata dos ângulos formados pela tangente (proposição 8 de La Hire). Este resultado apareceu também de forma invertida no primeiro escólio da proposição 685 e na proposição 686. O segundo escólio da 687 se assemelha com a construção proposta por La Hire para a parábola e utiliza também esta proposição. A construção exibida na proposição 693 também fez uso desse resultado.

PROPOSIÇÃO 5

*Por um ponto **P** da parábola só existe uma única reta tangente.*

Esta proposição não foi mostrada no F. I. C..

PROPOSIÇÃO 6

*Dado um ângulo menor que 90°, é sempre possível achar uma tangente por **P** que forme com o eixo um ângulo **PGF** menor que o ângulo dado.*

Esta proposição também não foi mostrada no F. I. C..

PROPOSIÇÃO 7

*Sendo **G** a interseção da tangente por **P** com o eixo e **O** a projeção ortogonal de **P** sobre o eixo, o vértice **T** é o ponto médio do segmento **GO**.*

Ela foi apresentada no primeiro escólio da proposição 690 do F. I. C.. Ambas demonstrações partem de um triângulo isósceles formado entre um ponto P da parábola, o foco e o ponto onde a tangente por P cruza o eixo.

PROPOSIÇÃO 8

*Uma tangente por **P** forma com o diâmetro por **P** e com a reta **PF** ângulos congruentes.*

Ela foi apresentada na proposição 683 do F. I. C., mas foi demonstrada para um caso geral de uma reta secante, ou seja, a tangente é um caso particular quando o limite das distâncias entre esses dois pontos de contato tende a zero.

PROPOSIÇÃO 9

*O segmento **OM** é metade do parâmetro do eixo (sendo **O** a projeção perpendicular de **P** sobre o eixo e **M** a interseção da normal à tangente por **P** que passa por **P** e o eixo).*

Ela foi apresentada no segundo escólio da proposição 690 do F. I. C. sendo a demonstração rigorosamente a mesma.

PROPOSIÇÕES 10, 11 e 12

Nessas três proposições, são apresentadas congruências e / ou equivalência entre polígonos. As provas utilizam adição e subtração de polígonos equivalentes.

Na décima: *os triângulos **TAH** e **BAP** são congruentes.*

Na décima primeira: *o triângulo **EGM** é equivalente ao quadrilátero **GTBF**.*

Na décima segunda: *o triângulo **EFI** é equivalente ao paralelogramo **PIMH.***

Todas essas 3 proposições que tratam de equivalências de áreas não foram propostas pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 13

*Se pelo ponto **E** da parábola for traçada uma reta secante à parábola e paralela à tangente **PH**, então esta reta encontrará a parábola em outro ponto **e**. Além disso, o segmento **EI** é igual ao **Ie**, sendo **I** pertencente ao diâmetro **PI).***

As proposições sobre as "Ordenadas de um Diâmetro" não foram feitas pelo F. I. C.. Logo, a definição de "Ordenada de um Diâmetro" também não foi feita pelo F. I. C..

Mas a parte que afirma que uma reta paralela à tangente sempre cruza a parábola em dois pontos tem ligação com o fato de a parábola ser convexa, algo que é feito na prop. 682.

PROPOSIÇÃO 14

*Os quadrados das ordenadas **EI** e **KY** de um mesmo diâmetro por **P** estão um para o outro, assim como as partes deste diâmetro **PI** e **PY**.*

A definição de "Parâmetro de um Diâmetro" não foi feita pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 15

*O ponto da parábola **P** é o ponto médio do segmento **IQ**.*

Essa proposição não foi feita pelo F. I. C..

PROPOSIÇÕES 16 E 17

La Hire mostrou propriedades do "Parâmetro do Diâmetro" nestas duas proposições.

Na décima sexta, apresenta uma visualização geométrica para este Parâmetro.

*O parâmetro do diâmetro por **P** excede o parâmetro do eixo em **4 · TO**.*

Na décima sétima, mostra a relação deste parâmetro com o Parâmetro do Eixo.

*O segmento que une um ponto **P** da parábola ao foco é ¼ do parâmetro do diâmetro por **P**.*

As proposições sobre "Parâmetro de um Diâmetro" não foram utilizadas pelo F. I. C..

8.3.2–Resumo da comparação das proposições de parábola

La Hire	F. I. C.
Gênese	676, 680*, 686*, 687*, 693*
D1	672, 687 (E1)
D2	672
D3	608 e 679*
D4	611
D5	Não tem
D6	609*
P1	691* e 692*
D7	672*
P2	685* (E4)
P3	Não tem
P4	(684, 685, 686, 687, 693)*
P5	Não tem
P6	Não tem
P7	690 (E1)*
P8	683, 685 (E2)*
P9	690 (E2)*
P10	Não tem
P11	Não tem
P12	Não tem
P13	682*
D8	Não tem
P14	Não tem
D9	Não tem
P15	Não tem
P16	Não tem
P17	Não tem

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A identidade é parcial e / ou os caminhos para a demonstração são diferentes e / ou as proposições são recíprocas.
- A letra **E** significa Escólio.
- A letra **P** significa Proposição.
- A letra **D** significa Definição

Conclusão

A partir dessa tabela, entre os **27** teoremas, definições e a gênese da parábola presentes no texto de **La Hire**, os conteúdos foram explicitados pelo **F. I. C.** em **14** delas. Não há no texto do **F. I. C.** qualquer menção a **13** destas proposições.

8.3.3 – Parte 2 - A Elipse

GÊNESE DA ELIPSE E SEU COROLÁRIO

A definição para a elipse que La Hire utilizou (a soma das distâncias a dois pontos dados – os Focos – constante e igual a um segmento IT dado) é a mesma que o F. I. C. apresentou na proposição 613. Ele retornou a essa definição para uma ampliação do conceito para pontos interiores e exteriores na proposição 618. Uma diferença é que La Hire exigiu na gênese que os focos estivessem no segmento IT, algo que o F. I. C. não fez. Mas ambos concluíram que os pontos I e T fazem parte da curva (segunda observação da proposição 615 e na 620 do F. I. C.), embora La Hire não os tenha denominado vértices.

A construção usada (aquela que obtém dois pontos P e P' da elipse através da interseção de dois círculos centrados nos focos e com raios que somados valem IT) foi a mesma que o F. I. C. usou na proposição 615. O F. I. C. discutiu a mais a questão da ocorrência ou não da interseção entre as circunferências.

No corolário, o fato de o segmento IT ser um eixo de simetria (Eixo Maior) foi mostrado na primeira parte da proposição 619, mas o F. I. C. também demonstrou para o Eixo Menor. Já o fato de ser fechada, foi mostrado na quarta observação da proposição 615.

DEFINIÇÕES 1 A 8

La Hire definiu a curva construída como **Elipse** (D1) da mesma forma que o F. I. C. fez na proposição 613. Definiu ainda: o **Centro C** (D2) que o F. I. C. apresentou na 608; o **Grande Eixo** IT (D3) e o **Pequeno Eixo** MN (D4) que o F. I. C. definiu no final da proposição 619 (chamando-os por Eixo Maior e Menor, respectivamente) e provou serem esses segmentos eixos de simetria**;** os **Focos** F e D (D5) que foram apresentados na 613 no F. I. C.; as **Ordenadas** (D6), apresentadas na 611 pelo F. I. C; o **Diâmetro** (D7) que o F. I. C. não definiu e a **Tangente** (D8) que o F. I. C. exibiu na proposição 609. As definições de tangente, ordenada e centro no F. I. C**.** foram feitas em proposições anteriores às cônicas, servindo para curvas em geral.

LEMA 1

*Sejam o círculo de centro **F** e raio **FO**, o ponto **P** externo ao círculo, os pontos **H** e **M** interseções da reta **PF** com o círculo. Então:* $\underbrace{(FP+FO)}_{PH}\cdot\underbrace{(FP-FO)}_{PM}=PO^2$.

Este resultado, que conhecemos hoje como "Potência de Ponto", foi demonstrado pelo F. I. C. no teorema 261 da página 140. Só que ele utilizou a semelhança de triângulos, enquanto La Hire usou o teorema de Pitágoras.

PROPOSIÇÃO 1

*O quadrado do semi-eixo maior **CT** da elipse está para o produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo extremo **O** da ordenada **PO** assim como o produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo foco **D** está para o quadrado da ordenada **PO** do eixo maior, ou seja,* $\dfrac{CT^2}{IO\cdot OT}=\dfrac{ID\cdot DT}{PO^2}$.

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C.. Mas os elementos que foram construídos para sua demonstração (o prolongamento de FP até A com PD = PD) apareceram em diversas proposições (621, 623, 624, ...).

PROPOSIÇÃO 2

*O produto das partes do eixo maior **IT** formadas pelo foco **D** é igual ao quadrado do semi-eixo menor **CM**, ou seja,* $ID\cdot DT=CM^2$.

Esta proposição foi apresentada pelo F. I. C. no final da proposição 619, só que ele usou as letras a para CT, b para CM e c para CF na forma do Teorema de Pitágoras. Esse ponto especial M da elipse também apareceu na terceira observação da proposição 615 e na 620.

PROPOSIÇÕES 3 e 4

O quadrado de um eixo da elipse está para o quadrado do outro eixo, assim como o quadrado de uma ordenada deste último eixo está para produto das partes deste eixo formadas pelo extremo desta ordenada.

Na proposição **3**, a ordenada **PO** do eixo maior: $\frac{NM^2}{IT^2} = \frac{PO^2}{IO \cdot OT}$.

Na proposição **4**, a ordenada **PQ** do eixo menor: $\frac{PQ^2}{NQ \cdot QM} = \frac{IT^2}{NM^2}$.

Estas proposições não são apresentadas pelo F. I. C.. Conseqüentemente, as definições de Parâmetro de um Eixo e da Figura de um Eixo não fizeram parte do texto do F. I. C..

PROPOSIÇÃO 5

*O quadrado cujo lado é a ordenada **PO** somado com o retângulo **VXYZ** (que é semelhante à figura do eixo **IT**) é equivalente à figura de IY que é o retângulo de lados **IT** e **TY**, ou seja,* $PO^2 = VO \cdot OT$.

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C.. Ou seja, o F. I. C. não fez qualquer menção à origem dos termos que hoje usamos para a denominação das cônicas, que está ligado a uma área menor (falta) que outra no caso da elipse.

PROPOSIÇÃO 6

*Todos os diâmetros são divididos ao meio pelo centro **C**.*

A recíproca desta proposição foi apresentada pelo F. I. C. na terceira parte da proposição 619, apesar do F. I. C. não ter definido "Diâmetro de uma Cônica". Na demonstração dessa proposição 6, La Hire usou o fato de uma reta não poder cortar a elipse em mais de 2 pontos, mas não demonstrou, algo que o F. I. C. realiza na proposição 616.

PROPOSIÇÃO 7

*Uma reta perpendicular ao eixo maior **IT**, que cruza sua extremidade **I**, tangencia a elipse neste ponto **I**.*

Esta proposição foi apresentada pelo F. I. C. no terceiro escólio da proposição 623. Mas o fez como um caso particular do primeiro escólio da proposição 623 que diz ser uma tangente perpendicular ao segmento que une o foco ao seu simétrico em relação a uma reta secante que no limite virou tangente.

PROPOSIÇÃO 8

*A mediatriz do segmento **DA** é tangente à elipse no ponto **P** (sendo **F** e **D** focos e **A** o prolongamento de **FP** com **PA** = **PD**).*

A recíproca desta proposição foi apresentada pelo F. I. C. nos dois primeiros escólios da proposição 623. A figura desta proposição permite rapidamente demonstrar a proposição 624 uma vez que a soma entre FP e PA é constante, o que permite concluir que o ponto A gera um círculo (esse ponto genérico eqüidista de F). Na figura da proposição 9, La Hire desenhou um arco deste círculo. A proposição 626 também foi provada de forma análoga, usando a 624 e a semelhança de triângulos. Esta proposição é chamada pelo F. I. C. por "Teorema de La Hire".

PROPOSIÇÃO 9

*A tangente à elipse que passa pelo ponto **P** é única.*

Esta proposição foi mostrada pelo F. I. C. na proposição 630, só que de uma forma mais geral, pois fala do número de tangentes que podem ser traçadas por pontos na elipse, internos ou externos.

PROPOSIÇÃO 10

*A tangente por um ponto **P** da elipse forma com os segmentos que unem **P** aos focos (hoje chamados raios vetores) ângulos congruentes.*

Esta proposição foi exibida pelo F. I. C. na proposição 621, só que de uma forma mais geral, pois prova para uma reta secante, ou seja, a tangente é um caso particular quando o limite das distâncias entre esses dois pontos de contato tende a zero. O segundo corolário da proposição 622 surge imediatamente a partir deste resultado. A proposição 621 justifica imediatamente a construção do problema 627, enquanto a 622 justifica a 628.

PROPOSIÇÕES 11 E 12

*O semi-eixo é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro **C** até as interseções do eixo com a ordenada por **P** e com a tangente que passa por **P**.*

Na proposição **11**, sendo o segmento **CT** o semi-eixo maior: $\frac{CO}{CT}=\frac{CT}{CH}$.

Na proposição **12**, sendo o segmento **CM** o semi-eixo menor: $\frac{CQ}{CM}=\frac{CM}{CV}$.

Estas proposições não foram desenvolvidas pelo F. I. C..

PROPOSIÇÕES 13, 14 e 15

Nessas três proposições foram mostradas equivalências entre polígonos. As provas utilizam adição e subtração de áreas iguais.

Na décima terceira: *os triângulos **PAB** e **TAH** são equivalentes.*

O segundo corolário desta proposição foi apresentado pelo F. I. C. no primeiro corolário da proposição 632.

No lema 2, mostrou uma proporção entre dois retângulos e dois trapézios: *o Sendo o segmento **CI** igual ao **CT** e os segmentos **OP** e **FG** paralelos ao **TB**, então o retângulo **IOT :** retângulo **IGT ::** trapézio **POTB :** trapézio **FGTB**.*

Na décima quarta: *o triângulo **EGM** é equivalente ao quadrilátero **GTBF.***

Na décima quinta: *o triângulo **ELF** é equivalente ao quadrilátero **LPHM**.*

Estas proposições e este lema não foram exibidas pelo F. I. C., uma vez que o seu texto não possui proposições formuladas através de equivalências entre áreas de polígonos formados com os elementos das cônicas.

PROPOSIÇÃO 16

*Todos os segmentos de extremos na elipse (cordas) paralelos a uma tangente por **P** são divididos ao meio pelo diâmetro por **P**.*

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C., já que ele não aborda as propriedades dos diâmetros conjugados.

PROPOSIÇÕES 17 e 18

*O quadrado do diâmetro por um ponto **P** da elipse está para o quadrado do diâmetro paralelo à tangente por **P** assim como o quadrado da ordenada deste último diâmetro está para produto das partes deste diâmetro formadas por esta ordenada.*

Na proposição **17**, sendo a ordenada ***EL*** paralela à tangente por **P,** então:

$$\frac{VS^2}{RP^2} = \frac{EL^2}{RL \cdot LP}$$

A proposição **18** afirma que ***EO = eO***.

Afirma ainda que sendo a ordenada ***EO*** paralela ao diâmetro por **P,** então:

$$\frac{RP^2}{VS^2} = \frac{EO^2}{VO \cdot OS}.$$

Estas proposições não foram apresentadas pelo F. I. C., pois ele não abordou as propriedades dos diâmetros conjugados e suas definições relacionadas: "Ordenada de um Diâmetro", "Parâmetro de um Diâmetro" e "Figura de um Diâmetro".

PROPOSIÇÃO 19

*O quadrado da ordenada **EL** somado com o retângulo **MN** (que é semelhante à figura **LM** do diâmetro **VS**) é equivalente ao retângulo **LM**, ou seja,* $EL^2 = PL \cdot LN$.

Esta proposição não foi feita pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 20

*Se dois segmentos **HI** e **FG,** limitados pela elipse, são paralelos aos dois diâmetros conjugados **AB** e **DE** se cruzam em **R**, então o retângulo **HR·RI : ** retângulo **FR·RG :: AB^2 : DE^2**.*

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C.. Ela é a propriedade análoga ao que chamamos para o círculo de "Potência de Ponto".

8.3.4 – Resumo da comparação das proposições de elipse

La Hire	F. I. C.
Gênese	613, 615*, 618*, 619*, 620*
D1	613, 618*
D2	608
D3	619
D4	619
D5	613
D6	611
D7	Não tem
D8	609
L1	261
P1	Não tem
P2	615 (3ª)*, 619, 620*
P3	Não tem
P4	Não tem
D9	Não tem
D10	Não tem
P5	Não tem
P6	(616, 619 (3ª))*
P7	623 (E3)*
P8	623 (E1 e E2)*, 624*, 626*

P9	**630***
P10	**621*, 622*, 627*, 628***
P11	**Não tem**
P12	**Não tem**
P13	**632 (E1)**
L2	**Não tem**
P14	**Não tem**
P15	**Não tem**
P16	**Não tem**
P17	**Não tem**
P18	**Não tem**
D11	**Não tem**
D12	**Não tem**
D13	**Não tem**
D14	**Não tem**
P19	**Não tem**
P20	**Não tem**

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A equivalência não existe por ser parcial e / ou por envolver outras idéias, entre elas a recíproca.
- A letra **E** significa Escólio. A letra **P**, Proposição. A letra **D**, Definição.

