Universidade Federal do Rio de janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio

Selma Lopes da Costa André

Rio de Janeiro
Setembro/2008

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Uma proposta para o ensino do conceito de derivada no ensino médio

Selma Lopes da Costa André

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Victor Giraldo.

Rio de Janeiro
Setembro/2008

Ai de nós, educadores, se deixarmos de sonhar sonhos possíveis.

Paulo Freire

Dedicatória

À Carlos, Arthur e Vinícius, pela paciência,
incentivo e amor em todos os momentos.

Aos meus pais, Amado e Marta,
pelo exemplo, carinho e dedicação.

Agradecimentos

Ao caríssimo professor Victor Giraldo, grande motivador deste trabalho.

Aos professores do programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ, pelos ensinamentos.

Aos colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da UFRJ, pelas trocas e convívio fraterno.

À minha família, por torcerem pela realização deste trabalho, em particular, à minha irmã Célia pelos valiosos esclarecimentos.

Ao Colégio Cruzeiro, na figura de seu atual diretor, professor João Francisco de Lima, pelo apoio institucional.

Ao funcionário André (multimeios) e aos professores do Laboratório de Informática, Aloísio e Angélica, pela colaboração.

À Ananda, Clara, Laura, Verônica, Hugo, João, Pedro e Georges, pela disponibilidade, colaboração e carinho.

Índice

Página

Resumo

O objetivo desta pesquisa é apresentar, aplicar e analisar os resultados de uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio. Optamos por uma abordagem baseada na teoria da imagem de conceito e raiz cognitiva. Desenvolvemos o trabalho em quatro etapas: estudo da variabilidade de uma função, taxa de variação média, taxa de variação instantânea e apresentação do conceito de derivada. Um ambiente computacional adequado, utilizado na terceira etapa, permitiu aos participantes desenvolverem a noção de retidão local, considerada raiz cognitiva para o conceito de derivada. Através de um estudo qualitativo, analisamos os dados experimentais apresentados por estudantes da segunda série do ensino Médio.

Abstract

The aim of this research is to present, apply and analyze the results of a proposition to teach the concept of derivative in high school. We opted for an approach based on the theory of concept image and cognitive root. We develop the work in four stages: the study of the variability of a function, average rate of change, instantaneous rate of change and presentation of the derivative concept. The generic organizer used in the third stage allows participants to develop the notion of local straightness, considered cognitive root for the derivative concept. Through a qualitative study, we analyze experimental data presented by students of the second year in high school.

Introdução

Há cerca de uma década, o ensino da matemática vem tomando novos rumos no Brasil. Em 2000, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) apresentaram novos objetivos de abordagem do estudo da Matemática tomando como referência a Lei de Diretrizes e Bases (LDB 9.394/96), que considera o Ensino Médio como última e complementar etapa da Educação Básica, e a Resolução do Conselho Nacional de Educação (CNE) de 1998, que organizou as áreas de conhecimento. Os PCN “orientam a educação à promoção de valores como a sensibilidade e a solidariedade, atributos da cidadania” (PCN, 2000, p.6). Ao instituir as diretrizes curriculares nacionais para o Ensino Médio, “apontam de que forma o aprendizado de Ciências e Matemática, já iniciado no Ensino Fundamental, deve encontrar complementação e aprofundamento no Ensino Médio”.

Os PCN ressaltam, ainda, que:

> Nessa nova etapa de estudo, o Ensino Médio, em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos (PCN, 2000, p.6).

Considerando as novas perspectivas traçadas para o Ensino Médio, o currículo de Matemática foi revisto e sistematizado em três eixos ou temas estruturadores que serão desenvolvidos, simultaneamente, nas três séries do Ensino Médio. De acordo com os PCN+ (2002), estes eixos estruturadores correspondem a “um conjunto de temas que possibilitam o desenvolvimento das competências almejadas com relevância científica e cultural e com uma articulação lógica das idéias e conteúdos matemáticos”. Os três eixos estruturadores são:

1. Álgebra (números e funções)
2. Geometria e Medidas
3. Análise de Dados.

> Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Apesar da unidade característica de cada tema estruturador, para organizar o planejamento do ensino cada um deles foi dividido em unidades temáticas que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização (PCN+, 2002, p.120).

Em relação à Álgebra, os PCN+ propuseram, para melhor organizar o planejamento de ensino, uma divisão em duas unidades temáticas: variação de grandezas e a trigonometria. A unidade temática, Variação de Grandezas (PCN+, 2002, p.122), será abordada neste trabalho, especificamente, no que diz respeito à taxa de variação de funções elementares.

A escolha do estudo da taxa de variação é decorrente de uma necessidade de dar maior significado ao estudo das funções no Ensino Médio. Após trabalharmos alguns anos, neste nível de ensino, observamos que a abordagem dada ao estudo das funções explorando a definição, construção e análise de gráficos (intersecções com os eixos coordenados, intervalos de crescimento e decrescimento, estudo do sinal da função, ...), resolução de problemas modelados a partir dos tipos de funções estudadas era insuficiente, ou seja, estava aquém do que poderia ser explorado neste nível de estudo. Vimos que, por exemplo, no estudo da função polinomial do 1º grau, o coeficiente angular poderia ser analisado, não apenas como o parâmetro que definiria a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, mas também como a razão entre as variações de duas grandezas envolvidas num tipo de problema e que uma outra análise poderia ser feita a partir dessa informação. Considerando ser a função polinomial do 1º grau a única que possui variação constante para qualquer intervalo I do domínio, e que, de fato, pode ser caracterizada por esta propriedade, passamos a explorar problemas que tratavam da análise dessa variação .

No entanto, esta mesma análise da razão das variações das grandezas não se processaria de maneira tão simples para os outros tipos de funções estudados nesse nível cujo valor da razão das variações $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ depende dos valores das variáveis nos extremos do intervalo considerado $(I \subset D(f))$. Surgiu, então, o questionamento: como poderíamos encaminhar este estudo para funções cuja variação não é constante? Além disso, estávamos certos de que as funções deveriam ser estudadas não somente como entes estáticos, mas também, através da exploração de seu caráter dinâmico.

Podemos observar que este caráter dinâmico está na essência do surgimento da noção de função na seguinte citação de Roque (2006):

> [...] A generalização da noção de função se deve ao desenvolvimento da física após Galileu e Descartes. A idéia de uma variação em função do tempo (que Descartes havia excluído da geometria) é fundamental nos trabalhos de Galileu, onde já encontramos uma certa noção de função, no sentido de uma associação entre duas variabilidades, dada por uma lei de variação que é encarada como um objeto matemático.[...] (Roque, 2006, módulo 8, p. 2)

Estes foram alguns dos fatores que nos levaram a refletir sobre a necessidade de se investir na idéia de variação. Por outro lado, a necessidade de estudar Cálculo no Ensino Médio é destacada por vários autores.

Em Rezende (2003), podemos observar a importância de se estudar os conceitos fundamentais do Cálculo no Ensino Básico.

> [...] Ao contrário do que se pensa em geral, pode-se afirmar que parte significativa dos problemas de aprendizagem "do atual" ensino de Cálculo está "**fora**" dele e é "**anterior**" inclusive ao seu tempo de execução. Não se trata apenas da tão propalada "falta de base" dos estudantes, como afirma a grande maioria dos nossos colegas professores.[...] Assim, ao invés de se fazer menção a uma "falta de base" dos estudantes, o que se precisa fazer, de fato, é estabelecer os conceitos básicos e necessários para se aprender as idéias básicas do Cálculo. [...] (Rezende, 2003, p. 31)

Giraldo (2004, notas de aula) considera que:

> Um dos objetivos fundamentais do ensino é democratizar a produção intelectual da humanidade, isto é, tornar o conhecimento básico produzido acessível a todos. Derivada, certamente, está entre as maiores criações do homem, em Matemática, dos últimos séculos. Isto reforça o caráter de terminalidade e de formação plena do cidadão definidos nos PCN+ do Ensino Médio.

E ainda, H. P. Greenspan e D. J. Benney (1993) afirmam que:

> (...) o Cálculo é o maior triunfo da civilização e tem sido o suporte do progresso científico e tecnológico desde sua criação (...) (H. P. Greenspan e D. J. Benney 1993, *apud* Rezende 2003, p. 36)

O desejo de inserir o ensino de conceitos de cálculo no Ensino Básico, também, pode ser observado nos fragmentos de textos abaixo relacionados:

> 1. Seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no 2º grau, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações (Ávila, 1991, p. 8).
>
> 2. O professor de matemática deve ordenar seu programa conforme o desenvolvimento dado pelas disciplinas técnicas e da cadeira de Física. A Física é a base da técnica e a Matemática a linguagem da Física. Do mesmo modo, quem não tem experiência física das variações lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, periódicas, etc., dificilmente poderá compreender a importância do estudo genérico das funções (Duclos, 1992, p. 28).
>
> 3. A capacidade de analisar e interpretar gráficos é muito importante em qualquer domínio científico. É, portanto, necessário levar os estudantes à compreensão desse tema. Esta foi uma das conclusões do grupo que discutiu o ensino de Matemática para as Biociências (Medicina e Biologia, incluindo Física e Química) na 1ª reunião de Didática da matemática do Cone Sul, realizada em Montevidéu, em abril de 1992. Nessa ocasião, os professores do 2º grau presentes reivindicaram de seus colegas, professores universitários, material didático adequado às aplicações da Matemática às outras ciências. Estes são analisados com ênfase na identificação e interpretação dos pontos críticos. Seu conteúdo pode ser explorado no 2º grau com o auxílio das noções intuitivas de evolução contínua, velocidade e aceleração, que fazem parte do cotidiano do aluno (Carneiro, 1992, p. 32).
>
> 4. Queria saber por que os alunos aprendem ou não aprendem funções, como desenvolvem o pensamento variacional, quando e como constroem conceitos como: variável, dependência, taxa de variação e limite; queria investigar de que maneira

situações do cotidiano contribuem para a construção da concepção de função. Observava que os estudantes universitários que já estudaram funções no Ensino Médio não possuem uma boa concepção de função. Esta deficiência não lhes permite entender as relações entre variáveis, interpretar gráficos e integrais e usar a matemática como ferramenta (Schreiner, 2004).

5. Resolução de problemas de juros ou de crescimento de população (ou do aumento do custo de vida, da dívida externa etc.), cálculos de velocidades ou de taxas de variações de outras grandezas, interpretações de gráficos de funções reais, resolução de problemas de otimização (de áreas, de orçamentos domésticos etc.) são habilidades cada vez mais requisitadas para o exercício pleno da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade (Rezende, 2003 p.37).

Os argumentos apresentados até agora procuram justificar a relevância cultural (a derivada como uma das maiores descobertas, em Matemática, da humanidade), social (a utilização dos conceitos de cálculo permitindo maior compreensão de problemas relacionados à vida do cidadão, já citados) e funcional (a aplicação dos conceitos básicos de cálculo na resolução de problemas em outras Ciências) do estudo dos conceitos básicos do Cálculo no Ensino Médio. No entanto, há outro argumento, o econômico, tão importante quanto os anteriores, que vem em defesa de se antecipar o ensino de conceitos de Cálculo na Escola Básica.

Um artigo publicado pela jornalista Flávia Rodrigues (O Globo, 03/12/2007) sob o título "Escassez generalizada" mostra que o Conselho Federal de Engenharia, Arquitetura e Agronomia (CONFEA) estima que o Brasil precisa de 20 mil engenheiros. Relata que algumas empresas estão oferecendo bolsas a estudantes de cursos de engenharia para não deixarem os bancos das universidades ou trabalharem para outras companhias. Esta atitude se dá devido à carência de engenheiros, de várias especialidades, no país. A jornalista informa que, de acordo com o presidente da entidade CONFEA, Marcos Túlio de Melo, o Programa de Aceleração do Crescimento (PAC) está exigindo muita mão-de-obra de uma só vez.

Por outro lado, apesar de todos esses argumentos, pesquisas recentes relatam a situação alarmante relativa ao baixo desempenho dos estudantes na disciplina de Cálculo I.

Rezende (2003) apresenta dados preocupantes relacionados ao desempenho final de alunos em alguns cursos na referida disciplina. Citando Barufi (1999) apresenta o índice de não-aprovação dos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, que varia de 20% a 75%. Já no Instituto de Matemática e Estatística, o menor índice não é inferior a 45%. Na Universidade Federal Fluminense, instituição onde o autor leciona, os índices de não-aprovação nesta disciplina são mais acentuados. A variação desses índices está na faixa de 45% a

95%. No curso de Matemática, este índice não é inferior a 65%. O pesquisador explica que a disciplina de Matemática Básica começou a ser lecionada para alunos do curso de Matemática como disciplina obrigatória e efetiva da grade curricular a partir do 2º semestre de 1997 com o objetivo de reforçar e resgatar temas considerados básicos num curso de Cálculo I, no entanto, observa que tal meta não se cumpriu. Podemos observar esses dados no gráfico abaixo (Figura 1):

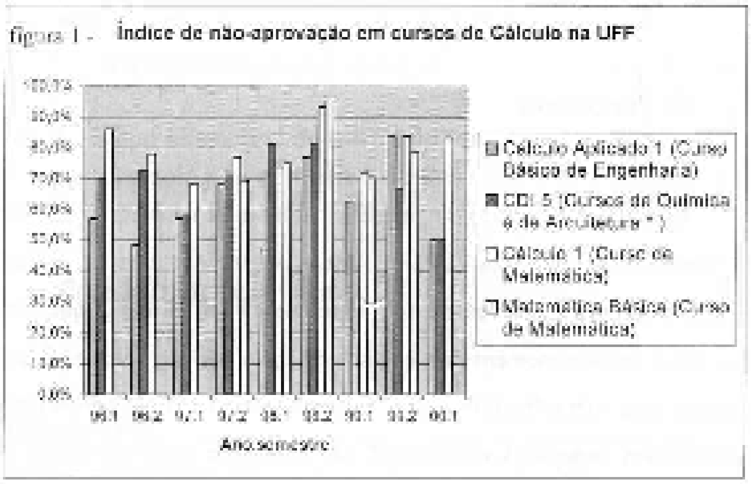


Figura 1: Gráfico com índice de não-aprovação em curso de Cálculo na UFF no período: 1996- 2000 (Rezende, 2003, p.2)

Rezende acrescenta, ainda, que esta situação não é uma particularidade da UFF, é uma situação geral. O autor constata que é um equívoco pensar que este problema é cultural e que se justifica pela condição sócio-econômica da sociedade brasileira. Em sua pesquisa, Rezende realiza um mapeamento das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo e observa:

> [...] um único ***lugar-matriz*** das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo: o da **omissão/evitação das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.**
>
> De fato, a ausência das idéias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forçado" a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo.[...] (Rezende, 2003, p 402. Grifos do autor.)

Além disso, poucas escolas apresentam esse assunto em seus programas de matemática. Alguns livros didáticos (por exemplo, Guelli, 2003; Machado, A.S., 1991; Iezzi, G., Murakami, C. & Machado, N.J. 2002) usados no terceiro ano do Ensino Médio reservam alguns capítulos para tratar do assunto.

Em muitos casos, os livros didáticos apresentam a seguinte seqüência para o estudo de derivada:

1) definição de taxa de variação média, seguida da noção de limite;

2) definição de taxa de variação instantânea de uma função no ponto x_0 como sendo o limite da razão $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ quando $\Delta x \to 0$;

3) apresentação deste limite como sendo a derivada da função no ponto x_0, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

A proposta descrita acima se baseia na definição formal de derivada através do conceito de limite. Diversas pesquisas assinalam (Tall, 1989; Vinner, S. (Tall (Ed)), 1991; Cornu, B. (Tall (Ed)), 1991; Tall 1992; Giraldo, V. & Carvalho, L.M., 2002; Giraldo; 2004) que o aluno não tem maturidade para entender a definição baseada no conceito de limite. Desta forma, em muitos dos casos, o professor, para simplificar a apresentação do conteúdo, opta por uma abordagem baseada em procedimentos algébricos, sendo esta, a abordagem utilizada pelos alunos. Esses procedimentos, embora possibilitem resolver alguns problemas, em que é suficiente conhecer as fórmulas de derivação, desvia do entendimento conceitual, o que pode tornar o cálculo mecânico.

Podemos observar, também, que, nesta abordagem, a idéia de variação de grandezas, associada ao conceito de derivada fica diluída. Isto posto, entendemos que apresentar regras simplificadas em contextos simplificados pode agir como obstáculo para a aprendizagem posterior (Tall, 1989).

Neste trabalho, será focada a atenção no estudo sobre o comportamento de algumas funções elementares, especificamente, nos conceitos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea destas funções. Nossa intenção é apresentar uma abordagem que esteja fundamentada em conceitos, sem tomar a definição formal (baseada no conceito de limite) como ponto de partida, mas como objetivo pedagógico.

Nessas condições, sugerimos a inclusão de algumas das idéias básicas do Cálculo Diferencial no programa do Ensino Médio. Como já observamos anteriormente, esta é uma necessidade e reivindicação de professores e pesquisadores preocupados com o ensino de matemática nos níveis fundamental, médio e superior.

Neste trabalho, seguiremos, como referencial teórico, as idéias de David Tall, Shlomo Vinner e Tony Barnard, especificamente nas Teorias de *Imagem de Conceito* (Tall & Vinner, 1981) *e Raiz Cognitiva* (Tall & Barnard, 1997). Giraldo comenta:

> [...] A teoria de *imagens de conceito* sugere que o desenvolvimento cognitivo de um conceito matemático se dá através do enriquecimento de uma diversidade de idéias associadas ao conceito, e que a compreensão da própria definição do conceito só é possível quando a gama de idéias associadas é rica o suficiente. A aprendizagem de matemática é favorecida pela multiplicidade de representações presente na abordagem pedagógica.[...] (Giraldo, 2004)

Tall (1989) define raiz cognitiva, como sendo um conceito âncora que o estudante acha fácil de compreender, e que, ainda assim, forma uma base a partir da qual, a teoria pode ser desenvolvida. Após a formulação da teoria de unidades cognitivas, a noção de raiz cognitiva foi reformulada como sendo um tipo especial de unidade cognitiva que se relaciona com o conhecimento familiar ao estudante que está começando um novo desenvolvimento conceitual, permitindo a conexão entre seus conhecimentos iniciais e aqueles a serem desenvolvidos.

Considerando o referencial teórico citado, optamos por seguir a seqüência, formada de quatro etapas, para ensinar o conceito de derivada:

1ª - Explorar a idéia de variação de uma função através de exemplos que permitam o desencadeamento da idéia referida;

2ª - Conceituar taxa de variação média num intervalo do domínio como sendo o coeficiente angular da reta secante passando pelos pontos extremos do gráfico nesse intervalo;

3ª - Introduzir o conceito de taxa de variação instantânea, posteriormente à apresentação da noção de *retidão local,* raiz cognitiva para o conceito de derivada, (Tall (2000)). A seguir, apresentar a noção de linearidade local através do processo de magnificação da curva num intervalo muito pequeno do domínio, cuja visualização só é possível através de um ambiente computacional (Tall, 1989, Tall, 2000, Giraldo & Carvalho, 2002, Giraldo, 2004).

Na terceira etapa, utilizaremos um programa que traça gráfico de funções e permite mudança de janelas gráficas. Escolhemos o *Graphmatica* (Hertzer & Malaca, 2003)*,* por atender não só às necessidades da proposta do trabalho mas também por poder ser obtido gratuitamente na versão *shareware* pela *Internet*. Através da idéia de aproximação linear local é possível fazer uma análise do comportamento da curva num ponto x_0 do domínio através da análise da reta tangente ao gráfico no ponto x_0. Sendo assim, esta variação da função no ponto x_0 é chamada de variação instantânea e é dada pelo coeficiente angular desta reta tangente. Apresentaremos um exemplo da Física (Cinemática) que trata do cálculo da variação instantânea da velocidade algebricamente. Este resultado será verificado, geometricamente, utilizando o programa *Graphmatica*. O aluno deverá constatar, experimentalmente, que a velocidade instantânea num tempo t determinado corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função neste mesmo ponto de abscissa t.

Entendemos que após esta etapa, o aluno poderá sentir a necessidade de um recurso algébrico para determinar esta variação instantânea. As expressões algébricas para o cálculo da taxa de variação instantânea, num ponto x_0 do domínio, de algumas funções elementares serão obtidas através da razão $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$ usando apenas a idéia apresentada de aproximação local.

4ª - Conceituar derivada de uma função num ponto x_0 e função derivada.

Conceituaremos a derivada de uma função em um ponto como a taxa de variação instantânea da função no ponto dado e, numericamente, como o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função neste mesmo ponto.

É importante observar que, embora o ambiente computacional tenha sido utilizado como organizador genérico essencial para formar imagens de conceito ricas através das manipulações de janelas gráficas, neste estágio, com o recurso algébrico, o aluno deverá ter condições de resolver alguns problemas aplicados e teóricos usando o conceito de variação instantânea sem o recurso computacional.

Acreditamos que essa abordagem do conceito de derivada tenha grande chance de funcionar como um facilitador para o entendimento da definição formal de limite e derivada de uma função num futuro curso de Cálculo.

É importante lembrar que, para a execução desse trabalho, é fundamental uma base consistente no estudo das funções como salienta Sierpinska:

> A função como uma relação entre grandezas variáveis ou como o mapeamento de um conjunto para outro ou como uma trinca (x, y, f) é algo imaterial, uma idéia abstrata

tão geral que não significa nada para a pessoa menos experiente (Sierpinska, 1992, p. 16)

Diante dos argumentos expostos que sinalizam e justificam a importância do ensino dos conceitos de Cálculo no Ensino Básico, desejamos verificar, neste trabalho, como a proposta apresentada para o estudo da variabilidade através do estudo da taxa de variação média e taxa de variação instantânea proporciona a aquisição de imagens conceituais ricas, desenvolvendo uma compreensão significativa, pelo aluno, do conceito de derivada.

Capítulo 1

Fundamentação teórica

> “Pensei que seria apropriado escrever-lhe neste livro sobre um certo método, por meio do qual você poderá reconhecer certas questões matemáticas com ajuda da mecânica. Estou convencido de que ele não é menos útil para encontrar provas para os mesmos teoremas. Algumas coisas, que se encontram claras para mim, em primeiro lugar, pelo método mecânico, foram provadas geometricamente em seguida, uma vez que a investigação pelo referido método não fornece de fato uma demonstração. No entanto, é mais fácil encontrar a prova quando adquirimos previamente, pelo método, algum conhecimento das questões, do que encontrá-la sem nenhum conhecimento prévio.”
>
> (Arquimedes, do Livro “O Método dos Teoremas Mecânicos” – *apud* Roque, 2006, Módulo 4, p 1)

1.1. Imagem de conceito

Apresentaremos o referencial em que se baseia o desenvolvimento deste trabalho. As questões levantadas por esta pesquisa serão conduzidas e analisadas sob a ótica das Teorias de *Imagem de Conceito* (Tall & Vinner, 1981) e *Raiz Cognitiva* (Tall & Barnard, 1997).

Tall & Vinner (1981) afirmam que muitos conceitos que usamos diariamente, nem sempre estão formalmente definidos. Aprendemos a reconhecê-los pela experiência e a usá-los em contextos apropriados. Mais tarde, esses conceitos podem ser redefinidos em seus significados e interpretados sutilmente com ou sem o rigor da definição precisa. Durante o processo mental de relembrar e manipular um conceito, muitos processos são reativados, consciente ou inconscientemente afetando o seu significado e uso. Esses pesquisadores utilizam o termo *imagem de conceito* para *descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, o qual inclui todas as figuras mentais, propriedades e processos associados* (Tall & Vinner, 1981, pp. 1 e 2).

Em outro trabalho, Vinner (Tall (Ed) 1991) descreve *imagem de conceito* como uma representação, não-verbal, que o indivíduo tem em mente, de um determinado conceito. Pode ser, não só, uma representação visual, no caso do conceito ter uma representação visual, mas também uma coleção de expressões ou experiências. A representação visual, as figuras mentais, as impressões e as experiências associadas com o nome do conceito podem ser traduzidas em formas verbais.

Tall (1989) considera que as forças culturais operantes na imagem de conceito são, essencialmente, o produto global das interações entre indivíduos e a forma como vemos o mundo. Em qualquer estágio, podemos dar sentido às nossas observações, usando a estrutura cognitiva que temos. Segundo o autor, devido a impulsos externos e processos internos, nós damos sentido a novas informações fazendo novas conexões e reorganizando nossa estrutura cognitiva. Assim, *a imagem de conceito é individual*. *Ela não é estática, sofre transformações de acordo com o desenvolvimento do indivíduo* (Giraldo, 2004).

Tall e Vinner (1981) destacam, ainda, a idéia de *imagem de conceito evocada* como uma porção da imagem de conceito que é ativada num momento particular.

1.1.1 Definição de conceito

Segundo Tall e Vinner (1981) definição de conceito é uma seqüência de palavras usadas para especificar um conceito. Consideram que a definição de conceito pode ser decorada ou aprendida de forma mais significativa por um indivíduo e estar relacionada com maior ou menor grau de intensidade com o conceito como um todo. Pode ser, também, uma reconstrução pessoal da definição feita pelo próprio indivíduo. De acordo com os autores, a definição de conceito é, então, um grupo de palavras que o estudante usa para verbalizar sua imagem de conceito (evocada). Neste caso, uma definição de conceito pessoal pode diferir da definição formal aceita pela comunidade da área de estudo. Acrescentam, ainda, que para cada indivíduo uma definição de conceito pode gerar sua própria imagem de conceito, chamada imagem de definição de conceito, sendo essa, uma parte da imagem de conceito.

Vinner (Tall (Ed) 1991) ressalta que adquirir um conceito significa formar uma imagem de conceito para ele. Decorar uma definição de conceito não garante entendimento do conceito. Entender, acredita, significa ter imagem de conceito. Ou seja, o autor defende que a aquisição e entendimento de um conceito estão diretamente ligados à riqueza de imagens de conceito relacionadas com a idéia a ser assimilada. Afirma, ainda, que muitos conceitos do dia a dia, como casa, gato etc., podem ser adquiridos sem qualquer envolvimento de definições. Por outro lado, alguns conceitos, mesmo da vida diária, podem ser introduzidos por definições. Por exemplo, a palavra “floresta” pode ser apresentada para uma criança como “muitas,

muitas árvores juntas". Definições como essas, ajudam a formar uma imagem de conceito. Entretanto essas definições tornam-se dispensáveis quando a imagem é formada. Por outro lado, Vinner considera que em contextos técnicos, definições podem ter papéis extremamente importantes. Não somente porque elas ajudam a formar uma imagem de conceito, mas porque freqüentemente têm um papel crucial na tarefa cognitiva, ou seja, na organização formal e encadeamento das idéias, essenciais para a compreensão adequada dos conteúdos. Giraldo (2004) comenta que:

> Da mesma forma que uma definição de conceito (mesmo uma que corresponda à definição formal) sem uma imagem de conceito rica poderia ser inútil; uma imagem de conceito rica sem uma definição de conceito adequada pode ser traiçoeira. Uma definição de conceito inconsistente com a definição formal não é necessariamente parte de uma imagem de conceito pobre ou inconsistente; nem uma imagem de conceito pobre necessariamente inclui uma definição de conceito incorreta. Em resumo, uma definição de conceito consistente com a definição formal, uma imagem de conceito rica e uma imagem de conceito consistente são fenômenos mutuamente independentes. Assim sendo, esta teoria sugere que a abordagem pedagógica para um conceito matemático deve objetivar não somente a compreensão da definição formal, mas também o enriquecimento das imagens de conceito desenvolvidas pelos estudantes.(Giraldo, 2004, p.18)

Observamos que, antes de apresentarmos um conceito, devemos nos preocupar com uma abordagem pedagógica que possibilite a formação de imagem de conceito rica e consistente relacionada ao conceito. Desta maneira, a compreensão e assimilação da definição formal aconteceriam de forma mais significativa para o aprendiz.

1.2 Descrições, conflitos e efeito de estreitamento

> Um objeto matemático é perfeitamente caracterizado pela sua definição formal. Todas as suas propriedades e características serão desdobramentos lógicos de sua definição formal, deduzidas a partir do conjunto de postulados e proposições da teoria em que a definição insere-se, por meio de um sistema de regras de inferência pré-estabelecido.Tudo aquilo que pode ser dito do objeto será dito em decorrência da definição. Portanto, podemos dizer que a definição *esgota* completamente o objeto, isto é, de uma perspectiva estritamente formal, um objeto matemático é a sua definição.
> (Giraldo, 2004, p 68. Grifo do autor)

Nesta seção iremos expor uma síntese das idéias principais apresentadas por Giraldo, em sua pesquisa (Giraldo, 2004), referentes às noções de descrição de conceito, conflito e efeito de estreitamento que justificarão alguns resultados obtidos.

Apesar de podermos pensar que a definição *esgota* o objeto definido, se nos mantivermos limitados a um contexto puramente formal, esta seria uma redução perigosa. Em seu trabalho, Giraldo discute algumas questões sobre o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos que dizem respeito à conceituação de *objeto matemático no contexto da pedagogia matemática*.

Um conceito matemático na estrutura cognitiva de um indivíduo, segundo a teoria de imagem de conceito e unidades cognitivas, é a sua imagem de conceito. Desta forma, uma abordagem pedagógica deve incluir não somente uma, mas uma série de representações para o conceito em estudo. Discute sobre o papel pedagógico das limitações associadas a cada forma de representação e, principalmente, do possível confronto entre elas. No contexto pedagógico, para complementar a definição formal de um conceito, para estimular o desenvolvimento de imagens de conceito mais ricas, professores, freqüentemente, lançam mão de referências informais, que encerram limitações em relação à própria definição formal. Por exemplo, a utilização da frase "a função x^2" para fazermos referência à função $f: R \to R$ que a cada número real x associa seu quadrado. No ensino de funções, usualmente, empregam-se representações escritas de três naturezas principais: numéricas (tabelas), algébricas (fórmulas) e geométricas (gráficos). Cada uma dessas formas de representação, isoladamente, é limitada na medida em que se evidenciam certos aspectos do conceito de função, mas omite outros.

Resume na seguinte tabela (Figura 4):

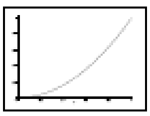
A tabela	$\begin{array}{c\|c} x & y \\ \hline -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$	pode representar ambas as funções:	$\begin{array}{l} p: R \to R \\ x \to x^2 \end{array}$	e	$\begin{array}{l} f: R \to R \\ x \to \|x\| \end{array}$
A fórmula	$y = x^2$	pode representar ambas as funções:	$\begin{array}{l} p: R \to R \\ x \to x^2 \end{array}$	e	$\begin{array}{l} f: R \to [0, \infty[\\ x \to x^2 \end{array}$
O gráfico		pode representar ambas as funções:	$\begin{array}{l} p: R \to R \\ x \to x^2 \end{array}$	e	$\begin{array}{l} f: R \to R \\ x \to \|x\| x \end{array}$

Figura 4: Limitações das três principais representações para funções reais.

(Giraldo, 2004, p. 71)

O termo *descrição de conceito* (ou simplesmente *descrição*) é apresentado e definido como:

> [...] qualquer referência a um conceito matemático, feita em um contexto pedagógico, que não esgote o conceito a que se refere, ou seja, que guarde limitações em relação a este, no sentido em que evidencie certos aspectos e omita outros.[...] (Giraldo, 2004, p 72)

Desta forma, temos que descrições podem ser referências orais ou escritas, sob a forma de linguagem corrente, simbologia, notação matemática, esboços, diagramas, esquemas, etc. Ambientes computacionais para o ensino revelam-se como desencadeadores de um amplo repertório de descrições para conceitos matemáticos.

> [...] um importante passo para a compreensão de um conceito matemático é, sem dúvida, estabelecer a diferença entre as idéias de *definir*, no sentido formal de um contexto teórico, e *descrever*, no sentido não formal de um contexto pedagógico. (Tall, 1992)

Uma descrição de conceito não estabelece com a sua definição formal uma relação direta de oposição. No entanto, descrever e definir são atividades pertencentes a contextos distintos, pedagógico e teórico-formal, respectivamente.

Uma descrição é uma situação pedagógica. Desta forma suas limitações não são próprias da forma de representação utilizada, mas estão sujeitas ao próprio contexto pedagógico.

Limitações, neste sentido, são entendidas como:

> Conjunto de características ou propriedades do conceito descrito que são evidenciadas ou omitidas no ato de descrever, bem como eventuais diferenças em relação a outras descrições ou à própria definição formal. Seja qual for o caso, as limitações de uma descrição – sejam estas, aspectos evidenciados, aspectos omitidos ou diferenças comparativas – não são dadas a priori, mas emergem do contexto pedagógico específico. [...] não desejamos atribuir a esta noção qualquer conotação negativa. Ao contrário, o papel pedagógico das limitações de uma descrição também depende do contexto como um todo e pode ser tanto indesejável quanto muito positivo,[...] (Giraldo, 2004)

As limitações associadas a uma descrição podem levar um estudante a perceber aparentes contradições com a teoria, ou como sinaliza, com a imagem de conceito da teoria. Refere-se ao termo *situação de conflito* (ou como diz, apenas *conflito*) a uma situação com essa característica:

> [...] a percepção, por parte do estudante, de uma aparente contradição motivada pelas limitações de uma descrição, ou pelo confronto de mais de uma descrição. [...] (Giraldo, 2004, p 75)

Esquema apresentado (Figura 5):

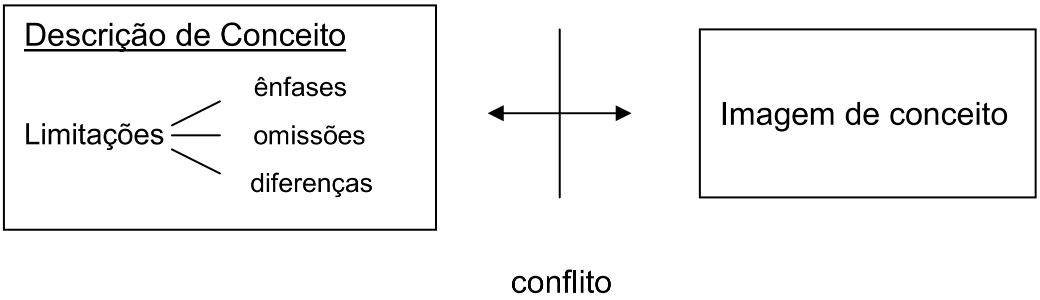


Figura 5: Descrições e conflitos (Giraldo, 2004, p. 75)

Uma descrição contém conflitos potenciais, que podem ou não vir a se atualizar. Neste sentido, a atualização das limitações de uma descrição sob a forma de conflito pode gerar diferentes reações por parte dos estudantes. Esses podem perceber sem dificuldades o que ocasionou a aparente contradição, ou num extremo oposto, se depararem com situação de confusão. Esta série de reações pode desencadear efeitos diversificados pela pedagogia adotada frente a uma situação de conflito. Identifica o termo conflito como um processo particular de desenvolvimento da imagem de conceito, portanto uma estrutura inerente à própria dinâmica da imagem de conceito.

A partir de relatos de experimentos apresentados em (Hunter et al., 1993)[3] e (Monaghan et al., 1994)[4] , observou-se um fenômeno relevante: a limitação das descrições (seja por omissão ou (ab)uso de descrições, como diz) fez com que a habilidade de cálculo se atrofiasse nas imagens de conceito dos estudantes.

Denominou *efeito de estreitamento* a processos em que:

> [...] as limitações das descrições utilizadas na abordagem pedagógica convertem-se em limitações nas imagens de conceito, conseqüentemente, desenvolvidas pelos estudantes [...] (Giraldo, 2004, p 76)

[3] Estudantes usando o programa *Derive* não precisavam substituir valores numéricos da variável independente para obter uma tabela e esboçar o gráfico. Como resultado, alguns estudantes que calculavam os valores por substituição antes do curso, não eram mais capazes de fazê-lo depois. Para uma amostra de dezessete estudantes, foi colocada a questão: *O que você pode dizer sobre u se u = v + 3 e v = 1?* Nenhum dos estudantes que deixou de responder a questão pré-teste conseguiu respondê-la no pós-teste e seis dos que responderam corretamente no pré-teste erraram no pós-teste. (Giraldo & Carvalho, 2002, p.4)

[4] Neste experimento as derivadas eram obtidas simplesmente por meio de uma seqüência de teclas corretamente acionadas, desta forma os estudantes desenvolveram imagens de conceito nas quais a derivada era simplesmente um procedimento mecânico computacional. (Giraldo, 2004, p. 76)

Esquema apresentado (Figura 6):

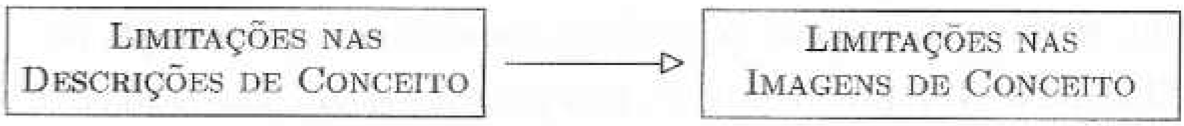


Figura 6: Efeitos de estreitamento (Giraldo, 2004, p. 76)

Os exemplos de efeitos de estreitamento descritos em (Hunter et al. 1993) e (Monaghan et al., 1994) não estão relacionados à ocorrência de conflitos, mas ao contrário, à sua ausência. Justifica: *como as descrições computacionais eram usadas com exclusividade na abordagem pedagógica, os estudantes tiveram poucas oportunidades de se dar conta de suas limitações*.

Tall (2000) considera que enfatizar certos aspectos de uma atividade e negligenciar outros pode causar a atrofia dos aspectos negligenciados. Giraldo conclui apresentando uma hipótese que seria comprovada ao final de sua pesquisa:

> [...] situações de conflito, em lugar de evitadas, são valorizadas, dentro de uma abordagem pedagógica cuidadosamente desenhada, o papel das limitações associadas pode ser revertido positivamente – *estas podem atuar para expansão de imagens de conceito e não para o seu estreitamento*. (Giraldo, 2004, p 77)

1.3 Unidades cognitivas

Tony Barnard e David Tall apresentam a expressão *unidade cognitiva* para denominar *uma porção da imagem de conceito em que o indivíduo é capaz de focar atenção conscientemente em um determinado momento* (Tall e Barnard, 1997, p.41). Desta forma, uma unidade cognitiva pode ser um símbolo, um fato específico tal como $''3+4=7''$, uma propriedade geral tal como “a soma de dois números pares é um número par”, uma relação, um passo em um argumento, um teorema, e assim por diante. Afirmam que uma unidade cognitiva para um indivíduo pode não ser unidade cognitiva para outro. A habilidade de conceber e manipular unidades cognitivas são essenciais para o pensamento matemático. Os autores sinalizam duas importantes habilidades no desenvolvimento de um raciocínio matemático, relacionadas com a noção de unidade cognitiva:

(i) comprimir informação matemática, formando unidades cognitivas e

(ii) construir conexões entre unidades cognitivas de tal forma que informações necessárias possam ser facilmente acessadas.

Barnard & Tall afirmam que um aspecto significativo do pensamento reflexivo é a habilidade de comprimir uma coleção de unidades cognitivas conectadas, que podem ser processos, sentenças, objetos, propriedades, seqüências de dedução lógica etc. dentro de uma simples entidade que pode ser manipulada como um conceito ou desempacotada como um esquema cognitivo (ver também Crowley & Tall, 1999).

Tall (2000) comenta que a quantidade de informação que um indivíduo é capaz de manter no foco de sua atenção num período curto de tempo é limitada. Barnard (1999) observa que unidades cognitivas, não só são pequenas o suficiente para poderem permanecer no foco consciente da atenção enquanto são usadas, mas também atuam no nível operativo. Isto é, além de poupar espaço mental, substituindo uma coleção de itens, uma unidade cognitiva carrega a estrutura original da coleção que a gerou, mantendo com esta uma conexão ativa.

A compressão é feita de várias formas, incluindo o uso de palavras e símbolos como sinais para idéias complexas. *A compressibilidade de idéias matemáticas reflete-se em muitos exemplos da evolução histórica da própria matemática* (Giraldo, 2004). Podemos citar, como exemplo, o longo percurso (processo operacional) para se chegar à fórmula de resolução de uma equação polinomial do segundo grau e na seqüência, usá-la como recurso (objeto) para determinar os zeros da função polinomial do 2º grau.

A teoria das unidades cognitivas sugere que *o enfoque pedagógico de um conceito matemático deve estimular a construção de conexões múltiplas e flexíveis entre unidades cognitivas e dentro das mesmas* (Giraldo, 2004).

1.4 Raiz cognitiva

Tendo em vista o que foi exposto, observamos que a formação de imagens de conceito ricas é fundamental para o entendimento de determinado conceito em matemática. Desta forma, apresentar um conceito através de sua definição formal, não é, de uma forma geral, o ponto de partida mais indicado para a aprendizagem. Há que se criar condições, através da diversificação da abordagem de um determinado conceito, a fim de que se obtenha solo fértil para semear a nova idéia. A certeza de que o aprendiz possui imagens de conceito ricas, pode possibilitar a apresentação da definição formal. Como Giraldo comenta, *esta constatação sugere* *a discussão sobre o planejamento da abordagem pedagógica inicial de um conceito matemático*. Tall (1992) ressalta que, ao elaborar um currículo, é natural tentar começar a partir de idéias simples e direcionar gradativamente para conceitos mais complexos de acordo com o crescimento da experiência do estudante. O autor questiona:

> [...] Qual a melhor base para construir um currículo além das definições, as quais têm sido desenvolvidas por tantas gerações?[...]
>
> [...] Quando estudantes são primeiramente confrontados com definições matemáticas é quase inevitável que eles encontrem apenas uma série de possibilidades que distorcem suas imagens de conceito de forma que poderá causar futuros conflitos cognitivos.[...] (Tall, 1992, p.4)

Tall (1992) sustenta que não se deve, inicialmente, construir conceitos a partir da definição formal, pois esta pode conter elementos que não são familiares para o aprendiz. Nessas condições, apresenta a noção de raiz cognitiva, como uma idéia que deve *possuir o caráter dual de ser familiar para o estudante e também proporcionar a base para o desenvolvimento matemático futuro.* Neste mesmo trabalho, Tall define uma raiz cognitiva como sendo *um conceito âncora que o aprendiz encontra facilidade para compreender, e que, ainda assim, forma uma base a partir da qual a teoria pode ser construída.*

Segundo o autor, uma raiz cognitiva é diferente de uma fundamentação matemática. Enquanto a fundamentação matemática é um ponto de partida apropriado para o desenvolvimento lógico de um conteúdo, uma raiz cognitiva é mais apropriada para o desenvolvimento do currículo.

O autor observa, ainda, que, a raiz cognitiva de um determinado conceito não é fácil de encontrar. Determinar uma raiz cognitiva requer uma combinação de pesquisa empírica e conhecimento matemático.

1.4.1 Organizadores genéricos

Com base na noção de *organizador avançado*[1] proposta por Ausubel et al, (1968), Tall (1989) definiu um *organizador genérico* como sendo um ambiente (ou micromundo) que capacita o aprendiz a manipular exemplos e (se possível) não-exemplos de um conceito matemático específico ou um sistema de conceitos relacionados. A intenção é ajudar o aprendiz a ganhar experiência que proverá uma

[1] Organizador avançado: conjunto de material introdutório para uma tarefa de aprendizagem, apresentado num nível de generalidade e abstração mais elevado que a própria tarefa e explicitamente relacionado tanto com as idéias existentes na estrutura cognitiva do sujeito quanto com a tarefa; isto é uma ligação entre o que o sujeito já sabe e a tarefa de aprendizagem (Ausubel, 1968, *apud* Giraldo, 2004).

estrutura cognitiva sobre a qual possa refletir a fim de construir conceitos mais abstratos. Tall acredita que a disponibilidade dos não-exemplos é de grande importância, pois permite ao estudante observar em que condições o conceito não se aplica e, conseqüentemente, ampliar suas imagens de conceito em relação ao tema em estudo, aumentando sua capacidade de análise. Podemos citar, por exemplo, no estudo das funções reais o conceito de função par e função ímpar. Algebricamente, temos que uma função real é par se $f(-x) = f(x), \forall x \in D(f)$ e ímpar se $f(-x) = -f(x), \forall x \in D(f)$. Utilizando um programa que traça gráficos de funções como organizador genérico, podemos observar, facilmente, que funções pares possuem gráficos simétricos em relação ao eixo das ordenadas, funções ímpares gráficos simétricos em relação à origem e outras que não satisfazem às definições, terão gráficos que não apresentarão as simetrias citadas anteriormente. Esta manipulação pode funcionar como raiz cognitiva, para se obter, por exemplo, o gráfico de uma função real definida por $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$. O autor acrescenta que a manipulação de não-exemplos é particularmente importante com conceitos mais avançados, tais como convergência, continuidade ou diferenciabilidade, cuja definição é tão complexa que, freqüentemente, estudantes têm dificuldade de compreender quando esta não se aplica. Organizadores genéricos podem ser programas de computador que geram *feedback* imediato para a pesquisa do usuário. Eles também podem ser objetos físicos tais como: blocos de Dienes usados nas escolas primárias para explorar o conceito de valor de lugar em diferentes bases (Tall, 2000). Neste último exemplo, a utilização e manipulação de cubos como unidade, barras como dezenas, placas como centenas proporcionam ao aprendiz visualizar a composição e decomposição de números no sistema decimal.

A partir do trabalho de Tall (1989), a noção de organizador genérico é reavaliada. Organizadores genéricos, como o ambiente computacional, permitem-nos desenvolver uma nova seqüência no desenvolvimento do currículo, não a partir de fundamentações tradicionais, mas a partir de raízes cognitivas. Tall afirma que o planejamento de um organizador genérico requer a escolha de uma idéia fundamental como foco central – uma idéia, que além de ser familiar para o estudante, ajude-o a olhar mais profundamente a teoria (Tall, 2000). Desta forma, a noção de raiz cognitiva, tal como foi formulada, faz-se necessária. Devemos avaliar qual o melhor ponto de partida para apresentar uma nova idéia, sugerindo um caminho que possa promover uma melhora no processo do raciocínio. A partir da escolha do tema para estudo, o ambiente computacional pode ser fundamental neste processo, pois disponibiliza programas que permitem acessar algoritmos rápidos e eficientes e pode apresentar o resultado final através de variadas representações, além disso, oferece novas possibilidades de explorar idéias complexas desde o início (Tall, 1989). Por exemplo, resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente (através do teclado) o que favorece ao estudante construir relações que farão parte de uma larga e rica estrutura conceitual. Desta forma, estaremos oferecendo ao aprendiz, condições que permitirão desdobramentos importantes para se chegar ao entendimento da definição formal.

1.4.2 A noção de retidão local

> Uma linha curva pode ser considerada como uma coleção de infinitos segmentos, todos de comprimento infinitesimal, ou seja, pode ser aproximada por uma linha poligonal com quantidade infinita de lados, todos de comprimento infinitesimal.
> (de l'Hospital (1696), Postulados, *apud*, De Carvalho & D'ottaviano, 2004)

O conceito de derivada, nos cursos de cálculo, normalmente, é apresentado a partir de retas secantes e tangentes. A representação geométrica comum a todos é a de retas tangentes, onde a razão incremental figura unicamente como a inclinação de secantes que tendem a uma tangente. Essa construção tem como raiz cognitiva a noção de limite, talvez o principal obstáculo na compreensão do conceito de derivada (Giraldo & Carvalho, 2002). Cornu (Tall (Ed) 1991) afirma que:

> Uma das maiores dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de limite reside não apenas na riqueza e complexidade, mas também nos aspectos cognitivos, que não podem ser gerados puramente a partir da definição. A distinção entre a definição e o próprio conceito é didaticamente muito importante. Lembrar da definição de limite é uma coisa, adquirir a concepção fundamental é outra. [...] A partir deste ponto de vista, estudantes freqüentemente acreditam que "entenderam" a definição de limite sem realmente apreender todas as implicações do conceito formal. (Cornu, 1991, p. 153)

Sendo assim, a definição formal de derivada não se caracteriza como uma raiz cognitiva para o conceito, pois, fundamenta-se no conceito de limite.

A noção de *retidão local* está baseada na percepção humana de que um objeto curvo parece reto quando olhado de muito perto (Tall, 1989). Numa abordagem baseada na noção de retidão local, a derivada é introduzida a partir do processo computacional de magnificação local, em que uma porção de uma curva é altamente ampliada numa tela de computador (ver também, Invernizzi & Rinaldi, 2002). A derivada de uma função é apresentada como a inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido a um processo de magnificação local através da mudança de janelas gráficas (Giraldo & Carvalho, 2002; Giraldo, 2004, p 34). A noção de retidão local é uma raiz cognitiva porque permite que a função derivada seja vista com a mudança de gradiente do próprio gráfico (Tall, 2000).

Tall distingue a noção *retidão local* da idéia de *aproximação linear local*, ou *linearidade local* (Tall, 1989; Tall, 1992; Tall 2000). Segundo ele, linearidade local enfoca o que ocorre em um único ponto fixado x_0, onde a função é aproximada por uma função linear. Esta idéia se representa simbolicamente por meio do limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - (ah + f(x_0))}{h} = 0$$

Linearidade local é, portanto, uma formulação (um conceito) de natureza matemática da própria definição de derivada que, segundo a teoria de raiz cognitiva, deve figurar não como um *ponto de partida* na abordagem pedagógica de derivada, mas como um *objetivo*. Retidão local, por outro lado, é de natureza cognitiva, ou seja, é a expressão de uma percepção humana do gradiente de um gráfico como um todo.

Linearidade local e retidão local diferem do ponto de vista pedagógico, pois a segunda revela-se intuitiva e pode ser descoberta por um estudante lidando com um programa que trace gráficos no computador. Assim, Tall propõe a noção de retidão local como raiz cognitiva para o conceito de derivada.

Um organizador genérico para o conceito de derivada baseado na noção de retidão local deve ser um ambiente computacional que permita ao usuário modificar a janela gráfica, observando as conseqüentes mudanças nos gráficos das funções. Desta forma o usuário deve ser capaz de manipular exemplos e não-exemplos de funções diferenciáveis. Um exemplo é o programa "Magnify" do Graphic Calculus[2] (1986) programado para permitir ao usuário magnificar qualquer parte do gráfico de qualquer função. Minúsculas partes de certos gráficos altamente magnificadas

[2] Graphic Calculus: programa de computador planejado como principal recurso de apoio de uma abordagem cognitiva para o cálculo. O Graphic Approach to Calculus é uma segunda versão do programa Graphic Calculus (Tall,1986), desenhado como parte da tese de doutorado de David Tall (Giraldo, 2004, p.31).

parecem linha uma reta (Figura 2) e isso produz um *conceito âncora* para a noção de diferenciabilidade. No programa, não-exemplos são fornecidos por gráficos de funções não diferenciáveis que ficam mais enrrugadas (Figura 3). Eles nunca terão o aspecto de linha reta, proporcionando desta forma, *conceitos âncoras* para não-diferenciabilidade.

