CLÁUDIO BISPO DE JESUS DA COSTA

O CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UFRJ
RIO DE JANEIRO
2008

UFRJ

O CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

CLÁUDIO BISPO DE JESUS DA COSTA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de **Mestre em Ensino de Matemática**, sob orientação da **Profª. Drª. Claudia Coelho de Segadas Vianna**.

RIO DE JANEIRO
2008

Costa, Cláudio Bispo de Jesus da.
O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o conceito de Função / Cláudio Bispo de Jesus da Costa – Rio de Janeiro, 2008.
xi, 117 f.: il.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM, 2008.

Orientadora: Claudia Coelho Segadas Vianna.

1. Conceito de Função. 2. Formação do Professor. 3. Saberes Docentes. I. Vianna, Claudia Coelho Segadas (Orient.). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. III. O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o Conceito de Função.

O CONHECIMENTO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA SOBRE O CONCEITO DE FUNÇÃO

Cláudio Bispo de Jesus da Costa

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Aprovada por:

____

Professora Claudia Coelho de Segadas Vianna
Instituto de Matemática – UFRJ
Orientadora / Presidente da Banca Examinadora

____

Professora Maria Darci Godinho da Silva
Instituto de Matemática – UFRJ

____

Professora Lilian Nasser
SENAI / CETIQT

____

Professor Wanderley Moura Rezende
Universidade Federal Fluminense

Rio de Janeiro
26 de novembro de 2008

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho às pessoas que contribuíram silenciosamente para sua realização: minha esposa e minhas filhas Ana Beatriz e Ana Carolina.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelos caminhos que preparaste para que eu chegasse até aqui.

À minha orientadora Claudia Segadas Vianna, pela eficiente e dedicada orientação no transcorrer deste trabalho, pela amizade, apoio e atenção constante a minha sincera gratidão.

À professora Doutora Lilian Nasser e ao professor Doutor Wanderley Resende, por aceitarem o convite e participarem da banca examinadora e pelo incentivo e sugestões apresentados na realização deste trabalho.

À professora Doutora Maria Darci Godinho da Silva, pelo seu aceite em participar da banca examinadora, por abrir as portas da sua sala de aula para a realização desta pesquisa e pelas suas críticas e observações valiosas.

À minha esposa Carla Cristina, pela paciência, abnegação e acima de tudo pelo seu amor.

À minha mãe, meus saudosos pai e irmão e minhas irmãs que constituem o lugar onde pude aprender as primeiras lições de valorização da vida e do ser humano.

Aos meus amigos do Mestrado em Ensino de Matemática pelo companheirismo, pela solidariedade e pelas horas de convivência em que trocamos idéias durante todo este curso.

Aos alunos do curso de Especialização em Ensino da Matemática do IM-UFRJ, pela disponibilidade e paciência com que participaram desse trabalho, contribuindo de forma substancial para sua realização.

À professora Ana Rita de Brito Uchôa pela sua disponibilidade e colaboração na revisão do abstract.

RESUMO

Nesta pesquisa pretendemos verificar o conhecimento do professor sobre o conceito de função. Apresentamos um questionário contendo questões sobre o tema funções a trinta e seis professores que participavam do curso de funções reais, que integra o currículo da pós-graduação *lato sensu* em Ensino da Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. Em um primeiro momento analisamos as respostas dadas neste questionário e posteriormente, no final do curso, entrevistamos dez professores. Nestas entrevistas retornamos às questões cujas respostas dadas não atenderam às nossas expectativas. Procuramos verificar a compreensão do conceito de função sob aspectos que consideramos relevantes, segundo nosso referencial teórico, na apropriação deste conceito. Nas entrevistas verificamos que alguns desses aspectos ainda não eram dominados por certos professores, mesmo tendo aprendido ou revisto teoremas e estruturas pertencentes à Matemática avançada durante o curso. Observamos que algumas crenças e afirmações sobre determinados aspectos deste conceito foram mantidas, assim como certos procedimentos ou argumentos utilizados na resolução das questões.

Palavras-chave: conceito de função; formação do professor; saberes docentes.

ABSTRACT

In this research we study teacher's knowledge about the concept of function. We applied a questionnaire with questions about functions to thirty-six teachers who were taking a course on functions of one real variable, part of the curriculum of graduate studies (*lato sensu*) in Mathematics Teaching at the Instituto de Matemática of Universidade Federal do Rio de Janeiro. At first we analyzed the answers given to the questionnaire and, at the end of the course, ten teachers were interviewed. In these interviews we looked back at questions whose answers did not meet our expectations. We verified their understanding of the concept of function on aspects that we considered relevant, according to our theoretical framework. In the interviews we found that some of these aspects were not yet mastered by some teachers, even if they had learned theorems and structures from advanced Mathematics during the course. We noticed that certain beliefs and statements about functions were kept, as well as certain procedures or arguments used in the resolution of the questions.

Keywords: concept of function; teacher training; teaching knowledge.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Ao longo de grande parte de sua vida acadêmica, o futuro professor de Matemática tem contato com o conteúdo de funções. Desde as séries finais do Ensino Fundamental até as etapas finais da graduação, tal objeto matemático é estudado. Entretanto, o tempo de exploração e contato não têm sido suficientes para conferir seu bom aprendizado. Tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, avaliações institucionais e pesquisas apontam as dificuldades e falhas na aquisição deste tipo de conhecimento matemático. Tais resultados têm sido analisados sob vários aspectos. Alguns pesquisadores os justificam sob o ponto de vista cognitivo. Outros julgam que as dificuldades são de natureza didática. E há ainda os que defendem que as dificuldades encontradas são de natureza epistemológica. Embora as dimensões abordadas nestes pontos de vista sejam todas legítimas, apresento, então, os seguintes questionamentos: será que o professor domina o conceito de função a tal ponto de transmiti-lo com segurança e clareza? Ou ainda, será que a graduação lhe forneceu elementos que reforçassem a abordagem deste assunto?

Como já foi dito antes, o professor tem contato com este objeto matemático desde a Educação Básica, ora de modo intuitivo, ainda no Ensino Fundamental, ora de modo formal, nos Ensinos Médio e Superior. De um modo geral, a sua imersão neste assunto segue uma linha metodológica de apresentação e desenvolvimento que consiste, inicialmente, na apresentação da definição formal de função com instruções relativas à sua manipulação. Embora este conceito possua várias representações, tais como: tabelas, gráficos, expressões algébricas e diagrama de setas, destaca-se a representação algébrica, presente nas equações ou fórmulas que descrevem as "leis de formação". Continuando o seu aprendizado, lhe são apresentados alguns tipos de funções, suas propriedades gráficas e manipulações algébricas, predominando esta última em exercícios do tipo *"determine x na expressão dada"* ou *"calcule o valor da função para determinado* x_0*"*. Esta trajetória termina basicamente na metade do segundo ano do Ensino Médio, de uma forma estanque e desvinculada dos outros campos do conhecimento humano, como a Física e a Química. Até na própria Matemática, o conceito de função não é devidamente abordado em tópicos que não se denominem explicitamente "Função" como progressões, por exemplo. No curso de Licenciatura em Matemática, o tema é retomado nas disciplinas de Cálculo, e também em outros eixos temáticos como a Álgebra ou a Álgebra Linear.

Mesmo com todos estes anos de estudo, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, podemos observar que, na maioria das vezes, após completar o seu ciclo de formação, o professor de matemática ainda possui uma visão fragmentada do conceito de função, reproduzindo em sala de aula o mesmo modelo de ensino com o qual teve contato na sua Educação Básica. É comum que ele desenvolva uma didática muito parecida com a de seus antigos professores. Este fato não representaria nenhum problema, caso o nosso professor possuísse domínio sobre o conteúdo a ser ensinado de modo que pudesse redimensionar antigas práticas ou, pelo menos, não reproduzisse erros conceituais ou metodológicos contidos em alguns materiais didáticos por não saber reconhecê-los.

Entretanto, a prática denota que ainda não foram superados alguns obstáculos para o seu próprio aprendizado do conceito, o que lhe daria segurança e traria qualidade no processo ensino-aprendizagem deste tópico matemático. Neste sentido, instala-se um ciclo vicioso presente, não somente no ensino deste assunto, como em outros tópicos da Educação Matemática.

Tendo em vista os questionamentos levantados sobre o conhecimento dos nossos professores em relação ao tema função e à relevância deste objeto matemático, não só para a Matemática como também para outros campos do conhecimento, esta pesquisa é estabelecida sobre as seguintes questões: – O nosso professor domina o conceito de função e aplicações? – Como medir tal conhecimento?

No primeiro capítulo farei, inicialmente, uma breve exploração do desenvolvimento histórico do conceito de função, realçando as modificações deste conceito ao longo do tempo. Pretendo mostrar que o conceito de função, tal como é admitido atualmente, é fruto de profundas reflexões e mudanças. A seguir, exponho algumas pesquisas relacionadas à formação do professor, aos obstáculos para o aprendizado de tópicos de Matemática e ao conhecimento do professor acerca do tópico funções, dentre estas destaco os trabalhos de Even (1990) e Carneiro, Fantinel e Silva (2003). O primeiro tem como objetivo analisar o conhecimento sobre um determinado tópico da matemática através de alguns aspectos que devem ser dominados no processo de aprendizagem. O segundo é um estudo de caso realizado num curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul, onde o foco era identificar e descrever diferentes significados produzidos por estudantes para a noção de função.

No segundo capítulo, será apresentado e comentado um conjunto de questões aplicadas a um grupo de professores de Matemática sobre o tema funções. Pretendemos verificar se esses professores possuem um conhecimento mais abrangente sobre este assunto no sentido de desenvolverem ferramentas capazes de quebrar a reprodução de velhas práticas e crenças no ensino de Matemática.

No terceiro capítulo, será apresentada a metodologia utilizada no transcorrer desta pesquisa. Ainda neste capítulo, será apresentado um perfil dos nossos sujeitos da pesquisa, baseado em um questionário situacional aplicado.

No quarto capítulo, serão efetuadas as análises das respostas dos professores comparando-se, sempre que possível, com os resultados obtidos por Even (1990) em seu quadro teórico discutido no segundo capítulo.

No quinto capítulo, serão apresentadas as entrevistas dirigidas com alguns dos professores que participaram da pesquisa a fim de verificar se houve mudanças em relação ao seu conhecimento sobre o tópico funções reais. No sexto capítulo, comparamos as respostas dadas nas entrevistas, relatadas no capítulo anterior, com referencial teórico utilizado.

No sétimo capítulo, concluindo o trabalho, apresentamos as considerações finais destacando o que consideramos ser relevante nesta pesquisa para a contribuição no processo de formação do professor.

CAPÍTULO 1 - REFERENCIAL TEÓRICO

1.1 Um pouco de História

Os aspectos históricos discutidos a seguir encontram-se em trabalhos de Giraldo (2007), Roque (2006), Santos (1998) e Zuffi (2001).

Ao longo da história da Matemática a análise da variação entre grandezas constitui um dos seus importantes focos. No século XIII tal assunto já era objeto de estudo dos filósofos escolásticos, pertencentes à escola Aristotélica, seja analisando a velocidade de objetos móveis ou a variação da temperatura de ponto para ponto de um sólido aquecido. Vale ressaltar que, para Aristóteles e seus discípulos, o que estava em discussão não era o que hoje entendemos como grandeza, mas sim a qualidade que um corpo apresentava como estar quente ou frio, em movimento ou parado. No século XIV, Oresme – teólogo e matemático francês – atribui intensidades às qualidades de um corpo descrevendo a sua variação através de um gráfico de duas dimensões, no qual a linha horizontal representava o tempo ou o espaço e a vertical representava a intensidade da qualidade observada. Contudo, é com o desenvolvimento da álgebra que o estudo das variações é impulsionado. Destaques especiais merecem Fermat e Descartes que em trabalhos isolados, no século XVII, definem um sistema de coordenadas no plano, estabelecendo uma correspondência entre uma equação e a curva plana constituída por todos os pontos cujas coordenadas satisfazem a equação dada, atribuindo assim uma solução gráfica à regra (equação) que associa as duas quantidades variáveis. O plano cartesiano estabelece a representação gráfica das variações entre duas grandezas, porém ainda falta um longo caminho a ser percorrido até que a definição de função aceita pela comunidade matemática tomasse a forma atual.

Convém ressaltar as contribuições de Newton e Leibniz que, através de seus trabalhos, iniciam o delineamento do conceito de função. Zuffi (2001) ressalta que, Newton, em sua teoria, utilizava o termo "*fluentes*" para descrever as suas idéias sobre funções. Tais idéias baseavam-se fortemente na noção de curva e taxas de mudanças de quantidades que variavam continuamente e eram restritas ao que hoje são as imagens geométricas de uma função real de variável real. Entretanto foi Leibniz, na década de 1670, quem usou o termo função, como referência a certos segmentos de reta cujos comprimentos dependiam de retas relacionadas às curvas.

Seguem, abaixo, alguns exemplos de definições do conceito de função[1] ao longo do tempo, a partir do século XVIII:

> Jean Bernoulli, 1718:
> Chama-se aqui de Função de uma variável uma quantidade composta de alguma maneira qualquer dessa variável e de constantes.
>
> Euler, 1748:
> Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, mantendo o mesmo valor permanentemente. [...]

---

[1] Notas de aula do Professor Vitor Giraldo, aplicadas no curso de Funções, na Especialização em Ensino da Matemática – IM UFRJ, primeiro semestre de 2007.

> Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada ou universal que encerra em si todos os valores determinados. [...]
> Uma função de uma variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer de quantidades variáveis e de números ou quantidades constantes.
>
> J. L. Lagrange, 1797:
> Chama-se função de uma ou várias quantidades variáveis qualquer expressão para cálculo em que essas quantidades entrem em alguma forma qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que são consideradas como dadas, e valores invariáveis enquanto as quantidades da função podem tomar todos os valores possíveis.
>
> J. B. J. Fourier, 1822:
> Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais arbitrárias. Sendo dada uma infinidade de valores para a abscissa x, haverá um número igual de ordenadas $f(x)$. Todas têm valores numéricos verdadeiros, ou positivos, ou negativos ou nulos. Nós não supomos que essas ordenadas estão sujeitas a uma lei comum; elas sucedem umas as outras em alguma maneira arbitrária qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade isolada.
>
> G. L. Dirichlet, 1837:
> Suponhamos que a e b sejam dois valores diferentes definidos e x seja uma variável que pode assumir, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Agora, se para cada x corresponde um único, finito y de tal forma que, se x atravessa continuamente o intervalo de a a b, $y = f(x)$ varia da mesma forma gradualmente, então y é chamado um função contínua de x para este intervalo. Não é, em absoluto, necessário que y dependa de x no intervalo todo de acordo com a mesma lei; de fato, não é em absoluto necessário pensar somente em relações que possam ser expressas por operações matemáticas. Geometricamente representadas, isto é, x e y imaginados como abscissa e ordenada, uma função contínua aparece como uma curva conexa, para a qual somente um ponto corresponde a cada abscissa entre a e b.
>
> G. Peano, 1911:
> Função é uma relação especial, que a qualquer valor da variável faz corresponder um só valor. [...]
>
> N. Bourbaki, 1939:
> Sejam E *e* F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E *e* uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para todo $x \in E$, existe um e somente um elemento y de F, que está na relação considerada com x.

Podemos observar que a definição do conceito de função passa por várias transformações. As definições de Jean Bernoulli (1718), Euler (1748) e Lagrange (1797) enfatizam o caráter algébrico, onde uma função somente pode ser expressa por meio de uma equação ou uma expressão analítica. Já nas definições de Fourier (1822) e Dirichlet (1837), temos a retomada do caráter geométrico através da consideração de gráficos que representam uma relação entre as variáveis x e y.

Finalmente, podemos verificar um conjunto de definições mais próximo à atual no texto de Dirichlet, e a definição atual com seu caráter mais abrangente, como a descrita por Bourbaki, onde não só a unicidade está presente, mas também a extensão da relação funcional para quaisquer dois conjuntos que não necessariamente devam ser numéricos.

É interessante verificar que ao longo do tempo, a definição do conceito de função é subordinada fortemente aos problemas que ocupavam os matemáticos em determinada época. Segundo Caraça (1989), na antigüidade, a preocupação de Aristóteles era apenas descrever mudanças e relações que ocorriam na natureza de uma maneira qualitativa. Com Newton e Leibniz, os problemas que moviam os matemáticos passaram a estar relacionados com funções bem comportadas, isto é, que poderiam ser expressas analiticamente ou visualizadas com recurso gráfico, o foco está relacionado à resolução de problemas práticos.

O surgimento de novos problemas, o desenvolvimento da Análise e a posterior definição dos números reais motivaram uma nova mudança no conceito de função em relação ao proposto por Lagrange ou Euler. A definição sugerida por Dirichlet (1837) e, posteriormente, modificada e estendida por matemáticos contemporâneos como Peano (1911) e Bourbaki (1939), como relações unívocas entre conjuntos que não necessariamente precisem ser numéricos, vai ao encontro destas novas solicitações.

1.2 O conceito de função na formação do professor

Entretanto, o que parece definido para os matemáticos ainda não se encontra amadurecido no cotidiano escolar, principalmente nas abordagens efetuadas pelo professor de Matemática. Então, como queremos que o nosso aluno, ao entrar em contato com o conceito de função, tenha a clareza necessária para manipular este novo objeto matemático? Cabe ressaltarmos, também, as múltiplas interfaces de tal conceito, ou seja, uma relação funcional pode ser representada através de um diagrama de setas, uma tabela de variáveis, um gráfico no plano cartesiano ou através de uma expressão algébrica. Cada uma destas representações evidencia um ou alguns dos aspectos do conceito em detrimento de outros. O próprio aluno, conduzido ou não pelo professor, nos primeiros contatos com a definição, evoca imagens mentais que servirão de referência quando tal assunto for retomado. Neste contexto, o professor deverá ter claro que estas representações devem complementar-se na apresentação e no desenvolvimento do estudo de funções.

Apresentamos agora outro questionamento: será que o nosso professor possui habilidades que o permitam transitar entre as várias representações ou ele mesmo se encontra preso a esquemas mentais que não desenvolvem de forma plena a potencialidade deste tópico matemático? O foco agora está direcionado não a quem aprende, mas a quem ensina. Não se pode esquecer que, antes de lecionar, o professor passou por um processo de aprendizado onde ele, como aluno, construiu uma estrutura cognitiva acerca dos temas a serem ensinados. Conforme observa Tall (1981),

> Muitos conceitos que usamos não estão formalmente definidos, aprendemos a reconhecê-los pela experiência e uso nos contextos apropriados. Mais tarde estes conceitos podem ser refinados em seus significados e interpretados cada vez com mais sutileza dando-se ou não ao luxo de uma definição precisa. Normalmente neste processo se dá um nome ou símbolo ao conceito o que permite comunicação e ajuda na manipulação mental deste. Mas a estrutura cognitiva total que caracteriza o significado do conceito vai muito além da citação de um único símbolo. É mais do que qualquer figura mental, seja ela pictórica, simbólica ou qualquer outra. Durante o processo mental de retomada e manipulação de um conceito, muitos processos associados são trazidos à cena, afetando consciente ou inconscientemente o significado e uso. (p. 152)

É fato que muitos professores, principalmente os iniciantes, lecionam com base em experiências adquiridas no período de sua formação básica, denotando assim que, apesar de alguns esforços, a graduação pouco acrescentou a este futuro professor. Tal paradoxo é discutido por Ball (1990) que apresenta algumas suposições que dominam o ensino de Matemática nos cursos de Licenciatura em Matemática. A primeira suposição baseia-se no fato que os conteúdos da educação básica como divisão, fração e razão, medidas e equações, por exemplo, são fáceis e amplamente dominados pelos alunos que alcançaram o ensino superior e, conseqüentemente, se estes são capazes de resolver questões sobre tais conteúdos, então possuem plenas condições de ensiná-los. Outra hipótese, decorrente da anterior, indica que conteúdos da Educação Básica não precisam ser revistos na universidade, pois já foram aprendidos nas aulas do ensino básico. A terceira baseia-se no argumento de que a Matemática avançada ensinada na faculdade oferece aos professores um profundo e extenso conhecimento em Matemática, capacitando-os para o exercício profissional na Educação Básica. Tais idéias fecham o ciclo vicioso dito anteriormente no qual o antigo aluno, neste momento um professor, encontra-se numa situação altamente desfavorável onde lhe são exigidos pré-requisitos inexistentes na sua coleção de objetos e conceitos matemáticos, fazendo-o construir seu conhecimento sobre procedimentos e algoritmos que muitas vezes são transformados em receitas.

O conceito de função exemplifica bem o que foi exposto, pesquisas mostram que as dificuldades do professor em relação a este conceito têm origem anterior à sua graduação e nesta nem sempre ele é aprofundado. Algumas destas dificuldades advêm dos obstáculos de natureza epistemológica que são inerentes ao conceito e devem ser transpostos na medida em que são aceitos e compreendidos. Segundo Sierpinska (1992), um obstáculo epistemológico está associado às nossas convicções e esquemas de pensamento inconscientes, ele não é uma manifestação individual, pelo contrário trata-se de uma manifestação coletiva pertencente a uma determinada cultura em dado momento histórico. Visto de um determinado ponto de vista, os obstáculos epistemológicos são algo negativo para o desenvolvimento de um conceito. Contudo, eles fazem parte de seu aprendizado, e a discussão não deveria estigmatizá-los como negativos ou positivos, na medida em que estes não podem ser evitados. Não existe aprendizado sem confronto, geralmente, não se aceita algo novo sem efetuar conexões ou pré-julgamentos. As nossas convicções são a base inicial sobre a qual assentamos novos conhecimentos. Por outro lado, para avançarmos no domínio de um novo conteúdo, é necessário ultrapassar tais obstáculos e esta tarefa nem sempre é fácil, resistir às nossas convicções e rever nossos pontos de vista requer estratégias e tempo.

Segundo Meira (1997, apud Costa e Igliori, 2006), o aprendizado do conceito de função é importante, pois representa uma parte fundamental da Matemática; diversos tópicos no currículo da Educação Básica podem ser relacionados ao ensino de funções, bem como suas representações algébricas e gráficas; e o seu estudo pode gerar atividades com múltiplos sistemas de representações (tabelas, gráficos, diagramas e equações). Dada a relevância deste conteúdo matemático, retornamos aos questionamentos levantados anteriormente. E o nosso professor domina o conceito de função e suas conseqüências e aplicações? Como medir tal conhecimento?

Nos estudos de Even (1990) é discutida a seguinte questão: “Como podemos investigar o que o professor sabe acerca de determinado conteúdo matemático?” A resposta a esta questão não é fácil devido ao seu caráter altamente subjetivo. Deve se deixar claro que a idéia não é conhecer apenas o que ele sabe acerca de tal conteúdo matemático, mas o que ele sabe sobre como ensiná-lo. Sabemos que embora tanto o matemático quanto o educador matemático tenham como objeto de estudo a Matemática, enquanto o primeiro a manipula de modo a torná-la mais robusta ou extrair de sua estrutura respostas para problemas, sejam eles concretos ou abstratos, o segundo tem como objeto o desenvolvimento e a aplicação de estratégias que visem à aquisição do conhecimento matemático por parte do aluno. No entanto, tal fato não o descredencia de saber Matemática, pelo contrário, e é isto que queremos avaliar: o quanto o futuro professor sabe sobre um determinado tópico matemático, em nosso caso funções.

O conhecimento do professor sobre um determinado tópico é influenciado pelo que ele conhece através dos diferentes domínios do conhecimento. Por essa razão, analisar o seu conhecimento sobre um tópico específico deveria integrar vários corpos do conhecimento, como por exemplo: a importância do tópico na Matemática e no seu currículo; pesquisas e trabalhos teóricos sobre ensino, conhecimento e aprendizagem dos conceitos matemáticos deste tópico específico, em particular; e a pesquisa e trabalho teórico sobre o conhecimento do professor e suas estratégias de ensino. Even examina, em linhas gerais, o conhecimento de um futuro professor acerca de determinado conteúdo matemático. A sua análise segue uma estrutura baseada na observação. Segundo a autora, são sete os aspectos pertinentes ao conhecimento de um tópico matemático, que são:

- Traços essenciais ➔ Referem-se à imagem de conceito, com atenção especial para a essência do conceito.

- Diferentes representações ➔ O professor necessita conhecer as diferentes representações do conceito. Assim poderá aprofundar e melhorar sua compreensão acerca do conteúdo a ser ensinado.

• Alternativas de abordagem ➔ O professor deve estar familiarizado com os variados modos de apresentação de determinado conteúdo. Deste modo terá como escolher a abordagem mais apropriada para uma determinada situação.

• Relevância do conceito ➔ O sucesso de um conceito na Matemática é baseado em novas oportunidades que podem ser abertas. Os objetos tornam-se importantes e eficazes porque existe algo especial sobre eles que os torna únicos e possibilitam novos caminhos.

• Repertório Básico ➔ O professor deve possuir um repertório básico que ilustre os princípios importantes, propriedades e teoremas. É importante que este repertório seja utilizado de forma apropriada, isto é, com significado, e que ele seja do domínio do professor para que não se transforme numa coleção de procedimentos.

• Entendimento e Compreensão do Conteúdo ➔ A aprendizagem de um novo conceito ou relação implica na adição de nós ou links que formam a estrutura cognitiva deste conceito. Os conceitos e procedimentos devem estar conectados pela compreensão.