Conclusão

A partir da tabela anterior, entre os **37** teoremas, definições e a Gênese da elipse presentes no texto de **La Hire**, seus conteúdos foram explicitados pelo **F. I. C.** em **16** delas. Não há no texto do **F. I. C.** qualquer menção a **21** destas proposições.

8.3.5 – Parte 3 - A Hipérbole

GÊNESE DA HIPÉRBOLE E SEU COROLÁRIO

A definição para a hipérbole que La Hire utilizou (a diferença das distâncias a dois pontos dados – os Focos – é constante e igual a um segmento IT dado) foi a mesma que o F. I. C. apresentou na proposição 642. Ele retornou a essa definição para uma ampliação do conceito para pontos interiores e exteriores na proposição 648. Uma diferença é que La Hire exigiu na construção que os focos estivessem nos prolongamentos do segmento IT, algo que o F. I. C. não exigiu. Mas ambos concluem que os pontos I e T fazem parte da curva (segunda e terceira observações da proposição 645 e na 651 do F. I. C.), embora La Hire não os tenha denominado como vértices.

A construção usada (aquela que obtém dois pontos P e P' da hipérbole através da interseção de dois círculos centrados nos focos e com raios cuja diferença vale IT) foi a mesma que o F. I. C. usou na proposição 644, mas o F. I. C. também discutiu a questão da ocorrência ou não da interseção entre as circunferências, na primeira observação da proposição seguinte.

No corolário, o fato de o segmento IT ser um eixo de simetria (Eixo Determinado) é mostrado na primeira parte da proposição 649, mas o F. I. C. também demonstrou para o Eixo Indeterminado. Já o fato de ser uma curva que se estende indefinidamente, foi mostrado na quarta observação da proposição 645.

DEFINIÇÕES 1 a 8

La Hire definiu a curva construída como "Hipérbole" (D1) da mesma forma que o F. I. C. fez na proposição 642. Definiu ainda: o "Centro" *C* (D2) que o F. I. C. apresentou na 608; o "Eixo Determinado" IT (D3) e o "Eixo Indeterminado" MN (D4) que o F. I. C. definiu no primeiro escólio da proposição 650 (chamando-os por "Eixos Transverso e não-Transverso", respectivamente) e provou serem esses segmentos eixos de simetria na 649; os "Focos" F e D (D5) que foram apresentados na 642 no F. I. C.; as "Ordenadas" (D6) apresentadas na 611 pelo F. I. C.; o "Diâmetro" (D7) que o F. I. C. não definiu e, finalmente, "Tangente" (D8) que o F. I. C. exibiu na proposição 609. As definições de tangente, ordenada e centro foram feitas, no F. I. C., em proposições anteriores às cônicas, servindo para curvas em geral. A sua definição de tangente não exigiu que seus pontos sejam todos exteriores (exceto o ponto de contato) como exigiu La Hire. Por causa disso, no primeiro corolário da proposição 653, o F. I. C provou que os pontos da tangente são exteriores.

PROPOSIÇÃO 1

*O quadrado da ordenada **PO** do eixo determinado está para o produto das partes do eixo determinado formadas pelo extremo **O** da ordenada assim como o produto das partes do eixo determinado formadas pelo foco **D** está para o quadrado do semi-eixo determinado **CT** da hipérbole:* $\frac{PO^2}{IO \cdot OT} = \frac{ID \cdot DT}{CT^2}$.

Esta proposição não foi exibida pelo F. I. C.. Mas os elementos que foram construídos para sua demonstração (divisão do segmento FP em A com PD = PD) apareceram em diversas proposições (652, 655, ...).

PROPOSIÇÃO 2

*O Eixo Indeterminado **NM** divide o segmento **PP'**, paralelo ao **IT**, em partes iguais.*

Esta proposição é a recíproca da que foi apresentada pelo F. I. C. na segunda parte da proposição 649.

As definições de Parâmetro do Eixo e Figura do Eixo não foram feitas pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 3

*O quadrado de lado **PO** subtraído do retângulo **VXYZ** (que é semelhante à figura do eixo **IT**) é equivalente ao retângulo de lados **TO** e o parâmetro **TV**), ou seja,* $PO^2 = TX \cdot TO$.

Esta proposição não foi mostrada pelo F. I. C., ou seja, o F. I. C. não fez qualquer menção à origem dos termos que hoje usamos para a denominação das cônicas, que (no caso da hipérbole) está ligado a uma área maior que outra (idéia de excesso).

PROPOSIÇÃO 4

*Qualquer diâmetro da hipérbole é dividido ao meio pelo centro **C**.*

Esta proposição é a recíproca da que foi apresentada pelo F. I. C. na terceira parte da proposição 649, apesar do F. I. C. não definir diâmetro de uma cônica.

PROPOSIÇÃO 5

A reta perpendicular ao eixo determinado IT pelo ponto T é tangente à hipérbole.

Esta proposição foi mostrada pelo F. I. C. no terceiro escólio da proposição 654. Mas o fez como um caso particular do primeiro escólio da proposição 654 (que é um corolário da 652) que diz ser uma tangente perpendicular ao segmento que une o foco ao seu simétrico em relação a uma reta secante que no limite virou tangente.

PROPOSIÇÃO 6

*A reta mediatriz ao segmento **DA** é tangente à hipérbole no ponto **P** (sendo **F** e **D** focos e **A** o prolongamento de **FP** com **PA = PD**).*

Esta proposição é a recíproca da foi exibida pelo F. I. C. no primeiro escólio da 653 e no primeiro e do segundo escólio da proposição 654. Enquanto La Hire diz que a mediatriz de um segmento que une o foco D a um ponto A pertencente ao segmento FP com PA = PD é uma tangente ao ponto P da hipérbole, o F. I. C. inverte dizendo que a tangente por P é mediatriz de PA.

PROPOSIÇÃO 7

A tangente por um ponto P da hipérbole forma com os segmentos que unem P aos focos (hoje chamados raios vetores) ângulos congruentes.

Esta proposição foi apresentada pelo F. I. C. na proposição 652, só que de uma forma mais geral, pois prova para uma reta secante, ou seja, a tangente é um caso particular quando o limite das distâncias entre esses dois pontos de contato tende a zero. O segundo corolário da proposição 653 surge imediatamente a partir deste resultado. A proposição 652 justifica imediatamente a construção do problema 664.

PROPOSIÇÃO 8

*A tangente à hipérbole que passa pelo ponto **P** é única.*

Esta proposição foi mostrada pelo F. I. C. no segundo escólio da proposição 666.

Já a definição de assíntota foi mostrada de outra forma pelo F. I. C. nas proposições 650, 657, 658, 659, 660. La Hire fez uma certa construção para a obtenção de duas retas (D11) e depois provou que elas são assíntotas (P11), ou seja, a hipérbole se aproxima infinitamente delas. O F. I. C. definiu a assíntota como uma reta tangente a um ponto da hipérbole no infinito na proposição 657 e depois provou que a hipérbole possui duas assíntotas na proposição 658 e que os eixos são suas bissetrizes na 659. Na proposição 660, o F. I. C. retomou a figura da proposição 650 para provar que a diagonal daquele retângulo coincide com a assíntota.

PROPOSIÇÕES 9 e 10

Seja uma reta paralela a um dos eixos que cruza as duas assíntotas nos pontos B(b) e G(g) e a hipérbole em P. O produto da distância de P até B(b) e G(g) é igual ao quadrado desse semi-eixo.

Na proposição 9, sendo o semi-eixo o segmento *TA*, então: $\boldsymbol{GP \cdot PB = TS^2}$.

Na proposição 10, sendo o semi-eixo o segmento *CT*: $\boldsymbol{gP \cdot Pb = CT^2}$.

Estas proposições não foram desenvolvidas pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 11

*A hipérbole e suas assíntotas se aproximam continuamente uma da outra quanto mais ambas forem prolongadas e nunca se encontrarão, pois a parte **PB** da ordenada contida entre a hipérbole e sua assíntota pode ser feita menor que qualquer linha dada.*

Esta proposição não foi exibida pelo F. I. C., pois sua definição de assíntota é diferente da que foi usada por La Hire, conforme citamos acima.

PROPOSIÇÃO 12

*Sejam dois segmentos **PH // AD** limitados pela assíntota **CD** e outros dois segmentos **PF // AB**, limitados pela outra assíntota **CB**. Então, $\boldsymbol{PH \cdot PF = AD \cdot AB}$.*

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 13

*Uma reta cruza as assíntotas em **F** e **D** e a hipérbole em **A** e **P**. A distância de uma das interseções **F** desta reta com a hipérbole até a interseção mais próxima com a assíntota é a mesma da outra interseção **D** até a outra assíntota, ou seja, **PF = AD**.*

Esta proposição não foi mostrada pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 14

*Um segmento tangente à hipérbole por **P** sempre cruza as duas assíntotas (**F** e **H**) e **P** é seu ponto médio.*

Esta proposição não foi desenvolvida pelo F. I. C..

PROPOSIÇÕES 15 e 16

*Seja uma reta que cruza as duas assíntotas em dois pontos **F** e **H** e a hipérbole em **P**. O produto da distância de **P** até **F** e **H** é constante e igual ao quadrado de um segmento paralelo à reta e que passa pelo ponto **P** de tangência e pela assíntota.*

Na proposição *15*, sendo esse segmento tangente à hipérbole e limitado por A' e pela assíntota em B', então: $PF \,.\, PH = AB \,.\, AD = A'B'^2$.

Na proposição 16, sendo esse segmento o semidiâmetro limitado por A e pelo centro *C*, então: $PF \cdot PH = AC^2$.

Estas proposições não foram exibidas pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 17

*Todos paralelogramos cujos lados são paralelos às assíntotas e cujos vértices opostos são o centro **C** e pontos da hipérbole tem áreas iguais.*

Esta proposição não foi mostrada pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 18

Os triângulos cujos vértices são o centro C e dois pontos nas assíntotas e o lado oposto a C é tangente à hipérbole tem área constante.

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 19 e 20

Os segmentos paralelos entre si limitados por dois pontos da hipérbole são divididos ao meio por um mesmo diâmetro.

Na proposição 19, sendo os segmentos paralelos a uma tangente por T e o diâmetro sendo o determinado, pois passa por T, então: ***H** é o ponto médio de **LI** e **N,** de **PE.***

Na proposição 20, sendo os segmentos paralelos a um diâmetro por T e o diâmetro sendo o indeterminado, pois é paralelo à tangente por T, então: ***R** é o ponto médio de **PV** e **r,** de **qs.***

Estas proposições não foram desenvolvidas pelo F. I. C..

As definições de "Diâmetros Conjugados" e de "Ordenada de um Diâmetro" também não foram feitas pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 21

*A razão entre o quadrado da ordenada **EN** de um semidiâmetro **CT** e o produto dos segmentos que vão do pé **N** da ordenada até **O** e **T** é igual à razão entre o quadrado do semidiâmetro **AT** e o quadrado do semidiâmetro conjugado **CT**:* $EN^2 : ON \cdot NT :: AT^2 : CT^2$.

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C..

As definições de "Parâmetro do Diâmetro" e "Figura de um Diâmetro" também não foram feitas pelo F. I. C..

.

PROPOSIÇÃO 22

*O quadrado de lado **EN** subtraído pelo retângulo **PM** (que é semelhante à figura do diâmetro **OT**) é equivalente ao (retângulo de lados **TN** e o parâmetro **PT** do diâmetro **OT**), ou seja,* $EN^2 = TN \cdot NM^2$.

Esta proposição não foi exibida pelo F. I. C.. Mas o seu corolário tratou da hipérbole eqüilátera que o F. I. C. apresentou na primeira parte da proposição 651, falando do ângulo reto existente entre as assíntotas neste caso na proposição 661.

PROPOSIÇÃO 23

*Sejam os segmentos **FG** e **HI** paralelos aos diâmetros conjugados por **T** que se encontram em **R**. O retângulo **HR ˙RI :** retângulo **FR ˙ RG :: PT : OT**.*

Esta proposição não foi apresentada pelo F. I. C..

PROPOSIÇÃO 24

*O semi-eixo **CT** é a média geométrica entre os segmentos que vão do centro **C** até a interseção **O** do eixo com a ordenada e até a interseção **H** do eixo com a tangente que passa por **P**:* ***CH : CT :: CT : CO**.*

Esta proposição não foi mostrada pelo F. I. C..

8.3.6 – Resumo da comparação das proposições de hipérbole

La Hire	F. I. C.
Gênese	642, 645*, 648*, 649*, 651(2ª)*
D1	642
D2	608
D3	649* e 650
D4	649* e 650
D5	642
D6	611
D7	Não tem
D8	609*, 653*, 666* (E1)
P1	Não tem
P2	649 (2ª)*
D9	Não tem
D10	Não tem
P3	Não tem
P4	649
P5	654
P6	653*, 654*

P7	**652*, 664***
P8	**666 (E2)***
D11	**650*, 657*, 658, 659*, 660***
P9	**Não tem**
P10	**Não tem**
P11	**650*, 657*, 658, 659*, 660***
P12	**Não tem**
P13	**Não tem**
P14	**Não tem**
P15	**Não tem**
P16	**Não tem**
P17	**Não tem**
P18	**Não tem**
P19	**Não tem**
P20	**Não tem**
D12	**Não tem**
D13	**Não tem**
P21	**Não tem**
D14	**Não tem**
D15	**Não tem**
P22	**651(1ª)*, 661(C2)***
P23	**Não tem**
P24	**Não tem**

- O símbolo estrela "*" significa que a associação não é plena, ou seja, não são equivalentes. A equivalência não existe por ser parcial e / ou por envolver outras idéias, entre elas a recíproca.
- A letra **E** significa Escólio.
- A letra **C** significa Corolário.
- A letra **P** significa Proposição.
- A letra **D** significa Definição.

Conclusão

A partir da tabela anterior, entre os **40** teoremas, definições e a gênese da hipérbole presentes no texto de **La Hire**, os conteúdos foram explicitados pelo **F. I. C.** em **17** delas. Não há no texto do **F. I. C.** qualquer menção a **23** destas proposições.

PARTE 4 – DESCRIÇÃO DAS SEÇÕES CÔNICAS

PROBLEMA 1

Sendo dados um diâmetro da seção cônica e sua ordenada, encontrar seu parâmetro. Na elipse, determinar também seu diâmetro conjugado.

PROBLEMA 2

Em uma hipérbole, sendo dados um diâmetro determinado, seu parâmetro e o ângulo que este diâmetro faz com sua ordenada, deseja-se descrever as assíntotas.

PROBLEMA 3

*Sendo dados um diâmetro da parábola por **T**, **P** como um dos seus pontos e a reta tangente por **T**. Deseja-se descrever a parábola.*

PROBLEMA 4

*Descrever uma elipse, sendo dados os diâmetros conjugados **AB** e **ED**.*

PROBLEMA 5

*Dadas as assíntotas **CD** e **CM**, além de um ponto **P** da hipérbole, descrevê-la.*

Estes 5 problemas não foram apresentadas pelo F. I. C..

8.4 – O que concluir da comparação entre os dois livros?

Comparando a tabela que resume as propriedades usadas por La Hire nas demonstrações da sua Obra no capítulo 5 (da Descrição) e a tabela do Apêndice 1 que faz o mesmo resumo para o F. I. C., podemos constatar algumas semelhanças e também algumas diferenças entre as duas obras.

Semelhanças

- A mesma caracterização baseada nos focos para as três cônicas. Ou seja, ambos fazem a definição a partir do plano e utilizam tal caracterização bifocal (elipse e hipérbole) e "Foco mais Diretriz" (parábola) para a demonstração das proposições do texto.

- O uso de ferramentas sintéticas preferencialmente. O uso da geometria analítica é nulo no texto de La Hire (embora a primeira proposição de cada cônica permita a obtenção das suas equações de forma imediata, conforme mostramos no capítulo **6** da descrição). O texto do F. I. C. só utiliza a linguagem analítica em apenas uma proposição de parábola (691), onde deduz a equação da curva.

- Ambos utilizam com grande freqüência as definições das cônicas, a semelhança de triângulos (incluindo congruência) e o paralelismo (quinto postulado de Euclides) nas demonstrações das proposições nas demonstrações das proposições. Veja o resumo a seguir:

	DEFINIÇÔES DAS CÔNICAS	**SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS**	**PARALELISMO**
La Hire	**19**	**30**	**19**
F. I. C.	**25**	**12**	**18**

- Os textos possuem muitas proposições que incluem, de alguma forma, o traçado de uma reta tangente por um ponto da cônica e suas propriedades: La Hire o faz em **31** das **99** proposições (incluindo definições e lemas) e o F. I. C. em **37** das **86** proposições (incluindo definições e lemas).