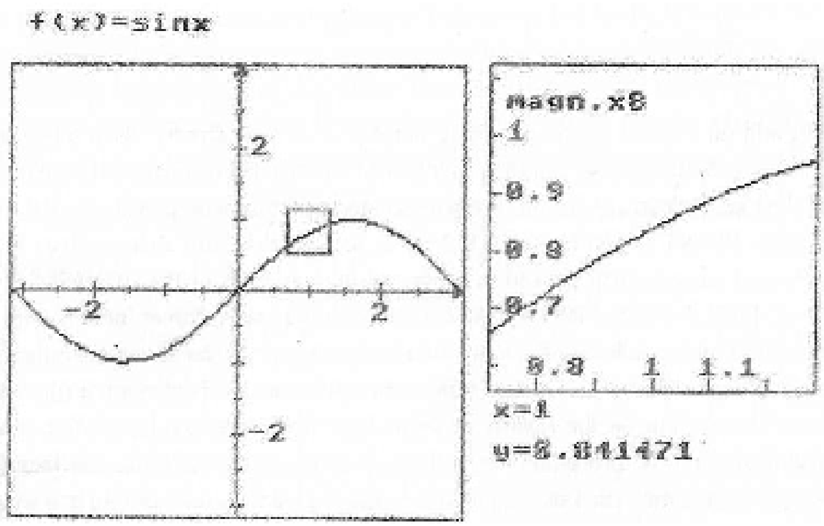


Figura 2: Magnificando o gráfico de uma função diferenciável (Tall, 1989)

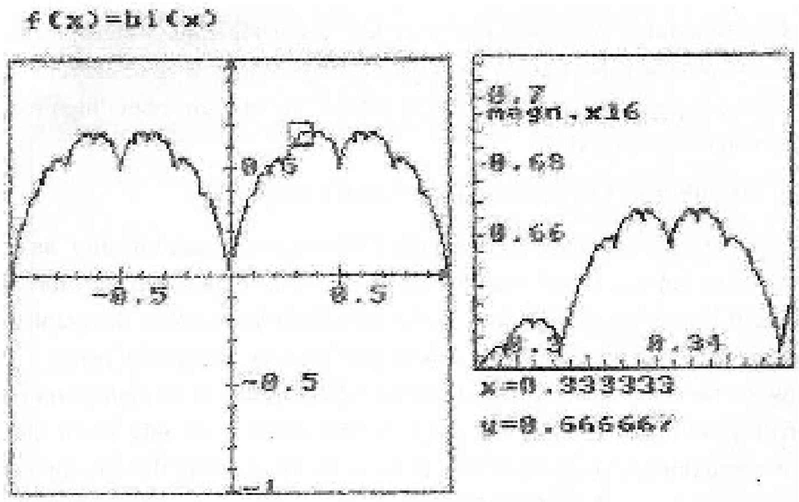


Figura 3: Magnificando o gráfico de uma função não diferenciável (Tall, 1989)

Em Tall (1989), o autor compara as estruturas da abordagem introdutória tradicional para o conceito de derivada com sua proposta de abordagem pedagógica alternativa baseada em retidão local. Segundo o autor, numa abordagem tradicional a seqüência de atividades consiste em:

1. apresentar uma abordagem “intuitiva” para limites;
2. fixar x e calcular o limite de $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h se torna pequeno e chamar o limite de $f'(x)$;
3. variar x em $f'(x)$ para obter a derivada como uma função.

Alternativamente, o conceito pode ser explorado de acordo com a seguinte seqüência de atividades, seguida de desenvolvimentos teóricos posteriores:

1. explorar a noção de retidão local;
2. visualizar o gradiente variável do gráfico original como outro gráfico (isto é, o gráfico da função derivada);
3. relacionar a imagem visual do gradiente ao algoritmo numérico utilizado para gerá-lo;
4. relacionar estas experiências a outras representações, incluindo os processos numéricos e algébricos de limite.

É importante ressaltar que a teoria apresentada neste capítulo sugere, não a substituição da definição formal de um conceito no currículo e sim a criação de condições prévias adequadas para que ela, a definição formal de um conceito, possa ser assimilada de forma consistente pelo aprendiz.

Capítulo 2

O ensino do conceito de derivada através do conceito de taxa de variação instantânea

2.1 Formulação das questões de pesquisa

Embora o assunto variação de grandezas seja uma das unidades temáticas sugeridas pelo PCN+, é observado que a idéia de variabilidade, especificamente, taxa de variação média e taxa de variação instantânea têm merecido pouca ou nenhuma atenção nos programas de matemática adotados para o Ensino Médio. Isto é facilmente constatado fazendo uma análise de alguns livros didáticos de matemática para Ensino Médio adotados no país.

O conceito de derivada já fez parte dos currículos das escolas secundárias há algumas décadas. Hoje, está presente no currículo de um pequeno grupo de escolas de Ensino Médio. Os poucos livros didáticos, por exemplo, (Guelli, 2003; Machado, A.S., 1991; Iezzi, G., Murakami, C. & Machado, N.J. 2002) que reservam alguns capítulos para tratar do assunto fazem-no através de uma abordagem tradicional do conceito, ou seja, partem da definição formal usando a noção de limite. Podemos observar obstáculos nesta abordagem. Segundo Cornu (Tall (Ed) 1991), o conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, típico do pensamento requerido na matemática avançada. De acordo com Tall (2002), a definição formal não é o ponto de partida mais adequado para a apresentação de um conceito, ou seja, não funciona como raiz cognitiva adequada. Observamos, ainda, que esta apresentação, ou seja, introduzir o conceito de derivada pela definição formal, pode se tornar tão difícil para o estudante, que, na maioria das vezes, acaba se restringindo às regras de derivação.

Embora esta abordagem pedagógica possibilite ao aprendiz resolver problemas, analisar intervalos de crescimento e decrescimento, determinar pontos extremos etc, não contempla o entendimento do conceito e desvia do caminho natural que originou o estudo de derivada, a relação de variação entre grandezas. Assim, o que se deve haver na verdade, é uma preparação conceitual de base, para que o estudante seja capaz de entender futuramente a definição formal de modo satisfatório.

Como exposto anteriormente, o conceito de derivada requer o limite da expressão $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ quando h tende a zero, o qual pode ser obtido de forma matematicamente “simples” fixando x e permitindo h variar. A seqüência usual de atividades para o início do cálculo diferencial consiste em três etapas já citadas (Tall, 1989):

1) A definição de taxa de variação média, logo após, a noção de limite.

2) A definição de taxa de variação instantânea de uma função no ponto x_0 como sendo o limite da razão $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ quando $\Delta x \to 0$;

3) Apresentação deste limite como sendo a derivada da função no ponto x_0, $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

Pesquisas em educação matemática mostram obstáculos cognitivos em cada estágio (Tall, 1989; Vinner, S. (Tall (Ed)), 1991; Cornu, B. (Tall (Ed)), 1991; Tall 1992; Giraldo, V. & Carvalho, L.M., 2002; Giraldo; 2004).

Segundo Tall (1989), um deles seria que a idéia geométrica de usar uma secante aproximando de uma tangente não é cognitivamente intuitiva no sentido de que ela não ocorre espontaneamente. Vinner (Tall(Ed)1991) comenta que estudantes fazendo curso de cálculo usualmente possuem uma definição formal ou semi-formal de tangente ao gráfico de uma função diferenciável. As imagens de conceito que constroem a partir de experiências envolvendo figuras como tangente ao círculo e tangente a um arco podem conter elementos coersivos que levam o indivíduo a formar a idéia de que uma tangente pode encontrar uma curva somente em um ponto e não pode atravessar a curva naquele ponto. Cornu (Tall (Ed)1991) relata que, com base em diferentes investigações realizadas, tem sido revelado muito claramente que a maioria dos estudantes não organiza a idéia de limite, mesmo nos mais avançados estágios de seus estudos. No entanto, isso não os impede de resolver exercícios, problemas e serem bem sucedidos em exames. Para Giraldo e Carvalho (2002), embora a determinação de tangentes, a partir de retas secantes tratar-se de um problema de derivada, portanto de natureza puramente local, sua representação geométrica destaca aspectos não-locais. Os autores afirmam que este tipo de construção tem como raiz cognitiva a noção de limite, considerada um dos principais obstáculos para a compreensão de derivada.

Tall (1992) sugere que o conceito de limite é um bom exemplo de fundamento matemático, definido e tornado preciso durante séculos pela combinação de esforços de muitos grandes matemáticos. No entanto, este é comprovadamente difícil para estudantes usarem como base de seus pensamentos e não pode ser uma raiz cognitiva segura para os estágios iniciais do cálculo. Destacamos um importante comentário de Tall:

> Havendo afirmado que eu acho que a noção formal de limite é um lugar inteiramente errado para começar o cálculo (embora seja precisamente o lugar certo para começar um desenvolvimento axiomático em análise), é necessário explicar de que forma deve começar, num curso de cálculo, uma abordagem baseada em retidão local. (Tall, 1992)

Segundo Tall (1989, p 45), estudantes manipulando programa de ampliação de gráfico invariavelmente formulam a noção de retidão local observando a reta através de uma ampla magnificação. Desta forma, a noção de retidão local é considerada, por Tall (2000), uma unidade cognitiva que tem significado para o estudante no estágio inicial de aprendizagem dos conceitos de cálculo, e, ainda assim, contém as sementes de expansões cognitivas para definições formais e desenvolvimento posterior.

Existem razões pedagógicas e epistemológicas para que o estudo de derivada, desenvolvido a partir da noção de retidão local, seja incluído no programa de matemática do Ensino Médio.

Nesta pesquisa, analisaremos a seguinte hipótese: o estudo da variabilidade de uma função, através do estudo da taxa de variação média e taxa de variação instantânea proporciona a aquisição de imagens de conceito ricas (Tall & Vinner, 1981) chegando ao conceito de derivada de forma mais significativa. Isto capacita o indivíduo a interpretar e resolver, através da linguagem funcional, problemas internos e externos à matemática (problemas relacionados a outras ciências) em que se faz necessário o conhecimento do assunto.

Fundamentados em evidências teóricas, ressaltadas anteriormente, defendemos a inclusão do estudo do conceito de derivada e o cálculo da derivada de algumas funções elementares no Ensino Médio, visando a alguns objetivos gerais (ver: Ávila, 1991; Duclos, 1992; Ávila, 1994; Rezende, 2003; Ávila, 2006):

- funcional – incluir um novo recurso, mais significativo, para análise de problemas relativos às ciências, como Química, Biologia e Física que envolvam a idéia da taxa de variação instantânea bem como na própria

Matemática como, por exemplo, determinação da equação de reta tangente num ponto x_0 do gráfico dado de uma função contínua;

- cultural – democratizar uma das maiores e mais significativas conquistas da humanidade em matemática;
- econômico – desenvolver as idéias básicas de Cálculo no Ensino Básico. Este seria um dos primeiros passos para tentar resolver problemas de aprendizagem nos cursos iniciais de cálculo, cujos índices de reprovação e evasão chegam a níveis insustentáveis, o que pode afetar, a longo prazo, o desenvolvimento tecnológico do país;
- social – agregar à formação do cidadão este novo conceito, uma vez que desenvolve habilidades, por exemplo, relativas à análise de informações necessárias para exercício da cidadania em uma sociedade de crescente complexidade.
- epistemológico – formar imagens de conceito ricas que permitam expansões cognitivas posteriores, sendo esse um objetivo comum presente a todos os outros citados anteriormente.

Nessas condições, apresentamos os seguintes objetivos específicos:

- formular uma seqüência de atividades que viabilize a inclusão do conceito de derivada para alunos do Ensino Médio através do ensino de taxas de variação instantânea utilizando o conceito de retidão local.
- verificar a viabilidade da seqüência de atividades propostas no aprendizado de derivada para alunos do ensino médio que possuam conhecimento de função, identificando possíveis potencialidades e limitações.

Neste trabalho, será testada uma proposta de abordagem, formulada com base no referencial teórico citado, que passaremos a descrever.

2.2 Seqüência proposta para o ensino do conceito de derivada

Passaremos a apresentar as etapas da proposta.

2.2.1 Variação das funções (1ª Etapa)

A idéia de variação de uma função está relacionada com o seu comportamento (crescimento, decrescimento ou estabilidade) num determinado intervalo do seu domínio. Uma maneira bastante natural de enriquecer o estudo das variações de funções é proposta por Gravina (1992). O problema proposto (figura 7):

> São dados diversos reservatórios com a mesma capacidade e a mesma altura. Temos torneiras enchendo cada um dos reservatórios e vamos admitir que a vazão da água é a mesma para todos eles, constante e igual a k metros cúbicos por minuto. Queremos analisar o comportamento do nível de água no decorrer do tempo. Seja $f_i(t)$ a altura do nível de água no instante t ($i = 1,2,3,4,5,6$ conforme o reservatório); vamos medir a altura em metros e o tempo em minutos. Temos $f_i(0) = 0$ e $f_i(T) = A$, onde A é a altura dos reservatórios e T é o tempo necessário para enchê-los.

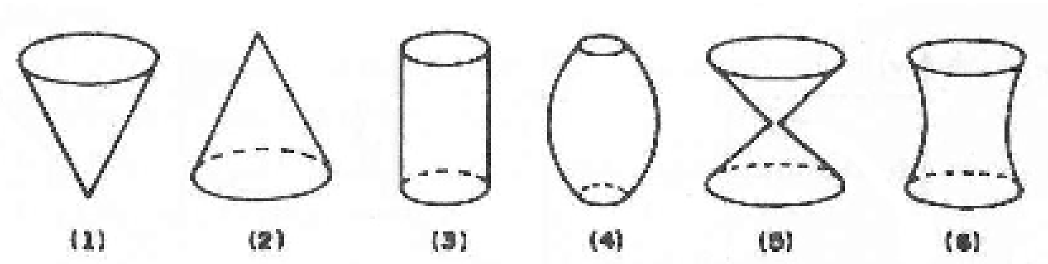


Figura 7: Reservatórios com formas distintas e mesma altura. (Gravina, 1992, p. 33)

A altura $f_i(t)$ aumenta à medida que *t* aumenta, ou seja, todas as funções são crescentes. Mas existem diferenças significativas nestas funções que dizem respeito ao aumento mais rápido ou mais lento do nível de água, conforme o tipo de reservatório. Analisando a forma de cada um dos reservatórios, podemos esboçar os gráficos das alturas. Por exemplo:

- em (1), no início do processo, a altura aumenta rapidamente e depois continua aumentando, mas não mais tão rápido;
- em (2) o processo é inverso de (1);
- em (3) a altura aumenta de modo uniforme;
- em (4) a altura vai aumentando cada vez mais devagar, até chegar à metade do reservatório, depois reverte o seu comportamento;

- em (5), até a metade do reservatório o comportamento é similar ao de (2) e depois, similar ao de (1); no meio do reservatório tem-se a altura aumentando rapidamente.
- Em (6) o comportamento é similar ao de (5), porém no meio do reservatório a altura não aumenta de modo tão rápido.

Obtemos, desta forma, os esboços de gráficos (Figura 8):

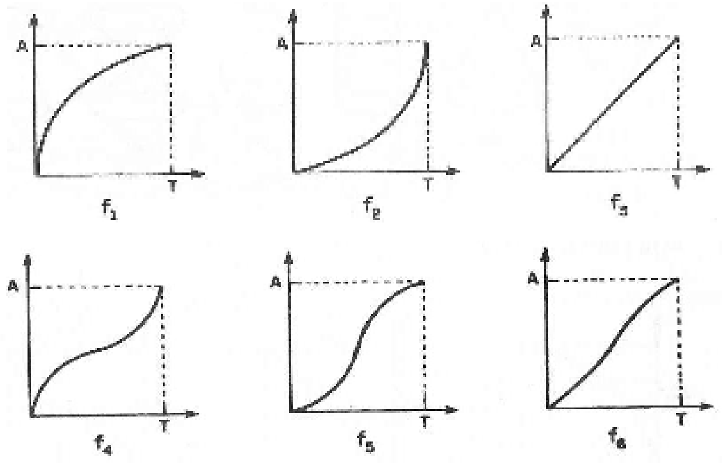


Figura 8:Gráficos da variação da altura em função do tempo de acordo com a forma do reservatório. (Gravina, 1992, pp. 34-35)

Nosso objetivo é entender qual o conceito matemático que registra estas diferenças no comportamento crescente dessas funções. Voltaremos a este exemplo mais adiante no fim da próxima seção.

2.2.2 Taxa de variação média (2ª Etapa)

Nesta seção é apresentada uma proposta de abordagem para a noção de Taxa de Variação Média (TV_m). O conceito de *taxa de variação média* está na base do estudo de funções e exprime a razão com que a função cresce num dado intervalo do domínio.

Exemplo 1: Gráfico da função definida por $f(x) = x^2$ (Figura 9).

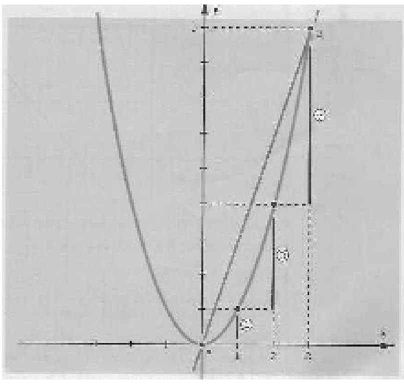


Figura 9:Analisando a taxa de variação média em intervalos distintos do domínio (Bongiovanni, Vissoto, & Laureano,1993, p. 299).

Quanto variou $f(x)$ quando x variou de 0 a 3?

Qual foi a variação média da função nesse intervalo?

Definimos *taxa de variação média* (TV_m) de uma função f, num intervalo de seu domínio, como o quociente entre a variação (Δy) de $f(x)$ e a variação (Δx) da variável x nesse intervalo (Bongiovanni, Vissoto, & Laureano,1993).

Exemplo 2 :

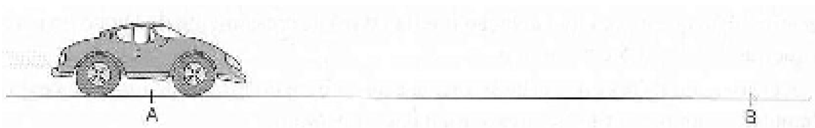


Figura 10 (Smole & Diniz, 2003, p 278)

Um automóvel desloca-se de A para B (Figura 10). A tabela a seguir relaciona o espaço percorrido com o tempo decorrido:

Tempo (s)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Espaço (m)	0	2	5	9	14	20	27	35	...

Tabela I: Variação do tempo e do espaço percorrido

Calcular a taxa de variação média do espaço em função de t nos intervalos: $[2; 3]$, $[4; 5]$ e $[6; 7]$.

Observamos que movimento torna-se mais rápido, portanto acelerado.

Calcular a velocidade média entre 2 e 7 segundos.

Generalizando para qualquer função contínua, podemos dizer que:

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A;\ x_{\mathbf{B}}]$ com $x_A < x_B$ é definida por:

$$\boxed{TV_m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

A taxa de variação média de uma função f, num intervalo $[x_A;\, x_{\mathbf{B}}]$, pode ser interpretada geometricamente (Figura 11) considerando-se a reta s que passa pelos pontos $A(x_A;\, f(x_A))$ e $B(x_B;\, f(x_B))$ do gráfico de f.

O coeficiente angular da reta s no intervalo $[x_A;\, x_B]$ é:

$$m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TV_m$$

Ou seja, geometricamente, o coeficiente angular da reta que passa por **A** e **B** é a taxa de variação média de f em $[x_A;\, x_B]$.

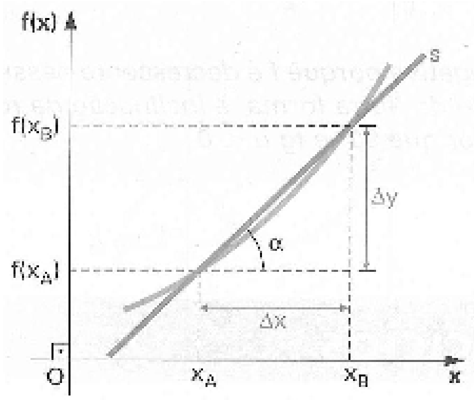


Figura 11: Coeficiente angular da reta secante como taxa de variação média. (Smole & Diniz, 2003, p. 279)

Exemplo 3.

Analisar o comportamento de três funções, através dos gráficos (Figura 12), no intervalo $[0;\, 5]$.

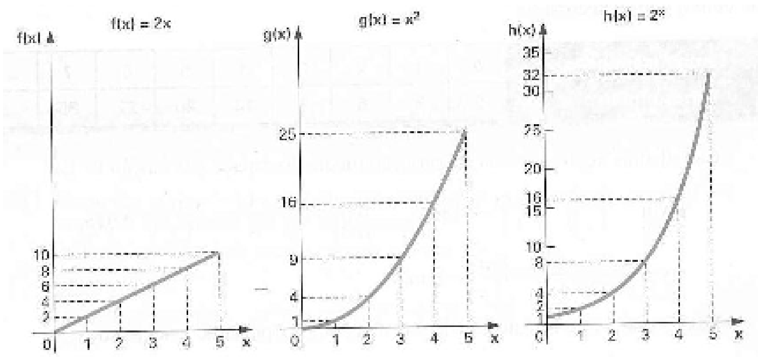


Figura 12:Comportamento de três funções distintas num mesmo intervalo. (Smole & Diniz, 2003, p 277)

Os gráficos das três funções crescentes no intervalo [$0; 5$] diferem na forma como crescem.

x **no intervalo**	**Taxa de variação média de *f (f(x)=2x)***	**Taxa de variação média de *g (g(x)=x²)***	**Taxa de variação média de *h (h(x)=2ˣ)***
[0,1]	2	1	1
[1,2]	2	3	2
[2,3]	2	5	4
[3,4]	2	7	8
[4,5]	2	9	16
	A taxa de variação média é a mesma a cada intervalo.	A taxa de variação média aumenta 2 unidades a cada intervalo.	A taxa de variação média dobra a cada intervalo

Tabela II: Variação de três funções crescentes no intervalo [0, 5] (Smole & Diniz, 2003, p 278)

Podemos afirmar que, apesar de as três funções serem crescentes no intervalo $[\,0\,;\,5\,]$, elas crescem com velocidades diferentes (Smole & Diniz, 2003). Desta forma, observamos que:

1) *a* TV_m *da função polinomial do 1º grau é constante* e, no exemplo, igual a 2, a qual corresponde ao coeficiente angular da reta que representa a função. *A variação foi a mesma em todos os intervalos considerados.*

É fácil verificar que qualquer função polinomial do 1º grau tem TV_m constante. De fato, se $f(x) = ax + b$, então em qualquer intervalo $[x_1, x_2]$ temos:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{ax_2 + b - ax_1 - b}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

Reciprocamente, se tomarmos uma função com taxa de variação constante a, dados um ponto fixado (x_0, y_0) e um ponto genérico (x, y), temos:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = a \Rightarrow f(x) = a(x-x_0)+f(x_0) \Rightarrow f(x) = ax + \underbrace{f(x_0)-ax_0}_{b}$$

$$\Rightarrow f(x) = ax + b$$

Logo, qualquer função com taxa de variação média constante é polinomial do 1º grau. Isto é, as funções polinomiais do 1º grau podem ser caracterizadas pela taxa de variação constante.

2) no mesmo intervalo de x, a função exponencial h cresce mais rapidamente que as outras duas funções. E mais, a função h definida por $h(x) = 2^x$ varia (cresce) mais rapidamente nos últimos intervalos, veja a tabela II.

Retomando o exemplo da sessão 2.2.1 (Variação das funções): ao esboçar os gráficos, o que fizemos, através da observação, foi analisar a razão com que sobe o nível de água em intervalos de tempo bastante pequenos. Se Δt é uma fração de tempo, t é um dado instante de tempo e $[\,t, t+\Delta t\,]$ é um intervalo, a razão

$$\frac{\Delta f_i(t)}{\Delta t} = \frac{f_i(t+\Delta t)-f_i(t)}{\Delta t}$$

(que é uma razão do tipo *metros/minuto*) nos fornece quantos metros por minuto está subindo o nível de água no intervalo $[\,t, t+\Delta t\,]$, já que $f_i(t+\Delta t)-f_i(t)$ é a variação do nível de água neste intervalo e Δt é a fração de tempo decorrida.

Analisando a razão graficamente (Figura 8):

Para isto, consideramos intervalos de tempo de mesmo tamanho Δt em diferentes fases do processo. Optamos apenas pelos gráficos de f_1, f_3 e f_4, pois apresentavam diferentes fases do processo. Assim, julgamos que seriam suficientes para analisar a razão de variação através da análise do comportamento dos gráficos. O primeiro apresentando o caso em que a razão de variação diminui (análise que aparece em parte de f_5 e f_6), o segundo apresentando uma variação constante e o terceiro, analisando a razão com mais de um comportamento no mesmo gráfico.

Assim, nos gráficos das funções f_1, f_3 e f_4, a seguir (Figura 13), vemos que, conforme avançamos no tempo:

(a) $\frac{\Delta f_1}{\Delta t}$ diminui, o que nos diz que o aumento do nível de água é cada vez mais lento;

(b) $\frac{\Delta f_3}{\Delta t}$ é constante, o que nos diz que o aumento do nível de água é sempre o mesmo;

(c) $\frac{\Delta f_4}{\Delta t}$ diminui até chegar ao meio do processo e, depois, começa a aumentar, o que nos diz que o nível de água sobe cada vez mais devagar até a metade do reservatório e, depois, cada vez mais rápido;

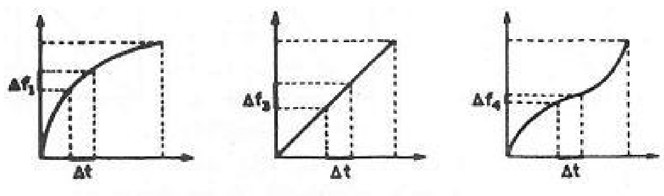
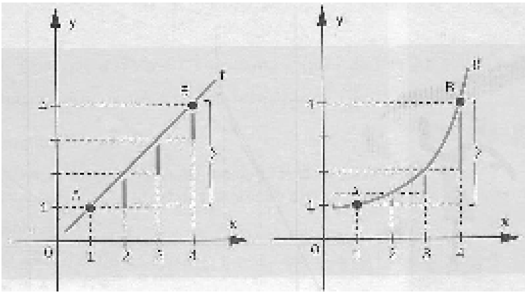


Figura 13:Análise da variação da altura nos reservatórios 1, 3 e 4. (Gravina, 1992, p. 36)

É importante notar que a razão $\frac{\Delta f_i}{\Delta t}$ nos dá a informação relevante sobre como é o crescimento de f_i sempre que Δt for bastante pequeno e, quanto menor Δt, mais precisa é a informação. Se Δt for grande, o crescimento não é registrado uma vez que, na média, esta informação se perde (Gravina, 1992).

Esperamos que, neste estágio, o aluno tenha claro para si o conceito de taxa de variação média, especificamente, que a taxa de variação média da função polinomial do 1º grau, cuja imagem geométrica é uma linha reta (no sistema de coordenadas retangulares), é constante em qualquer intervalo considerado de seu domínio e mais, que esta taxa, geometricamente, corresponde ao coeficiente angular da reta em questão.

2.2.3. Análise do comportamento local e a noção de retidão local (3ª Etapa)



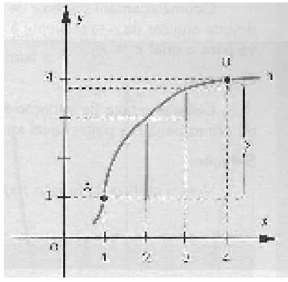


Figura 14: Três formas diferentes de crescer no mesmo intervalo.
(Bongiovanni, Vissoto, & Laureano,1993, p. 302-303).

As três funções representadas graficamente (Figura 14) apresentam mesma taxa de variação média no intervalo $[1;4]$.

- A função f tem variação constante (função polinomial do 1º grau).
- A função g varia (cresce) mais devagar no começo do intervalo e mais rapidamente no final.
- A função h varia (cresce) mais rapidamente no início do intervalo e mais devagar no final.

Assim, quanto menor for o intervalo a ser analisado de uma função, mais significativa será a análise da variação no intervalo em questão (Bongiovanni, Vissoto, & Laureano,1993).

Numa abordagem baseada na noção de *retidão local*, a *derivada*[3] é introduzida a partir do processo computacional de magnificação local, em que uma porção de uma curva é altamente ampliada numa tela de computador. A derivada de uma função é apresentada como inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido a um processo de magnificação local. Assim, a derivada pode ser apreendida a partir da variação do próprio gráfico. Este procedimento só é possível num ambiente computacional onde o estudante possa mudar a janela gráfica e observar as conseqüentes mudanças de aspecto do gráfico visualizado (Giraldo, 2004).

[3] Optamos por não usar a palavra derivada até esta altura do trabalho e sim variação instantânea, pois o conceito de derivada será apresentado no final do desenvolvimento da noção de taxa de variação instantânea.

Usaremos, neste trabalho, o programa *Graphmatica* (2.0) (Hertzer & Malaca, 2003). Este programa está disponível gratuitamente na Internet (versão *shareware*) sendo, desta forma, de fácil acesso a professores e alunos que possuam microcomputadores. Alguns comandos do programa estão apresentados no anexo XXVII, de modo a facilitar seu entendimento (Barufi & Lauro, 2001). As figuras 15,16 e 17 apresentadas abaixo ilustram o processo de magnificação local de curvas elementares (funções polinomiais, exponencial e trigonométrica).

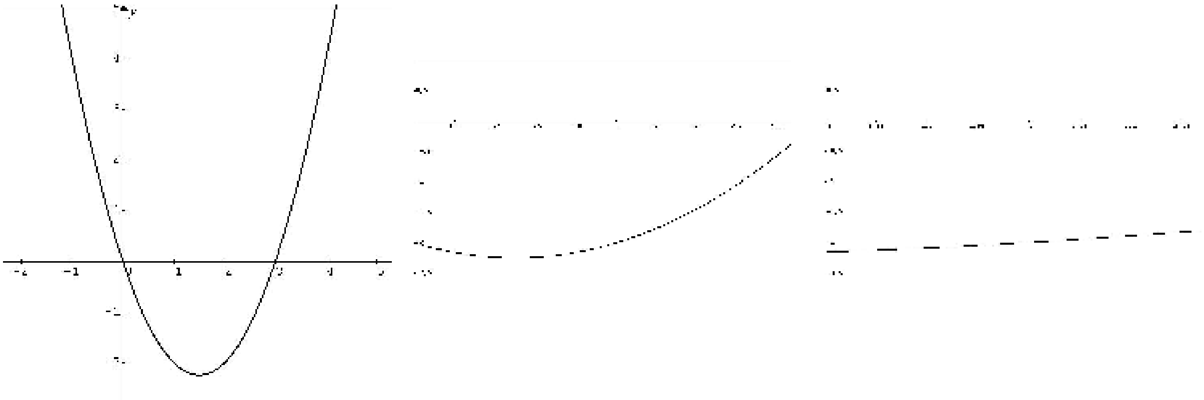


Figura 15. Magnificação da curva $f(x) = x^2 - 3x$ em torno do ponto $x_0 = 2$.

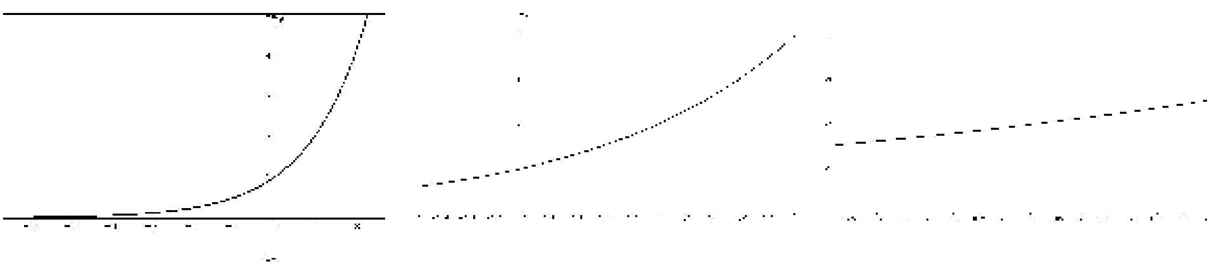


Figura 16. Magnificação da curva $g(x) = 2^x$ em torno do ponto $x_0 = 1$.

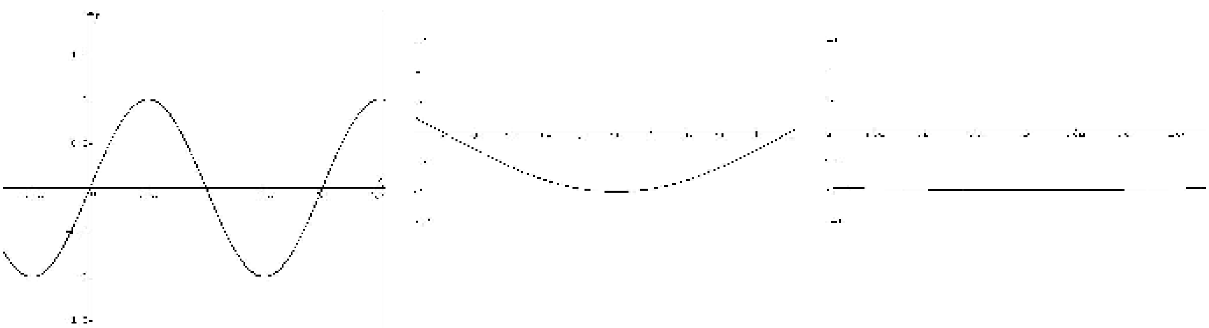


Figura 17. Magnificação da curva $h(x) = sen\, x$ em torno do ponto $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

Observamos, nos três exemplos, que em torno do ponto x_0 a curva adquire o aspecto de um "segmento de reta", logo podemos analisar a função no intervalo em questão, analisando o comportamento do "segmento de reta" com o qual a curva se confunde. Desta forma, a derivada de uma função pode ser apresentada como inclinação da reta com a qual seu gráfico se confunde quando submetido a um processo de magnificação local. Esta similaridade leva-nos a fazer uma análise do comportamento da função num ponto x_0 qualquer do domínio através de uma *aproximação linear local,* ou seja, através da análise do comportamento da reta que contém este "segmento de reta" que passaremos a chamar de tangente.

Neste trabalho nos restringiremos a algumas funções deriváveis (funções polinomiais, exponenciais e trigonométricas), pois a proposta inicial tem como foco o Ensino Médio.

A aproximação linear pode ser observada na seqüência abaixo (figura 18).

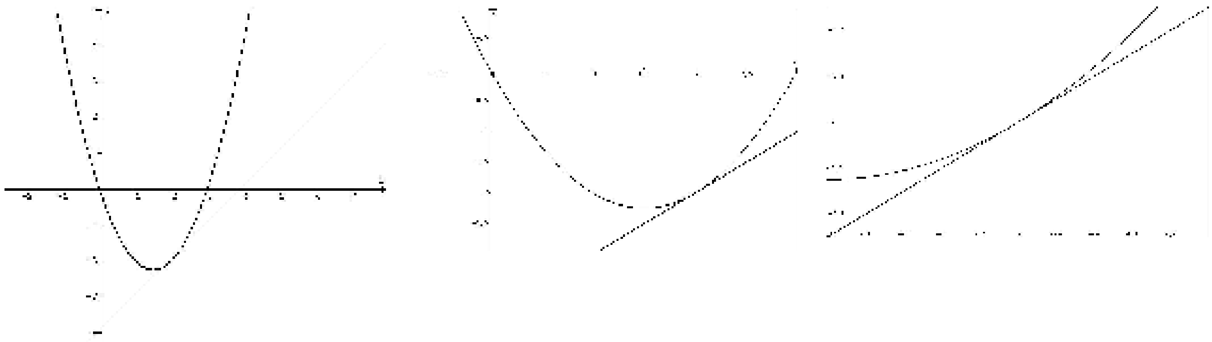


Figura 18. Reta *r* tangente à curva $f(x) = x^2 - 3x$ como melhor aproximação linear em torno do ponto $x_0 = 2$.

2.2.4 A reta tangente a um gráfico

Após nos referirmos à reta tangente para apresentarmos o conceito de aproximação linear, julgamos necessário discutir, detalhadamente, o conceito de reta tangente a um gráfico.

Observamos que o conceito de tangente é, usualmente, apresentado para o estudante de matemática no curso de geometria no contexto do círculo. Desta forma, o aluno pode construir uma imagem limitada para o conceito de tangente. (Vinner, (1991), Pinto & Moreira, (2004); Biza, Christou & Zachariades, (2006)). Neste sentido, Tall (1989) observa que:

> Geralmente, quando idéias são apresentadas em contextos restritos, a imagem de conceitos pode incluir características que são verdadeiras naqueles contextos, mas não de uma forma geral. Por exemplo, a tangente a um círculo toca-o em um único ponto somente e não o atravessa. Vinner (1983, 1991) observou que muitos estudantes acreditavam que uma reta tangente a qualquer curva tocaria esta curva em um único ponto, mas não poderia atravessá-la.

Neste momento torna-se necessário fazer algumas considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0. Passaremos a apresentar a reta tangente em contextos diversificados, utilizando o programa Graphmatica, a fim de ampliar as imagens de conceito em relação a esta reta.

Sabemos que para uma circunferência ou para uma elipse (Figura 19), por exemplo, a reta tangente é a que tem um único ponto comum com a curva.

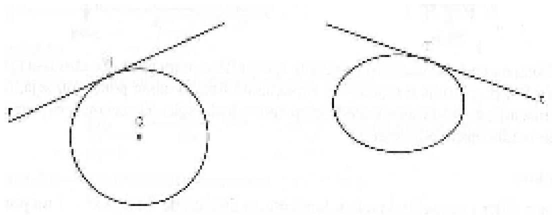


Figura 19: Retas tangentes a duas curvas convexas (Smole & Diniz, 2003, p. 285)

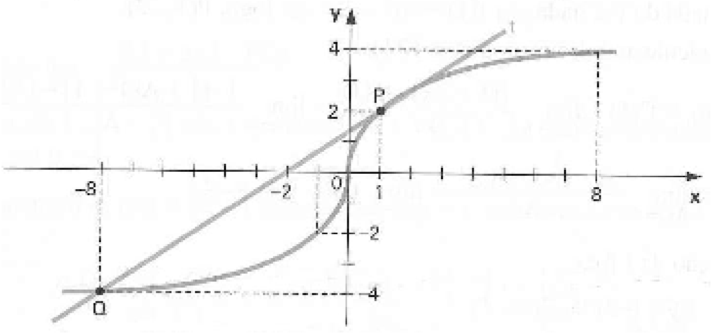


Figura 20: Reta tangente à curva no ponto P e secante no ponto Q (Smole & Diniz, 2003, p. 285)

No entanto, a reta t, tangente ao gráfico (Figura 20), no ponto P corta o gráfico no ponto Q. De forma geral, *uma tangente a uma curva num ponto pode interceptá-la em vários outros pontos* (Smole & Diniz, 2003). Vejamos outros exemplos nas figuras 21, 22, 23 e 24:

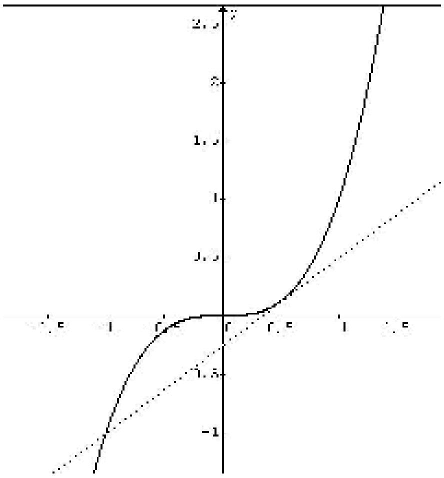


Figura 21. Reta t tangente à curva $f_1(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 0{,}5$: a reta tangente corta a curva num outro ponto

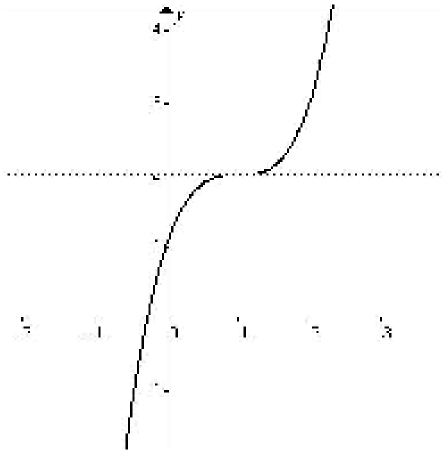


Figura 22. Reta t tangente à curva $f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ no ponto $x_0 = 1$.: a reta tangente atravessa a curva

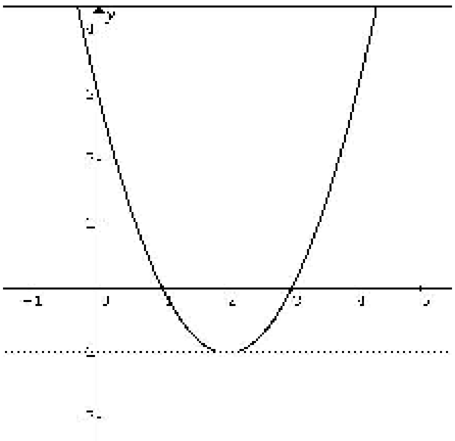


Figura 23. Reta t tangente à curva $f_3(x) = x^2 - 4x + 3$ no ponto $x_0 = 2$: a reta tangente é paralela ao eixo das abscissas. Neste exemplo, x_0 é ponto de mínimo.

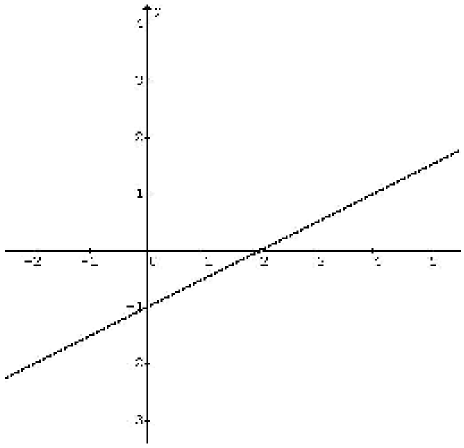


Figura 24: Reta t tangente ao gráfico definido por $f_4(x) = \frac{x}{2} - 1$ no ponto $x_0 = 3$: a reta tangente coincide com o próprio gráfico.

2.2.5 A taxa de variação instantânea e sua interpretação geométrica

> "Que meço eu, pergunto-te, Deus meu, quando digo ou aproximadamente: este tempo é mais longo que aquele, ou precisamente: este tempo é o dobro daquele? Meço o tempo, eu sei; mas não meço o futuro, que não existe ainda, não meço o presente, que não ocupa nenhum intervalo, não meço o passado, que já não existe. Mas que meço então? Talvez o tempo no ato de passar, e não já quando passou?"
> (Santo Agostinho, Livro XI das Confissões, Pensadores (1999), *apud* Rezende, 2003)

Nesta seção relacionaremos os conceitos abordados neste trabalho até o momento, a seguir faremos uma análise buscando uma relação matemática entre os mesmos. São eles:

1. taxa de variação média num intervalo $[x_A; x_B]$ do domínio;
2. taxa de variação média da função polinomial do 1º grau constante para qualquer intervalo do domínio e igual ao coeficiente angular da reta;
3. magnificação local de uma função elementar e a observação de uma retificação local em torno de um ponto x_0 num intervalo muito pequeno do domínio assemelhando-se a um "segmento de reta";
4. análise do comportamento local em torno do ponto x_0 possibilitada pela observação do comportamento da reta com a qual a curva se assemelha no processo de aproximação local;
5. a reta que contém o "segmento" em questão coincide com a reta tangente ao gráfico no ponto x_0 (aproximação linear).

Os assuntos relacionados acima levam-nos, experimentalmente, à idéia de que é possível analisar a taxa de variação de uma função num ponto x_0, pertencente a um intervalo muito pequeno do domínio, através da análise da taxa de variação da reta tangente ao gráfico em x_0. Chamaremos de *taxa de variação instantânea* (TV_i) à taxa de variação da função no ponto x_0. *Geometricamente, esta taxa de variação instantânea é representada pelo coeficiente angular da reta tangente à curva da função f no ponto x_0.*

Estamos adotando uma abordagem experimental objetivando uma preparação futura para o conceito de derivada. Ávila (1991) comenta:

> É claro que a introdução da derivada deve ser acompanhada de várias de suas aplicações. Uma delas, tão útil e necessária nos cursos de Física, diz respeito à Cinemática. Não há dificuldades no estudo do movimento uniforme, ou seja, com velocidade constante. Mas ao passar adiante, desassistido da noção de derivada, o professor de Física faz uma ginástica complicada para apresentar o movimento uniformemente variado. E as coisas seriam bem mais simples para ele e muito mais compreensíveis para o aluno se esse ensino fosse feito à luz da noção de derivada, interpretada como *velocidade instantânea*. (Ávila, 1991, p. 4)

O exemplo a seguir mostra que é possível usar a idéia apresentada de taxa de variação instantânea para resolver uma situação-problema comum em alguns livros didáticos de Física com o auxílio do programa *Graphmatica*.

O problema:

A posição s em função do instante t de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória retilínea, é dada por $s(t) = 2t^2 + 3$ (para s em metros e t em segundos). Determinar:

a) a posição desse móvel nos instantes $t = 2s$ e $t = 3s$.

b) a velocidade média no intervalo de $t = 2s$ a $t = 3s$.

c) a velocidade instantânea nos instantes $t = 2s$ e $t = 3s$.

Resolvendo algebricamente o problema teremos:

a) $s(2) = 11\,m$ e $s(3) = 21\,m$

b) $v_m = TV_m = 10\,m/s$

c) a solução mais encontrada nos livros didáticos é a seguinte: como se trata de movimento uniformemente variado teremos $S = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$, assim, identifica-se $v_0 = 0\,m/s$ e $a = 4\,m/s^2$ para usar, em seguida, a fórmula da velocidade instantânea $v_i = v_0 + at$. Assim, $v_i = 4t \quad \Rightarrow \quad v_i(2) = 8\,m/s$ e $v_i(3) = 12\,m/s$.

Alguns livros, antes do uso da fórmula da velocidade (que é necessária, pois os alunos ainda não sabem derivadas), sugerem que se calcule a velocidade média em intervalos de tempo cada vez menores e próximos de $2\,s$, para que os alunos possam fazer conjecturas a respeito da velocidade instantânea em $t = 2s$ (Silveira, 2001).

Sabendo que a velocidade média corresponde à taxa de variação média e que a velocidade instantânea corresponde à taxa de variação instantânea, é possível aproximar a velocidade instantânea utilizando o recurso computacional e a seguir comparar com o resultado obtido algebricamente.

Utilizando o *Graphmatica*, traçamos o gráfico da função horária definida por $s(t) = 2t^2 + 3$ e a seguir, através do comando desenhar tangente, traçamos a tangente no ponto $t = 2s$.

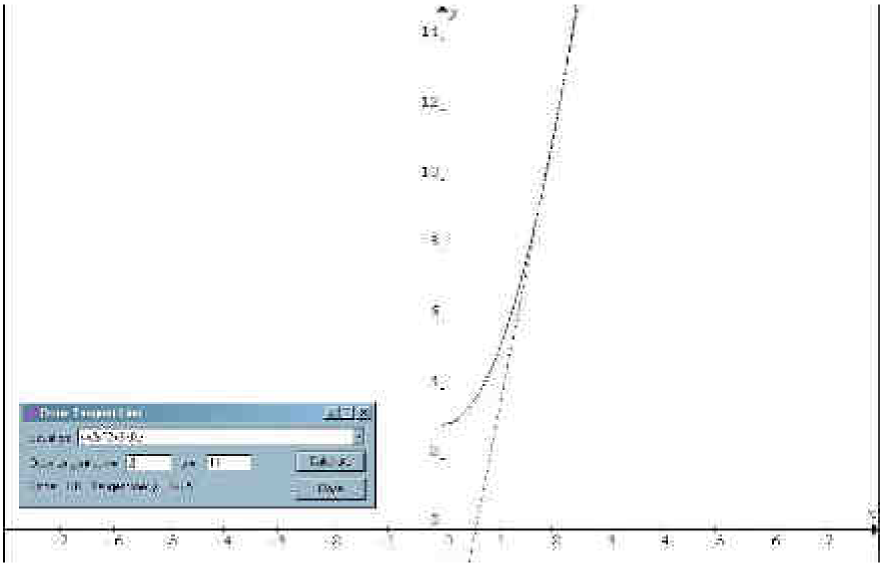


Figura 25:Tela do Graphmatica

Aparecerá na tela do *Graphmatica* o gráfico da função S (Figura 25), a reta tangente em $t = 2s$, uma janela informando a equação da função, as coordenadas do ponto de tangência $(2; 11)$, a equação da reta tangente $y = 8x - 5$ e a inclinação 8. Desta forma, o aluno pode constatar (comparando com o cálculo feito anteriormente) que a velocidade instantânea em $t = 2s$, $v_i = 8\,m/s$, corresponde ao coeficiente angular da reta tangente no ponto em questão. Da mesma forma em $t = 3s$ a reta tangente tem equação $y = 12x - 15$ e, conseqüentemente, teremos $v_i = 12\,m/s$.

Observamos que a utilização do recurso computacional para determinar a reta tangente à uma curva num ponto é valioso e reforça, experimentalmente, o conceito de que analisar a variação instantânea da função é analisar a variação do declive da reta (através do coeficiente angular) que contém o "segmento" que corresponde a aproximação linear local da curva num intervalo muito pequeno do domínio. No entanto, provavelmente, essa discussão sugerirá a pergunta: "Seria possível determinar, algebricamente, esta variação instantânea num ponto x_0 do domínio?"

2.2.6 Expressando algebricamente a taxa de variação instantânea.

Passaremos a analisar a expressão que nos fornece a taxa de variação média num intervalo do domínio. Consideremos uma função $f : R \to R$ e um intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x] \subset D(f)$, com um acréscimo $\Delta x \neq 0$. O número

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ é a taxa de variação média ou taxa de crescimento médio da função f no intervalo de extremos x_0 e $x_0 + \Delta x$.

A partir da taxa de variação média chegaremos a uma expressão para a taxa de variação instantânea. Para isso, utilizaremos, oportunamente, a imagem geométrica da secante tendendo à tangente no ponto x_0. A atividade anterior (figura 25) permitiu ao indivíduo associar a velocidade instantânea (taxa de variação instantânea) ao coeficiente angular da reta tangente no ponto em questão. Vimos que a taxa de variação média em $[x_0; x_0 + \Delta x]$ é dada pelo coeficiente angular da reta secante à curva nos pontos x_0 e $x_0 + \Delta x$. Como o objetivo é analisar o comportamento da função em x_0, devemos considerar um intervalo indefinidamente pequeno ao qual x_0 pertença. Esquematicamente, teremos: $\Delta x \to 0 \Rightarrow Q \to P \Rightarrow$ s (reta secante) se aproxime de t (reta tangente em x_0). Observe o que foi descrito acima na seqüência a seguir (Figura 26):

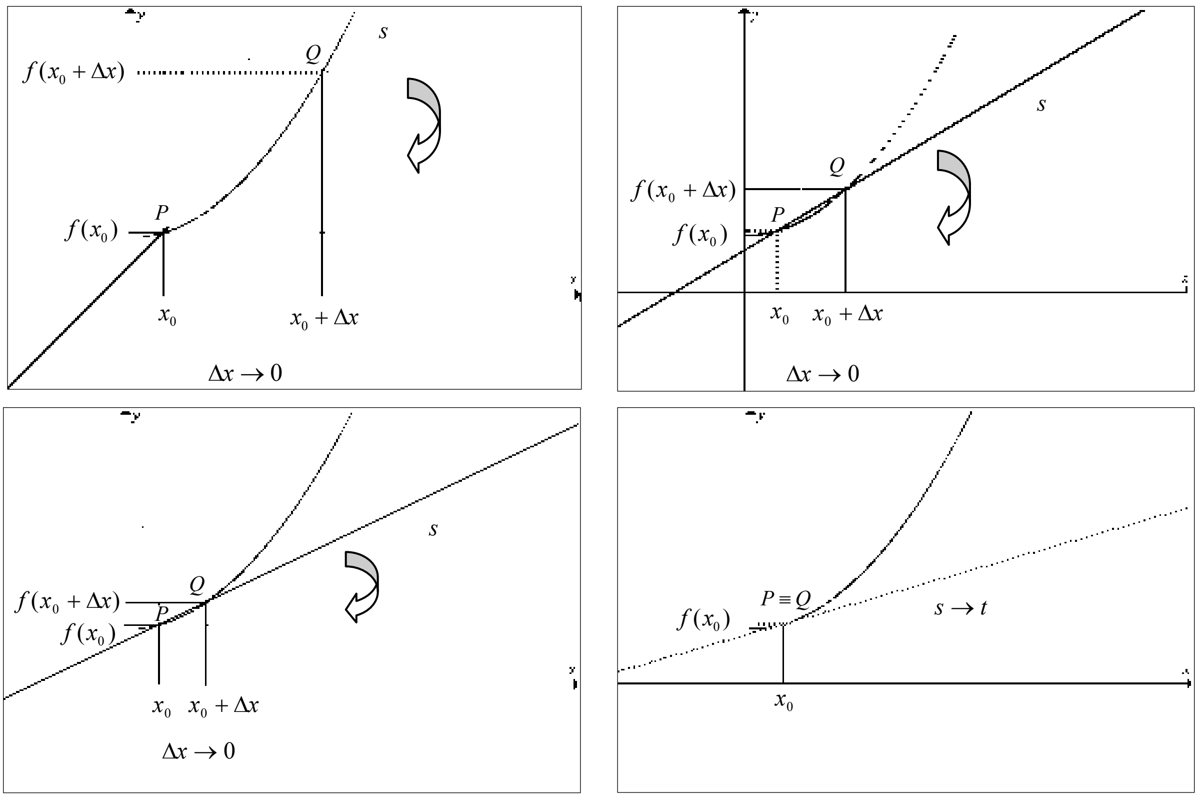


Figura 26: reta secante $\to$ reta tangente

Esta observação nos leva a formular a seguinte proposição: *Se a razão* $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, *com* $\Delta x \neq 0$, *corresponde ao coeficiente angular da reta* *secante à curva no intervalo* $[x_0; x_0 + \Delta x]$*, então a razão* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$*, com* $\Delta x \to 0$*, corresponderá ao coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto* x_0. Desta forma temos que a taxa de variação média de uma função contínua num intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$ é igual a $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, *com* $\Delta x \neq 0$ e a taxa de variação instantânea num ponto x_0 é dada pelo valor do qual $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ aproxima-se quando Δx se aproxima de 0. Generalizando para um intervalo $I \subset D(f)$ de uma função, podemos dizer que:

A **taxa de variação instantânea** (TV_i) de uma função f num ponto $x_0 \in I \subset D(f)$ é dada por:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to TVi \text{ , quando } \Delta x \to 0}$$

Exemplos:

<u>Função constante</u>**:** $f : R \to R$ definida por $f(x) = k, \quad k \in R$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to TV_i \quad \Rightarrow TV_i = 0$$

$$\Delta x \to 0$$

<u>Função polinomial do 1º grau</u>**:** $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax + b$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} =$$

$$\frac{ax_0 + a\Delta x + b - ax_0 - b}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a \;\Rightarrow\; TVi = a$$

<u>Função polinomial do 2º grau</u>: $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0{}^2 + bx_0 + c)}{\Delta x} \cdots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 2ax_0 + b \text{ , quando } \Delta x \to 0$$

$TVi = 2ax_0 + b$

<u>Função polinomial do 3º grau:</u> $f : R \to R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\frac{a(x_0 + \Delta x)^3 + b(x_0 + \Delta x)^2 + c(x_0 + \Delta x) + d - (ax_0{}^3 + bx_0{}^2 + cx_0 + d)}{\Delta x}$$

$\frac{\Delta y}{\Delta x} \to 3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c$, quando $\Delta x \to 0$. Logo $TVi = 3ax_0{}^2 + 2bx_0 + c$.