• Conhecimento da Natureza da Matemática ➔ Diz respeito ao conhecimento da natureza da Matemática como, por exemplo, os processos utilizados na verificação da veracidade de uma afirmação e o lugar do conceito dentro da matemática.

A seguir, apresentamos um esquema de interação destes aspectos com o conteúdo a ser ensinado.

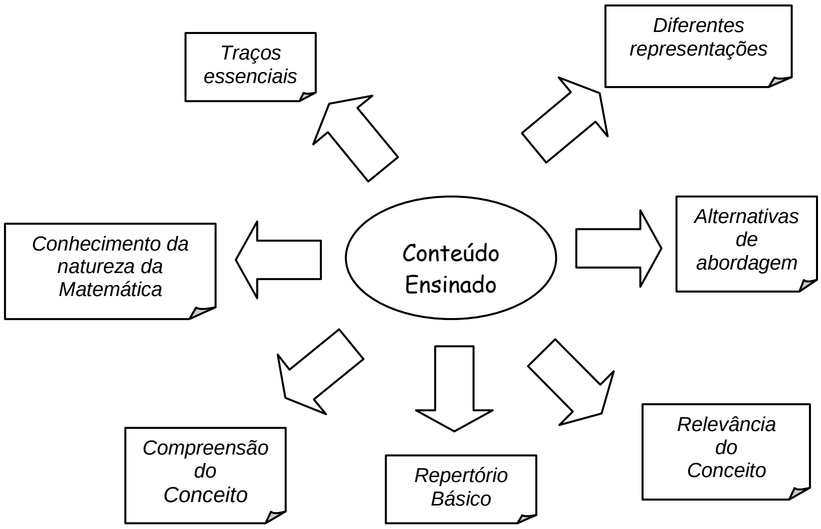


Figura 1: Quadro teórico de Even

Neste contexto, também consideramos pertinentes um estudo de caso realizado por Carneiro, Fantinel e Silva (2003) em um curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Rio Grande do Sul, onde o foco era identificar e descrever diferentes significados produzidos por estudantes para a noção de função.

Esta pesquisa teve como base o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS) que, por sua vez, fundamenta-se nas noções de conhecimento e significado, diferentes do senso comum.

O conhecimento é considerado um par formado por crença/afirmação, ou seja, uma crença que é afirmada através de uma justificativa. Segundo este modelo, crenças semelhantes que possuem justificativas diferentes determinam conhecimentos diferentes. Neste modelo entende-se por significado a maneira de pensar a crença, ou seja, a sua justificativa.

Um campo semântico ou de significado corresponde à possibilidade de produzir justificativas e de enunciar crenças. Uma mesma crença/afirmação pode ser justificada dentro de diferentes campos semânticos, ou seja, um mesmo objeto pode ter realçado na justificativa um aspecto em relação a outros e isto determinará campos semânticos distintos.

Destas análises são destacados três campos de significados: Campo Semântico da Relação Unívoca entre duas Variáveis; Campo Semântico Elemento/Conjunto; e o Campo Semântico das Transformações. Além destes, os autores observaram também o surgimento do Campo Semântico das Aplicações. Podemos verificar estes campos semânticos na tabela abaixo:

Campo semântico	Objetos pertencentes ao Núcleo	Frase geradora
Relação Unívoca entre variáveis	Variáveis, valores, relação entre variáveis, relação unívoca, existência	*"função é uma relação entre duas variáveis, x e y, tal que para cada valor de x existe um único valor de y correspondente".*
Elemento/conjunto	Conjunto, elemento, produto cartesiano, par ordenado, relação unívoca entre conjuntos, associação entre conjuntos, aplicação, diagramas sagitais, conjunto de partida, conjunto de chegada, domínio, contradomínio, imagem, gráfico.	*"função é uma relação (correspondência, associação) entre dois conjuntos A e B tal que a cada elemento de A associa (corresponde) um e só um elemento de B".*
Transformações	Figuras geométricas planas e espaciais, transformações geométricas, números complexos, regiões complexas, função complexa e as noções de conjuntos infinitos, limitados e intervalos da reta.	*"função é uma transformação de uma figura geométrica T em outra f(T), tal que para cada ponto de T corresponde um único ponto em f(T)".*
Aplicações	Variáveis, relações entre variáveis, modelo e modelagem, exemplos da física.	*"função é uma relação entre variáveis que pode ser pensada como um modelo matemático para alguma situação real".*

Tabela 1: Campos Semânticos predominantes na pesquisa

O núcleo é o conjunto de objetos utilizados na estruturação das frases geradoras para a noção de função. Segundo os autores, o Campo Semântico confere significado à noção de função utilizando os objetos presentes em um determinado núcleo. Vale ressaltar que tais campos, isoladamente, não dão conta da definição de função, isto é, cada qual, segundo o autor, possui seus limites epistemológicos. E são nesses limites epistemológicos que se encontram o acerto ou erro.

> "[...] Com relação à avaliação, no MTCS, 'acertar' significa que o aluno produziu significado para função coerente com o núcleo de objetos que ele constitui e 'errar' significa que a justificativa dada a certa resposta não é coerente com o Campo por ele mesmo produzido". (CARNEIRO, FANTINEL e SILVA, 2003, P54).

Neste sentido, transitar entre estes diversos campos reforça o ensino-aprendizagem do conceito de funções e a devida apropriação, por parte do aluno, deste objeto matemático.

CAPÍTULO 2 - O QUESTIONÁRIO

Neste capítulo serão apresentadas as atividades que constam no questionário e os aspectos a serem observados nestas, segundo o quadro teórico construído por Even. Entretanto, por uma falha de redação, a questão dois teve que ser descartada neste questionário, sendo reescrita e aplicada em um teste ocorrido posteriormente. Retiramos também a questão seis por entendermos que a sua análise não acrescentava informações relevantes à pesquisa.

Decidimos pontuar as questões, conferindo uma nota global de desempenho, observando a seguinte distribuição: um ponto e meio para as questões um e três; e os sete pontos restantes serão distribuídos igualmente entre as seis questões restantes.

2.1 – Questão 1 – O conceito de função.

QUESTÃO 1

Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta

a) Um carro se move numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso.
b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros.
c) Uma relação que associa a cada número real $x > 0$ um cilindro cujo volume é x.

O texto inicial desta questão e os itens (a) e (b) estão presentes no trabalho de Carneiro, Fantinel e Silva (2003), quanto ao item (c) efetuamos uma pequena modificação. O objetivo desta questão é verificar através das respostas, em especial através de suas justificativas, como os professores relacionam o conceito de função com as idéias físicas ou geométricas apresentadas nos exemplos práticos. Os aspectos explorados nesta questão são: entendimento e compreensão do conceito de função; traços essenciais e o conhecimento da natureza da Matemática. Também pretendemos investigar em quais campos semânticos encontram-se as respostas utilizadas pelo professor.

Apenas a situação (a) pode ser representada por uma função enquanto as situações (b) e (c) não. Para a situação (b) basta tomarmos, por exemplo, um retângulo com lados medindo 4 cm por 3 cm e outro com lados medindo 6 cm por 1 cm, ambos possuem perímetros iguais (14 cm), porém suas áreas são diferentes (12 cm^2 e 6 cm^2, respectivamente). Para a situação (c), podemos construir cilindros diferentes que possuam o mesmo volume. Assim um cilindro de raio igual a 3 cm e altura igual a 4 cm e outro cilindro com altura igual 1 cm e raio igual a 6 cm possuem ambos 36π cm^3 de volume.

2.2 – Questão 3 – Quantas soluções distintas existem?

QUESTÃO 3
Substituindo x por 1 em ax^2+bx+c (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2+bx+c=0$, x ∈ $\mathbf{R}$? Justifique sua resposta.

Esta questão está presente no trabalho de Even (1990). Em sua análise o autor verificou que 80% dos entrevistados não obtiveram sucesso na sua resolução.

A resposta do professor será analisada neste trabalho sob os aspectos das diferentes representações de uma função e do repertório básico. Através da expressão algébrica enunciada espera-se a conexão da idéia de raízes de uma função com o gráfico da função quadrática ou afim, pois o coeficiente *a* também pode ser igual a 0 (zero). Entretanto, não penalizaremos caso o professor não analise o caso onde o coeficiente *a* seja igual a zero.

Uma justificativa para $a \neq 0$, por exemplo, poderia ser dada utilizando exemplos de gráficos de funções quadráticas, vide gráfico abaixo, onde uma das raízes pertenceria ao intervalo]1, 6[. Deste modo consideramos como aceitável a justificativa que analisasse o comportamento de uma função quadrática com este comportamento.

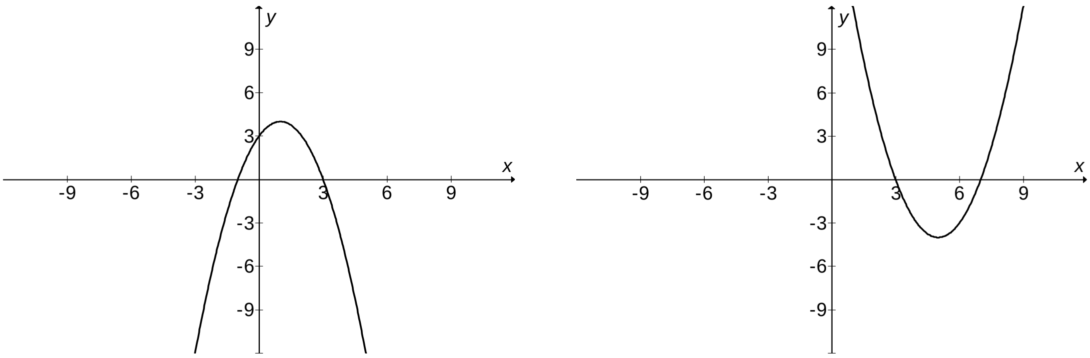


Gráfico 1: Exemplos de funções que satisfazem à questão três

Nesta questão pretendemos investigar os aspectos relativos aos diferentes modos de apresentação e ao repertório básico.

2.3 – Questão 4 – Quando duas funções são iguais?

QUESTÃO 4

Sejam f e g duas funções reais definidas respectivamente por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ e $g(x) = x - 2$.

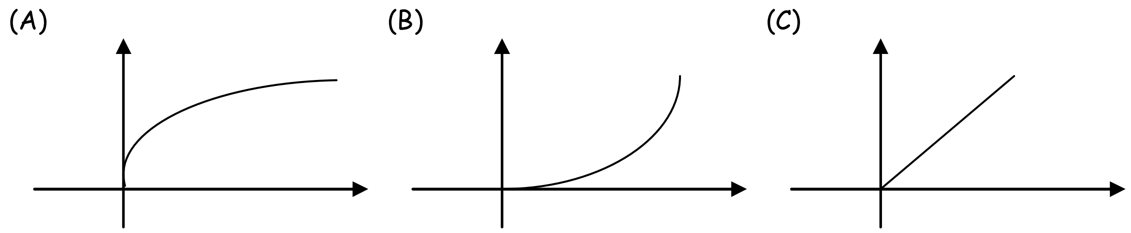
Podemos afirmar que f e g são iguais? Justifique sua resposta.

Nesta questão pretendemos verificar se o professor sabe que duas funções são iguais se, e somente se, possuem o mesmo domínio, contradomínio, e lei de formação. Após uma manipulação algébrica, podemos verificar que as leis de formação de ambas são iguais, mas os domínios são diferentes, pois D(f) = IR – {–2} enquanto D(g) = IR, onde IR denota, aqui, o conjunto dos números reais.

2.4 – Questão 5 – Qual o gráfico correto?

QUESTÃO 5

Os gráficos abaixo representam funções distância por tempo. Qual deles descreve melhor a distância percorrida por um ciclista numa corrida contra o tempo? Na parte inicial da prova ele tem de subir uma grande montanha.



Esta questão foi retirada de um livro coordenado por Tinoco (2002, p. 31). A autora relatou que alunos, mesmo do Ensino Médio, confundem a trajetória descrita pelo ciclista com a relação entre as variáveis distância e tempo. Desejamos investigar se o professor tem claro esta diferença e também pretendemos verificar a sua resposta sob o aspecto das diferentes representações de uma função.

Entretanto, por um pequeno deslize, os eixos não foram marcados com as respectivas variáveis, no livro o eixo vertical representava a distância percorrida e o eixo horizontal representava o tempo. Contudo, mantivemos a atividade no questionário, por entender que possíveis dúvidas quanto às respostas dadas poderiam ser solucionadas junto ao professor durante as entrevistas.

2.5 – Questão 7 – Qual é a função inversa de uma função exponencial?

QUESTÃO 7 Um estudante disse que existem duas funções inversas para $f(x) = 10^x$: uma é a função raiz e a outra é a função logarítmica. O aluno está certo? Justifique sua resposta.

Esta questão está presente no texto de Even (1990, p. 536). Segundo o autor, a composição de funções e a inversa de uma função são derivações importantes do conceito de função. Na análise que será feita neste trabalho, verificaremos a compreensão sobre a inversa de uma função. Esta idéia é um dos pontos importantes do conceito de função, e muitas vezes não está bem definida para o aluno. Even acredita que os erros cometidos em determinar a inversa de uma função exponencial têm raízes na visão limitada de "*desfazer*" para se obter a função inversa.

Através desta questão, pretendemos investigar se o professor entende a inversa de uma função sob este ponto de vista ou se ele utiliza a definição onde g inversa de f, se e somente se, $\forall x \in$ Dom(f), temos g(f(x)) = x e $\forall x \in$ Dom(g), temos f(g(x)) = x.

2.6 – Questão 8 – Quantas funções podemos ter com uma tabela?

Na tabela ao lado temos as abscissas e as ordenadas dos pontos no plano cartesiano que pertencem ao gráfico de uma função real.

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
5	5
10	10
50	50

O número de tais funções, diferentes entre si, que contêm estes pontos é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) $C_{7,2}$
(e) infinito

Justifique sua resposta.

Esta questão é uma adaptação de algumas questões do texto de Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995). A representação tabular possui limitações que desejamos explorar nesta questão. Segundo análise dos autores, uma resposta muito comum neste tipo de questão é que a tabela se refira apenas à função identidade. É esperado que o professor considere a possibilidade de construção de infinitas funções tomando as informações dadas como ponto de partida para conjecturas sobre o seu gráfico. Deseja-se também verificar se o professor as reconhece e é capaz de explorá-las através de uma representação gráfica ou algébrica. A resolução desta questão indica o domínio sobre os seguintes aspectos: conhecimento do repertório básico e entendimento e compreensão do conteúdo.

2.7 – Questão 9 – Composição de uma função com a sua inversa.

QUESTÃO 9

Determine a área do plano cartesiano limitada pelo gráfico de $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \log_{10} 10^x$, pelas retas $x=0$, $x=3$ e o eixo $0x$.

Esta questão envolve a idéia de composição de uma função com a sua inversa. Podemos redefinir a função f obtendo a função identidade e deste modo o cálculo da área será facilitado (vide gráfico abaixo). Deseja-se observar se o professor é capaz de explorar este aspecto gráfico.

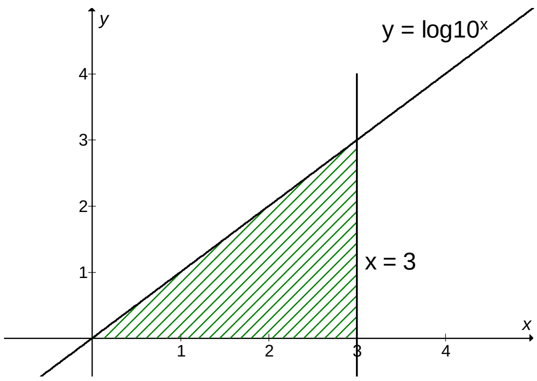


Gráfico 2: Área pedida na questão nove

Os aspectos analisados nesta questão serão: derivações do conceito de função (composição e inversão); entendimento e compreensão do conteúdo; conhecimento do repertório básico e as diferentes representações.

2.8 – Questão 10 – Translação de gráficos.

QUESTÃO 10
O gráfico da figura 1 pertence à função real f. Na figura 2 representamos o gráfico da função real g que é obtida através de transformações da função f. Escreva a sentença da função g em função de f.

Um dos questionamentos mais comuns neste tipo de questão é a ausência de expressão algébrica referente à lei de formação da função, pois se entende que a análise das transformações ocorridas é feita basicamente manipulando a referida expressão. Contudo, esta questão tem como objetivo explorar as transformações ocorridas com o gráfico. Basta, então, verificar neste caso, as translações ocorridas: duas unidades para cima e uma unidade para a direita. Tomando-se y = f(x) na figura 1, tem-se y = f(x-1) +2 para o gráfico da figura 2.

Os aspectos analisados nesta questão serão: conhecimento do repertório básico e as diferentes representações.

2.9 – Questão reaplicada – A definição de função.

QUESTÃO 1.(valor total 2,0 pontos – 0,5 cada) Sabendo que $f: X \to Y$ é uma função, determine se cada uma das afirmativas abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique somente as falsas:

i. Para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
ii. Se $f(x_1) \neq f(x_2)$ em Y, temos $x_1 \neq x_2$ em X.
iii. Se $x_1 \neq x_2$ em X, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$ em Y.
iv. Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $f(x) = y$.

Esta questão, em seu formato anterior, foi retirada do questionário original, onde era a segunda atividade, e tinha como objetivo avaliar o conhecimento do professor sobre a definição formal de função. Ela foi reinserida, como a primeira questão, em um teste aplicado na turma no dia dezenove de outubro de dois mil e sete, com o mesmo intuito. Ressaltamos que a sua aplicação foi efetuada em um momento do curso em que os professores já contavam com uma quantidade de aulas significativa, esperávamos assim que o seu desempenho fosse satisfatório.

As afirmativas falsas são: (i) e (iii). As justificativas poderiam ser efetuadas através de contra-exemplos que indicassem que a afirmação do item (i) é aplicada somente para os casos em que f é sobrejetiva e a afirmação do item (iii) é aplicada apenas nos casos em que f é injetiva.

Os aspectos analisados nesta questão serão: traços essenciais e o conhecimento da natureza da Matemática.

CAPÍTULO 3 – METODOLOGIA

Neste capítulo apresentaremos, de maneira global, os sujeitos pesquisados e o ambiente no qual a pesquisa foi aplicada.

A pesquisa foi desenvolvida no Curso de Especialização em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRJ, na disciplina Funções Reais, cujo público-alvo é formado por professores de Matemática do Ensino Básico. A referida disciplina foi ministrada no segundo semestre do ano de 2007, pela professora Maria Darci Godinho da Silva, e contou com quinze aulas de quatro horas cada.

O curso possui a seguinte ementa:

- Conceitos fundamentais: domínio, contradomínio e imagem; composição de funções; funções injetoras, sobrejetoras e bijetoras; inversão de funções.
- Funções reais e gráficos; interpretação e exploração gráfica-computacional do gráfico cartesiano de funções reais; resolução geométrica e analítica de equações, ineqüações e de sistemas de equações e ineqüações.

- Funções polinomiais, racionais e algébricas: existência e multiplicidade de raízes reais e não reais; comportamento assintótico.
- Funções transcendentes: funções trigonométricas, o círculo trigonométrico, o conceito de radiano; a definição da função exponencial real, funções exponenciais e logarítmicas. Introdução ao cálculo infinitesimal: limites e continuidade; taxa de variação média e instantânea; aproximações lineares; o conceito de derivada.

Em dezessete de agosto do ano de dois mil e sete, segundo dia de aula, foi aplicado o caderno de atividades relativo ao questionário comentado no capítulo anterior. Com este procedimento, objetivamos avaliar o conhecimento a priori dos professores-alunos acerca do tema funções. Além do caderno de atividades, também foi aplicado um questionário situacional (vide Anexo 1), que tem como objetivo traçar um perfil dos professores-alunos através de informações da: formação; tempo de magistério e tempo de graduação. Tanto neste questionário quanto no caderno de atividades, cada professor-aluno recebeu um número de identificação e posteriormente um nome fictício pelo qual será reconhecido, mantendo-se assim sigilo quanto à sua identidade. A seguir faremos a apresentação dos resultados obtidos no questionário situacional.

3.2 – O Grupo

O grupo ao qual pertencem os sujeitos da pesquisa é formado por trinta e seis professores, com idades variando entre vinte e dois e cinqüenta anos, porém três dos professores que responderam o caderno de questões não responderam ao questionário situacional. A seguir apresentamos alguns resultados deste questionário.

3.2.1 – Instituição e o tempo de formação

Podemos verificar no gráfico 3 que responderam temos vinte e três, cerca de 70%, professores possuíam menos que cinco anos de formados. É interessante observar o interesse destes professores em retornar ao ambiente acadêmico para continuar a sua formação.

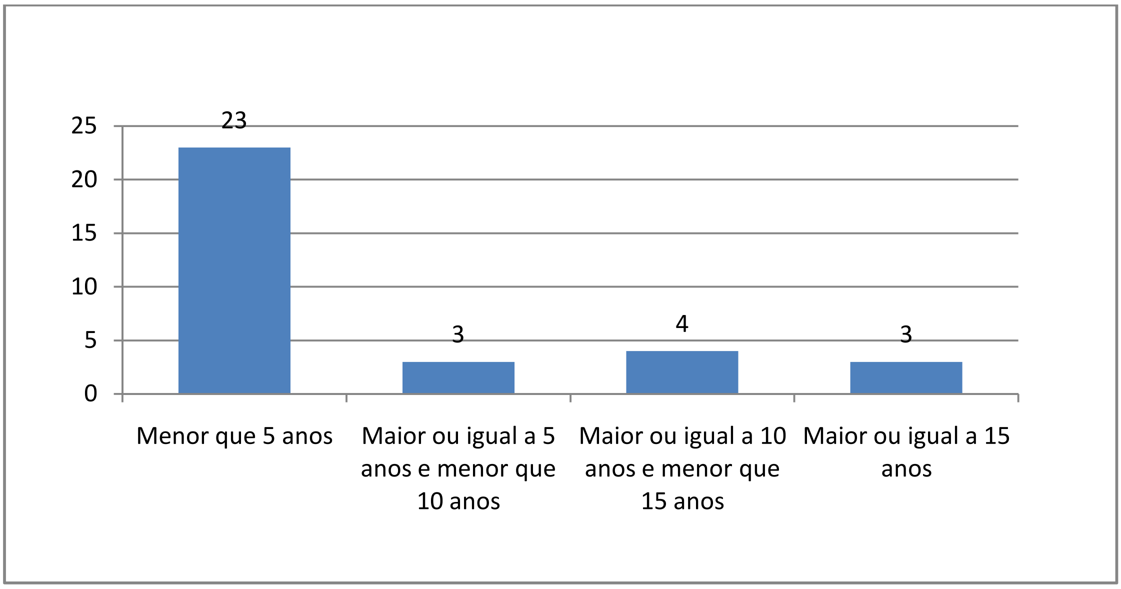


Gráfico 3: Tempo de formação

No gráfico 4 indicamos o quantitativo das respostas dadas em relação à instituição na qual o professor realizou a sua graduação, podemos verificar que a maioria, vinte e quatro entre os trinta e três professores, cerca de 70%, é formada em instituições públicas.