- Os dois textos apresentam grande recorrência, ou seja, com freqüência utilizam proposições anteriores para demonstrar uma proposição seguinte: La Hire (**35** das **61** proposições) e o F. I. C. (**56** das **71** proposições).

- Os dois textos são didáticos, ou seja, possuem leitura acessível. Não foi por acaso, então, a nossa "descoberta" do uso intensivo do F. I. C. para o ensino de cônicas em vários países por mais de um século, algo que não temos registro em relação ao texto de La Hire.

- La Hire não apresenta proposições no espaço. O F. I. C. faz apenas uma proposição no espaço (634) que diz ser uma elipse a projeção de um círculo sobre um plano que contém o diâmetro desse círculo. Mas a demonstração utiliza a caracterização da elipse no plano.

Diferenças

- La Hire utiliza as propriedades de Proporção em **15** das proposições e propriedade transitiva em **24** das proposições. O F. I. C. praticamente não utiliza essas ferramentas.

- A forma como os textos utilizam áreas diferem entre si. La Hire faz uso das idéias de equivalência de áreas, sem necessariamente calculá-las. Já o F. I. C. busca a medida de cada superfície que utiliza, ou seja, faz uso das fórmulas para o seu cálculo.

- La Hire não utiliza o conceito de limite nas suas demonstrações. Já o F. I. C. faz uso dessa idéia em **9** proposições.

- La Hire não apresenta no texto qualquer caracterização unificadora das três cônicas, enquanto o F. I. C. apresenta uma definição que serve para as três cônicas (proposições 625 de elipse, 656 de hipérbole e 687 de parábola)

- Como o texto do F. I. C. envolve outras partes da geometria, ele apresenta definições que servem para outras curvas (608 a 612). O texto do La Hire só aborda as cônicas, o que não permitiu fazer a mesma escolha.

- O F. I. C. só define parâmetro para a parábola, enquanto La Hire faz a definição para todas as 3 cônicas.

Conclusão

Depois de realizada a comparação entre os livros nos dois sentidos (primeiro do F. I. C. para La Hire e depois o contrário), constatamos coincidência em **95** proposições e discrepância em **97** delas. Assim, há uma semelhança que gira em torno dos 50%. Mas em algumas delas, apesar do conteúdo ter sido explicitado por apenas um dos autores, temos a desconfiança do conhecimento do resultado pelo outro autor, conforme foi comentado em cada proposição ao longo desse capítulo. Das **38** definições apresentadas por La Hire, **21** estão presentes no F. I. C..

A comparação entre os dois livros permite constatar um certo grau de comunicação entre eles. As semelhanças são expressivas: a mesma caracterização das cônicas, a mesma linguagem sintética, uma coincidência de aproximadamente metade das proposições, um expressivo grau de recorrência às proposições anteriores na demonstração de uma proposição seguinte, o uso acentuado das definições das cônicas no plano, das semelhanças de triângulo e de paralelismo nas demonstrações das proposições.

Não sabemos exatamente qual foi a influência de La Hire sobre Gabriel Marie ao escrever o F. I. C. O único vínculo que detectamos foi através da sua proposição 626, onde ele se refere ao resultado como "*Teorema de La Hire*". Cabe certamente uma averiguação mais cuidadosa sobre o que realmente aconteceu desde 1679 até o século XX. Essa comparação feita neste capítulo da nossa dissertação fornece uma boa motivação para a realização de uma investigação mais ampla sobre como se deu e até que ponto houve essa influência de La Hire sobre os textos com fins didáticos produzidos nos dias atuais.

CAPÍTULO 9

CONCLUSÃO

O presente trabalho teve como foco a tradução da Obra “Novos elementos das seções cônicas” feita por **Philippe de La Hire** em **1679**. O principal motivo que nos levou a escolher essa tradução como tema de dissertação reside na grande admiração adquirida pela obra. Foi grande a surpresa em conhecer um texto sobre cônicas abrangente (61 proposições, 2 lemas, 38 definições e 5 problemas de construção) que não utiliza em momento algum a linguagem analítica, tão presente no ensino atual de cônicas.

RESUMO DA DESCRIÇÃO DA OBRA

A presente obra introduz as cônicas a partir da caracterização bifocal, utilizando, como ferramenta, a geometria clássica dos gregos. É feita totalmente no plano.

As três curvas são expostas separadamente, mas de uma forma tal que fica clara a ligação entre as elas.

A primeira proposição de cada cônica permite a rápida migração para a geometria analítica, embora ele não o faça nesse livro, mas sim nos outros dois livros da mesma obra de 1679.

Apresenta parâmetros aparentemente diferentes para cada cônica, não se preocupando em interligá-los.

As proposições que deram origem aos termos elipse (falta), parábola (igualdade) e hipérbole (excesso) são exibidas.

Deduz um grande conjunto de propriedades a respeito da reta tangente.

Mostra as propriedades envolvendo áreas de triângulos e quadriláteros para as três cônicas.

Uma proposição que pode ser entendida como o conceito de "Potência de ponto em relação a uma cônica" é feita para a elipse e para a hipérbole.

Diversas propriedades de assíntotas são demonstradas.

O conceito de "Diâmetros Conjugados" é mostrado para a elipse e para a hipérbole.

O AUTOR

À medida que a pesquisa avançou, foi aumentando progressivamente também a admiração pelo autor. Cada nova obra descoberta em sua imensa produção acadêmica, reforçava a sua incrível versatilidade para a confecção de textos sobre as mais diversas áreas do conhecimento (ver apêndice E). Ele reservou maior atenção para as seções cônicas e para a astronomia. Além de ser um matemático, por excelência, La Hire vivenciou de forma ampla o seu lado engenheiro. Um bom exemplo dessas duas habilidades é o estudo da epiciclóide onde ele primeiro produziu um tratado sobre as propriedades dessa curva, em seguida sugeriu a aplicação da epiciclóide para o formato dos dentes de uma engrenagem e finalmente construiu uma bomba hidráulica que utilizava engrenagens com a forma da citada curva.

Ele transitou com habilidade pelas duas linguagens geométricas existentes na sua época, escrevendo obras tanto com abordagem analítica quanto com abordagem sintética. Ele viveu justamente no período seguinte ao surgimento dessa nova geometria proposta por Descartes.

Mas foi o seu envolvimento com as curvas cônicas que nos chamou realmente a atenção. Escrever três obras com características distintas sobre um mesmo assunto é algo que por si só já chamaria atenção. A obra que traduzimos tem enfoque completamente diferente das obras de 1673 e 1685. Enquanto a definição bifocal é o elemento de partida da nossa obra de 1679, a divisão harmônica é o ponto de partida das outras duas. Enquanto a que traduzimos se restringe ao plano, as outras duas transitam entre o plano e o espaço. Coolidge cita (página 44 de [5]) que La Hire dominava todo o conhecimento sobre cônicas da época, que escreveu livros de fácil leitura, sua exposição foi superior a de Apolônio em [9] e que sua contribuição em projeção, secção harmônica, pólos e polares representou um avanço real na matemática (conteúdos presentes nas obras de 1673 e 1685).

A RELEVÂNCIA HISTÓRICA DESSA OBRA DE 1679

A comparação entre o ensino das cônicas nos dias de hoje com este texto de La Hire reforçou a nossa desconfiança da sua importância histórica. A maior parte dos livros didáticos atuais obtêm as equações analíticas das cônicas a partir da propriedade bifocal, utilizando fórmulas da geometria analítica de distância entre dois pontos (elipse e hipérbole) e de distância entre um ponto e uma reta (parábola). Apresentam as cônicas separadamente e no plano, sem ressaltar qual é o vínculo existente entre elas. Quase nenhuma propriedade das curvas é apresentada. As equações são a única caracterização explorada nos exercícios.

Observando o texto de La Hire – conforme foi mostrado no capítulo **6** (Descrição e Comentários) – a primeira proposição de cada cônica (demonstrada através de geometria sintética) pode dar origem, de forma imediata, às equações analíticas tão usuais nas salas de aula atualmente. Também apresenta as cônicas separadamente e exclusivamente no plano. Entretanto, uma grande diferença é que La Hire tem plena consciência da íntima vinculação entre elas, uma vez que as proposições para cada cônica são equivalentes às proposições das outras duas cônicas, conforme é mostrado na tabela de equivalências no capítulo **7** (Novas Proposições). As demonstrações, inclusive, são muito parecidas em diversas proposições.

No segundo livro dessa obra de 1679 ("Os lugares geométricos"), La Hire troca a linguagem sintética pela analítica. Ele fala de diversos lugares geométricos, entre eles as cônicas, através de equações. Conforme relatam Boyer, Chasles e Montucla (ver capítulo 2), esta forma de dividir uma obra em três livros de 1679 serviu de referência para outras obras que utilizaram a linguagem da geometria analítica e fizeram a apresentação das cônicas através da caracterização bifocal.

A comparação com o F. I. C. (obra de Gabriel Marie) feita no capítulo 8, reforçou a nossa suspeita de vínculo com o texto de La Hire. Ele apresenta a mesma caracterização bifocal usada por La Hire e de um total de 86 proposições sobre cônicas presentes no F. I. C., 59 foram explicitados também por La Hire ou foram dadas pistas que o resultado era por ele conhecido. Contribuições de Poncelet, J. Serret, Mr. Courcelle, Dandelin são citadas pelo autor e mostram alguns novos conhecimentos que foram adicionados às seções cônicas ao longo dos cerca de 200 anos que separam as duas obras. Infelizmente, não sabemos exatamente quais foram as fontes do F. I. C.. Temos consciência da necessidade de uma maior investigação para estabelecer um vínculo preciso entre as duas obras.

Assim, ao término da nossa pesquisa, a desconfiança sobre a influência desse texto sobre o nosso ensino atual de cônicas só aumentou. A estruturação dessa obra em três partes (cônicas servindo de base para a exploração de equações, ou seja, a geometria sintética se transformando em geometria analítica), os comentários de Chasles e Boyer e a forma como é feita hoje a apresentação das cônicas constituem elementos concretos para permanecermos apontando na direção desta conjectura da possível relevância desse texto. Podemos, assim, formular uma continuação dessa pesquisa: o quanto este texto influenciou o ensino de cônicas desde o fim do século XVII até o nosso século XXI? De que forma isso teria acontecido? Quais os caminhos percorridos?

O TEXTO DE LA HIRE COMO FONTE PARA O ENRIQUECIMENTO DA ABORDAGEM ATUAL REALIZADA NO ENSINO DE CÔNICAS

Apesar da semelhança entre elementos do texto de La Hire de 1679 e o ensino atual, no nosso ponto de vista, existe uma grande diferença existe entre ambos: o texto de La Hire é muito mais amplo que aquele que é ensinado atualmente sobre cônicas.

Estamos convencidos também que esse livro pode servir como fonte de consulta para aqueles professores que desejam ampliar e dar mais sentido ao ensino das seções cônicas. O texto consegue ser bem mais abrangente que o conteúdo ensinado atualmente, mas sua exposição é extremamente simples através de uma argumentação totalmente sintética. Partilhamos, assim, da opinião de Coolidge e do próprio La Hire (no seu prefácio) que a obra é acima de tudo acessível. Embora algumas demonstrações possam até ser longas, elas utilizam ferramentas usuais da geometria euclidiana usual: semelhança e congruência de triângulos, "Potência de ponto de um círculo", teorema de Pitágoras, além das próprias ferramentas do texto: as proposições anteriores e as definições. Uma ferramenta muito freqüente é o conjunto de propriedades das proporções, o que torna o texto tão próximo da linguagem dos gregos. A equivalência de polígonos é presença constante em várias demonstrações.

Podemos enumerar alguns motivos para justificar a facilidade da compreensão deste livro:

- Usa a definição bifocal, que é de fácil observação e viabiliza diversas construções contínuas já propostas por diversos autores (Kepler, Descartes, etc.);

- Não utiliza o cone em momento algum, pois é feita toda no plano. Portanto não exige a habilidade de visualização espacial;
- Estuda separadamente cada cônica;
- Sua argumentação usa a geometria euclidiana que é ensinada no ensino fundamental.

SUGESTÕES DE ABORDAGENS PARA A SALA DE AULA

Conscientes da limitada atenção dada no ensino de cônicas no nosso país, partimos para uma possível contribuição dessa dissertação. Algumas idéias presentes nesta obra sugerem possíveis ampliações de abordagem no ensino das cônicas. Tais propostas serão exemplificadas a seguir:

- Efetuar algum tipo de ligação entre as três cônicas, por mais breve e simples que seja. Pode ser através do limite da equação da hipérbole (ou elipse) que vira a equação da parábola (ver proposição 1 de hipérbole no capítulo 6) ou pode ser através da visualização da seção de um cone por um plano. As três cônicas são descritas no terceiro ano do ensino médio, mas normalmente sem interligação.

- Apresentar as propriedades óticas (proposição 8 de parábola, 10 de elipse e 7 de hipérbole). Elas evidenciam a interligação e possuem uma demonstração trivial, além de enorme aplicação prática.

- Quando um aluno do nono ano do ensino fundamental for apresentado à função quadrática, a origem sua equação pode ser justificada através da proposição 1 de parábola (ver capítulo 6).

- A origem dos nomes “elipse”, “parábola” e “hipérbole” pode ser discutida (proposição 1 de parábola, 5 de elipse e 3 de hipérbole), até porque esses termos também são usados no ensino do Português para figuras de linguagem com as mesmas idéias de falta, igualdade e excesso.

- Por que não falar também do parâmetro para a elipse e para a hipérbole, uma vez que ele já aparece na equação analítica da parábola. A propriedade que diz ser o parâmetro a corda focal mínima, ou seja, entre todas as cordas que passam pelo centro, aquela que é perpendicular ao eixo é a menor delas, pode ser usada. Este fato pode ser verificado utilizando as equações analíticas, fazendo x = c (elipse e hipérbole) e y = p / 4 (parábola). A idéia de corda focal mínima vale para as três cônicas.

- O modelo de grandezas inversamente proporcionais é muito utilizado em diversos momentos do ensino de física, química e da própria matemática, mas a curva que ele produz não é, usualmente, explorada. A proposição 17 de hipérbole sugere uma justificativa para o fato de essa curva ser uma hipérbole (ver capítulo 6 da descrição).

Enfim, o texto é potencialmente mais amplo que a abordagem atual e muitas outras proposições dessa obra podem ser utilizadas para o ensino das curvas cônicas.

A AMPLIAÇÃO DA OBRA

Um outro objetivo que foi alcançado neste trabalho foi obtido pelo capítulo **7** desta dissertação. A obra foi ampliada e quase completada em relação às equivalências. Ou seja, uma idéia verificada em uma das cônicas também está presente nas outras (exceto em algumas poucas propriedades que não fazem sentido na parábola, pois ela não possui eixo e diâmetro finitos). Foram feitas **8** novas proposições. Elas tiveram demonstrações idênticas às usadas por La Hire, exceto a primeira prova da proposição **19** de parábola. Ficaram faltando as analogias das proposições **6, 9, 15, 16** e **17** de parábola. No caso desta proposição **6,** embora não tenha sido provada, foi comentada a propriedade análoga na conclusão do capítulo **6**.

UM TEXTO DIDÁTICO DISPONÍVEL

Além de um grande aprendizado sobre as curvas cônicas, outra conquista proporcionada por essa dissertação foi a possibilidade de apresentar um texto abrangente e acessível sobre o assunto. Consegue ser amplo com suas **61** proposições, apesar de não utilizar as novas e importantes ferramentas surgidas justamente no início do século desta obra: as geometrias analítica e projetiva. Consegue ser didático, ao utilizar a ferramenta usual dos gregos. A necessidade de ser compreendido (a sua obra anterior de 1673 não foi tão bem recebida) fez La Hire escrever a presente obra com fins mais didáticos (ver prefácio). A beleza de diversas proposições, entre elas podemos citar a 20 de elipse, 23 de hipérbole e a 19 de parábola (apresentam o conceito de "Potência de um ponto em relação a uma cônica", resultando numa ampliação do conceito aplicado à circunferência), dão ao texto em questão o vigor que apenas obras relevantes possuem.

FIM

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA

[1] BONGIOVANNI, V. – ***Les caractérisations des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue d'enseignants: étude d'une sequence d'activités et conception d'un hyperdocument interactif, These de Doctorat*** – Grenoble, 2001.

[2] BOYER, Carl B. – ***History of analitic geometry*** – Nova Iorque, 1956.

[3] BOYER, Carl B. – ***A history of mathematics***, *2ª edição* – Nova Iorque, 1979.

[4] CHASLES, Michel – ***Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*** – Bruxelas, 1837.