2.2.7 A derivada em um ponto e a função derivada (4ª Etapa)

Neste momento, temos condições de conceituar o que é derivada de uma função num ponto x_0 do domínio. Dante (2004b) conceitua da seguinte forma: *à taxa de variação instantânea da função* f *no ponto* x_0 *chamamos de derivada da função em relação à variável* x *no ponto* x_0 *e representamos por* $f'(x_0)$*,* geometricamente, é o coeficiente angular da reta tangente no ponto considerado. De outra forma:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to TVi = f'(x_0), \text{ quando } \Delta x \to 0$$

Chama-se *função derivada* de uma função f a uma função f' que *fornece a taxa de variação instantânea* $f'(x)$ (geometricamente, o coeficiente angular da reta tangente à curva) *em qualquer ponto* x pertencente ao domínio:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x), \text{ quando } \Delta x \to 0$$

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função f em um ponto x_0 fixo, passaremos a determinar a sentença da função, que nos fornece a derivada num ponto qualquer em um intervalo I do domínio.

Tall (1989) acredita que a disponibilidade de não-exemplos pode ser de grande importância, particularmente com conceitos avançados.

Desta forma, apresentamos alguns não-exemplos para a existência da derivada. Para admitir reta tangente em um determinado ponto, o gráfico não pode dar “salto” (não pode ser descontínuo nele) nem mudar bruscamente de direção (formar “bico”) nesse ponto. Não admitem tangente em x_0 os seguintes gráficos de funções (Figura 27):

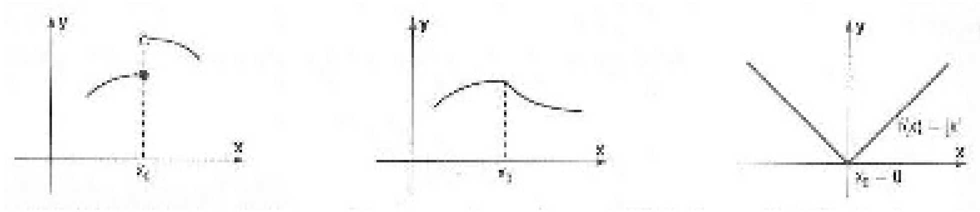


Figura 27:Gráficos de algumas funções que não possuem derivada em x_0. (Dante, 2004b, p 264)

Retas paralelas ao eixo dos y (Figura 25) não têm coeficiente angular, pois $m = tg\,90^0$ não está definido. Assim, se a tangente ao gráfico de uma função num ponto é paralela ao eixo y, a função também não admite derivada nesse ponto. Neste caso, existe a tangente ao gráfico por esse ponto mas não existe a derivada. São exemplos disso as seguintes funções, nos pontos x_0 indicados:

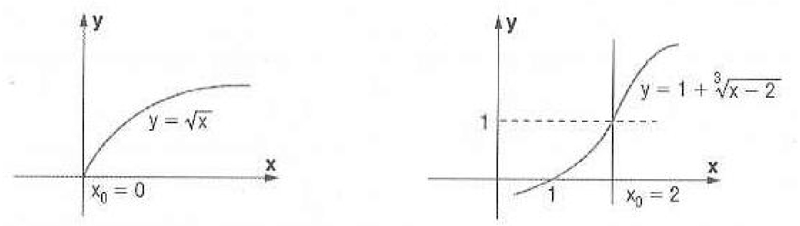


Figura 28:Gráficos de funções em que não existe derivada em x_0. (Dante, 2004b, p 264)

Capítulo 3
Metodologia

A metodologia utilizada caracteriza-se por um instrumento que auxiliará responder a pergunta que deu origem a esta pesquisa: “O estudo da seqüência estabelecida: variabilidade, taxa de variação média e taxa de variação instantânea de uma função real, utilizando a retidão local como raiz cognitiva, proporciona, de fato, condições para o ensino do conceito de derivada para alunos do Ensino Médio que possuam conhecimentos sobre função?”.

Desejamos verificar, com este trabalho, a viabilidade do método apresentado para ensino do conceito de derivada através da análise do desempenho dos participantes nas atividades elaboradas a partir da proposta (seção 2.2). As referidas atividades foram realizadas em seu ambiente natural, a sala de aula.

Não temos como meta quantificar eventos usando recursos da estatística para análise dos dados, mas a aquisição e análise de dados descritivos do processo mediante realizações de atividades individuais e contato direto com a situação objeto de estudo. Para isso, optamos por uma investigação de natureza qualitativa. Richardson & Wainwright (1999) descrevem:

> A pesquisa qualitativa pode ser caracterizada como a tentativa de uma compreensão detalhada dos significados e características situacionais apresentadas pelos entrevistados, em lugar da produção de medidas quantitativas de características ou comportamentos. (Richardson & Wainwright, 1999, p 2)

Neves (1996) observa que, em sua maioria, os estudos qualitativos são feitos no local de origem dos dados e o trabalho de descrição tem caráter fundamental, pois é por meio dele que os dados são coletados.

Nessas circunstâncias, para o estudo foi selecionada uma amostra que atendesse às condições apresentadas no questionamento e foi elaborada uma seqüência de atividades para a coleta de dados, que serão transcritos para uma posterior análise.

A pesquisa foi realizada com autorização do responsável pelo participante, através da assinatura do termo de consentimento (Anexo 1). Os critérios da seleção da amostra e a descrição das etapas do método serão apresentados a seguir.

3.1 Descrição da amostra.

> [...] a definição de critérios segundo os quais serão selecionados os sujeitos que vão compor o universo de investigação é algo primordial, pois interfere diretamente na qualidade das informações a partir das quais será possível construir a análise e chegar à compreensão mais ampla do problema delineado. A descrição e delimitação da população base, ou seja, dos sujeitos a serem entrevistados, assim como o seu grau de representatividade no grupo social em estudo, constituem um problema a ser imediatamente enfrentado, já que se trata do solo sobre o qual grande parte do trabalho de campo será assentado. (Duarte, 2002, p 141)

Inicialmente, foram convidados 12 alunos do 2º ano do Ensino Médio, de uma escola privada do Rio de Janeiro, de acordo com o desempenho acadêmico final na disciplina de matemática do ano anterior. Estes alunos haviam cursado o 1º ano do Ensino Médio nessa mesma escola e na ocasião da realização da pesquisa, esse grupo já havia cumprido o programa de matemática no que diz respeito ao estudo das funções reais elementares previstas para o curso[1] e possuíam familiaridade com o ambiente computacional[2].

Foi estabelecido o seguinte critério de escolha: alunos com desempenho regular (média final na disciplina entre 5,0 e 6,9), com desempenho médio (média final na disciplina entre 7,0 e 8,4) e por fim, alunos com desempenho bom (média final na disciplina entre 8,5 e 10). Desta forma, poderíamos garantir uma amostra heterogênea segundo o critério de desempenho.

Ao final da seleção, participaram espontaneamente do estudo apenas 7 jovens de ambos os sexos (4 moças e 3 rapazes), com idade entre 15 e 18 anos. As moças foram identificadas como M1, M2, M3 e M4 e os rapazes como R1, R2 e R3 (Tabela III).

	M1	M2	M3	M4	R1	R2	R3
Idade	16	16	16	17	16	16	16
Média	7,3	5,0	8,7	7,2	5,1	5,8	8,8

Tabela III: Idade e média de aprovação na 1ª série do EM na disciplina de Matemática dos alunos participantes do estudo

[1] Nessa escola, os programas de Matemática do 1º e 2º anos do Ensino Médio contemplam o estudo do conceito de função e o estudo de alguns modelos de funções elementares, tais como: função polinomial de 1º e 2º graus, função exponencial e logarítmica, funções trigonométricas, função modular e composição dessas funções.
[2] O programa Graphmatica era familiar a este grupo. Já haviam utilizado o mesmo no ano anterior.

3.2 Planejamento do estudo empírico

> [...] A escolha de um local adequado de pesquisa e a familiaridade do pesquisador com os membros do grupo são aspectos fundamentais da pesquisa qualitativa. Ward-Schofield (1993) analisou as conseqüências que a escolha do local tem na validez e generalização dos resultados, sugere que ambas podem ser otimizadas escolhendo um local "típico" ou realizando uma pesquisa em mais de um local.
> [...] Portanto, o processo de escolha deve ser acompanhado por uma reflexão que inclui considerações tais como: facilidade de comunicação com os entrevistados, adequação dos meios de registro das informações, e crucialmente, a existência de alguma característica do local que possa influenciar negativamente as opiniões de um entrevistado [...] (Richardson & Wainwright, 1999)

O estudo empírico desta pesquisa foi estruturado na forma de um curso regular distribuído em quatorze aulas. Como estabelecido no capitulo anterior, o objetivo central deste trabalho é avaliar a viabilidade da abordagem de ensino do conceito de derivada proposta, identificando potencialidades e limitações. Para que este objetivo fosse satisfeito, não seria suficiente apenas comparar os conhecimentos dos alunos antes e depois do curso, mas sim acompanhar o desempenho dos alunos ao longo das atividades. Como instrumentos auxiliares de análise do desempenho dos participantes, foram aplicadas uma avaliação inicial e uma avaliação final, que serão mais precisamente descritas nas seções 3.2.1 e 3.2.3. a seguir.

Cada uma das aulas do curso teve duração de 1 hora e meia (dois tempos de 45 minutos) e aconteceu após o horário da aula regulamentar (7 horas e 15 minutos às 12 horas e 50 minutos), especificamente das 13h e 45min às 15h e 15min. Estas aulas aconteceram às segundas e quartas-feiras, dias em que os participantes não tinham atividades à tarde.

Utilizamos um ambiente muito próximo da sala de aula para a realização das atividades, que ora aconteciam numa sala de informática, ora numa sala de aula tradicional. Como os participantes eram ou tinham sido alunos, nosso relacionamento durante o curso continuou sendo de professor e alunos. Desta forma o trabalho se desenvolveu num ambiente natural e familiar.

As aulas foram filmadas, a fim de registrar atitudes e/ou comentários que fossem relevantes à análise dos resultados.

Os participantes receberam, antecipadamente, um calendário com as datas de realização das quatorze aulas. Início previsto para 27 de agosto de 2007 e término em 10 de outubro de 2007. No entanto, três encontros precisaram ser adiados. Desta forma, a última aula aconteceu no dia 22 de outubro de 2007.

As atividades utilizadas no experimento foram formuladas a partir da proposta apresentada no capítulo 2. Procuramos, na medida do possível, que estas atividades fossem realizadas individualmente para que pudéssemos acompanhar a evolução do aluno.

Como a pesquisa foi planejada na forma de um curso regular e num ambiente de sala de aula, os conteúdos de cada etapa foram introduzidos como um problema de estudo e aprendizagem. A seqüência das atividades teve por objetivo a formação de imagens de conceito gradativa, ou seja, o assunto abordado na atividade anterior poderia favorecer um melhor aproveitamento e compreensão do tema a ser explorado na atividade seguinte.

Durante a realização das atividades, as dúvidas em relação ao entendimento dos enunciados dos exercícios, quando ocorreram, foram esclarecidas para todo o grupo. Antes de distribuirmos as atividades, explicamos seu objetivo. Planejamos fazer uma correção comentada de todos os exercícios. Essas atividades foram realizadas exclusivamente durante as aulas e as fichas recolhidas ao final de cada encontro para posterior análise.

Por ocasião da aplicação das fichas com as atividades, utilizamos os seguintes recursos pedagógicos, de acordo com as necessidades de cada uma: aula expositiva com a utilização de quadro branco, laboratório de Informática, utilizando um programa que traça gráficos de funções (Graphmatica) e calculadora.

Os conteúdos apresentados nas aulas expositivas deveriam ser anotados sistematicamente pelos participantes, a fim de organizar as idéias estudadas. Além disso, agrupamos as atividades de acordo com o objetivo de cada etapa.

3.2.1 Avaliação inicial

A fim de avaliar o conhecimento dos conceitos básicos dos alunos sobre função, que considerávamos pré-requisitos para o curso, e também comparar com o resultado final, foi elaborado um questionário cujas perguntas estão listadas abaixo:

1. O que você entende por função?
2. Explique suas principais idéias sobre função?
3. O que é domínio de uma função? O que é imagem de uma função?
4. Dada uma função f e x elemento do domínio, o que representa a notação f(x)?
5. Qual a sentença que representa a função polinomial do 1º grau?

6. Considerando $x \in R$, qual a representação gráfica dessa função (função polinomial do 1º grau)?
7. Na fórmula da função polinomial do 1º grau, que valor constante representa o coeficiente angular?
8. Qual a interpretação geométrica do coeficiente angular?
9. O que significa determinar velocidade média de um móvel num determinado intervalo de tempo?
10. O que você entende por velocidade instantânea?

3.2.2 Apresentação das etapas

Nesta seção descreveremos as etapas da proposta. As fichas com as atividades elaboradas de acordo com cada uma dessas etapas e seus objetivos estão em anexo (VI – XXV).

1ª etapa – Explorar a noção de variação de uma função

Apresentamos, nesta etapa, a relação entre duas grandezas (altura e tempo) vista de forma dinâmica, ou seja, procuramos analisar problemas em que a variação de uma das grandezas, no caso a altura, seria determinada em função do tempo transcorrido. Para isso, analisamos, através da representação gráfica da variação, algumas funções crescentes que possuíam comportamentos distintos.

2ª etapa – Definir taxa de variação média

Através de atividades familiares aos alunos, procuramos apresentar a Taxa de Variação Média (TV_m) como uma razão das variações de duas grandezas e mostrar que esta mesma TV_m pode oferecer uma análise imprecisa do comportamento de uma função num determinado intervalo.

Abordamos o conceito de TV_m até chegarmos à sua definição. A seguir, fizemos a interpretação geométrica desta razão associando a taxa de variação média de uma função num intervalo AB à tangente do ângulo da reta secante que passa pelos pontos A e B do gráfico.

3ª etapa – Conceituar taxa de variação instantânea a partir da noção de retidão local

Utilizando o recurso do programa Graphmatica nesta etapa, o aluno teve a possibilidade de magnificar um gráfico em torno de um ponto x_0 através da mudança de janelas gráficas. Desta forma, pode ver o gráfico da função “mais de perto”. Com o gráfico magnificado foi possível observar a retidão local do gráfico da função (diferenciável) e a linearidade local ao traçar a reta tangente à curva neste ponto x_0. Necessariamente, a noção de tangente ao gráfico foi explorada através de diversos exemplos não-convencionais.

Um problema de cinemática, familiar ao aluno, foi utilizado para explorar as idéias de velocidade média e velocidade instantânea. Este mesmo problema foi resolvido com o recurso do Graphmatica.

A partir da análise dessas idéias foi proposto o conceito de taxa de variação instantânea (TV_i).

Através desse conceito passamos a obter a expressão algébrica para o cálculo da TV_i de algumas funções polinomiais.

4ª etapa – Conceituar derivada a partir da taxa de variação instantânea e função derivada

Apresentamos o conceito de derivada a partir da idéia de taxa de variação instantânea de uma função (diferenciável) num ponto x_0 e de uma forma mais genérica, o conceito de função derivada.

Por fim, aplicamos fichas com atividades na forma de problemas que deveriam ser resolvidos utilizando os conhecimentos de derivada adquiridos.

Ressaltamos que nosso objetivo não foi apresentar a definição formal de derivada, mas formar imagens de conceito consistentes que permitissem ao estudante chegar à compreensão da definição de derivada num futuro curso de Cálculo.

Quadro resumo das etapas da seqüência proposta		
Etapas	Aulas	
1ª	1ª e 2ª	1. Explorar a Idéia de Variação das funções através da resolução de problemas.
2ª	2ª à 5ª	2. Definir Taxa de variação média.
3ª	5ª à 9ª	3. Conceituar taxa de variação instantânea a partir da noção de retidão local. ▪ Análise do comportamento local e a noção de retidão local. ▪ A reta tangente a um gráfico. ▪ A taxa de variação instantânea e sua interpretação geométrica. ▪ Expressando algebricamente a taxa de variação instantânea.
4ª	9ª à 14ª	4. A derivada. Conceituar derivada a partir da taxa de variação instantânea. 5. A função derivada. Conceituar função derivada. Aplicar na resolução de problemas.

Tabela IV: Resumo da seqüência proposta para o estudo do conceito de derivada

Quadro resumo dos objetivos das atividades contidas nas fichas		
Fichas	Aulas	Objetivos
I	1ª	Avaliar o conhecimento de alguns conceitos considerados pré-requisitos para a realização do trabalho.
II		Explorar a idéia de variação de função.
III	2ª e 3ª	Explorar a idéia de variação de função através da análise de seu comportamento.
IV		Analisar o comportamento de uma função num intervalo do domínio.
V	3ª	Obter uma expressão algébrica que determine a taxa de variação média. Definir e interpretar geometricamente a taxa de variação média.
VI		Analisar a variação de três funções com crescimentos distintos através de seus gráficos.
VII	4ª e 5ª	Reforçar a idéia de variabilidade em comportamentos crescentes distintos.
VIII		Avaliar a compreensão do conceito de taxa de variação média.
IX	5ª	Observar que a taxa de variação média não é suficiente para fazer uma análise mais detalhada do comportamento de uma função.
X		Buscar um intervalo conveniente para a análise do comportamento local da função: A noção de *retidão local.*
XI	6ª	Analisar diversos casos de retas tangentes a um gráfico. Conceituar reta tangente a um gráfico.
XII		Relacionar os conceitos abordados nas aulas até o momento e fazer uma análise buscando uma relação lógica entre os mesmos. Conceituar e interpretar geometricamente a taxa de variação instantânea.
XIII	7ª	Resolver o problema usando os conceitos estudados e as fórmulas da Física.
XIV		Resolver problemas utilizando os conceitos estudados e o recurso do *Graphmatica*.
XV	8ª e 9ª	Obter a representação algébrica da taxa de variação instantânea.
XVI		Obter as expressões algébricas para o cálculo da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares através da razão $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to TV_i, quando\ \Delta x \to 0$.
XVII	9ª	Resolver problemas algebricamente usando os conceitos de variação média e variação instantânea.
XVIII		Apresentar o conceito de derivada.
XIX	10ª a 12ª	Conceituar função derivada a partir do conceito de derivada. Apresentar exemplos gráficos de funções que não possuem derivada para algum x do domínio.
XX		Avaliar a habilidade de resolver problemas utilizando os conceitos estudados.
XXI	12ª e 13ª	Rever os conceito estudados.
XXII	14ª	Avaliar a compreensão do conceito de derivada.

Tabela V: Resumo dos objetivos das atividades contidas nas fichas

3.2.3 Avaliação final

Ao final do curso, propusemos aos participantes uma última atividade (Ficha XXII), cujo objetivo era avaliar a aprendizagem dos conceitos estudados durante o curso tendo como foco principal o entendimento do conceito de derivada e sua aplicação na resolução de problemas.

É importante observar que não foi permitido ao aluno levar material algum, utilizado durante o curso para casa, a fim de evitar influências externas ao trabalho desenvolvido. Isto significa que esta última atividade foi realizada com o que foi apreendido durante as aulas do curso.

3.2.4 Descrição das aulas

A seguir, descreveremos o encaminhamento definido para cada aula durante o curso.

1ª aula

Na primeira aula, conversamos com os participantes a respeito da pesquisa e do encaminhamento do trabalho. A seguir, foi feita uma sondagem, através de um questionário (Ficha I), com a intenção de avaliar o domínio de alguns conhecimentos sobre função que o aluno necessitaria no decorrer dos trabalhos. Ainda, neste encontro, propusemos a primeira ficha com atividade que explorava a idéia de variabilidade (Ficha II), concluímos corrigindo e comentando a atividade. Recolhemos as fichas.

É importante ressaltar que, ao final de cada atividade realizada exclusivamente durante os encontros, foi feita a correção comentada e o recolhimento da mesma.

2ª aula

Aplicamos a Ficha III que constava de três atividades abordando a idéia de variação de uma função num problema proposto. Depois de termos aplicado e recolhido as atividades 1 e 2 , aplicamos a atividade 3. Corrigimos e recolhemos. Dessa forma, concluímos a primeira etapa.

Iniciamos a segunda etapa com a primeira atividade que explorava a idéia de taxa de variação média (Ficha IV).

3ª aula

Aplicamos a segunda atividade da Ficha IV. Definimos, formalmente, a taxa de variação média pela razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e a interpretamos geometricamente (Ficha V) através de aula expositiva. Os alunos fizeram anotações na ficha.

Aplicamos a atividade da Ficha VI.

4ª aula

Revisamos o conceito de taxa de variação média e aplicamos a atividade da Ficha VII.

Aplicamos, também, outra atividade com problemas explorando os conceitos de taxa de variação média até então estudados (Ficha VIII).

5ª aula

Iniciamos devolvendo a atividade da aula anterior (Ficha VIII) para fazermos a correção comentada dos problemas explorando os conceitos de taxa de variação média. Iniciamos, aqui, a terceira etapa.

Aplicamos outra atividade (Ficha IX), cujo objetivo era analisar o comportamento dos gráficos de três funções distintas num mesmo intervalo.

Ainda, neste encontro, passamos a usar o organizador genérico *Graphmatica* para encontrar um intervalo conveniente, através da magnificação local da curva, a fim de analisar o comportamento local da função. Apresentamos, desta forma, a noção de retidão local (Ficha X).

6ª aula

Aplicamos a atividade da Ficha XI, cujo objetivo era discutir a idéia de reta tangente ao gráfico. Utilizamos o recurso do Graphmatica.

Após os comentários da atividade anterior, foi pedido que cada um dos participantes relacionasse individualmente, as idéias que haviam apreendido em relação aos assuntos abordados, no verso da ficha. A seguir, listamos, no quadro branco, os principais conceitos apresentados até o momento, fazendo uma análise e buscando uma relação lógica entre eles (relação entre unidades cognitivas). Os alunos fizeram anotações (Ficha XII).

Conceituamos e interpretamos geometricamente a taxa de variação instantânea (TV_i) a partir da análise feita. Utilizamos o quadro branco.

7ª aula

Aplicamos uma atividade (Ficha XIII) em que o aluno deveria resolver um problema de Cinemática utilizando os conhecimentos adquiridos com o estudo da Física na 1ª série do Ensino Médio. A seguir, através de outra atividade (Ficha XIV) eles verificaram que era possível usar a idéia apresentada de taxa de variação instantânea para resolver o mesmo problema com o auxílio do organizador genérico *Graphmatica*.

8ª aula

No início da aula, conversamos sobre a possibilidade de determinar algebricamente, sem utilizar as fórmulas da Física e o recurso do programa *Graphmatica,,* a taxa de variação instantânea num ponto x_0 do domínio.

Num segundo momento, através de uma aula expositiva utilizando o quadro branco, analisando a razão que determinava a taxa de variação média $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$,com $x_1 = x_0 + \Delta x$, associada ao esquema gráfico da secante à curva (p.44) chegamos à expressão algébrica da taxa de variação instantânea fazendo $\Delta x \to 0$. Fizemos a interpretação geométrica deste resultado. Definimos taxa de variação instantânea de uma função. Fizemos também o paralelo: a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ define o coeficiente angular da reta secante ao gráfico de uma função num intervalo I do domínio e a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x \to 0$, define o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto x_0 do domínio.

Os alunos fizeram o registro da aula (Ficha XV). A seguir, passamos a obter expressões algébricas para o cálculo da taxa de variação instantânea da função constante e das funções polinomiais de 1º e 2º grau a partir do conceito apresentado (Ficha XVI).

9ª aula

Iniciamos a aula, revisando o conceito de taxa de variação instantânea e concluindo a atividade da aula anterior. Os alunos determinaram, através da razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$ a expressão algébrica para a TV_i da função polinomial do 3º grau. Fizemos a correção. A seguir, relacionamos no quadro branco as expressões obtidas para o cálculo da taxa de variação instantânea de cada função.

Aplicamos uma atividade (Ficha XVII) que consistia em resolver algebricamente o mesmo problema de cinemática da 7ª aula usando a expressão da taxa de variação instantânea. Foi feita a relação da taxa de variação instantânea com a velocidade instantânea.

Iniciamos, aqui, a quarta etapa.

Conceituamos derivada de uma função num ponto x_0 do domínio a partir do conceito de taxa de variação instantânea (Ficha XVIII). Usamos a notação $f'(x_0)$ para a derivada. Apresentamos esse conceito com uma aula expositiva utilizando quadro branco.

10ª aula

Iniciamos a aula revisando o conceito de derivada e apresentamos o conceito de função derivada (Ficha XIX). Associamos o crescimento, decrescimento e estabilidade de uma função ao sinal da derivada. Aplicamos uma atividade que explorava esta idéia (1ª parte - Ficha XX).

Os alunos resolveram problemas, cujo desenvolvimento e solução necessitavam dos conceitos apresentados (2ª parte - Ficha XX).

11ª aula

Conclusão da atividade da aula anterior (Ficha XX). Correção comentada dos problemas.

12ª aula

Aplicamos outra atividade que constava de resolução de problemas internos da matemática e de outras ciências, cujo objetivo era revisar os conceitos estudados.(Ficha XXI).

13ª aula

Correção comentada dos problemas (Ficha XXI).

Conversa com o grupo destacando as idéias principais abordadas nos encontros.

14ª aula

Aplicação da avaliação final (Ficha XXII).

3.3 Análise dos dados

> [...]Os fundamentos da entrevista em profundidade descansam na convicção de que as pessoas envolvidas em um fenômeno têm pontos de vista ou opiniões que só podem ser descobertas através da pesquisa qualitativa. Portanto, o que importa é a qualidade das informações, não o número de entrevistados que compartilha a informação. Isso foi a idéia de Hammersley (1992) [...] quando afirma que os dados etnográficos devem ser tratados da mesma maneira que os resultados científicos sociais - quando fazemos referência ao trabalho de um determinado cientista social, o fazemos pela sua importância explicativa, e não porque represente um ponto de vista comum. A mesma lógica se aplica aos dados qualitativos. (Richardson & Wainwright, 1999)

Nesta seção, relatamos como foi feita a análise dos dados obtidos nas atividades realizadas, a fim de responder à questão da pesquisa.

Não fizemos uma avaliação quantitativa, mas sim uma avaliação qualitativa do desempenho nas atividades aplicadas com o objetivo de acompanhar o desenvolvimento conceitual de cada participante. Classificamos as respostas dadas aos exercícios contidos nas atividades segundo o ponto de vista da correção matemática. Desta forma, estabelecemos o seguinte critério para classificar estas respostas:

- Satisfatória (S), quando a resposta estava de acordo com o ponto de vista da correção matemática.
- Parcialmente satisfatória (PS), quando a resposta dada satisfazia parcialmente ao padrão estabelecido.
- Não satisfatória (NS), quando a resposta dada não estava de acordo com o ponto de vista da correção matemática.

A análise dos dados foi organizada em três etapas:

- Na primeira etapa (seções 4.1, 4.2, 4.3 do capítulo, a seguir), fizemos um relato geral do andamento do curso, incluindo a avaliação inicial, as atividades do curso e a avaliação final. Este relato foi traçado com base nas respostas dos participantes nas fichas distribuídas e nas gravações das aulas.
- Na segunda etapa da análise, (seção 4.4) fizemos um acompanhamento geral do desempenho dos participantes no decorrer do trabalho, com base nas respostas dos participantes nas fichas e avaliação final. Para isto, classificamos a compreensão dos conceitos nas atividades de cada etapa no que diz respeito à variabilidade, taxa

de variação média, taxa de variação instantânea, ao conceito de derivada e a sua utilização para solucionar problemas de acordo com o critério apresentado acima. Elaboramos quadros-resumo do desempenho dos participantes na avaliação inicial, nas atividades do curso e na avaliação final.

- Com vistas a traçar conclusões finais do trabalho, na terceira etapa (seções 4.5 e 4.6), analisamos com mais detalhes o desempenho de cada participante, a partir do relato geral e do acompanhamento geral desenvolvidos nas duas etapas anteriores.

Capítulo 4

Discussão dos resultados

> [...] o investigador qualitativo está mais preocupado com a validez das informações coletadas, isto é, se os dados expressam autenticamente a visão do entrevistado, com interferência mínima do processo de pesquisa. Esse é o critério de validez (i. e, **a capacidade de ter acesso às autênticas opiniões dos entrevistados**) que orienta a escolha de um local, não, a meta pouco realista da representatividade. (Richardson & Wainwright, 1999) Grifo dos autores

Tem-se observado, através de revisão bibliográfica, esforços direcionados no sentido de apresentar novas propostas pedagógicas que favoreçam o aprendizado dos conceitos básicos do Cálculo (Tall & Vinner, 1981; Tall, 1989; Vinner, 1991; Tall, 1992; Tall & Barnard, 1997, Tall, 2000; Bezuidenhout, 2001; Mackie, 2002; Giraldo & Carvalho, 2002; Invernizzi & Rinaldi, 2002; Hähkiöniemi, 2004; Giraldo, 2004; Mastorides & Zachariades, 2004, Filiz et al, 2006; Aksoy et al, 2006). As diversas formas de referência a um determinado objeto de estudo são indicadas como fatores que contribuem para a formação de uma imagem de conceito rica que permite ao indivíduo entendimento do conceito estudado e, posteriormente, assimilação da definição formal.

Nesse trabalho, apresentamos uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio através de um curso de quatorze aulas com uma hora e meia de duração cada uma. Esse curso constou de quatro etapas: estudo da variabilidade de uma função, taxa de variação média e taxa de variação instantânea de uma função real (utilizando a retidão local como raiz cognitiva) e apresentação do conceito de derivada. Desejamos, assim, verificar a seguinte hipótese: O estudo da seqüência estabelecida proporciona, de fato, condições para o ensino do conceito de derivada para alunos do Ensino Médio que possuam conhecimentos sobre função.

Em nossos resultados observamos nitidamente os efeitos positivos de se optar por uma proposta pedagógica que conduz o aprendiz a uma diversidade de representações visando ao entendimento claro de um conceito.

Devemos destacar que, apesar das aulas terem sido gravadas, nosso material de análise de resultados se concentrará no questionário inicial, nas atividades realizadas e na avaliação final.

4.1 Avaliação inicial

Iniciaremos a análise dos resultados fazendo um comentário a respeito das respostas obtidas no questionário inicial aplicado aos participantes, cujo objetivo era verificar a existência de conhecimentos prévios necessários para o prosseguimento do trabalho. Observamos, pelo quadro-resumo da seção 4.4, que a maioria dos participantes apresentou entendimento em relação ao conceito de função, função polinomial do 1º grau, velocidade média e velocidade instantânea. Vimos que, para M1, houve uma certa confusão entre a idéia de velocidade instantânea e velocidade constante, pois afirmou que *velocidade instantânea é a velocidade constante do objeto*. Questionada, M1 justificou que naquele instante não houve alteração na velocidade. R1 parecia não ter idéia clara da velocidade média como relação entre a variação do espaço percorrido e a variação do tempo num determinado intervalo. Registrou: *Significa somar o tempo total e quantos quilômetros ele andou fazendo* $\frac{V}{S}$*, pois o móvel não apresenta a mesma velocidade em todos os momentos, então é uma média, um valor aproximado*. Observamos que fez referência ao tempo e à distância percorrida de forma isolada. Também não teve bem formulada a noção de velocidade instantânea. Observamos que apenas M3 fez referência à velocidade média como razão entre duas variações.

4.2 Atividades do curso

Passaremos à análise das respostas às atividades de cada etapa. Na seção 3.3 apresentamos uma classificação para o desempenho. Como dissemos, classificamos as respostas em satisfatórias (S), parcialmente satisfatórias (PS) e não-satisfatórias (NS). Isso nos ajudou a observar algumas idéias a respeito das possíveis imagens de conceito desenvolvidas pelo aluno em relação à noção de variação em cada etapa da pesquisa. Acreditamos que o enriquecimento dessas imagens de conceito ao longo do curso permitiu desenvolvimento de requisitos para chegarmos ao conceito de derivada.

Na primeira etapa desta pesquisa, observamos um bom aproveitamento dos sete participantes nas atividades apresentadas. Atribuímos esse bom desempenho ao conhecimento prévio que os alunos possuíam no estudo de funções (Tall & Vinner, 1981). Os participantes já haviam trabalhado em períodos anteriores com a idéia de taxa de variação, especificamente da função polinomial do 1º grau e estudo do comportamento de funções tais como: polinomial do 2º grau, exponencial, logarítmica, trigonométrica, etc. Verificamos o desempenho satisfatório da maioria, nessa primeira etapa, na seção 4.1 e, resumidamente, nas tabelas da seção 4.4.

Na segunda etapa passamos a analisar o entendimento do conceito de taxa de variação média e a aplicação do conceito na resolução de problemas.

Todos os participantes responderam satisfatoriamente às atividades 1 e 2 da ficha IV utilizando corretamente o conceito de taxa de variação média e velocidade média. Passamos, então, a definir taxa de variação média e interpretá-la geometricamente através de uma aula expositiva. Os participantes fizeram esse registro na ficha V. Na ficha VI exploramos a idéia de velocidade de crescimento apresentando o gráfico de três funções crescentes (linear, quadrática e exponencial). Os participantes não apresentaram dificuldade alguma em realizar a atividade. Apenas M3 indicou que a taxa de variação média de f é $\frac{1}{2}$, pois considerou que, a cada variação de 1 unidade de x, $f(x)$ varia 2 unidades, ou seja, considerou, equivocadamente, a razão $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Para as demais funções fez o cálculo correto. É interessante observar que M1, M2, M3, M4, R2 e R3 calcularam a velocidade média das funções fazendo a média aritmética das velocidades médias no intervalo $[0,5]$. Devemos destacar que, nem sempre, a velocidade média é a média das velocidades. Apenas R1 determinou, equivocadamente, a velocidade média das funções g e h no intervalo $[0,5]$ calculando $\frac{9-1}{5-0}=\frac{8}{5}$ e $\frac{16-2}{5-0}=\frac{14}{5}$, ou seja fazendo $\frac{\Delta V_m}{\Delta t}$. M2, M3, R2 e R3 responderam corretamente ao item 2. M1 e R1 referiram-se ao coeficiente angular como termo constante e M4 como valor da reta. No momento da correção da ficha procuramos esclarecer os erros apresentados.

Os participantes responderam satisfatoriamente à atividade da ficha VII que analisa a variação através da razão $\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}$. Apenas M1 fez uma análise incorreta da razão $\frac{\Delta f_4(t)}{\Delta t}$ nos dois intervalos apresentados, apesar de ter apresentado análise correta para f_1, que possui comportamento semelhante à primeira parte do intervalo observado de f_4. Questionada, M1 disse estar distraída.

Nesta última atividade da 2ª etapa (Ficha VIII), observamos que M2, M3 e R3 apresentaram respostas satisfatórias a todas as atividades. M1 respondeu corretamente aos itens (f) – (2), (b) – (3), (b) – (4), mas ao responder o exercício (5) usou a razão $\frac{\Delta x}{\Delta y}$. Concluímos que a aluna resolveu o exercício sem atenção. R1 não levou em consideração a ordem das imagens ao calcular a variação Δy. Cometeu essa incorreção em todos os exercícios em que era pedido o cálculo da taxa de variação média. Observamos que não houve rigor nos registros de R1. Não se preocupou em deixar claro o que estava sendo calculado. R2 apresentou respostas incorretas ao item (a) da questão (3), não escrevendo a sentença que relacionava valor e tempo corretamente. Escreveu apenas $500t - 8000$. Apresentou respostas inesperadas à questão (4), ver anexo III p. 152. Ao ser questionado a respeito da qualidade das respostas a essa questão respondeu que estava cansado e não havia compreendido bem o enunciado. Respondeu corretamente à questão (5). É possível que o erro cometido na questão (4) esteja relacionado com o enunciado que difere, quanto à forma, do enunciado da questão (5). M4 não realizou essa atividade.

Concluímos, nesta 2ª etapa, que: M1, M2, M3, M4, R2 e R3 apresentaram entendimento do conceito de taxa de variação média Os erros cometidos por M1, a nosso ver, não comprometeram o entendimento do conceito de taxa de variação média. Consideramos para avaliação de M4 apenas as atividades realizadas até a ficha VII. R1 demonstrou dificuldade para formalizar o conceito de taxa de variação média.

Com a ficha IX iniciamos a terceira etapa, cuja finalidade era apresentar o conceito de taxa de variação instantânea usando como raiz cognitiva a idéia de retidão local.

Os participantes responderam satisfatoriamente as atividades desta ficha fazendo análise correta do comportamento das três funções, através dos gráficos, no intervalo $[1;2]$. Observamos que a idéia do refinamento da análise do comportamento das funções, ao se considerar um menor intervalo, torna-se mais clara para os participantes após a aplicação dessa atividade.

Passamos a utilizar o programa Graphmatica a partir da ficha X. As três primeiras atividades dessa ficha tinham como objetivo, apresentar a idéia de retidão local de uma função, através da magnificação do gráfico. Para isso, foi solicitado aos participantes que traçassem inicialmente os gráficos de três funções, a saber: polinomial do segundo grau, exponencial, trigonométrica (Figuras 15, 16 e 17). Para cada uma dessas curvas utilizamos o processo de magnificação, primeiramente usando o comando *zoom in*, a seguir, através da mudança de janelas gráficas pré-determinadas na atividade. Essas atividades foram realizadas sem dificuldades pelos participantes.

Na quarta atividade dessa ficha pretendíamos apresentar a idéia de linearidade local, para isso, pedimos que traçassem a curva definida por $f(x) = x^2 - 3x$ e a reta tangente à curva no ponto $x_0 = 2$, através do comando traçar tangente. Construímos, inicialmente, o gráfico na janela gráfica $[-3;\ 8] \times [-5;\ 5]$, posteriormente, pedimos aos participantes nova mudança de janela gráfica $[-1;3] \times [-3;4]$ e que repetissem o procedimento para: $[1,5;2,5] \times [-2,5;-1,5]$ e $[1,8;2,1] \times [-2,2;-1,8]$ (Figura 18). Após a realização dessa atividade, solicitamos aos participantes que respondessem à pergunta: Quando magnificamos o gráfico em torno do ponto $x_0 = 2$, ou seja, buscamos uma janela gráfica conveniente para observar "mais de perto" a parábola e a reta tangente à parábola em $x_0 = 2$, o que podemos constatar em relação a esses dois gráficos?

Verificamos pelas respostas apresentadas a essa atividade (ver Anexo III), que todos os participantes apreenderam corretamente as idéias de retidão local e linearidade local. Observamos que foram unânimes em ressaltar a coincidência dos gráficos da parábola e da reta num intervalo muito pequeno. M1, M2, M3 e R1 sugeriram que analisar o comportamento do gráfico no referido intervalo, equivaleria a analisar o comportamento da reta tangente neste mesmo intervalo.

As próximas atividades da Ficha XI objetivaram discutir e ampliar o conceito de reta tangente a um gráfico (Vinner, 1991) como sugerido na atividade 4 da ficha X. O tema é de significativa importância ao se estudar a variação de uma função num determinado ponto do domínio.

Iniciamos com a atividade 1 que constava de uma única pergunta, apresentada sem nenhum comentário prévio: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico? M1, M3 e R2 responderam satisfatoriamente à pergunta inicial e mantiveram a resposta no final da atividade.

M2, M4, R1 e R3 apresentaram respostas parcialmente satisfatórias inicialmente e fizeram a correção após a realização da atividade 2.

Cabe aqui observar as respostas dadas por R1 e R3 à atividade 2. Ambos não perceberam que a opção 3 (toca em pelo menos um ponto) contemplava todas as possibilidades de casos de tangência. Particularmente R3, considerou que tocar em infinitos pontos subentende a idéia de tocar em um, dois, três, ..., infinitos pontos. Finalmente, concluímos essa ficha pedindo aos participantes que fizessem considerações a respeito da reta tangente a um gráfico.

Observamos que os exemplos utilizados na atividade 2 (Ficha XI) permitiram aos participantes formularem imagens claras e diversificadas em relação à reta tangente a um gráfico. No entanto, devemos registrar que o exemplo utilizado para mostrar que a reta tangente a uma curva, num ponto de inflexão, atravessa a curva, (Figura 22) causou um efeito de estreitamento (Giraldo, 2004, p. 191) na imagem de conceito dos participantes relativa a retas tangentes em pontos de inflexão. Observamos isso nos registros feitos pelos participantes no verso da ficha XII (anexo III) e nas respostas dadas ao item (a) da questão (8) da avaliação final (anexo IV). Os participantes fizeram referência ao ponto extremo (ponto de máximo e mínimo) e ao ponto de mudança de concavidade como os casos em que obteremos retas tangentes paralelas ao eixo das abscissas. Creditamos esse fato à apresentação (não intencional) de um único exemplo em que a tangente traçada no ponto onde há mudança de concavidade (ponto de inflexão) é paralela ao eixo das abscissas. Observamos, neste caso, que o exemplo foi apresentado num contexto restrito (Tall, 1989), um único exemplo, ocasionando uma limitação na imagem de conceito dos indivíduos. Também, cabe observar que, sendo a ficha XII reservada a anotações de uma aula expositiva, não fizemos comentários a respeito das anotações iniciais da aula feitas no verso da ficha. Assim, o equívoco observado nos comentários referentes à tangente traçada no ponto de inflexão do gráfico da figura 22 não foi resolvido no momento em que surgiu e reapareceu na avaliação final.

Ainda em relação aos registros individuais feitos no verso da ficha XII, verificamos as principais imagens apresentadas pelos participantes:

- Quanto menor o intervalo analisado, mais precisa será a análise do comportamento de um determinado gráfico.
- Análise do comportamento de uma função pela taxa de variação média (sem muita precisão).

- Retidão local e linearidade local. Análise da taxa de variação da função através da análise do coeficiente angular da reta tangente que mais se assemelha à curva num intervalo muito pequeno.
- A reta tangente a um gráfico pode ter mais de um ponto em comum com este gráfico.

Através das idéias destacadas pelos participantes, podemos observar que apresentaram entendimento dos conceitos trabalhados.

Com a intenção de chegarmos ao conceito de variação instantânea apresentamos um problema de Cinemática (Ficha XIII) familiar aos participantes através das aulas de Física. Utilizando a equação horária do movimento de um móvel solicitamos aos participantes que determinassem a posição do móvel em tempos determinados e a velocidade média para intervalo fixado. A seguir, usando uma calculadora, pedimos que calculassem, por aproximação, a velocidade instantânea para um tempo t determinado. Tínhamos programado o cálculo da velocidade instantânea para $t = 2s$ e $t = 3s$. No entanto, como o preenchimento da primeira tabela ficou cansativo com o uso da calculadora, resolvemos dispensar o preenchimento da segunda tabela. Optamos pela calculadora, pois apenas um participante tinha habilidade com o Excel. A seguir, utilizando a fórmula que permitia calcular a velocidade instantânea, conhecida das aulas de Física, os participantes determinaram as velocidades instantâneas para $t = 2s$ e $t = 3s$. Observamos que não houve dificuldade alguma na realização desta atividade.

Passamos a atividade da ficha XIV. Propusemos aos participantes uma atividade dirigida, na qual deveriam resolver o item (d) do problema anterior (cálculo da velocidade instantânea) utilizando os recursos do organizador genérico Graphmatica e os conceitos estudados. Os alunos traçaram o gráfico da função horária definida por $s(t) = 2t^2 + 3$ com domínio $[0;\infty[$. Através do comando, desenhar tangente, os participantes traçaram as tangentes à curva nos pontos $t = 2s$ e $t = 3s$. Pedimos que registrassem as informações apresentadas nas janelas gráficas: coordenadas dos pontos de tangência, equações das retas tangentes e declives (coeficiente angular) dessas mesmas retas. A seguir, pedimos que comparassem os resultados obtidos no item (d) da atividade da ficha anterior com os declives das retas tangentes. Todos os participantes associaram os coeficientes angulares das retas tangentes traçadas nos pontos $t = 2s$ e $t = 3s$ às velocidades instantâneas obtidas nos mesmos tempos, ou seja, $t = 2s$ e $t = 3s$.

Após esta atividade, em que todos os participantes associaram corretamente a velocidade instantânea ao coeficiente angular da reta tangente à curva da função horária nos instantes dados, passamos a obter a expressão algébrica da taxa de variação instantânea a partir da expressão algébrica da taxa de variação média utilizando o recurso visual da seqüência (reta secante $\rightarrow$ reta tangente, quando $\Delta x \rightarrow 0$) da figura 26 da seção 2.2.6. Os participantes fizeram esses registros na ficha XV.

Observamos que os participantes não apresentaram dificuldades em acompanhar esse raciocínio. Atribuímos esse resultado positivo ao encadeamento lógico da seqüência de atividades elaboradas que culminou na análise da variação instantânea da função num ponto x_0 do domínio através da análise do coeficiente angular da reta tangente no ponto, análise esta, facilitada pela última atividade realizada com o programa Graphmatica (Tall, 1989; Tall, 2000; Arcavi & Hadas, 2000) já descrita anteriormente.

Tendo apresentado o conceito de taxa de variação instantânea, consideramos o momento oportuno para determinar a expressão algébrica da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares (Ficha XVI). Os participantes utilizaram a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow TV_i, \textit{ quando } \Delta x \rightarrow 0$ para determinarem a taxa de variação instantânea da função constante e da função polinomial do 1º grau num ponto x_0 do domínio. As justificativas apresentadas para os resultados obtidos na atividade da Ficha XVI mostram claro entendimento do conceito em estudo. Os alunos prosseguiram a atividade determinando expressões para o cálculo da taxa de variação instantânea das funções polinomiais do 2º e 3º graus.

Alguns participantes reclamaram do cálculo algébrico trabalhoso para se obter a expressão da TV_i da função polinomial do 2º e 3º graus. Outros solicitaram o registro, no quadro branco, do desenvolvimento do produto notável $(a+b)^3$, pois não se lembravam. R1 se recusou a fazer os cálculos pedidos. Disse que, para ele, era suficiente conhecer as fórmulas. R1 fez o registro dos cálculos no momento da correção. M2 não concluiu esta atividade, pois precisou se ausentar mais cedo . Observamos que os participantes não encontraram dificuldades em usar a razão

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$*, quando* $\Delta x \to 0$ para obter a expressão da taxa de variação instantânea. Os alunos que concluíram a atividade, utilizaram corretamente a expressão $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ como diferença de imagens para $x = x_0 + \Delta x$ e $x = x_0$ na sentença da função em estudo. No entanto, podemos dizer que a manipulação algébrica dessas expressões não foi vista, pela maioria dos participantes, como uma atividade estimulante.

Como previsto na seqüência de atividades solicitamos aos participantes que resolvessem, novamente, o problema de Cinemática (Ficha XVII), o mesmo apresentado na Ficha XIII. Deveriam, agora, calcular a velocidade instantânea (item d) utilizando a fórmula obtida para o cálculo da taxa de variação instantânea.

Julgamos necessário fazer uma relação das fórmulas obtidas para o cálculo da taxa de variação instantânea (Ficha XVI) no quadro branco antes de iniciarmos a atividade. É importante observar que os participantes realizaram essa atividade sob orientação. Apesar de terem mostrado entendimento no conceito apresentado e acompanhado a álgebra usada na obtenção das fórmulas para cálculo das taxas de variação instantânea das funções polinomiais, os participantes sentiram, inicialmente, dificuldades em aplicar as fórmulas obtidas (Ficha XVI) no cálculo da velocidade instantânea. Observando que a sentença da função horária $s(t) = 2t^2 + 3$ era a de uma polinomial do 2º grau, sugerimos aos participantes que fizessem analogia à sentença $f(x) = ax^2 + bx + c$ e utilizassem a expressão $2ax_0 + b$ para determinar a velocidade instantânea. Associaram os instantes $t_1 = 2s$ e $t_2 = 3s$ a x_0 e fizeram $a = 2$ e $b = 0$. R1 apresentou dificuldades em fazer a analogia do conceito apresentado algebricamente com o problema proposto. R1 precisou de orientação, passo a passo, para a realização desta atividade. Mais uma vez fizemos a correção comentada dos exercícios. M2 não compareceu a essa aula.

Iniciamos, aqui, a quarta etapa do curso, cujo objetivo era chegar ao conceito de derivada. Descreveremos o encaminhamento da aula expositiva.

A partir do cálculo da velocidade instantânea associada ao conceito de taxa de variação instantânea apresentamos o conceito de derivada de uma função num ponto x_0 do domínio. Fizemos referência ao exercício anterior apresentando a velocidade instantânea de $8m/s$ como sendo a derivada da função S em $t = 2s$. M3 apresenta o seguinte questionamento: *A função que chega a taxa de variação* *instantânea é a função... Como se chama? Função derivada? A função derivada vai ter como resultado uma derivada? Por exemplo, a expressão* $3ax_0^2 + 2bx_0 + c$ (apontando para a relação de fórmulas escrita no quadro.), *essa expressão aí, o resultado que ela daria para um determinado x é a derivada?* Explicamos a M3 que, de fato, as expressões obtidas para o cálculo da taxa de variação instantânea das funções dadas seriam utilizadas para calcular a derivada em qualquer outro ponto x do domínio em que fosse possível obter um único valor para a TV_i (caso contrário, não poderíamos definir uma função). Utilizamos, como exemplo, a expressão $2at + b$ que foi usada para calcular a velocidade instantânea em $t = 2s,\ t = 3s$ e que a mesma poderia ter sido utilizada para qualquer outro t dado, permitindo o cálculo da velocidade naquele instante determinado. Dessa forma, justificamos que a expressão utilizada para o cálculo da TV_i ou derivada seria a mesma que, mais adiante definiria a sentença da função derivada.

Os participantes fizeram o registro do conceito de derivada num ponto fixo do domínio como sendo a taxa de variação da função no ponto dado e coeficiente angular da reta tangente ao gráfico neste mesmo ponto. Apresentamos a notação $f'(x_0)$ para a derivada da função em x_0. Neste momento, consideramos pertinente comentar que na razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, Δy e Δx representavam diferenças finitas, mensuráveis. No entanto, esta mesma razão não seria utilizada para representar a taxa de variação instantânea, pois quando $\Delta x \to 0$ passaríamos a ter uma razão entre infinitésimos dy e dx (uma diferença não mensurável fisicamente) (Netto, 2001). Comentamos que a razão entre infinitésimos (diferenciais de Leibniz) $\frac{dy}{dx}$ (Roque, 2006) seria utilizada para representar a taxa de variação instantânea de uma função contínua (diferenciável) ou seja a derivada. Assim, $\frac{dy}{dx} = TV_i = f'(x)$. Não exigimos que os participantes fizessem o registro desse comentário. M2 não participou desta aula.