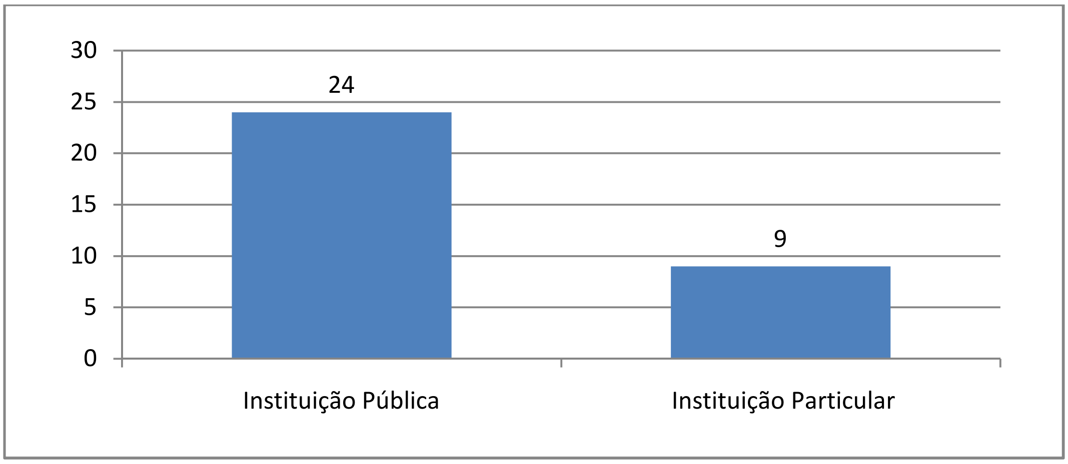


Gráfico 4: Tipo de instituição na qual se formou

3.2.2 – Tempo de Magistério e Instituição onde lecionam

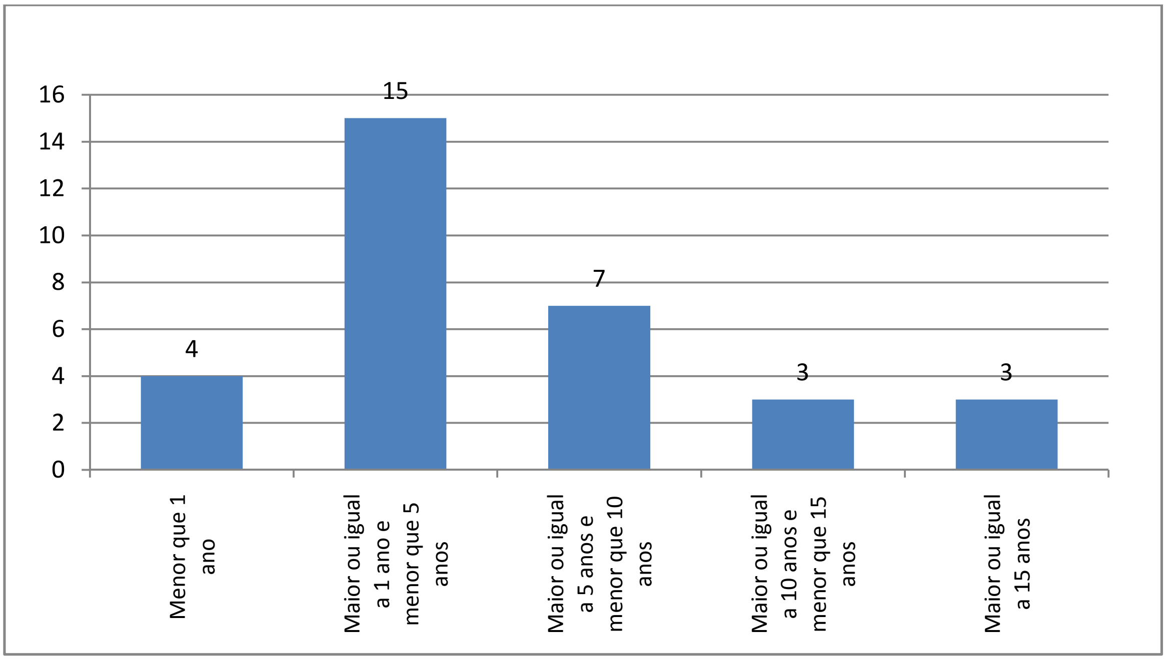


Gráfico 5: Tempo de magistério

No gráfico 5, Observamos que dezenove entre os trinta e três professores do grupo, aproximadamente 57%, possuem menos de cinco anos de magistério, lecionando Matemática para turmas do segundo ciclo do Ensino Fundamental e o Ensino Médio. No grupo apenas um professor, que é recém formado, não leciona.

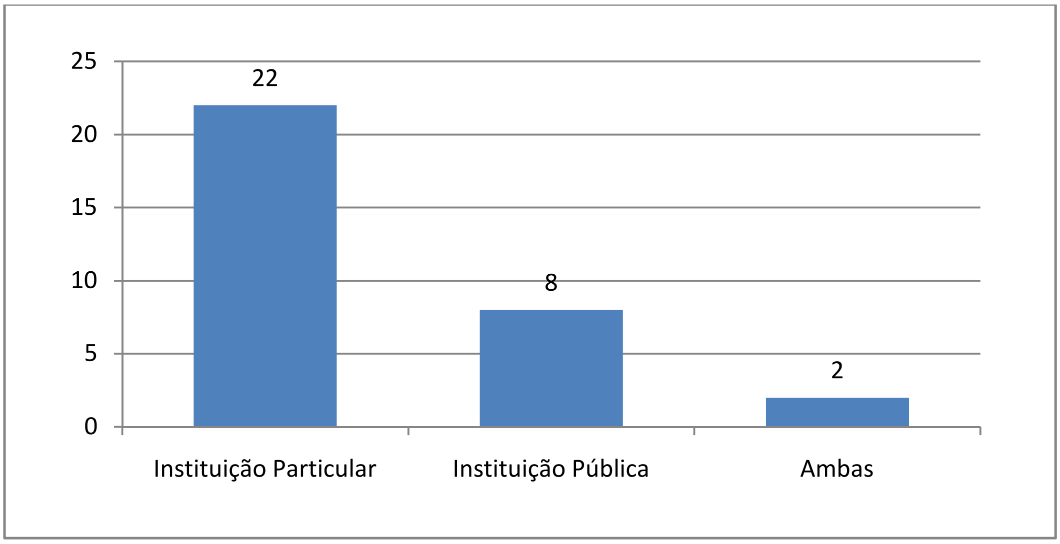


Gráfico 6: Tipo de Instituição em que leciona

Verificamos no gráfico 6, que entre aqueles que exercem o magistério, aproximadamente 69% o fazem em instituições particulares, 25% lecionam em instituições públicas e 6% lecionam em ambas.

Neste questionário situacional também desejávamos saber qual o grau de dificuldade encontrado no ensino de funções, distribuídos entre: baixo, médio e alto. A maioria, 78% dos professores, responderam que este tópico possui um nível de dificuldade médio.

A seguir indagamos também os professores sobre as dificuldades encontradas para ensinar funções. Analisando as respostas dadas, as mais freqüentes foram: aplicar o conceito (contextualização); apresentar a definição (formalização do conceito); falta de base dos alunos e desinteresse. Por aplicar o conceito entende-se a dificuldade de fazer o aluno perceber a utilidade deste através de sua utilização nos problemas do cotidiano. Abaixo indicamos o gráfico com os resultados desta análise.

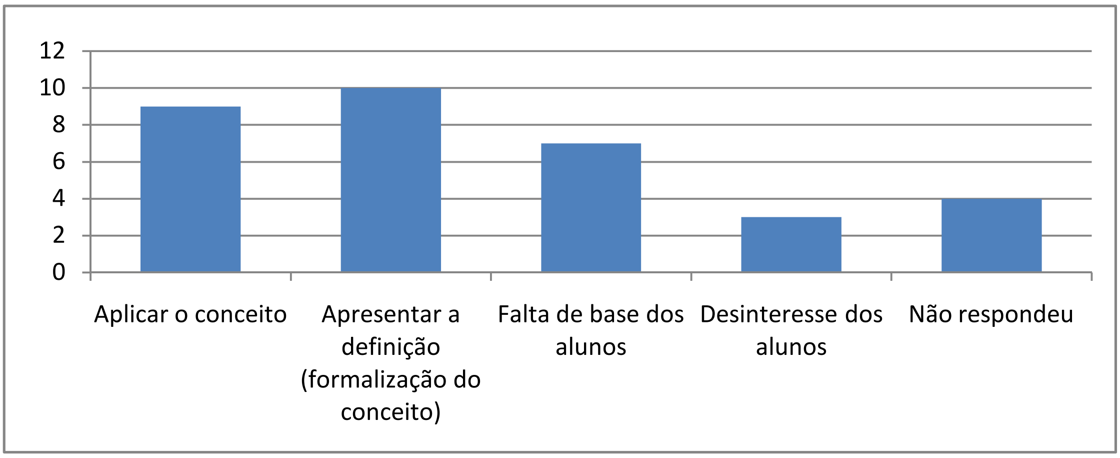


Gráfico 7: Distribuição das dificuldades encontradas pelos professores no ensino de funções

No questionário também indagamos os professores sobre as dificuldades que eles observam no aprendizado do aluno referente ao conteúdo de funções. Seguindo a mesma metodologia utilizada na pergunta anterior, agrupamos as respostas em quatro categorias: aplicar o conceito (contextualização); construções e análises de gráficos e dificuldades com a álgebra.

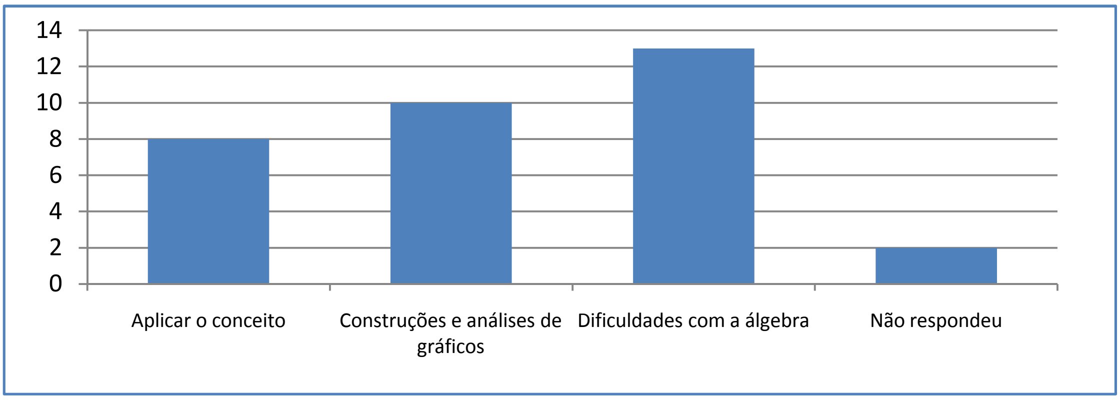


Gráfico 8: Distribuição das dificuldades do aluno em relação ao aprendizado de funções

Ao realizarmos tais questionamentos desejávamos saber as dificuldades enfrentadas no ensino-aprendizagem de funções sob a ótica do professor. Interessante observar que a aplicação do conceito constitui, segundo este grupo, uma dificuldade comum tanto ao aluno quanto para o professor.

Nesta pesquisa analisaremos as respostas dadas no questionário aplicado com o referencial teórico apresentado no segundo capítulo, em especial o quadro teórico construído por Even. Ao final do curso alguns professores foram entrevistados e suas respostas dadas no questionário, aquelas que não se encontram dentro dos padrões esperados, serão comparadas com as respostas dadas na entrevista. Com este procedimento pretendemos verificar qual a evolução destes professores no que se refere à compreensão do conceito de função e aos aspectos envolvidos na aquisição deste conceito matemático.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO

Neste capítulo, as respostas dadas pelos professores-alunos no caderno de atividades serão examinadas. Incluiremos também, para análise, a questão que foi aplicada em substituição àquela retirada por problemas de redação na ocasião da aplicação do questionário. Pretendemos com este estudo analisar o conhecimento do professor sobre o assunto funções. Para facilitar o nosso estudo mostraremos novamente o enunciado de cada questão.

4.1 – Distribuição dos acertos

O quadro abaixo mostra a distribuição dos acertos por questões, incluindo a questão dois recolocada no teste aplicado em dezenove de outubro.

Questões	Q1	Q2	Q3	Q4	Q7	Q8	Q9	Q10
Erros	20%	65%	24%	81%	81%	30%	67%	31%

Tabela 2: Percentual de acertos por questão

A tabela dois tem como objetivo fornecer uma visão geral do desempenho dos professores no questionário aplicado.

Observamos que a questão um, que envolve definição do conceito de função e a questão três, que lida com os vários modos de apresentação deste conceito e o repertório básico, apresentaram baixo percentual de acertos.

Em seguida temos as questões oito e dez, que estão relacionadas com o repertório básico e com o entendimento e compreensão do conceito. Nestas questões os professores também tiveram um desempenho insatisfatório.

Na questão dois, que foi reaplicada em dezenove de outubro e verifica a definição do conceito, obtivemos uma resposta melhor, mas vale ressaltar que esta questão foi aplicada após algumas aulas, como será relatado mais adiante.

Na questão nove, que analisava os aspectos referentes ao repertório básico e às diferentes representações, o grupo também apresentou um desempenho regular.

Os melhores desempenhos do grupo foram apresentados nas questões quatro e sete, que analisam respectivamente, os aspectos relativos às diferentes representações e à relevância do conceito.

A seguir analisaremos as respostas dadas pelo grupo a cada questão.

4.2 – As questões originais.

QUESTÃO 1 Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta a) Um carro se move, numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso. b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros. c) Uma relação que associa a cada número real x > 0 um cilindro cujo volume é x.

Nesta questão apenas sete alunos responderam corretamente enquanto vinte e nove, ou seja, aproximadamente 80%, erraram um ou mais itens.

Contudo, mais que verificar se o professor-aluno acertou ou não a questão, nos interessa especialmente analisar as suas justificativas, pois é através delas que podemos investigar qual a imagem de conceito predominante. O gráfico abaixo apresenta uma distribuição do número de alunos que justificou corretamente um ou mais itens.

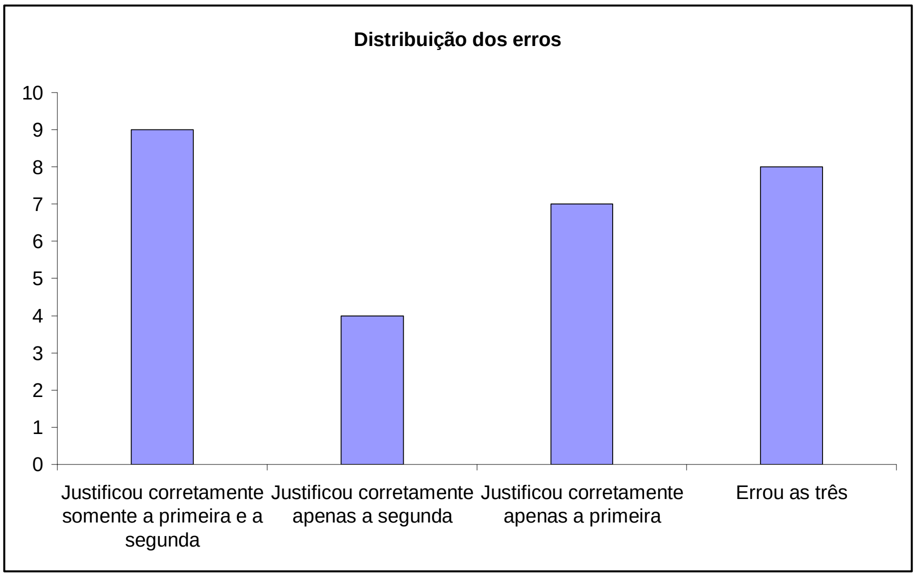


Gráfico 9: Distribuição de erros na primeira questão

Na distribuição acima, um ponto importante a ser realçado é que todos os vinte e nove professores assinalados acima consideraram que a relação descrita no item (c) representava uma função. Um dos pontos importantes na definição de uma função é o reconhecimento da relação unívoca entre duas variáveis. Entretanto, ao admitir que tal relação pudesse representar uma função, o professor-aluno não observou que um determinado valor de volume poderia ser associado a mais de um cilindro.

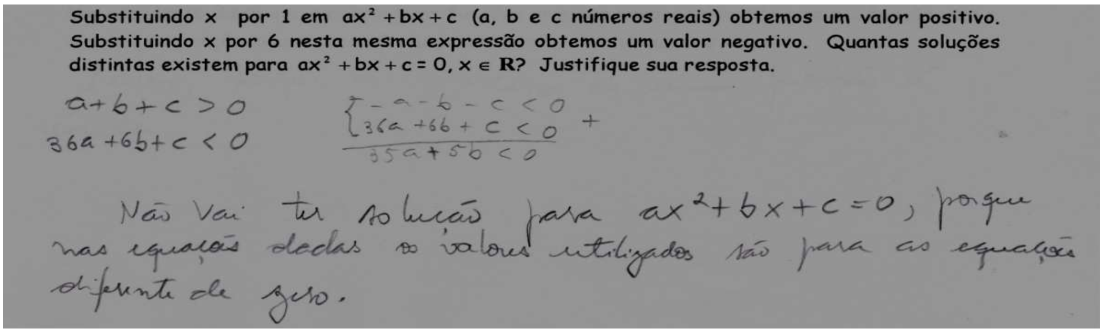
Este dado, associado ao fato de quinze professores justificarem que a relação descrita no item (b) representa uma função, indica que apesar da unicidade ser uma das condições a serem observadas, reconhecê-la constitui um potencial obstáculo. Também acreditamos que a forma de apresentação dos itens, descrevendo relações sem uso de tabelas, gráficos ou expressões algébricas, contribuiu para o resultado apresentado.

Ao analisarmos as justificativas pudemos constatar que em dezessete respostas estavam presentes elementos do Campo Semântico da Relação Unívoca entre variáveis, que possui em seu núcleo objetos como variável, valores, relação entre variáveis, relação unívoca, existência.

QUESTÃO 3
Substituindo x por 1 em ax^2+bx+c (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2+bx+c=0$, x $\in$ **R**? Justifique sua resposta.

O índice de acertos nesta questão pode ser considerado baixo, apenas dez professores-alunos, aproximadamente 28%, responderam corretamente.

Dentre aqueles que erraram um fato que nos chamou a atenção: vinte e dois pesquisados construíram um sistema substituindo os valores um e seis na expressão ax^2+bx+c e, a partir da sua resolução, tentaram encontrar a quantidade de soluções para a equação sugerida. Seguem, abaixo, algumas destas respostas.

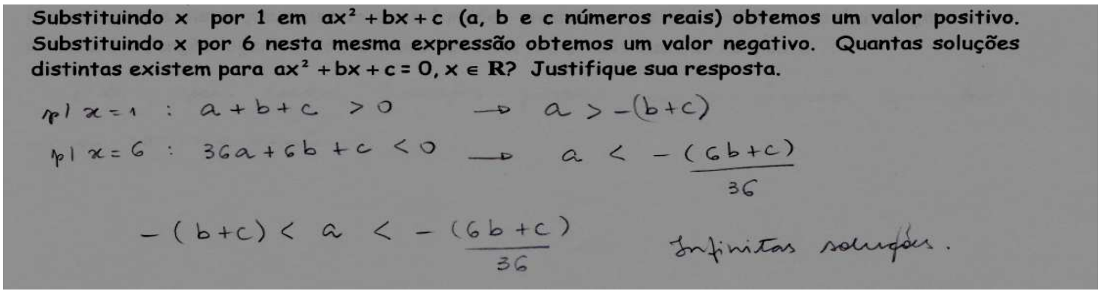

Substituindo x por 1 em $ax^2 + bx + c$ (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2 + bx + c = 0$, $x \in \mathbf{R}$? Justifique sua resposta.

$a+b+c>0$

$36a+6b+c<0$

$$\begin{cases} -a-b-c<0 \\ 36a+6b+c<0 \end{cases} +$$
$$35a+5b<0$$

Não vai ter solução para $ax^2+bx+c=0$, porque nas equações dadas os valores utilizados são para as equações diferente de zero.


Substituindo x por 1 em $ax^2 + bx + c$ (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2 + bx + c = 0$, $x \in \mathbf{R}$? Justifique sua resposta.

p/ $x=1$: $a+b+c>0 \rightarrow a>-(b+c)$

p/ $x=6$: $36a+6b+c<0 \rightarrow a<-\frac{(6b+c)}{36}$

$-(b+c)<a<-\frac{(6b+c)}{36}$ Infinitas soluções.

Figura 2: Respostas da questão três envolvendo soluções algébricas

Como podemos observar, o aspecto algébrico da questão é evidenciado nas soluções acima. Embora algumas das respostas indiquem que os pesquisados reconhecem aspectos da função quadrática, os mesmos não recorreram às suas propriedades gráficas. Mais uma vez é possível verificar que o aspecto algébrico predomina sobre as representações geométricas.

Esta questão foi aplicada por Even (1990) e, na ocasião, aproximadamente 80% dos entrevistados tentaram resolvê-la usando apenas a representação algébrica, enquanto a abordagem gráfica seria mais apropriada. Em nossos estudos, o percentual de respostas incorretas, aproximadamente 76%, ficou bastante próximo dos resultados obtidos pelo autor.

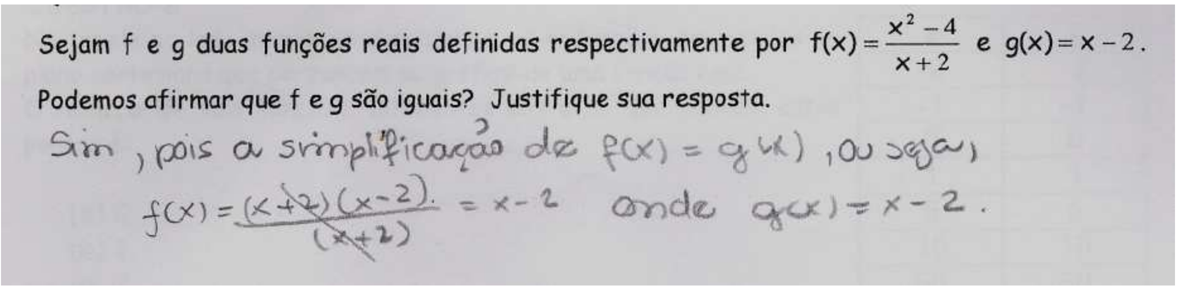
QUESTÃO 4

Sejam f e g duas funções reais definidas respectivamente por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ e $g(x) = x - 2$.

Podemos afirmar que f e g são iguais? Justifique sua resposta.

Pudemos observar que a maioria dos pesquisados, aproximadamente 81%, responderam corretamente esta questão, denotando reconhecer que, para que duas funções sejam iguais, é necessário que o domínio, lei de formação e imagem sejam iguais.

Todos os alunos que erraram efetuaram manipulações algébricas, como no exemplo abaixo. Contudo, esta manipulação algébrica ajuda a perceber que sobre o conjunto IR – {–2}, f(x) = g(x), apesar de f diferir de g já que Dom(f) = IR – {–2} e Dom(g) = IR.



Sejam f e g duas funções reais definidas respectivamente por $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ e $g(x) = x - 2$.

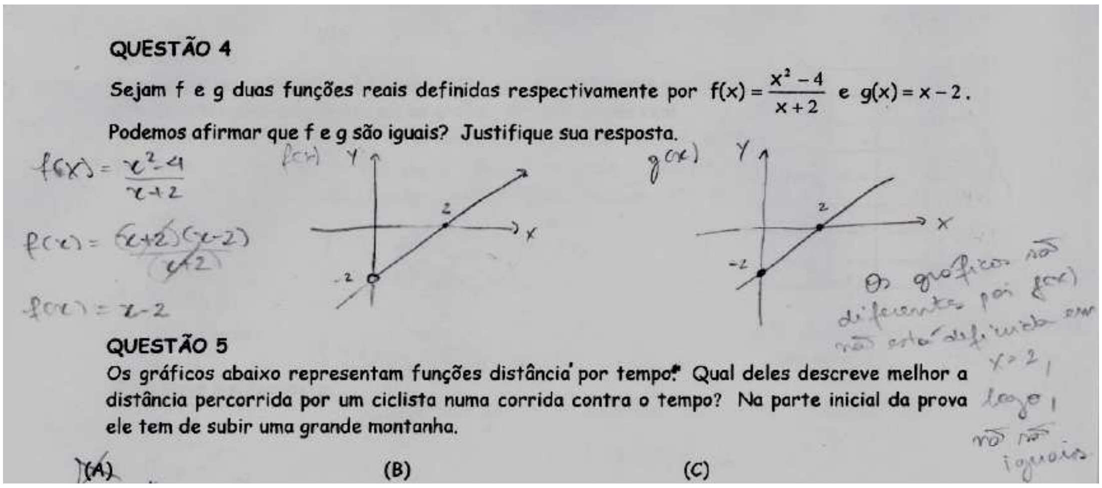
Podemos afirmar que f e g são iguais? Justifique sua resposta.

Sim, pois a simplificação de f(x) = g(x), ou seja,

$f(x) = \dfrac{(\cancel{x+2})(x-2)}{(\cancel{x+2})} = x - 2$ onde $g(x) = x - 2$.

Figura 3: Resposta da professora Rejane

Como podemos ver na figura 4, apenas dois professores-alunos traçaram os gráficos das funções f e g. Porém, ao fazê-lo, cometeram o erro em seu esboço por não definirem a função f para x = 0 enquanto o correto seria não defini-la para x = -2.


QUESTÃO 4

Sejam f e g duas funções reais definidas respectivamente por $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ e $g(x)=x-2$.

Podemos afirmar que f e g são iguais? Justifique sua resposta.

$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$

$f(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{(x+2)}$

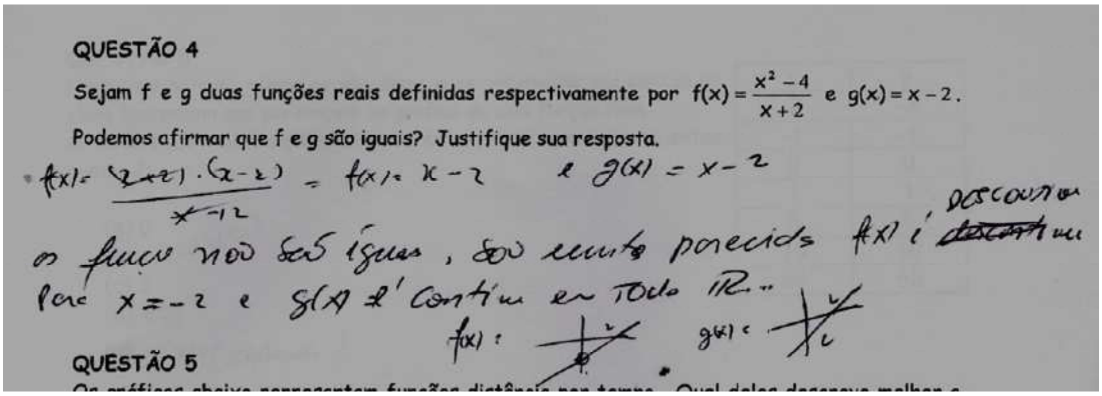
$f(x)=x-2$

Os gráficos não diferentes pois f(x) não está definida em x=2, logo, não são iguais

QUESTÃO 5

Os gráficos abaixo representam funções distância por tempo. Qual deles descreve melhor a distância percorrida por um ciclista numa corrida contra o tempo? Na parte inicial da prova ele tem de subir uma grande montanha.