[5] COOLIDGE, Julian L. – ***A history of the conic sections and quadric sections*** – Nova Iorque, 1945.

[6] DE LA HIRE, P. – ***Nouveaux éléments des sections coniques, les lieux géométriques, la construction ou effectuation des equations*** – Paris, 1679.

[7] DE LA HIRE, P. – Tradução de [6] para o Inglês de Brian Robinson – ***New elements of conic sections together with a method for their description on a plane*** – Londres, 1723.

[8] DE LA HIRE, P. – ***Nouvelle methode en geometrie pour les sections des superfícies coniques et cylindriques qui ont pour bases des circles, ou des paraboles, des elipses, & des hyperboles*** – Paris, 1673.

[9] DE LA HIRE, P. – ***Sectiones conicae in novem libros distributae*** **– Tradução de Jean Peyroux –** ***Grand livre des sections coniques*** – Paris, 1685.

[10] F. I. C. – ***Elementos de geometria,*** *14ª edição* – Rio de Janeiro, 1954.

[11] ESCOLA POLYTECHNICA – ***Programma para o exame de algebra, geometria, trigonometria rectilinea, e algebra superior***, editado pela Imprensa Nacional – Rio de Janeiro, 1907.

[12] FONTENELLE, Bernard de – ***Eloge des academiciens avec l'histoire de l'academie royale des sciences*** – Paris, 1699.

[13] LESBEGUE, Henri – ***Les Coniques*** – Paris, 1942.

[14] L'HOPITAL, Marquis de – Tradução para o Inglês de E. Stone – ***An analytick treatise of conick sections, and their use for resolving of equations in determinate and indeterminate problems*** – Londres, 1723.

[15] MONTUCLA, J. F. – ***Histoire des mathématiques***, 4 volumes, editado em 1802 – Paris, 1752.

APÊNDICE – A

RESUMO DAS DEFINIÇÕES E PROPOSIÇÕES DO TEXTO DE PHILIPPE DE LA HIRE DE 1679

PARÁBOLA

- ***Lugar geométrico dos pontos eqüidistantes de um ponto dado (F) e uma rata dada (AD)***

Definição 1 - O conjunto de pontos P eqüidistantes do ponto F e da reta AD formam uma curva denominada ***"Parábola".***

Definição 2 - O ponto F **é** chamado ***"Foco"*** da parábola.

Definição 3 - A reta DFO é denominada ***"Eixo"*** da parábola.

Definição 4 - O segmento PO desenhado através de um ponto qualquer P da parábola e perpendicular ao eixo de simetria é chamado ***"Ordenada"*** do ponto P da parábola.

Definição 5 - Toda semi-reta que tem origem num ponto qualquer P da parábola, sendo paralela ao eixo de simetria e que não cruza AD é denominada ***"Diâmetro"*** do ponto P.

Definição 6 - Uma reta que encontra a parábola em apenas um único ponto e que passa exclusivamente pelo seu exterior é chamada reta ***"Tangente"*** à parábola no referido ponto.

- **PROPOSIÇÃO 1** – $\mathbf{PO^2 = 2FD \cdot TO}$.

Corolário 1 - O segmento ***2FD*** é invariante, qualquer que seja o ponto ***P*** da parábola.

Definição 7 - O segmento **2FD** é denominado ***"Parâmetro da parábola".***

Corolário 2 – **FT =** ¼ do parâmetro.

Corolário 3 - $\frac{PO^2}{P'O'^2} = \frac{TO}{TO'} \rightarrow \frac{x^2}{x'^2} = \frac{y}{y'} = 2FD$

- **PROPOSIÇÃO 2** - A reta ***TS*** // à diretriz ***AD*** e que passa pelo vértice ***T*** é tangente à parábola.
- **PROPOSIÇÃO 3** - Qualquer diâmetro encontra a parábola em um único ponto ***P***.
- **PROPOSIÇÃO 4** - A mediatriz ***PE*** do segmento ***FA*** é tangente à parábola em ***P***.

Corolário - Os ângulos ***FGE***, ***FAD***, ***APE*** e ***FPE*** são iguais. Os triângulos ***FAP*** e ***PFG*** são isósceles.

- **PROPOSIÇÃO 5** - A reta tangente que passa pelo ponto ***P*** da parábola é única.

Corolário - Uma tangente sempre cruza o eixo, todos os diâmetros e todas as outras tangentes.

- **PROPOSIÇÃO 6** - Dado um ângulo que não exceda um reto, é sempre possível achar uma tangente por **P** que forme com o eixo um ângulo **PGF** menor que o primeiro.

- **PROPOSIÇÃO 7** - O segmento ***TG*** é igual ao segmento ***TO*** do ponto ***P***.

Corolário – Os segmentos ***PS*** e ***PI*** são congruentes.

- **PROPOSIÇÃO 8** - O ângulo ***IPL*** é congruente ao ângulo ***FPG***.

Corolário - O ângulo ***LPF*** é congruente ao ***GPI***.

- **PROPOSIÇÃO 9** – Sendo ***PM*** a normal à tangente, o segmento ***OM*** é ½ do parâmetro do eixo.

- **PROPOSIÇÃO 10** - O triângulo ***TAH*** é congruente ao triângulo ***BAP***.

Corolário – São equivalentes ***TDB*** e o paralelogramo ***TDPH***, assim como o retângulo ***TOPB*** e ***POH***.

- **PROPOSIÇÃO 11** – São equivalentes o triângulo ***EGM*** e o retângulo ***GTBF*** **(egM** e **TgfB)**.

- **PROPOSIÇÃO 12** - As áreas dos triângulos ***EFI*** e **efI** são iguais a do paralelogramo ***PIMH***.

- **PROPOSIÇÃO 13** – *Se pelo ponto **E** da parábola for traçada uma reta paralela à **PH**, então esta reta encontrará a parábola em outro ponto **e**, com **EI = Ie**.*

Definição 8 - O segmento EI é chamado ***"Ordenada de um diâmetro PI"***.

- **PROPOSIÇÃO 14** - Os quadrados das ordenadas como ***EI*** e ***KY*** de um mesmo diâmetro como ***PI***, estão um para o outro assim como as partes deste diâmetro ***PI*** e ***PK***, respectivamente.

Definição 9 - O ***"Parâmetro p de um diâmetro"*** é **igual a** EI^2 / PI. **Corolário** – $EI^2 = p \cdot PI$.

- **PROPOSIÇÃO 15** – ***P*** é o ponto médio do segmento ***IQ***, ou seja, ***PQ*** = ***PI***.

- **PROPOSIÇÃO 16** - O parâmetro do diâmetro ***PI*** excede o parâmetro do eixo ***TF*** em $4 \cdot TO$.

Corolário - Quanto mais distante estiver um diâmetro do eixo maior será o seu parâmetro.

- **PROPOSIÇÃO 17** - O segmento ***PF*** é ¼ do parâmetro do diâmetro ***PI***.

ELIPSE

- **ELIPSE –** ***Lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos dados (F e D) é constante e igual a IT.***

Definição 1 – A curva IMPTN é denominada **"Elipse"**.

Definição 2 – O ponto C é o **"Centro"** da elipse.

Definição 3 – O segmento IT é o **"Grande Eixo"**.

Definição 4 – Os pontos F e D são chamados **"Focos"**.

Definição 5 – O segmento NCM perpendicular a IT limitado pela elipse é o **"Pequeno Eixo"**.

Definição 6 – O segmento perpendicular PO que une a elipse ao eixo é a **"Ordenada"** do Eixo.

Definição 7 – O segmento que passa por C, limitado pela elipse, é chamado **"Diâmetro"**.

Definição 8 – Uma reta que cruza a elipse em apenas um ponto é a chamada reta **"Tangente"**.

LEMA 1 – Num triângulo retângulo FOP, $PH\ (FP + FO) \cdot PM\ (FP - FO) = PO^2$.

- **PROPOSIÇÃO 1** – Se PO é uma ordenada de IT, então: $\mathbf{PO^2 / IO \cdot OT = IF \cdot FT / CT^2}$.
- **PROPOSIÇÃO 2** – $IF \cdot FT = CM^2$.
- **PROPOSIÇÃO 3** – Sendo PO uma ordenada de IT, então $\mathbf{PO^2 / IO \cdot OT = NM^2 / IT^2}$.
- **PROPOSIÇÃO 4** – Se PQ é uma ordenada de NM, logo $\mathbf{PQ^2 / NQ \cdot QM = IT^2 / NM^2}$.

Definição 9 – ***"Parâmetro do Eixo"*** é a razão entre o quadrado do outro eixo e este eixo.

Definição 10 – A ***"Figura do Eixo"*** é um retângulo cujos lados são o próprio eixo e seu parâmetro.

Corolário - O quadrado de um dos eixos é igual à *figura* do outro eixo.

- **PROPOSIÇÃO 5** – O quadrado de lado PO é equivalente ao retângulo TO e OV.
- **PROPOSIÇÃO 6** – Um diâmetro PR qualquer é dividido ao meio pelo centro C.
- **PROPOSIÇÃO 7** – A reta perpendicular ao eixo maior por I ou T é tangente à elipse.
- **PROPOSIÇÃO 8** – Sendo $DE = EA$, a reta PE tangenciará a elipse em P.
- **PROPOSIÇÃO 9** – Por um ponto P de uma elipse só existe uma única reta tangente.

• **PROPOSIÇÃO 10** – O ângulo ***FPJ*** é igual ao ***DPH***.

Corolário - O ângulo ***HPF*** = ***JPD***.

• **PROPOSIÇÃO 11** – Se a tangente ***PE*** cruza o eixo ***IT*** em ***H***: ***CO* : *CT* :: *CT* :*CH***.

Corolário 1 – Sendo ***FK = KA***, ***KA*** é a média geométrica entre ***KP*** e ***KV***.

Corolário 2 – Os pontos ***I, O, T e H*** formam uma divisão harmônica: $IO \cdot HT = OT \cdot IH$.

• **PROPOSIÇÃO 12** – Se a tangente ***PE*** cruza o eixo ***NM*** em ***V***: ***CQ : CM :: CM : CV***.

• **PROPOSIÇÃO 13** – Os triângulos ***PAB*** e ***TAH*** são equivalentes.

Corolário 1 – São equivalentes os polígonos ***PDT e POT, CTB e CPH, POTB e PDTH, POH e DTB***.

Corolário 2 – São equivalentes os polígonos ***CIb*** e ***CPH***, ***Pab*** e ***IaH*** e ***Rh*** é paralela à ***PH***.

LEMA 2 – O retângulo ***IOT*** **:** retângulo ***IGT*** **::** trapézio ***POTB*** **:** trapézio ***FGTB***.

• **PROPOSIÇÃO 14** – O triângulo ***EGM*** é equivalente ao quadrilátero ***GTBF***.

• **PROPOSIÇÃO 15** – O triângulo ***ELF*** é equivalente ao quadrilátero ***LPHM***.

• **PROPOSIÇÃO 16** – O diâmetro ***RP*** divide igualmente o segmento ***Ee (// PH)*** em ***L***.

• **PROPOSIÇÃO 17** – Seja ***VCS // PH***, então $VS^2 : RP^2 :: EL^2 : RL \cdot LP$.

• **PROPOSIÇÃO 18** – Se ***Ee*** // ***RP***, então ***EO = eO*** e $RP^2 : VS^2 :: EO^2$ **:** retângulo ***VOS***.

Corolário – A reta ***SX***, paralela à ***EO,*** tangencia a elipse no ponto ***S.***

Definição 11 – Os diâmetros RP e VS são chamados ***"Diâmetros Conjugados"*** um do outro.

Definição 12 – O segmento EL (// VS) é uma ***"Ordenada"*** de *RP* e EO é uma ***"Ordenada"*** de VS.

Definição 13 – ***"O Parâmetro PM do diâmetro RP"*** é igual a VS^2 / RP.

Definição 14 – O retângulo de lados o diâmetro RP e seu parâmetro PM é a ***"Figura de RP".***

• **PROPOSIÇÃO 19** – O quadrado de lado ***EL*** é equivalente ao retângulo ***PN***.

• **PROPOSIÇÃO 20** – O retângulo ***HRI*** **:** retângulo ***FRG*** **::** $RP^2 : VS^2$.

HIPÉRBOLE

- **HIPÉRBOLE** – ***Lugar geométrico dos pontos P cuja diferença das distâncias a dois pontos dados (F e D) é constante e igual a IT.***

Definição 1 – A curva que passa por pPT e P'IP'' é denominada ***"Hipérbole"***.

Definição 2 – O ponto C é o ***"Centro"*** da hipérbole.

Definição 3 – O segmento IT é o ***"Eixo Determinado"***.

Definição 4 – A reta CM perpendicular a IT por C é chamada ***"Eixo Indeterminado"***.

Definição 5 – Os pontos F e D são os ***"Focos"***.

Definição 6 – O segmento PO $\perp$ IT é a ***"Ordenada"*** de IT**.**

Definição 7 – As retas que passam pelo centro C são chamadas ***"Diâmetros"***. As que encontram a hipérbole (PP'') são os ***"Determinados"*** e os que não (CM), são os ***"Indeterminados"***.

Definição 8 – Uma reta de pontos exteriores exceto um, que cruza a hipérbole, é a reta **"Tangente"**.

- **PROPOSIÇÃO 1** – **$PO^2 / IO \cdot OT = IF \cdot FT / CT^2$. Corolário: $PO^2 / IO \cdot OT = PO'^2 / IO' \cdot O'T$**.
- **PROPOSIÇÃO 2** – O A reta ***PP'*** (// ao eixo ***IT***) cruza o eixo ***CM***, então ***PM = MP'***.

Definição 9 – O segmento TV = 4 · ID · DT / IT é chamado o ***"Parâmetro"*** do eixo IT.

Definição 10 – O retângulo IV de lados IT e TV é chamado de ***"Figura"*** do eixo IT.

Corolário – A *Figura* ***IV*** é igual a **4** vezes o retângulo ***ID·DT***.

- **PROPOSIÇÃO 3 –** ***$PO^2 = OT \cdot TX$***.
- **PROPOSIÇÃO 4 –** Qualquer diâmetro, como ***Pp'***, é dividido ao meio em ***C***.
- **PROPOSIÇÃO 5 –** A reta perpendicular ao eixo **IT** por **T** é tangente à hipérbole.
- **PROPOSIÇÃO 6 –** A reta mediatriz ao segmento **DA** é tangente à hipérbole em **P.**
- **PROPOSIÇÃO 7 –** Os ângulos ***FPE*** e ***DPE*** são congruentes.
- **PROPOSIÇÃO 8 –** Existe apenas uma reta ***PH*** que tangenciará a hipérbole em ***P***.

Definição 11 – Seja aT = TA $\perp$ a IT e $AT^2 = ID \cdot DT$. As retas CA e Ca são as ***"Assíntotas"***.

Corolário – As assíntotas de um ramo da hipérbole são também assíntotas do outro ramo.

- **PROPOSIÇÃO 9 –** O retângulo ***GPB*** é equivalente ao quadrado de lado ***AT***.

- **PROPOSIÇÃO 10 –** O retângulo ***gPb*** é equivalente ao quadrado de lado ***CT***.
- **PROPOSIÇÃO 11 –** A hipérbole e suas assíntotas se aproximam continuamente quanto mais forem prolongadas e não se encontrarão, pois ***PB*** pode ser feita menor que uma quantidade dada.
- **PROPOSIÇÃO 12 –** Se ***PH // AB*** e ***PF // AD***, então $PH \cdot PF = AD \cdot AB$.
- **PROPOSIÇÃO 13 –** Os segmentos de uma mesma reta ***PF*** e ***AD*** formados entre as assíntotas e a hipérbole são congruentes.
- **PROPOSIÇÃO 14 –** A tangente ***FH*** por **P** cruza as assíntotas em ***F*** e ***H*** e $FP = PH$.
- **PROPOSIÇÃO 15 –** Sendo **FH // BD // B'D'**, então $PF \cdot PH = AB \cdot AD = A'B'^2$.
- **PROPOSIÇÃO 16 –** O retângulo de lados ***PF*** e ***PH*** é equivalente a AC^2.
- **PROPOSIÇÃO 17 –** Os paralelogramos ***BADC*** e ***FPHC*** são equivalentes.
- **PROPOSIÇÃO 18 –** Os triângulos ***GCE*** e ***KCI*** são equivalentes.
- **PROPOSIÇÃO 19 –** Se ***DG // KM // tangente AB***, então $LH = HI$ e $PN = NE$.
- **PROPOSIÇÃO 20 –** O diâmetro ***CT*** divide ao meio os segmentos ***PV*** em ***R*** e ***qs*** em ***r***.

Definição 12 – Os diâmetros OT e XR são chamados ***"Conjugados"***.

Definição 13 – O segmento EN é a **"Ordenada do diâmetro OT"** e VR é a **"Ordenada de XC".**

- **PROPOSIÇÃO 21 –** Sendo ***EN*** uma ordenada de **OT*:*** $EN^2 : ON \cdot NT :: AT^2 : CT^2$.