O próximo passo foi conceituar função derivada, cuja discussão já havia sido iniciada por M3 na atividade anterior. Essa função foi apresentada como a função que fornecia o coeficiente angular da reta tangente à curva em qualquer ponto do domínio, deixando claro que a cada ponto do domínio (de uma função diferenciável) deve estar associado um único valor para o coeficiente angular, ou seja, uma única reta tangente. Apresentamos, através de representações gráficas, exemplos de funções que, para algum x_0 do domínio, não admitia derivada, ou seja, $f'(x_0) \notin R$ ou $f'(x_0)$ não era único. Relacionamos as sentenças das funções derivadas estudadas. R2 e M3 observaram que a sentença da função derivada (de funções polinomiais) possuía um grau a menos em relação a função de origem (primitiva). Dessa forma, apresentamos a regra para obter a sentença da função derivada de uma função definida por um monômio, $f(x) = a.x^m \Rightarrow f'(x) = m.a.x^{m-1}$. Não utilizamos a razão $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ para justificar a regra, no caso genérico de um monômio de grau m, pois os participantes não haviam estudado o desenvolvimento do binômio $(x+\Delta x)^m$. Utilizamos a razão apenas no caso particular em que $f(x) = ax^2$. A seguir, fizemos analogia com as parcelas dos polinômios de 2º e 3º graus, já estudados: $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$ e $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Esta exposição foi feita no quadro branco. Sugerimos aos participantes que registrassem apenas a relação genérica apresentada $f(x) = a.x^m \Rightarrow f'(x) = m.a.x^{m-1}$.

Após a aula expositiva, questionamos os participantes à respeito do entendimento dos conceitos estudados até o momento. Disseram que estavam acompanhando sem muitas dificuldades.

Aplicamos a Ficha XX (1ª parte) que constava de atividades explorando o estudo do sinal e o comportamento da derivada através da análise de gráficos. Todos os participantes tiveram desempenho satisfatório nos dois primeiros exercícios que analisavam o sinal da derivada. O terceiro exercício dessa atividade relacionava a derivada ao coeficiente angular da reta tangente à curva. M2, M3, R1 e R3 respondem satisfatoriamente a essa atividade. M1 e R2 utilizam, equivocadamente, a expressão $3x+9$ para determinar a derivada da função dada em x_1 e x_3, mas respondem corretamente $f'(x_0) = 0$. M4 respondeu corretamente que $f'(x_0) = 0$, no entanto erra ao responder $f'(x_1) = f'(x_2) = 6$. M4 utiliza equivocadamente a expressão $2ax + b$ para determinar a derivada. Os erros cometidos por M1, M4 e R2 foram discutidos através da correção comentada dos exercícios.

O quarto exercício dessa ficha analisa o comportamento da derivada em funções crescentes e decrescentes. M1, M3, M4 e R2 responderam satisfatoriamente ao exercício. Mas, M2, R1 e R3 erraram ao analisar o comportamento da derivada nas funções decrescentes. Atribuímos este erro a análise do comportamento da função tangente no 2º quadrante. Esta análise exige um raciocínio inverso, relativo à ordem dos números reais negativos. Quanto maior o ângulo obtuso, maior será o valor relativo da tangente deste ângulo (porém, menor valor absoluto até 0) e conseqüentemente maior será o valor da derivada. Esta mesma dificuldade pode ser detectada na resolução de inequações exponenciais e logarítmicas, quando as bases são números reais positivos menores que 1. Concluímos que os participantes tiveram um desempenho parcialmente satisfatório nesta atividade devido às dificuldades apresentadas e conceitos não totalmente esclarecidos durante as aulas.

Passamos a 2ª parte da Ficha XX, em que apresentamos seis problemas para serem resolvidos utilizando os conceitos e recursos algébricos estudados.

O primeiro problema foi resolvido satisfatoriamente por M1, M3, M4, R1 e R3. M2 não conseguiu resolver o problema . Atribuímos esta dificuldade a não participação na atividade contida na Ficha XVII. R2 encontra $S(1)=5$ ao mesmo tempo que determina $v_i(t)=S'(t)=10t$. Ao final responde $V=5m/s$. Neste caso, o erro pode ter sido distração.

O problema (2) é resolvido por M1, M2, M3, M4, R2 e R3. Apenas M3, M4, R2 e R3 utilizaram $h'(t)=0$ para determinar o tempo em que o objeto lançado atinge altura máxima. M1 e M2 resolveram o problema utilizando conhecimentos de função polinomial do 2º grau, ou seja , determinaram as coordenadas do ponto máximo da trajetória (parábola) através das fórmulas das coordenadas do vértice da parábola. Não fizeram menção ao cálculo da derivada. R1 não conseguiu resolver o problema.

O terceiro problema foi resolvido corretamente por M3, M4 e R2. R3 encontrou, de forma incorreta, a sentença para a função derivada de s, $s'(t)=v(t)=4t^2+1$ ao invés de $s'(t)=v(t)=6t^2+1$. No entanto, obteve corretamente a fórmula para calcular a aceleração instantânea $a(t)=8t$ a partir da fórmula errada de $v(t)$. M1 utilizou a fórmula da função derivada da função polinomial do 3º grau sem observar que $s(t)$ não possui termo do 2º grau. M2 e R1 não conseguiram resolver o problema.

O quarto problema foi resolvido corretamente por quase todos os participantes, exceto R1 que não conseguiu dar solução.

O quinto problema consistia em determinar a equação da reta tangente à curva de equação $f(x)=x^2$ no ponto $x_0=1$. Esse problema não foi resolvido imediatamente pelos participantes. Não tínhamos apresentado nenhuma situação semelhante anteriormente. Dessa forma, houve necessidade de orientação prévia aos alunos. Sugerimos que fizessem um esboço da curva e da reta tangente ao ponto dado. A partir dessa visualização, pedimos que escrevessem a equação (genérica) reduzida da reta: $y=ax+b$ e determinassem os parâmetros a e b. M3, M4, R2 e R3 obtiveram corretamente a equação da reta tangente em $x_0=1$. M1 apresentou indevidamente a expressão $2x-1$ como equação da reta. M2 não conseguiu resolver o exercício. R1 esboçou uma tentativa de resolução, mas não apresentou rigor algum na resolução do problema, nem justificativa correta para o resultado obtido.

O sexto e último problema dessa ficha foi resolvido por todos os participantes, mas apenas M2, M3 e R3 apresentaram a resposta usando a unidade correta para a taxa de variação que obtiveram, vazão de 138 L/min, o que sugere entendimento do que estavam calculando. Os demais responderam que a vazão era de 138 L não fazendo a relação de variação entre as duas grandezas volume e tempo. R1 e R2 não apresentaram rigor com a notação, trabalharam com expressões "soltas", sem fazer referência ao que estavam calculando.

Observamos ao final desta atividade que M3 teve um desempenho satisfatório, resolvendo corretamente todos os problemas. R2 e R3 cometeram pequenos erros que não comprometeram o entendimento do conceito. M2 apresentou um grande esforço para recuperar os conceitos não assimilados em aulas que esteve ausente. M1 e M4 realizaram as atividades necessitando de orientações para resolução de alguns problemas. R1 apresentou dificuldade para resolver os problemas apesar de ter apresentado entendimento do conceito. Não conseguiu trabalhar com sentenças matemáticas, dificuldade esta já detectada no ano em curso. Insistiu em escrever expressões "soltas" , o que tornou o cálculo confuso e sem rigor algum. A desorganização algébrica de R1 e a crença de que o rigor da representação não é importante limitou seu desempenho.

Neste momento, sentimos necessidade de elaborar outra ficha com problemas, a fim de reforçar os conceitos estudados e o cálculo algébrico necessário à resolução dos exercícios.

A atividade da Ficha XXI constou de três exercícios. M2, M3, M4 e R2 resolveram corretamente o problema de cinemática. R3 cometeu um erro ao determinar a velocidade média através da diferença entre duas velocidades instantâneas $v(3{,}01) - v(3) = 6{,}02 + 16 - (6 + 16) = 22{,}02 - 22 = 0{,}02$. Não percebeu o equívoco quando calculou a velocidade instantânea para $t = 3s$ obtendo um resultado bastante distante do encontrado no item (a) $v(3) = 6 + 16 = 22m/s$. R1 apresentou o mesmo erro que R3. R1 continuou a não apresentar rigor com a notação, apesar das observações feitas nas atividades anteriores.

M3, M4, R2 e R3 resolveram satisfatoriamente o segundo exercício da ficha. Obtiveram a equação da reta tangente à curva definida por $f(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 2$. M2 e R1 precisaram de orientação para realizar este exercício.

O terceiro problema desta atividade consistiu em determinar a sentença da função derivada de uma função real definida por $h(x) = \frac{1}{x}$ pela definição e a seguir determinar as equações das retas tangentes à curva dada nos pontos $x = 1$ e $x = -1$. M3, R2 e R3 realizaram a atividade satisfatoriamente. M4 realizou a atividade sob orientação. M2 obteve a expressão de $h'(x)$ sem usar o conceito apresentado. Escreveu $h(x) = x^{-1}$ e utilizou a regra de derivação de um monômio obtendo a sentença $h'(x) = -x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$. R1 não conseguiu resolver esse exercício. M1 não realizou esta atividade.

Analisando os resultados apresentados pelos participantes nas atividades das vinte e uma fichas constatamos que houve uma evolução e assimilação dos conceitos estudados. Observamos que algumas dificuldades de cálculo residiram na transferência do entendimento do conceito de derivada para a execução do cálculo algébrico, o que exigiu orientação e acompanhamento do professor. Verificamos, também, que essa dificuldade poderá ser superada através da resolução de um maior número de problemas, adequadamente escolhidos. M2 revelou, através de seus registros, um grande esforço para acompanhar as aulas depois de ter se ausentado a duas importantes aulas. R1 mostrou entendimento dos conceitos estudados através de suas respostas aos questionamentos ao longo do curso, no entanto, apresentou grande dificuldade em cálculo algébrico, não valorizando a organização e utilização de notações adequadas, postura que comprometeu seu desempenho nas atividades.

Devemos, neste momento, retomar as condições em que o curso se realizou. As aulas do referido curso aconteceram duas vezes na semana, após o horário regulamentar das aulas da escola (7:15h às 12:55h com 7 tempos diários) . Os alunos que se dispuseram a participar faziam lanches rápidos para iniciar as aulas às 13:45h e terminar às 15:15h. Muitos ficavam cansados e sonolentos, principalmente M1 e M4. Quanto à dinâmica das aulas, sugerimos que todas as atividades fossem realizadas individualmente e procuramos fazer a correção comentada de cada uma delas. Programamos realizar todas as atividades em sala para assegurar que não houvesse nenhum tipo de interferência externa.

4.3 Avaliação final

Passamos a analisar as respostas do questionário final realizado individualmente pelos participantes, uma semana após a correção da última ficha. Os participantes não levaram material algum para estudo em casa. Realizaram a avaliação com os pré-requisitos assinalados no questionário inicial e com os conhecimentos adquiridos durante o curso. Utilizamos o critério descrito na seção 3.3 para classificação das respostas.

Os participantes deram respostas satisfatórias à primeira pergunta do questionário, o que revelou claro entendimento do conceito de taxa de variação média e taxa de variação instantânea. Apenas M4 não foi muito precisa ao considerar que a taxa de variação média indica a variação ao longo de todo o gráfico. O conceito de derivada é cobrado na segunda questão. Relacionamos as respostas dadas na tabela abaixo:

Derivada como:	Participantes						
	M1	M2	M3	M4	R1	R2	R3
coeficiente angular da reta tangente ao gráfico num ponto do domínio	x	x	x				
taxa de variação instantânea		x				x	x
função			x	x	x		

Tabela VI: Idéias apresentadas pelos participantes em relação ao conceito de derivada

Apenas M4 e R1 não fizeram referência à derivada como coeficiente angular ou taxa de variação instantânea. Esses dois participantes não associaram derivada a um número, mas a uma função obtida a partir de outra função. R3 referiu-se à derivada de um número (e não de uma função) como a taxa de variação instantânea do gráfico em um ponto, no entanto destaca a importância da derivada para conhecer o comportamento da função em um ponto. Questionado, R3 comenta que a intenção era associar a derivada a um número.

Em relação à interpretação geométrica da derivada M1, M2, M3, R2 e R3 fizeram corresponder ao coeficiente angular da reta tangente em um ponto do gráfico. Apenas M4 e R1 interpretaram a derivada como a tangente de um ponto do gráfico.

Questionados sobre a importância de se determinar derivadas, M1, M2, M4, R1, R2 e R3 associaram à análise mais precisa do comportamento da função. Apenas M3 não respondeu exatamente a questão proposta.

M1, R2 e R3 obtiveram, pela definição, a expressão da derivada num ponto x_0 de uma função definida por um monômio. M3 não concluiu e apresentou $\Delta x + 2x^2$ como expressão para a derivada, apesar de ter registrado $\Delta x \to 0$. Verificamos que M3 respondeu corretamente o exercício (2) da Ficha XXI, isto nos leva a concluir que houve uma distração da participante. M2, M4 e R1 não resolveram essa questão. Esse resultado já era previsto, a se considerar o desempenho dos participantes no exercício (2) da atividade da Ficha XXI .

A equação da reta tangente à curva definida por $f(x) = 3x^2$ no ponto $x_0 = 2$ foi determinada satisfatoriamente apenas por M3 e R3. R2 apesar de ter feito cálculos corretos representou a equação da reta por $f'(x) = 12x - 12$. M2 apresentou uma solução inesperada. Determinou a expressão da derivada ($6x$) e calculou o valor da derivada no ponto $x = 2$ ($6.2 = 12$). No entanto, ao determinar a equação da reta substitui o coeficiente angular por $6x$ e não por 12. Escreve $y = 6x.x - 12 = 6x^2 - 12$. M1, M4 e R1 não resolveram o problema.

No sétimo problema as fórmulas para a velocidade instantânea e aceleração instantânea foram obtidas satisfatoriamente por M1, M2, M3, M4 e R3. R1 trocou o sinal da expressão que define $S(t)$ ao escrever os termos em ordem decrescente dos expoentes, conseqüentemente, não obteve fórmulas corretas para $v(t)$ e $a(t)$. R2 não apresentou solução satisfatória. Cometeu erro ao obter a sentença de $v(t)$.

O oitavo problema explorou o conceito de reta tangente a um gráfico em ponto definido. Os participantes responderam satisfatoriamente, no entanto, o que chamou a atenção, como dissemos, anteriormente, no comentário da atividade 2 da Ficha XI, foi a justificativa apresentada ao item (a) a qual revelou uma limitação na imagem de conceito. Esta limitação possivelmente foi causada pela apresentação de um único exemplo no qual a reta tangente atravessa a curva no ponto onde há mudança de concavidade. Esse equívoco foi esclarecido após a realização da avaliação. Através de outros exemplos, apresentamos situações em que a reta tangente num ponto de inflexão não se apresenta paralela ao eixo das abscissas.

A nona questão foi respondida satisfatoriamente por M1 e R2 com justificativas corretas. M2 e R1 apresentaram justificativas corretas apesar de terem feito algumas opções erradas. M2 não conseguiu diferenciar os itens (b) - (c) e (f) - (g) , R1 (f) - (g) . M4 e R3 não apresentaram justificativas corretas para indicar a existência ou não da derivada nos pontos assinalados. M3 justificou corretamente apenas a existência da derivada. Os resultados apresentados a esta questão mostram que apenas M1, M2 e M3, R1 e R2 conseguiram relacionar a existência da derivada à existência de uma única reta tangente no ponto em questão.

Todos os participantes associaram corretamente o sinal da derivada ao comportamento de uma função representada graficamente na décima questão. Atribuímos esse resultado satisfatório ao bom desempenho dos participantes na atividade aplicada na primeira parte da Ficha XX.

A última atividade dessa avaliação teve o objetivo de analisar o comportamento da função derivada num intervalo $[x_1;x_2]$ do domínio a partir da representação gráfica de duas funções crescentes. M1, M2, M3, M4, R1, R3 analisaram satisfatoriamente o primeiro item das letras (a) e (b). As respostas apresentadas por R2 levou-nos a concluir que, o participante analisou, equivocadamente, o comportamento da função representada graficamente e não, o comportamento da função derivada. Descartamos o segundo item das letras (a) e (b), pois o enunciado não deixou claro que se tratava da análise da função derivada.

4.4 Acompanhamento do desempenho dos participantes no estudo empírico

Nesta seção, fazemos um acompanhamento do desempenho dos participantes ao longo do estudo empírico, incluindo avaliação inicial, atividades do curso e avaliação final. Este acompanhamento é desenvolvido com base nas respostas às fichas distribuídas e apresentado por meio de um conjunto de tabelas. A tabela VII mostra as respostas dos participantes na avaliação inicial. As tabelas IX a XV, em seguida, o desempenho de cada um dos participantes nas atividades do curso. As respostas às atividades foram classificadas, como dissemos, de acordo com o ponto de vista da correção matemática, segundo o critério mostrado na tabela VIII. Finalmente, a tabela XVI mostra o desempenho dos participantes na avaliação final. Como base na analise feita nesta seção e nas anteriores, traçaremos o perfil de cada participante na seção a seguir, que nos permitirá chegar às conclusões finais do trabalho.

	Resumo		
	Imagens de conceito de função	Imagens de conceito de função polinomial do 1º grau	Imagens de conceito de velocidade média (V_m) e velocidade instantânea (V_i)
M1	Função como fórmula que define pontos no gráfico.	Fórmula: y = ax + b Gráfico: linha que passa por todos os pontos x ∞ . Coeficiente angular: "a". Define a abertura do ângulo de inclinação da reta.	V_m: média aritmética das velocidades num intervalo de tempo. V_i: Velocidade constante de um objeto
M2	Função como fórmula para encontrar um valor em função do outro.	Fórmula: f(x) = ax + b Gráfico: linha reta Coeficiente angular: "a". Determina a posição da reta no gráfico.	V_m: média aritmética das velocidades num intervalo de tempo. V_i: velocidade que um móvel possui num determinado instante.
M3	Função como uma igualdade matemática podendo ser expressa por gráfico.	Fórmula: f(x) = ax + b Gráfico: uma reta diagonal Coeficiente angular: "a". Determina o ângulo formado pela reta em relação ao eixo dos x.	V_m: razão entre o espaço percorrido e o tempo gasto para percorrer. V_i: velocidade exata de um curto período de tempo (esse tempo tende a zero).
M4	Função como uma relação de dependência entre duas variáveis x e y, podendo ser restrita ou não, segundo seu domínio e imagem.	Fórmula: y = ax + b Gráfico: linha reta diagonal em relação aos eixos. Coeficiente angular: 'b" , determina a inclinação da reta no gráfico (taxa de variação)	V_m: "relação" (da variação) entre as velocidades do móvel durante um intervalo de tempo determinado. V_i: velocidade do móvel em um determinado t isolado.
R1	Função como percepção de variação de algo em um instante de tempo.	Fórmula: y = ax + b Gráfico: é uma reta que corta o eixo dos x e dos y. Coeficiente angular: "b"	V_m: soma do tempo total e quantos quilômetros ele andou. V_i: um aumento ou decréscimo da velocidade muito grande em um período de tempo muito pequeno (desprezível).
R2	Função como processo de obtenção de um gráfico a partir de uma inequação qualquer.	Fórmula: y = ax + b Gráfico: uma reta cortando os eixos coordenados. Coeficiente angular: "a", ângulo que determina a velocidade de crescimento que a função assume.	V_m: cálculo do espaço percorrido em determinado tempo. V_i: velocidade apontada por uma partícula em determinado instante.
R3	Função como relação entre duas grandezas. Representação por gráficos ou polinômios.	Fórmula: y = a + bx Gráfico: uma reta que corta o eixo das ordenadas em "a", cujo ângulo de inclinação depende de "b". Coeficiente angular: "b" determina maior ou menor ângulo em relação ao eixo das abscissas.	V_m: expressão da variação do espaço dentro de um dado intervalo de tempo. V_i: variação de espaço num intervalo de tempo que tende a zero.

Tabela VII: Resumo das imagens de conceito apresentadas pelos alunos no primeiro questionário.

Legenda		
Critérios de classificação das respostas	**Satisfatório (S)**	Resposta de acordo com o ponto de vista da correção matemática.
	Parcialmente satisfatório (PS)	Resposta satisfaz parcialmente ao padrão estabelecido, ou seja, está matematicamente correta
	Não satisfatório (NS)	Resposta não está de acordo com o ponto de vista da correção matemática.

Tabela VIII: Critérios de classificação das respostas

	Fichas																			
	1ª etapa		2ª etapa					3ª etapa									4ª etapa			
	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
Atividade1	S	S	S		S	PS	PS	S	S	S	S	S	S		S	S			S	F*
Atividade2		S	S						S	S									PS	
Atividade3		S							S											
Atividade4									S											

Tabela IX: Quadro-resumo do desempenho de M1 nas atividades aplicadas

* F → Não realizou a atividade

	Fichas																			
	1ª etapa		2ª etapa					3ª etapa									4ª etapa			
	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
Atividade1	S	S	S		S	S	S	S	S	S	S	S	S		PS	F	F		S	S
Atividade2		S	S						S	S									PS	
Atividade3		S							S											
Atividade4									S											

Tabela X: Quadro-resumo do desempenho de M2 nas atividades aplicadas

	Fichas																			
	1ª etapa		2ª etapa					3ª etapa									4ª etapa			
	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
Atividade1	S	S	S		S	S	S	S	S	S	S	S	S		S	S			S	S
Atividade2		S	S						S	S									S	
Atividade3		S							S											
Atividade4									S											

Tabela XI: Quadro-resumo do desempenho de M3 nas atividades aplicadas

	Fichas																			
	1ª etapa		2ª etapa					3ª etapa									4ª etapa			
	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
Atividade1	S	S	S		S	S	F	S	S	S	PS	S	S		S	S			PS	PS
Atividade2		S	S						S	S									PS	
Atividade3		S							S											
Atividade4									S											

Tabela XII: Quadro-resumo do desempenho de M4 nas atividades aplicadas

	Fichas																			
	1ª etapa		2ª etapa					3ª etapa									4ª etapa			
	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
Atividade1	PS	S	PS		NS	S	NS	S	S	S	S	S	S		NS	PS			S	NS
Atividade2		S	S						S	S									NS	
Atividade3		S							S											
Atividade4									S											

Tabela XIII: Quadro-resumo do desempenho de R1 nas atividades aplicadas

	Fichas																			
	1ª etapa		2ª etapa					3ª etapa									4ª etapa			
	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
Atividade1	S	S	S		S	S	S	F	F	S	S	S	S		S	S			PS	S
Atividade2		S	PS							S									PS	
Atividade3		S																		
Atividade4																				

Tabela XIV: Quadro-resumo do desempenho de R2 nas atividades aplicadas

	Fichas																			
	1ª etapa		2ª etapa					3ª etapa									4ª etapa			
	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	XXI
Atividade1	PS	S	S		S	S	S	S	S	S	S	S	S		S	S			S	S
Atividade2		S	PS						S	S									S	
Atividade3		S							S											
Atividade4									S											

Tabela XV: Quadro-resumo do desempenho de R3 nas atividades aplicadas

Questões / Participante	Avaliação Final										
	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6	Q7	Q8	Q9	Q10	Q11
M1	S	PS	S	S	S	NS	S	PS	S	S	PS
M2	S	S	S	S	NS	NS	S	S	PS	S	S
M3	S	S	S	S	PS	S	S	S	S	S	S
M4	PS	PS	NS	S	NS	NS	S	S	NS	S	PS
R1	S	PS	NS	PS	NS	NS	NS	S	S	PS	S
R2	S	S	S	S	S	PS	NS	PS	S	S	PS
R3	S	PS	PS	S	S	S	S	S	PS	S	PS

Tabela XVI: Desempenho apresentado pelos participantes nas questões relativas à avaliação final

4.5 Análise da evolução do desempenho de cada participante no estudo empírico

4.5.1 Participante M1

M1 apresentou, no questionário inicial, conhecimento em relação ao conceito de função e função polinomial do 1º grau. Considerou velocidade média como média aritmética de velocidades (*médias*) num intervalo, porém, não deixou clara, a idéia de velocidade instantânea. Durante o curso desenvolveu a idéia de variabilidade de uma função e reforçou o conceito de taxa de variação média (como razão entre a variação de duas grandezas). Mostrou, através de suas respostas, ter assimilado o conceito de reta tangente a um gráfico. Associou corretamente a taxa de variação média de uma função em um intervalo dado ao coeficiente angular da reta secante e a taxa de variação instantânea num ponto ao coeficiente angular da reta tangente. Obteve expressões algébricas para o cálculo da taxa de variação instantânea de algumas funções, justificando corretamente o resultado obtido. Apresentou desempenho satisfatório na 1ª, 2ª e 3ª etapas. Na 4ª etapa obteve desempenho parcialmente satisfatório. Associou o conceito de taxa de variação instantânea ao conceito de derivada. Utilizou os conceitos estudados para resolver problemas.

De uma forma geral, obteve desempenho satisfatório na avaliação final. Associou a derivada à taxa de variação instantânea e, numericamente, ao coeficiente angular da reta tangente. Ressaltou que, com a derivada, é possível conseguir um estudo minucioso do gráfico (*da função*).

4.5.2 Participante M2

M2 apresentou, no questionário inicial, conhecimento sobre função e função polinomial do 1º grau. Considerou velocidade média como média aritmética das velocidades (*médias*) num intervalo e velocidade instantânea como velocidade num determinado instante. Durante o curso desenvolveu a idéia de variabilidade de uma função e reforçou o conceito de taxa de variação média (como razão entre a variação de duas grandezas). Apresentou entendimento do conceito de reta tangente a um gráfico. Associou corretamente a taxa de variação média de uma função num intervalo dado ao coeficiente angular da reta secante e a taxa de variação instantânea num ponto ao coeficiente angular da reta tangente. Obteve, corretamente, as expressões algébricas da taxa de variação instantânea das funções constante e polinomial do 1º grau justificando os resultados obtidos. Apresentou desempenho satisfatório nas três primeiras etapas.

Apesar da ausência a algumas aulas, conseguiu acompanhar as idéias apresentadas. Associou corretamente o conceito de taxa de variação instantânea ao conceito de derivada. Procurou utilizar os conceitos estudados para resolver os problemas propostos. Consideramos, parcialmente satisfatório, o desempenho na 4ª etapa.

Na avaliação final, apresentou respostas satisfatórias à maioria das questões mostrando entendimento dos conceitos estudados. Associou a derivada à taxa de variação instantânea e, numericamente, ao coeficiente angular da reta tangente. Em relação à importância da derivada, ressaltou que oferece uma noção bem mais específica do comportamento da função.

4.5.3 Participante M3

As respostas apresentadas por M3, no questionário inicial, mostram conhecimento em relação ao conceito de função, função polinomial do 1º grau, velocidade média (*única participante a fazer referência à razão entre duas grandezas variáveis*) e velocidade instantânea (*refere-se à velocidade exata de um curto período de tempo*). Durante o curso desenvolveu a idéia de variabilidade de uma função e reforçou o conceito de taxa de variação média (como razão entre a variação de duas grandezas e como coeficiente angular da reta secante no intervalo considerado). Apresentou entendimento do conceito de reta tangente a um gráfico. Associou, corretamente, a taxa de variação instantânea num ponto ao coeficiente angular da reta tangente. Obteve, corretamente, as expressões algébricas da taxa de variação instantânea das funções dadas, justificando os resultados obtidos. Apresentou desempenho satisfatório nas três primeiras etapas. Associou o conceito de taxa de variação instantânea ao conceito de derivada. Utilizou, satisfatoriamente, os conceitos estudados para resolver problemas. Concluiu a 4ª etapa com desempenho satisfatório

Na avaliação final também apresentou desempenho satisfatório, mostrando claro entendimento dos conceitos estudados. Associou a derivada à taxa de variação instantânea e, numericamente, ao coeficiente angular da reta tangente. Em relação à importância de se determinar derivadas, fez referência à sentença obtida (*da função derivada*), como uma função geral que permite determinar o coeficiente da reta tangente (ao gráfico da função que deu origem à derivada) a partir de um ponto x_0. Assinalou que esse coeficiente angular é um valor com sua respectiva unidade de medida.

4.5.4 Participante M4

M4 apresentou, no questionário inicial, conhecimento sobre função como relação de dependência entre duas variáveis. Considerou velocidade média como relação entre as velocidades (*médias*) em um intervalo e velocidade instantânea como velocidade num t isolado. Em relação à função polinomial do 1º grau, cometeu um equívoco ao fazer referência ao termo independente "b" como coeficiente angular (taxa de variação). Durante o curso desenvolveu a idéia de variabilidade de uma função e manteve o conceito de taxa de variação média como um valor médio da variação ao longo de um gráfico. Observamos que os participantes, inicialmente, destacaram fortemente a idéia da velocidade média como uma média das velocidades médias num determinado intervalo. Apresentou entendimento do conceito de reta tangente a um gráfico. Associou corretamente a taxa de variação média de uma função num intervalo dado ao coeficiente angular da reta secante e a taxa de variação instantânea num ponto ao coeficiente angular da reta tangente. Obteve as expressões algébricas da taxa de variação instantânea das funções constante e polinomial do 1º grau justificando os resultados obtidos. Apresentou desempenho satisfatório nas três primeiras etapas. Na quarta etapa, não deixa clara a relação da derivada com a taxa de variação instantânea. Utilizou os conceitos estudados de forma parcialmente satisfatória para resolver os problemas. Alguns problemas foram resolvidos sob orientação. M4 apresentou desempenho parcialmente satisfatório na 4ª etapa.

Na avaliação final, M4 apresentou respostas parcialmente satisfatórias e não-satisfatórias à maioria das questões assinalando pouco entendimento dos conceitos estudados. Associou a derivada a uma função "constituída" a partir de outra. Geometricamente, interpretou a derivada como a reta tangente ao ponto (x, y) (*e não como o coeficiente angular da referida reta tangente*). Em relação à importância da derivada, tem clara a idéia de que, através dela, é possível estabelecer o movimento do gráfico (se ele cresce ou decresce e o que gera isso).

4.5.5 Participante R1

R1 apresentou, no questionário inicial, conhecimento em relação à função como percepção da variação de algo em um instante de tempo e a função polinomial do 1º grau (refere-se ao coeficiente linear como coeficiente angular). Percebemos, através de suas respostas, que não tem claras as noções de velocidade média e velocidade instantânea.

Durante o curso desenvolveu a idéia de variabilidade de uma função e o conceito de taxa de variação média (como razão entre a variação de duas grandezas). Mostrou, através de suas respostas, ter assimilado o conceito de reta tangente a um gráfico. Associou corretamente a taxa de variação média de uma função num intervalo dado ao coeficiente angular da reta secante. Sugere que a taxa de variação instantânea num ponto é igual à taxa de variação média em um tempo infinitamente pequeno, deixando a análise do que é pedido, muito mais clara e com mais detalhes. Não associou a taxa de variação instantânea num ponto x_0 ao coeficiente angular da reta tangente neste ponto. Obteve expressões algébricas para o cálculo da taxa de variação instantânea da função constante e da função polinomial do 1º grau, no entanto, apresentou justificativas confusas para os resultados obtidos. Os resultados apresentados nesta etapa revelam grandes dificuldades com o cálculo algébrico. Apresentou desempenho satisfatório na 1ª e 2ª etapas e parcialmente satisfatório na 3ª etapa. Na 4ª etapa obteve desempenho não-satisfatório. O fato de não ter apresentado total compreensão dos conceitos estudados somado com a dificuldade em relação ao cálculo algébrico, impediu R1 de resolver os problemas propostos.

R1 obteve desempenho não-satisfatório na avaliação final. Associou a derivada à reta tangente em ponto do gráfico e não ao coeficiente angular das referida reta. Ressaltou que, com a derivada, é possível traçar gráficos complexos e dizer como o gráfico é naquele ponto, positivo, negativo. Acrescenta que, quando derivamos funções podemos achar outras $\left(\frac{\Delta S}{\Delta t} \to V \to \frac{\Delta V}{\Delta t} \to a\right)$. Não conseguiu resolver a maioria dos problemas propostos.

Baseados na análise dos resultados obtidos, concluímos que, ao final do curso, R1 apresentou desempenho não-satisfatório, não compreendendo totalmente os conceitos estudados.

4.5.6 Participante R2

R2 apresentou, no questionário inicial, algum conhecimento sobre função e função polinomial do 1º grau. Possui noção de velocidade média (espaço percorrido em determinado tempo) e velocidade instantânea (velocidade apontada por uma partícula em determinado instante). Durante o curso desenvolveu a idéia de variabilidade de uma função e reforçou o conceito de taxa de variação média. Apresentou entendimento do conceito de reta tangente a um gráfico. Associou corretamente a taxa de variação média de uma função num intervalo dado ao coeficiente angular da reta secante. Obteve, corretamente, as expressões algébricas da taxa de variação instantânea das funções constante e polinomial do 1º grau justificando os resultados obtidos. Apresentou desempenho satisfatório nas três primeiras etapas.

Associou corretamente o conceito de taxa de variação instantânea ao conceito de derivada, no entanto não associa a taxa de variação instantânea em um ponto x_0 ao coeficiente angular da reta tangente. Procurou utilizar os conceitos estudados para resolver os problemas propostos. Consideramos, parcialmente satisfatório, o desempenho na 4ª etapa.

Na avaliação final, apresentou respostas satisfatórias à maioria das questões mostrando entendimento dos conceitos estudados. Associou a derivada à taxa de variação instantânea e, numericamente, ao coeficiente angular de uma função (*da reta tangente*). Em relação à importância da derivada, ressaltou que oferece resultados mais exatos e aumenta a precisão para achar um determinado ponto.

Baseados na análise dos resultados, concluímos que, ao final do curso, R2 apresentou desempenho satisfatório, mostrando entendimento do conceito estudado.

4.5.7 Participante R3

As respostas apresentadas por R3, no questionário inicial, mostram conhecimento em relação à função, função polinomial do 1º grau, velocidade média (expressão da variação do espaço dentro de um intervalo de tempo) e velocidade instantânea (variação de espaço num intervalo de tempo que tende a zero). Durante o curso desenvolveu a idéia de variabilidade de uma função e reforçou o conceito de taxa de variação média (como razão entre a variação de duas grandezas e como coeficiente angular da reta secante no intervalo considerado). Apresentou entendimento do conceito de reta tangente a um gráfico. Associou, corretamente, a taxa de variação instantânea num ponto ao coeficiente angular da reta tangente. Obteve, corretamente, as expressões algébricas da taxa de variação instantânea das funções dadas, justificando os resultados obtidos. Apresentou desempenho satisfatório nas três primeiras etapas. Associou o conceito de taxa de variação instantânea ao conceito de derivada. Utilizou, satisfatoriamente, os conceitos estudados para resolver problemas. Concluiu a 4ª etapa com desempenho satisfatório

Na avaliação final também apresentou desempenho satisfatório, mostrando claro entendimento dos conceitos estudados. Associou a derivada à taxa de variação instantânea e, numericamente, ao coeficiente angular da reta tangente. Em relação à importância de se determinar derivadas, sugere conhecer o comportamento (crescente, decrescente ou constante) da função em um ponto.

4.6 Análise do desempenho geral do grupo de participantes

Baseados na análise dos resultados, concluímos que, ao final do curso, os participantes (com exceção de R1) apresentaram, de forma geral, desempenho satisfatório, mostrando entendimento inicial do conceito de derivada, ou, pelo menos, uma familiaridade intuitiva com o conceito que os possibilite desenvolvimentos formais posteriores.

Através deste estudo constatamos claramente uma evolução conceitual do grupo partindo da idéia de variabilidade de uma função, passando pelos conceitos de taxa de variação média, taxa de variação instantânea e culminando no conceito de derivada em um ponto.

Verificamos, também, que, todos os participantes, consideraram a taxa de variação média como instrumento que oferecia uma análise pouca precisa do comportamento de uma função e que a maioria associou à taxa de variação instantânea a um instrumento que seria utilizado para uma análise pontual do comportamento de uma função. Neste caso, a maioria considerou que essa variação instantânea, ou seja, a derivada, seria fornecida, numericamente, pelo coeficiente angular da reta tangente no ponto de análise.

Ressaltamos que, a maioria dos participantes, com exceção de M4 e R1, apresentou desempenho satisfatório, mostrando entendimento do conceito estudado. Utilizaram o conceito apreendido e os recursos algébricos para dar solução aos problemas propostos.

Devemos, porém, deixar claro que os resultados desta pesquisa foram obtidos a partir de uma abordagem pedagógica com finalidade específica: verificar se a seqüência proposta em quatro etapas possibilita o aprendizado do conceito de derivada. A elaboração das atividades, a estrutura das aulas e nosso procedimento como professor-pesquisador foram delineados por essa finalidade e, pelo ambiente controlado em que a pesquisa foi desenvolvida. Dessa forma, os resultados apresentados não são genéricos, porém aplicáveis a situações pedagógicas com características semelhantes. No entanto, acreditamos que este estudo possa fornecer subsídios para o planejamento da abordagem dos conceitos fundamentais do cálculo no ensino médio em contextos pedagógicos mais genéricos.

Finalmente, observamos alguns pontos positivos e negativos que podem ter influenciado os resultados deste trabalho:

pontos negativos

- Horário de realização das aulas. Os participantes mostraram-se cansados durante as aulas.
- O curso poderia ter sido realizado em 20 aulas. Percebemos a necessidade de dilatação do tempo.
- Material utilizado exclusivamente em aula, condição para garantir a não-influência externa na pesquisa.
- Avaliação realizada, apenas, com conhecimentos adquiridos durante as aulas.

pontos positivos

- Grupo solícito, apesar do horário e do cansaço.
- Bom relacionamento entre pesquisador e participantes.
- Ambiente adequado à realização da pesquisa.
- Recursos materiais disponíveis para execução do trabalho.
- Conhecimento, por parte da maioria dos alunos, dos pré-requisitos necessários à realização da proposta (estudo de funções).

Observamos algumas limitações ao analisar o caso de R1 e em algumas situações o caso de M4 . No entanto, ao analisarmos os resultados dos demais participantes verificamos que a abordagem diversificada, utilizada neste estudo pode atuar de forma efetiva e positiva nas imagens de conceito dos estudantes, conduzindo os mesmos não só a uma visão analítica dos objetos matemáticos mas também desencadeando, talvez mais significativamente, uma forma diferenciada de aprender matemática.

Considerações finais

Apresentamos neste trabalho uma proposta para o ensino do conceito de derivada no Ensino Médio baseada na teoria de imagens de conceito e raiz cognitiva.

Nossa intenção foi desenvolver no aluno do Ensino Médio a idéia inicial de variação de uma função seguida dos conceitos de variação média, variação instantânea e chegar ao conceito de derivada, intuitivamente. Procuramos organizar este trabalho numa seqüência de abordagens que tornassem possível o desenvolvimento do conceito em estudo e viabilizasse a apresentação futura da definição formal.

Como recurso computacional, optamos por um dos programas que traça gráficos de funções, o *Graphmatica*, por estar ao alcance de qualquer pessoa que tenha um microcomputador com acesso à Internet. Entendemos que a visualização da imagem gerada com a magnificação de gráficos de linhas curvas em janelas gráficas pré-determinadas foi valiosa, confirmando a retidão local como raiz cognitiva para a formação do conceito de derivada.

Uma vez formado o conceito foi possível pensar numa representação algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea, a derivada, o que permitiu a resolução de problemas sem o auxílio do computador.

Nessas condições, verificamos que a seqüência de atividades apresentadas em quatro etapas viabilizou a apresentação do conceito em estudo.

Os resultados obtidos nas atividades pelos participantes da pesquisa, durante o curso e na avaliação final, sugerem que abordagem pedagógica utilizada na proposta apresentada enriqueceu as imagens de conceito dos alunos e tornou o estudo viável para estudantes do Ensino Médio que possuam conhecimentos sobre função.

É importante ressaltar que a aplicação desta proposta exige uma conscientização, do professor do Ensino Médio e Fundamental, da necessidade de revisão do currículo no sentido de priorizar conteúdos essenciais como sugerem os PCN (2000) e os PCNEM (2002). Dentre os conteúdos essenciais estão aqueles que contemplam as idéias básicas do Cálculo, já reivindicados por Ávila (1991), Duclos (1992), Carneiro (1992), Rezende (2003), Schreiner (2004) e Ávila (2006).

Consideremos, neste contexto, o uso planejado dos organizadores genéricos como um dos fatores facilitadores da aprendizagem e de descobertas.

Estamos certos da necessidade de mudança, da quebra do ciclo: alunos que ingressam nos cursos de licenciatura sem conhecimentos prévios necessários para um bom desempenho acadêmico e professores com formação deficiente, incapacitados de exercerem plenamente e conscientemente seu trabalho.

Esta proposta sugere uma possibilidade de mudança. Mudança na abordagem do ensino de conceitos considerados delicados para a maioria dos estudantes. Uma abordagem pedagógica que vise o enriquecimento da imagem de conceito do indivíduo. Como ponto de partida, devemos buscar uma raiz cognitiva conveniente, familiar ao aprendiz e que conduza a apresentação do conceito em estudo, mas, ao mesmo tempo, que possibilite a apresentação e entendimento posterior da definição formal.

Isto posto consideramos que, o primeiro passo, para uma mudança, é tomarmos consciência de sua necessidade. O segundo, é desejarmos e criarmos condições para que ela aconteça.

Referências bibliográficas

ARCAVI, A. & HADAS, N. *Computer Mediated Learning: an example of an approach.* International Journal of Computers for Mathematical Learning 5. Kluver Academic Publishers, pp. 25-45, 2000.

ÁVILA, G. *O ensino de Cálculo no 2° grau*. Revista do Professor de Matemática, n° 18, pp. 1 – 9, 1991.

ÁVILA, G. *Limites e derivadas no ensino médio?* Revista do Professor de Matemática, nº 60, pp. 30 – 38, 2006.

AKSOY, Y., MIRASYEDIOGLU, S. & BULUT, M. *The influence of Computer Algebra System (CAS) in Teaching Derivative Concept.* Paper 438. 3nd International Conference on the Teaching of Mathematics at the Undergraduate Level. Istambul, Turkey.2006.

BARNARD, T. *Compressed units of mathematical thought*. Journal of Mathematical Behavior, 17, pp. 401-404, 1999.

BARUFI, M.C.B. & LAURO, M.M. *Funções elementares, equações e inequações: uma abordagem utilizando microcomputador*. CEM – IME/USP, pp. 15-20, 2001.

BEZUIDENHOUT, J. *Students' understanding of graphical aspects of derivative and of some of its underlying concepts*. PME25, vol 1, SO012. University of Stellenbosch, South Africa. 2001.

BIZA, I., CHRISTOU, C. & ZACHARIADES, T. *Students' thinking about the tangent line*. PME30, vol 2, pap 177. University of Atenas. 2006.

BONGIOVANNI, V., VISSOTO, O.R. & LAUREANO, J.L.T. *Matemática e Vida*. 2º grau, volume 3, capítulos 32 e 33. Ática, pp. 299-320, 1993.

CARNEIRO, V.C. *A Matemática aponta pontos críticos de outras ciências*. Revista do Professor de Matemática, nº 22, p. 32. 1992.

CARVALHO, T.F. & D'OTTAVIANO, I.M.L. *Sobre o infinitésimo e o Cálculo Diferencial Paraconsistente de Da Costa*. Revista Eletrônica Informação e Cognição, v.4, n.1, p.78-102. 2002-2005.ISSN:1807-8281. 2004

http://www.portalppgci.marilia.unesp.br/reic/include/getdoc.php?id=98&article=28&mode=pdf Acesso em 20 set 2007

CROWLEY, L. & TALL, D. *The Roles of Cognitive Units, Connections and Procedures in achieving Goals in College Algebra.* PME23. Haifa, Israel. p. 225-232, 1999.

DANTE, L.R. *Matemática: contexto & aplicações*. Ensino Médio, volume 1. Ática, p. 9 e p. 165, 2004a

DANTE, L.R. *Matemática: contexto & aplicações*. Ensino Médio, Vol 3, Capítulo 8. Ática. 2004b.

DUARTE, R. *Pesquisa Qualitativa: Reflexões sobre o Trabalho de Campo*.Caderno de Pesquisa, março, n° 115. RJ. p 139-154, 2002.

http://www.scielo.br/pdf/cp/n115/a05n115.pdf Acesso em 21 abr 2008.

DUCLOS, R.C. *Cálculo no 2º grau*. Revista do Professor de Matemática, nº 20, p. 28, 1992.

GIRALDO, V. & CARVALHO, L.M. *Magnificação e Linearidade Local: Novas Tecnologias no Ensino do Conceito de Derivada*. XXIV CNMAC. Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional .pp. 1 – 10, 2002.

GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos computacionais: O Caso da Derivada*. Tese de Doutorado. Universidade Ferderal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2004.

GRAVINA, M. *Um estudo de funções*. Revista do Professor de Matemática, n° 20, SBM, pp. 33 –38, 1992.

GUELLI, O. *Matemática – série brasil*. Ensino Médio. Volume Único. Ática. São Paulo. 2003.

HÄHKIÖNIEMI, M. *Perceptual and symbolic representations as a starting point of the acuisition of the derivative*. PME28, RR168. Department of Mathematics and Statistics. University of Jyväskylä, Finland. 2004.

IEZZI, G., MURAKAMI, C., MACHADO, N.J. *Fundamentos da Matemática Elementar – limites, derivadas e noções de integral*. Vol. 8. Atual. São Paulo. 2002.

IMENES, L.M. & LELLIS, M. *A Matemática e o novo ensino médio*. Educação Matemática em Revista, nº 9, ano 8, pp. 44-45, 2002a.

IMENES, L.M. & LELLIS, M. *Matemática para todos*. 8ª série, 4º ciclo. Scipione, pp. 287-288. 2002b.

INVERNIZZI, S. & RINALDI, M. *A limit-free approach to derivatives: Report on a Classroom Project.* Poster. 2nd International Conference on Teaching of Mathematics (at the undergraduate level), pap 257. University of Crete. 2002.

LEI DE DIRETRIZES E BASES (LDB). *Lei nº 9394 de 20 de dezembro de 1996.* Título V, Capítulo I, Seção IV. p. 11. 1996.

LISTA DE EXERCÍCIOS. *Sobre taxa de variação...*. Cálculo A, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas – Centro 6, Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), São Leopoldo, Brasil. 2006.

MACHADO, A.S. *Matemática Temas e Metas* – Funções e *Derivadas*. Vol. 6. Atual. São Paulo. 1991.

MACKIE, D. *Using computer algebra to encourage a deep learning approach to calculus*. 2nd International Conference on Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). ICTM2, pap 415. University of Crete. 2002.

MOREIRA, V.G. & PINTO, M.M.F. *Technical school student's conceptions of tangent lines.* PME28 RR273. Universidade Federal de Minas Gerais. Brasil. 2004.

NETTO, J.C.P. *As Operações do Cálculo Diferencial e Integral: Parte II – Acréscimo e Diferencial.* Revista de Graduação da Engenharia Química, nº 7. ISSN 1516-5469. Universidade Federal de Mogi das Cruzes. São Paulo. 2001.

http://www.hottopos.com/regeq7/cardos2.htm Acesso em 29 set 2007.

NEVES, J.L. *Pesquisa Qualitativa – Características, Usos e Possibilidades*. Caderno de Pesquisas em Administração. V.1, Nº 3, 2º sem. São Paulo. 1996.

http://www.ead.fea.usp.br/cad-pesq/arquivos/C03-art06.pdf Acesso em 09 ago 2007.

PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN). *Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*, p 6, pp 40-46. 2000.

PCN+, Ensino Médio. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pp.117-118. 2002.

REZENDE, W.M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo. São Paulo. 2003.

RICHARDSON, R.J. (Org). *A Pesquisa Qualitativa Crítica é Válida*. Pesquisa Social. Capítulo 6. Atlas. 3ª Ed. São Paulo. 1999.

http://jarry.sites.uol.com.br/pesquisaqualitativa.htm Acesso em 21 abr 2008.

RODRIGUES, F. *Escassez generalizada*. Caderno "Boa Chance", Jornal "O Globo". RJ. 03/12/2007

http://oglobo.globo.com/educacao/mat/2007/12/03/327430102.asp Acesso em 06 abr 2008

ROQUE, T. *A Matemática através da história*. Notas de aula do curso de História da Matemática. Módulo 4. p. 1 e módulo 8, p.2. 2006.

SCHREINER, I.V. *Construção do conceito de função: o pensamento variacional e a alfabetização funcional*. *Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*, vol. eletrônico, UFP, Recife, Brasil. 2004.

SIERPINSKA, A. *Sobre a compeensão do conceito de função*. Universidade de Concórdia. Canadá. 1992.

SILVEIRA, E.C. *Uma seqüência didática para aquisição/construção da noção de taxa de variação média de uma função*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2001.

SMOLE, K.S. & DINIZ, M.I. *Matemática, ensino médio*. Volume 3, Unidade 11. Editora Saraiva, pp. 277-285. 2003.

TALL, D.O. *Concept Images, Computers, and Curriculum Change*. Published in For the Learning of Mathematics, 9,3 37 – 42, 1989.

TALL, D.O. (Ed). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers. The Netherlands . 1991.

TALL, D.O. *The Transition Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof*. Published in Grouws D.A. (ed.) Handbook of Research on Mathematics and Learning, Macmillan, New York, p. 495-511, 1992.

TALL, D. & BARNARD, T. *Cognitive Units, Connections and Mathematical Proof*. PME21, vol 2. Finland. pp. 41 – 48, 1997.

TALL, D. O. *Biological Brain, Mathematical Mind & Computional Computers*. Plenary presentation for ATCM conference, Chang Mai, Thailand, p 14, 2000.

TALL, D & VINNER, S. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*. Published in educational Studies in Mathematics, 12, p. 151-169, 1981.

Anexos

Anexo I

UFRJ - Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática
www.pg.im.ufrj.br/pemat

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Eu, ____, aluno do 2º ano do Colégio Cruzeiro, Unidade Centro, portador da matrícula ________________, declaro que aceito participar da pesquisa intitulada “Uma proposta para o estudo do conceito de derivada no Ensino Médio**”,** desenvolvida pela professora Selma Lopes da Costa André, referente ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro (PEMAT-UFRJ).

Fui esclarecido quanto à liberdade de aceitação ou não da participação na pesquisa, que inclui a presença em aulas expositivas/práticas durante 14 encontros de 1h e 30 min de duração que, realizar-se-ão as segundas e quartas-feiras no horário de 13:45h às 15:15h, com início previsto para o dia 27 de agosto de 2007, nas dependências do Colégio Cruzeiro, Unidade Centro. Esta pesquisa constará de atividades e avaliações escritas referentes ao conteúdo programático das aulas. Minhas atividades curriculares não serão prejudicadas e minha identidade será preservada, não existindo, portanto, implicações com relação a minha individualidade.

________________________________ Rio de Janeiro, ______ de agosto de 2007

Assinatura do responsável

________________________________ Rio de Janeiro, ______ de agosto de 2007

Assinatura do aluno

________________________________ Rio de Janeiro, ______ de agosto de 2007

Assinatura do pesquisador

Anexo II

Resultado da avaliação inicial

Apresentamos as respostas dadas ao questionário inicial, o que nos permitiu conhecer algumas idéias que faziam parte das imagens de conceito dos participantes em relação ao conceito de função, velocidade média e velocidade instantânea que seriam importantes para o desenvolvimento do trabalho.

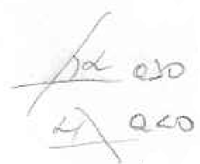
Participante M1

M1 mostrou, em suas respostas, que as idéias predominantes em sua imagem de conceito de função eram algébrica e geométrica, ou seja, uma fórmula que permitiria determinar as coordenadas de pontos que gerariam o gráfico da função. A idéia de domínio e imagem de função parece estar associada à projeção do gráfico sobre os eixos coordenados. Podemos observar estas idéias nas seguintes respostas:

- É uma fórmula que define pontos no gráfico.
- O "a" da função sempre determina a direção do gráfico *(A imagem da função polinomial do 1º grau é muito forte)*. As fórmulas das funções permitem encontrar números (*Imagens*) que são mais fáceis de encontrar através de fórmulas.
- O ponto de y que corresponde à coordenada x. (*Relação de dependência.*)
- Domínio é por onde ela "passa" pelo x e imagem é no y.