(A) (B) (C)


QUESTÃO 4

Sejam f e g duas funções reais definidas respectivamente por $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ e $g(x)=x-2$.

Podemos afirmar que f e g são iguais? Justifique sua resposta.

$f(x)=\dfrac{(x+2).(x-2)}{x+2}=f(x)=x-2$ e $g(x)=x-2$

as funções não são iguais, são muito parecidas f(x) é descontínua para $x=-2$ e g(x) é contínua em todo $\mathbb{R}$...

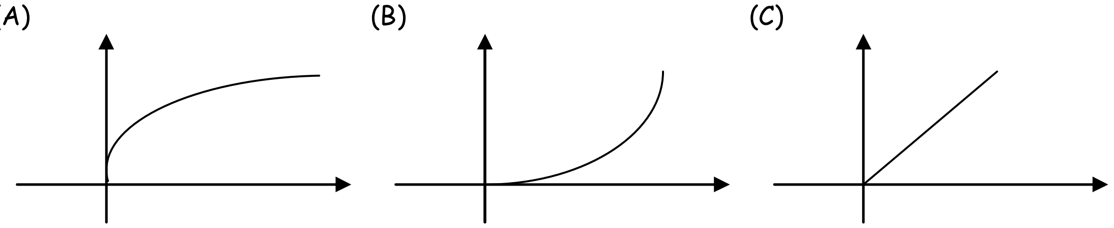
QUESTÃO 5

Figura 4: Respostas dos professores Walter e Júlio

QUESTÃO 5

Os gráficos abaixo representam funções distância por tempo. Qual deles descreve melhor a distância percorrida por um ciclista numa corrida contra o tempo? Na parte inicial da prova ele tem de subir uma grande montanha.

(A) (B) (C)



Nesta questão, por engano foram omitidas as informações dos eixos, *d* (distância) no eixo vertical e *t* (tempo) no eixo horizontal, respectivamente. Caso não houvesse essa omissão, a resposta correta seria B. Entretanto, consideramos como correta as respostas A ou B, desde que o pesquisado informasse os eixos.

Considerando este critério, vinte e cinco professores-alunos responderam corretamente. Observamos que, dentre estes, quinze professores consideraram o item A como opção correta indicando o tempo no eixo vertical e a distância no eixo horizontal, a figura 5 ilustra uma resposta que se enquadra nesta observação.

Segundo Tinoco (2002), existe uma forte tendência dos alunos em atribuir ao primeiro gráfico a resposta da questão, denotando certa confusão entre a trajetória percorrida pelo atleta, no caso a montanha, e o seu deslocamento em função do tempo. Nas entrevistas investigamos, entre aqueles que marcaram a alternativa A (com indicação dos eixos), se não houve uma tentativa inconsciente de ajustar a representação gráfica à trajetória do ciclista.

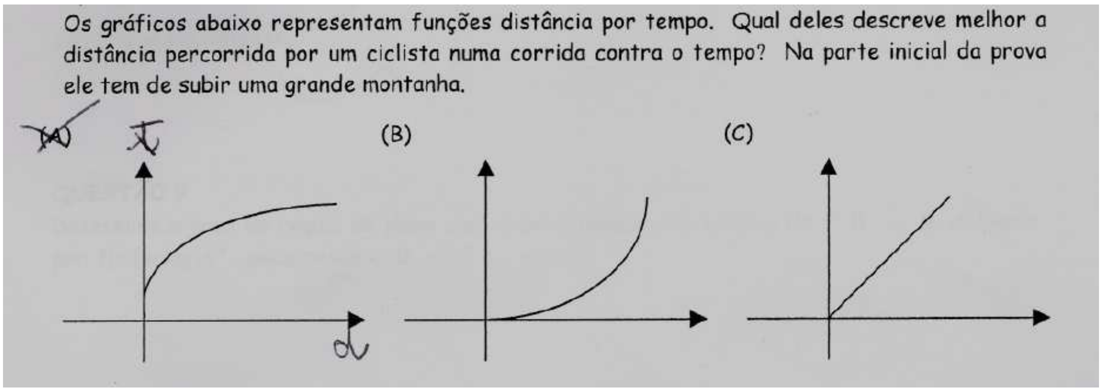


Figura 5: Resposta de Roberto

QUESTÃO 7
Um estudante disse que existem duas funções inversas para $f(x) = 10^x$: uma é a função raiz e a outra é a função logarítmica. O aluno está certo? Justifique sua resposta.

Even (1990) afirma que para o aluno compreender integralmente o conceito de função necessita entender o significado de composição e de inversão de funções. Geralmente, tais conceitos são apresentados de forma simplificada, manipulando-se as expressões algébricas até obter-se o resultado esperado. No caso específico da inversa, normalmente, o recurso mais utilizado é a troca de posições das variáveis na expressão algébrica e o isolamento da variável dependente.

Nesta questão, vinte e dois professores, aproximadamente 62%, responderam que o aluno estaria errado porque função inversa é única e no caso apresentado seria a função logarítmica. Observamos também que sete professores responderam que aluno estava errado informando apenas que a inversa de uma função é única; cinco não responderam ou não justificaram a sua resposta e dois responderam que o aluno estava certo, ou seja, admitiram que as duas funções poderiam ser inversas da função exponencial. Neste caso, ou consideram que a função raiz e a função logarítmica são equivalentes, ou não observaram que a inversa é única.

QUESTÃO 8

Na tabela ao lado temos as abscissas e as ordenadas dos pontos no plano cartesiano que pertencem ao gráfico de uma função real.

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
5	5
10	10
50	50

O número de tais funções, diferentes entre si, que contêm estes pontos é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) $C_{7,2}$
(e) infinito

Justifique sua resposta.

O gráfico abaixo indica que apenas doze dos professores pesquisados responderam esta questão corretamente, ou seja, marcaram a opção (e) justificando corretamente. Entre as outras vinte e quatro respostas: metade escolheu a opção (b) indicando a função identidade como única opção; duas apresentaram justificativas inconsistentes embora tenha marcado a opção (e); três não responderam; quatro não justificaram, embora tenham marcado a opção (e); e três marcaram outras opções.

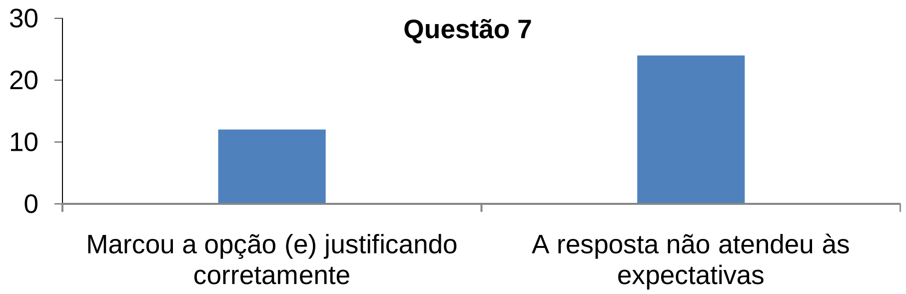


Gráfico 10: Distribuição de respostas da questão sete

Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) realizaram uma pesquisa entre alunos de Israel, em um estágio de ensino compatível com as séries finais do nosso Ensino Fundamental. Verificaram que existe uma forte inclinação, por parte dos alunos, em responder que funções assim apresentadas são funções afins. Apesar da quantidade de anos de escolaridade de nosso público ser bem maior que aquela do público dos autores acima citados, ainda pode-se observar esta tendência.

Geralmente, o ensino de funções no Ensino Médio obedece à seguinte linha: apresentação da lei de formação; tabela de valores; e construção do gráfico. Existe uma valorização excessiva do recurso tabular para a construção do gráfico de uma função, ou seja, dada a lei de formação monta-se uma tabela de pontos (x, f(x)) que serão marcados no plano cartesiano. Even (1990) obtém, com alunos da graduação, o seguinte resultado:

> "Quando perguntado a estudantes de álgebra 2 como eles explicariam o gráfico da função $f(x) = 1 / (x^2 -1)$, metade dos entrevistados iniciou sua explicação sugerindo a construção de uma tabela com alguns valores de x e y (geralmente números inteiros pequenos e seus inversos, que são fáceis de lidar), marcam os pontos e então os conectam na ordem de modo a produzir uma curva suave". (p. 534)

Como podemos observar, mesmo tendo contato com as ferramentas avançadas do cálculo, nosso público alvo ainda incorre na mesma abordagem dos alunos dos estágios iniciais de ensino.

QUESTÃO 9
Determine a área da região do plano cartesiano limitada pelo gráfico de $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \log 10^x$, pelas retas x=0, x = 3 e o eixo $0x$.

Vinte e quatro professores responderam corretamente esta questão, ou seja, forneceram a área solicitada reconhecendo que f(x) era uma composição de uma função pela sua inversa.

Entre os doze professores que erraram a questão, nove cometeram um erro gráfico, conforme podemos verificar na figura 6, ou algébrico na resolução e três não responderam.

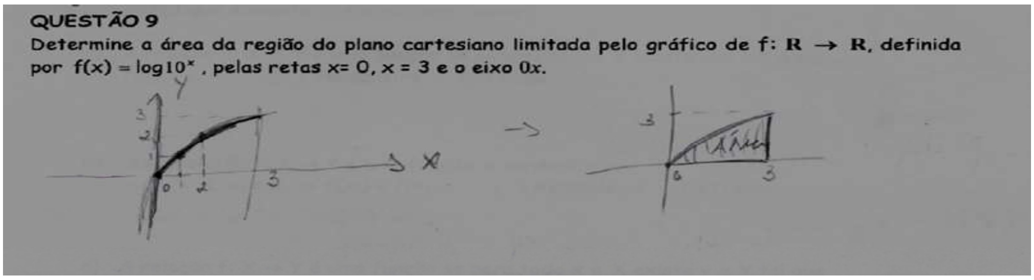
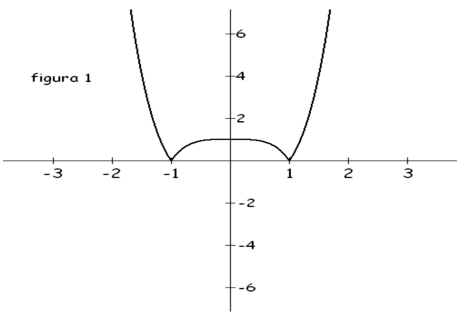


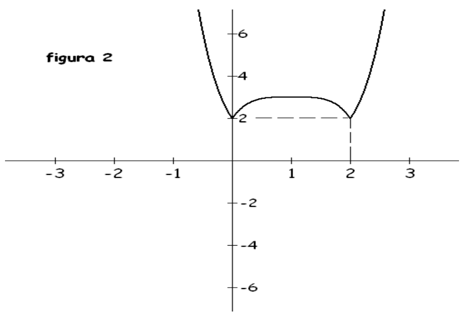
Figura 6: Resposta da questão contendo erro gráfico e sem o cálculo da área

Verificamos que oito entre os doze professores que erraram esta questão também erraram a questão sete, referente à inversa da função exponencial. A composição de uma função com a sua inversa possui um resultado bastante singular. Se o professor na questão não reconheceu que a inversa de uma exponencial é a função logarítmica, certamente ele terá dificuldade em resolver a questão nove, fato que constatamos neste questionário.

QUESTÃO 10

O gráfico da figura 1 pertence à função real f. Na figura 2 representamos o gráfico da função real g que é obtida através de transformações da função f. Escreva a sentença da função g em função de f.





Nesta questão apenas onze professores-alunos acertaram escrevendo a sentença da função g como g(x) = f(x – 1) + 2. O gráfico abaixo apresenta a distribuição dos erros.

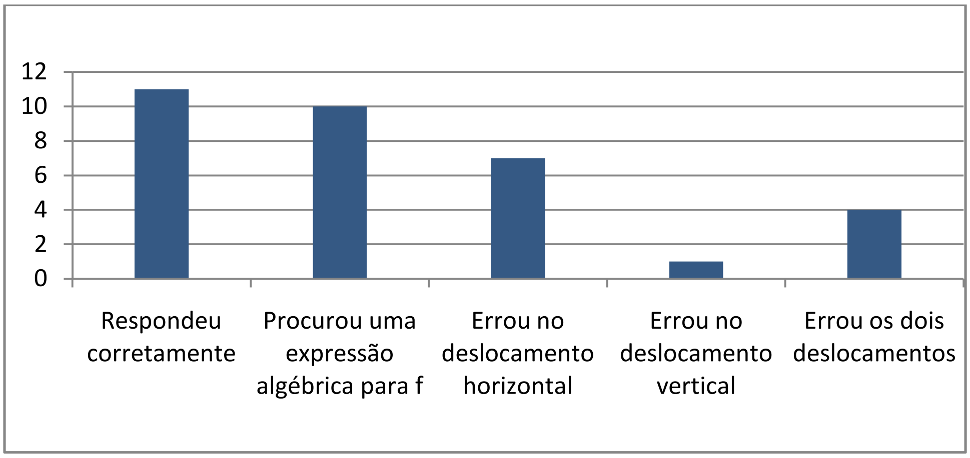


Gráfico 11: Distribuição de erros na décima questão

Dentre os que justificaram incorretamente, dez pesquisados tentaram definir uma lei de formação para a função f e, a partir daí, determinar a lei de formação da função g. Dentre estes dez professores, seis mencionaram que a expressão da função f era $|x^2 - 1|$, talvez induzidos pelo formato do gráfico. Segue abaixo um exemplo de tal situação.

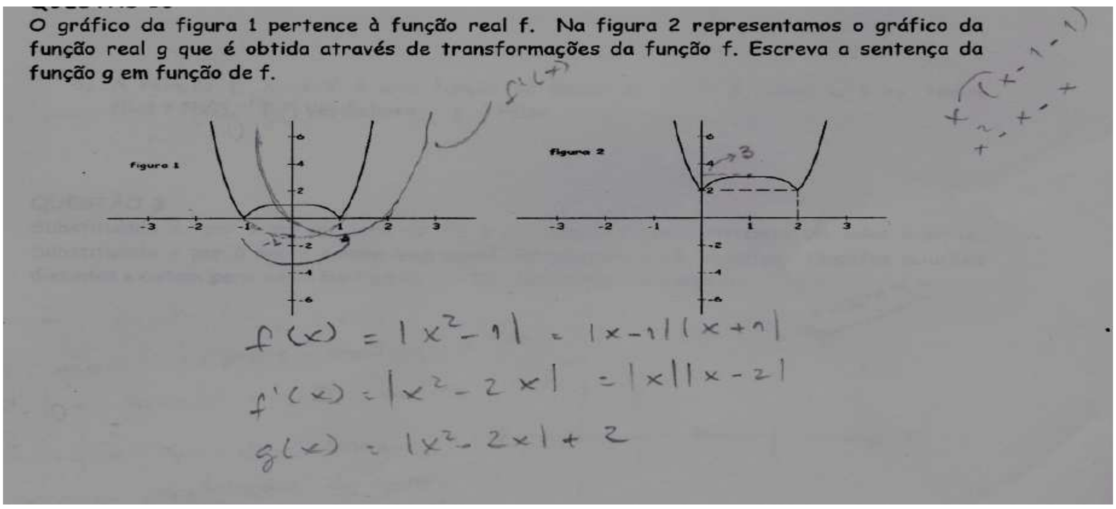


Figura 7: Resposta de Celso

4.3 – A questão reaplicada sobre a definição de função.

QUESTÃO 1.(valor total 2,0 pontos – 0,5 cada) Sabendo que $f: X \to Y$ é uma função, determine se cada uma das afirmativas abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique somente as falsas:

i. Para todo $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.
ii. Se $f(x_1) \neq f(x_2)$ em Y, temos $x_1 \neq x_2$ em X.
iii. Se $x_1 \neq x_2$ em X, temos $f(x_1) \neq f(x_2)$ em Y.
iv. Para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $f(x) = y$.

Dentre os trinta e seis alunos que responderam ao questionário no início do curso vinte e três estavam presentes nesta avaliação. Conforme indicado cada item da questão valia 0,5 perfazendo um total de 2,0 pontos.

Dos professores presentes aproximadamente 65%, correspondente a quinze professores, obteve êxito total. As respostas que não corresponderam às nossas expectativas, quanto às justificativas dos itens (i) e (iii), foram alocadas em duas categorias.

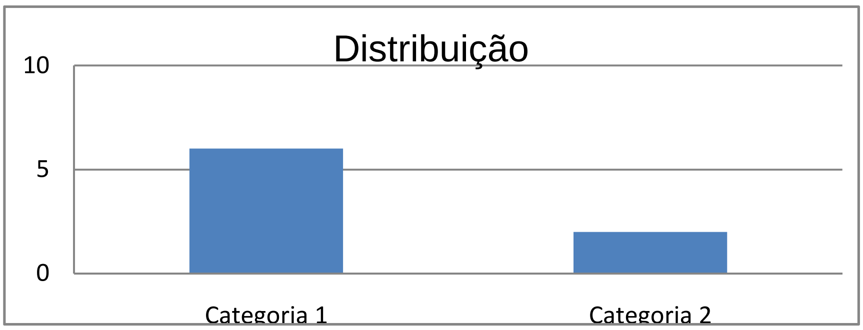


Gráfico 12: Distribuição das categorias referentes às respostas incorretas

Os professores alocados na categoria um justificaram utilizando uma relação não funcional como contra-exemplo e não uma função não sobrejetiva no caso da afirmativa (i) ou não injetiva no caso da afirmativa (iii). O enunciado da questão já afirmara que f é uma função, então não caberia uma justificativa que não utilizasse esta informação. Seis dos oito professores que erraram encontram-se nesta categoria.

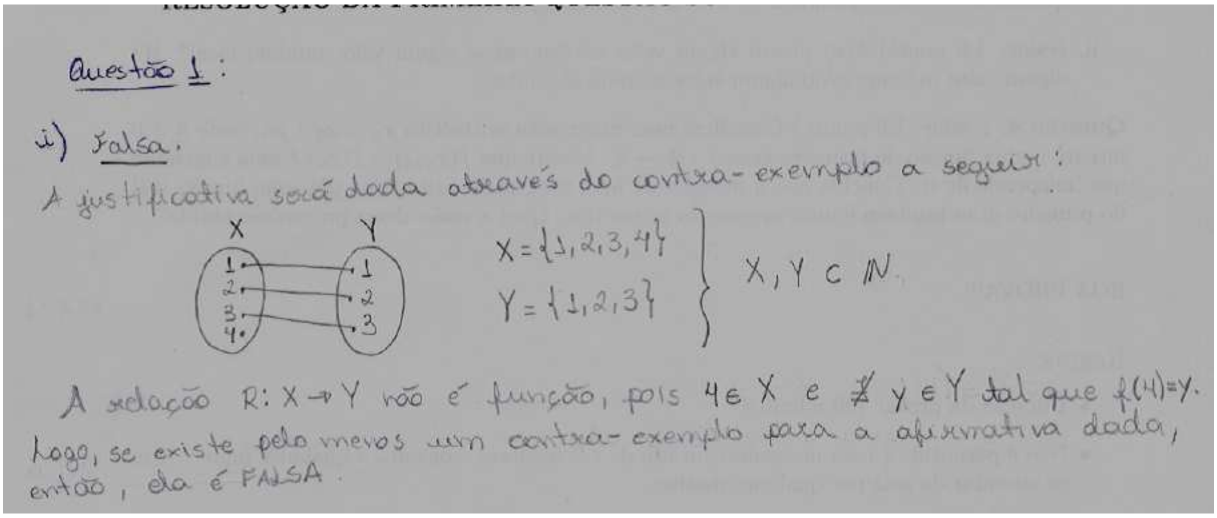


Figura 8: Resposta correspondente a primeira categoria

A categoria dois corresponde às respostas que confundiram a injetividade com a sobrejetividade de uma função, ou seja, no momento de justificar utilizando uma função não sobrejetiva (i) o professor o fez utilizando uma função injetiva, por exemplo. Dois professores encontram-se nesta categoria.

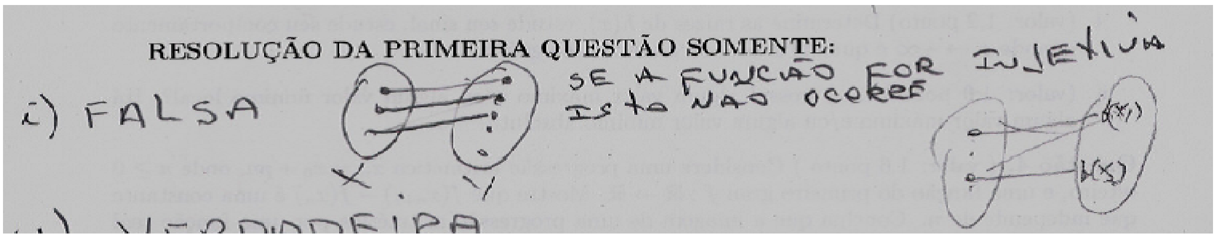


Figura 9: Resposta correspondente a segunda categoria

Verificamos que foram utilizadas as seguintes estratégias nas justificativas: diagrama de setas; funções definidas por expressões algébricas; gráficos; relações entre conjuntos discretos. Dentre estas prevaleceu o diagrama de setas, empregado em doze dos vinte e três testes, destacamos também as justificativas envolvendo expressões algébricas que foram utilizadas em sete testes.

Podemos observar através das soluções que uma considerável parte deste grupo de professores pode ser incluída, segundo a pesquisa de Carneiro, Fantinel e Silva (2003) no Campo Semântico do Elemento/Conjunto, onde uma relação funcional é representada por uma relação (correspondência, associação) entre dois conjuntos A e B tal que a cada elemento de A associa (corresponde) um e só um elemento de B.

Podemos atribuir o desempenho satisfatório na resolução desta questão ao trabalho desenvolvido na fase inicial do curso, na qual foram apresentados os conceitos fundamentais: domínio, contradomínio e imagem; composição de funções; funções injetivas, sobrejetivas e bijetivas; inversa de uma função, entre outros temas.

CAPÍTULO 5 – ENTREVISTAS

Neste capítulo comentaremos as entrevistas efetuadas com alguns dos professores que responderam às questões do caderno de atividades, realizando um paralelo entre estas e as respostas dadas na ocasião da aplicação. Vale ressaltar que estas entrevistas foram efetuadas no final do curso de funções reais.

No início de cada entrevista foi solicitado a cada professor que definisse o conceito de função. Também foi solicitado que informasse qual a primeira imagem que vinha à sua mente quando questionado sobre funções.

No início de cada apresentação é informada a nota de cada professor na resolução do caderno de atividades.

5.1 – Adriana

Na resolução do caderno de atividades Adriana obteve nota 4,4.

Na entrevista, questionada como definiria função a professora utilizou na sua resposta, as seguintes frases:

> Adriana: eu costumo sempre falar que função é uma coisa que depende da outra. Então é um processo crescente ou decrescente, mas contínuo, de alguma coisa quando uma coisa depende da outra [...]. A velocidade, por exemplo, é uma função. A velocidade retilínea uniforme entende? É uma função.
>
> Eu falo assim para os meus alunos. Explico dessa forma, quando eu falo de função digo que é uma coisa que depende da outra, por exemplo, quando eles vão comprar um casaco que custa R$ 30,00 e eles vão comprar dois, eles vão pagar R$ 60,00 e assim por diante.

Como podemos perceber a professora Adriana não define formalmente o conceito de função. Ela utiliza exemplos do cotidiano para relatar a dependência entre variáveis, e considera em sua fala apenas as funções contínuas.

Adriana, ao ser questionada quanto à primeira imagem que lhe vem à mente sobre o tema função, afirma que a imagem predominante é o seu gráfico no plano cartesiano.

A seguir iremos confrontar algumas justificativas dadas no questionário com as suas argumentações na entrevista.

5.1.1 - Questão 1

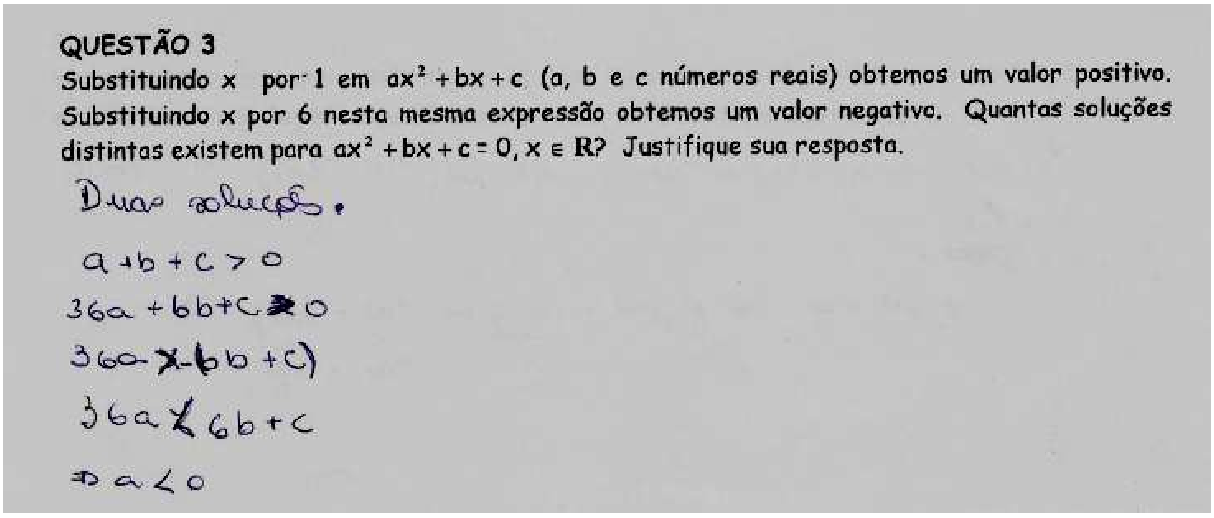
Adriana classificou o item (c) da primeira questão como exemplo de uma relação funcional, respondendo da seguinte forma:

> Adriana: sim. O volume x estaria associado a um valor x, então, quando o volume [sólido] for diferente seu valor associado também será.