Corolário – EN^2 **:** retângulo $ON \cdot TN :: IH^2$ **:** retângulo $OH \cdot TH$.

Definição 14 – O segmento PT = aTA^2 / OT é chamado o ***"Parâmetro"*** do diâmetro OT.

Definição 15 – O retângulo de lados OT e seu parâmetro PT é a ***"Figura"*** do diâmetro OT.

- **PROPOSIÇÃO 22 –** O quadrado de lado ***EN*** é equivalente ao retângulo $TN \cdot NM$.

Corolário – Se o diâmetro ***OT*** é igual ao seu parâmetro ***PT***, então as assíntotas são perpendiculares e todos os diâmetros e os respectivos parâmetros serão iguais.

- **PROPOSIÇÃO 23 –** O retângulo $HR \cdot RI$: retângulo $FR \,.\, RG :: PT : OT$.
- **PROPOSIÇÃO 24 – CH : CT :: CT : CO.** **Corolário –** $IO : OT :: IH : HT$.

APÊNDICE – B

RESUMO DAS PROPOSIÇÕES DO F. I. C.

F. I. C.	Descrição e ferramentas usadas na demonstração
	ELIPSE
613	**5 definições: Elipse, Raios Vetores, Distância Focal, Círculo Diretor e Principal.**
614	**Construção pelo modo contínuo. 613**
615	**Construção por pontos mais 4 observações. 613**
616	**Número de interseções de uma reta com a elipse: curva convexa.** **Uma certa construção, 613 e a proposição 36.**
617	**Ponto exterior e ponto interior à elipse** **Uma certa construção, 613 e a definição prévia de curva convexa.**
618	**Posições de um ponto em relação a uma elipse. 617**
619	**Duas simetrias axiais e uma central.** **Paralelismo, congruência de polígonos, 613 e propriedade do paralelogramo.**
620	**Definição de excentricidade, número de vértices, achar focos dados *a* e *b* e relação Pitagórica entre *a, b* e *c*.**
621	**Congruência de ângulos entre a tangente e raios vetores.** **Uma construção, ponto interior, 613, Congruência de triângulos e limite.**
622	**Pontos exteriores da tangente e normal como bissetriz** **613, 621 e desigualdade triangular, ângulos complementares e O. P. V.**
623	**Simetrias e perpendicularidade. 621 e 622.**
624	**Obtenção do círculo diretor.** **Construção da 621 (limite) e definição de elipse**
625	**Nova definição de elipse e possíveis interseções entre 2 Círculos. Novo traçado da elipse por pontos. 624**
626	**Obtenção do círculo principal. Semelhança de triângulos e 624**
627	**Problema de traçar uma tangente por um ponto na curva. 621**
628	**Problema de traçar uma normal por um ponto na curva. 622**
629	**Problema de traçar as tangentes por um ponto fora da curva. 625 e 623**
630	**Escólio sobre a quantidade possível de tangentes. 625 e 629**
631	**Problema de traçar uma tangente paralela a uma reta dada. Paralelismo, 623**
632	**O diâmetro que une tangentes paralelas passa pelo centro.** **Construção da 629, triângulos isósceles e propriedade do paralelogramo.**
633	**Ângulos entre duas tangentes e os dois Focos. 613, 623 e congruência de triângulos.**
634	**Projeção do círculo sobre um plano.** **Paralelismo, 613 (definição de elipse), áreas e semelhança de triângulos.**
635	**Razão entre as ordenadas do círculo diretor e elipse. 634 e semelhança.**
636	**Escólios da razão b / a. Semelhança de triângulos e 635.**
637	**Área da elipse. 634, 635 e limite.**
638	**Corolários. 637.**
639	**Interseção de reta com elipse dados *a* e *b*. Paralelismo e semelhança.**
640	**Interseção de reta com a elipse dados *a* e os Focos. "Potencia de Ponto"**
641	**Compasso elíptico. Paralelismo e semelhança de triângulos**

F. I. C.	HIPÉRBOLE
642	5 definições: Elipse, Raios Vetores, Distância Focal, Círculo Diretor e Principal.
643	Construção pelo modo contínuo. 642
644	Construção por pontos. 642
645	4 observações sobre a proposição. 642 e 644
646	Número de interseções de uma reta com a hipérbole: curva convexa.
647	Ponto exterior e ponto interior à hipérbole Uma certa construção, 642 e a desigualdade triangular.
648	Posições de um ponto em relação a uma hipérbole. 647
649	Duas simetrias axiais e uma central Paralelismo, 642, congruência de polígonos e propriedade do paralelogramo.
650	Definição de excentricidade e de eixos, achar b dados *a* e *c* e relação Pitagórica entre *a, b* e *c*. Paralelismo.
651	Número de vértices e hipérbole eqüilátera
652	Congruência de ângulos entre a tangente e raios vetores. Uma construção, 642, ponto interior, congruência de triângulos e limite.
653	Pontos exteriores da tangente e normal como bissetriz 642, 652 e desigualdade triangular, ângulos complementares e O. P. V.
654	Simetrias e perpendicularidade. 652 e 653.
655	Obtenção do círculo diretor. 642, construção da 652 (limite) e definição de hipérbole.
656	Nova definição de hipérbole e possíveis interseções entre 2 círculos. Novo traçado da hipérbole por pontos. 655.
657	Definição de assíntota.
658	Número de assíntotas e sua interseção. Paralelismo, construção, 654 e 657.
659	Os eixos são bissetrizes das assíntotas. 658.
660	Associação entre *a, b* e a assíntota. Paralelismo, 650 e 658.
661	Distância entre o foco e a assíntota e sua possível perpendicularidade. 651 e 660.
662	Obtenção do círculo principal. Semelhança de triângulos e 655.
663	Escólios. 658, 661 e 662.
664	Problema de traçar uma tangente por um ponto na curva. 652.
665	Problema de traçar as tangentes por um ponto fora da curva. 654 e 656.
666	Quantidade possível de tangentes. 656 e 665.
667	Tangentes por ponto fora: ramos iguais ou diferentes da hipérbole. 664.
668	Problema de traçar uma tangente paralela a uma reta dada. Paralelismo, 654.
669	Condição para a construção anterior. 664.
670	O diâmetro que une tangentes paralelas passa pelo centro. Paralelismo, construção da 665, triâng. isósceles e prop. do paralelogramo.
671	Área do segmento hiperbólico.
F. I. C.	**PARÁBOLA**
672	4 definições: Parábola, Foco, Diretriz e Parâmetro.
673	Construção pelo modo contínuo. 672.
674	Construção por pontos. 672, paralelismo.
675	Observações. 672 e 674.
676	Observações. 673.

677	**Ponto exterior e ponto interior à elipse** **Uma certa construção e a desigualdade triangular.**
678	**Posições de um ponto em relação a uma parábola. 672 e 677**
679	**Simetria axial.** **Paralelismo, congruência de triângulos, 608, 672 e 678.**
680	**Número de vértices e centro. 679**
681	**Parábola como limite da elipse. Limite**
682	**Parábola é uma curva convexa. 681**
683	**Congruência de ângulos entre a tangente e raios vetores.** **Uma construção, 672, ponto interior, congruência de triângulos e limite.**
684	**Pontos exteriores da tangente e simetria** **672, 683, paralelismo, desig. triangular, âng. complementares e O. P. V.**
685	**Simetria, normal como bissetriz e perpendicularidade. Paralelismo, 683 e 684.**
686	**Obtenção da reta diretriz.** **Paralelismo, 672, 684 e 685**
687	**Possíveis interseções entre um círculo e uma reta. Novo traçado da parábola por pontos.** **Paralelismo, 685 e 693**
688	**Obtenção da tangente pelo vértice. Semelhança de triângulos, 685 e 686.**
689	**2 definições: Subtangente e Subnormal.**
690	**Propriedades da subtangente e subnormal. Paralelismo, 685 e 672**
691	**Equação da parábola. Propriedade métrica do triângulo retângulo e 690**
692	**Relação entre ordenadas e abscissas. 691**
693	**Problema de traçar uma tangente por um ponto na curva. 683, 684, 685 e 690**
694	**Problema de traçar as tangentes por um ponto fora da curva. 684**
695	**Problema de traçar uma tangente paralela a uma reta dada. Paralelismo, 684**
696	**Propriedade entre duas tangentes e uma corda.** **Uma certa construção, 672, 684 e o Teorema de Tales**
697	**Projeções das tangentes sobre a diretriz e paralelismo. Paralelismo e 696**
698	**Área da parábola. 690, 696, áreas e limite**

APÊNDICE – C

ANALOGIA ENTRE AS PROPOSIÇÕES DO F. I. C.

Proposição	Elipse	Hipérbole	Parábola
Definições iniciais	613	642	672
Traçado pelo modo contínuo e escólio	614	643	673 e 676
Traçado por pontos e observações	615	644 e 645	674 e 675
Curva convexa	616	646	682
Ponto interior e exterior	617 e 618	647 e 648	677 e 678
Eixos e centro de simetria	619	649	679 e 680
Excentricidade, vértices e relação Pitagórica	620	650 e 651	680
Ângulos entre tangente e raios vetores.	621	652	683
Pontos exteriores da tangente e sua normal	622	653	684 e 685
Simetrias e perpendicularidade	623	654	684 e 685
Círculo diretor	624	655	686
Novo traçado por pontos	625	656	687
Círculo principal	626	662	688
Traçado da tangente: ponto na curva.	627	664	693
Traçado da normal: ponto na curva.	628	Não fez	693
Traçado das tangentes: ponto fora da curva.	629	665 e 667	694
Quantidade possível de tangentes.	630	666	Não fez
Traçado das tangentes paralelas a uma reta.	631	668 e 669	695
Escólios das tangentes paralelas	632	670	Não fez
Ângulos entre duas tangentes e os dois focos.	633	Não fez	Não fez
Projeção do círculo sobre um plano.	634	Não fez	Não fez
Razão entre as ordenadas.	635	Não fez	Não fez
Escólios da razão b / a.	636	Não fez	Não fez
Área	637e 638	671	696, 697 e 698
Interseção de reta com a cônica	639 e 640	Não fez	Não fez
Novo traçado pelo modo contínuo	641	Não fez	Não fez
Assíntotas da hipérbole	657, 658, 659, 660, 661, 663		
Projeções sobre o eixo e a Equação	689, 690, 691 e 692		

APÊNDICE – D

Erros observados nos textos utilizados como fontes para a tradução para o Português [6] e [7]

a. Erros existentes em de La Hire que Robinson corrige:

- Ponto ***E*** em vez de ***F*** – página ***52*** em La Hire e ***43*** em Robinson.
- Ponto ***E*** em vez de ***F*** – página ***91*** em La Hire e ***72*** em Robinson.
- Troca na ordem na subtração – página ***101*** em La Hire e ***78*** em Robinson.
- Pontos **FH** e **BD** juntos – página ***101*** em La Hire e ***78*** em Robinson.

b. Erros existentes em ambos:

- Letra ***P*** em vez de ***F*** – página ***44*** em La Hire e ***38*** em Robinson
- Letra ***D*** em vez de ***B*** – página ***92*** em La Hire e ***72*** em Robinson
- Uso inadequado do termo ordenada – página **130** em La Hire e **98** em Robinson
- Proposição ***14*** em vez do corolário ***3*** da proposição ***1***, pois ***T*** não é vértice necessariamente – página ***166*** em La Hire e ***124*** em Robinson.
- Pontos ***B*** *e* ***G*** em vez de ***P*** *e* ***C*** – Página ***137*** em La Hire e ***104*** em Robinson

c. Erros existentes apenas na tradução de Robinson:

- ***S*** não pertence à reta tangente – Página ***11*** em La Hire e ***9*** em Robinson
- *Contract* em vez de *contact* – Página ***16*** em La Hire e ***13*** em Robinson
- O ponto ***F*** não pertence à parábola – Página ? em La Hire e ***27*** em Robinson
- Referência à figura errada – Página ***79*** em La Hire e ***63*** em Robinson
- Ponto ***f*** em vez de ***e*** e referência à figura errada Página ***83*** e ***84*** em La Hire e ***66*** em Robinson
- Ponto ***L*** em vez de ***E*** – Página ***84*** em La Hire e ***66*** em Robinson
- Ponto ***D*** em vez de ***O*** – Página ***91*** em La Hire e ***72*** em Robinson
- Segmento ***TO*** em vez de ***IO*** – Página ***100*** em La Hire e ***78*** em Robinson
- Ponto ***T*** em vez do ponto ***P*** e o ponto ***E*** em vez do ponto ***F*** – Página ***114*** em La Hire e ***88*** em Robinson
- Ponto ***H*** em vez de ***A*** – Página ***127*** em La Hire e ***96*** em Robinson
- Ponto ***p*** em vez de ***P*** – Página ***131*** em La Hire e ***99*** em Robinson
- Ponto ***P*** em vez de ***O*** – Página ***140*** em La Hire e ***106*** em Robinson
- Ponto ***A*** em vez de ***T*** – Página ***144*** em La Hire e ***109*** em Robinson
- Letra ***C*** intrusa – Página ***155*** em La Hire e ***116*** em Robinson
- *Três* em vez de *vários* – Página ***166*** em La Hire e ***124*** em Robinson

APÊNDICE – E

Obras de Philippe de La Hire

- "Nouvelle Méthode em Géométrie pour les Sections des Superfícies Coniques et Cylindriques qui ont pour Bases des Circles, ou des Paraboles, des Elipses, & des Hyperboles" – Paris, 1673.
- "Nouveaux Éléments des Sections Coniques, Les Lieux Géométriques, La Construction ou Effectuation des Équations" – Paris, 1679.
- "La Gnomonique ou l'Art de faire des Cadrans au Soleil" – Paris, 1682.
- "Sectiones Conicae in Novem Libros Distributae" – Tradução de Jean Peyroux – "Grand Livre des Sections Coniques" – Paris, 1685.
- "École des Arpenteurs" ou "Escola de Agrimensores" – 1689.
- "Tables du Soleil et de la Lune" – 1689.
- "Memoires sur les Épicicloides" – Paris, 1692.
- Tratado sobre os Efeitos do Gelo e do Frio – 1692.
- "Traité de Mecanique: ou l'on explique tout ce qui est nécessaire dans lê pratique des arts, & les propriétés des corps pesant lesquelles ont um plus grand usage dans la physique" – 1692.
- Tratado sobre Diferenças entre os Sons da Corda de uma Trombeta Marinha – 1693.
- Tratado sobre os Diferentes Acidentes da Visão – 1693.
- "Traité de Roulettes". ?
- "Tabula Astronomica Ludovici Magni Jussu et Munificentia Exaratae" – Paris, 1702.
- "Planisphère Celeste" – 1705.
- "Memoires sur les Conchoïdes" – Paris, 1708.

Fontes: Fontenelle [12], Michel Chasles [4], Wikipédia.

APÊNDICE – F

Texto original do tributo a Philippe de La Hire feito por Bernard de Fontenelle [12]

Philippe de La Hire nâquit à Paris le 18. Mars 1640. Son Pere étoit Peintre ordinaire du Roy , & Professeur en son Academie de Peinture & de Sculpture. Il étoit parvenu à ces Titres , & ce qui est encore plus, à une grande reputation, sans avoir jamais eû d'autre maître que son genie naturel.

Le Fils qui paroissoit aussi em avoir beaucoup, fut destine à la même profession. Il apprit parfaitement le Dessein, ensuite la Perspective, si nécessaire aux Peintres, & cependant assés negligée; & quoique les Cadrans n'appartiennent guére à la Peinture, il étudia aussi la Gnomonique, peut-être parce que c'est une espece de Perspective. Le plus leger prétexte lui suffisoit pour étendre sés connoissances Cet assemblage de Cercles qui forment la Sphere, & s'imprimoient dans son esprit avec une facilité surprenante, il sembloit que selon le Sisteme de Platon, ce ne fut qu'une reminiscence de ce que son Ame avoit sçû autrefois. Il étoit aisé de predire que ce jeune Peintre se changeroit en um grand Geometre.

Il perdit son Pere à l'âge 17. ans. Il tomba dans des infirmités continuelles, sur tout dans des palpitations de coeur très violentes. Il crut que le voyage d'Italie, qui lui étoit presque nécessaire pour son Art, pourroit aussi être utile à sa santé, & il l'entrepit en 1660.

Dans ce Pays où la sçavante Antiquité a laisse plus de restes qu'en aucun autre, & où ces précieux restes ont fait renaître plus d'excellens ouvrages modernes, il ne s'attacha d'abord qu'à se remplir les yeux de ces differens objets, qui jettoient dans son imagination des semences du Beau. Mais à Venise, où la vie est fort oisive; à moins qu'on n'y soit plongé dans des plaisirs qui n'étoient pas pour lui, & en ce cas là même encore assez oisive, il s'appliqua fortement à la Geometrie, & principalement aux Sections Coniques d'Apollonius. La Geometrie commençoit à prévaloir chez lui, quoique revêtue de cette forme épineuse & effrayante qu'elle a souverainement dans les Livres des Anciens. S'il n'y avoit presentement dautres Maîtres qu'Apollonius & Archimede, la délicatesse de la plûpart des Modernes ne s'en accommoderoit quere.