Possui imagens de conceito variadas da função polinomial do 1 º grau. Apresentou esboço do gráfico para $a > 0$ e $a < 0$. Relacionou o coeficiente angular à inclinação da reta em relação ao eixo dos x no sentido positivo.

- y = ax + b.
- Uma linha (*reta*) que passa por todos os pontos de x ∞.
- $a > 0$, α (*ângulo de inclinação da reta com o eixo dos x no sentido positivo*) vai ser agudo. $a < 0$, α vai ser obtuso.



M1 apresentou uma forma matemática para o cálculo da velocidade média.

- Somar todas as velocidades que ele teve num período de tempo e dividir pelo tempo, isso depende da aceleração.

Fez o cálculo como média aritmética simples das velocidades obtidas num intervalo de tempo e não como razão entre a variação do espaço percorrido e a variação do tempo gasto. Ao perguntar o que entendia sobre velocidade instantânea, respondeu:

▪ Velocidade instantânea é a velocidade constante de cada objeto.

Participante M2

M2 apresentou uma idéia algébrica de função associada a uma relação de dependência entre variáveis. A "conta" a que se referiu abaixo seria uma fórmula que permitiria calcular uma variável em função de outra. Associou a idéia de domínio aos valores assumidos por x e imagem aos assumidos por y.

▪ É uma conta (que pode ser uma equação, inequação, ...) estudada para que se encontre algum valor em função do outro.

▪ Existe um termo (*variável*) dependente e outro independente. Sabendo o valor de um deles e conhecendo a conta que os relaciona, podemos encontrar o valor do outro.

▪ Domínio é o conjunto dos valores no qual o termo x pode estar contido.

▪ (*Imagem*) São os valores possíveis do termo independente y (*variável dependente*).

M2 possui idéias algébrica e geométrica da função polinomial do 1º grau.

Apresentou o coeficiente angular associado à inclinação da reta em relação ao eixo das abcissas.

▪ f(x) = ax + b

▪ O "a" na f(x) = ax + b é o coeficiente angular, ou seja, ele determina a posição (inclinação) da reta no gráfico.

Possui uma idéia matemática de velocidade média. Não apresentou esta velocidade como razão entre espaço percorrido e tempo gasto. Definiu velocidade média como média aritmética simples das velocidades num intervalo fixado.

▪ Achar o valor da velocidade média de um móvel é encontrar o valor médio de todos os valores de sua velocidade no decorrer de um determinado percurso em função do tempo de duração desse percurso.

A estudante apresenta alguma noção sobre velocidade instantânea.

▪ É a velocidade que o móvel possui num determinado instante.

Participante M3

As idéias de função que se destacaram nas respostas de M3 são algébrica e gráfica. Deixou clara, também, a relação de dependência entre as variáveis. Destacou o terno que define uma função (sentença, domínio e contradomínio). A estudante possui uma idéia clara da relação entre os conjuntos domínio e imagem.

▪ Função é uma igualdade matemática em que se iguala um y a uma expressão de incógnita x, podendo isso ser expressado por gráficos.

▪ Minhas principais idéias sobre função são uma igualdade matemática de incógnita y em função de um valor para x, podendo essa “escrita” matemática ser expressada sempre em gráficos, que apresentam domínio, contra-domínio e imagem.

▪ f(x) são os possíveis valores que podem ser encontrados a partir dos valores que x pode assumir, logo, esses valores são em função de x.

▪ Domínio de uma função é o conjunto de valores para x.

▪ Imagem é o conjunto de valores para y que têm correspondente em x.

A função polinomial do 1º grau foi apresentada sem dificuldades. Identificou o coeficiente angular, bem como sua relação com a inclinação da reta.

▪ f(x) = ax + b

▪ Uma reta diagonal (*inclinada em relação aos eixos coordenados)* que apresenta infinitos valores, pertencentes ao conjunto dos números reais, para x (valor esse do domínio).

▪ O valor constante (*a*) que multiplica x.

▪ O coeficiente angular determina o ângulo (*tangente do ângulo*) formado pela reta do gráfico em relação ao eixo dos x do gráfico.

A velocidade média foi vista como média aritmética simples das velocidades obtidas num intervalo de tempo e não como uma razão entre espaço percorrido e tempo gasto.

▪ Significa dividir o espaço percorrido (pelo móvel) pelo tempo (que o móvel levou) para percorrer esse espaço, determinando, assim, por exemplo, quantos metros o móvel percorreu em cada segundo de tempo (sendo esse valor encontrado uma média, pois o móvel não necessariamente permaneceu com velocidade constante durante todo o percurso, durante o tempo considerado).

▪ Velocidade instantânea é a velocidade exata de um curto período de tempo (esse tempo, por ser muito curto, tende a 0 (zero)).

Participante M4

A idéia de função apresentada por M4 é de uma relação entre variáveis condicionada ao campo de existência (domínio).

▪ Função é quando existem dois valores (x e y) um estando em função do outro, podendo ser restritos ou não, segundo seu domínio e imagem.

▪ Função é quando existem duas de mais coisas que mantêm uma relação entre si de alguma maneira.

▪ f(x) representa um valor y que será atribuído em função de x (de acordo com o valor de x).

Domínio de uma função é todos os valores que x pode assumir.

▪ Imagem são todos os valores que y pode assumir.

A estudante apresentou confusão ao identificar os parâmetros “a” e “b” na sentença da função polinomial do 1º grau. Não apresentou idéia clara do gráfico e da interpretação geométrica do coeficiente angular.

▪ f(x) = ax + b, onde a é variável e b constante.

▪ É uma linha diagonal em relação aos eixos, que corta cada um apenas uma vez.

▪ O coeficiente angular é representado por b, cujo valor é constante em determinada função.

▪ O coeficiente angular determina a inclinação da reta no gráfico (taxa de variação) e seu valor é constante. É onde a reta corta o eixo do y.

A velocidade média foi apresentada implicitamente como média aritmética das velocidades, “relação” como diz, obtida num determinado intervalo de tempo. Sugeriu, através de sua resposta, algum entendimento de velocidade instantânea.

▪ Significa descobrir a “relação” (da variação) entre velocidades do móvel durante um intervalo de tempo determinado.

▪ Velocidade instantânea seria a velocidade do móvel em um determinado t isolado.

Participante R1

R1 apresentou uma idéia dinâmica de função. Ele a vê como variação de grandezas e relação de dependência entre variáveis. É um objeto utilizado para fazer previsões de fenômenos. Observou, ainda, que o gráfico é a documentação da função, ou seja, através dele podemos registrar o comportamento da função.

Domínio e imagem foram vistos como projeções do gráfico da função sobre os eixos coordenados.

▪ Função é a percepção de variação de algo em um instante de tempo assim a função é feita para analisarmos algo mesmo sem que ela aconteça, para “prevermos o que vai acontecer” e esta é documentada em um gráfico para ser exposto e estudado.

▪ Função é um gráfico baseado em estudos para prever e mostrar o que acontece em alguma coisa como: doenças, crescimento da população, desenvolvimento de um motor, velocidade de um corpo.

▪ Domínio é o x e a imagem é onde esta função se projeta, assim dependendo da imagem podemos saber para onde essa função vai, assim certas funções não têm valores positivos ou negativos, o D é a variável da função que define o x e todo D $\rightarrow$ CD.

▪ f é como se fosse o y, então f(x), é como se fosse quando substituíssemos o x por um valor, o que encontraríamos, ou seja, y em função de um certo x.

O estudante mostrou conhecer a sentença e a representação gráfica da função polinomial do 1º grau, no entanto, apresentou confusão ao interpretar os parâmetros “a” e “b” na sentença y = ax + b. Não identificou o coeficiente angular na sentença da função.

▪ y = ax + b

▪ É uma reta que corta os eixos dos x e dos y, assim dependendo do x, o *a* se comporta de uma forma e o *b* é constante que ajuda a definir a função.

▪ y = ax + b. O *b* é a constante, pois o *a* é modificado a cada x diferente.

▪ Ela é representada por uma reta no gráfico no y quando uma função não possui a parte do *ax* esta função é uma reta paralela ao eixo dos x que é infinita.

R1 interpretou a velocidade média como uma relação entre tempo total e espaço percorrido, mas não deixou claro o que vai obter ao sugerir a razão $\frac{V}{S}$. Interpretou velocidade instantânea como uma variação muito brusca da velocidade num intervalo de tempo desprezível.

▪ Significa somar o tempo total e quantos quilômetros ele andou fazendo $\frac{V}{S}$, pois o móvel não apresenta a mesma velocidade em todos os momentos, então é uma média, um valor aproximado.

▪ É como se fosse uma expressão de velocidade, ou seja, um aumento ou decréscimo de velocidade muito grande em um período de tempo muito pequeno, assim o tempo é desprezível.

Participante R2

R2 apresentou uma idéia geométrica para função que depende da algébrica. Definiu função como um processo de obtenção de um gráfico através de uma fórmula. A idéia de função como um gráfico parece predominar especificamente, como gráficos de função polinomial de 1º e 2º graus. Possui idéia clara de domínio e imagem.

▪ Função é a obtenção de um gráfico a partir de uma inequação qualquer.

▪ É um gráfico feito a partir de inequações de 1º e 2º grau.

▪ O domínio de uma função é o valor que x assumiria em uma função que representará em um resultado, imagem.

▪ f(x) representa uma função variável com uma incógnita x.

O estudante citou um exemplo, no momento em que foi pedida a sentença que define a função polinomial do 1º grau. Identificou o coeficiente angular e o associou a velocidade de crescimento da função.

▪ f(x) = x + 1.

▪ A representação será uma reta cortando o eixo das abscissas no ponto (0, 1) e coordenadas em (- 1, 0).

▪ O termo (*fator*) que vem agregado a x e não importa o valor de x, ele será sempre o mesmo.

▪ O ângulo determina a velocidade de crescimento que a função assume.

A velocidade média não foi apresentada como razão nem como média aritmética das velocidades obtidas em intervalo de tempo.

▪ Significa calcular o espaço que ele percorre em um determinado tempo.

A idéia de velocidade instantânea pareceu bastante clara.

▪ É a velocidade apontada por uma partícula em um determinado instante.

Participante R3

A idéia de função apresentada por R3 foi de uma relação entre grandezas representada geometricamente ou algebricamente. A representação algébrica foi predominante em sua imagem. Possui idéia clara sobre domínio e imagem.

▪ Função é a representação por gráficos ou polinômios da relação entre duas grandezas.

▪ Função lembra sentença matemática que relaciona duas grandezas.

▪ Domínio é o conjunto de valores possíveis para x.

▪ Imagem é o conjunto de possíveis valores para y.

▪ A notação representa que o valor do polinômio representado por f dependerá diretamente do valor de x.

O estudante mostrou conhecimento da função polinomial do 1º grau. Fez a interpretação correta dos parâmetros “a” e “b” na sentença y = bx + a. Apresentou idéia clara do coeficiente angular.

▪ f(x) = a + bx.

▪ Uma reta que corta o eixo das coordenadas (*ordenadas*) em a e cujo ângulo de inclinação depende do valor de b.

▪ A reta da função terá ângulo maior ou menor em relação ao eixo das abscissas de acordo com o coeficiente angular.

R3 interpretou a velocidade média como variação de espaço percorrido num intervalo de tempo. Não associou esta velocidade média à razão entre espaço e tempo nem à média aritmética das velocidades.

▪ Significa expressar a variação de espaço dentro de um dado intervalo de tempo.

Apresentou a mesma interpretação à velocidade instantânea.

▪ É a variação de espaço num intervalo de tempo que tende a zero.

Anexo III

Resultados das atividades propostas nas quatro etapas do curso

Apresentamos os resultados individuais das atividades desenvolvidas durante o curso. Estas descrições de resultados foram feitas separadamente para cada participante. Faremos uma descrição resumida das respostas dadas aos exercícios contidos nas atividades.

Não nos preocupamos em registrar todas as respostas objetivas corretas, pois, como já dissemos, obedecem a um padrão. Registramos todas as respostas parcialmente corretas e não corretas, isso nos permitiu observar se o erro cometido pode ou não influenciar na formação do conceito estudado.

Participante M1

Atividade – Ficha II

M1 apresentou respostas satisfatórias aos três exercícios desta atividade.

Atividades 1, 2 e 3 – Ficha III

A aluna apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1, 2 e 3. No entanto, considerou, na atividade 1, que os reservatórios 1 e 2 variavam uniformemente no meio do processo.

Respostas dadas a atividade 1:

Reservatório (1)

No início -> rapidamente ; no meio -> uniformemente ; no final -> lentamente

Reservatório (2)

No início -> lentamente No meio -> uniformemente No final -> rapidamente

Reservatório (3)

No início, no meio, No final -> uniformemente

Reservatório (4)

No início e No final -> rapidamente, no meio -> lentamente

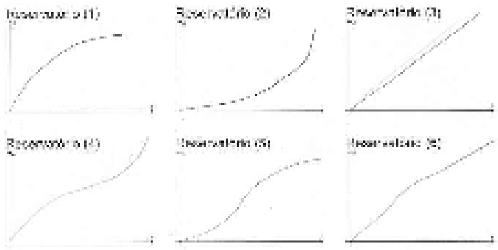
Reservatório (5)

No início e no final -> lentamente No meio -> rapidamente

Reservatório (6)

No início e No final -> lentamente No meio -> uniformemente

Esboço dos gráficos traçados na atividade 3.



Atividades 1 e 2 – Ficha IV

Apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1 e 2.

Anotações de Aula – Ficha V - Definição de taxa de variação média.

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A ; x_B]$ com $x_A < x_B$ é:

$$TV_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

sendo $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$

O coeficiente angular da reta **s** é:

$a = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TVm$

intervalo $[x_A ; x_B]$.

Atividade – Ficha VI

M1 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade. No item (1) utilizou a média aritmética das taxas de variação média (TV_m) para determinar a variação média das funções f, g e h no intervalo $[0;5]$.

$g(x) \to 9 + 7 + 5 + 3 + 1 = \frac{25}{5} = 5$

$h(x) \to (6 + 8 + 4 + 2 + 12 = 32 : 5 = 6,2$

A variação média de f é	A variação média de g é	A variação média de h é
2	5	6,2

Referiu-se, no item (2), ao coeficiente angular como termo constante da reta.

Atividade – Ficha VII

M1 apresentou respostas satisfatórias aos dois primeiros itens e inverteu as palavras ao completar as lacunas do item (c). Diz que em f_4 o nível da água sobe cada vez mais rápido até a metade do reservatório e, depois, cada vez mais lento.

Atividade – Ficha VIII

A aluna apresentou respostas satisfatórias à maioria dos exercícios desta atividade. Relacionamos, aqui, as respostas consideradas insatisfatórias:

1) e) Quando o gráfico é uma linha reta, $f(x) = x$.

2) a) $D(f) = R$.

b) $\{x \in R / -3 < x < 6\}$

d) -1

3) a) $-500t$

c) 1 ano.

5) Cometeu uma distração e calculou a taxa de variação média através da razão $\frac{\Delta x}{\Delta y}$.

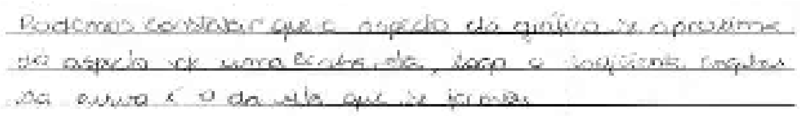
Atividade – Ficha IX

M1 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade.

Atividades – Ficha X

M1 não apresentou dificuldades em manipular o programa Graphmatica. Depois de realizar as quatro atividades, foi pedido para responder a pergunta que se encontrava no final da ficha, cujo objetivo era verificar o entendimento da noção de retidão local e linearidade local.

M1 respondeu:


Podemos constatar que o aspecto do gráfico se aproxima do aspecto de uma reta, logo o coeficiente angular da curva é o da reta que se forma

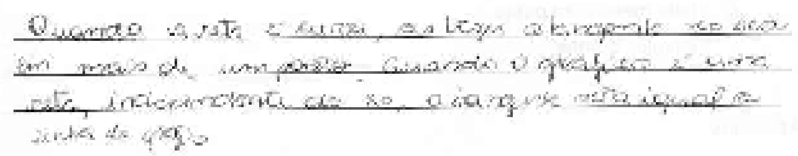
Atividades – Ficha XI

Na atividade 1, foi apresentada a seguinte pergunta: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

M1 respondeu, inicialmente, que a reta tangente a um gráfico o tocaria em, pelo menos, um ponto.

Após utilizar o programa Graphmatica para traçar tangente a um gráfico em diversas situações e destacar quantos pontos os gráficos teriam em comum, pedimos a participante que respondesse novamente a pergunta feita na atividade 1 e a seguir fizesse considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0.

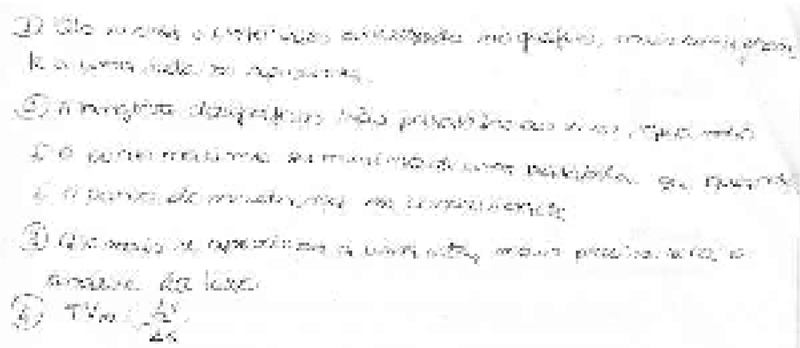
M1 manteve a mesma resposta dada a pergunta inicial e a seguir registrou:



Atividade – Ficha XII – Anotações de aula. Principais idéias abordadas até o 6º encontro.

Antes de relacionarmos, no quadro branco, as principais idéias trabalhadas durante o curso, pedimos a cada participante para fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha.

M1 destacou:



Atividade – Ficha XIII

M1 resolveu satisfatoriamente os exercícios dessa atividade. Utilizando a calculadora e uma folha para rascunho obtém, por aproximação, o valor da velocidade instantânea em $t = 2\,s$.

t = 1,98 e t = 2,0100	7,993
t = 1,99 e t = 2,0010	7,962
t = 1,999 e t = 2,0009	7,9978
t = 1,9999 e t = 2,0001	8

t = 2	velocidade instantânea $v_i \cong 8\ m/s$

A seguir, fez o mesmo cálculo utilizando fórmula conhecida do curso de Física, como sugeriu o exercício.

$S(t) = 2t^2 + 3$

$S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{a}{2} t^2$

$S_t = 3 + 0 + \frac{4}{2} t^2$

$\boxed{a = 4}$

$t = 2s \quad V = 4 \cdot 2 = 8\ m/s$

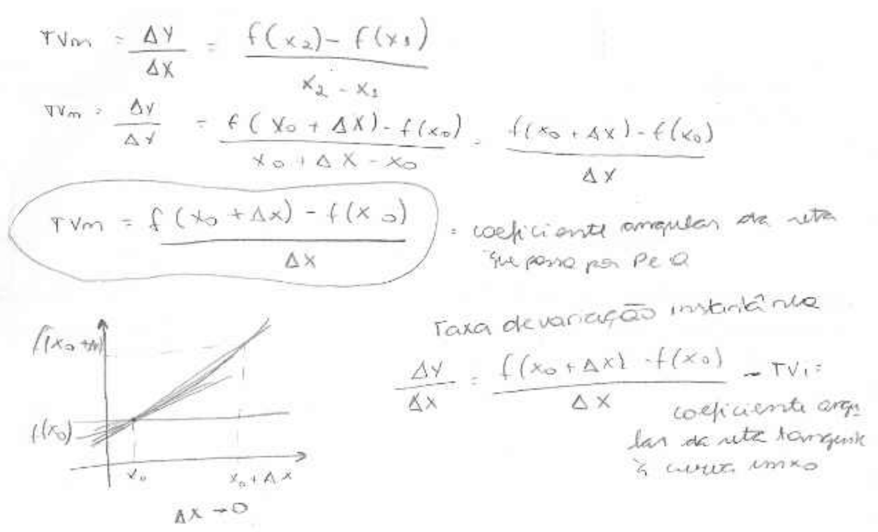
$t = 3s \quad V = 4 \cdot 3 = 12\ m/s$

Atividade – Ficha XIV

M1 respondeu satisfatoriamente aos exercícios fazendo a associação do coeficiente angular da reta tangente traçada à curva com a velocidade instantânea no instante t considerado.

Anotações de aula – Ficha XV. Expressão algébrica da taxa de variação instantânea.

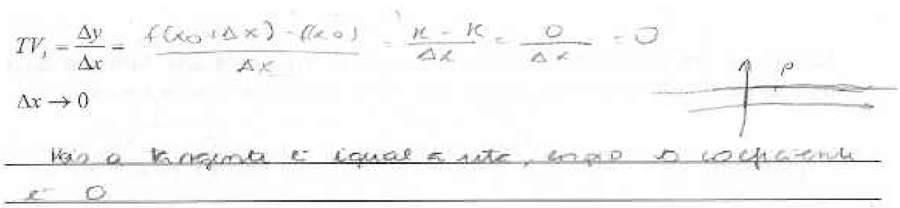
Utilizando a expressão para o cálculo da taxa de variação média, a idéia de retidão local e o auxílio da seqüência de imagens da seção 2.2.3.5 foi apresentada expressão algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea.



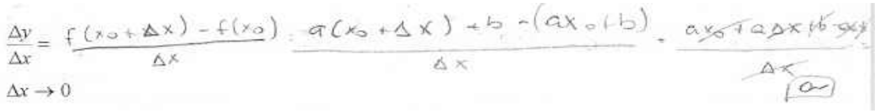
Atividade – Ficha XVI

Passamos, nesta atividade, ao cálculo da expressão da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares, utilizando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$.

Pedimos para cada aluno dar uma explicação geométrica a expressão encontrada para TVi da função constante (1) e justificar por que a expressão da TVi da polinomial do 1º grau já era prevista (2).

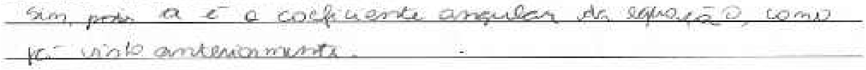
(1) 

(2)

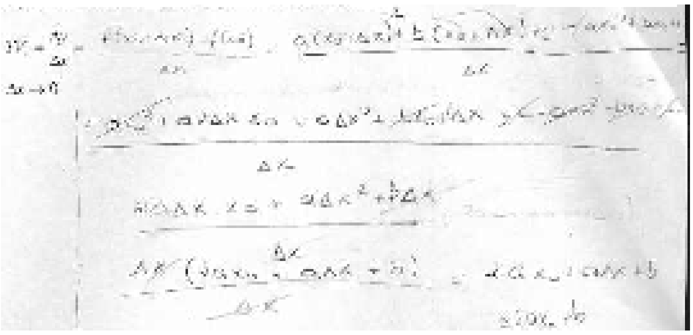

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0+\Delta x)+b-(ax_0+b)}{\Delta x} = \frac{ax_0+a\Delta x+b-ax_0-b}{\Delta x}$

$\Delta x \to 0$

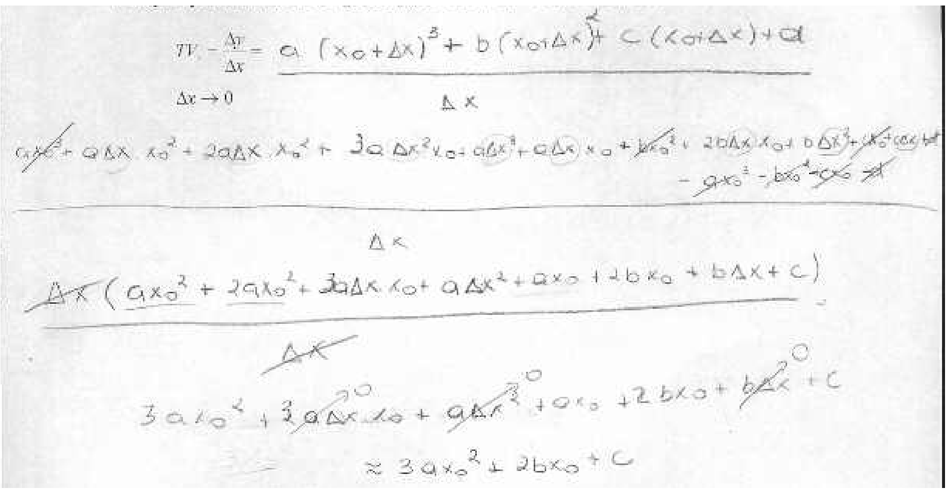
$\boxed{a}$


Sim, pois a é o coeficiente angular da equação, como já visto anteriormente.

(3) Função polinomial do 2º grau


$\approx 2ax_0 + b$

(4) Função polinomial do 3º grau

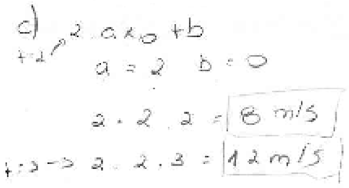

$TVi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_0+\Delta x)^3 + b(x_0+\Delta x)^2 + c(x_0+\Delta x) + d}{\Delta x}$

$\Delta x \to 0$

$\approx 3ax_0^2 + 2bx_0 + c$

Atividade – Ficha XVII

M1 não resolveu o item (c) imediatamente. Usou a fórmula obtida para TVi ($2ax_0 + b$) da função polinomial do 2º grau.

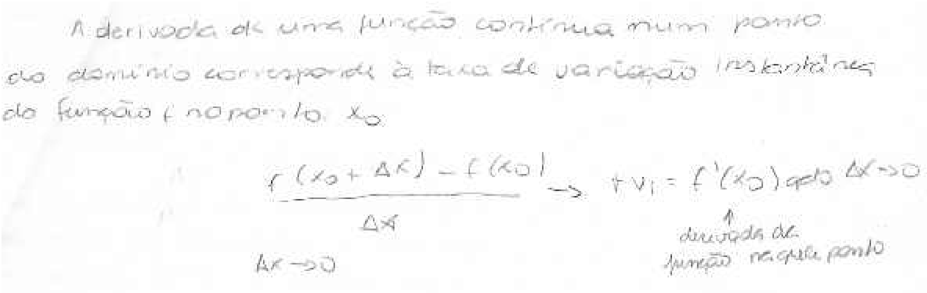

c) $2 \cdot ax_0 + b$

$t=2$ $a=2$ $b=0$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = \boxed{8\ m/s}$

$t=3 \to 2 \cdot 2 \cdot 3 = \boxed{12\ m/s}$

Anotações de aula – Ficha XVIII. O conceito de derivada.



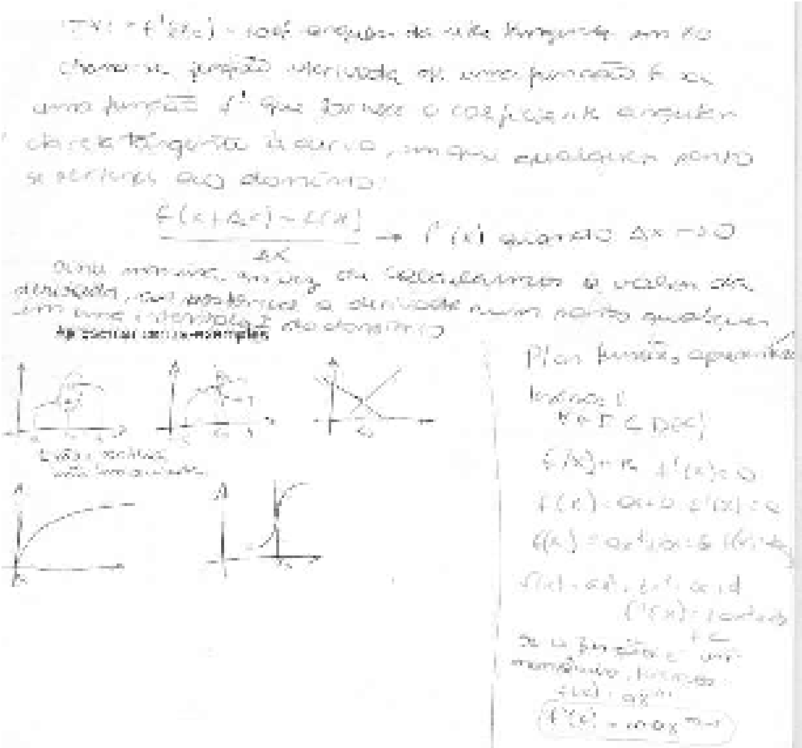
A derivada de uma função contínua num ponto do domínio corresponde à taxa de variação instantânea da função f no ponto x_0.

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to tv_i = f'(x_0) \text{ qdo } \Delta x \to 0$$

$\Delta x \to 0$

derivada da função naquele ponto

Anotações de aula – Ficha XIX. O conceito de função derivada.



$tv_i = f'(x_0)$ = coef. angular da reta tangente em x_0

Chama-se função derivada de uma função f a uma função f' que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva, em qualquer ponto pertencente ao domínio.

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to f'(x) \text{ quando } \Delta x \to 0$$

$f(x)=k$ $f'(x)=0$

$f(x)=ax+b$ $f'(x)=a$

$f(x)=ax^2+bx+c$

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Se a função é um monômio

$f(x)=ax^n$

$f'(x)=nax^{n-1}$

Relacionamos as fórmulas obtidas para o cálculo da derivada de algumas funções polinomiais. Apresentamos a regra para obter a expressão algébrica da derivada de um monômio.

Atividades – Ficha XX

M1 respondeu satisfatoriamente aos exercícios (1), (2) e (4) da atividade 1(1ª parte). No exercício (3) , determinou corretamente a derivada em x_0, mas em x_1 e x_2 escreveu a expressão $3x+9$.

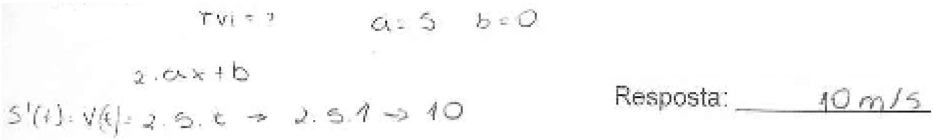
Na atividade 2(2ª parte), M1 resolveu satisfatoriamente aos exercícios (1), (2), (4), (5) e (6). Utilizou corretamente as fórmulas para o cálculo da derivada.

O exercício (2) foi resolvido sem usar o conceito de derivada. Utilizou as fórmulas para determinar as coordenadas do ponto extremo da parábola.

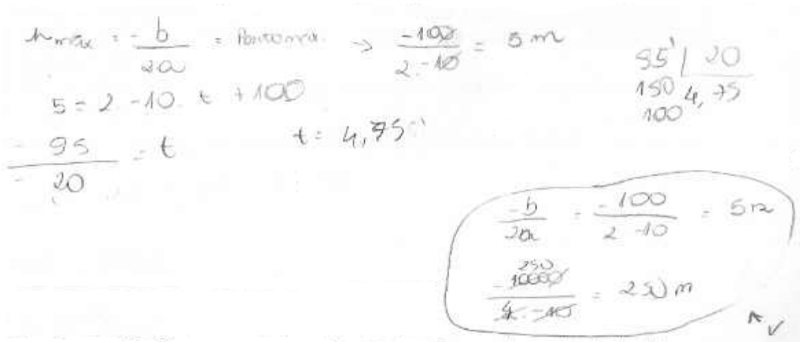
Cometeu erro no exercício (3), pois fez o cálculo como se a expressão possuísse termo do 2º grau. Não interpretou corretamente os resultados obtidos nos exercícios (4), (5) e (6).

Soluções dadas aos exercícios da atividade 2.

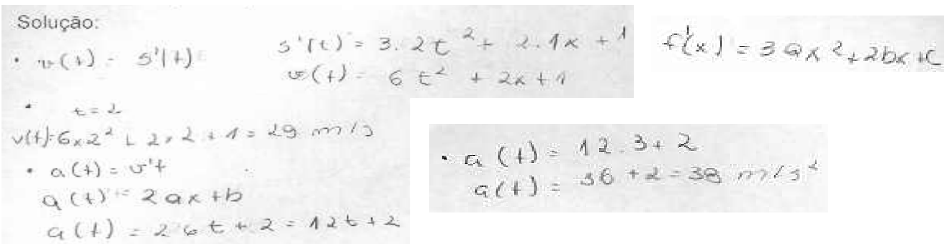
(1)



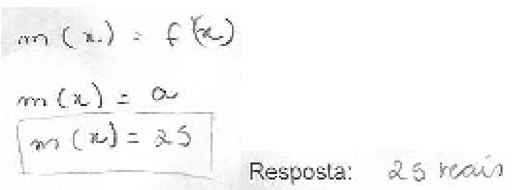
(2)



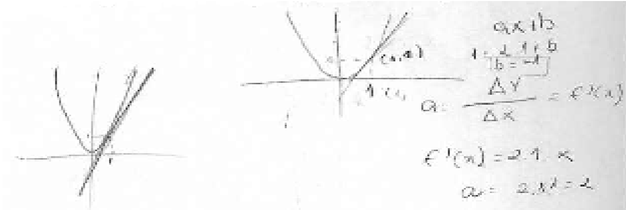
(3)



(4)



(5)



Resposta: $2x - 1$

(6)

$v'(t) = 3\,ax^2 + 2.0x + 3$

$v'(t) = 3.5\,x^2 + 2.0x + 3$

$v'(t) = 15\,x^2 + \cancel{0} + 3$

$v'(t) = 15.3^2 + 3 \quad = 135 + 3 = 138\,L$

Resposta: 153 L

Atividade – Ficha XXI – Exercícios para revisão.

M1 não realizou esta atividade. Faltou.

Participante M2

Atividade – Ficha II

M2 apresentou respostas satisfatórias aos três exercícios desta atividade.

Atividades 1, 2 e 3 – Ficha III

A aluna apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1, 2 e 3.

Respostas dadas a atividade 1.

Reservatório (1)

No início, a altura varia rapidamente em função do tempo e depois cada vez mais lentamente

Reservatório (2)

No início a altura varia lentamente e no decorrer do tempo vai variando mais rapidamente

Reservatório (3)

A altura varia uniformemente no decorrer de todo processo.

Reservatório (4)

Do começo ao meio do processo, a altura varia cada vez mais lentamente e a partir do meio, varia cada vez mais rapidamente

Reservatório (5)

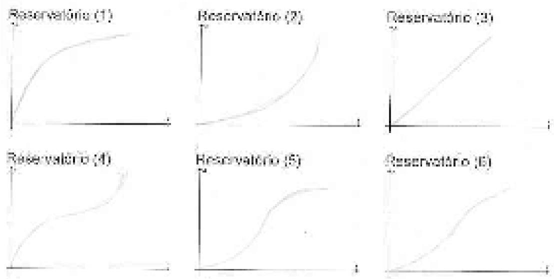
Do início ao meio, a altura varia cada vez mais rapidamente e a partir do meio a altura varia cada vez mais lentamente

Reservatório (6)

i → lentamente f → lentamente

M → aqui, a altura varia um pouco mais rápido do que no começo e no fim.

Esboços dos gráficos da atividade 3.



Atividades 1 e 2 – Ficha IV

Apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1 e 2.

Anotações de aula – Ficha V. Definição de taxa de variação média.

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A; x_B]$ com $x_A < x_B$ é:

$$TV_m = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x},$$

sendo $\Delta y = \Delta f(x) = f(x_B) - f(x_A)$ e $\Delta x = x_B - x_A$

O coeficiente angular da reta ***s*** é:

$a = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TV_M$

intervalo $[x_A; x_B]$.

Atividade – Ficha VI

M2 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade. No item (1) utilizou a média aritmética das TV_m obtidas para determinar a variação média da função no intervalo $[0;5]$.

A variação média de f é 2	A variação média de g é 5	A variação média de h é 34/5

Atividade – Ficha VII

M2 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade.

Atividade – Ficha VIII

A aluna apresentou respostas satisfatórias a todos os exercícios.

Atividade – Ficha IX

M2 apresentou respostas satisfatórias a todos os exercícios.

Atividades – Ficha X

M2 não apresentou dificuldades em manipular o programa Graphmatica. Depois de realizar as quatro atividades, foi pedido para responder a pergunta que se encontrava no final da ficha, cujo objetivo era verificar o entendimento da noção de retidão local e linearidade local.

M2 respondeu:

Quanto mais magnificamos o gráfico, mais a curva se parece com uma reta (como se a curva "se alisse"). Ao traçarmos a tangente no ponto x=2, observamos que quanto mais magnificamos o gráfico, mais o gráfico "se confunde" com a própria tangente. Concluímos assim que a taxa de variação do gráfico vai se aproximando do valor da taxa de variação média da tangente conforme diminuímos o intervalo de análise.

Atividades – Ficha XI

Na atividade 1, foi apresentada a seguinte pergunta: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

M2 respondeu inicialmente que a reta tangente a um gráfico o tocaria em infinitos pontos.

Após utilizar o programa Graphmatica para traçar tangente a um gráfico em diversas situações e destacar quantos pontos os gráficos teriam em comum, pedimos a participante que respondesse novamente a pergunta feita na atividade 1 e a seguir fizesse considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0.

M2 modificou a resposta dada à pergunta inicial. Respondeu que a reta tangente ao gráfico o tocaria em pelo menos um ponto e a seguir registrou:

A reta tangente pode ter infinitos pontos em comum com o gráfico. Pelo menos o ponto Xo é "cortado". Em uma função polinomial do 1º grau, por exemplo, a tangente é igual ao gráfico da função.

Anotações de aula – Ficha XII. Principais idéias abordadas até o 6º encontro.

Antes de relacionarmos, no quadro branco, as principais idéias trabalhadas durante o curso, pedimos a cada participante para fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha.

M2 destacou:

1. Para avalizar o comportamento de um intervalo de uma função, devemos traçar uma reta que passe pelos dois pontos extremos do tal intervalo.

2. Quanto mais curto o intervalo avalizado, mais precisa será a análise do comportamento desse intervalo de um determinado gráfico.

3. A variação de uma função pode ser avalizada através do coeficiente angular dessa função, que é da tangente da reta que liga os pontos extremos do intervalo avalizado, que é calculado dividindo o Δy (y final - y inicial) pelo Δx (x final - x inicial), que é representado na função y=ax+b pela letra a.

4. A reta tangente de uma curva (análise de dois pontos extremos de um determinado intervalo) é cada vez mais parecida com a própria curva quando diminuímos cada vez mais o intervalo.

5. Existem 2 casos onde a tangente é uma reta paralela ao eixo do x: quando há mudança de concavidade ou quando é a tangente do ponto máximo ou mínimo.

Atividade – Ficha XIII

A aluna resolveu satisfatoriamente os exercícios desta atividade. Utilizando a calculadora e uma folha para rascunho obtém, por aproximação, o valor da velocidade instantânea em $t = 2s$.

t = 1,98 e t = 2,0100	7,98 m/s
t = 1,99 e t = 2,0010	7,982 m/s
t = 1,999 e t = 2,0009	7,999 m/s
t = 1,9999 e t = 2,0001	8 m/s

t = 2	velocidade instantânea v_i = 8 m/s

A seguir fez o mesmo cálculo utilizando fórmula conhecida do curso de Física, como sugeriu o exercício.

$V_i = V_0 + a \cdot t$
$V_i = 0 + 4 \cdot 2$
$V_i = 8$ m/s

$v_i(2) = 8$ m/s

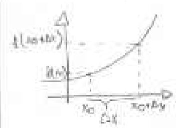
$V_i(3) = 0 + 4 \cdot 3$
$V_i(3) = 12$ m/s

Atividade – Ficha XIV

A aluna respondeu satisfatoriamente aos exercícios fazendo a associação do coeficiente angular da reta tangente traçada à curva com a velocidade instantânea no instante t considerado.

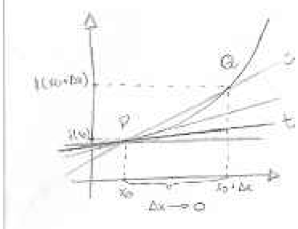
Anotações de aula – Ficha XV. Expressão algébrica da taxa de variação instantânea.

Utilizando a expressão para o cálculo da taxa de variação média, a idéia de retidão local e o auxílio da seqüência de imagens da seção 2.2.3.5, apresentamos a expressão algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea.



$TV_M = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{x_0+\Delta x-x_0} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

coeficiente angular da reta que passa por P e Q.



Taxa de variação instantânea

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \to TV_i$ = coeficiente angular da reta tangente à curva em x_0

$\Delta x \to 0$

Atividade – Ficha XVI

Passamos, nesta atividade ao cálculo da expressão da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares, utilizando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$.

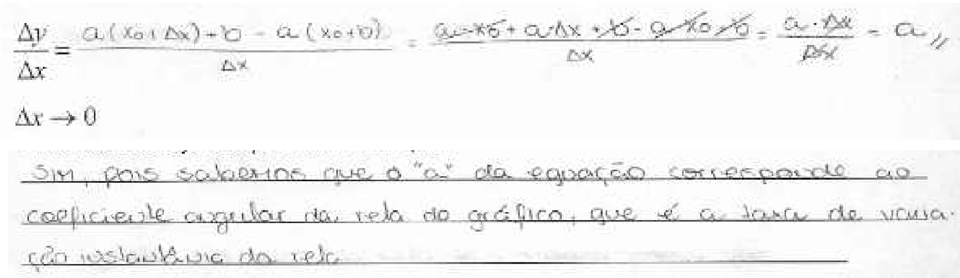
Pedimos para cada aluno dar uma explicação geométrica para a expressão encontrada para TVi da função constante (1) e justificar por que a expressão da TVi da polinomial do 1º grau já era prevista (2).

(1) $TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{K-K}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$ //

$\Delta x \to 0$

A taxa de variação instantânea é o coeficiente angular da reta tangente do ponto P. Na função constante a reta tangente coincide com a reta do gráfico, ou seja, não tem ângulo, ou seja, o coeficiente angular (a inclinação) é igual a 0.

(2)



$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_0+\Delta x)+b - a(x_0+b)}{\Delta x} = \frac{\cancel{ax_0}+\cancel{b}+a\Delta x+\cancel{b}-\cancel{ax_0}-\cancel{b}}{\Delta x} = \frac{a\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = a$

$\Delta x \to 0$

Sim, pois sabemos que o "a" da equação corresponde ao coeficiente angular da reta do gráfico, que é a taxa de variação instantânea da reta.

A aluna não obteve as expressões nos itens (3) e (4).

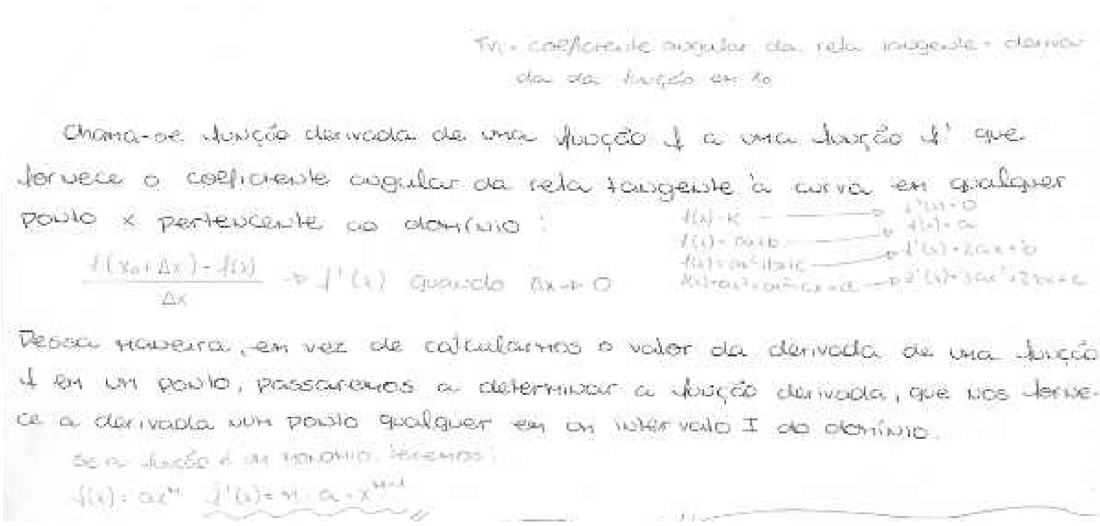
Atividade – Ficha XVII

M2 não participou desta atividade.

Anotações de aula – Ficha XVIII. O conceito de derivada.

M2 não participou desta atividade.

Anotações de aula – Ficha XIX . O conceito de função derivada.



Tr: coeficiente angular da reta tangente = derivada da função em x_0

Chama-se função derivada de uma função f a uma função f' que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva em qualquer ponto x pertencente ao domínio:

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$ quando $\Delta x \to 0$

$f(x)=k \to f'(x)=0$
$f(x)=ax+b \to f'(x)=a$
$f(x)=ax^2+bx+c \to f'(x)=2ax+b$
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \to f'(x)=3ax^2+2bx+c$

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função f em um ponto, passaremos a determinar a função derivada, que nos fornece a derivada num ponto qualquer em um intervalo I do domínio.

Se a função é um monômio, teremos:

$f(x)=ax^n \quad f'(x)=n\cdot a\cdot x^{n-1}$

M2 pediu explicações em relação ao assunto abordado nas atividades anteriores. Não fez registro dos contra-exemplos apresentados para funções que não possuem derivada num ponto x_0 do domínio.

Relacionamos as fórmulas obtidas para o cálculo da derivada de algumas funções polinomiais. Apresentamos a regra para obter a expressão algébrica da derivada de um monômio.

Atividades – Ficha XX

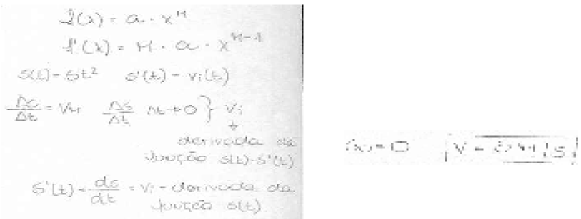
M2 resolveu satisfatoriamente todos os exercícios da atividade 1(1ª parte). Utilizou corretamente a notação $f'(x_0)$.

Na atividade 2 (2ª parte), M2 resolveu satisfatoriamente os exercícios (4) e (6) utilizando oportunamente as fórmulas para o cálculo da derivada. No entanto, não interpretou corretamente os resultados obtidos nesses exercícios.

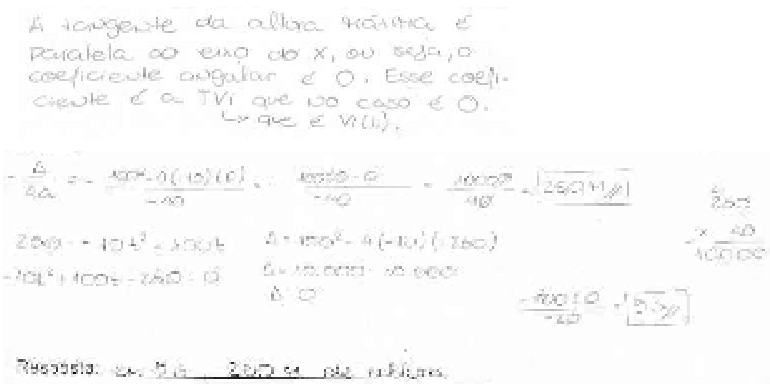
Apesar de escrever as relações corretas, não consegue responder o exercício (1).

Soluções dadas aos exercícios da atividade 2.

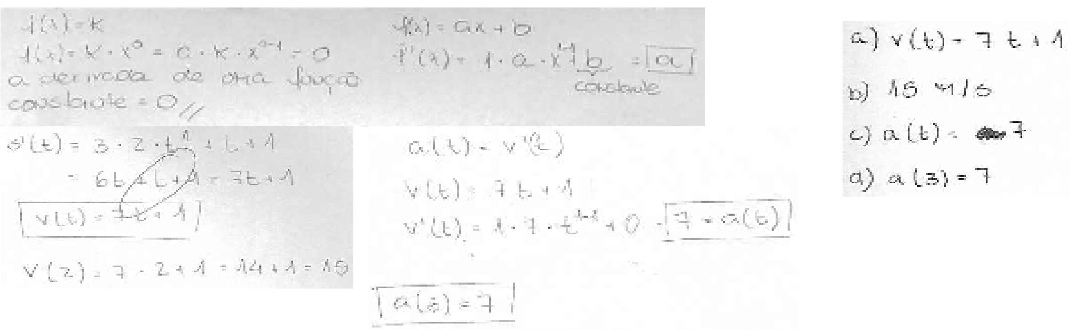
(1)



O exercício (2) foi resolvido sem usar o conceito de derivada. Utilizou fórmula para determinar o ponto extremo da parábola.

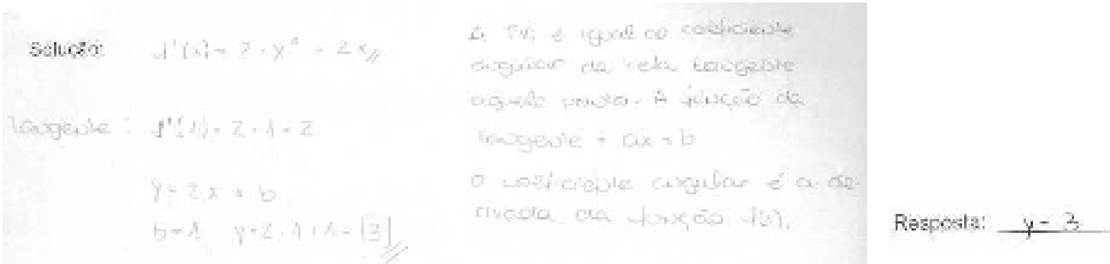


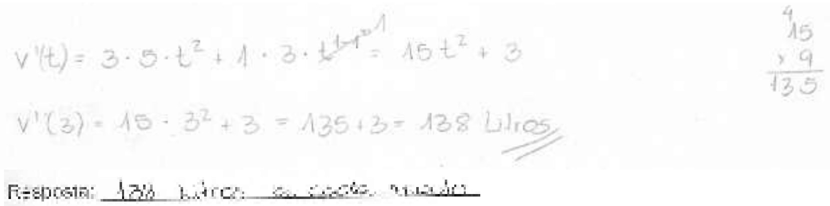
No exercício (3), utilizou a regra de derivação (de monômio) apenas na primeira parcela do polinômio.



(4) 

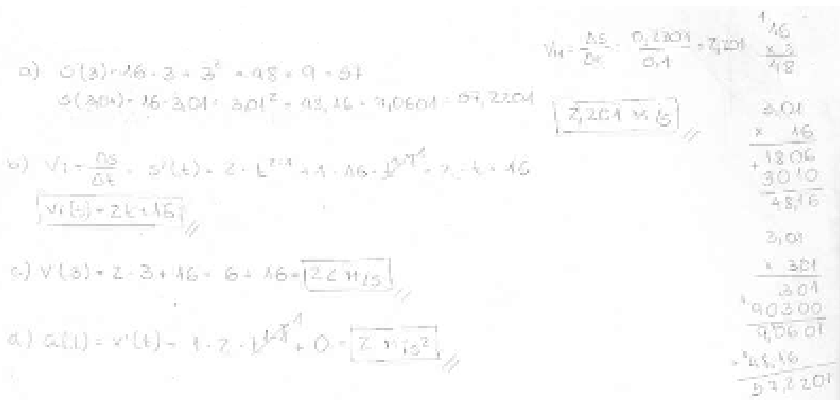
Na questão (5), determinou corretamente o coeficiente angular da reta tangente, mas cometeu erro ao determinar a equação.



(6) 

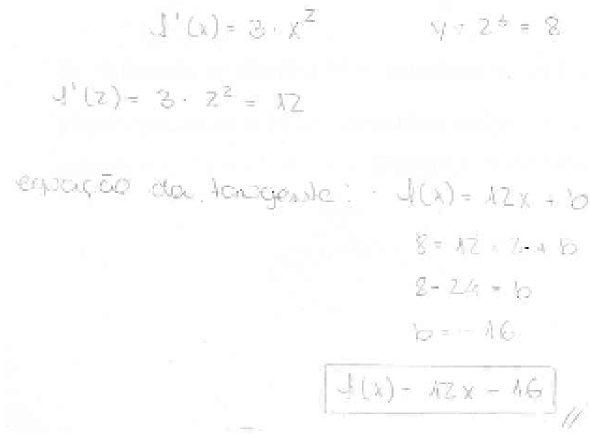
Atividade – Ficha XXI – Exercícios para revisão.