Tal afirmação não considera que dois cilindros distintos podem possuir o mesmo volume e neste caso não teríamos uma relação funcional. Na entrevista a professora reconhece que um número real x pode ser associado a cilindros diferentes o que não caracterizaria uma relação funcional.

5.1.2- Questão 3

Adriana afirma que existem duas soluções para a equação proposta, porém não justifica coerentemente, como podemos ver na figura 10.



QUESTÃO 3

Substituindo x por 1 em $ax^2 + bx + c$ (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2 + bx + c = 0, x \in \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

Duas soluções.

$a + b + c > 0$

$36a + 6b + c < 0$

$36a - (-6b + c)$

$36a < 6b + c$

$\Rightarrow a < 0$

Figura 10: Resolução da questão três por Adriana

Durante a entrevista a professora não identifica nenhuma outra forma de resolver tal questão, somente a utilizada no momento da resolução. Embora tenha afirmado que a sua imagem predominante de função seja a do gráfico no plano cartesiano, quando argüida, não recorreu em momento algum, de forma explícita ou implícita, a este argumento.

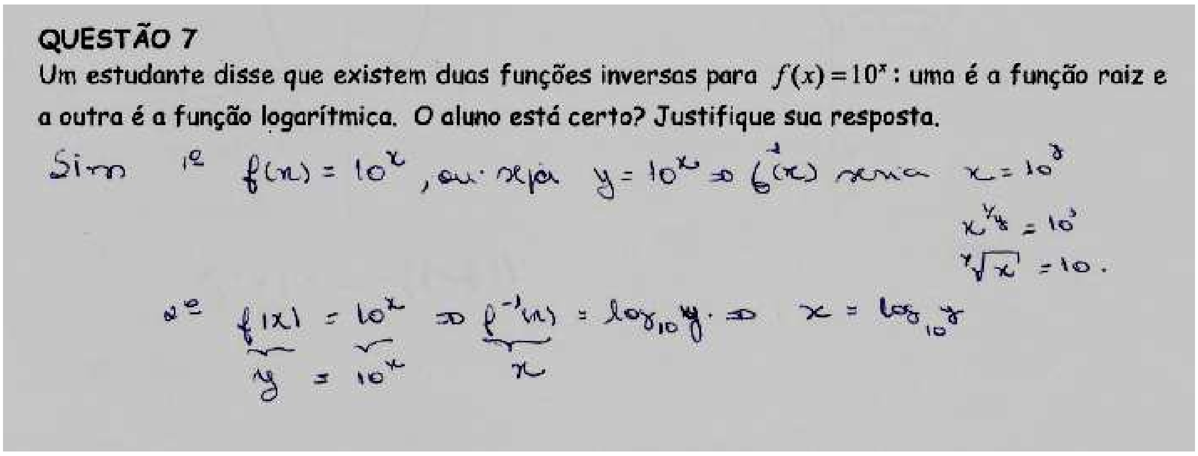
5.1.3- Questão 4

Na quarta questão afirma que as duas funções f e g são iguais, embora os seus domínios sejam diferentes. Tal avaliação indica que dentre os três objetos fundamentais da função: domínio; lei de formação; e contra domínio, ela privilegia a lei de formação e o contradomínio negligenciando o domínio.

Durante a entrevista, quando questionada sobre a sua resolução nesta questão, a professora reafirma que as funções são iguais, utilizando a mesma argumentação presente na resolução da questão e não atentando para a restrição no denominador da expressão algébrica da função f.

5.1.4- Questão 7

Na resposta desta questão a professora afirma que a função definida por $f(x) = 10^x$ admite duas inversas, chegando a tentar justificar tal afirmação, conforme podemos ver na figura 11.



QUESTÃO 7

Um estudante disse que existem duas funções inversas para $f(x) = 10^x$: uma é a função raiz e a outra é a função logarítmica. O aluno está certo? Justifique sua resposta.

Sim 1º $f(x) = 10^x$, ou seja $y = 10^x \Rightarrow f^{-1}(x)$ seria $x = 10^y$

$x^{1/y} = 10$

$\sqrt[y]{x} = 10.$

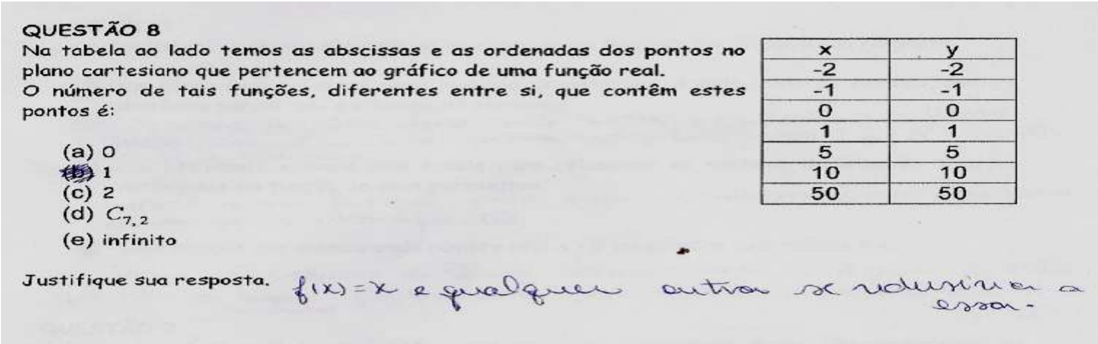
2º $\underbrace{f(x)}_{y} = \underbrace{10^x}_{10^x} \Rightarrow \underbrace{f^{-1}(x)}_{x} = \log_{10} y \Rightarrow x = \log_{10} y$

Figura 11: Resolução da questão sete por Adriana

Na entrevista Adriana manteve a resposta dada no questionário afirmando que, segundo o seu ponto de vista, as funções definidas pelas sentenças $f(x) = \log x$ e $f(x) = \sqrt[x]{10}$ são idênticas.

5.1.5- Questão 8

Na oitava questão ela afirma que a tabela refere-se apenas à função identidade e na sua justificativa afirma que qualquer outra função pode ser “reduzida” a essa, conforme vemos na figura 12.



QUESTÃO 8
Na tabela ao lado temos as abscissas e as ordenadas dos pontos no plano cartesiano que pertencem ao gráfico de uma função real.
O número de tais funções, diferentes entre si, que contêm estes pontos é:

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) $C_{7,2}$
(e) infinito

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
5	5
10	10
50	50

Justifique sua resposta. $f(x)=x$ e qualquer outra se reduziria a essa.

Figura 12: Resolução da questão oito por Adriana

Quando questionada na ocasião da entrevista, sobre a sua resposta, reafirma que o gráfico da função é único, a função identidade, devido à proporcionalidade da tabela. Ela ainda afirma que utilizou a mesma linha de raciocínio da quarta questão, conforme podemos conferir no diálogo abaixo:

> Adriana: eu pensei nessa função na mesma forma que eu pensei na função do item quatro. Eu pensei que qualquer função que você trabalha que você chega na mesma reta ou no mesmo gráfico, vamos dizer assim, porque esse gráfico aqui é uma reta.
>
> Entrevistador: porque é uma reta?
>
> Adriana: por que é proporcional entendeu. Então pra mim esse gráfico aqui é uma reta, eu vejo este gráfico como uma reta sempre. E se você sempre vai chegar na mesma reta, no mesmo gráfico, você vai ter a mesma função. Então qualquer função que você encontra, uma diferente da outra, você pode vai chegar na mesma função porque você vai simplificar, você vai trabalhar ela de forma que chegue na mesma função.

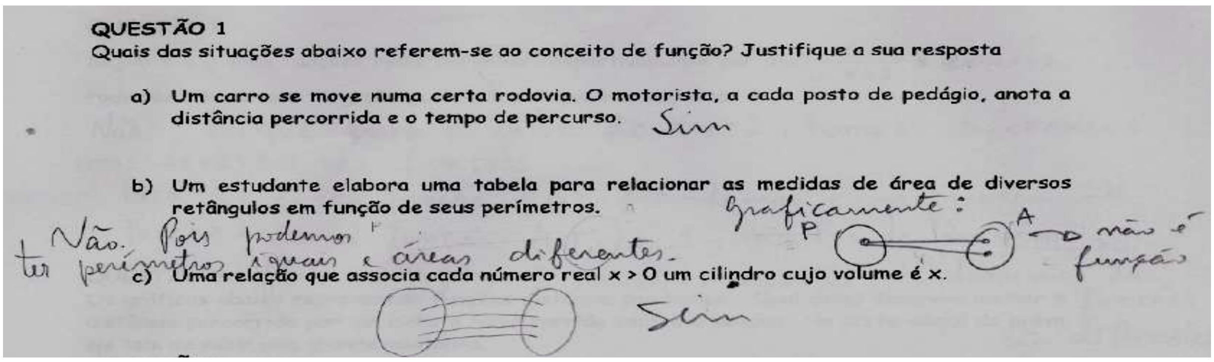
5.2 – Bernardo

Na resolução do caderno de atividades Bernardo obteve nota 5,0.

Na entrevista, ao ser questionado como definiria função, Bernardo define como uma relação entre dois conjuntos A e B onde cada elemento do conjunto A é associado a um único elemento do conjunto B. Ele ainda afirma que a primeira imagem que lhe vem à mente quando o assunto é função é o diagrama de setas, outra imagem que lhe ocorre é a expressão algébrica que define a lei de formação. Realmente, em várias oportunidades no questionário utiliza o diagrama de setas e também efetua manipulações algébricas em suas resoluções, mesmo quando a questão não exige este tipo de tratamento.

5.2.1 – Questão 1

Na aplicação do questionário Bernardo classificou o item (c) da primeira questão como exemplo de uma relação funcional. Na sua justificativa ele realiza uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos utilizando um diagrama de setas.



QUESTÃO 1
Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta

a) Um carro se move numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso. Sim

b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros. Graficamente: P A → não é função

Não. Pois podemos ter perímetros iguais e áreas diferentes.

c) Uma relação que associa cada número real $x > 0$ um cilindro cujo volume é x. Sim

Figura 13: Resolução da questão um por Bernardo

Durante a entrevista, o professor, quando questionado em relação ao referido item desta questão, mostrou-se inseguro em confirmar a resposta ou retificá-la, respondendo:

> Bernardo: Ainda fico com dúvida se é ou não é para te falar a verdade. Minha dúvida é a seguinte: como eu vou saber que um número x maior que zero, que pode ser qualquer número e o volume do cilindro está associado a área da base que tem a fórmula πr^2 vezes uma altura qualquer, e esse número π é irracional, como é que eu posso ter um número x = 1 e associá-lo a um volume igual a 1 se tenho π no meio dessa história do outro lado da equação.
>
> Entrevistador: E você acha que não seria função por isso?
>
> Bernardo: Não é função. Então não seria função.

Na verdade Bernardo acha que o exemplo não é uma relação funcional, pois, segundo ele, haveria números no domínio que não possuem uma imagem associada. Podemos verificar que Bernardo tem dificuldade em interpretar os irracionais como números que podem ser manipulados, ele demonstra problemas quanto ao entendimento de número, em especial com a compreensão de número real.

5.2.2 – Questão 5

Na questão, como podemos ver na figura 14, Bernardo indica que o gráfico que descreve a situação apresentada no problema é o da opção c.

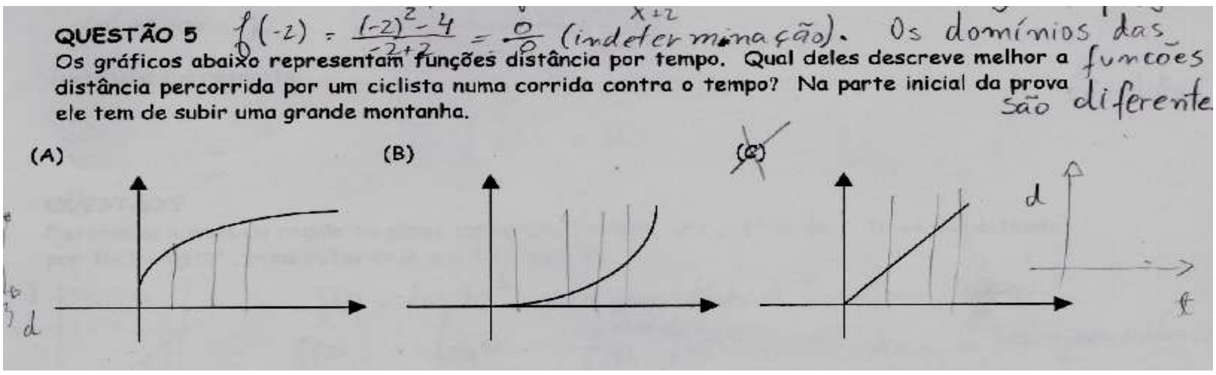


Figura 14: Resolução da questão cinco por Bernardo

Durante a entrevista seguiu-se o seguinte diálogo:

Bernardo: Para falar a verdade eu estava com dúvidas. Eu achei que eu tinha que marcar uma opção e então eu marquei uma sem ter certeza.

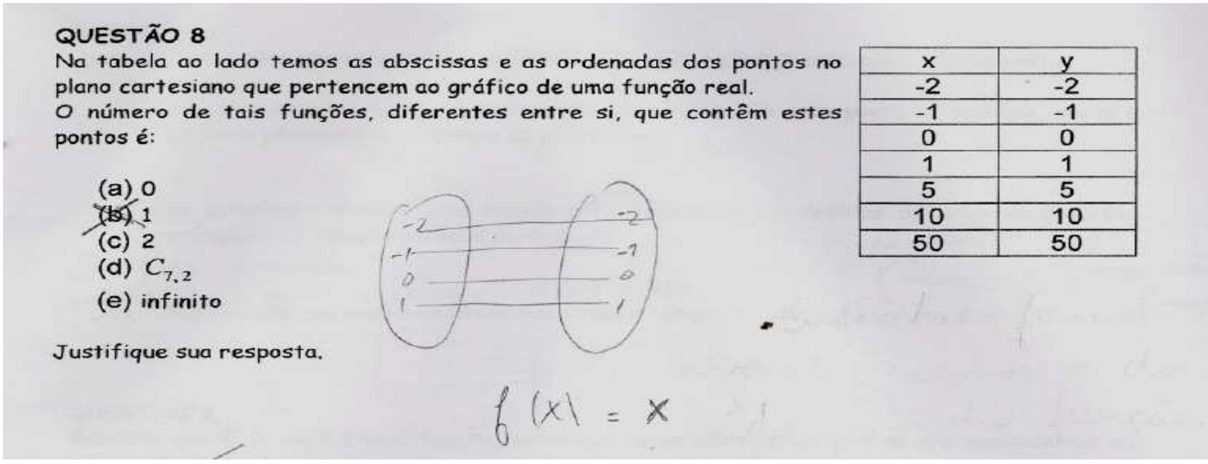
Entrevistador: E olhando para esta questão agora você continua com dúvidas?

Bernardo: Sim ainda estou com dúvidas.

Como podemos verificar mesmo após o curso de funções reais, Bernardo ainda apresenta dificuldades para resolver esta questão.

5.2.3 – Questão 8

Na oitava questão Bernardo afirma que a tabela refere-se apenas à função identidade e utiliza um diagrama de setas para justificar.



QUESTÃO 8
Na tabela ao lado temos as abscissas e as ordenadas dos pontos no plano cartesiano que pertencem ao gráfico de uma função real.
O número de tais funções, diferentes entre si, que contêm estes pontos é:

(a) 0
~~(b)~~ 1
(c) 2
(d) $C_{7,2}$
(e) infinito

Justifique sua resposta.

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
5	5
10	10
50	50

$f(x) = x$

Figura 15: Resolução da questão oito por **Bernardo.**

Na ocasião da entrevista, quando questionado, apresentou a seguinte resposta:

Bernardo: Acredito que talvez tenha mais que uma, mas eu não consigo achar outra função, agora, com outra lei de formação que vá satisfazer isso aqui [tabela].

Podemos verificar pela sua resposta uma predominância no caráter algébrico em detrimento de uma abordagem gráfica para a justificativa desta resposta, ou seja, o professor reconhece que possam existir outras funções, mas para ele necessariamente tem que haver uma expressão algébrica que as defina.

5.2.4 – Questão 10

Na décima questão assume, a partir das raízes de f, que o seu gráfico é dado por $f(x) = |x^2 - 1|$ e, a partir desta expressão, tenta analisar as translações ocorridas com f para chegar a g.

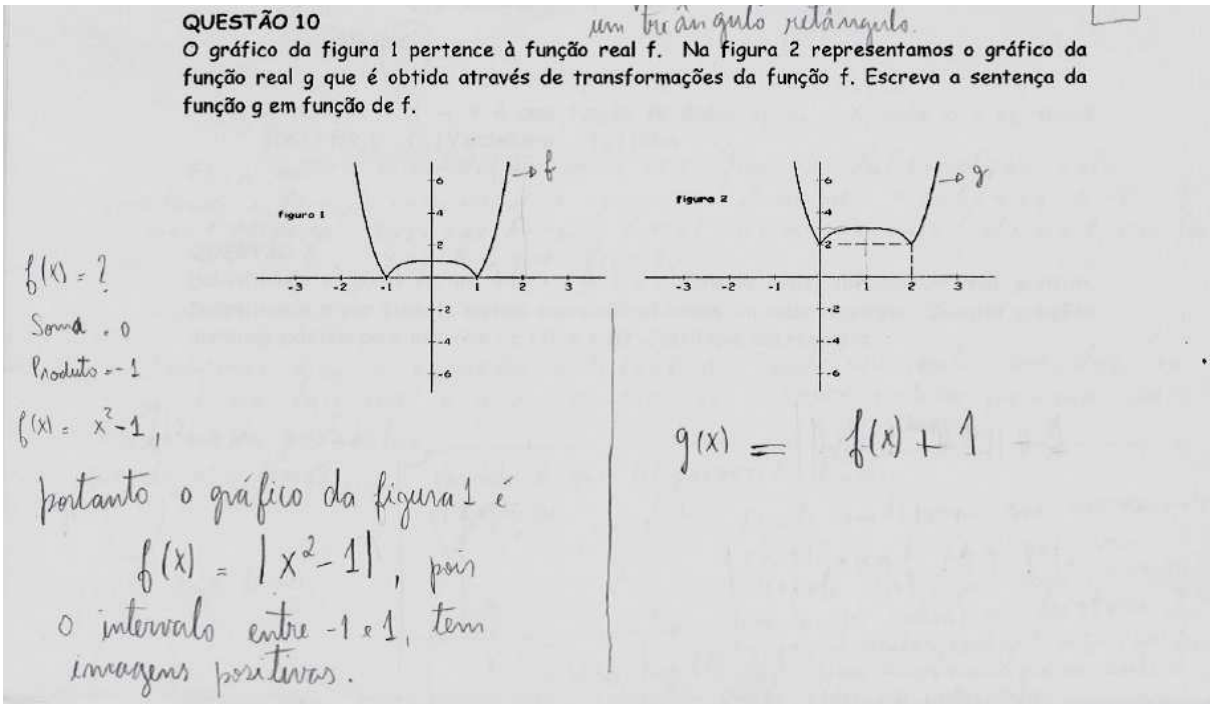


Figura 16: Resolução da questão dez por Bernardo

Na ocasião da entrevista Bernardo, revela que durante a aplicação do teste acreditava ser necessária a determinação da lei de formação da função f, tanto que assumiu, sem nenhuma informação consistente que o seu gráfico seria definido por $y = |x^2 - 1|$, demonstrando o predomínio da representação algébrica em relação aos aspectos gráficos e suas transformações. Todavia, durante a entrevista, Bernardo admite que a resolução da questão seria possível observando-se as translações sofridas pelo gráfico de f.

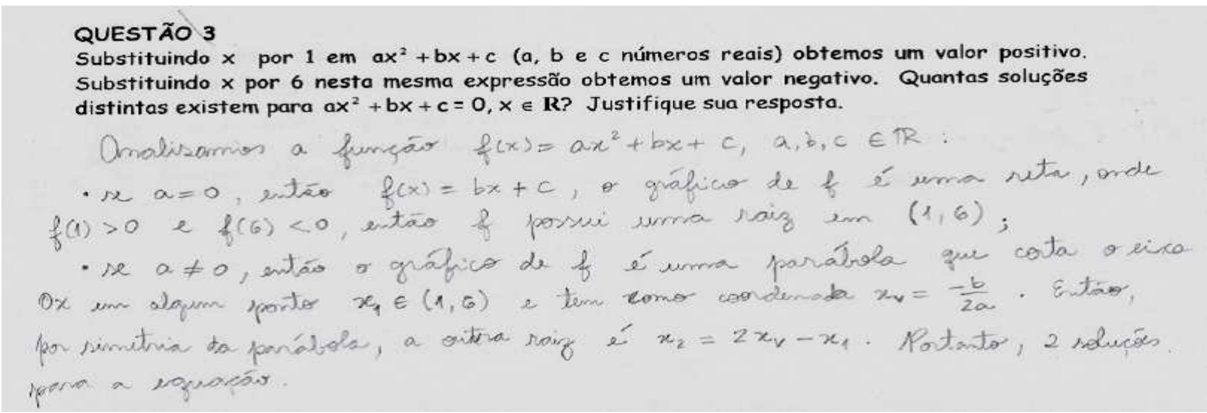
5.3 – César

Na resolução do caderno de atividades César obteve nota 10, demonstrando através de seu desempenho o domínio dos aspectos do quadro teórico de Even explorados no questionário.

Na entrevista, César define função como: *uma relação entre dois conjuntos A e B em que, para todo elemento de A associa um elemento de B*. Notemos que, embora este professor tenha obtido um ótimo desempenho satisfatório, em sua definição a unicidade é omitida. Quanto à imagem predominante, ele indica que é a lei de formação dada por uma expressão algébrica.

5.3.1 – Questão 3

César foi o único a considerar o coeficiente *a* da expressão ax^2+bx+c (a, b e c números reais) igual a zero, na figura 17 está apresentada a resolução da sua questão, que está correta.



QUESTÃO 3
Substituindo x por 1 em ax^2+bx+c (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2+bx+c=0$, $x \in \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

Analisaremos a função $f(x) = ax^2+bx+c$, $a,b,c \in \mathbb{R}$:

• se $a=0$, então $f(x) = bx+c$, o gráfico de f é uma reta, onde $f(1)>0$ e $f(6)<0$, então f possui uma raiz em $(1,6)$;

• se $a \neq 0$, então o gráfico de f é uma parábola que corta o eixo Ox em algum ponto $x_1 \in (1,6)$ e tem como coordenada $x_v = \frac{-b}{2a}$. Então, por simetria da parábola, a outra raiz é $x_2 = 2x_v - x_1$. Portanto, 2 soluções para a equação.

Figura 17: Resolução da questão três por César

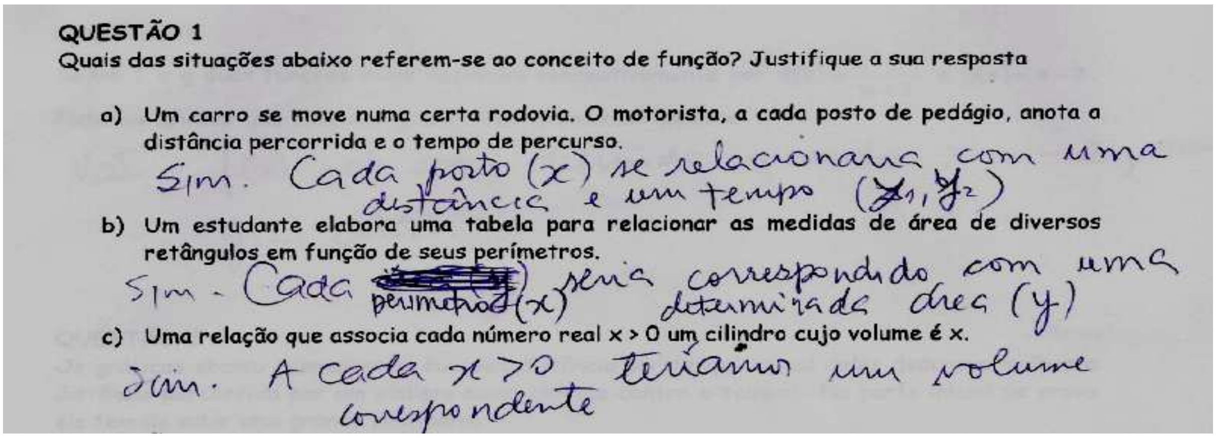
5.4 – Celso

Na resolução do caderno de atividades Celso obteve nota 5,9.