La vie retirée qu'on mene en Italie étoit fort du goût de M. de la Hire. Son caractere sage & serieux l'attachoit à un pays où les dehors tout au moins sont serieux & sages, &où l'air de folie n'est point un merite qu'on affecte. Il aimoit les manieres circonspectes & mesurées des Italiens, qui a la verité leur retranchent les agrémens de la familiarité Françoise, mais aussi leur en épargnent les périls. Il semble que le plus sur pour les hommes seroit de s'approcher peu les uns les autres, & de se caindre mutuellement. Enfin il auroit volontiers prolongé son séjour en Italie, mais sa Mere, dont il étoit fort aimé, le rappelloit avec trop d'instance. Il revint au bout de quatre ans, bien résolu d'y retourner, ce qui cependant n'a pas eu d'execution. Du moins quand il parloit de l'Italie, c'étoit toujours avec un plaisir dont les Italiens eussent pû tirer vanité, d'autant plus que l'eloge des moeurs étrangeres est assez rare dans la bouche des François.

Etant de retour ici, il continua ses études géometriques, toûjours plus profondes & plus suivies. M. Desarques qui étoit du petit nombre des Mathematiciens de Paris, & M. Bosse fameux Graveur, avoient fait une premiere partie d'un Traité de la Coupe des Pierres, matiere alors toute neuve; mais quand ils voulurent travailler à la seconde partie, ils sentirent que leur Geometrie s'embarrassoit, & ils s'adresserent à M. de la Hire, qui dans leur besoin les secourut de sept propositions tirées de la Theorie des Coniques. M. Bosse les fit imprimer en 1672, dans une Brochure in-folio. Ce fut par-là que M. de la Hire avoiia au Public qu'il étoit Geometre.

Il soutint dignement ce nom par quelques ouvrages qu'íl donna ensuite en 1673. & 1676. Ils rouloient encore sur les Coniques, excepté un petit Traité de la Cycloïde, Courbe qui étoit à la mode, & qui le meritoit encore plus qu'on ne croyoit en ce temps-là.

Enfin la réputation de M. de la Hire fut en peu temps au point de le faire souhaiter dans l'Academie des Sciences, & il y entra en 1678.

L'année suivante il publia en un volume in-12 trois Traités qui ont pour titre: le premieur, *Nouveaux Elements des sections Coniques*; le second, *Les Lieux Géometriques*; le trisiéme, *La construction ou effction des Equations*. Les deux derniers principalement étoient faits pour déveloper les misteres de la Geometrie de Descartes. Ce grand Auteur avoit laissé beaucoup à deviner; beaucoup à éclaircir, & selon le caractere des Livres originaux, son Livre étoit propre à en produire plusieurs autres, encore assez originaux. Tel Tel fut celui de M. de la Hire. Les principes en étoient si bien posés, malgré la difficulté naturelle de ces matieres-là assez connuë des Geometres, que quand plus de 30. ans aprés il en fut question dans l'Acadenie à l'occasion de quelques Ecrits de M. Rolle, M.de la Hire n'eut besoin que de consulter son ancien ouvrage & d'en reprendre le fil. Il n'y auroit rien là de remarquable, s'il ne s'agissoit que de la verité des principes, mais il s'agit de leur universalité & de la maniere de leur application, ce qui est susceptible d'une infinité de degrés, de differences & de bizarreries apparentes dans la Pratique.

M. Colbert avoit couçu le dessein d'une Carte generale du Royaume plus exacte que toutes les précedentes. D'habiles Ingenieurs avoient dejá travaillé à celle des Côtes, plus importantes que le reste à cause des Ports de Mer; ces ouvrages n'avoient été faits que parties détachées qu'il auroit fallu lier ensemble, mais cela ne se pouvoit guere executer que par des observations celestes, qui demandoient une certaine habitude sçavante. Ce fut pour ce tarvail que Messieurs Picard & de la Hire nommés par le Roi allerent en Bretagne en 1679. & l'année suivante en Guyennne. Ils firent une correction très-importante à la Côte de Gascogne, en la rendant droite de courbe qu'elle étoit auparavant, & en la faisant rentrer dans les terres; de sorte que le Roi eut sujet de dire en plaisantant, que leur voyage ne lui avoit causé que de la perte. C'étoit une perte qui enrichissoit la Geographie, assûroit la Navigation.

En 1681. M. de la Hire eut ordre de se séparer de M. Picard, & d'aller déterminer la position de Calais & de Dunxerque. Il mesura aussi la largeur du Pas de Callais depuis la pointe du Bastion du Risban qui est du côté de la Mer en allant vers Boulogne, jusqu'au Château de Douvre en Angleterre, & la la trouva de 21360 toises. Il avoit mesuré actuellement sur le bord de la Mer une Base de 2500 toises, qui fut le fondement de seus Triângulos. Ces sortes d'operations ne demandent pas une fine Theorie, mais une grande adresse, & une grande sureté à operer, quantité d'attentions délicates, & de précautions ingénieuses, & enfin leur grande utilité récompense le peu de brillant geometrique. Le public n'est jamais plus obligé aux grands Geometres que quand ils descedent à ces pratiques en sa faveur; ils lui sacrifient le plaisir & la gloire des hautes speculations.

Pour finir la Carte Generale, M. de la Hire alla à la Côte de Provence en 1682. Dans tous ces voyages il ne se bornoit pas aux observations qui étoient son principal objet, il en faisoit encore sur la variation de l'Aiguille aimantée, sur les réfractions, sur les hauteurs des Montagnes par le Barometre. Il ne suivoit pas seulement les ordres du Roy, mais aussi son goût, & son envie de sçavoir.

Dans la même année 1682 Il donna un Traité de Gnomonique, qu'il réimprima en 1698. Fort augmenté & fort embelli. Cette science n'étoit presque qu'une pratique, abandonée le plus souvent à des Ouvriers peu intelligents & grossiers, dont ont ne reconnoît point les fautes, car chacun se contente de son Cadran, & ne le compare à rien. M. de la Hire éclaira la Gnomonique par des principes & des démonstrations, & la réduisit aux opérations les plus sûres & les plus aisées; & pour ne pas trop changer son ancien état, il eut soin de faire imprimer les Démonstrations dans un caractère différent de celui des Opérations, & par-là donna aux simples Ouvriers la commodité de fauter ce qui ne les accomodoit pas; tant il faut que la Science ait de ménagemens pour l'Ignorance qui est son Ainée, & qu'elle trouve toûjours en possession.

Nous avons déja parlé bien des fois de la fameuse Meridienne commencée par M. Picard en 1669. M. de la Hire la continua du côté Nord de Paris en 1683 tandis que M. Cassini la poussoit du côté du Sud, mais ni l'un ni l'autre ne finirent alors leur Ouvrage. M. Colbert étant mort en 1683 cette grande entreprise fut interrompuë, & M. de Louvois appliqua les Géometres de l'Academie à de grands Nivellements nécessaires pour les Aqueducs & les conduites d'eaux que vouloit faire le feu Roi. M. de la Hire en 1684. fit le nivellement de la petite riviere d'Eure qui passe à Chartres, & il trouva qu'en la prenant à 10. lieuës environ au de-là de Chartres, elle étoit de 81. pied plus haute que le réservoir de la Grotte de Versailles. Cette nouvelle fut très-agréablement reçûë & du Ministre & du Roi; on voyoit déja les eaux d'Eure arriver à Versailles de 25. lieuës; mais M. de la Hire représenta qu'avant que l'on entreprît des travaux aussi considérables, il étoit bon qu'il recommençat le nivellement, parce qu'il pouvoit s'être trompé dans quelque operation, ou dans quelque calcul; sincérité hardie, puis qu'elle étoit capable de jetter dans l'esprit du Ministre des défiances de son sçavoir. M. de Louvois impatient de servir le Roi selon ses goûts, soutenoit à M. de la Hire qu'il ne s'étoit point trompé, mais celui-ci s'obstinant dans sa dangereuse modestie, obtint enfin la grace de n'être pas crû infaillible. Il se trouva qu'il ne la meritoit pas, il recommança en 1685. le nivellement, qui ne differa du premier que d'un pied ou deux.

Il fit plusieurs autres nivellemens par les ordres du même Ministre, car alors il étoit fort question de conduire des eaux, & l'on a l'obligation à celles de Versailles d'avoir porté à un haut point la science du Nivellement & l'Hidraulique. Le Roi payoit les voyages & la dépense des Mathematiciens qu'il employoit; & M. de la Hire exact jusqu'au scrupule & jusqu'à la superstition, presentoit à M. de Louvois des Memoires dressés jour par jour, & où les fractions n'étoient pas négligées. Le Ministre avec un mépris obligeant les déchiroit sans les regarder, & il faisoit expedier des Ordonnances de sommes rondes, où il n'y avoit pas à perdre.

Il avoit assès accordé sa familiarité à M. de la Hire, qui n'eût pas manqué d'abandonner tout pour suivre ces ouvertures favorables, & pour en profiter, si l'esprit des sciences & celui de la Cour n'étoient pas trop incomtibles. Dès qu'il avoit rendu compte d'un travail qui lui avoit été ordonné, il ne songeoit qu'à regagner son Cabinet, qui le rappelloit avec force; en vain le Ministre vouloit le retenir, il n'avoit plus rien à lui dire. Il ne pouvoir ignorer qu'une assiduité muette mene à la fortune, mais il ne vouloit pas de fortune à ce prix-là, qui effectivement est cher pour quiconque sent qu'il a mieux faire.

En 1685. parut son grand Ouvrage intitulé *Sectiones Conicae in novem libros distributa*. C'est un in folio qui contient toute la Theorie des Sections Coniques, sur laquelle il avoit déja beaucoup préludé. On la voyoit pour la premiere fois toute entiere & en corps, déduite de principes très-simples & nouveaux. Cet ouvrage eut une grande réputation dans toute l'Europe savante, & fit regarder M. de la Hire comme un Auteur original sur une matiere qui renferme elle seule presque tout ce que la Geometrie a de plus sensiblement utile, & qui en même tems sert assés souvent de base aux speculations les plus élevées.

Deux ans après, M. de la Hire se montra comme Astronome, en donnant des Tables du Soleil & de la Lune, & des Methodes plus faciles por les calcul des Eclipses. Il y joignit en 1689. un Problême important d'Astronomie, & la description d'une machine de son invention qui montre toutes les Eclipses passées & à venir, & les mois & les années Lunaires avec les Epactes. Cette Machine est fort simple, on la peut mettre avec une Pendule dans la même Boëte, elle sera muë par le mouvement de la Pendule, & quand elle est disposée pour une certaine année, il n'y faut retoucher qu'au bout de l'an, ce qui ne consiste encore qu'en une operation d'un instant, & presque imperceptible. On a executé plusieurs de ces Machines dans des Pendules. On en porta une à l'Empereur de la Chine avec d'autres curiosités d'Europe qu'elle effaça toutes à ses Yeux. Il dut sentir que tous ses Mandarins d'Astronomie, & tous ses Lettrés, quoique si reverés en ce paya-là, & si comblés d'honneurs, étoient bien éloignés d'en faire autant.

Ces Tables du Soleil & de la Lune que M. de la Hire donna en 1687. ils les corrigea ensuite par un nombre beaucoup plus grand d'observations, & en même tems il composa sur les mêmes fondemens celles de toutes les autres Planettes. Il publia le tout en 1702. sous la titre de *Tabula Astronomica Ludovici Magni jussu, munificentia exarata.* Nous en avons rendu compte en ce temps-là. Nous repeterons seulement que dans ces Tables tous les mouvements des Astres sont tirés immediatement d'une longue suite d'observations assidue, & non d'aucune hipothese de quelques Courbes décrites par les Corps celestes; ainsi l'on ne peut avoir en Astronomie rien de plus pur & de plus exempt de tout mélange d'imaginations humaines.

M. de laHire donna en 1689. outre ses premieres Tables Astronomiques, un petit Traité de Geometrie pratique sous le titre l'*Ecole des Arperteurs*. Il fut réimprimé en 1692. & fort augmenté. La promptitude de la réimpression prouve l'utilité de ce petit Livre, qui n'avoit guere pû être acheté que par ceux qui devoient s'en servir, & l'utilité justifie l'Astronome de s'être abaissé à l'Arpentage.

En 1694. parurent de lui quatre Traités qui furent imprimés à la fin du second Volume des Memoires que l'Académie donna en 1692. & 1693.

Le premier de ces Traités est sur les Epicycloïdes, Courbes comprises dans la même formation générale que la Cycloïde, mais plus composées, & qui lui succederent, quand elle eut été presque épuisée par les Géometres. M. de la Hire entreprit cette matière, qui avoit le double charme & de lá nouveauté & de la difficulté. Il découvrit tout ce qui appartenoit aux

Epicycloïdes, leurs Tangents, leurs Rectifications, leurs Quadratures, leurs Developées. C'est-là tout ce que peut sur les Courbes la plus sublime Géometrie.

Nous avons dit dans l'Eloge même de M. de Tschirnhaus, que quoiqu'inventeur des Caustiques il s'étoit trompé sur celle du Quart de Cercle qu'il avoit communiquée à M. de la Hire, en lui cachant néanmoins le fond de sa methode, que celui-ci avoit toujours senti l'erreur malgré des envelopes specieuses & imposantes qui la couvroient, & qu'enfin il avoit démontré que cette Caustique, qui, à la verité, étoit de la longueur déterminée par M. de Tschirnhaus, n'étoit pourtant pas la courbe qu'il avoit crû, mais une Epicycloïde. Ce fut dans le Traité des Epicycloïdes qu'il fit cette démonstration, & qu'il remporta cet avantage sur un aussi grand Adversaire, vaincu dans le coeur de ses Etats.

Un fruit plus considérable, même selon son goût, de sa Théorie des Epicycloïdes, ce fut l'application utile qu'il en fit à la Mechanique, bonheur assés rare en fait de Courbes curieuses. Il fit réflexion que dans les Machines où il y a des Rouës dentées, c'est à ces dents que se fait l'effort, & par conséquent le frottement, qui détruit toûjours une grande partie de l'effet des Machines, est à ces endroits plus grand & plus nuisible que partout ailleurs. On auroit pû diminuer les frottements, & ce qui est encore un avantage, rendre les efforts toujours égaux, en donnant aux dents des Rouës une certaine figure qu'il auroit fallu déterminer par Géometrie. Mais c'est de quoi l'on ne s'avisoit point, au contraire on abandonnoit absolument à la fantaisie des Ouvriers la figure de ces dents comme une chose de nulle consequence, aussi les Machines trompoientelles toûjours l'esperance & le calcul des Machinistes. M. de la Hire trouva que ces dents pour avoir toute la perfection possible, devoient être en figure d'ondes formées par un arc d'Epicycloïde. Il fit executer son idée avec succès au Château de Beaulieu à huit lieuës de Paris dans une Machine à élever de l'eau.

Il faut avoüer que cette idée n'a été executée que cette fois-là, une certaine fatalité veut qu'entre les inventions il y en ait peu d'utiles, & entre les utiles peu de de suivies.

L'application de la Cycloïdes à la Pendule a été fort pratiquée, du moins en aparence, mais on commence à en reconnoître l'initilité; l'application d'une Epicycloïde aux dents des Rouës seroit certainement utile, mais elle est negligée.

Le second Traité des quatre dont nous parlons est *Explication des principaux effets de la Glace & du froid*; le troisiéme est sur les *Differences des Sons de la Corde & de la Trompette Marine*; le quatriéme sur les *differents accidents de la Vûë.*

Ce dernier est plus curieux & le plus interessant. C'est une Optique entière, non pas une Optique geometrique qui ne considère que des rayons réfléchis ou écartés selon certaines loix, mais une Optique phisique qui suppose la Géométrique, & qui ne considère qu'une Lunette vivante, animée, fort compliquée dans sa construction, sujette à mille changements, c'est-à-dire l'Oeil. M. de la Hire examine tout ce qui peut arriver à la Vûë suivant la différente constitution de l'Oeil, ou les différents accidents qui lui peuvent survenir. Ces sortes de recherches particulieres, quand elles sont bien approfondies, embrassent un si grand nombre de Phénomènes, la plûpart fort compliqués, singuliers, contraires en apparence les uns aux autres, qu'elles n'ont ni moins de difficulté que les recherches les plus generales, ni peut-être même moins d'étenduë; les principes generaux sont bien tôt saisis, quand ils peuvent l'être, le détail est infini, & souvent il déguise tellement les principes, qu'on ne les reconnoît plus.