M2 encaminhou satisfatoriamente os três exercícios da atividade. No entanto, no exercício (3) não usou a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$ para determinar a expressão de $h'(x)$. Determinou $h'(x)$ fazendo $h(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ e a seguir aplicou a regra utilizada para determinar a derivada do monômio.



(1) Comete um erro ao efetuar a diferença $3{,}01 - 3 = 0{,}01$.

(2)



$f'(x) = 3 \cdot x^2 \qquad y = 2^3 = 8$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

equação da tangente: $f(x) = 12x + b$

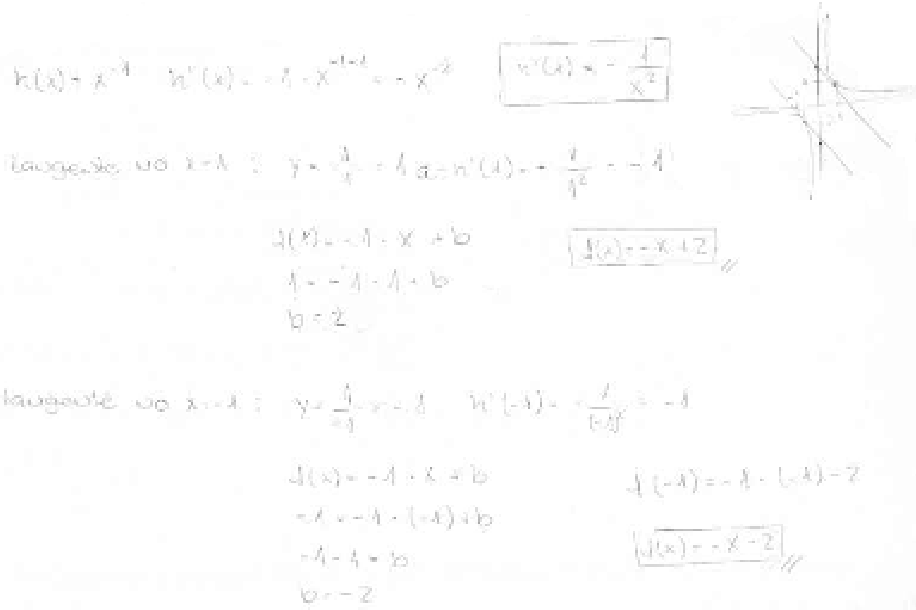
$8 = 12 \cdot 2 + b$

$8 - 24 = b$

$b = -16$

$\boxed{f(x) = 12x - 16}$ //

(3)



$h(x) = x^{-1} \quad h'(x) = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} \quad \boxed{h'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

tangente no $x = 1$: $y = \frac{1}{1} = 1 \quad a = h'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$

$f(x) = -1 \cdot x + b \qquad \boxed{f(x) = -x + 2}$ //

$1 = -1 \cdot 1 + b$

$b = 2$

tangente no $x = -1$: $y = \frac{1}{-1} = -1 \quad h'(-1) = -\frac{1}{(-1)^2} = -1$

$f(x) = -1 \cdot x + b \qquad f(-1) = -1 \cdot (-1) - 2$

$-1 = -1 \cdot (-1) + b$

$-1 - 1 = b$

$b = -2$

$\boxed{f(x) = -x - 2}$ //

Participante M3

Atividade – Ficha II

M3 apresentou respostas satisfatórias aos três exercícios desta atividade.

Atividades 1, 2 e 3 – Ficha III

A aluna apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1, 2 e 3.

Respostas dadas a atividade 1:

Reservatório (1)

Início → rapidamente ; Meio → lentamente ; fim → lentamente

Reservatório (2)

Início → lentamente ; Meio → lentamente ; fim → rapidamente.

Reservatório (3)

Início → uniformemente ; Meio → uniformemente ; fim → uniformemente.

Reservatório (4)

Início → rapidamente ; Meio → lentamente ; fim → rapidamente.

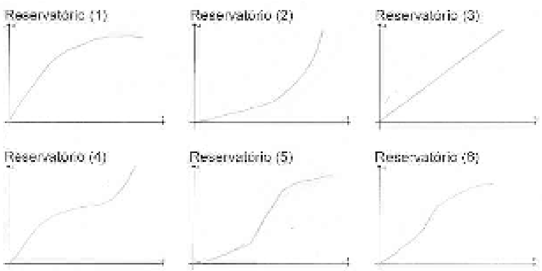
Reservatório (5)

Início → lentamente ; Meio → rapidamente ; fim → lentamente.

Reservatório (6)

Início → lentamente ; Meio → rapidamente ; fim → lentamente.

Esboço dos gráficos da atividade 3.



Atividades 1 e 2 – Ficha IV

A aluna apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1 e 2.

Anotações de aula – Ficha V – Definição de taxa de variação média.

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A;\ x_B]$ com $x_A < x_B$ é:

$$TV_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

sendo $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$

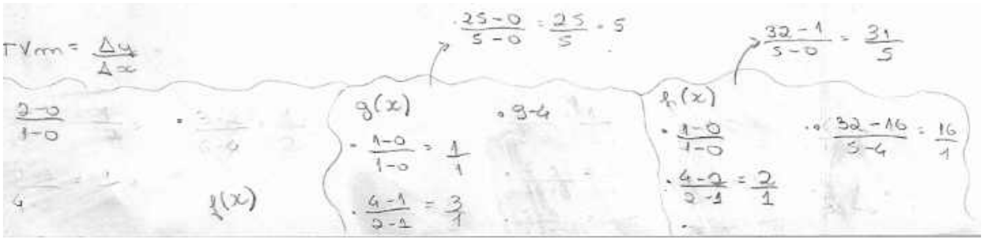
O coeficiente angular da reta **s** é:

$a = tg\,\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TVm$

intervalo $[x_A;\ x_B]$.

Atividade – Ficha VI

M3 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade. No item (1), utilizou a média aritmética das TV_m obtidas para determinar a variação média das funções g e h no intervalo $[0;5]$. Respondeu, equivocadamente, que a TV_m de f é $\frac{1}{2}$.


$TVm = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$\frac{25-0}{5-0} = \frac{25}{5} = 5$

$\frac{32-1}{5-0} = \frac{31}{5}$

$\frac{2-0}{1-0}$

$f(x)$

$g(x)$

$\frac{1-0}{1-0} = \frac{1}{1}$

$\frac{4-1}{2-1} = \frac{3}{1}$

$9-4$

$h(x)$

$\frac{1-0}{1-0}$

$\frac{4-2}{2-1} = \frac{2}{1}$

$\frac{32-16}{5-4} = \frac{16}{1}$

A variação média de f é $\frac{1}{2}$	A variação média de g é 5	A variação média de h é $\frac{31}{5}$

Associou essa taxa de variação ao coeficiente angular da reta que representa a função no item (2).

Atividade – Ficha VII

M3 apresentou respostas satisfatórias a essa atividade.

Atividade – Ficha VIII

A aluna apresentou respostas satisfatórias a todos os exercícios dessa atividade.

Atividade – Ficha IX

M3 apresentou respostas satisfatórias a essa atividade.

Atividades – Ficha X

M3 não apresentou dificuldades em manipular o programa Graphmatica. Depois de realizar as quatro atividades, foi pedido para responder a pergunta que se encontrava no final da ficha, cujo objetivo era verificar o entendimento da noção de retidão local e linearidade local.

M3 respondeu:

> Podemos constatar que, quanto mais de perto se observa a parábola e a reta tangente à ela, mais parece se confundirem uma com a outra, de modo que não se consegue distinguir o que é parábola e o que é a reta tangente. Dessa forma, a análise da taxa de variação média em intervalos muito pequenos pode ser feita tanto pela parábola quanto pela reta tangente à parábola.

Atividade – Ficha XI

Na atividade 1, foi apresentada a seguinte pergunta: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

M3 respondeu inicialmente que a reta tangente a um gráfico o tocaria em pelo menos um ponto.

Após utilizar o programa Graphmatica para traçar tangente a um gráfico em diversas situações e destacar quantos pontos os gráficos teriam em comum, pedimos a participante que respondesse novamente a pergunta feita na atividade 1 e a seguir fizesse considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0.

M3 manteve a mesma resposta dada a pergunta inicial e a seguir registrou:

> A reta tangente vai sempre tangenciar o gráfico, ou seja, vai ter pelo menos um ponto em comum com o gráfico (no ponto x_0 determinado). Como a reta é infinita, ela poderá se encontrar com o gráfico em outros pontos também. No caso do gráfico do 1º grau, ela (a reta tangente) terá todos os seus pontos em comum com o gráfico, para qualquer valor de x_0.

Atividade – Ficha XII – Anotações de aula. Principais idéias abordadas até a 6º aula.

Antes de relacionarmos as principais idéias trabalhadas durante o curso, no quadro branco, pedimos a cada participante para fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha.

M3 destacou:

1. TVm = coeficiente angular = tg α

2. A reta que determina os intervalos do gráfico pode ser a mesma reta do gráfico (função polin. do 1º grau) ou secante em 2 pontos do gráfico (função polin. do 2º, 3º... grau).

3. Quanto menor o intervalo observado, maior a precisão da análise do comportamento do gráfico.

4. A reta tangente ao gráfico tangencia o mesmo em apenas um ponto, mas pode ser secante ao gráfico (cortá-lo, tocá-lo) em outros pontos.

5. A reta tangente pode ser paralela ao ponto (eixo x, paralela ao eixo x) quando ela tangenciar o ponto x que determina o ponto máx. ou o ponto mín. do gráfico ou o ponto x em que há mudança na concavidade do gráfico.

Atividade – Ficha XIII

A aluna resolveu satisfatoriamente os exercícios desta atividade. Utilizando a calculadora e uma folha para rascunho obtém, por aproximação, o valor da velocidade instantânea em $t = 2\,s$.

t = 1,98 e t = 2,0100	7,99 m/s
t = 1,99 e t = 2,0010	7,999 m/s
t = 1,999 e t = 2,0009	7,9998 m/s
t = 1,9999 e t = 2,0001	8 m/s

t = 2	velocidade instantânea v_i = aprox. 8 m/s

A seguir fez o mesmo cálculo utilizando fórmula conhecida do curso de Física, como sugeriu o exercício.

$$S(t) = S_0 + V_0 t + \frac{a}{2} t^2$$
$$S(t) = 3 + 0t + \frac{4}{2} t^2$$

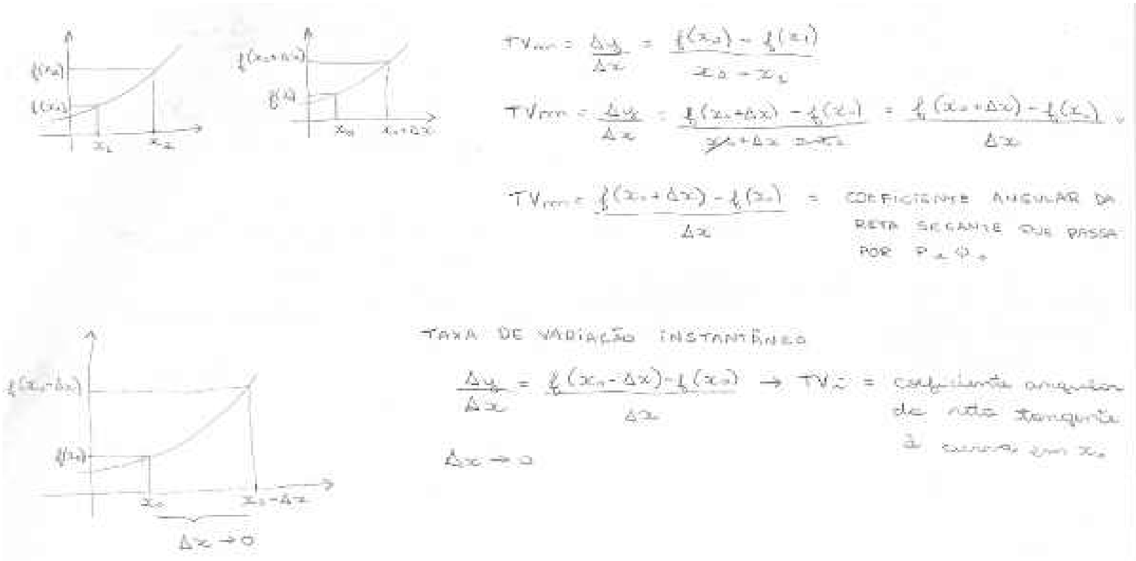
$$\rightarrow V_i(2) = 0 + 4 \cdot 2 = 8 \text{ m/s}$$
$$\rightarrow V_i(3) = 0 + 4 \cdot 3 = 12 \text{ m/s}$$

Atividade – Ficha XIV

M3 respondeu satisfatoriamente aos exercícios fazendo a associação do coeficiente angular da reta tangente traçada à curva com a velocidade instantânea no instante t considerado.

Ficha XV – Anotações de aula. Expressão algébrica da taxa de variação instantânea.

Utilizando a expressão para o cálculo da taxa de variação média, a idéia de retidão local e o auxílio da seqüência de imagens da seção 2.2.3.5, foi apresentada a expressão algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea.



Atividade – Ficha XVI

Passamos, nesta atividade ao cálculo da expressão da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares, utilizando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$.

Pedimos para cada aluno dar uma explicação geométrica a expressão encontrada relativa à TVi da função constante (1) e justificar porque a expressão da TVi da polinomial do 1º grau já era prevista (2).

(1)

$$TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k-k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 = TV_i$$

$\Delta x \to 0$

Uma função constante apresenta mesma imagem (y) para qualquer valor de x do gráfico, de modo que $\Delta y = 0$ sempre, logo, $\frac{0}{\Delta x} = 0 = TV_i$ para $\Delta x \to 0$.

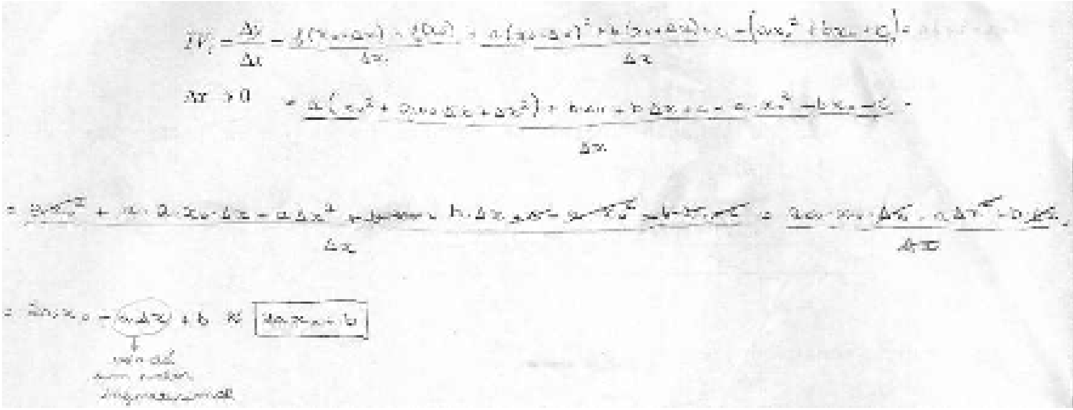
(2)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0+\Delta x)+b-(a\cdot x_0+b)}{\Delta x} = \frac{a x_0 + a\Delta x + b - a x_0 - b}{\Delta x} = a = TV_i$$

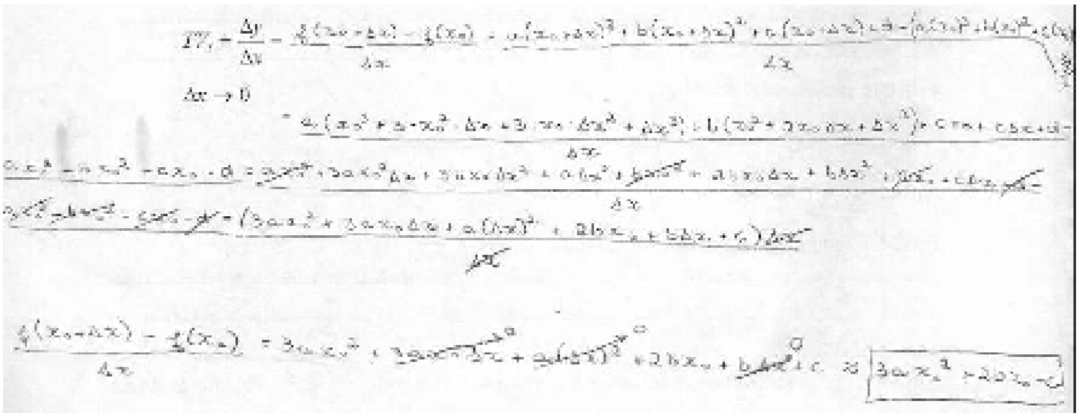
$\Delta x \to 0$

Sim, porque como a função é do 1º grau, a função tem uma variação constante, de modo que a inclinação da reta será a mesma, independente do intervalo analisado. Sendo $\underline{a}$ então a taxa de variação tanto para intervalos grandes (TVm) quanto para intervalos tendendo a 0 (TVi)

(3) Função polinomial do 2º grau:



(4) Função polinomial do 3º grau:



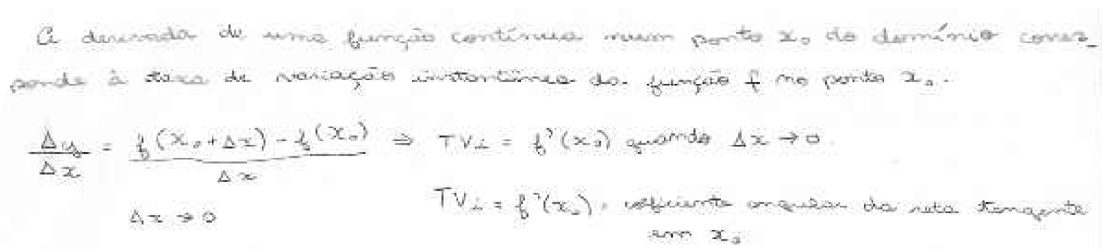
Atividade – Ficha XVII

M3 não resolveu o item (c) imediatamente. Usou a fórmula obtida para TVi ($2ax_0 + b$) da função polinomial do 2º grau.

c) $\boxed{2ax_0+b}$ Instante $t = 2s \Rightarrow V_i = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 = 8$ m/s

Instante $t = 3s \Rightarrow V_i = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 0 \rightarrow V_i = 12$ m/s

Ficha XVIII – Anotações de aula. O conceito de derivada.



A derivada de uma função contínua num ponto x_0 do domínio corresponde à taxa de variação instantânea da função f no ponto x_0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow TVi = f'(x_0) \text{ quando } \Delta x \to 0.$$

$\Delta x \to 0$

$TVi = f'(x_0)$ = coeficiente angular da reta tangente em x_0

Ficha XIX – Anotações de aula. O conceito de função derivada.

Chama-se função derivada de uma função f a uma função f' que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva, em qualquer ponto x pertencente ao domínio: $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$ quando $\Delta x \to 0$.

derivada da função

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função f em um ponto, passaremos a determinar a função derivada, que nos fornecerá a derivada num ponto qualquer em um intervalo I do domínio.

Para as funções apresentadas teremos: $\forall \in I \subset D(f)$

$\boxed{f(x)=k \qquad f'(x)=0}$

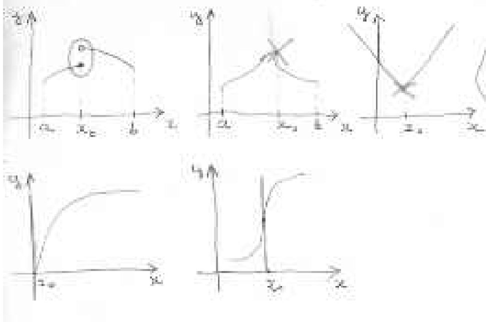
$\boxed{f(x)=ax+b \qquad f'(x)=a}$

$\boxed{f(x)=ax^2+bx+c \qquad f'(x)=2ax+b}$

$\boxed{f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \qquad f'(x)=3ax^2+2bx+c}$

Apresentar contra-exemplos.

Casos em que não há função derivada.



Se a função é um monômio, teremos:

$f(x)=a\cdot x^m$

$f'(x)=m\cdot a\cdot x^{m-1}$

Relacionamos as fórmulas obtidas para o cálculo da derivada de algumas funções polinomiais. Apresentamos a regra para obter a expressão algébrica da derivada de um monômio.

Atividades – Ficha XX

M3 respondeu satisfatoriamente a todos os exercícios da atividade 1(1ª parte) e da atividade 2 (2ª parte).

Soluções dadas aos exercícios da atividade 2.

(1)

$S(t)=5t^2$ $\qquad s'(t)=V_i(t)$

Solução

$m=2$ $\qquad s'(t)=m\cdot a\cdot x^{m-1}$

$a=5$ $\qquad s'(t)=2\cdot 5\cdot t^1$

$x=t$ $\qquad s'(1)=10\cdot 1^1$

$s'(1)=10\ m/s$

Resposta: $V_i(1)=10\ m/s$

(2) Utilizou o conceito de derivada para solucionar o exercício.

Solução

$V_i \rightarrow V_i = 0$ quando atinge-se h máx.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b \Rightarrow h'(t) = 2\cdot(-10)\cdot t + 100$

$0 = -20t + 100$

$20t = 100$

$t = 5s$

$* a = -10$

$* x = t$

$* b = 100$

$h(5) = -10\cdot 5^2 + 100\cdot 5$

$h(5) = -10\cdot 25 + 500$

$h(5) = -250 + 500$

$h(5) = 250$ m.

Resposta: 5 segundos depois. Essa altura é 250 m.

(3)

$S'(t) = V_i(t) = 3\cdot 2\cdot t^2 + 1\cdot t^0 + 0 \Rightarrow V_i(t) = 6t^2 + 1$

$S(t) = 2t^3 + t + 1$

$V_i(2) = 6\cdot 2^2 + 1 = 6\cdot 4 + 1 = 24 + 1 = 25$

$* V_i(t) = 6t^2 + 1$

$V_i'(t) = a(t) = 2\cdot 6\cdot t^1 + 0$

$a(t) = 12t$

$a(3) = 12\cdot 3$

$a(3) = 36$

$V_i(t) = 6t^2 + 1$

$V_i(2) = 25$ m/s

$a(t) = 12t$

$a(3) = 36$ m/s^2

(4)

Solução:

$m(x) = c'(x) = 1\cdot 25\cdot x^0 + 0$

$m(x) = 25$

Resposta: $m(x) = 25$

(5)

Solução:

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$ = coeficiente angular da reta tangente

$f'(1) = 2\cdot 1 = 2 \rightarrow$ coef. angular " " "

$f(1) = 1^2$

$f(1) = 1 \Rightarrow (1, 1)$

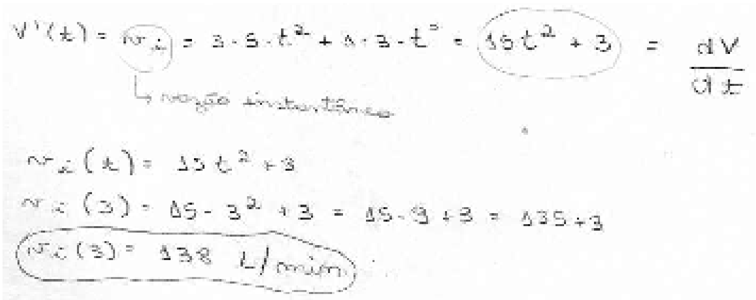
Equação da reta tangente: $ax + b = y \Rightarrow 2x + b = y$

coordenadas $(1,1)$ $\begin{cases} 2\cdot 1 + b = 1 \\ b + 2 = 1 \\ b = -1 \end{cases}$

$y = 2x - 1$

Resposta: Equação da reta tangente $\Rightarrow y = 2x - 1$

(6)


$V'(t) = v_i = 3 \cdot 5 \cdot t^2 + 1 \cdot 3 \cdot t^0 = 15t^2 + 3 = \frac{dV}{dt}$

↳ razão instantânea

$v_i(t) = 15t^2 + 3$

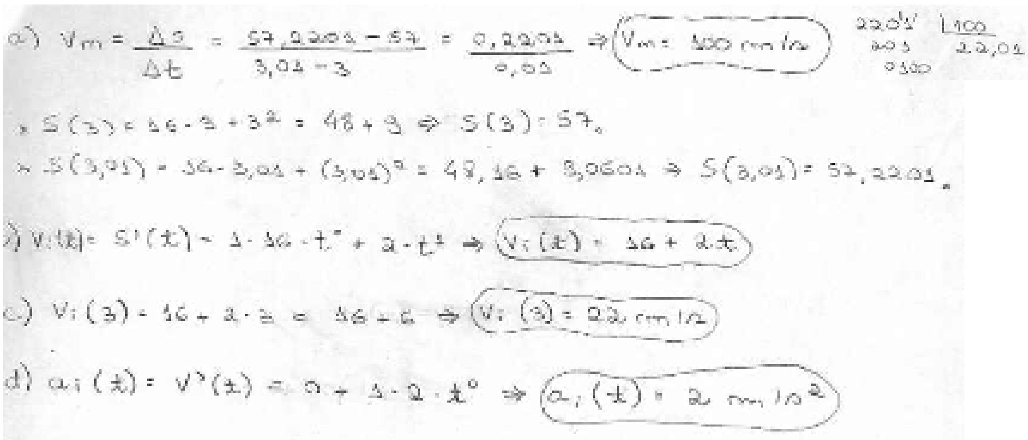
$v_i(3) = 15 \cdot 3^2 + 3 = 15 \cdot 9 + 3 = 135 + 3$

$v_i(3) = 138$ L/min

Atividade – Ficha XXI – Exercícios para revisão.

M3 resolveu corretamente os três exercícios desta atividade. Utilizou a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$ adequadamente para determinar a expressão de $h'(x)$.

(1)


a) $V_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{57,2201 - 57}{3,01 - 3} = \frac{0,2201}{0,01} \Rightarrow V_m = 100$ cm/s

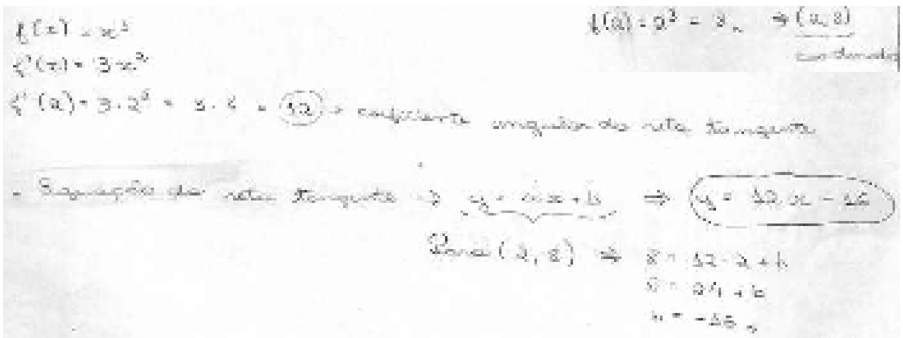
* $S(3) = 16 \cdot 3 + 3^2 = 48 + 9 \Rightarrow S(3) = 57$.
* $S(3,01) = 16 \cdot 3,01 + (3,01)^2 = 48,16 + 9,0601 \Rightarrow S(3,01) = 57,2201$.

b) $V_i(t) = S'(t) = 1 \cdot 16 \cdot t^0 + 2 \cdot t^1 \Rightarrow V_i(t) = 16 + 2t$

c) $V_i(3) = 16 + 2 \cdot 3 = 16 + 6 \Rightarrow V_i(3) = 22$ cm/s

d) $a_i(t) = V'(t) = 0 + 1 \cdot 2 \cdot t^0 \Rightarrow a_i(t) = 2$ m/s²

(2)


$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12 \rightarrow$ coeficiente angular da reta tangente

$f(2) = 2^3 = 8 \Rightarrow (2, 8)$ coordenada

- Equação da reta tangente $\Rightarrow y = ax + b \Rightarrow y = 12x - 16$

Para $(2, 8) \Rightarrow 8 = 12 \cdot 2 + b$

$8 = 24 + b$

$b = -16$

(3)

Pela definição, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \left(\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} =$

$\Delta x \to 0$

$$= \frac{1}{x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2} - \frac{1}{x_0\cdot\Delta x} = \frac{x_0\cdot\Delta x - (x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2)}{x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2\,(x_0\cdot\Delta x)} = \frac{x_0\cdot\Delta x - x_0\Delta x - \Delta x^2}{(x_0\cdot\Delta x)(x_0\cdot\Delta x)+\Delta x^2(x_0\cdot\Delta x)} =$$

$x_0\cdot\Delta x$ $\quad$ $x_0\cdot\Delta x+\Delta x^2$

$$= \frac{\cancel{x_0\cdot\Delta x}-\cancel{x_0\Delta x}-\Delta x^2}{x_0^2\cdot\Delta x^2+\Delta x^2\,x_0\cdot\cancel{\Delta x}} = \frac{-\Delta x}{x_0^2\cdot\cancel{\Delta x}+\Delta x\cdot x_0} = \frac{-1}{x_0(x_0+\Delta x)} = \boxed{\frac{-1}{x_0^2}}$$

$\Delta x \to 0$ $\quad f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

(*) $x=1 \Rightarrow f'(1) = \frac{-1}{1^2} = \frac{-1}{1} = -1$ → coeficiente angular da reta tangente no ponto $x=1$

Equação da reta tangente $\Rightarrow y = ax+b \Rightarrow 1 = -1\cdot 1 + b \Rightarrow b = 2$.

$\boxed{y=-x+2}$

(*) $x=-1 \Rightarrow f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = \frac{-1}{1} = -1$ → coeficiente angular da reta tangente no ponto $x=-1$.

$y = ax+b$
$-1 = -1\cdot(-1)+b$
$-1 = 1+b \Rightarrow b = -2$.

$\boxed{y=-x-2}$

$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1 \Rightarrow (-1,-1)$

$f(1) = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow (1,1)$

Participante M4

Atividade – Ficha II

M4 apresentou respostas satisfatórias aos três exercícios desta atividade.

Atividades 1, 2 e 3 – Ficha III

A aluna apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1, 2 e 3.

Respostas dadas a atividade 1:

Reservatório (1)

No início a altura da água sobe mais rapidamente do que no final, no meio é mais lento e no final é mais lento ainda.

Reservatório (2)

Início é lentamente, acelerando conforme a variação da altura.

Reservatório (3)

Uniformemente no início, meio e fim.

Reservatório (4)

Rapidamente no início, lentamente no meio e rapidamente no final.

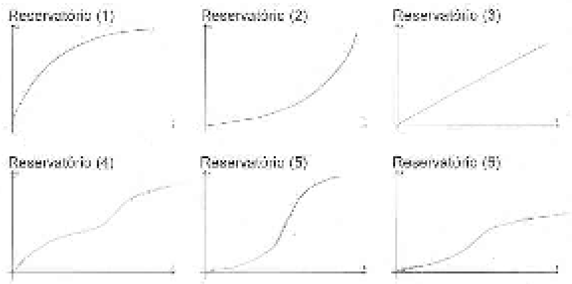
Reservatório (5)

Lentamente no início, rapidamente no meio e lentamente no final.

Reservatório (6)

Lentamente no início, um pouco mais rápido no meio e igualmente lento no final (como no início).

Esboço dos gráficos da atividade 3.



Atividades 1 e 2 – Ficha IV

M4 apresentou respostas satisfatórias aos exercícios das atividades 1 e 2.

Ficha V – Anotações de aula. Definição de taxa de variação média.

M4 fez registro incompleto em relação ao coeficiente angular de ***s***.

Escreveu: $a =$ tangente de α .

A **taxa de variação média** de uma função *f* no intervalo $[x_A\,;\,x_B]$ com $x_A < x_B$ é:

$$TV_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} ,$$

sendo $\Delta y =$ diferença dos y e $\Delta x =$ variação do x

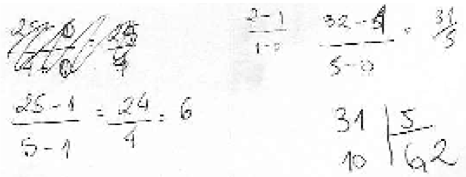
O coeficiente angular da reta **s** é:

$a =$ tangente de α

intervalo $[x_A\,;\,x_B]$.

Atividade – Ficha VI

M4 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade. No item (1), utilizou a média aritmética das TV_m obtidas para determinar a variação média da função no intervalo $[0;5]$. Calculou, equivocadamente, a taxa de variação média da função g no intervalo $[1; 5]$.



Referiu-se, no item (2), ao coeficiente angular como valor da reta.

Atividade – Ficha VII

M4 apresentou respostas satisfatórias a essa atividade.

Atividade – Ficha VIII

A aluna não participou dessa atividade. Faltou.

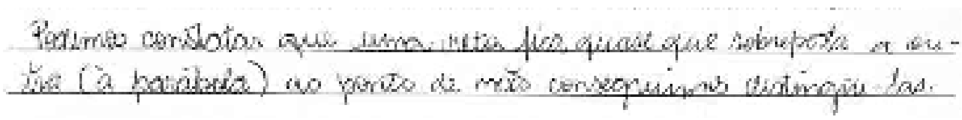
Atividade – Ficha IX

M4 apresentou respostas satisfatórias a essa atividade.

Atividades – Ficha X

M4 não apresentou dificuldades em manipular o programa Graphmatica. Depois de realizar as quatro atividades, foi pedido para responder a pergunta que se encontrava no final da ficha, cujo objetivo era verificar o entendimento da noção de retidão local e linearidade local.

M4 respondeu:



Atividade – Ficha XI

Na atividade 1, foi apresentada a seguinte pergunta: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

M4 respondeu, inicialmente, que a reta tangente a um gráfico o tocaria em infinitos pontos.

Após utilizar o programa Graphmatica para traçar tangente a um gráfico em diversas situações e destacar quantos pontos os gráficos teriam em comum, pedimos a participante que respondesse novamente a pergunta feita na atividade 1 e a seguir fizesse considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0.

M4 modificou a resposta dada à pergunta inicial. Respondeu que a reta tangente ao gráfico o tocaria em, pelo menos, um ponto e a seguir registrou:

Dependendo do grau da função, a reta tangente cortará em um ou mais pontos.

Atividade – Ficha XII – Anotações de aula. Principais idéias abordadas até o 6º encontro.

Antes de relacionarmos as principais idéias trabalhadas durante o curso, no quadro branco, pedimos a cada participante para fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha.

M4 destacou apenas:

1. taxa de variação
2. tangente
3. análise do crescimento/decrescimento do gráfico
4. pontos que cortam os eixos

Atividade – Ficha XIII

M4 resolveu satisfatoriamente os exercícios desta atividade. Utilizando a calculadora e uma folha para rascunho obteve, por aproximação, o valor da velocidade instantânea em $t = 2s$.

t = 1,98 e t = 2,0100	7,98
t = 1,99 e t = 2,0010	7,982
t = 1,999 e t = 2,0009	7,9998
t = 1,9999 e t = 2,0001	8

t = 2	velocidade instantânea v_i = 8m/s

A seguir fez o mesmo cálculo utilizando fórmula conhecida do curso de Física, como sugeriu o exercício.

$$a = 4\,m/s^2 \qquad v_i(2) = 0 + 4\cdot 2$$
$$s_0 = 3 \qquad \boxed{v_i(2) = 8\,m/s}$$
$$v_0 = 0\,m/s$$
$$v_i(3) = 0 + 4\cdot 3$$
$$\boxed{v_i(3) = 12\,m/s}$$

Atividade – Ficha XIV

A aluna respondeu satisfatoriamente aos exercícios fazendo a associação correta do coeficiente angular da reta tangente traçada à curva com a velocidade instantânea no instante t considerado.

Ficha XV – Anotações de aula. Expressão algébrica da taxa de variação instantânea.

Utilizando a expressão para o cálculo da taxa de variação média, a idéia de retidão local e o auxílio da seqüência de imagens da seção 2.2.6 apresentamos a expressão algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea.

$$TV_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$TV_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\cancel{x_0} + \Delta x - \cancel{x_0}} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$TV_m = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{coeficiente angular da reta que passa por P e Q.}$$

$$\text{Taxa de variação instantânea: } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow TV_i \Rightarrow \text{coeficiente angular da reta tangente à curva em } x_0.$$

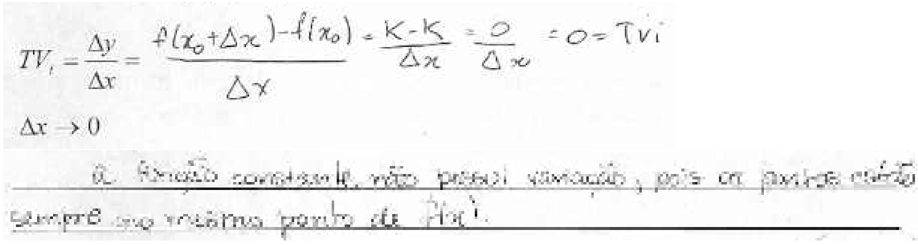
$$\Delta x \rightarrow 0$$

Atividade – Ficha XVI

Passamos, nesta atividade, ao cálculo da expressão da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares, utilizando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \rightarrow 0$.

Pedimos que cada aluno desse uma explicação geométrica para a expressão encontrada para TVi da função constante (1) e que justificasse porque a expressão da TVi da polinomial do 1º grau já era prevista (2).

(1)

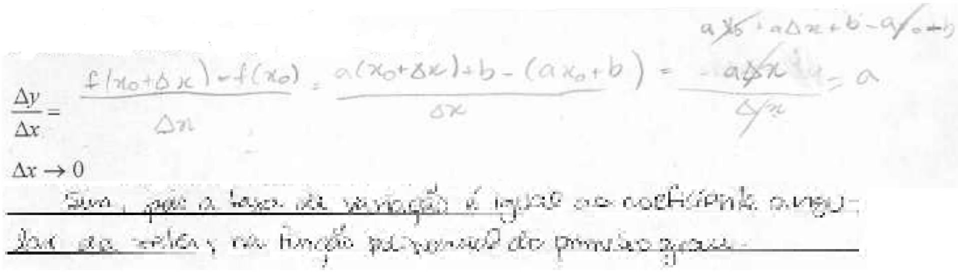


$TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{K-K}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 = TV_i$

$\Delta x \to 0$

a função constante não possui variação, pois os pontos estão sempre no mesmo ponto de f(x).

(2)

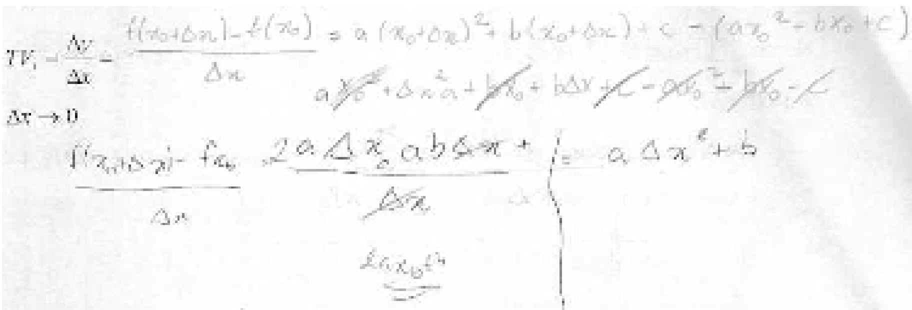


$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0+\Delta x)+b-(ax_0+b)}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$

$\Delta x \to 0$

Sim, pois a taxa de variação é igual ao coeficiente angular da reta, na função polinomial do primeiro grau.

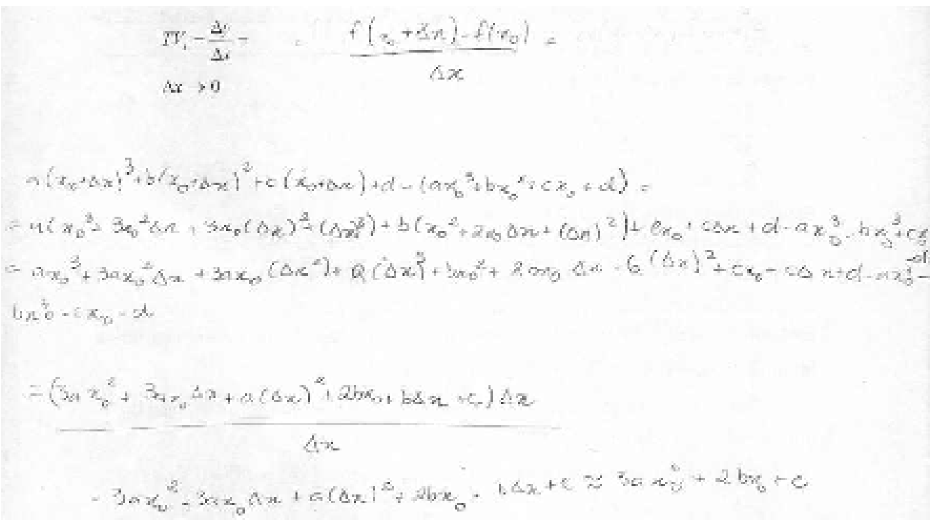
(3) Função polinomial do 2º grau



$TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = a(x_0+\Delta x)^2 + b(x_0+\Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)$

$\Delta x \to 0$

(4) Função polinomial do 3º grau



$TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} =$

$\Delta x \to 0$

$a(x_0+\Delta x)^3 + b(x_0+\Delta x)^2 + c(x_0+\Delta x) + d - (ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d) =$

$= \frac{(3ax_0^2 + 3ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + 2bx_0 + b\Delta x + c)\Delta x}{\Delta x}$

$= 3ax_0^2 + 3ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + 2bx_0 + b\Delta x + c \approx 3ax_0^2 + 2bx_0 + c$

Atividade – Ficha XVII

M4 não resolveu o item (c) imediatamente. Usa a fórmula obtida para TVi ($2ax_0 + b$) da função polinomial do 2º grau.

c) $2ax_0 + b = TV_i$ $\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 2 + 0 = 8$ $t = 2$

$\Rightarrow 2 \cdot 2 \cdot 3 + 0 = 12$ $t = 3$

Ficha XVIII – Anotações de aula. O conceito de derivada.

A derivada de uma função contínua num ponto do domínio correspon-
de à taxa de variação instantânea da função f no ponto x_0.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \rightarrow TV_i = f'(x_0) \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0.$$

Ficha XIX – Anotações de aula. O conceito de função derivada.

Chama-se função derivada de uma função f a uma função f' que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva, em qualquer ponto x pertencente ao domínio:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow f'(x) \text{ quando } \Delta x \rightarrow 0.$$

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função f em um ponto, passaremos a determinar a função derivada, que nos fornece a derivada num ponto qualquer em um intervalo I do domínio.

Para as funções apresentadas teremos: $\forall \in I \subset D(f)$

$f(x) = k \rightarrow f'(x) = 0$

$f(x) = ax + b \rightarrow f'(x) = a$

$f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow f'(x)\ 2ax + b$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f'(x) = ma \cdot x^{m-1}$

Apresentar contra-exemplos.

M4 não fez registro dos contra-exemplos apresentados para funções que não possuem derivada num ponto x_0 do domínio.

Relacionamos as fórmulas obtidas para o cálculo da derivada de algumas funções polinomiais. Apresentamos a regra para obter a expressão algébrica da derivada de um monômio.

Atividades – Ficha XX

M4 apresentou respostas satisfatórias aos exercícios (1), (2) e (4) da atividade 1(1ª parte). No exercício (3), determinou corretamente a derivada em x_0, mas em x_1 e x_2 escreveu $f'(x_1) = 6$ e $f'(x_2) = 6$.

Na atividade 2(2ª parte), M4 procurou auxílio para a resolução dos exercícios. Após uma revisão dos conceitos e, a seguir, das expressões algébricas, passou a utilizar as fórmulas para obter as derivadas dos polinômios. Apresentou soluções corretas à maioria dos exercícios, no entanto algumas das respostas revelaram, ainda, alguma confusão em relação ao conceito estudado.

Respostas dadas aos exercícios:

(1)

$f(x) = ax^m$

$f'(x) = m\,a\,x^{m-1}$

$S'(t) = v(t)$

$f'(x) = m\,a\,x^{m-1}$

$S = 5t^2$

$v = 2 \cdot 5 \cdot t$

$v = 10t \Longrightarrow t = 1$

$10 \cdot 1 = 10$

Resposta: $v = 10\,m/s$

(2)

$h'(t) = v(t)$

$= -20t + 100$

$100 = 20t$

$t = \frac{100}{20} = 5$

$h(5) = -10 \cdot 5^2 + 100 \cdot 5$

$h(5) = -250 + 500$

$h(5) = 250\,m$

Resposta: $t = 5s$ / $S = 250\,m$

(3)

$s'(t) = v(t)$

$v(t) = 3(2t)^2 + 1$

$v(t) = 3 \cdot 2t^2 + 1 = \boxed{6t^2 + 1}$

$v(2) = 6 \cdot 2^2 + 1 = \boxed{25\,m/s}$

$6t^2 + 1$

$v'(t) = a(t) = 2 \cdot 6t = \boxed{12t}$

$a(3) = 12 \times 3 = \boxed{36\,m/s^2}$

$3ax^2 + 2bx + c$

(4)

$C(x) = 3000 + 25x$

$C'(x) = m(x) = 25$

(5)

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \rightarrow 2x + b$

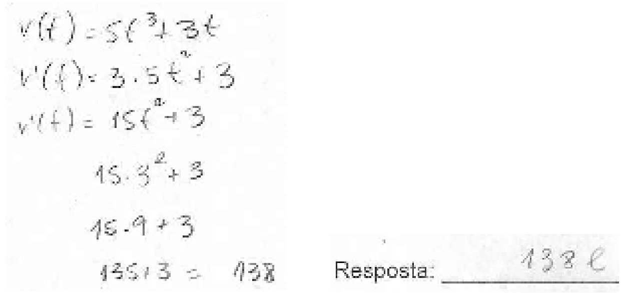
$1 = 2 \cdot 1 + b$

$1 - 2 = b$

$b = -1$

Resposta: $f(x) = 2x - 1$

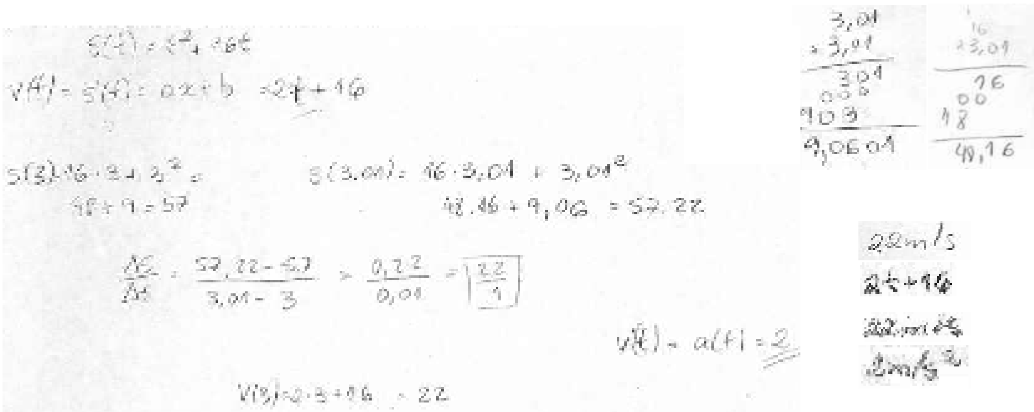
(6)



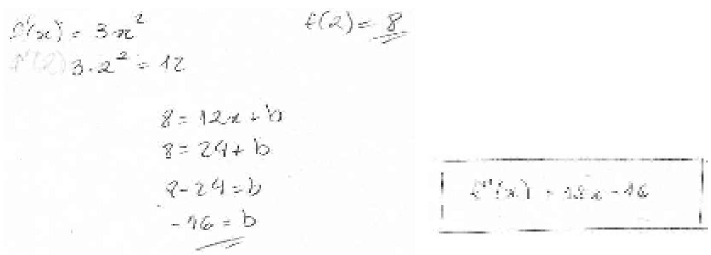
Atividade – Ficha XXI – Exercícios de revisão**.**

M4 resolve satisfatoriamente o exercício (1) e no exercício (2) repete o mesma notação (errada) para representar a equação da reta, apesar da correção feita no exercício anterior (Ficha XX – 5). O exercício (3) foi resolvido sob orientação.

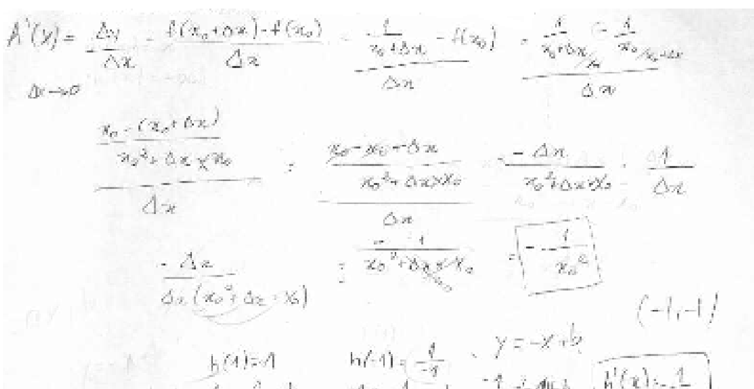
(1)



(2)



(3)



Participante R1

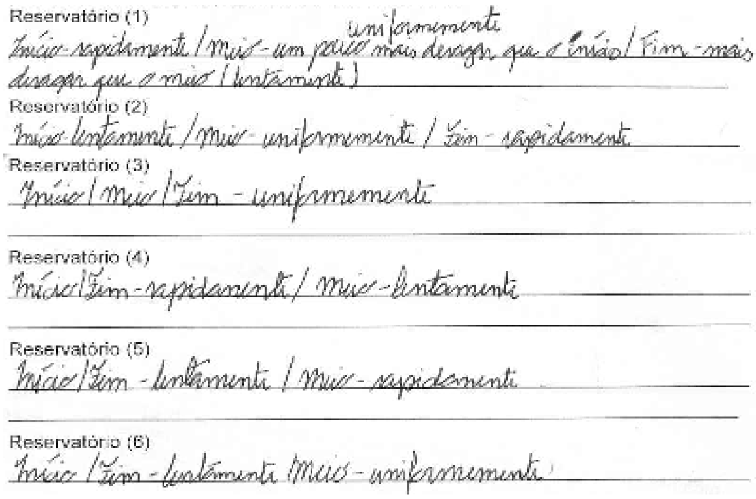
Atividade – Ficha II

R1 apresentou respostas satisfatórias apenas aos exercícios (1) e (3). No exercício (2), marca incorretamente a letra (a).

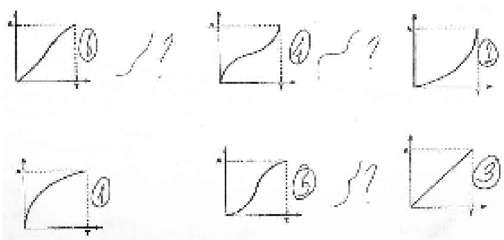
Atividades 1, 2 e 3 – Ficha III

O aluno respondeu corretamente a maioria dos exercícios das atividades 1, 2 e 3. Considera, na atividade 1, que o reservatório (2) varia uniformemente no meio do processo. Na atividade 2, pareceu não aceitar a representação gráfica apresentada para a variação da altura nos potes (4), (5) e (6).

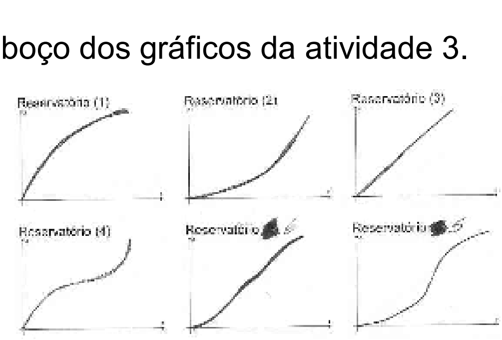
Respostas dadas a atividade 1.