Na entrevista, Celso define função da seguinte forma: *dados dois conjuntos A e B todo elemento de A se corresponde com algum elemento de B*. Podemos verificar na definição dada por Celso que a unicidade também é omitida. Celso indica o gráfico da função no plano cartesiano como a imagem predominante para o objeto função.

5.4.1 – Questão 1

Na resolução do caderno de atividades o professor Celso classificou os três exemplos como relações funcionais, conforme podemos observar na figura abaixo.



QUESTÃO 1

Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta

a) Um carro se move numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso.

Sim. Cada posto (x) se relacionava com uma distância e um tempo (y_1, y_2)

b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros.

Sim. Cada perímetro (x) seria correspondido com uma determinada área (y)

c) Uma relação que associa cada número real x > 0 um cilindro cujo volume é x.

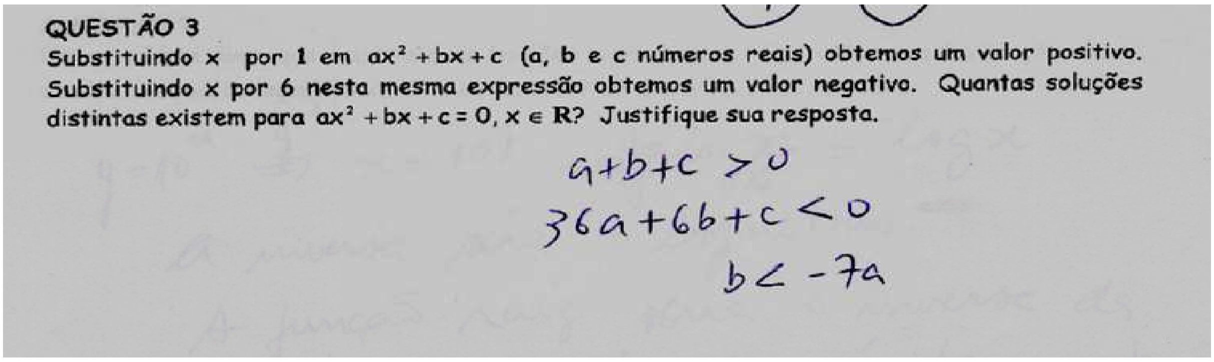
Sim. A cada x > 0 teríamos um volume correspondente

Figura 18: Resolução da questão um por Celso

Questionado sobre as suas respostas manteve-as.

5.4.2 – Questão 3

Apesar de esboçar algumas desigualdades na resolução da terceira questão, como podemos observar na figura 19, Celso não desenvolveu nenhum raciocínio que merecesse destaque.



QUESTÃO 3
Substituindo x por 1 em $ax^2 + bx + c$ (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2 + bx + c = 0$, $x \in \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

$a+b+c>0$
$36a+6b+c<0$
$b<-7a$

Figura 19: Resolução da questão por Celso

Durante a entrevista o professor Celso não indicou nenhum outro modo de resolver a questão indicada. Embora tenha afirmado que a imagem predominante de uma função para ele é o seu gráfico, ele não o utilizou para resolver a questão.

5.4.3 – Questão 5

Na questão cinco ele marca a opção (A), como mostra a figura 20, porém não identificou os eixos coordenados.

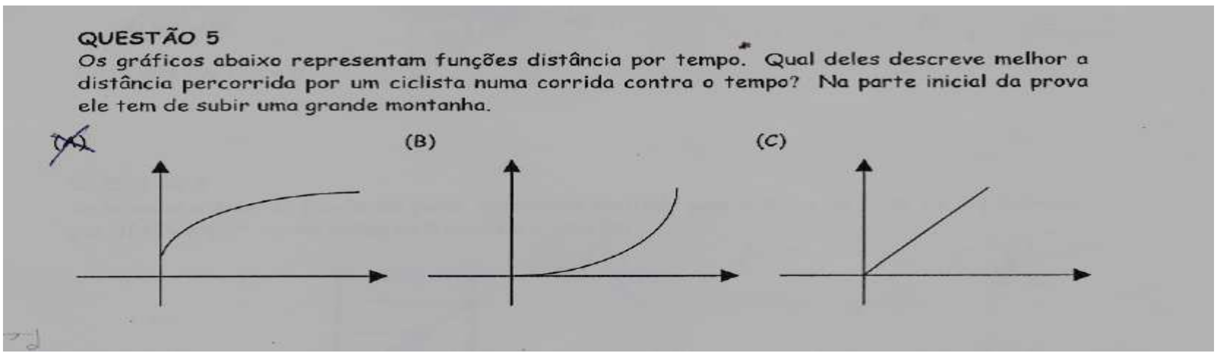


Figura 20: Resolução da questão cinco por Celso

Quando questionado durante a entrevista sobre a localização das variáveis tempo e distância nos eixos coordenados houve o seguinte diálogo:

> Entrevistador: Na questão cinco você marcou o item (a), mas não indicou as variáveis nos eixos. Qual o eixo referente à distância e qual o eixo referente ao tempo?
>
> Celso: Eixo x distância e o eixo y tempo.
>
> Entrevistador: Você quer dizer distância no eixo horizontal e tempo no eixo vertical.
> Celso: Sim.
>
> Celso: Eu agora estou vendo que não ficou legal a resposta.
>
> Entrevistador: Por quê?
>
> Celso: É porque a distância vai aumentando e o tempo também. O tempo vai correndo, porque nesse aqui (apontando para o item b) é como se o tempo estivesse parando, sei lá, né. [...] Mas o tempo vai crescendo linearmente. A distância que eu acho que vai crescendo à medida que a velocidade vai aumentando mais rápido.
>
> Entrevistador: Mas ele está subindo uma montanha?
>
> Celso: É uma montanha. Acho que a (b) não seria, pois a distância vai aumentando. Eu acho que é a (a). É uma corrida contra o tempo, então vai haver um momento aqui em que o tempo vai parar.

Apesar de Celso ter afirmado que o eixo vertical representava o tempo e o eixo horizontal representava a distância percorrida, o que indicaria certa coerência em relação à situação apresentada, na sua explicação ele não sustenta sua escolha com argumentos convincentes. Embora afirme que a imagem predominante de função seja o seu gráfico no plano cartesiano, ele não consegue, no problema dado, relacionar a variação entre as grandezas, quando colocadas nos eixos coordenados, podemos notar esta confusão na sua última resposta.

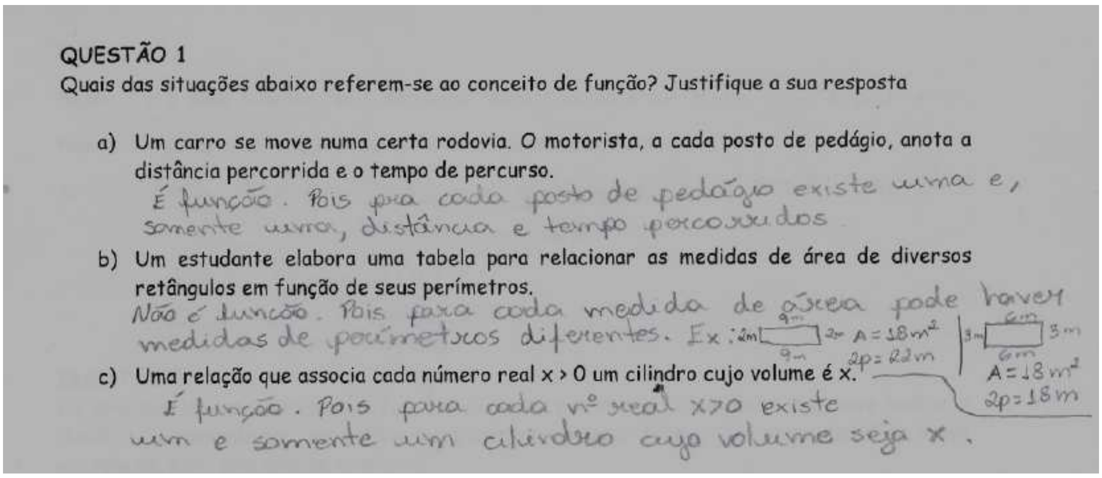
5.5 – Camila.

Na resolução do caderno de atividades Camila obteve nota 3,4.

A definição de função apresentada por Camila foi a seguinte: *“Para cada número real x de um conjunto denominado domínio associamos um e somente um elemento do Contradomínio.”* Sobre a imagem predominante a professora afirma ser o diagrama de setas.

5.5.1 – Questão 1.

Camila classificou o item (c) da primeira questão como exemplo de uma relação funcional e na sua justificativa realizou uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números reais positivos e conjunto dos cilindros.


QUESTÃO 1

Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta

a) Um carro se move numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso.

É função. Pois pra cada posto de pedágio existe uma e, somente uma, distância e tempo percorridos.

b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros.

Não é função. Pois para cada medida de área pode haver medidas de perímetros diferentes. Ex: 2m, 9m, $A = 18m^2$, $2p = 22m$ | 3m, 6m, $A = 18m^2$, $2p = 18m$

c) Uma relação que associa cada número real x > 0 um cilindro cujo volume é x.

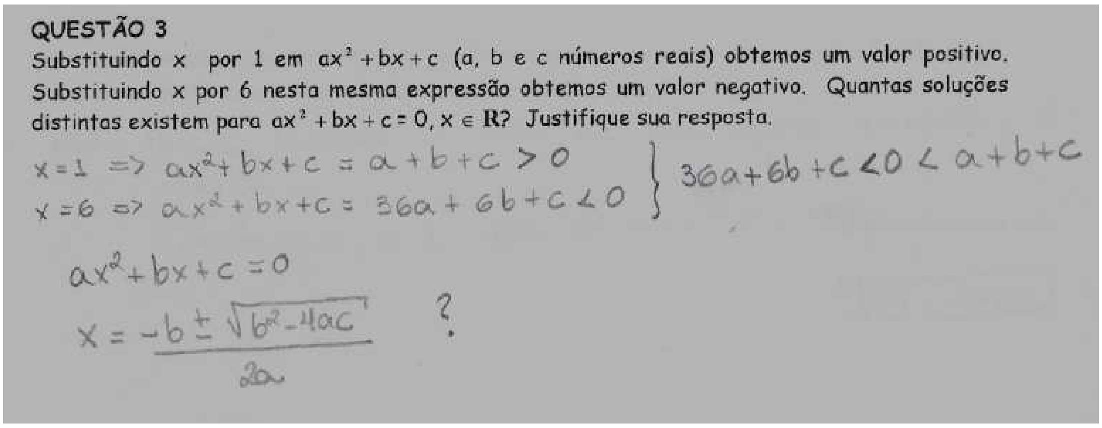
É função. Pois para cada nº real x>0 existe um e somente um cilindro cujo volume seja x.

Figura 21: Resolução da questão um por Camila

Na ocasião da entrevista a professora reafirmou que o item (c) era uma função, não reconhecendo que um número real pode estar associado ao volume de cilindros diferentes.

5.5.2 – Questão 3

Na questão três, após tentativas de substituição dos valores informados na expressão algébrica e manipulações, Camila não chegou à conclusão alguma.


QUESTÃO 3

Substituindo x por 1 em ax^2+bx+c (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2+bx+c=0$, $x \in \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

$x=1 \Rightarrow ax^2+bx+c = a+b+c > 0$

$x=6 \Rightarrow ax^2+bx+c = 36a+6b+c < 0$

$36a+6b+c < 0 < a+b+c$

$ax^2+bx+c=0$

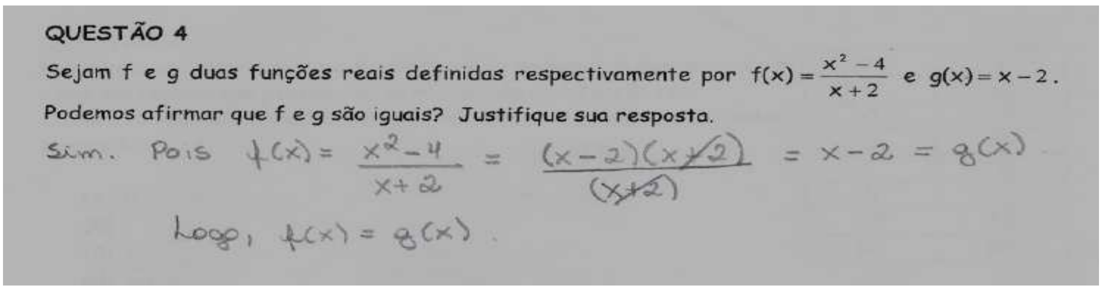
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$?

Figura 22: Resolução da questão três por Camila

Durante a entrevista Camila não mudou a sua linha de raciocínio e continuou tentando justificar através do discriminante.

5.5.3 – Questão 4

Na quarta questão, após algumas manipulações algébricas na lei de formação de f, afirma que as duas funções f e g são iguais. Tal avaliação indica que dentre os três objetos fundamentais da função: domínio; lei de formação; e contra domínio, Camila privilegia a lei de formação e o contradomínio negligenciando o domínio, pois os domínios das funções são diferentes.


QUESTÃO 4

Sejam f e g duas funções reais definidas respectivamente por $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ e $g(x)=x-2$. Podemos afirmar que f e g são iguais? Justifique sua resposta.

Sim. Pois $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2} = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}} = x-2 = g(x)$

Logo, $f(x) = g(x)$.

Figura 23: Resolução da questão quatro por Camila

Na entrevista Camila retificou a resposta dada anteriormente diferenciando as funções f e g, observando que os seus domínios são diferentes. A professora afirmou que o curso contribuiu para esta mudança.

5.5.4 – Questão 5

Na questão cinco Camila marca a opção (A) considerando o tempo no eixo vertical e a distância percorrida no eixo horizontal, o que estaria certo. Segue a justificativa da professora para este procedimento:

> Entrevistador: Você marcou o item A colocando no eixo vertical o tempo e no eixo horizontal a distância percorrida.
>
> Camila: É função distância por tempo porque sempre se fala na distância primeiro [...] e eu fui por aí.

No próximo momento a professora justifica o gráfico escolhido.

> Camila: É uma corrida contra o tempo, então o ciclista está aumentando a velocidade [...] na parte inicial da prova ele teria que subir uma grande montanha, então a (C) eu eliminei porque quanto maior o tempo maior será a velocidade dele e maior será a distância percorrida [...] porque distância é velocidade vezes tempo e se a velocidade aumenta a distância também aumenta. Então fica entre a A e a B porque a velocidade não é constante.
>
> Aí nas duas olhando para o A e o B a distância vai aumentando e o tempo também. O que me fez marcar a (A) é que na parte inicial da prova ele tem que subir uma grande montanha. [...] Aqui o tempo está subindo e a distância também (no item A) neste também tempo está subindo e a distância também (no item B), então pode ser qualquer um desses dois, mas aqui está dizendo que ele tem quê subir uma grande montanha então eu optaria por essa (item A).
>
> Entrevistador: Marcando os eixos dessa forma?
>
> Camila: Sim.
>
> Entrevistador: Então se mantivermos os eixos *t* (vertical) e *d* (horizontal) não é o gráfico B por quê? Por causa dessa situação, do ciclista subindo a montanha?
>
> Camila: Também pode ser assim. Porque se na parte inicial ele tem que subir uma grande montanha ele vai mais lento na parte inicial e depois ele vai mais rápido. Hoje já olhando dessa forma que eu pensei agora aqui ele está indo mais lento no início e depois ele está indo mais rápido.

> Entrevistador: Mas continua o tempo na vertical e distância na horizontal?
>
> Camila: Já vi que não é. Já vi que é ao contrário (a marcação dos eixos). Mas porque eu não sei. [...] Seria a letra com *t* na horizontal e *d* na vertical.
>
> Entrevistador: O que te influenciou a marcar o item (A)?
>
> Camila: Eu vi pelo formato de subir uma montanha, mas não tem nada ver com gráfico. O gráfico não é desenho da montanha, é uma função. Mas na hora eu pensei “não tem montanha assim” (referente à opção B) então só pode ser essa (referente à opção A), mas não tem nada haver. Hoje eu sei que não tem.

Como pudemos observar embora Camila tenha optado pelo gráfico (A) com os eixos devidamente escolhidos, ela o fez influenciada pela trajetória do ciclista e não pela relação entre distância e tempo.

5.5.5 – Questão 8

Na oitava questão Camila afirma que a tabela refere-se apenas à função identidade, mas não justifica a sua resposta.

Durante a entrevista Camila reafirma que a única função real que pode ser representada pela tabela indicada é a função identidade.

5.5.6 – Questão 10

Na décima questão ela tenta verificar uma relação entre as funções através de tabelas de valores, porém não apresenta nenhuma resposta.

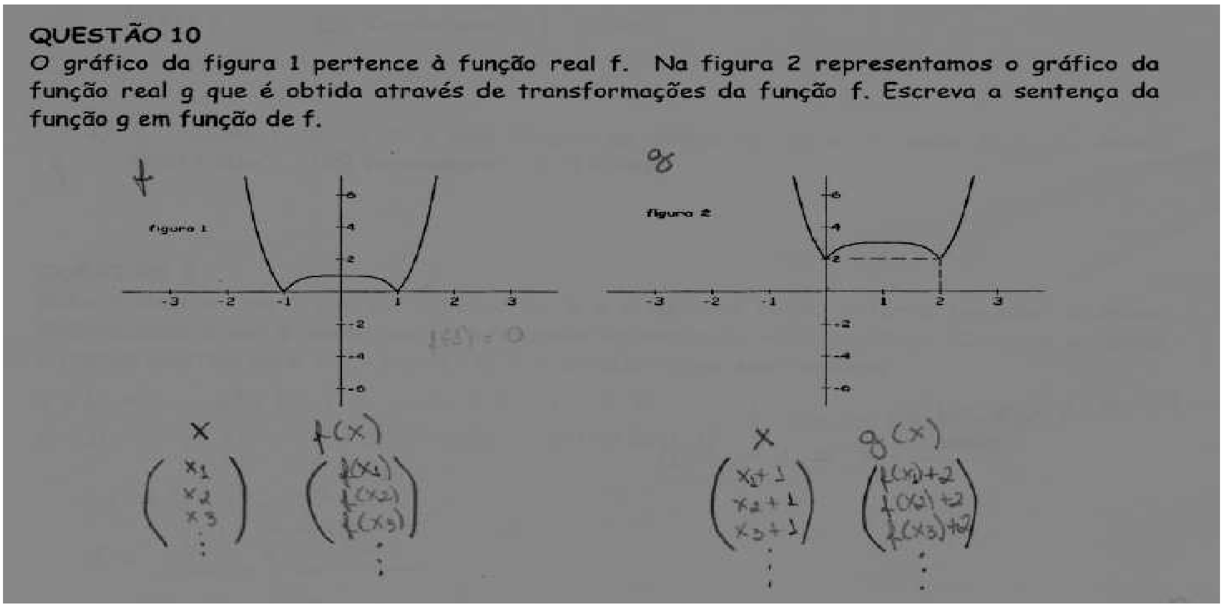


Figura 24: Resolução da questão dez por Camila

Na ocasião da entrevista ela reconheceu o erro e modificou a sua resolução utilizando a translação horizontal e a translação vertical corretamente.

5.6 – Jéssica

Na resolução do caderno de atividades Jéssica obteve nota 5,1.

Na ocasião da entrevista Jéssica definiu função da seguinte forma:

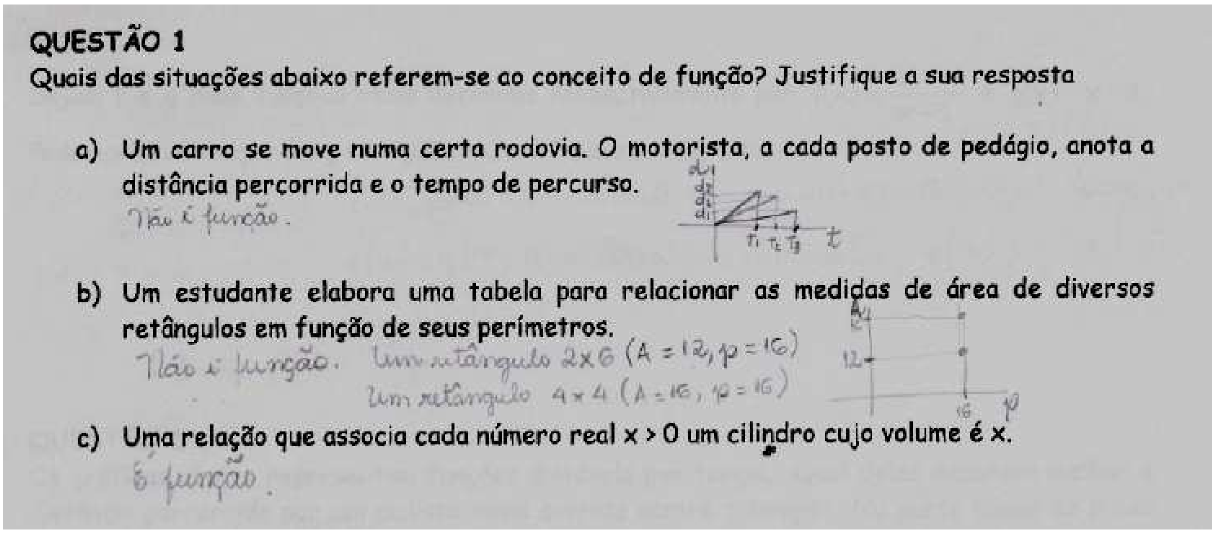
> Jéssica: A primeira idéia que eu tenho de função é quando tenho alguma coisa variando em função de outra. É alguma relação entre duas coisas a princípio. Se eu trabalho e ganho por comissão o meu salário vai depender de quanto eu vou vender. Essa é a primeira idéia de função. Depois conhecendo função eu vi que para se ter uma função é preciso de três coisas que seriam o domínio, o contradomínio e a lei de formação para essa função. Além disso, para a gente ter uma função, você tem que ter uma relação entre dois conjuntos aonde cada elemento do primeiro conjunto vai se relacionar com um único elemento do outro conjunto e eu não posso ter um elemento do primeiro conjunto se relacionando com dois elementos do segundo conjunto.

Indagada sobre a imagem predominante em relação à função informa que é o diagrama de setas.

5.6.1 – Questão 1

Como podemos observar na figura 25, na primeira questão a professora classificou o item (c) como exemplo de uma relação funcional, mas não justificou. Ela também não classificou o item (a) como uma relação funcional justificando cada parada no pedágio como um reinício da contagem de distância.

Durante a entrevista, Jéssica não só confirmou a sua resposta ao item (c) como justificou dizendo que todo número real positivo pode representar o volume de um único cilindro.



QUESTÃO 1

Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta

a) Um carro se move numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso.
Não é função.

b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros.
Não é função. Um retângulo 2x6 (A = 12, p = 16)
Um retângulo 4x4 (A = 16, p = 16)

c) Uma relação que associa cada número real x > 0 um cilindro cujo volume é x.
É função.

Figura 25: Resolução da questão um por Jéssica

5.6.2 – Questão 3

Jéssica apresentou uma solução para esta questão realizando conexões entre a representação gráfica de uma função quadrática e as informações sobre o comportamento da equação dada para x = 1 e x = 6, como podemos ver na figura 26.

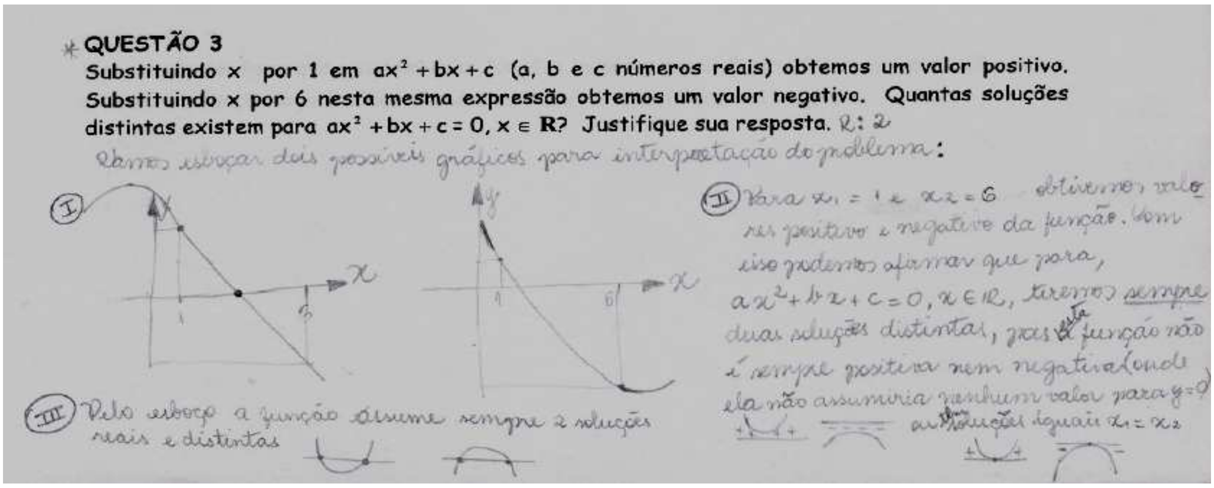


Figura 26: Resolução da questão três por Jéssica

5.6.3 – Questão 7

No questionário Jéssica afirmou apenas que o aluno estava errado sem justificar. Durante a entrevista a professora justificou sua resposta dizendo que a inversa da função exponencial é a função logarítmica.