M. de la Hire en 1695. donna son Traité de Méchanique. Il ne se contente pas de la Theorie de cette science qu'il fonde sur des démonstrations exactes, il s'attache fort à tout ce qu'il y a de principal dans la pratique des Arts. Il s'éleve même jusqu'aux principes de cet Art divin, qui a construit l'Univers.

Ceux qui ne voyent les Mathematiques que de loin, c'est-à-dire qui n'en ont pas de connoissance, peuvent s'imaginer qu'un Geometre, un Méchanicien, un Astronome, ne sont que le même Mathematicien; c'est ainsi à peu près qu'un Italien, un François & un Allemand passeroient à la Chine pour Compatriotes. Mais quand on est plus instruit, & qu'on y regarde de plus près, on sçait qu'il faut ordinairement un homme entier pour embrasser une seule partie des Mathematiques dans toute son étenduë, & qu'il n'y a que des hommes rares & d'une extrême vigueur de genie qui puissent les embrasser toutes à un certain point. Le genie même, quel qu'il fût, n'y sussiroit pas sans un travail asidu & opiniâtre. M. de la Hire joignit les deux, & par-là devint un Mathematicien universel. Il ne se bormoit pas encore là, toute la Phisique étoit de son ressort, j'entens jusqu'à la Phisique experimentale, qui est devenuë si vaste. De plus il avoit une grande connoissancé du détails des Arts, pays très-étendu, & très-peu fréquenté. Un Roi d'Armenie demanda à Neron un acteur excellent & propre à toutes sortes de personnages, pour avoir, disoit-il, en lui seul une Troupe entiere. On eût pû de même avoir en M. de la Hire seul une Académie des Sciences.

On eût eu encore plus. Il étoit depuis long-temps Professeur de l'Académie d'Architecture, dont l'objet est presque entierement different de tous ceux qu'on se propose ici, & il remplissoit cette place comme si elle eût fait son unique occupation.On eût eu de surcroît en M. de la Hire un bon Dessinateur & un habile Peintre de Paysage, car il réussissoit mieux en ce genre de Peinture, peut-être parce qu'il y a plus de rapport à la Perspective, & à la disposition simple & naturelle des objets, telle que la voit un Phisicien qui observe. Il est vrai qu'il faut d'ailleurs un goût que le Phisicien peut bien n'avoir pas.

Il fit en 1702. graver deux Planispheres de 16. pouces de diametre sur les desseins qu'il en avoit faits. Les positions principales ont été déterminées par ses propres observations. La projection de ces Planispheres est par les Poles de l'Ecliptique, & il avoit choisie comme la plus commode, parce que les Etoiles fixes tournant autour de ces Poles, suivent toûjours un même Cercle.

En 1704. le Roi le chargea de placer dans les deux derniers Pavillons de Marli les deux grands Globes qui y sont présentement. Comme l'ouvrage dura quelque temps, le Roi avoit souvent la curiosité de l'aller voir. Ilen demandoit compte à M. de la Hire, & l'engageoit dans des explications & dans des discours de science, dont on s'apperçut qu'il étoit fort content. C'est un avantage rare à un Savant d'être goûté par un Prince, & pour tout dire aussi, c'est un avantage rare à un Prince de goûter un Sçavant.

Outre tous les Ouvrages que nous avons rapportés de M. de la Hire, & dont le dénombrement n'est pas entierement exact à cause de la multitude, on trouve une grande quantité de morreaux importants qu'il a répandus soit dans les Journaux, soit dans les Histoires de l'Académie, mais sur tout dans ces Histoires où il n'y a point d'année qu'il n'ait enrichie de plusieurs presents, également considérables,& par leur beauté, par leur varieté. Nous en avons trop parlé quand il en a été question, pour en parler encore.

Il a fait infiniment plus que donner au Public tant d'excellents ouvrages de sa composition, il lui a aussi donné les ouvrages d'autrui, & il n'y a pas plaint son temps & ses peines. M. Picard qui avoit beaucoup travaillé sur le Nivellement, étant tombé malade, remit à Monsieur de la Hire tout ce qu'il avoit fait sur cette matiere,& le pria de le faire imprimer les changements & les additions qu'il jugeroit à propos. Monsieur de la Hire executa son intention par un Livre qui parut en 1684. intitulé *Traité du Nivellement de M. Picard mis en lumiere par M. de la Hire avec des additions.* Pareillement il mit au jour en 1686. le *Traité du Nivellement des Eaux & des autres Corps fluides*, ouvrage posthume de M. Mariotte, dont une partie étoit mise au net quand il mourut, & l'autre y fut mise sur les papiers qu'on trouva de l'Auteur, & selon ses vûës. On pourroit croire que la générosité de travailler à ces sortes d'ouvrages n'a pas été si grande, parce qu'il avoit vêcu en liaison d'amitié avec les Auteurs, mais on ne diminuera la gloire de sa generosité qu'en lui accordant une autre sorte de gloire qui la vaut bien.

Tout ce que nous avons dit de ses différents travaux a dû donner l'idée nonseulement d'un extrême assiduité dans son Cabinet, mais encore d'une santé très ferme & très-vigoureuse. Telle aussi étoit la sienne, depuis qu'il avoit été guéri des infirmités de sa jeunesse, & de ses grandes palpitations de coeur par une fiévre quarte, remede inesperé, qui lui avoit donné beaucoup de confiance à la Nature, & diminué d'autant son estime pour la Medecine. Toutes ses journées étoient d'un bout à autre occupées par l'étude, & ses nuits très-souvent interrompuës par les observations astronomiques. Nul divertissement que celui de changer de travail, encore est-ce un fait que je hazarde sans en être bien assuré. Nul autre exercice corporel que d'aller de l'Observatoire à l'Académie des Sciences, à celle d'Architecture, au College Royal dont il étoit aussi Professeur. Peu de gens peuvent comprendre la felicité d'un Solitaire qui l'est par un choix tous les jours renouvellé. Il a eu bonheur que l'âge ne l'a point miné lantement, & ne lui a point fait une longue & languissante vieillesse. Quoique fort chargé d'années il n'a été vieux qu'environ un mois, du moins assès pour ne pouvoir plus venir à l'Académie; quant à son esprit, il n'a jamais vieilli. Après des infirmités d'un mois ou deux il mourut sans agonie & en un moment lé 21. Avril 1718. âgé de plus 78. ans.

Il a été marié deux fois & a eu huit enfans. Chacun de ses deux mariages nous a fourni um Académicien.

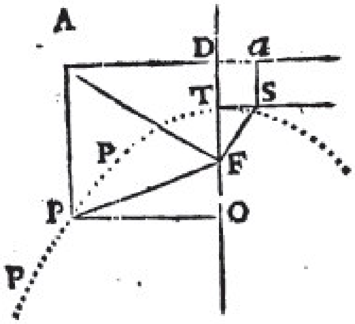
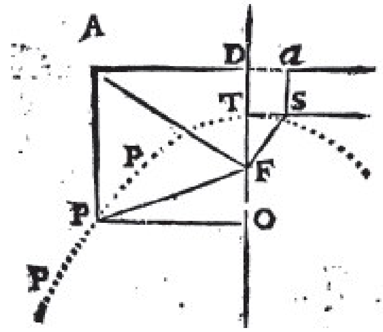
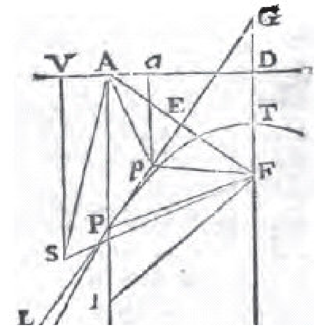
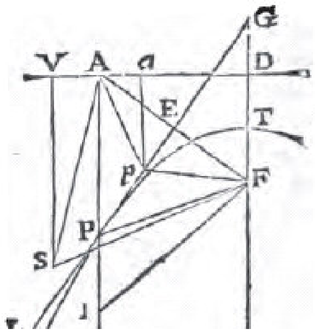
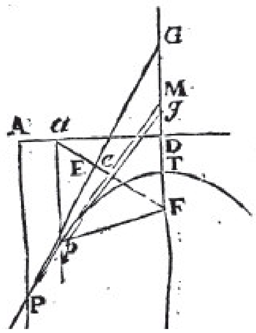
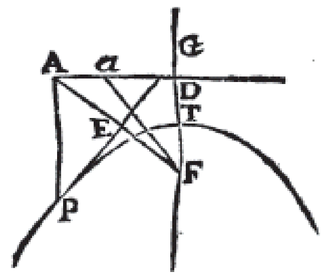
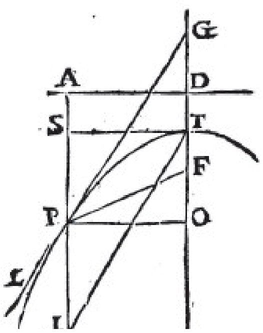
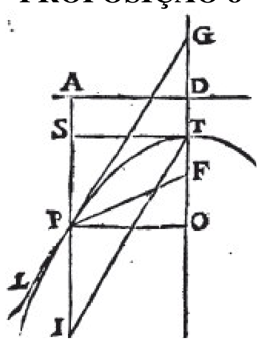
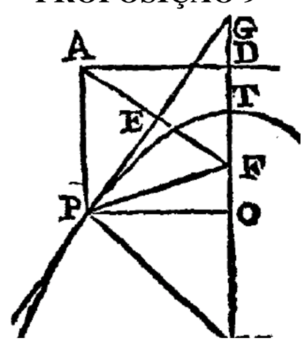
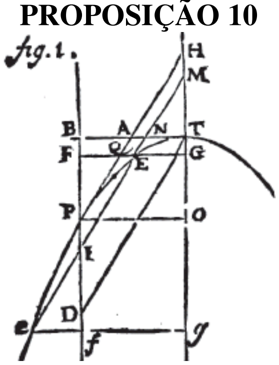
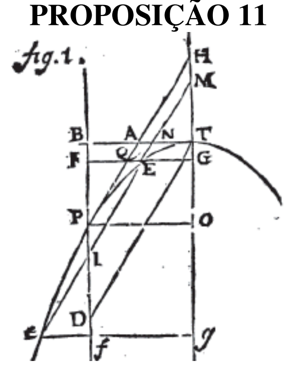
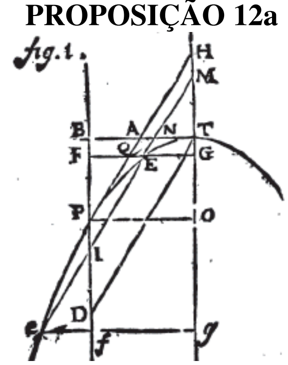
Dans tous ses ouvrages de Mathematique, il ne s'est presque jamais servi que de la Synthese, ou de la maniere de démonstrer des Anciens par les lignes & des proportions de lignes, souvent difficiles à suivre à cause de leur multitude, & de leur complication. Ce n'est pas qu'il ne sçût l'Analise moderne, plus expeditive, & moins embarassée, mais il avoit pris de jeunesse l'autre pli. De plus comme les verités géometriques découvertes par les Anciens sont incontestables, on peut croire aussi que la methode qui les y a conduits ne peut être abandonnée sans quelque peril, & enfin les methodes nouvelles sont quelquefois si faciles, qu'on se fait une espece de gloire de s'en passer. On peut juger par-là qu'il n'employoit pas le Calcul de l'Infini, qu'il n'a pourtant jamais désaprouvé le moins du monde. Au contraire certains sujets l'ont quelquefois obligé à l'employer, mais tacitement & presque à la dérobée, & c'étoit alors une sorte de triomphe pour les partisans zelés de ce calcul.

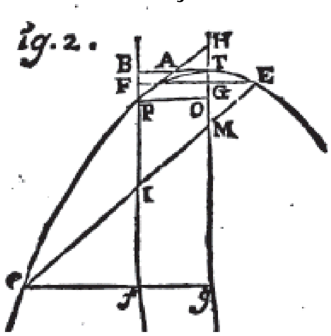
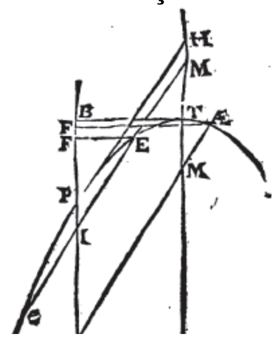
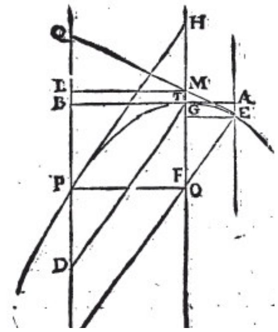
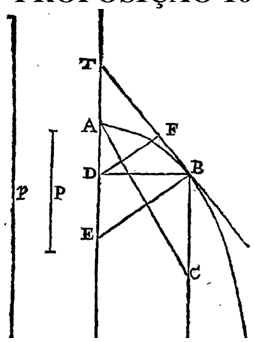
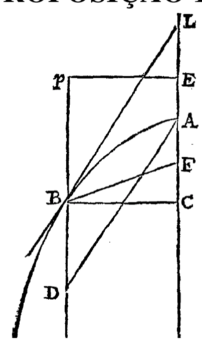
Il ne croyoit pas que dans les matieres de pure Phisique le secret de la Nature soit aisé à attraper. Son Explication, par exemple, des effets du froid, il ne la donnoit que pour un Sistême où un principe vrai-semblable étant posé, tout le reste s'en déduisoit assés bien. Si on lui contestoit ce principe,on étoit tout étonné qu'il n'en prenoit pas la défense. Il se contentoit d'avoir bien raisonné, sans prétendre avoir bien deviné.

Il avoit la politesse exterieure, la circonspection, la prudente timidité de ce Pays qu'il aimoit tant, de I'talie, & parlà il pouvoit paroître à des yeux François un peu reservé, un peu retiré en lui-même. Il étoit équitable & désinteressé, non-seulement en vrai Philosophe,mais en Chrétien. Sa raison accoutumée à examiner tant d'objets differents, & à les discuter avec curiosité, s'arrêtoit tout court à la vûë de ceux de la Religion, & une pieté solide, exempte d'inegalité & de singularités, a regné sur tout le cours de sa vie.

APÊNDICE – G

Figuras sobre parábola (parte 1) do texto original

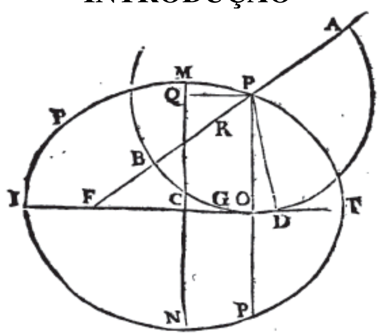
INTRODUÇÃO 	**PROPOSIÇÃO 1** 	**PROPOSIÇÃO 3** 
PROPOSIÇÃO 4 	**PROPOSIÇÃO 5** 	**PROPOSIÇÃO 6** 
PROPOSIÇÃO 7 	**PROPOSIÇÃO 8** 	**PROPOSIÇÃO 9*** 
PROPOSIÇÃO 10 	**PROPOSIÇÃO 11** 	**PROPOSIÇÃO 12a** 

PROPOSIÇÃO 12b	PROPOSIÇÃO 14	PROPOSIÇÃO 15
		
PROPOSIÇÃO 16*	PROPOSIÇÃO 17*	
		

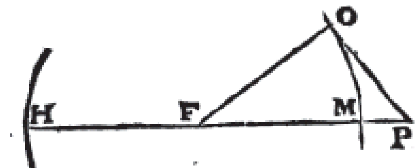
As figuras marcadas com asterisco (*) representam as figuras ausentes no original em Francês [6], mas presentes na tradução para o Inglês [7].

Figuras sobre elipse (parte 2)
do texto original

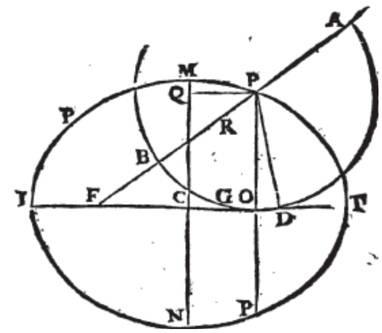
INTRODUÇÃO



LEMA 1

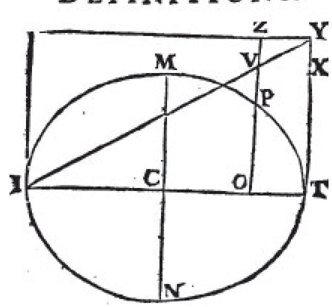


PROPOSIÇÃO 1

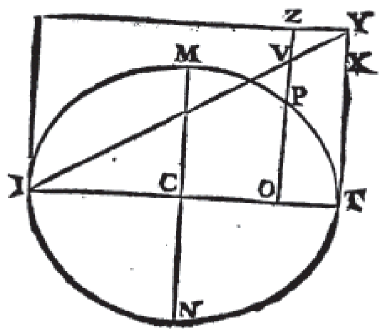


PROPOSIÇÃO 4

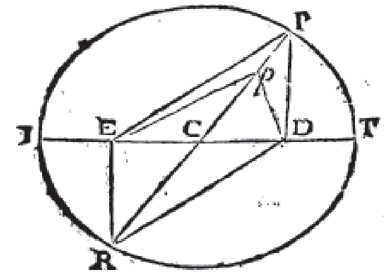
DEFINITIONS.