Reservatório (1)
Início-rapidamenti / Meio - um pouco uniformementi mais devagar que o Início / Fim - mais devagar que o meio (lentamenti)
Reservatório (2)
Início lentamenti / Meio - uniformementi / Fim - rapidamenti
Reservatório (3)
Início / Meio / Fim - uniformementi
Reservatório (4)
Início/Fim - rapidamenti / Meio - lentamenti
Reservatório (5)
Início/Fim - lentamenti / Meio - rapidamenti
Reservatório (6)
Início / Fim - lentamenti Meio - uniformementi

(2)



Esboço dos gráficos da atividade 3.



Atividades 1 e 2 – Ficha IV

R1 apresentou resultado parcialmente satisfatório aos exercícios das atividades 1.

Note que, no intervalo $[0;1]$, a função variou 1 unidade; no intervalo $[1;2]$, ela variou 2 unidades; e no intervalo $[2;3]$, variou 6 unidades.

Em geral, chamamos de *taxa de variação média* (TV_m) de uma função f, num intervalo de seu domínio, o quociente entre a variação (Δy) de $f(x)$ e a variação (Δx) da variável x nesse intervalo.

$$\frac{1-0}{1-0}=1 \quad \frac{9-3}{3-2}=\frac{6}{1}=6 \quad \frac{3-1}{2-1}=\frac{2}{1}2$$

Ficha V – Anotações de aula. Definição de taxa de variação média.

A **taxa de variação média** de uma função f no intervalo $[x_A;\ x_B]$ com $x_A < x_B$ é:

$$TV_m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

sendo $\Delta y = f(x_2)-f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$

O coeficiente angular da reta **s** é:

$$a = tag\,x = \frac{\Delta y}{\Delta x} = TVm$$

intervalo $[x_A;\ x_B]$.

Atividade – Ficha VI

R1 não apresentou respostas satisfatórias a todos os itens desta atividade. Calculou corretamente a taxa de variação média nos intervalos parciais, porém, determinou, de forma equivocada, as velocidades médias das funções f, g e h no intervalo $[0;5]$.

x no intervalo	Taxa de variação média de f ($f(x) = 2x$)	Taxa de variação média de g ($g(x) = x^2$)	Taxa de variação média de h ($h(x) = 2^x$)
$[0;1]$	2	1	2
$[1;2]$	2	3	2
$[2;3]$	2	5	4
$[3;4]$	2	7	8
$[4;5]$	2	9	16
	A variação média de f é 2	A variação média de g é $\frac{8}{5}$	A variação média de h é $\frac{14}{5}$

Assim, no intervalo $[0;\ 5]$ apresentou para a função g, $TV_m = \frac{9-1}{5-0} = \frac{8}{5}$ e para a função h $TV_m = \frac{16-2}{5-0} = \frac{14}{5}$.

Referiu-se, no item (2), ao coeficiente angular como constante da reta.

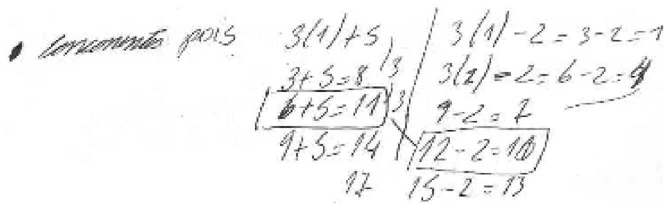
Atividade – Ficha VII

R1 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade.

Atividade – Ficha VIII

O aluno apresentou algumas respostas incorretas aos exercícios desta atividade.

(1) – (f)



3) a) V(t) = 500 t

b)

3000	6
000	500

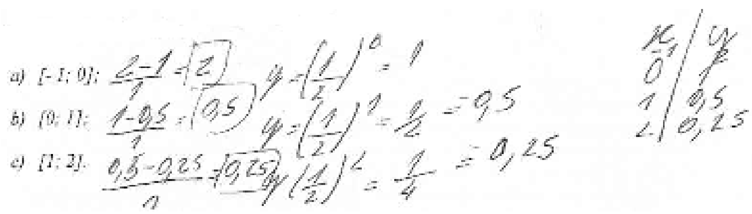
R$ 500 a.m..

Observamos que ao calcular a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ num intervalo $[x_1, x_2]$, não se preocupou com a ordem das imagens $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$ para obter a variação Δy.

4) a)

b)

5)



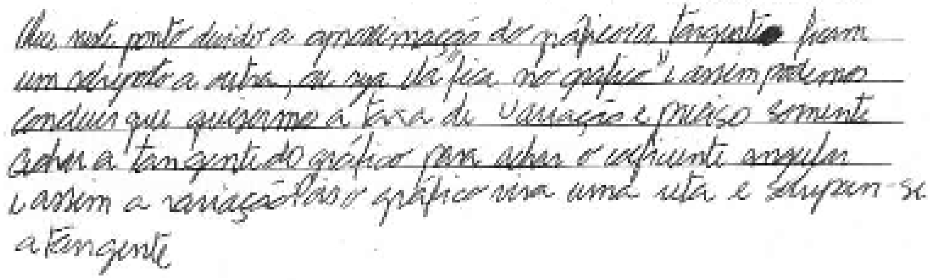
Atividade – Ficha IX

R1 respondeu satisfatoriamente a essa atividade.

Atividades – Ficha X

R1 não apresentou dificuldades em manipular o programa Graphmatica. Depois de realizar as quatro atividades, foi pedido que respondessem à pergunta que se encontrava no final da ficha, cujo objetivo era verificar o entendimento da noção de retidão local e linearidade local.

R1 respondeu:



Em cada ponto devido a aproximação do gráfico à tangente fica um adjacente a outra, ou seja ela fica no gráfico e assim podemos concluir que quisermos a taxa de variação é preciso somente achar a tangente do gráfico para achar o coeficiente angular e assim a variação do gráfico vira uma reta e sobrepõe-se a tangente

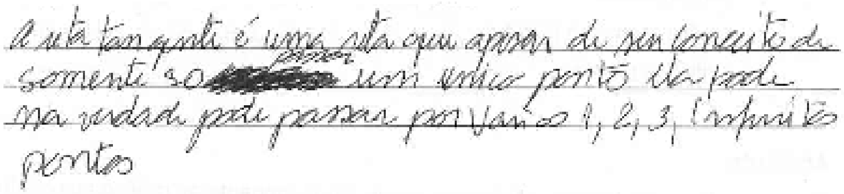
Atividade – Ficha XI

Na atividade 1 foi apresentada a seguinte pergunta: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

R1 respondeu inicialmente que a reta tangente a um gráfico o tocaria em um único ponto.

Após utilizar o programa Graphmatica para traçar tangente a um gráfico em diversas situações e destacar quantos pontos os gráficos teriam em comum, pedimos a participante que respondesse novamente à pergunta feita na atividade 1 e a seguir fizesse considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0.

R1 modificou a resposta dada à pergunta inicial. Respondeu marcando todos os itens, ou seja, que a reta tangente poderia tocar o gráfico em um, dois, pelo menos um e infinitos pontos, a seguir registrou:

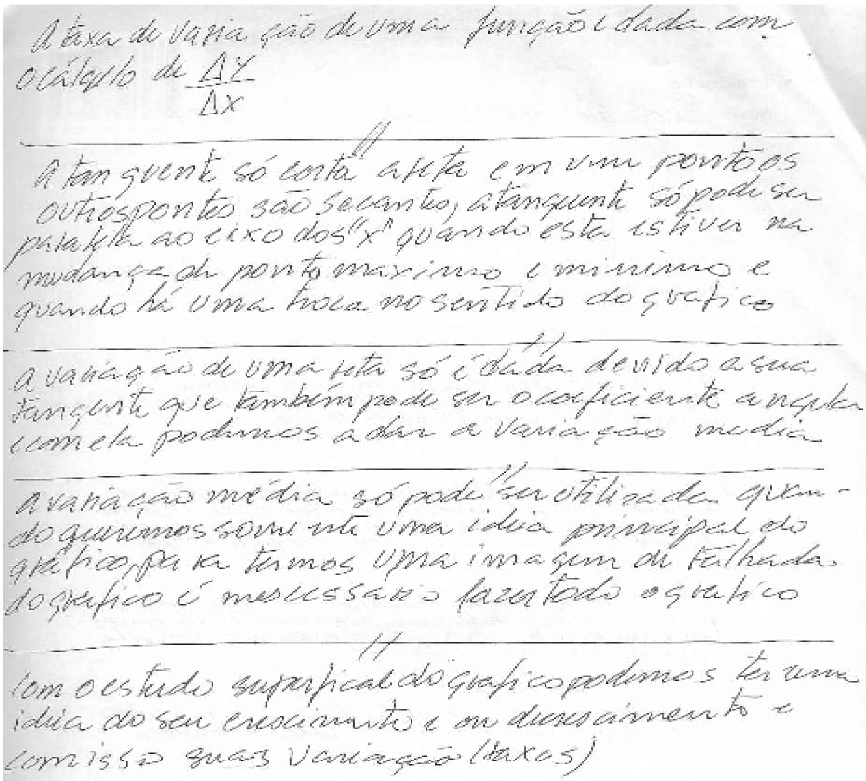


a reta tangente é uma reta que apesar de ser conceito de somente só passa um único ponto ela pode na verdade pode passar por vários 1, 2, 3, infinitos pontos

Atividade – Ficha XII – Anotações de aula. Principais idéias abordadas até o 6º encontro.

Antes de relacionarmos as principais idéias trabalhadas durante o curso, no quadro branco, pedimos a cada participante para fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha.

R1 destacou:



A taxa de variação de uma função é dada com o cálculo de $\frac{\Delta Y}{\Delta x}$

//

A tangente só corta a reta em um ponto os outros pontos são secantes, a tangente só pode ser paralela ao eixo dos "x" quando esta estiver na mudança de ponto máximo e mínimo e quando há uma troca no sentido do gráfico

//

a variação de uma reta só é dada devido a sua tangente que também pode ser o coeficiente angular com ela podemos achar a variação média

//

a variação média só pode ser utilizada quando queremos somente uma idéia principal do gráfico para termos uma imagem detalhada do gráfico é necessário fazer todo o gráfico

//

Com o estudo superficial do gráfico podemos ter uma idéia do seu crescimento e decrescimento e com isso suas variações (taxas)

Atividade – Ficha XIII

R1 resolveu satisfatoriamente os exercícios dessa atividade. Utilizando a calculadora e uma folha para rascunho obtém, por aproximação, o valor da velocidade instantânea em $t = 2s$.

t = 1,98 e t = 2,0100	7,98
t = 1,99 e t = 2,0010	7,982
t = 1,999 e t = 2,0009	7,9982
t = 1,9999 e t = 2,0001	7,9991

t = 2	velocidade instantânea v_i = 8

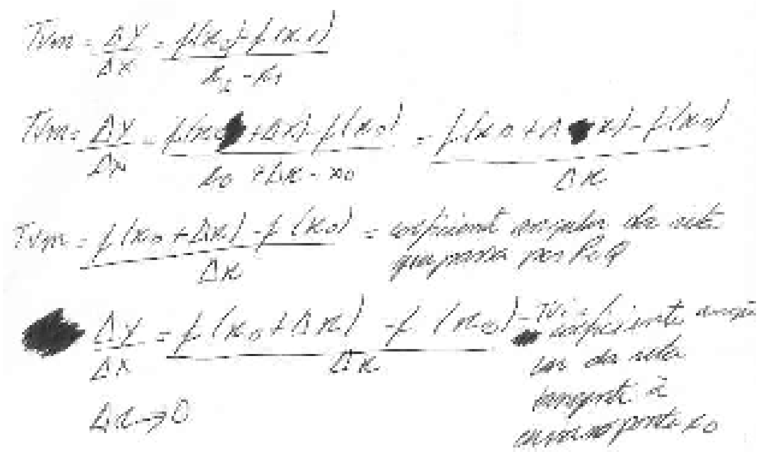
A seguir, fez o mesmo cálculo utilizando fórmula conhecida do curso de Física, como sugeriu o exercício.

Atividade – Ficha XIV

O aluno não encontrou dificuldades em manipular o programa para realizar atividade proposta. Respondeu satisfatoriamente aos exercícios fazendo a associação do coeficiente angular da reta tangente traçada à curva com a velocidade instantânea no instante t considerado.

Ficha XV – Anotações de aula. Expressão algébrica da taxa de variação instantânea.

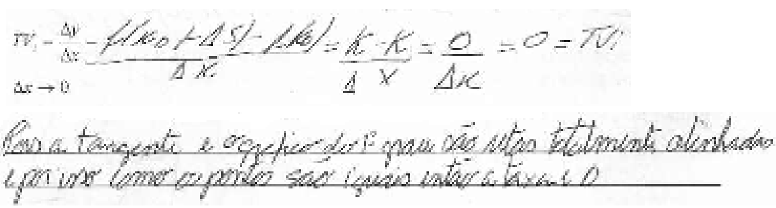
Utilizando a expressão para o cálculo da taxa de variação média, a idéia de retidão local e o auxílio da seqüência de imagens da seção 2.2.6 foi apresentada a expressão algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea.



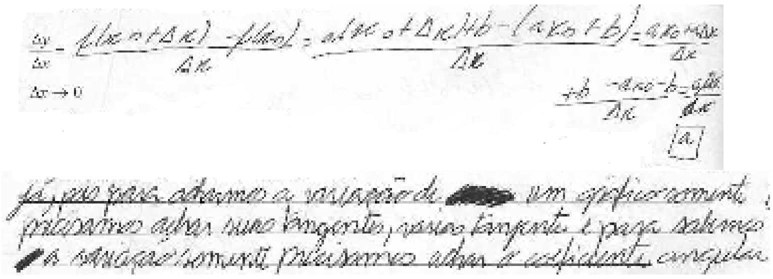
Atividade – Ficha XVI

Passamos, nessa atividade, ao cálculo da expressão da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares, utilizando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$.

Pedimos que cada aluno desse uma explicação geométrica para a expressão encontrada para TVi da função constante (1) e que justificasse porque a expressão da TVi da polinomial do 1º grau já era prevista (2).

(1) 

(2)

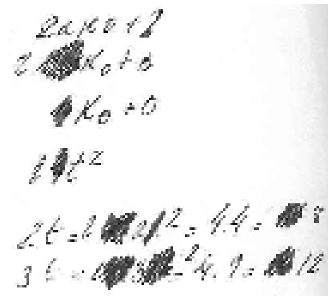


Neste momento, o aluno diz que não é necessário ter tanto trabalho para obter as expressões para a derivada da função polinomial do 2º e 3º grau pela razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$. Diz que este trabalho deve ser exclusivo do professor e que o aluno precisa conhecer apenas as fórmulas. O aluno deixa o resto da atividade em branco. Faz registro apenas no momento da correção.

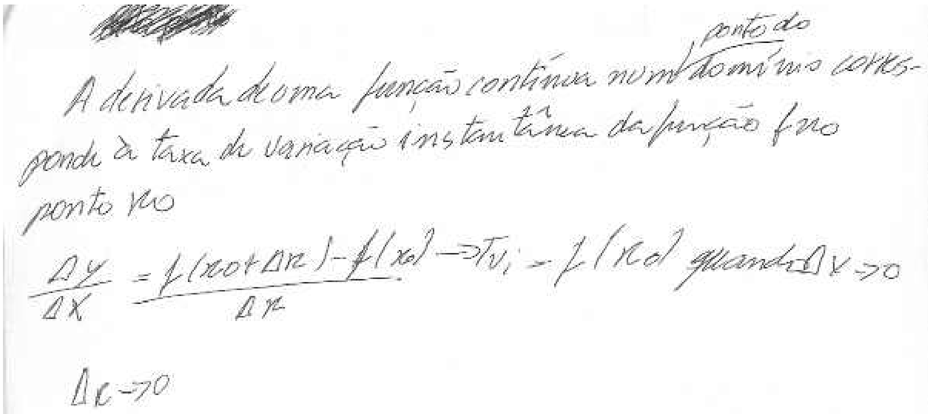
Atividade – Ficha XVII

R1 não consegue dar solução ao item (c). Tentou usar a fórmula obtida para TVi ($f'(x) = 2ax_0 + b$) da função polinomial do 2º grau.

c)



Ficha XVIII – Anotações de aula. O conceito de derivada.



A derivada de uma função contínua num ponto do domínio corresponde à taxa de variação instantânea da função f no ponto x0

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \Rightarrow TV_i = f(x_0)$ quando $\Delta x \to 0$

$\Delta x \to 0$

Ficha XIX – Anotações de aula. O conceito de função derivada

Tvi = $f'(x_0)$ = coeficiente angular da reta tangente em x_0

Chama-se função derivada de uma função f a uma função f' que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva, em qualquer ponto x pertencente ao domínio *

Apresentar contra-exemplos.

$\forall t \in I \subset D(f)$

$f(x) = K \qquad f'(x) = 0$

$f(x) = ax + b \qquad f'(x) = a$

$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 2ax + b$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$* \ \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \to f'(x)$ quando $\Delta x \to 0$

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função f em um ponto, passaremos a determinar a função derivada, que nos fornece a derivada num ponto[33] qualquer em um intervalo I do domínio

R1 não fez registro dos contra-exemplos apresentados para funções que não possuem derivada num ponto x_0 do domínio.

Relacionamos as fórmulas obtidas para o cálculo da derivada de algumas funções polinomiais. Apresentamos a regra para obter a expressão algébrica da derivada de um monômio.

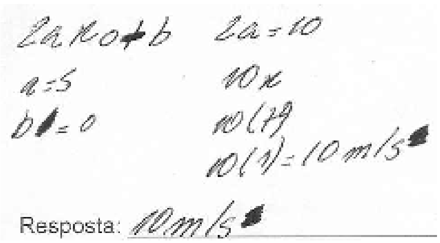
Atividades – Ficha XX

R1 apresentou respostas satisfatórias aos exercícios (1), (2) e (4) da atividade 1 (1ª parte). No exercício (3) , determinou corretamente a derivada em x_1 e x_2, mas não respondeu em x_0.

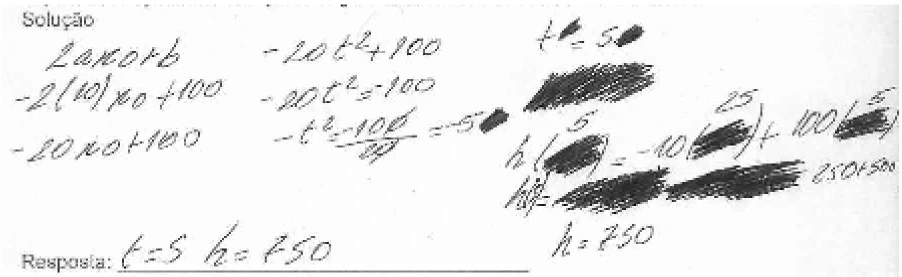
Na atividade 2 (2ª parte), apresentou cálculos confusos e incompletos aos exercícios (3) e (6). Não respondeu satisfatoriamente aos exercícios (1), (2), (4) e (5).

Respostas dadas a atividade 2.

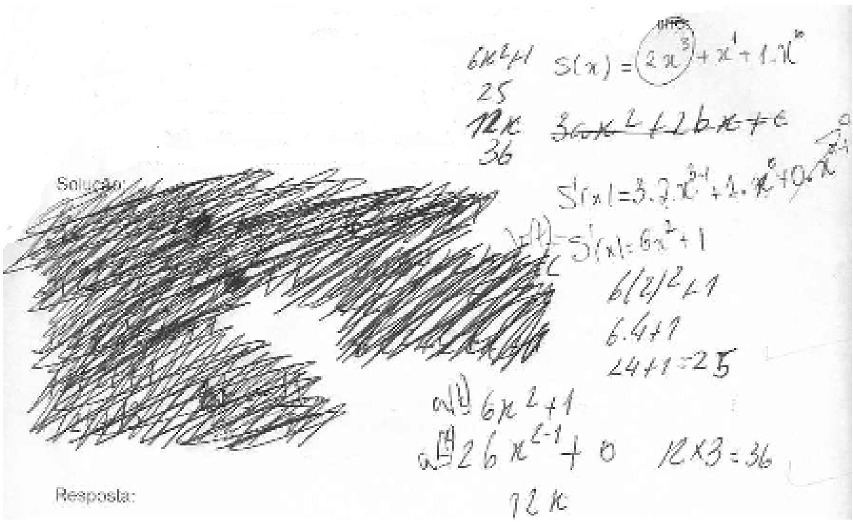
(1)



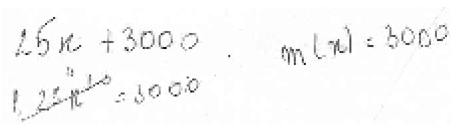
(2)



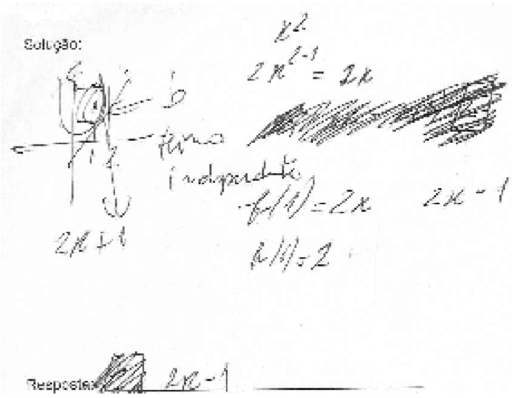
Ao resolver o exercício (3), deseja conhecer a regra para obter a expressão da derivada da função dada. Depois de ter feito uma exposição particular para o aluno, ele apresenta o seguinte cálculo:



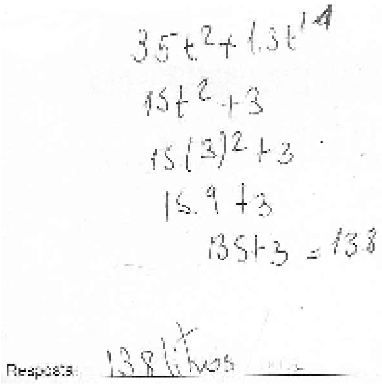
(4)



(5)


Solução:
x^2
$2x^{2-1} = 2x$
termo independente
$f'(t) = 2x$
$2x - 1$
$2x + 1$
$f''(t) = 2$
Resposta: $2x - 1$

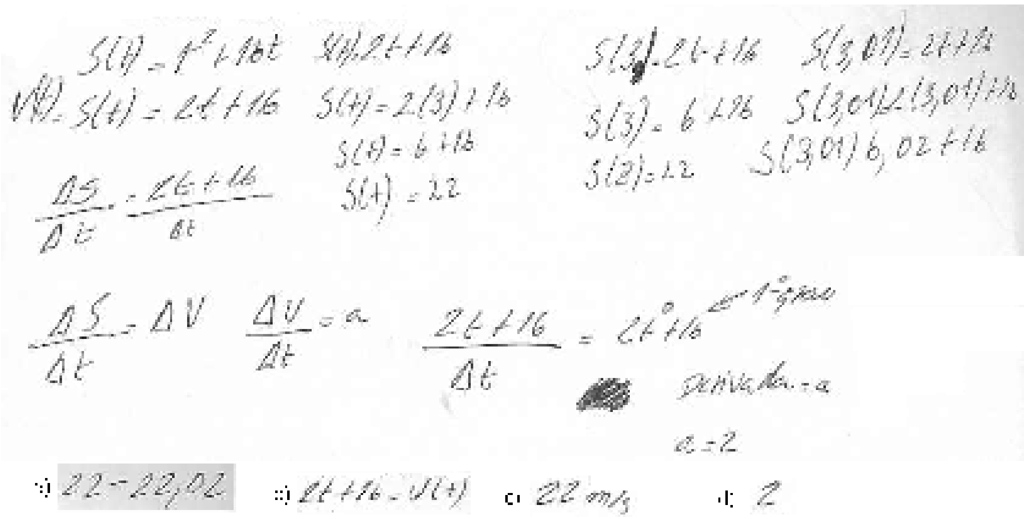
No exercício (6), mantém o mesmo procedimento:


$35t^2 + 1,3t^{14}$
$15t^2 + 3$
$15(3)^2 + 3$
$15.9 + 3$
$135 + 3 = 138$
Resposta: 138 litros

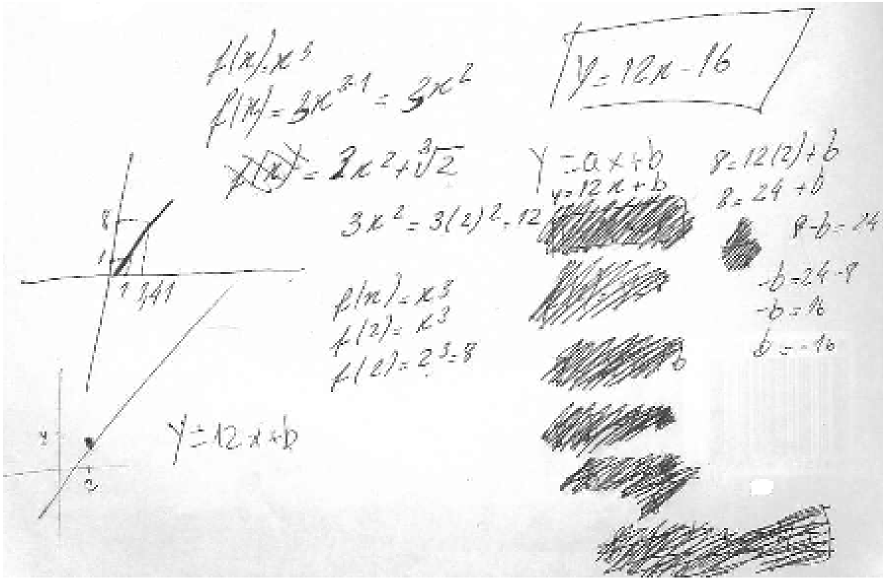
Atividade – Ficha XXI – Exercícios de revisão**.**

R1 resolveu o exercício (1) de forma parcialmente satisfatória. Utilizou mesma notação para identificar $S(t)$ e $V(t)$. O exercício (2) foi resolvido sob orientação. Não conseguiu resolver o exercício (3).

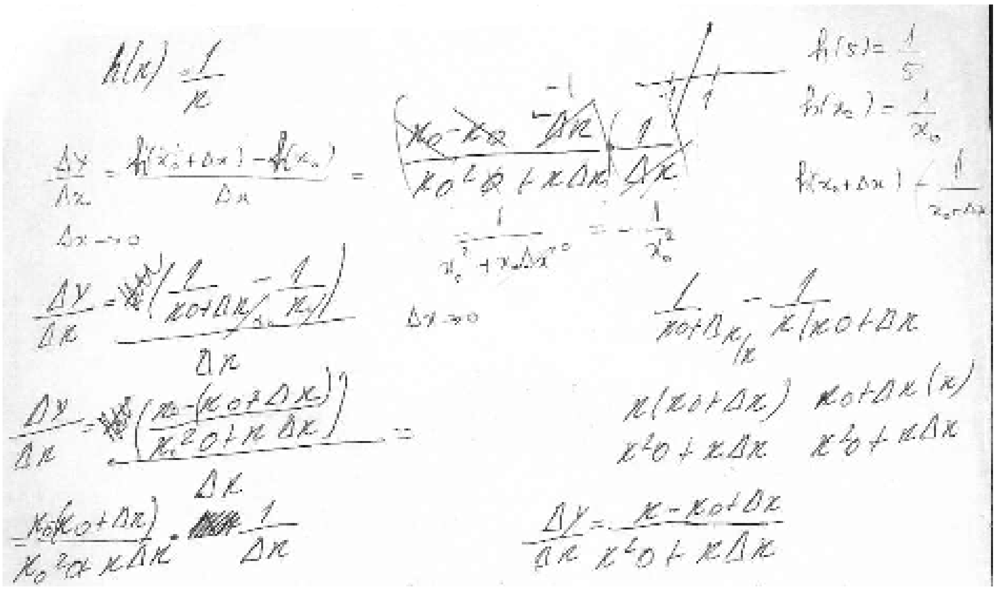
(1)


$S(t) = t^2 + 16t$ $S'(t) = 2t + 16$
$V(t) = S(t) = 2t + 16$ $S(t) = 2(3) + 16$
$S(t) = 6 + 16$
$S(t) = 22$
$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{2t + 16}{\Delta t}$
$S(3) = 2t + 16$ $S(3,01) = 2t + 16$
$S(3) = 6 + 16$ $S(3,01) = 2(3,01) + 16$
$S(3) = 22$ $S(3,01)\ 6,02 + 16$
$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \Delta V$ $\frac{\Delta V}{\Delta t} = a$ $\frac{2t + 16}{\Delta t} = 2t^0 + 16$ ← 1º grau
derivada = a
$a = 2$
a) $22 - 22,02$ b) $2t + 16 = V(t)$ c) 22 m/s d) 2

(2)



(3)



Participante R2

Atividade – Ficha II

R2 apresentou respostas satisfatórias aos três exercícios desta atividade.

Atividades 1, 2 e 3 – Ficha III

O aluno respondeu satisfatoriamente aos exercícios das atividades 1, 2 e 3.

Respostas dadas ao exercício 1

Reservatório (1)

A altura começa se elevando rapidamente e depois o crescimento diminui, fica mais lento.

Reservatório (2)

No início a altura se eleva devagar, no meio aumenta e no final a velocidade de crescimento é elevada.

Reservatório (3)

O crescimento é uniforme não há variação.

Reservatório (4)

No início há um crescimento rápido, no meio a ~~d~~ velocidade ~~volta~~ ~~a aumenta~~ diminui e no fim a velocidade volta a aumentar

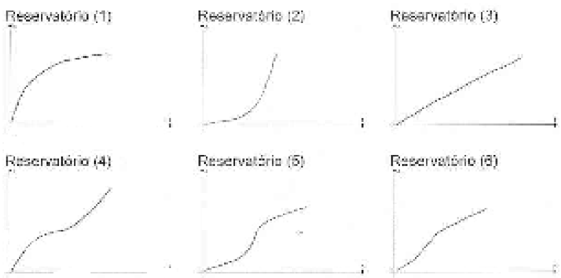
Reservatório (5)

No começo a velocidade é pequena, no meio o o aumento é rápido e ~~no final depois tor~~ no final é lento.

Reservatório (6)

Começa lento, no meio há uma leve acelera-ção e no fim a velocidade volta a cair.

Esboço dos gráficos da atividade 3.



Atividades 1 e 2 – Ficha IV

O aluno apresentou resposta insatisfatória a um item da atividade 2. Ao calcular a TV_m no intervalo $[2,7]$, o aluno não considerou as variações e escreveu $TV_m = \frac{35}{7} = 5\,m/s$.

Ficha V – Anotações de aula. Definição de taxa de variação média.

A **taxa de variação média** de uma função *f* no intervalo $[x_A ; x_B]$ com $x_A < x_B$

é:

$$TV_m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

sendo $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ e $\Delta x = x_2 - x_1$

O coeficiente angular da reta **s** é:

$a =$ tangente $=$ $tg\ \alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

intervalo $[x_A; x_B]$.

Atividade – Ficha VI

R2 resolveu satisfatoriamente essa atividade. Refez o item (1) utilizando a média aritmética das TV_m obtidas para determinar a variação média da função no intervalo $[0;5]$.

A variação média de f é $\dfrac{2}{5}$	A variação média de g é $\dfrac{\cancel{8}}{\cancel{8}}$ $\dfrac{5}{5}$	A variação média de h é $\dfrac{\cancel{16}}{\cancel{8}}$ $\dfrac{32}{5} \cong 6{,}4$

Atividade – Ficha VII

R2 apresentou respostas satisfatórias a esta atividade.

Atividade – Ficha VIII

O aluno apresentou respostas satisfatórias à maioria dos exercícios desta atividade.

Responde incorretamente: (2) – (b), (3) – (a) e (4) – (a) e (b).

(2) b) $De\ -7\ a\ 2.$

(3) a) $500t - 8000$

(4) a) $4 - 4^2 = -4 \quad = 7\,unidades$

b) $3\ unidades$

Atividade – Ficha IX

R2 não realizou esta atividade. Faltou.

Atividades – Ficha X

R2 não realizou esta atividade. Faltou.

Atividade – Ficha XI[1]

Na atividade 1, foi apresentada a seguinte pergunta: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

R2 respondeu inicialmente que a reta tangente a um gráfico o tocaria em pelo menos um ponto.

Após utilizar o programa Graphmatica para traçar tangente a um gráfico em diversas situações e destacar quantos pontos os gráficos teriam em comum, pedimos ao participante que respondesse novamente a pergunta feita na atividade 1 e a seguir fizesse considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0. R2 manteve a mesma resposta dada a pergunta inicial e a seguir registrou:

A tangente tocara sempre no gráfico, podendo toca-lo uma ou mais vezes

Atividade – Ficha XII – Anotações de aula. Principais idéias abordadas até o 6º encontro.

Antes de relacionarmos as principais idéias trabalhadas durante o curso, no quadro branco, pedimos a cada participante para fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha.

R2 destacou:

1- O coeficiente angular de um grafico define a taxa de variação de um gráfico, isto é a velocidade no qual ele cresce.

2- No caso de parabolas ou graficos curvos, quanto menor o intervalo mais precisa é a taxa de variação media

3- Uma tangente pode estar 1 ou mais pontos de um gráfico

4- Quando o grafico é uma parabola apenas o ponto minimo ou maximo possuirá apenas 1 ponto, a tangente só captura 1 ponto do grafico

5- Em casos de mudança de cavidade, o ponto em que a cavidade muda é onde a tangente sera traçada e só irá tocar em 1 ponto.

[1] Antes de iniciarmos a aula (atividade da Ficha XI), R2 fez as atividades da Ficha X sem fazer nenhum registro escrito.

Atividade – Ficha XIII

R2 resolveu satisfatoriamente os exercícios desta atividade. Utilizando a calculadora e uma folha para rascunho obtém, por aproximação, o valor da velocidade instantânea em $t = 2s$.

t = 1,98 e t = 2,0100	8 m/s
t = 1,99 e t = 2,0010	8 m/s
t = 1,999 e t = 2,0009	7,9998 m/s
t = 1,9999 e t = 2,0001	8 m/s
t = 2	velocidade instantânea v_i =

A seguir fez o mesmo cálculo utilizando fórmula conhecida do curso de Física, como sugeriu o exercício.

$$v_i(t) = v_0 + at.$$

0 4

$$V(2) = 0 + 4.2 = 8 \text{ m/s}$$

$$V(3) = 0 + 4.3 = 12 \text{ m/s}$$

Atividade – Ficha XIV

O aluno não encontrou dificuldades em manipular o programa para realizar atividade proposta. Respondeu satisfatoriamente aos exercícios fazendo a associação do coeficiente angular da reta tangente traçada à curva com a velocidade instantânea no instante considerado.

Ficha XV – Anotações de aula. Expressão algébrica da taxa de variação instantânea.

Utilizando a expressão para o cálculo da taxa de variação média, a idéia de retidão local e o auxílio da seqüência de imagens da seção 2.2.6, apresentamos a expressão algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea.

$$TVm = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$TVm = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0}$$

$$TVm = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \; //$$

$$\underset{TV_i}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \text{Coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto } x_0.$$

$$\Delta x \to 0$$

Atividade – Ficha XVI

Passamos, nesta atividade, ao cálculo da expressão da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares, utilizando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$.

Pedimos que cada aluno explicasse geometricamente a expressão encontrada para TVi da função constante (1) e que justificasse porque a expressão da TVi da polinomial do 1º grau já era prevista (2).

(1) $$TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k - k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \; //$$
$$\Delta x \to 0$$

Como o y não varia e o ângulo da função é igual a 0, a taxa de variação também será.

(2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \frac{a\Delta x}{\Delta x} = a \; //$$
$$\Delta x \to 0$$

Isso, pois os outros termos são constantes não interferem no x; apenas o a modifica a função e por isso é o coeficiente angular.

(3) Função polinomial do 2º grau

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_0+\Delta x)^2 + b(x_0+\Delta x) + c - a(x_0)^2 + b(x_0) + c}{}$$

$\Delta x \to 0$

$$a.(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + b(x_0 + \Delta x) + c - a(x_0^2 + b(x_0)) + c$$

$$ax_0^2 + 2ax_0\Delta x + a\Delta x^2 + bx_0 + b\Delta x + c - a(x_0)^2 - bx_0$$

$$2ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x / \Delta x$$

$$\frac{(2ax_0 + a\Delta x + b)\Delta x}{\Delta x}$$

$$2ax_0 + a\Delta x + b = 2ax_0 + b$$

(4) Função polinomial do 3º grau

$$x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0\Delta x^2 + \Delta x^3) + b(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + c(x_0+\Delta x) + d - ax_0^3 + bx_0^2 + cx_0 + d$$

$\Delta x \to 0$

$\Downarrow$

$$\frac{(3ax_0^2 + 3ax_0\Delta x + a(\Delta x)^2 + 2bx_0 + b\Delta x + c)\Delta x}{\Delta x}$$

$$3ax_0^2 + 2bx_0 + c$$

Atividade – Ficha XVII

R2 não resolveu o item (c) imediatamente. Usou a fórmula obtida para *TVi* ($f'(x) = 2ax_0 + b$) da função polinomial do 2º grau.

a) $2.2x_0 = 4x_0$

$\Downarrow$

$4x_0 = 4.2 = 8$ m/s

$4x_0 = 4.3 = 12$ m/s

Ficha XVIII – Anotações de aula. O conceito de derivada.

A derivada de uma função contínua num ponto do domínio corresponde à taxa de variação instantânea da função f no ponto x_0

$$\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \to TVi = f'(x_0) \text{ quando } \Delta x \to 0$$

$TVi = f'(x_0) =$ Coef angular da reta tangente

Ficha XIX – Anotações de aula. O conceito de função derivada.

Chama-se função derivada de uma função f a uma função f' que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva, em qualquer ponto x pertencente ao domínio:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \to f'(x) \quad \text{quando } \Delta x \to 0$$

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função f em um ponto, passaremos a ~~fixar~~ determinar a função derivada, que nos fornece a derivada num ponto qualquer em um intervalo I do domínio.

$f(x) = k$
$f(x) = ax + b$
$f(x) = ax^2 + bx + c$
$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 0$
$f'(x) = a$
$f'(x) = 2ax + b$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f(x) = ax^m$
$f'(x) = m\,a\,x^{m-1}$

Apresentar contra-exemplos. //

R2 não fez registro dos contra-exemplos apresentados para funções que não possuem derivada num ponto x_0 do domínio.

Relacionamos as fórmulas obtidas para o cálculo da derivada de algumas funções polinomiais. Apresentamos a regra para obter a expressão algébrica da derivada de um monômio.

Atividades – Ficha XX

R2 apresentou respostas satisfatórias aos exercícios (1), (2) e (4) da atividade 1(1ª parte). No exercício (3) , determinou a derivada em x_0, mas em x_1 e x_2 escreveu $f'(x_1) = 3x + 9$ e $f'(x_2) = 3x + 9$.

Na atividade 2 (2ª parte), o aluno respondeu satisfatoriamente aos exercícios (2), (3) e (5) .

Solução (1)

$S = 5t^{s}$
$S = 5m$

$Tr(x)\,k = S(t)$
$S(t) = 2ax + b$
$S(t) = 2 \cdot 5 \cdot t$
$S(t) = 10t$

Resposta: $V = 5 m/s$

(2)

$v(t) = h'(t)$

$h'(t) = -20t + 100$

$0 = -20t + 100$

$-20t = -100$

$t = 5\,s$

$\frac{-\Delta}{4a} = \Delta y = 0$ máximo

$\frac{-10000}{4(-10)} = \frac{10000}{40} = 250$

$100^2 - 4(-10) \cdot 0$

10000

$-a$ 

$-10t^2 + 100t - 250 = 0$

↓

Resposta: $t = 5\,s$ $h = 250$

(3)

$v(t) = s'(t) = 3 \cdot 2 \cdot t^2 + 1$

$v(t) = 6t^2 + 1$

$6 \cdot 2^2 + 1 = 25\,m/s$

$2 \cdot 6t = 12t$

$12 \cdot 3 = 36\,m/s^2$

(4)

$c(x) = 3.000 + 25x$

$c'(x) = m(x)$

$m(x) = 25$

Resposta: 25 reais

(5)

$2 \cdot 1x$

$2x$

$2 \cdot 1$

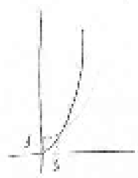
2

$y = 2x + b$

$1 = 2 \cdot 1 + b$

$1 = 2 + b$

$b = -1$



Resposta: $y = 2x - 1$

(6)

$3 \cdot 5t^2 + 3$

$15t^2 + 3$

$15 \cdot 9 + 3$

$135 + 3$

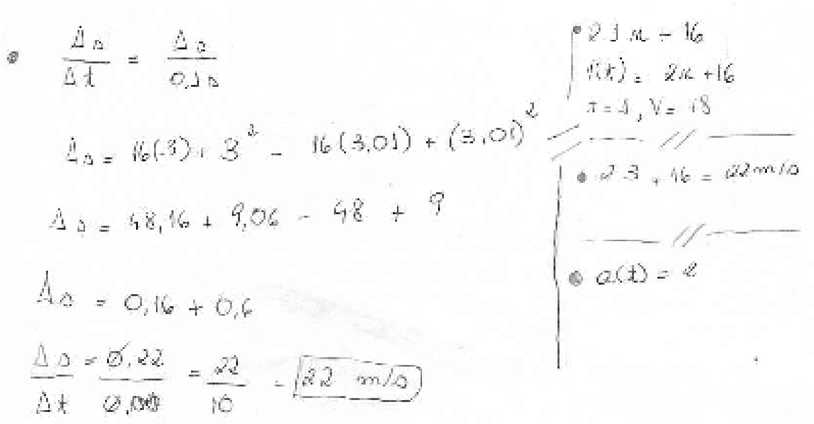
138

Resposta: 138 L

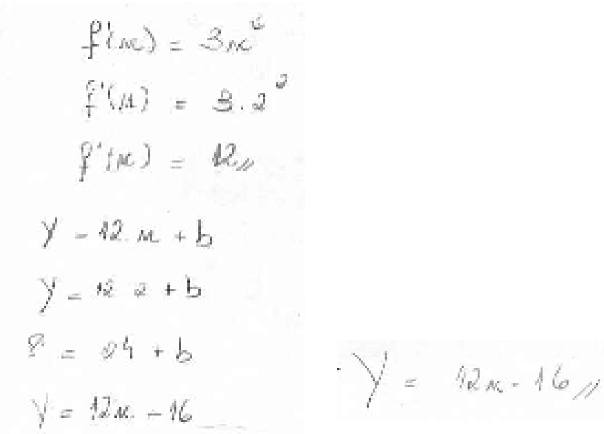
Atividade – Ficha XXI – Exercícios de revisão**.**

R2 resolve satisfatoriamente os exercícios (1) e (2). O exercício (3) foi resolvido sob orientação.

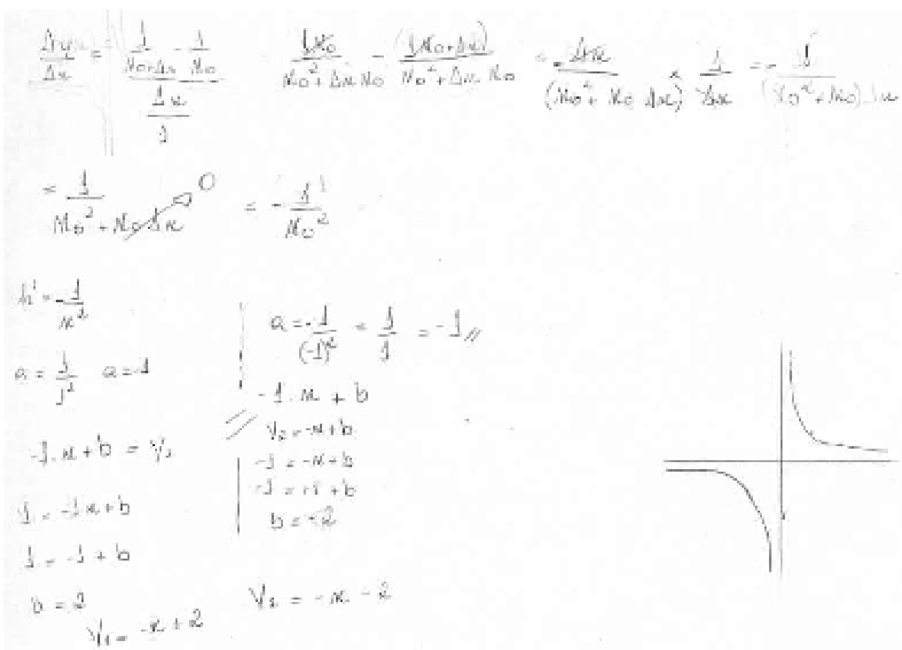
(1)



(2)



(3)



Participante R3

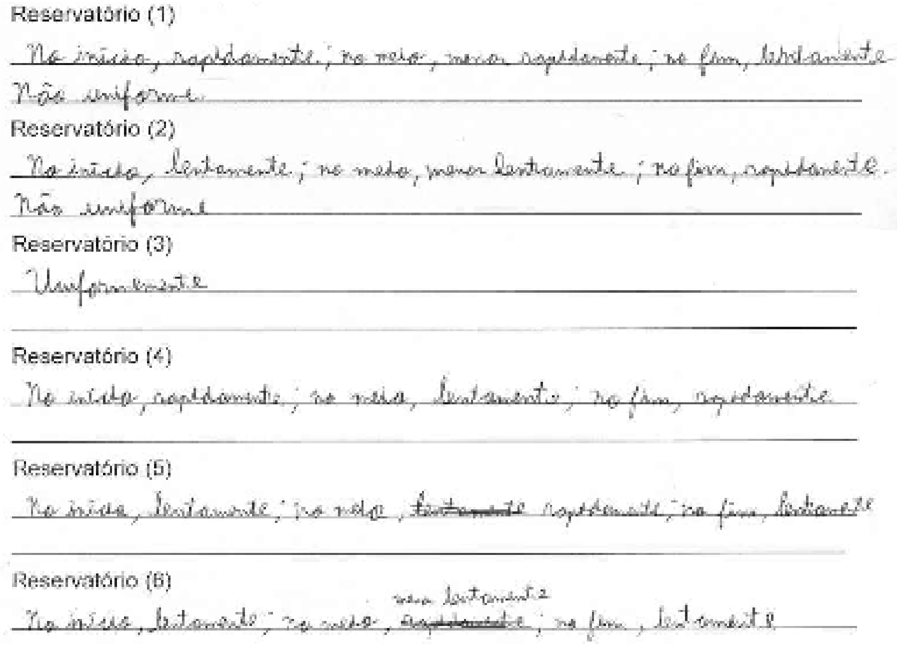
Atividade – Ficha II

R3 apresentou resposta não satisfatória ao exercício (2). Assinala o gráfico (I) como opção correta.

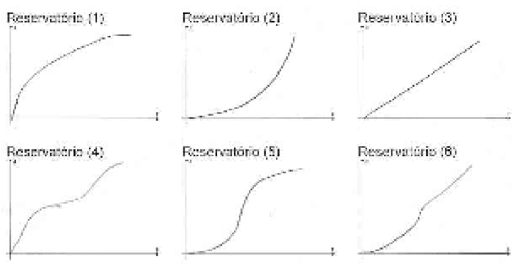
Atividades 1, 2 e 3 – Ficha III

O aluno respondeu satisfatoriamente aos exercícios das atividades 1, 2 e 3.

Respostas apresentadas a atividade 1


Reservatório (1)
No início, rapidamente; no meio, menos rapidamente; no fim, lentamente
Não uniforme
Reservatório (2)
No início, lentamente; no meio, menos lentamente; no fim, rapidamente.
Não uniforme
Reservatório (3)
Uniformemente
Reservatório (4)
No início, rapidamente; no meio, lentamente; no fim, rapidamente.
Reservatório (5)
No início, lentamente; no meio, ~~lentamente~~ rapidamente; no fim, lentamente
Reservatório (6)
No início, lentamente; no meio, ~~rapidamente~~ menos lentamente; no fim, lentamente

Esboço dos gráficos da atividade 3.



Atividades 1 e 2 – Ficha IV

R3 apresentou respostas satisfatórias à maioria dos exercícios das atividades 1 e 2. No entanto, o aluno calculou incorretamente a variação do tempo no intervalo $[2, 7]$: $TV_m = \dfrac{30}{6} = 5\, m/s.$

Ficha V – Anotações de aula. Definição de taxa de variação média.

R3 fez registro incompleto em relação à taxa de variação média e não fez nenhum registro em relação ao coeficiente angular de ***s*** (deixa em branco).

Escreveu apenas: $TV_m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = tg\alpha$.

A **taxa de variação média** de uma função *f* no intervalo [x_A ; x_B] com $x_A < x_B$ é:

$TV_m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = Tg\,\alpha$,

sendo $\Delta y = y_B - y_A$ e $\Delta x = x_B - x_A$

Não fez anotação alguma em relação ao coeficiente angular da reta secante.

O coeficiente angular da reta ***s*** é:

$a =$

intervalo [x_A ; x_B].

Atividade – Ficha VI

R3 respondeu satisfatoriamente a essa atividade. No item (1), utilizou a média aritmética das TV_m obtidas, para determinar a variação média das funções f, g e h no intervalo $[0;5]$.

A variação média de f é 2	A variação média de g é 5	A variação média de h é 6,2

31/5
6,2

Atividade – Ficha VII

R3 apresentou respostas satisfatórias a essa atividade.

Atividade – Ficha VIII

O aluno apresentou respostas satisfatórias à maioria dos exercícios dessa atividade. Os erros cometidos no exercício (3) não comprometeram o entendimento do conceito estudado.

Respostas apresentadas ao exercício (3):

a) $V = 8000 - at$ $\qquad$ $a\ é\ o\ coeficiente\ angular.$

b) $$\begin{aligned} 5000 &= 8000 - a.6 \\ 5 &= 8 - a.6 \\ -3 &= -6a \\ a &= 0{,}5 \end{aligned}$$

Resposta: $a = 0{,}5$

c) $0 = 8000 - \dfrac{t}{2}$ $\qquad$ $8000 = \dfrac{t}{2}$ $\qquad$ $t = 16000$

Resposta: Possuirá valor comercial até 16 000 anos.

Atividade – Ficha IX

R3 apresentou respostas satisfatórias a essa atividade.

Atividades – Ficha X

R3 não apresentou dificuldades em manipular o programa Graphmatica. Depois de realizar as quatro atividades, foi pedido que respondesse à pergunta ao final da ficha, cujo objetivo era verificar o entendimento da noção de retidão local e linearidade local.

R3 respondeu:

Os dois gráficos se assemelham tanto que ~~os~~ ~~os~~ acabam se confundindo, ou seja, a curva em um intervalo muito pequeno, se assemelha ao formato de uma reta

Atividade – Ficha XI

Na atividade 1, foi apresentada a seguinte pergunta: Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

R3 respondeu, inicialmente, que a reta tangente a um gráfico o tocaria em um único ponto.

Após utilizar o programa Graphmatica para traçar tangente a um gráfico em diversas situações e destacar quantos pontos os gráficos teriam em comum, pedimos à participante que respondesse novamente à pergunta feita na atividade 1 e, a seguir, fizesse considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0.

R3 modificou a resposta dada à pergunta inicial. Respondeu que a reta tangente ao gráfico o tocaria em infinitos pontos e a seguir registrou:

Uma reta tangente em x_0 é uma reta que corta o gráfico em x_0 pode cortar o gráfico em outros pontos.

Atividade – Ficha XII – Anotações de aula. Principais idéias abordadas até o 6º encontro.

Antes de relacionarmos as principais idéias trabalhadas durante o curso, no quadro branco, pedimos a cada participante para fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha.

R3 destacou:

1) Quanto menor o intervalo ~~o~~ analizado de x, maior a precisão com que será encontrada a taxa de variação média

2) A análise ~~de um gráfico~~ da taxa de variação média de um gráfico é grosseira quando se leva em conta um intervalo grande de x

3) Uma reta tangente ao gráfico pode cortar o gráfico em mais de um ponto

4) A tangente ao gráfico é paralela ao eixo x ~~que~~ nos pontos de mínimo / máximo e quando o gráfico muda de concavidade.