5.6.4 – Questão 9

Jéssica não calculou a área solicitada e, além disso, o esboço da região cuja área foi solicitada indica que o gráfico de $f(x) = \log 10^x$ não é uma reta, conforme mostra a figura abaixo.

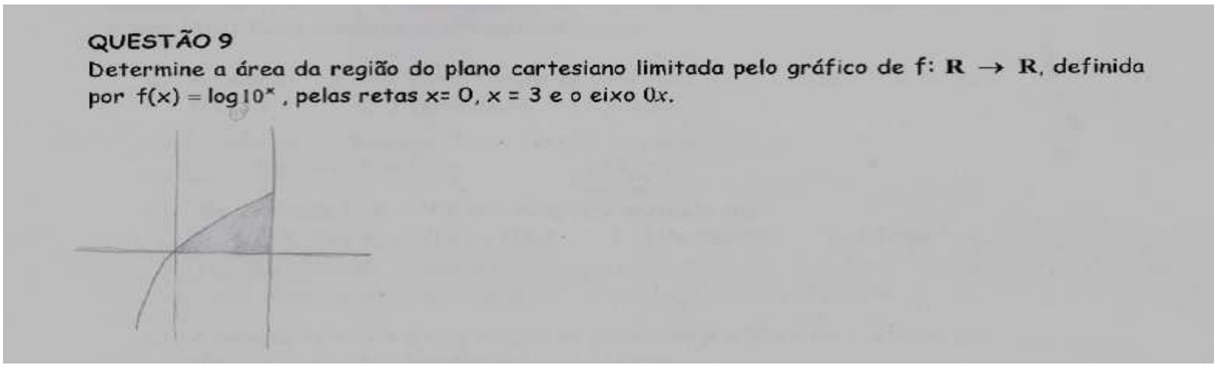
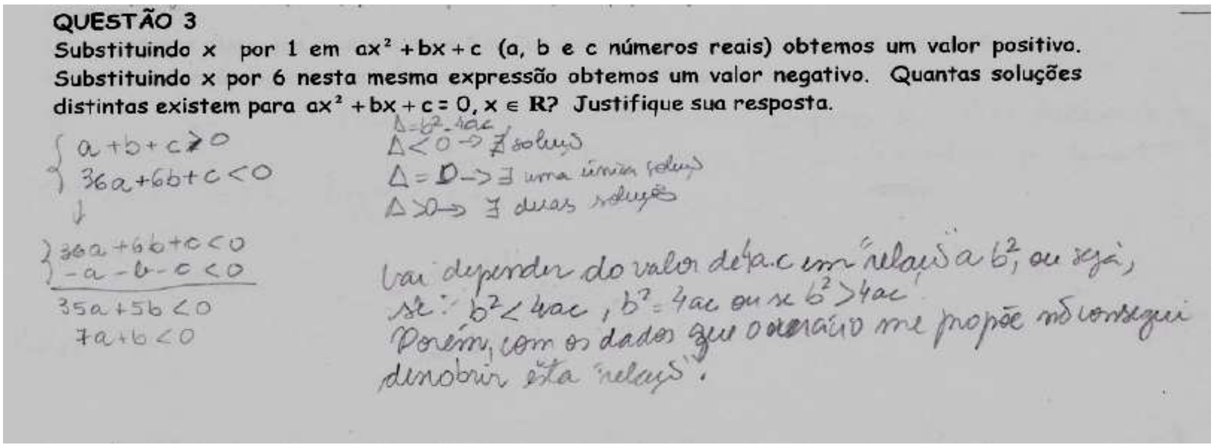


Figura 27: Resolução da questão nove por Jéssica

Durante a entrevista a professora não reconheceu o erro no desenho do gráfico, e não soube sequer dizer que função havia desenhado.


QUESTÃO 3

Substituindo x por 1 em ax^2+bx+c (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2+bx+c=0$, $x \in \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

$$\begin{cases} a+b+c>0 \\ 36a+6b+c<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 36a+6b+c<0 \\ -a-b-c<0 \end{cases}$$

$35a+5b<0$

$7a+b<0$

$\Delta = b^2-4ac$

$\Delta<0 \rightarrow \nexists$ solução

$\Delta=0 \rightarrow \exists$ uma única solução

$\Delta>0 \rightarrow \exists$ duas soluções

Vai depender do valor de 4a.c em "relação a b^2", ou seja, se: $b^2<4ac$, $b^2=4ac$ ou se $b^2>4ac$. Porém, com os dados que o exercício me propõe não consegui descobrir esta "relação".

Figura 28: Resolução da questão três por Pâmela

5.7 – Pâmela

Na resolução do caderno de atividades Pâmela obteve nota 6,7.

Na ocasião da entrevista, a definição de função dada por Pâmela foi a seguinte:

> É uma relação entre dois conjuntos A e B onde todo elemento do conjunto A segue uma lei que o leva em B.

Podemos verificar que nesta definição a unicidade é omitida. Questionada sobre a primeira imagem que lhe ocorre quando o assunto é função ela afirmou ser o seu gráfico no plano cartesiano.

5.7.1 – Questão 3

Na terceira questão Pâmela não chegou a nenhuma conclusão justificando que o exercício não fornecia os dados necessários para resolvê-lo (vide figura 28).

Na ocasião da entrevista Pâmela apresentou, para a terceira questão, uma abordagem diferente da utilizada no dia da aplicação do teste:

Pâmela: Com certeza duas, não sei o que eu coloquei, mas olhando agora eu sei que são duas. [...] Essa função corta o eixo, e por outro lado não pode ser todo positivo ou todo negativo, porque tem um valor negativo e um valor positivo para y. E aí outra coisa também, pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos uma raiz, então ela é uma ou duas [...] Agora eu fiquei entre uma e duas raízes.

Quando indagada porque não aplicara este raciocínio anteriormente ela respondeu que através do curso de funções reais pôde relacionar os aspectos geométricos (gráficos) com os aspectos algébricos.

Entretanto, mesmo tendo citado o Teorema do Valor Intermediário na entrevista, a professora não interliga este teorema com o gráfico da função quadrática, continuando em dúvida quanto ao número de raízes da equação (uma ou duas).

5.7.2 – Questão 8

Na questão oito Pâmela interpretou que a tabela poderia pertencer a apenas uma única função e não uma entre várias.

Quanto à oitava questão Pâmela mudou a sua resposta afirmando que a tabela poderia indicar um número infinito de funções distintas entre si e justificou de maneira satisfatória.

5.8. – Roberto

Na resolução do caderno de atividades Roberto obteve nota 5,0.

Questionado sobre a definição do conceito de função Roberto diz:

> Roberto: Hoje, depois do curso, deu uma clareada boa. Eu acho que uma definição bem simples seria uma relação de dependência entre duas grandezas.

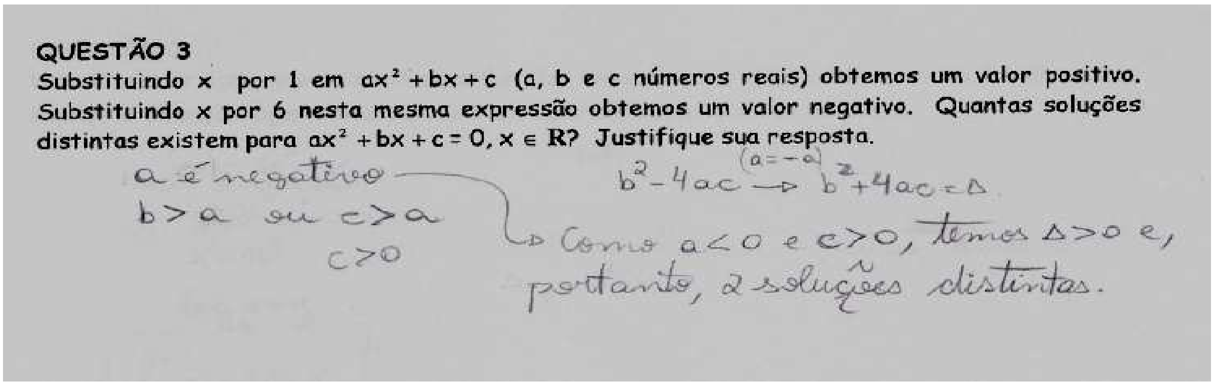
Podemos verificar que o professor ainda não consegue formalizar corretamente o conceito de função.

5.8.1 – Questão 1

Na primeira questão, item (c) o professor não considera a possibilidade de dois cilindros distintos poderem possuir o mesmo volume afirmando assim que tal exemplo exprime uma relação funcional. Durante a entrevista o professor Roberto reconhece que a resposta dada ao item (c) estava incorreta.

5.8.2 – Questão 3

Roberto tenta na terceira questão, conforme mostra a figura 29, encontrar o número de soluções distintas para a equação proposta utilizando manipulações algébricas envolvendo o discriminante e os coeficientes da equação.



QUESTÃO 3
Substituindo x por 1 em ax^2+bx+c (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2+bx+c=0$, $x \in R$? Justifique sua resposta.

a é negativo
$b > a$ ou $c > a$
$c>0$

$b^2-4ac \xrightarrow{(a=-a)} b^2+4ac = \Delta$

Como $a<0$ e $c>0$, temos $\Delta>0$ e, portanto, 2 soluções distintas.

Figura 29: Resolução da questão três por Roberto

Na ocasião da entrevista, quando indagado sobre a sua resolução, Roberto diz:

> Eu acredito que substituindo os valores não sei [...] se eu fizesse deste jeito eu acredito que daria para resolver. Não sei se o fim foi correto, foi justificável por estes meios, mas acredito que eu pensaria pelo mesmo caminho ou então fazendo a substituição do x por 1 e achando $a+b+c$ e o x por 6 e achando $36a+6b+c$ e fazendo a comparação do primeiro sendo um valor positivo, ou seja, o somatório dos três maior que zero e depois este outro resultado que eu achei menor que zero e fazendo uma comparação com estas duas equações que eu obtive com a substituição.

Nesta nova estratégia o professor mantém a manipulação algébrica ao invés de recorrer à abordagem geométrica.

5.8.3 – Questão 5

Na questão cinco, o professor confirma a sua opção pela alternativa B, mesmo tendo sido incoerente com a escolha dos eixos coordenados, conforme podemos ver abaixo:

> Entrevistador: Vejo aqui que você colocou s (distância) no eixo horizontal e t (tempo) no eixo vertical?
>
> Roberto: Eu acredito que foi por isso de a distância ter que ser maior do que o tempo nos intervalos “pequenininhos”, então ele percorreria distâncias maiores em tempos menores.
>
> Entrevistador: Então você concorda que a opção (B), com esta marcação nos eixos, seria o melhor gráfico nesta situação?
>
> Roberto: Sim.

5.8.4 – Questão 8

Na oitava questão Roberto afirma que a tabela refere-se apenas à função identidade.

Ao ser questionado sobre a sua resposta nesta questão, Roberto afirma que pensou muito na ocasião da aplicação do teste, na ocasião chegou a fazer um esboço da situação, e concluiu que somente a função identidade atenderia à tabela proposta. É importante ressaltar que o professor se deteve por um longo tempo em silêncio analisando a questão na entrevista antes de respondê-la.

5.8.5 – Questão 10

Na resolução da décima questão, exposta na figura abaixo, Roberto assume que o gráfico da função f é dado por $f(x) = |x^2 - 1|$ e a partir desta expressão tenta encontrar uma fórmula matemática que defina a função g. Em momento algum ele utilizou as translações sofridas pelo gráfico da função f.

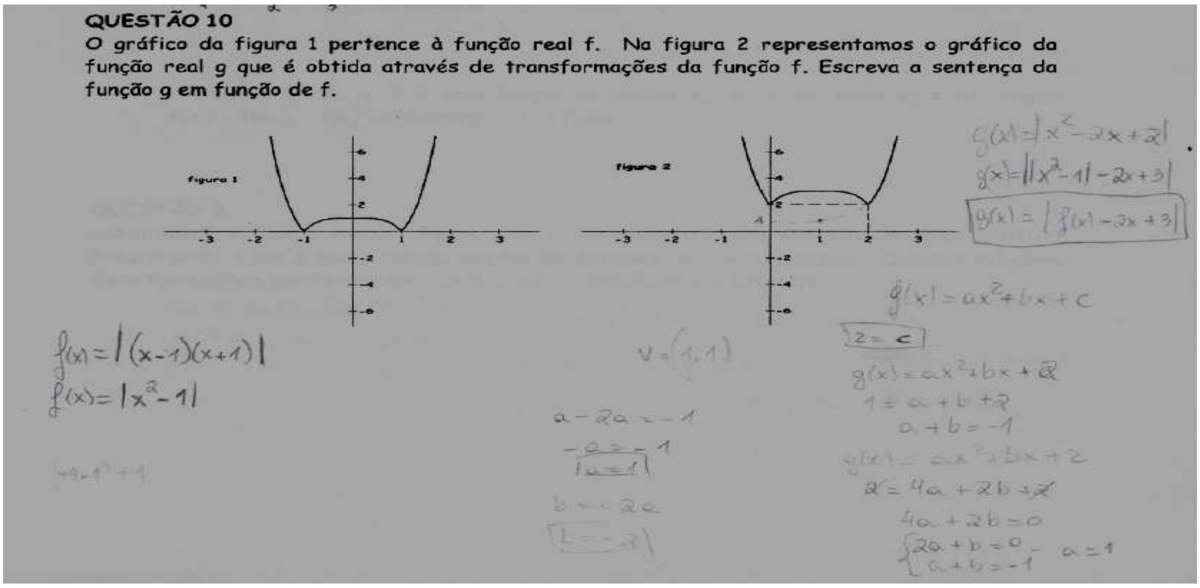


Figura 30: Resolução da questão três por Roberto

Na análise da décima questão, Roberto justifica a sua resposta da seguinte forma:

> Entrevistador: Na questão 10, pelo visto você tentou encontrar aqui uma função quadrática? Por quê?

> Roberto: Sim. Acho que pela mania que a gente tem do formato da função. Ah! Ela é o módulo de uma função quadrática porque ela está descendo e chegou ao eixo 0x ela volta. Acho que pela insistência que a gente sempre houve tanto na graduação quanto no ensino médio que a gente acaba repetindo, reproduzindo, para os nossos alunos que a função modular de uma função do segundo grau tem esse formato.

Na continuação da entrevista Roberto reconheceu que não era necessário definir a lei de formação da função f para determinarmos as translações que originaram a função g. Entretanto, não definiu quais mudanças foram feitas na função f.

5.9. – Tatiana

Na resolução do caderno de atividades Tatiana obteve nota 6,7.

Na entrevista a definição que Tatiana apresentou foi a seguinte:

> Para mim função é uma relação entre duas grandezas que você tem... Existem algumas regras que você tem que seguir porque nem toda relação vai ser uma função.
> [...] uma delas é essa que a cada elemento que você pegar do domínio tem uma única imagem. E você não pode ter elementos do domínio sem nenhuma correspondência.

Durante a entrevista, Tatiana afirma que a sua imagem predominante da definição de função é o diagrama de setas, pois segundo seu entendimento, a adequação dos exemplos a esta forma de representação facilita a compreensão.

5.9.1 – Questão 1

Na primeira questão, Tatiana não reconheceu o item (a) como exemplo de uma relação funcional, justificando tal fato de maneira singular.

QUESTÃO 1

Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta

a) Um carro se move numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso. Não, pois as distâncias entre um pedágio e outro podem ser iguais e o tempo para percorrê-las pode ser igual ou diferente. Assim, teremos p/ uma mesma dist, tempos distintos.

b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros.
Não, pois existem retângulos que possuem mesma área, porém os perímetros são diferentes.

c) Uma relação que associa cada número real $x > 0$ um cilindro cujo volume é x.
Não, pois existem cilindros distintos que possuem o mesmo volume.

Figura 31: Resolução da questão um por Tatiana

Na entrevista, a professora comentou que não analisou o percurso como um todo, ou seja, desde o início da viagem até a final. Analisou de maneira fragmentada, tomando os pedágios como referência e, sob este ponto de vista, esta situação não representa uma função.

5.9.2 – Questão 3

Na terceira questão, afirma existirem infinitas soluções, baseando a sua resolução na análise de expressões algébricas resultantes das informações da questão, conforme mostra a figura 32.

QUESTÃO 3

Substituindo x por 1 em $ax^2 + bx + c$ (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2 + bx + c = 0$, $x \in \mathbb{R}$? Justifique sua resposta.

p/ $x = 1$: $a + b + c > 0 \rightarrow a > -(b+c)$

p/ $x = 6$: $36a + 6b + c < 0 \rightarrow a < -\frac{(6b+c)}{36}$

$-(b+c) < a < -\frac{(6b+c)}{36}$ Infinitas soluções.

Figura 32: Resolução da questão três por Tatiana

Tatiana não mencionou na entrevista nenhuma outra abordagem para a questão três, insistindo na manipulação algébrica tal qual tinha sido realizada, afirmando ser sempre deste modo que ela resolve tais questões. Em nenhum momento admitiu uma interpretação geométrica como, por exemplo, a visualização do gráfico que representaria a função proposta (função quadrática).

5.9.3 – Questão 5

Embora tenha respondido corretamente a questão cinco, indicando o item certo em relação aos eixos coordenados, a professora, questionada quanto a sua escolha, afirmou que na ocasião da aplicação não se sentiu segura quanto à resposta dada.

5.9.4– Questão 10

Na décima questão reconhece que o gráfico da função f é submetido a translações, mas comete um engano quanto à translação horizontal $g(x) = f(x + 1) + 2$ ao invés de $g(x) = f(x - 1) + 2$. Na ocasião da entrevista a professora Tatiana corrigiu sua resposta.

5.10 – Wilson

Na resolução do caderno de atividades o aluno Wilson obteve nota 4,4.

Na entrevista a definição de função apresentada por Wilson foi:

> Wilson: Na verdade eu nem trabalho com funções praticamente [...] Mas normalmente eu pego um conjunto e tento associar cada elemento daquele conjunto com o elemento de outro conjunto. Agora definir o que é função? Sinceramente, eu tenho dificuldades em definir o que é uma função. Eu digo assim, definir para uma pessoa entender e não dizer matematicamente: Ah!... Função é quando você tem dois conjuntos e existe uma lei de formação. Isso para mim não é definir função. Normalmente eu não falo dessa maneira.

Wilson demonstra certa aversão à formalidade matemática. No decorrer da entrevista, justificou esta aversão pelo fato de ser licenciado em Física, não em Matemática. Ele também informou que os seus alunos são do Ensino Fundamental e que isso justificaria uma abordagem menos rigorosa deste tópico matemático.

Indagado sobre a imagem que lhe vem à mente quando o tema é funções o professor informou que é a sua representação gráfica.

5.10.1 – Questão 1

Na ocasião da resolução do caderno de atividades, Wilson não respondeu à primeira questão. Indagado durante entrevista sobre tal fato, o professor indicou o item (a) como exemplo de uma relação funcional e os itens (b) e (c) como exemplos não funcionais, justificando satisfatoriamente.

5.10.2 – Questão 5

Embora tenha marcado o item (b) nesta questão, ao ser questionado sobre a marcação das grandezas nos eixos coordenados, o professor indicou o eixo vertical como tempo e o eixo horizontal como distância. Tal marcação de eixos para o item (b) contraria as nossas expectativas quanto à resposta dada para esta questão.

5.10.3 – Questão 8

No questionário, Wilson respondeu que a tabela referia-se somente à função identidade. Tal posição foi mantida durante a entrevista.

5.10.4 – Questão 10

No questionário, o professor Wilson cometeu um erro quanto à translação vertical, mas durante a entrevista ele corrigiu sua resposta.

5.11 – Análise Global

Tendo como objetivo verificar se os professores haviam em geral mantido ou corrigido suas respostas incorretas durante as entrevistas, organizamos uma tabela em que constam, para cada professor, assinaladas as questões que foram mantidas e as que foram alteradas. As questões mantidas foram indicadas pela letra M e as corrigidas durante a entrevista foram indicadas com a letra C. Algumas estão em branco, pois referem-se a questões que os professores acertaram e, portanto, não foram abordadas durante a entrevista. A nota global refere-se à nota dada ao professor na ocasião da aplicação do questionário, conforme informado no capítulo dois.

Nome	Nota global	Q1	Q3	Q4	Q5	Q7	Q8	Q9	Q10
Adriana	4,4	M	M	M		M	M		
Bernardo	5,0	M			M		M		C
César	10								
Celso	5,9	M	M		M				
Camila	3,4	M	M	C	M		M		C
Jéssica	5,1					C		M	M
Pâmela	6,7		M				C		
Roberto	5,0	C	M		M		M		M
Tatiana	6,7	M	M						C
Wilson	4,4	C			M		M		C

Tabela 3: Questões mantidas ou corrigidas nas entrevistas por cada professor.

Entre as trinta e seis respostas que não corresponderam às nossas expectativas, apenas nove foram corrigidas durante as entrevistas.

Na primeira questão, dentre os oito professores que erraram, observamos que apenas dois professores retificaram as suas respostas, enquanto os outros seis professores continuaram apresentando problemas quanto à aplicação da definição do conceito de função.

Na segunda questão nenhum professor retificou a sua resposta. Estes professores continuaram tentando resolver esta questão utilizando apenas a manipulação algébrica ao invés de recorrerem à interpretação geométrica do gráfico de uma função quadrática.

Na quarta questão observamos que um dos professores retificou a sua resposta. Embora apenas dois professores tenham sido questionados sobre esta questão, ressaltamos que estas entrevistas ocorreram no final do curso e que as condições para que duas funções fossem iguais deveriam ser dominadas pelo professor, visto que este assunto foi objeto de estudo do curso.

Na quinta questão desejávamos saber se o professor ao marcar a opção A ou B relacionaria os eixos coordenados coerentemente com a sua resposta. Como podemos observar na tabela, o grupo entrevistado sobre esta questão não conseguiu verificar graficamente a variação entre as grandezas envolvidas no problema proposto.

Na sétima questão, assim como na quarta questão, apenas um professor retificou a sua resposta. Lembramos, entretanto que este professor, ao corrigir a resposta, afirmou que as funções $f(x) = \log x$ e $f(x) = \sqrt[x]{10}$ eram iguais.

Na oitava questão apenas um professor indicou durante a entrevista que poderia haver infinitas funções reais para a tabela indicada. É importante observar que os outros cinco professores entrevistados mantiveram a resposta dada no questionário, que associava a tabela a apenas uma função.

Na nona questão, mesmo reconhecendo que a função logaritmo é a inversa da função exponencial, o professor entrevistado não retificou a sua resposta.

Na décima questão a maioria dos professores corrigiu a resposta dada no questionário, denotando assim o entendimento das translações horizontal e vertical de uma função.

Como observado no início e ao longo das análises das questões, o desempenho dos professores foi aquém do esperado. As nossas expectativas eram que, ao concluir o curso, estes professores corrigissem a maioria, senão todas as respostas incorretas. Entretanto, não foi o que observamos. Provavelmente alguns conhecimentos e procedimentos estão tão enraizados, que a sua reconstrução fica comprometida.

CAPÍTULO 6 – OS SETE ASPECTOS

Neste capítulo realizaremos uma comparação das respostas dadas nas entrevistas relatadas anteriormente com os sete aspectos do quadro teórico construído por Even (1990).

6.1 – Traços Essenciais

Como mencionamos no quadro teórico, este é um dos aspectos que lida com a imagem conceitual, observando a essência do conceito. Tall & Vinner (1981) definem imagem conceitual como uma imagem mental do conceito, isto é, o conjunto de todas as imagens que alguma vez foram associadas com o conceito na memória do indivíduo.

Dentre os entrevistados, oito professores não responderam satisfatoriamente a primeira questão, principalmente o item referente à associação de um número real ao volume do cilindro. Durante a entrevista três deles corrigiram suas respostas, enquanto os demais ou persistiram no erro ou apresentaram justificativas inconsistentes, como o professor Bernardo, que denotou problemas quanto ao conhecimento da estrutura dos números reais.

A construção de funções a partir de determinadas informações foi trabalhada durante o curso de especialização, esperávamos então que durante a entrevista a maioria dos professores retificasse suas respostas. Embora a definição formal do conceito de função tenha sido apresentada, a sua aplicação em situações não padronizadas não foi verificada.

Segundo Even, o encontro de um conceito familiar em uma situação não usual conduz o professor a reexaminar seus conhecimentos e superar dificuldades, levando-o a construir uma noção bem articulada e aprofundada.

Nas entrevistas verificamos que os professores apresentaram, de maneira predominante, como primeira imagem conceitual de função ou o diagrama de setas ou a sua representação gráfica. A tabela a seguir informa nove professores, pois esta pergunta não foi efetuada ao professor Roberto, nosso primeiro entrevistado.

Diagramas de Setas	Representação Gráfica	Expressão Algébrica
4	4	1

Tabela 4: Imagem predominante

Observamos que os professores entrevistados, na maioria das vezes, definiram função como uma relação entre dois conjuntos A e B, onde cada elemento $x \in A$ se associa a um único elemento $y \in B$. Na tabela a seguir classificamos estas respostas como “Tipo de relações entre conjuntos”. Alguns professores, ao serem perguntados sobre a definição de função, utilizavam exemplos do cotidiano em substituição à definição formal. Outro grupo definiu função como um tipo de relação entre grandezas, estes professores tentavam mesclar os exemplos práticos com a definição formal, podemos citar como exemplo para este grupo o professor Wilson.