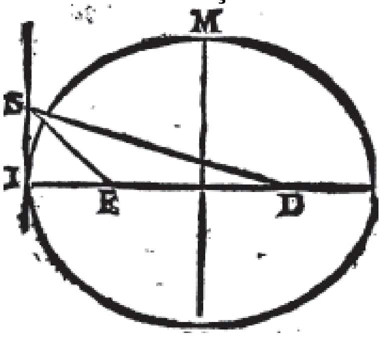
PROPOSIÇÃO 5



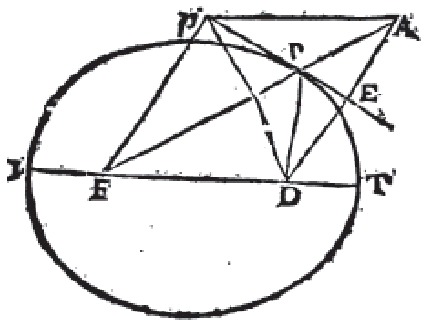
PROPOSIÇÃO 6



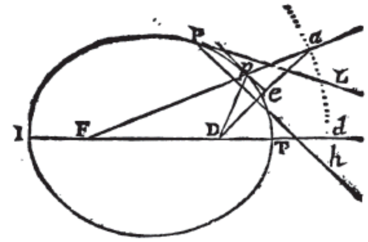
PROPOSIÇÃO 7



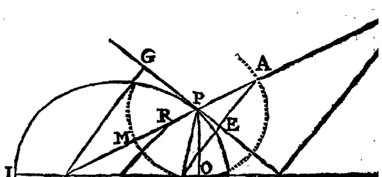
PROPOSIÇÃO 8



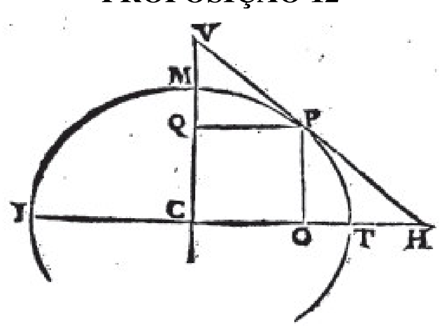
PROPOSIÇÃO 9



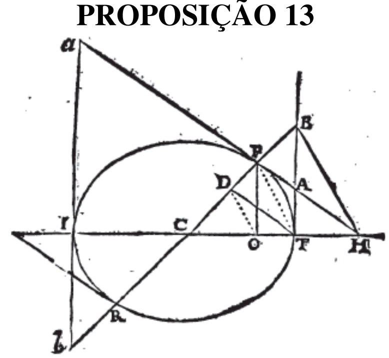
PROPOSIÇÃO 11*



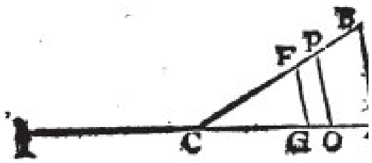
PROPOSIÇÃO 12



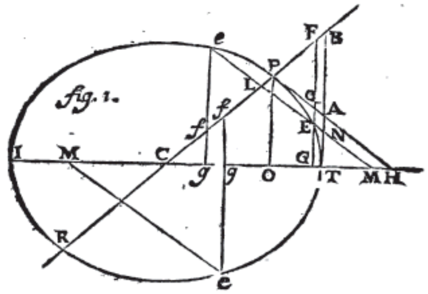
PROPOSIÇÃO 13



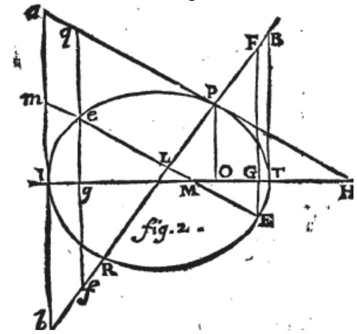
LEMA 2



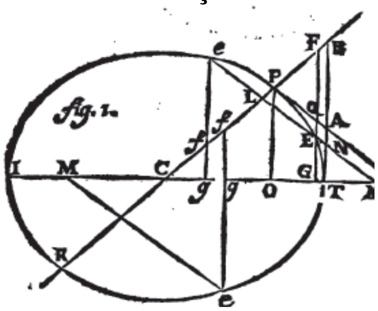
PROPOSIÇÃO 14a



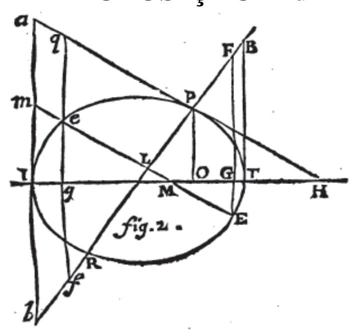
PROPOSIÇÃO 14b



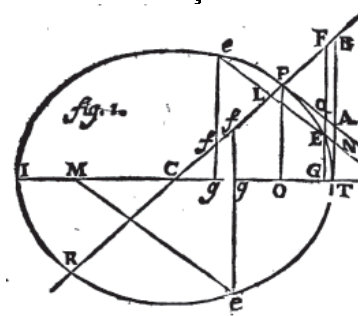
PROPOSIÇÃO 14c



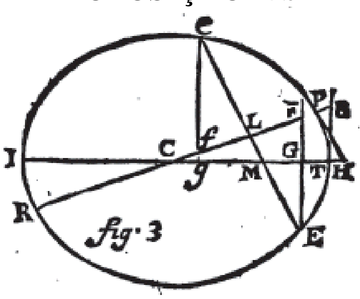
PROPOSIÇÃO 14d



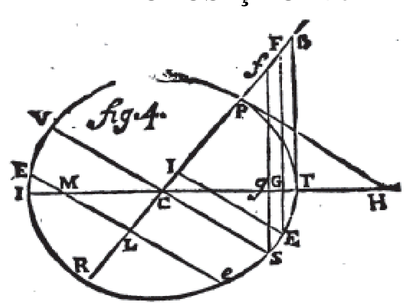
PROPOSIÇÃO 15a



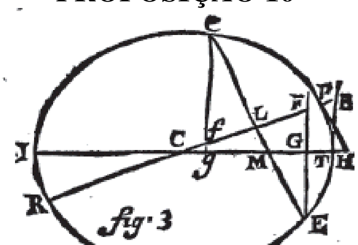
PROPOSIÇÃO 15b



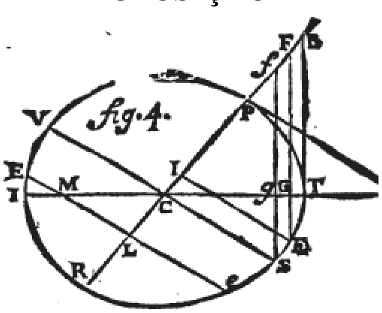
PROPOSIÇÃO 15c



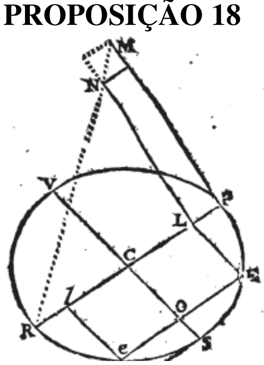
PROPOSIÇÃO 16



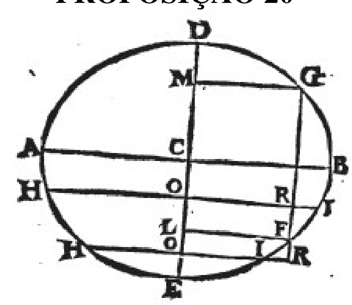
PROPOSIÇÃO 17



PROPOSIÇÃO 18



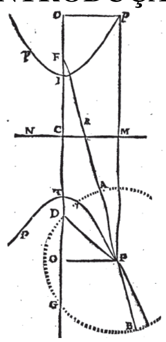
PROPOSIÇÃO 20



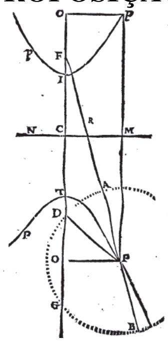
As figuras marcadas com asterisco (*) representam as figuras ausentes no original em Francês [6], mas presentes na tradução para o Inglês [7].

Figuras sobre hipérbole (parte 3) do texto original

INTRODUÇÃO

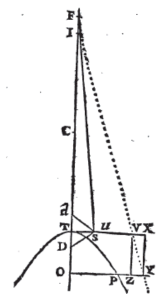


PROPOSIÇÃO 1

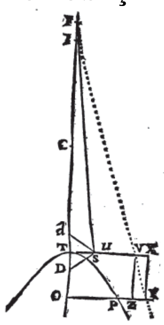


PROPOSIÇÃO 2

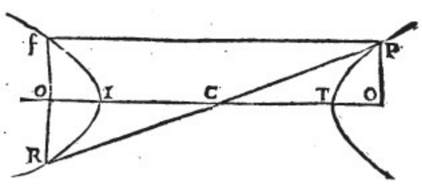
DEFINITION.



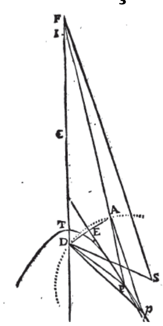
PROPOSIÇÃO 3



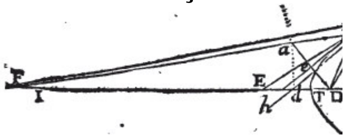
PROPOSIÇÃO 4



PROPOSIÇÃO 6



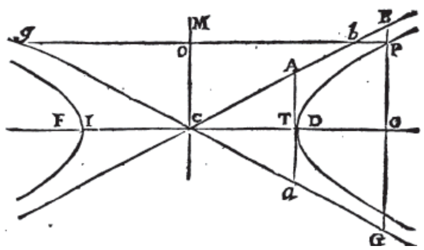
PROPOSIÇÃO 8a



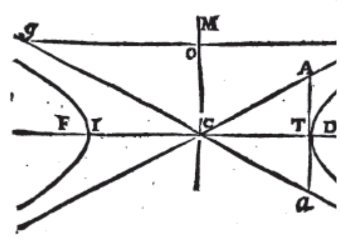
PROPOSIÇÃO 8b

DEFINITION

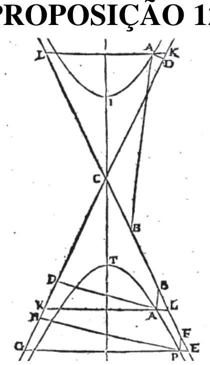
DES ASYMPTOTES.



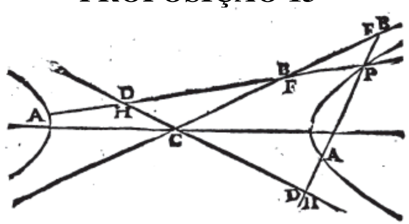
PROPOSIÇÃO 10



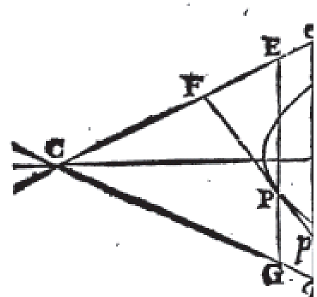
PROPOSIÇÃO 12



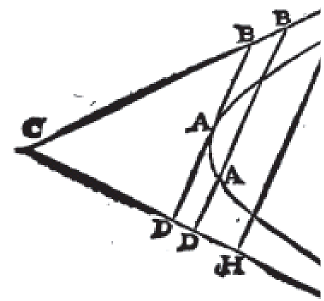
PROPOSIÇÃO 13



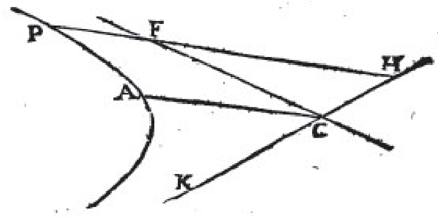
PROPOSIÇÃO 14



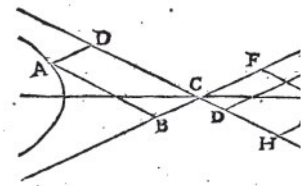
PROPOSIÇÃO 15



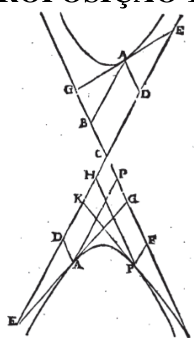
PROPOSIÇÃO 16



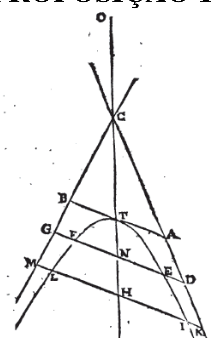
PROPOSIÇÃO 17



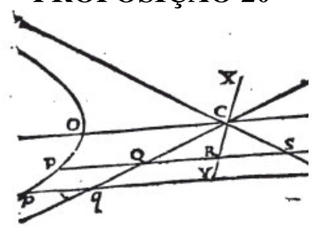
PROPOSIÇÃO 18



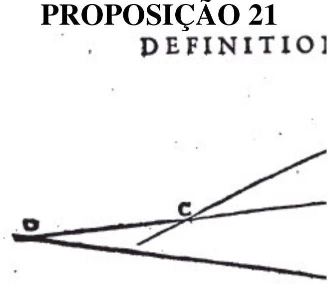
PROPOSIÇÃO 19



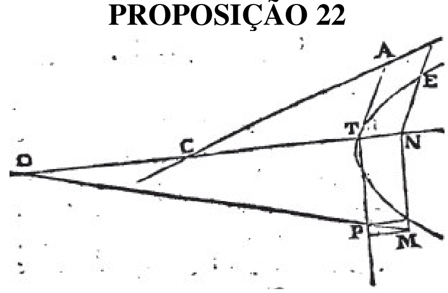
PROPOSIÇÃO 20



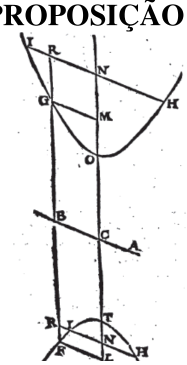
PROPOSIÇÃO 21



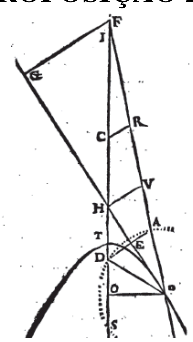
PROPOSIÇÃO 22



PROPOSIÇÃO 23

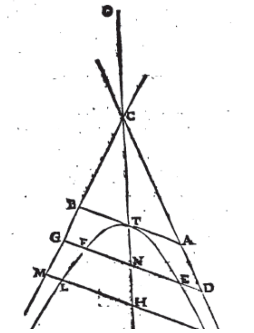


PROPOSIÇÃO 24

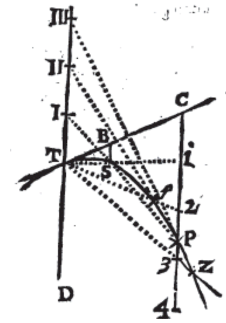


Figuras sobre a parte 4 do texto original

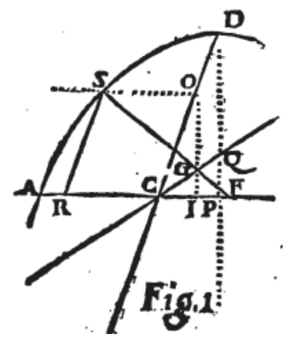
PROBLEMA 2



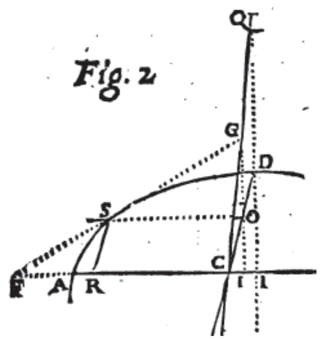
PROBLEMA 3



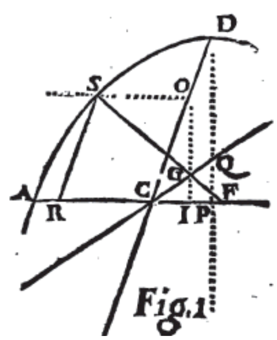
PROBLEMA 4



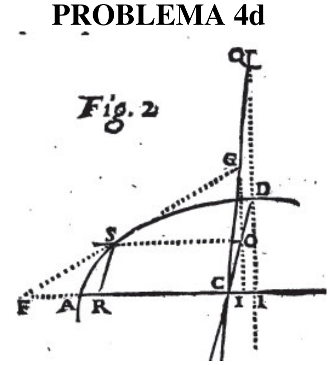
PROBLEMA 4b



PROBLEMA 4c



PROBLEMA 4d



PROBLEMA 5