Tipo de relação entre conjuntos	Exemplos práticos	Relação entre grandezas
5	2	3

Tabela 5: Definição de Função

Estas respostas também revelam um fato interessante, que é o surgimento do campo semântico das aplicações, presente na pesquisa de Carneiro, Fantinel e Silva (2003). O núcleo deste campo consiste em variáveis, relações entre variáveis, modelo e modelagem, exemplos da física ou do cotidiano. As frases geradoras contêm expressões que realçam função como uma relação entre variáveis que pode ser pensada como um modelo matemático para alguma situação real.

Os traços essenciais também foram observados na quarta questão, onde perguntamos se duas funções eram iguais. Entrevistamos dois professores que haviam errado esta questão, um deles retificou a sua resposta enquanto o outro insistiu que as funções eram idênticas.

6.2 – Diferentes Representações

Even ressalta que é importante reconhecer o uso de um conceito matemático nas áreas de conhecimento da própria Matemática. Podemos ter uma noção deste aspecto observando as respostas dadas na entrevista à seguinte pergunta: na sua graduação quais as disciplinas que tiveram relação com o conteúdo de Funções?

A tabela cinco apresenta a distribuição das respostas dadas.

Cálculo	Fundamentos da Matemática	Análise	Álgebra	Álgebra Linear	Funções de Variáveis Complexas	Geometria Diferencial	Geometria Analítica	Geometria
12	4	6	1	1	1	3	4	1

Tabela 6: Disciplinas que na opinião dos professores têm relação com funções

Quando questionados, observamos que, para os professores entrevistados, as relações funcionais são mais presentes nas disciplinas ligadas ao Cálculo. Sabemos, entretanto, que estão presentes também em outras disciplinas como, por exemplo, as citadas na tabela quatro. O conceito de função possui diferentes modos de representações que nem sempre estão interligadas, seja pela notação, seja pela forma como são apresentadas. Talvez por esta razão não seja facilmente identificado nas diversas áreas da Matemática.

> “Existem também diferentes notações de funções as quais parecem ser construídas de um modo diferente em vez de um conceito unificado [...] Muitas funções que são conhecidas no início, tem uma importância especial e são utilizadas extensivamente, tem nomes específicos e usam notações específicas, por exemplo, as funções trigonométricas, funções exponenciais e logarítmicas, bem como as a função X para as variáveis randômicas em probabilidade. Transformações lineares são descritas, em muitos casos, por matrizes.” (Even, p 532)

A questão três estava relacionada com este aspecto, já que requer a habilidade do professor em transitar entre a representação gráfica da função quadrática e interpretação da equação proposta. Even observa que a representação simbólica domina o pensamento dos professores e que eles não são capazes de mudar a maneira de pensar o problema. Entrevistamos sete professores que não responderam corretamente e apenas um retificou sua resposta.

Confirmando o resultado da pesquisa apresentada por Even, mesmo podendo analisar a questão sob o ponto de vista gráfico, a maioria dos professores efetuou manipulações algébricas com o discriminante mesmo não possuindo dados suficientes para realizar este tipo de análise.

6.3 – Modos alternativos de apresentação

Este aspecto está relacionado ao modo de abordagem do conceito realizado pelo professor. Tanto na resolução do questionário quanto nas entrevistas, observamos um predomínio da manipulação algébrica no trato de questões, principalmente na questão três, onde um enfoque geométrico forneceria melhores resultados. Apesar da maioria dos professores indicarem o gráfico ou o diagrama de setas como imagens predominantes, na prática demonstraram uma preferência por resolver esta questão através de expressões algébricas.

6.4 – Relevância do conceito

Segundo Even, a compreensão do conceito de função inclui a compreensão da composição de funções e da inversão de funções, e como quaisquer outros conceitos, não podem ser compreendidos ou ensinados de maneira simplificada.

Geralmente estes assuntos são tratados sob o ponto de vista algébrico, no caso da determinação da inversa de uma função trocamos de posição as variáveis na equação correspondente à expressão algébrica da função e isolamos a variável dependente. Este procedimento esconde outros aspectos importantes da inversa de uma função, como por exemplo, o resultado da composição da função pela sua inversa ou a simetria do gráfico de uma função com o gráfico de sua inversa em relação à reta $y=x$.

As questões sete e nove encontram-se interligadas, enquanto a primeira envolve a inversa de uma função exponencial, a segunda explora a aplicabilidade da propriedade presente na composição de uma função pela sua inversa. Observamos que quatro professores erraram ambas. Houve também casos de professores que erraram somente uma delas, três somente a questão sete e sete somente a questão nove.

Adriana, que foi entrevistada, errou somente a questão sete. Para ela $f(x)=\log x$ e $f(x)=\sqrt[x]{10}$ são idênticas e correspondem à inversa de $f(x)=10^x$. Nesta questão, além das funções não serem iguais, a professora não reconheceu que a inversa de uma função é única.

Já a professora Jéssica, errou a questão nove e acertou a questão sete. Neste caso ela reconheceu corretamente a inversa, mas não conseguiu utilizar a sua propriedade em relação à composição de funções.

Destacamos que as entrevistas foram realizadas no final do curso, ou seja, era esperado, que com os conhecimentos adquiridos, estes erros não fossem mais cometidos. Entretanto, certas idéias e procedimentos mal aprendidos ao longo da formação, estão de tal modo tão fixados, que são difíceis de serem reconstruídos.

6.5 – Repertório Básico

No quadro teórico, o repertório básico é um conjunto de princípios importantes, tais como propriedades e teoremas relacionados ao conceito estudado. O essencial é que este repertório seja utilizado de forma apropriada, isto é, com significado, e que ele seja do domínio do professor para que não se transforme numa coleção de procedimentos. Durante as entrevistas pudemos observar que este repertório, na maioria dos casos, ou não é muito rico ou recai na coleção de procedimentos que muitas vezes são utilizados sem muito critério, como no caso de algumas resoluções da questão três e da questão dez.

6.6 – Compreensão do Conceito

Este aspecto está relacionado com a aprendizagem de um novo conceito e a sua relação na adição de nós ou links que formam a estrutura cognitiva. Segundo Even, o entendimento de um conceito não pode ser fundamentado apenas na memorização de procedimentos ou apropriação de algoritmos. Os conceitos e procedimentos devem estar conectados pela compreensão.

Relacionamos com este aspecto as questões um, quatro, oito e dez. Como a primeira questão foi analisada no primeiro item, nos deteremos nas outras, e para isso apresentamos a tabela abaixo.

	Questão 4	Questão 8	Questão 10
Corrigiu a resposta	1	3	3
Não corrigiu a resposta	1	3	1

Tabela 7: Resultado das entrevistas referentes às questões quatro, oito e dez.

Como podemos observar, cinco respostas que não tinham atendido às expectativas não foram retificadas durante a entrevista.

Na questão quatro é verificamos que a estratégia utilizada pelo professor que errou a questão foi reafirmada na ocasião da entrevista, denotando assim que aos algoritmos de resolução utilizados para expressões algébricas, não foi adicionada ou conectada a idéia de que os domínios deveriam ser iguais.

Na oitava questão, dentre os seis professores que erraram, três retificaram suas respostas durante a entrevista, reconhecendo que a tabela apresentada poderia pertencer a infinitas funções reais. É interessante observar que o procedimento de conectar os pontos através de segmentos predomina sobre o fato de não haver informações na questão sobre como a função se comporta entre os pontos da tabela. Tal atitude conduziu estes professores a reconhecerem apenas a função identidade como resposta a esta questão.

Quanto à questão dez, podemos verificar que houve um avanço na medida em que três dos quatro professores corrigiram a sua resposta.

6.7 – Conhecimento da Natureza da Matemática

Segundo Even, o conhecimento sobre a natureza da Matemática é importante para o conhecimento de funções. Este traço inclui: reconhecer as bases formais para se estabelecer um conceito, distinguir suas idéias principais e o seu lugar na Matemática e também entender os processos pelos quais se estabelece a veracidade de uma conjectura na Matemática. Neste trabalho pudemos verificar que alguns professores procediam de maneira intuitiva evitando algumas vezes definições formais, como no caso da primeira questão referente à definição de função, e utilizando casos particulares ou exemplos como demonstrações, como nos casos dos professores Wilson e Adriana.

CAPÍTULO 7 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

A dificuldade dos alunos em lidar com funções nos conduziu a reflexões sobre a formação do professor em relação a este tópico matemático, pois entendemos que o processo de ensino e aprendizagem tem neste elemento um dos seus principais artífices. Entendemos que esta pesquisa possa contribuir na orientação do processo de formação do professor, na medida em que aponta suas dificuldades em dominar este assunto.

Esta pesquisa foi realizada com 36 alunos do Curso de Especialização em Ensino da Matemática, na disciplina Funções Reais, que resolveram um questionário contendo uma lista de questões. Posteriormente, no final do curso, alguns destes professores participaram de entrevistas em que puderam rever as respostas consideradas fora das nossas expectativas e corrigi-las caso conseguissem identificar o erro.

Este trabalho teve como principal referencial o trabalho de Even (1990) do qual aproveitamos o quadro teórico que nos orientou na análise do que os professores conhecem sobre funções.

Segundo a pesquisadora, para considerarmos que um determinado conteúdo foi apreendido, é preciso que ele seja verificado sob sete aspectos que constituem uma base de análise.

Seguimos a metodologia empregada por Even em sua pesquisa, que se constituiu na aplicação de um questionário a um grupo de professores e, posteriormente, na realização de uma entrevista com alguns professores desse grupo.

Outro referencial teórico utilizado neste trabalho corresponde à pesquisa realizada por Carneiro, Fantinel e Silva (2003) na Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Esta foi efetuada em três grupos: o primeiro grupo formado com alunos no início do curso de Licenciatura em Matemática, o segundo por formandos do ano de 1999 e o terceiro por recém diplomados ouvidos no ano de 2000. Ao primeiro grupo foi solicitada uma aula de introdução ao tema função e aos demais grupos a responderem a um questionário envolvendo situações de função e não-função cujos resultados foram frases geradoras relativas a diferentes campos semânticos.

Recorremos também a trabalhos de Ball (1988), Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995), Meira (2006) e Zuffi (2001), às notas de aula de Giraldo (2006) e Roque (2006). Procuramos através destas pesquisas e contribuições docentes entender o processo histórico de construção do conceito de função e também as dificuldades encontradas pelos alunos na apropriação deste objeto matemático ao longo de sua formação.

Sob a influência de Carneiro, Fantinel e Silva, observamos que, tanto ao longo das resoluções quanto nas entrevistas, existe uma predominância do campo semântico elemento/conjunto no qual uma função é descrita como uma relação entre dois conjuntos A e B, onde cada elemento de A é associado a um, e somente um, elemento de B. Esta resposta também teve a preferência da maioria dos alunos da graduação entrevistados pelos pesquisadores. Verificamos também que a maioria dos professores entrevistados, quando questionados sob a primeira imagem referente à função, indicaram o diagrama de setas. Tal fato pode ser atribuído à abordagem inicial de funções, que na maioria dos livros didáticos utilizados na Educação Básica, é efetuada através desta representação.

Em relação ao quadro teórico proposto por Even observamos que os professores não conectam os vários modos de apresentação do objeto função e, principalmente, desconhecem as limitações intrínsecas a cada um dos modos (diagrama de setas, tabelas, expressão algébrica). Assim por exemplo, a tabela utilizada na questão oito não se refere apenas à função identidade, mas por estarem habituados a construir o gráfico de uma função através da marcação de alguns pontos no plano cartesiano presumiram tal fato, alguns sustentando tal afirmação até na entrevista efetuada ao final do curso. Destacamos também a dificuldade dos professores em transitar entre a representação algébrica e a representação geométrica, fato verificado nas resoluções apresentadas para a questão três.

Outro aspecto, presente no quadro teórico de Even, cujos resultados merecem destaque, refere-se ao entendimento da Matemática. Verificando a resolução de algumas atividades do questionário e analisando as entrevistas, percebemos que existem alguns professores que produzem definições baseadas em aplicações da definição formal, como por exemplo, a interdependência entre as grandezas velocidade e tempo em exemplo de movimento. Tais definições substituem a definição formal considerada muito teórica e pouco prática. Um dos professores, o professor Wilson, justificou a sua definição baseado em exemplos do cotidiano, como um meio de melhorar o entendimento dos seus alunos sobre este assunto, porém não apresentou durante a entrevista nenhuma outra abordagem mais formal.

Verificamos no decorrer do curso certo temor ao formalismo e ao rigor matemático por parte dos professores. Eram muito comuns frases do tipo: Este curso é muito teórico! Onde utilizaremos este conteúdo na sala de aula? Onde está a aplicabilidade? Algumas vezes, nossos professores se esquecem que é necessário conhecer a Matemática, em sua essência, em sua história, para poder ensiná-la. Um dos discursos, que tenta legitimar, erroneamente, tal comportamento, é o da contextualização em situações práticas. O professor não deve se limitar ao campo semântico das aplicações, onde toda função tem sua aplicabilidade nos problemas práticos do cotidiano. Entendemos que esta dimensão é importante, não só no processo de ensino e aprendizagem do conceito de funções, como para a sua própria natureza. Entretanto, não podemos reduzir o ensinamento deste tópico apenas a este aspecto, sob pena de limitarmos as possibilidades deste objeto matemático.

É importante ressaltar que os professores ao serem entrevistados tinham completado o curso de funções reais. Mesmo assim algumas crenças e atitudes foram mantidas, tais como, toda função deve ser contínua, os procedimentos algébricos têm amplo predomínio sobre a representação geométrica e sua análise, a construção de gráficos de uma função através da união de pontos por segmentos de retas sem uma análise prévia do seu comportamento. Esperávamos outras respostas durante as entrevistas, mas obtivemos em certos momentos as mesmas e, em outros, respostas que apontaram para problemas que não tinham sido detectados, como por exemplo, a dificuldade de entendimento de um dos professores em relação aos números reais.

Verificamos também que a aquisição ou a revisão de Teoremas ou estruturas pertencentes à Matemática avançada, aplicadas no curso, nem sempre contribuíram na qualidade das respostas dadas durante a entrevista. Como exemplo, pudemos observar a resposta dada pela professora Jéssica à terceira questão, onde ela cita o Teorema do Valor Intermediário, mas não como utilizá-lo. Tal fato é abordado na pesquisa de Ball (1988), quando a autora analisa o conhecimento adquirido pelo professor sob a dimensão da legitimidade, onde não é suficiente apenas dizer se está certo ou não, mas também justificar a sua escolha.

Constatamos com esse estudo que o nosso professor, quando confrontado com questões envolvendo as funções que usualmente são abordadas na Educação Básica, apresenta um fraco desempenho, demonstrando limitações incompatíveis com o seu grau de formação, ora reproduzindo os erros dos alunos desta etapa da educação, ora reproduzindo em sala de aula erros de abordagem e de conceito. Estas constatações ganharam força na medida em que alguns professores entrevistados ao final do curso sustentavam determinadas respostas.

É fato que existe certa distância entre o que se pretende do ensino de Matemática e o que realmente acontece em nossas salas de aula. É na linha de frente desta batalha que se encontra o professor, algumas vezes desprovido das ferramentas necessárias, e em outras, não sabendo utilizar de maneira apropriada o “arsenal” que lhe foi concedido ao longo de sua formação. Neste sentido, entendemos que as análises dos aspectos apresentados nesta pesquisa não deveriam servir somente para nortear a avaliação do conhecimento de determinado conteúdo matemático, mas contribuir para que o processo de sua aquisição seja o mais completo possível.

BIBLIOGRAFIA

BARUFI, M.C.B. O Cálculo no Curso de Licenciatura em Matemática. **Educação Matemática em Revista**, Brasil, v. 11A, p. 69-72, 2002.

BERGERON, J.; HERS COVICS, N. **Levels in the Understanding of the Function Concept**, in: van Barneveld G., Verstappen P. (ed.) Proceedings of the Conference on Functions, Report 1, Foundation for Curriculum Development, Enschede, p. 39-46, 1982.

BALL, D.L. **The Subject Matter Preparation of Prospective Teachers: Challenging the Myths** (Research Report). East Lansing, MI: National Center for Research on Teacher Education, 1988.

BOTELHO, L. e REZENDE, W.M. Um breve histórico do conceito de Função. **Caderno Dá Licença.** Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense. v.6. p. 63 – 73 Niterói, 2007.

CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 9. ed. Lisboa: Livraria Sá da Costa, 1989. p. 125-127, 1989.

CARNEIRO, V.C.; FANTINEL, P.C.; e SILVA, R. H. Funções: Significados Circulantes na Formação de Professores. **Bolema**, São Paulo, ano 16, n. 19, p. 37-57, 2003.

COSTA, A.C. e IGLIORI, S.B. Conhecimento de estudantes universitários sobre o conceito de função. **Anais do III SIPEM – G 04 Educação Matemática no Ensino Superior**, 2006.

EVEN, R. Subject Matter Knowledge for teaching and the case of functions. **Educational Studies in Mathematics**, n. 21, p. 521-544, 1990.

GIRALDO, V. Notas de aula na disciplina Funções Reais. Curso de Especialização em Ensino da Matemática. IM- UFRJ, 2006.

LIMA, E.L. et al. **A Matemática no Ensino Médio**. Coleção do Professor de Matemática, São Paulo: SBM, 2003. 1.v.

MARKOVITS, Z.; EYLON, B.S.; BRUCKHEIMER, M. Dificuldade dos alunos com o conceito de função. **Idéias da Álgebra**. São Paulo, Editora Atual, p.49-69, 1995.

MEIRA, L. Aprendizagem e ensino de Funções. In SCHILEMANN, Ana Lúcia (Org.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. 2 ed. Ampliada. Recife: Editora Universitária da UFPE, 1997. apud COSTA, A.C. e IGLIORI, S.B. Conhecimento de estudantes universitários sobre o conceito de função. **Anais do III SIPEM – G 04 Educação Matemática no Ensino Superior**, 2006.

NASSER, L. Aprimorando o desempenho de alunos de cálculo no traçado de gráficos. **Anais do III SIPEM – G 04 Educação Matemática no Ensino Superior**, 2006.

REZENDE, W.M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. **Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** – 29 a 1º de novembro de 2003. Santos, SP. (CDROM).

ROQUE, T. Notas de aula na disciplina História da Matemática. Curso de Mestrado IM- UFRJ, 2006.

SANTOS, A.R. et al. **Introdução às Funções Reais: um enfoque computacional**. Rio de Janeiro: IM – UFRJ, 1998.

SIERPINSKA, A. **On understanding the notion of function,** em “The concept of function – aspects of epistemology and pedagogy”, Dubinsk e Harel (Ed.) M.A.A. Notes, v.25, p 25-58, 1992.

TALL, D.O. e VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. **Educational Studies in Mathematics**, n. 12, p. 151-169, 1981.

TINOCO, L.A.A. **Construindo o Conceito de Função**. Rio de Janeiro: IM/UFRJ – Projeto Fundão, 2002.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**, ano 8 – nº 9/10, p. 10-17, 2001.

APÊNDICE

ANEXO I

QUESTIONÁRIO SITUACIONAL

Este questionário e o caderno de atividades são destinados à pesquisa da dissertação de Mestrado de Cláudio Bispo de Jesus da Costa, aluno do curso de Mestrado em Ensino da Matemática do Instituto de Matemática da UFRJ. Peço que, tanto as respostas dadas neste questionário, quanto às soluções apresentadas nas questões do caderno de atividades, tenham como base a sua sinceridade e o seu empenho. De minha parte comprometo-me a manter em sigilo os nomes dos participantes e suas informações pessoais, caso seja necessário relatá-los durante a pesquisa, o farei através de pseudônimos.

Nome: ____

Data de Nascimento: ___/___/______

Instituição na qual obteve a sua graduação: ____

Ano de Conclusão: ________ Atualmente você está lecionando?

( ) Sim ( ) Não.

Em caso afirmativo preencha a tabela abaixo:

Instituição	Série

Há quanto tempo exerce a função docente? ____

Na sua graduação quais as disciplinas que tiveram maior relação com o conteúdo de Funções?
____
____
____

Você fez algum outro curso após a graduação (por exemplo: aperfeiçoamento, especialização, ...)? Se sim, quais as disciplinas cursadas?
____
____
____

Na sua opinião o grau de dificuldade presente no ensino do tópico Funções é:
( ) Baixo ( ) Médio ( ) Alto.

____

____

____

Quais as maiores dificuldades que encontra para ensinar Funções?

____

____

____

Quais as maiores dificuldades que você acha que seu aluno tem para aprender Funções?

____

____

____

ANEXO II

CADERNO DE QUESTÕES

QUESTÃO 1

Quais das situações abaixo referem-se ao conceito de função? Justifique a sua resposta

a) Um carro se move, numa certa rodovia. O motorista, a cada posto de pedágio, anota a distância percorrida e o tempo de percurso.

b) Um estudante elabora uma tabela para relacionar as medidas de área de diversos retângulos em função de seus perímetros.

c) Uma relação que associa a cada número real $x > 0$ um cilindro cujo volume é x.

QUESTÃO 2

Sabendo que $f: X \to Y$ é uma função, verifique se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas. Justifique somente as afirmativas falsas.

a) A relação $f: X \to Y$ é uma função se para todo $y \in Y$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$.   ( ) Verdadeira   ( ) Falsa

b) Se a relação $f: X \to Y$ é uma função, é verdade que: $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.   ( ) Verdadeira   ( ) Falsa

c) A relação $f: X \to Y$ é uma função se para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $f(x) = y$.   ( ) Verdadeira   ( ) Falsa

d) A relação $f: X \to Y$ é uma função se dados $x_1, x_2 \in X$, onde $x_1 = x_2$, temos $f(x_1) = f(x_2)$.   ( ) Verdadeira   ( ) Falsa

QUESTÃO 3

Substituindo x por 1 em $ax^2 + bx + c$ (a, b e c números reais) obtemos um valor positivo. Substituindo x por 6 nesta mesma expressão obtemos um valor negativo. Quantas soluções distintas existem para $ax^2 + bx + c = 0$, $x \in \mathbf{R}$? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 4

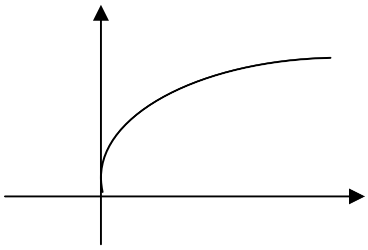
Sejam f e g duas funções reais definidas respectivamente por $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ e $g(x)=x-2$.

Podemos afirmar que f e g são iguais? Justifique sua resposta.

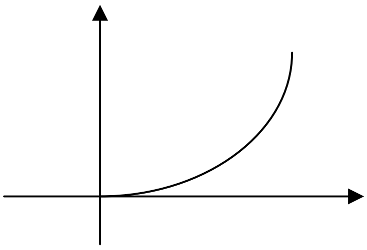
QUESTÃO 5

Os gráficos abaixo representam funções distância por tempo. Qual deles descreve melhor a distância percorrida por um ciclista numa corrida contra o tempo? Na parte inicial da prova ele tem de subir uma grande montanha.

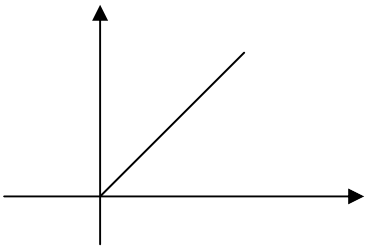
(A)



(B)



(C)



QUESTÃO 6

Assinale qual ou quais das justificativas abaixo você utilizaria para demonstrar que: "O gráfico de uma função f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x)=ax+b$, onde *a, b* $\in$ $\mathbf{R}$, é uma reta".

( ) Porque dados dois pontos $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ quaisquer do gráfico a razão entre as diferenças das ordenadas e a diferença das abscissas é constante, isto é, $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

( ) Porque dados três pontos $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ quaisquer do gráfico , com $x_A < x_B < x_C$ a medida do segmento AC é igual à soma das medidas de AB e BC.

( ) Porque a taxa de variação é constante e o seu valor é igual ao coeficiente *a*.

QUESTÃO 7

Um estudante disse que existem duas funções inversas para $f(x)=10^x$: uma é a função raiz e a outra é a função logarítmica. O aluno está certo? Justifique sua resposta.

QUESTÃO 8

Na tabela ao lado temos as abscissas e as ordenadas dos pontos no plano cartesiano que pertencem ao gráfico de uma função real.

O número de tais funções, diferentes entre si, que contêm estes pontos é:

x	y
-2	-2
-1	-1
0	0
1	1
5	5
10	10
50	50

(a) 0
(b) 1
(c) 2
(d) $C_{7,\,2}$
(e) infinito

Justifique sua resposta.

QUESTÃO 9

Determine a área da região do plano cartesiano limitada pelo gráfico de f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \log_{10} 10^x$, pelas retas $x = 0$, $x = 3$ e o eixo $0x$.

QUESTÃO 10

O gráfico da figura 1 pertence à função real f. Na figura 2 representamos o gráfico da função real g que é obtida através de transformações da função f. Escreva a sentença da função g em função de f.