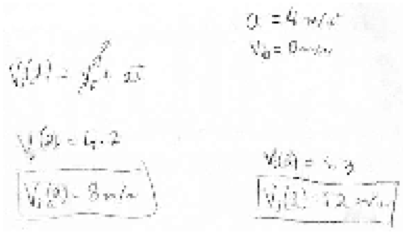
Atividade – Ficha XIII

R3 resolveu satisfatoriamente os exercícios desta atividade. Utilizando a calculadora e uma folha para rascunho obtém, por aproximação, o valor da velocidade instantânea em $t = 2s$.

t = 1,98 e t = 2,0100	7,9733 m/s	(11,08 – 10,8408) : 0,03
t = 1,99 e t = 2,0010	8,000182 m/s	(11,008002–10,92) : 0,011
t = 1,999 e t = 2,0009	7,9998 m/s	(11,00720162–10,992002) : 0,0019
t = 1,9999 e t = 2,0001	8 m/s	(11,0008002–10,99920002) : 0,0002

t = 2	velocidade instantânea v_i =

A seguir, fez o mesmo cálculo utilizando fórmula conhecida do curso de Física, como sugeriu o exercício.

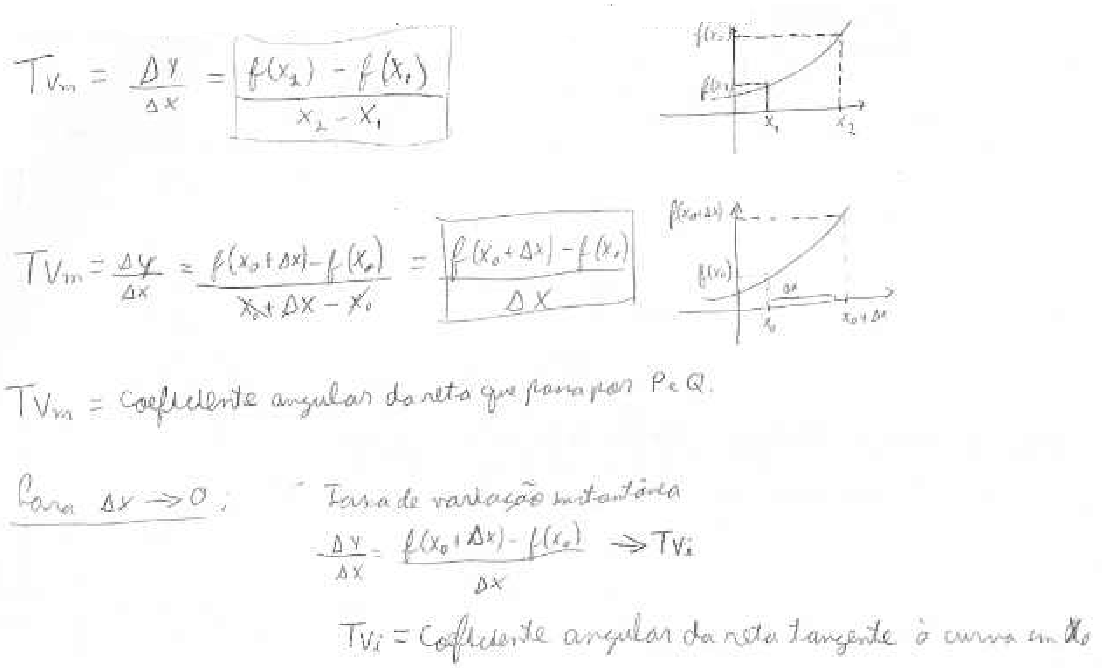


Atividade – Ficha XIV

O aluno não encontrou dificuldades em manipular o programa para realizar atividade proposta. Respondeu satisfatoriamente aos exercícios fazendo a associação do coeficiente angular da reta tangente traçada à curva com a velocidade instantânea no instante t considerado.

Ficha XV – Anotações de aula. Expressão algébrica da taxa de variação instantânea.

Utilizando a expressão para o cálculo da taxa de variação média, a idéia de retidão local e o auxílio da seqüência de imagens da seção 2.2.6 apresentamos a expressão algébrica para o cálculo da taxa de variação instantânea.



Atividade – Ficha XVI

Passamos, nesta atividade, ao cálculo da expressão da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares, utilizando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$.

Pedimos que cada aluno interpretasse a expressão encontrada da TVi da função constante (1) e que justificasse porque a expressão da TVi da polinomial do 1º grau já era prevista (2).

(1)

$$TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{K - K}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 = TV_i$$

$\Delta x \to 0$

A função não varia. A imagem é a mesma para qualquer ponto do domínio.

(2)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a \cdot (x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \frac{\cancel{ax_0} + a\Delta x + \cancel{b} - \cancel{ax_0} - \cancel{b}}{\Delta x} = \frac{a\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = a$$

$\Delta x \to 0$

Sim, pois já tinha sido observado que, para qualquer intervalo $[x_0; x_0 + \Delta x]$, o coeficiente angular do gráfico é constante, ou seja, a variação de $f(x)$ é constante

(3)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x_0 + \Delta x)^2 + b(x_0 + \Delta x) + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{\Delta x} =$$

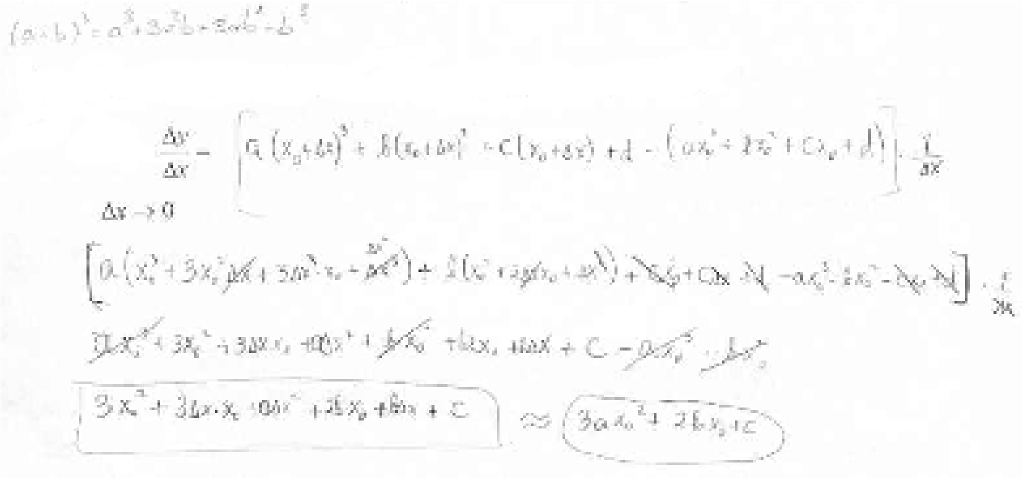
$\Delta x \to 0$

$$= \frac{a(x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + bx_0 + b\Delta x + c - ax_0^2 - bx_0 + c}{\Delta x} =$$

$$= \frac{\cancel{ax_0^2} + 2a \cdot x_0 \cdot \Delta x + a\Delta x^2 + \cancel{bx_0} + b\Delta x + \cancel{c} - \cancel{ax_0^2} - \cancel{bx_0} - \cancel{c}}{\Delta x} = \frac{2ax_0\Delta x + a\Delta x^2 + b\Delta x}{\Delta x}$$

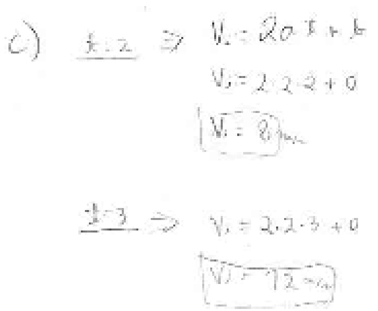
$$= \frac{\Delta x(2ax_0 + a\Delta x + b)}{\Delta x} = \boxed{2a \cdot x_0 + a \cdot \Delta x + b} \approx 2ax_0 + b$$

(4)

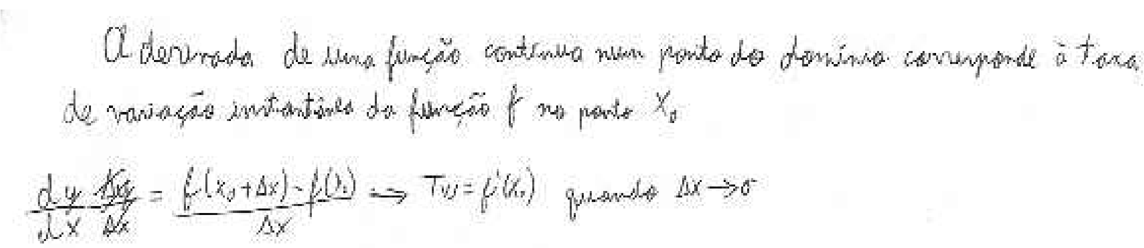


Atividade – Ficha XVII

R3 não resolveu o item (c) imediatamente, como os outros participantes. Usou a fórmula obtida para TVi ($f'(x) = 2ax_0 + b$) da função polinomial do 2º grau.



Ficha XVIII – Anotações de aula. O conceito de derivada.



Ficha XIX – Anotações de aula. O conceito de função derivada.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

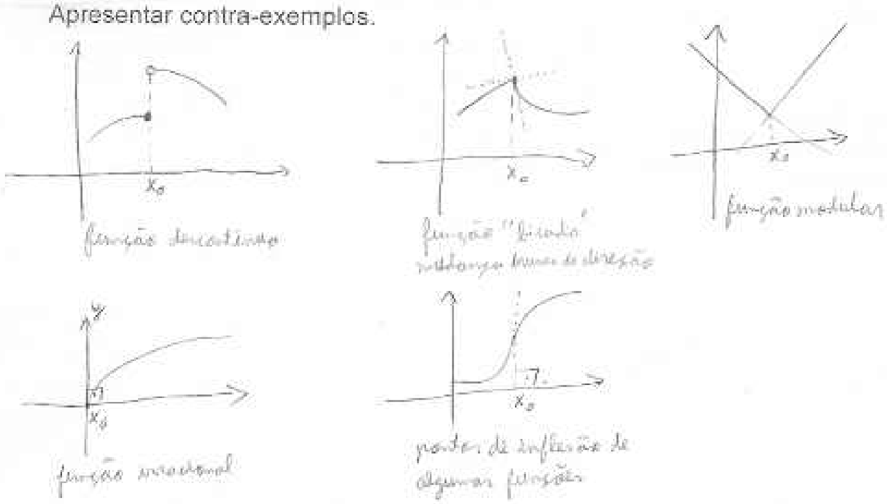
$f(x) = ax^m$

$f'(x) = m \cdot a \cdot x^{m-1}$

Chama-se função derivada de uma função f a uma função f' que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva, em qualquer ponto x pertencente ao domínio.

Dessa maneira, em vez de calcularmos o valor da derivada de uma função f em um ponto, passaremos a determinar a função derivada, que nos fornece a derivada num ponto qualquer em um intervalo I do domínio.

Apresentar contra-exemplos.



Relacionamos as fórmulas obtidas para o cálculo da derivada de algumas funções polinomiais. Apresentamos a regra para obter a expressão algébrica da derivada de um monômio.

Atividades – Ficha XX

Respondeu satisfatoriamente a todos os exercícios da atividade 1(1ª parte).

Na atividade 2 (2ª parte), respondeu satisfatoriamente aos exercícios, exceto ao (3), onde cometeu uma incorreção ao calcular a expressão para $S'(t)$.

(1) $s'(t) = V(t) = 2 \cdot 5 \cdot t = 10t$

$V(1) = 1 \cdot 10 = 10\ m/s$

(2)

$h'(t) = v(t) = -20t + 100$ $\qquad$ $h(5) = -10 \cdot 25 + 500$

$= 250m$

$-20t + 100 = 0$

$100 = 20t$

$t = 5s$

(3)

$s'(t) = v(t) = \boxed{4t^2 + 1}$

$v(2) = 4 \cdot 4 + 1 = 17$

$a(t) = v'(t) = \boxed{8t}$

$s(1) = 24m$

(4)

$C(x+1) = 3000 + 25x + 25$

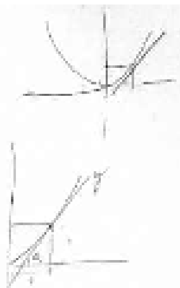
$C'(x) = m(x) = \boxed{25}$

R: R$25,00 a mais

(5)

$tg\alpha = f'(x) = 2x$

$\boxed{f'(1) = 2}$



$y = 2x + b$

$1 = 2 + b$

$\boxed{b = -1}$

$2 = tg\alpha = \frac{1}{1}$

$\boxed{x = \frac{1}{1}}$

Resposta: $\boxed{y = 2x - 1}$

(6)

$V'(t) = v(t)$

$v(t) = 15t^2 + 3$

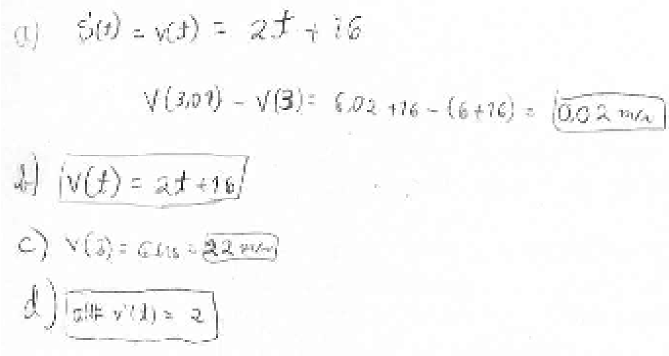
$v(3) = 15\cdot 9 + 3 = 135 + 3 = \boxed{138\ u.v}$

Resposta: 138 u.v/m

Atividade – Ficha XXI – Exercícios de revisão**.**

R3 resolveu satisfatoriamente os três exercícios desta atividade.

(1)



a) $S'(t) = v(t) = 2t + 16$

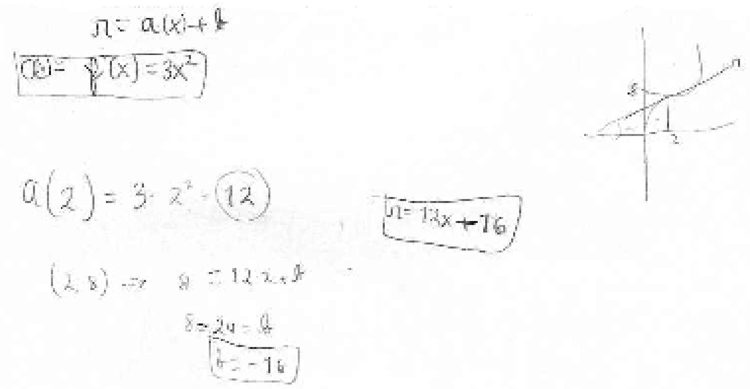
$V(3{,}01) - V(3) = 6{,}02 + 16 - (6+16) = \boxed{0{,}02\ m/s}$

b) $\boxed{V(t) = 2t + 16}$

c) $V(3) = 6 + 16 = \boxed{22\ m/s}$

d) $\boxed{a(t) = v'(t) = 2}$

(2)



$r = a(x) + b$

$\boxed{f'(x) = 3x^2}$

$a(2) = 3\cdot 2^2 = 12$

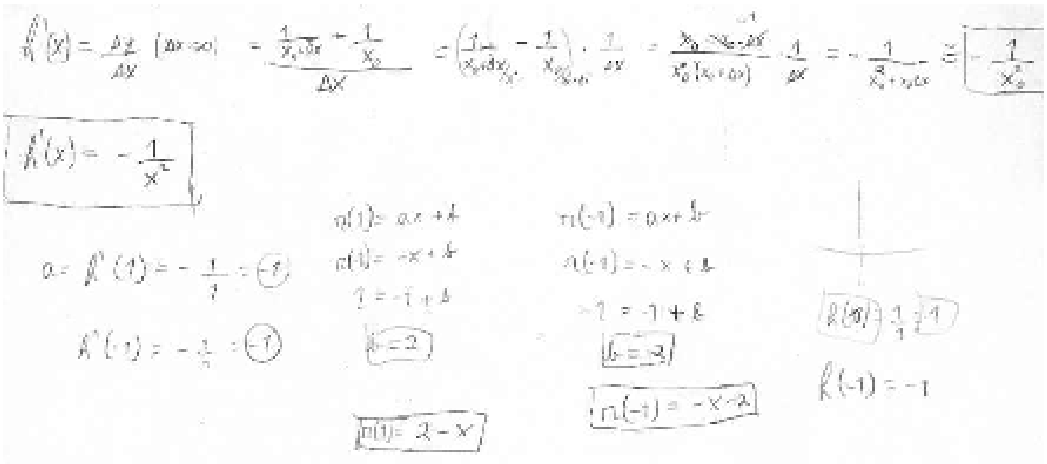
$\boxed{r = 12x - 16}$

$(2, 8) \Rightarrow 8 = 12\cdot 2 + b$

$8 = 24 + b$

$\boxed{b = -16}$

(3)



$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}\ (\Delta x \to 0) = \frac{\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x} = \left(\frac{1}{x_0+\Delta x} - \frac{1}{x_0}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}\cdot\frac{1}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2 + x_0\Delta x} = \boxed{-\frac{1}{x_0^2}}$

$\boxed{f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$

$a = f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$

$f'(-1) = -\frac{1}{1} = -1$

$r(1) = ax + b$

$r(1) = -x + b$

$1 = -1 + b$

$\boxed{b = 2}$

$\boxed{r(1) = 2 - x}$

$r(-1) = ax + b$

$r(-1) = -x + b$

$-1 = 1 + b$

$\boxed{b = -2}$

$\boxed{r(-1) = -x - 2}$

$\boxed{f(1) = \frac{1}{1} = 1}$

$f(-1) = -1$

Anexo IV

Resultados da avaliação final

Apresentação dos resultados da avaliação final aplicada aos participantes do curso. Passaremos às respostas dadas aos onze exercícios que compõem esta avaliação.

Participante M1

(Q1) M1 descreveu a diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea:

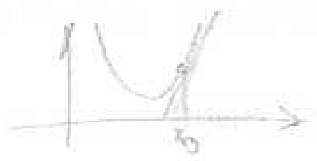
A taxa de variação média é o coeficiente angular de uma reta que liga dois pontos do gráfico (não é muito minucioso). A taxa de variação instantânea é o coeficiente angular da tangente de um ponto do gráfico (é minucioso)

(Q2) Quando perguntamos, o que entendia por derivada, M1 respondeu:

Derivada é o coeficiente angular da reta tangente à um ponto qualquer do gráfico

(Q3) Apresentou a seguinte interpretação geométrica para a derivada:

É o coeficiente angular reta tangente de um ponto do gráfico

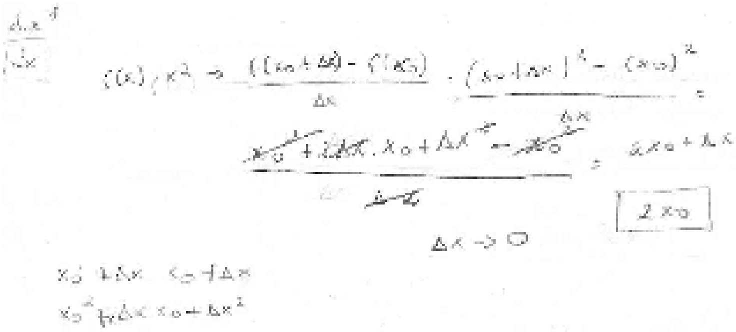


(Q4) Em relação à importância de se determinar derivadas, M1 acrescentou:

Para conseguir um estudo mais minucioso do gráfico

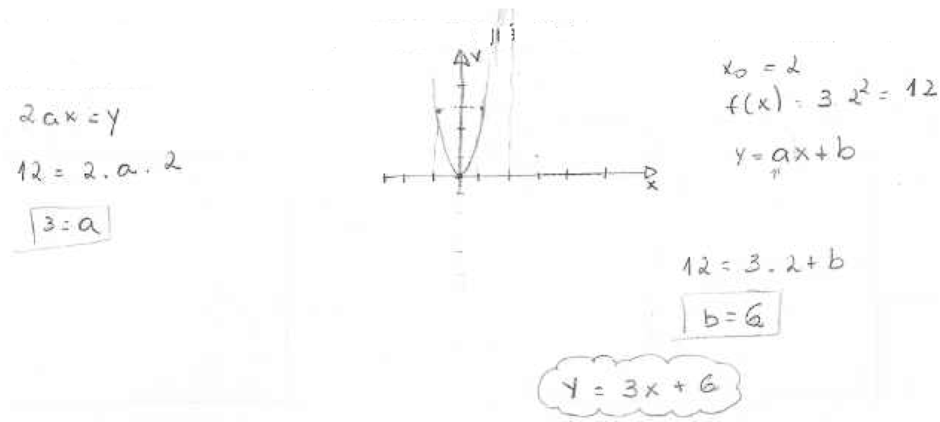
(Q5) Pedimos para que deduzissem a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x)=x^2$ ou $f(x)=x^3$, usando o conceito estudado. Deveriam explicar, passo a passo, a dedução.

M1 apresentou a seguinte solução:



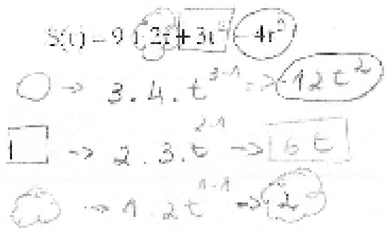
(Q6) Dada uma função real definida por $f(x) = 3x^2$, pedimos que determinassem a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

A aluna apresentou a seguinte solução:



(Q7) Apresentamos um problema de cinemática no qual o deslocamento do móvel era descrito por uma função horária definida por $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Dessa forma, pedimos que determinassem a sentença da velocidade instantânea e a sentença da aceleração instantânea, a seguir, que calculassem $v(2)$ e $a(4)$.

Solução de M1.



a) $v(t) = -12t^2+6t+1$

b) $v(2) = -12(2)^2+6 \cdot 2+1$

$v(2) = -48+12+1$

$v(2) = -34$ m/s

c) $a(t) = -24t+6$

d) $a(4) = -24 \cdot 4+6$

$a(4) = -96+6 = -90$

$-12t^2 \rightarrow 2 \cdot 12 \cdot t^{2-1} = 24t$

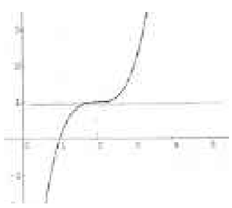
$6t \rightarrow 1 \cdot 6 \cdot t^{1-1} = 6$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times\ 4 \\ \hline 96 \end{array}$$

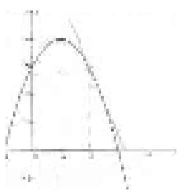
(Q8) Foram dados, nesta questão, quatro gráficos de funções. Pedimos que traçassem a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$ e, a seguir, que justificassem a resposta.

Traçados e justificativas apresentadas por M1.

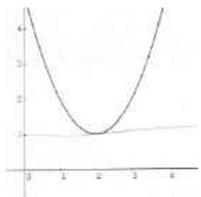
a)



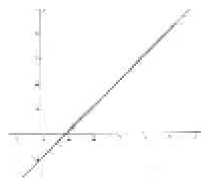
b)



c)



d)



a) É constante, pois é o ponto onde o gráfico muda de direção

b) É uma polinomial do 1º grau, pois um ponto de uma polinomial do 2º grau sempre tem uma tangente polinomial do 1º grau, mesmo no ponto máximo ou mínimo

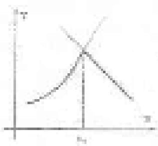
c) É constante, pois é tangente do ponto máximo

d) É uma polinomial do 1º grau, pois a tangente de qualquer ponto de um gráfico de uma expressão da polinomial do 1º grau é a própria reta

(Q9) Alguns gráficos de função foram apresentados a fim de que fosse observada a existência ou não da derivada no ponto indicado. Pedimos que justificassem as respostas.

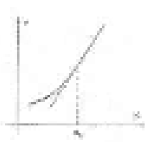
Respostas apresentadas por M1:

a)

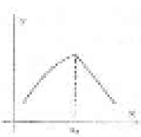


b)

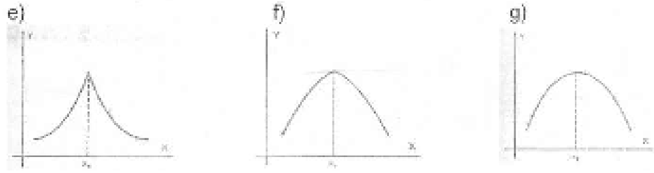
c)



d)



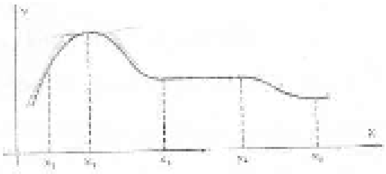
e) f) g)



a, b, d, e, f não tem derivada, pois nesses pontos existem 2 tangentes
g, h/ tem derivada, pois tem apenas uma tangente nesses pontos

(Q10) Nessa questão, através da análise do gráfico dado, pedimos que registrassem os intervalos que tivessem derivadas positiva, negativa ou nula. Ao mesmo tempo, deveriam apresentar os intervalos em que a função fosse crescente, decrescente ou constante.

Respostas apresentadas por M1:



Essa função:

a) tem derivada positiva entre x_1 e x_2;
é crescente no intervalo $]x_1, x_2[$.

b) tem derivada negativa entre x_2 e x_3;
é decrescente no intervalo $]x_2, x_3[$.

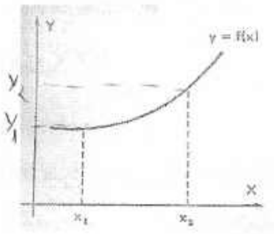
c) tem derivada nula entre x_3 e x_4;
é constante no intervalo $[x_3, x_4]$.

d) tem derivada negativa entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $]x_4, x_5[$.

e) tem derivada menor ou igual a zero entre x_2 e x_5;
é decrescente no intervalo $]x_2, x_5[$

(Q11) Nessa última questão, apresentamos os gráficos de duas funções crescentes num intervalo $[x_1, x_2]$. Pedimos para que analisassem o modo como cada uma crescia através da análise do crescimento da função derivada nesse mesmo intervalo. Deveriam apresentar justificativa.

1)

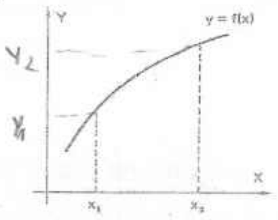


a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada "para cima", sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente. (crescente – decrescente)

Justifique

→ Ela é crescente, pois ao analizar uma tangente de qualquer ponto entre $\overbrace{x_1 \text{ e } x_2}$, observamos que essa reta é crescente, logo esse intervalo também é.

2)



b) O segundo gráfico tem concavidade voltada "para baixo" sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é decrescente. (crescente – decrescente)

Justifique

Ela é decrescente, pois ao analizar uma tangente de qualquer ponto entre $\overline{x_1 \text{ e } x_2}$, observamos que essa reta é decrescente, logo esse intervalo também é

Participante M2

(Q1) M2 apresentou a seguinte diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea:

A taxa de variação média mede a variação de um determinado intervalo da função e a taxa de variação instantânea determina a variação de um único ponto da função.

(Q2) Quando perguntamos, o que entendia por derivada, M2 respondeu:

A derivada é o coeficiente angular da reta tangente de um determinado ponto da função. Podemos dizer que ela é a taxa de variação instantânea, ou seja, de um instante, um ponto da função no gráfico.

(Q3) Apresentou a seguinte interpretação geométrica para a derivada:

É o coeficiente angular da reta tangente a um único ponto do gráfico.

(Q4) Em relação à importância de se determinar derivadas, M2 acrescentou:

Com essa determinação, podemos ter uma noção bem mais específica do comportamento da função. Ao analizarmos um intervalo, não obtemos resultados tão precisos (sobre o comportamento do gráfico) do que quando determinamos a derivada.

(Q5) Pedimos para que deduzissem a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$, usando o conceito estudado. Deveriam explicar, passo a passo, a dedução.

M2 não apresentou solução para esse exercício, apenas indicou:

$$TV_i = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

(Q6) Dada uma função real definida por $f(x) = 3x^2$, pedimos para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

A aluna apresentou a seguinte solução:

$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^1 = 6x$ $\quad$ $f(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$

$f'(2) = 6 \cdot 2 = 12$

$y = ax + b$

$y = 6x \cdot x + b$

$y = 6x^2 + b$

$12 = 6 \cdot 2^2 + b$

$12 = 24 + b$

$b = -12$

$\boxed{y = 6x^2 - 12}$ //

(Q7) Apresentamos um problema de cinemática no qual o deslocamento do móvel era descrito por uma função horária definida por $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Dessa forma, pedimos para determinar a sentença da velocidade instantânea e a sentença da aceleração instantânea, a seguir calcular $v(2)$ e $a(4)$.

Solução de M2.

a) $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$

$S'(t) = v(t) = 0 + 1 \cdot 2 \cdot t^0 + 2 \cdot 3 \cdot t^1 - 3 \cdot 4 \cdot t^2 = \boxed{2 + 6t - 12t^2}$

b) $= v(t) = -12t^2 + 6t + 2$

$v(2) = -12 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 2 = -48 + 12 + 2 = \boxed{-24\ m/s}$

c) $v(t) = -12t^2 + 6t + 2$

$v'(t) = a(t) = 2 \cdot (-12) \cdot t^1 + 1 \cdot 6 \cdot t^0 + 0 = \boxed{-24t + 6}$

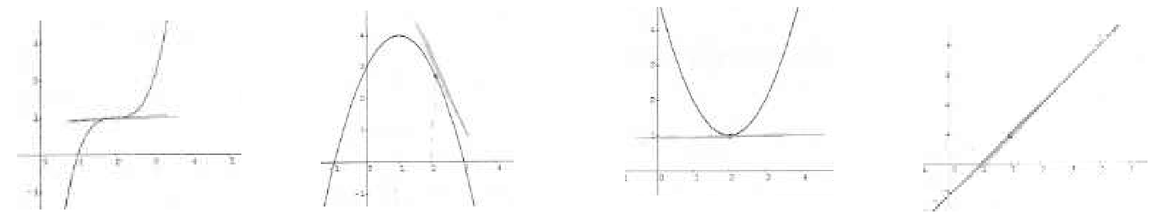
d) $a(t) = -24t + 6$

$a(4) = -24(4) + 6 = -96 + 6 = \boxed{-90\ m/s^2}$

(Q8) Foram dados, nesta questão, quatro gráficos de funções. Pedimos que traçassem a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$ e, a seguir, que justificassem a resposta.

Traçados e justificativas apresentadas por M2.

a) b) c) d)



a) Quando há mudança no comportamento da concavidade, a tangente é paralela ao eixo do x e a derivada é nula.

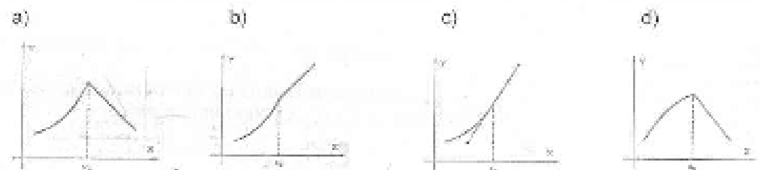
b) Nesse ponto, a função é decrescente pois sua tangente também é.

c) No ponto mínimo de uma parábola, a tangente é paralela ao eixo do x, o que resultará na derivada nula.

d) A reta tangente de um ponto pertencente a uma reta, possui o mesmo comportamento da função.

(Q9) Alguns gráficos de função foram apresentados a fim de que fosse observada a existência ou não da derivada no ponto indicado. Pedimos que justificassem as respostas.

Respostas apresentadas por M2:



a) Não, pois não se define a derivada quando ocorre uma mudança tão brusca de comportamento (o mesmo para letras d.) Afinal, nesses casos, encontramos 2 retas tangentes.

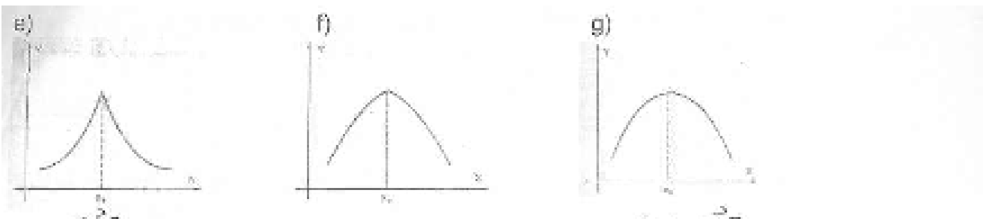
b) SIM

c) SIM

d) não

Nas letras b e c conseguimos encontrar apenas uma reta tangente para esses pontos, então é possível encontrar a derivada.

3



e) não

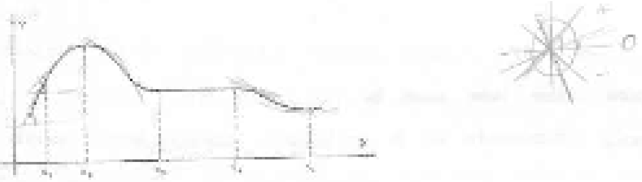
f) SIM

g) não

Nas letras f e g o valor da derivada é nulo, pois a reta tangente é paralela ao eixo do x.

(Q10) Nesta questão, através da análise do gráfico dado, pedimos que registrassem os intervalos que tivessem derivadas positiva, negativa ou nula. Ao mesmo tempo, deveriam apresentar os intervalos em que a função fosse crescente decrescente ou constante.

Respostas apresentadas por M2:



Essa função:

a) tem derivada positiva entre x_1 e x_2;
é crescente no intervalo $[x_1, x_2]$.

b) tem derivada negativa entre x_2 e x_3;
é decrescente no intervalo $[x_2, x_3]$.

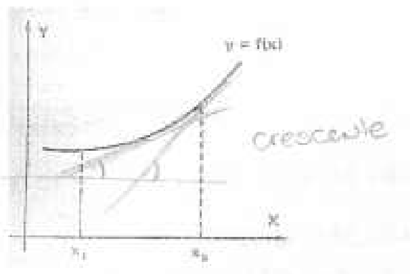
c) tem derivada nula entre x_3 e x_4;
é constante no intervalo $[x_3, x_4]$.

d) tem derivada negativa entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $[x_4, x_5]$.

e) tem derivada menor ou igual a zero entre x_2 e x_5;
é decrescente no intervalo $[x_2, x_5]$ e [illegible]

(Q11) Nesta última questão, apresentamos os gráficos de duas funções crescentes num intervalo $[x_1, x_2]$. Pedimos que analisassem o modo como cada uma cresce através da análise do crescimento da função derivada neste mesmo intervalo. Deveriam apresentar justificativa.

1)

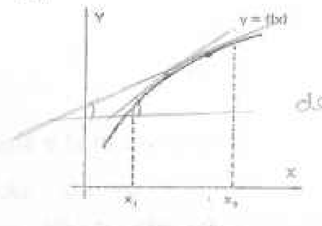


a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada "para cima", sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente (crescente – decrescente)

Justifique

A concavidade voltada "para cima" caracteriza uma função onde o coeficiente angular é positivo, ou seja, a reta tangente é crescente, sendo assim seu coeficiente angular é positivo (derivada). Conforme a x da função aumenta, o coeficiente angular das retas tangentes de cada ponto vão aumentando e seus angulos se tornam cada vez mais obtusos, caracterizando derivada crescente.

2)



decrescente

b) O segundo gráfico tem concavidade voltada "para baixo" sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é decrescente. (crescente – decrescente)

Justifique

A concavidade voltada "para baixo" mostra uma função que possui o coeficiente angular das retas tangentes aos seus pontos, positivo, porém que diminuem progressivamente, tornando seus angulos cada vez mais agudos se aproximando de 0 (zero), onde caracterizará uma função constante.

Participante M3

(Q1) M3 apresentou a seguinte descrição para a diferença das taxas de variação média e instantânea:

A taxa de variação média analisa o comportamento da função de forma superficial, ou seja, a média do seu comportamento, uma vez que analisado em intervalos de tempo maiores. Já na taxa de variação instantânea, a análise é mais precisa, pois analisa o comportamento da função em um intervalo de tempo muito curto, que tende a zero.

(Q2) Quando perguntamos, o que entendia por derivada, M3 respondeu:

Derivada é a função que determina para qualquer valor de x, a imagem correspondente, de modo que esta imagem também é o coeficiente angular da reta tangente (no ponto x determinado) ao gráfico da função que deu origem à derivada.

(Q3) Apresentou a seguinte interpretação geométrica para a derivada:

Geometricamente, a derivada determina o coeficiente angular, ou seja, a inclinação da reta tangente em um ponto x, do gráfico que representa a função que deu origem à derivada.

(Q4) Em relação à importância de se determinar derivadas, M3 afirmou:

Ao se determinar derivadas, obtém-se uma função geral para se chegar, a partir de um ponto x_0, a um valor fixo y que corresponde ao coeficiente angular da reta tangente ao gráfico da função que deu origem à derivada, podendo esse coeficiente ser também um valor com sua respectiva unidade de medida, que deriva de outra, como por exemplo a aceleração que deriva da velocidade em função do tempo.

(Q5) Pedimos para que deduzissem a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$, usando o conceito estudado. Deveriam explicar, passo a passo, a dedução.

M3 apresentou o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\Delta x + x^2) - f(x^2)}{\Delta x + x^2 - x^2} = \frac{(\Delta x + x^2)^2 - (x^2)^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + 2\Delta x x^2 \cancel{+ x^4} \cancel{- x^4}}{\Delta x} = \frac{\cancel{\Delta x}(\Delta x + 2x^2)}{\cancel{\Delta x}}$$

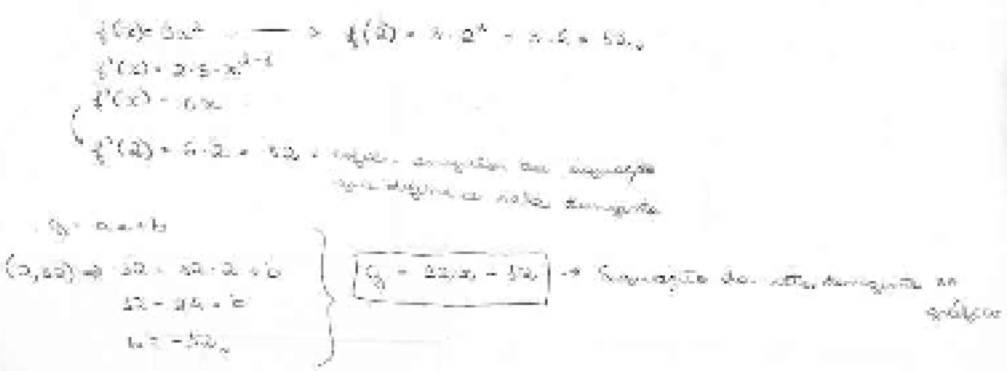
$\Delta x \to 0$

$= \boxed{\Delta x + 2x^2} \rightarrow \frac{dy}{dx} = TVi =$ coeficiente angular da reta tangente $=$ derivada

1

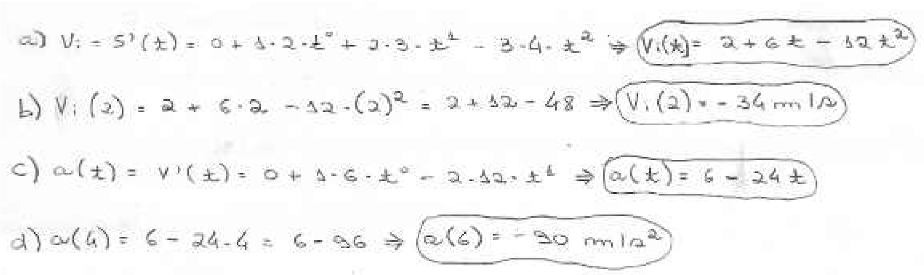
(Q6) Dada uma função real definida por $f(x) = 3x^2$, pedimos para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

A aluna apresentou a seguinte solução:


$f(x) = 3x^2 \longrightarrow f(2) = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 4 = 12$
$f'(x) = 2 \cdot 3 \cdot x^{2-1}$
$f'(x) = 6x$
$f'(2) = 6 \cdot 2 = 12$
$y = ax + b$
$(2,12) \Rightarrow 12 = 12 \cdot 2 + b$
$12 - 24 = b$
$b = -12$
$\boxed{y = 12x - 12}$ → Equação da reta tangente ao gráfico

(Q7) Apresentamos um problema de cinemática no qual o deslocamento do móvel era descrito por uma função horária definida por $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Dessa forma, pedimos que determinassem a sentença da velocidade instantânea e a sentença da aceleração instantânea, a seguir calcular $v(2)$ e $a(4)$.

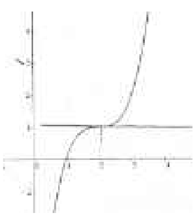
Solução de M3.


a) $V_i = S'(t) = 0 + 1 \cdot 2 \cdot t^0 + 2 \cdot 3 \cdot t^1 - 3 \cdot 4 \cdot t^2 \Rightarrow V_i(t) = 2 + 6t - 12t^2$
b) $V_i(2) = 2 + 6 \cdot 2 - 12 \cdot (2)^2 = 2 + 12 - 48 \Rightarrow V_i(2) = -34\ m/s$
c) $a(t) = v'(t) = 0 + 1 \cdot 6 \cdot t^0 - 2 \cdot 12 \cdot t^1 \Rightarrow a(t) = 6 - 24t$
d) $a(4) = 6 - 24 \cdot 4 = 6 - 96 \Rightarrow a(6) = -90\ m/s^2$

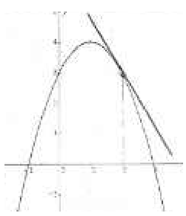
(Q8) Foram dados, nesta questão, quatro gráficos de funções. Pedimos que traçassem a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$ e, a seguir, que justificassem a resposta.

Traçados e justificativas apresentadas por M3.

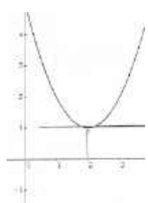
a)



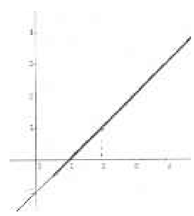
b)



c)



d)



a) A reta tangente é paralela ao eixo das abcissas, pois há no ponto $x=?$ uma mudança na curvatura da concavidade do gráfico (antes de $x=?$, concavidade p/ baixo; depois de $x=?$, concavidade p/ cima).
b) A reta tangente é decrescente [illegible], [illegible] ponto do gráfico [illegible] parte do gráfico de comportamento decrescente.
c) A reta tangente é paralela ao eixo da abcissa, pois é o ponto de mínimo da parábola.
d) A reta tangente coincide com a reta do gráfico, pois o gráfico cresce de forma constante.

(Q9) Alguns gráficos de função foram apresentados a fim de que fosse observada a existência ou não da derivada no ponto indicado. Pedimos que justificassem as respostas.

Respostas apresentadas por M3:

. Nos gráficos a), b) e c) não há derivada para os pontos indicados, pois nestes respectivos pontos há uma mudança de direção da reta do gráfico, de modo que, então, não há reta tangente possível para esses pontos, não havendo, então, derivada.

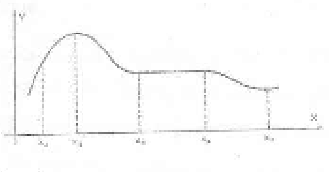
. No gráfico c) é possível se traçar uma reta tangente ao ponto determinado, logo, há derivada da função nesse ponto.

3

. Nos gráficos e) e f) não existe reta tangente aos pontos indicados, pois estes determinam o momento do gráfico em que há mudança repentina de direção. Logo, como não há reta tangente, não há derivada da função.

. No gráfico g) há reta tangente ao ponto indicado, havendo, então, derivada da função.

(Q10) Nesta questão, através da análise do gráfico dado, pedimos que registrassem os intervalos que tivessem derivadas positiva, negativa ou nula. Ao mesmo tempo, deveriam apresentar os intervalos em que a função fosse crescente decrescente ou constante.



Essa função:

a) tem derivada positiva entre x_1 e x_2;
é crescente no intervalo $[x_1; x_2[$.

b) tem derivada negativa entre x_2 e x_3;
é decrescente no intervalo $]x_2; x_3[$.

c) tem derivada nula entre x_3 e x_4;
é constante no intervalo $[x_3; x_4]$.

d) tem derivada negativa entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $]x_4; x_5]$.

e) tem derivada menor ou igual a zero entre x_2 e x_5;
é decrescente no intervalo $]x_2; x_3] \cup]x_4; x_5]$

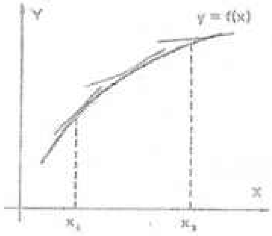
(Q11) Nesta última questão, apresentamos os gráficos de duas funções crescentes num intervalo $[x_1, x_2]$. Pedimos que analisassem o modo como cada uma crescia através da análise do crescimento da função derivada neste mesmo intervalo. Deveriam apresentar justificativa.

a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada "para cima", sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente. (crescente – decrescente)

Justifique

Essa função cresce lentamente de modo que a inclinação (ou seja, o coeficiente angular) da reta tangente nos pontos de x_1 a x_2 fica cada vez mais obtusa, logo, os valores do coeficiente angular são crescentes e, como o coeficiente da reta tangente é igual à derivada, esta é crescente.

2)



b) O segundo gráfico tem concavidade voltada "para baixo" sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é decrescente. (crescente – decrescente)

Justifique

Essa função cresce rapidamente de modo que a inclinação da reta tangente nos pontos de x_1 a x_2 começa obtusa e vai ficando cada vez mais aguda, logo, os valores do coeficiente angular são decrescentes e, como o coeficiente angular da reta tangente é igual à derivada, esta é decrescente.

Participante M4

(Q1) M4 apresentou a diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea:

Taxa de variação média indica um valor médio de variação ao longo de todo o gráfico. Já taxa de variação instantânea indica a taxa de variação para um x determinado.

(Q2) Quando perguntamos, o que entendia por derivada, M4 respondeu:

Derivada é uma função que é "constituida" a partir de uma outra.

(Q3) Apresentou a seguinte interpretação geométrica para a derivada:

É a reta tangente ao ponto (x,y).

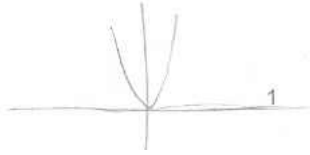
(Q4) Em relação à importância de se determinar derivadas, M4 afirmou:

É importante para se estabelecer o movimento do gráfico (se ele cresce/decresce e o que gera isso).

(Q5) Pedimos que deduzissem a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$, usando o conceito estudado. Deveriam explicar, passo a passo, a dedução..

M4 não apresentou solução a este exercício.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



(Q6) Dada uma função real definida por $f(x) = 3x^2$, pedimos para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

A aluna apresentou a seguinte solução:

$f(x) = 3x^2$

$f(x)' = 2 \cdot 3x^1$

$f(x)' = 6x$

$f(x)' = 6 \cdot 2 = 12$

(Q7) Apresentamos um problema de cinemática no qual o deslocamento do móvel era descrito por uma função horária definida por $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Dessa forma, pedimos que determinassem a sentença da velocidade instantânea e a sentença da aceleração instantânea, a seguir, que calculassem $v(2)$ e $a(4)$.

Solução de M4.

$S(t) = -4t^3 + 3t^2 + 2t + 9$

$s(t)' = v(t) = 3 \cdot -4t^2 + 2 \cdot 3t + 2 + 0$

$\boxed{-12t^2 + 6t + 2}$

$t = 2 \Rightarrow -12 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 + 2 =$

$= -12 \cdot 4 + 12 + 2 =$

$= -48 + 14 = -32$

$v(2) = -32 \, m/s$

$v(t)' = a(t) = -12t^2 + 6t + 2$

$= 2 \cdot -12t + 6 + 0$

$= -24t + 6$

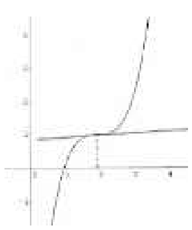
$a(4) = -24 \cdot 4 + 6$

$a(4) = -96 + 6 = -102 \, m/s^2$

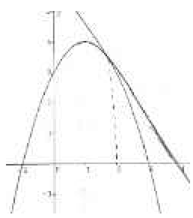
(Q8) Nesta atividade, foram dados, quatro gráficos de funções. Pedimos que traçassem a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$ e, a seguir, que justificassem a resposta.

Traçados e justificativas apresentadas por M4.

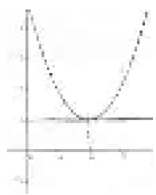
a)



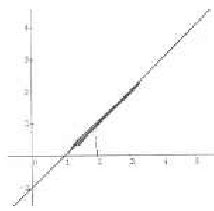
b)



c)



d)



a) A reta tangente confunde-se com o gráfico devido à sua ligeira constância.

b) A reta tangente acompanha o movimento do gráfico e está decrescendo (é negativa).

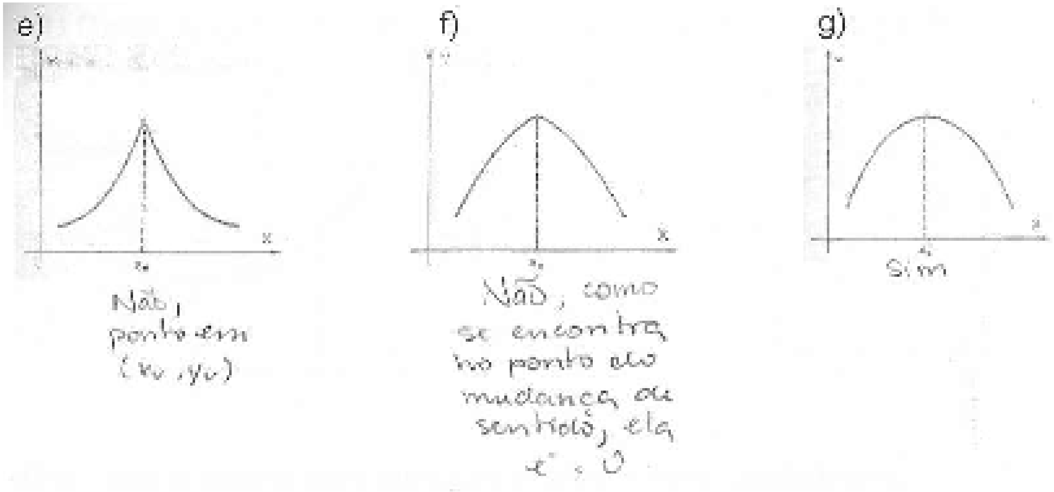
c) A reta tangente localiza-se no ponto (x_0, y_0), onde o gráfico muda o seu sentido.

d) A reta tangente encontra-se "sobreposta" ao gráfico.

(Q9) Alguns gráficos de função foram apresentados a fim de que fosse observada a existência ou não da derivada no ponto indicado. Pedimos que justificassem as respostas.

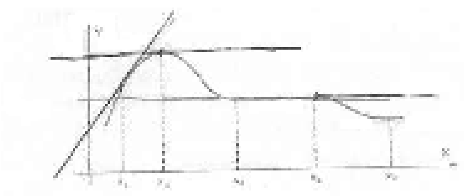
Respostas apresentadas por M4:

A aluna fez registro apenas no gráfico (a).



(Q10) Nesta questão, através da análise do gráfico dado, pedimos que registrassem os intervalos que tivessem derivadas positiva, negativa ou nula. Ao mesmo tempo, deveriam apresentar os intervalos em que a função fosse crescente decrescente ou constante.

Respostas apresentadas por M4:



Essa função:

a) tem derivada positiva entre x_1 e x_2;
é crescente no intervalo $x_1 < x < x_2$

b) tem derivada negativa entre x_2 e x_3;
é decrescente no intervalo $x_2 < x < x_3$

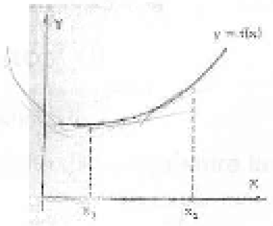
c) tem derivada nula entre x_3 e x_4;
é constante no intervalo $x_3 < x < x_4$

d) tem derivada negativa entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $x_4 < x < x_5$

e) tem derivada menor ou igual a zero entre x_2 e x_5;
é decrescente no intervalo $]x_2, x_3[\cup]x_4, x_5[$

(Q11) Nesta última questão, apresentamos os gráficos de duas funções crescentes num intervalo $[x_1, x_2]$. Pedimos que analisassem o modo como cada uma cresce através da análise do crescimento da função derivada neste mesmo intervalo. Deveriam apresentar justificativa.

1)



a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada “para cima”, sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente. (crescente – decrescente)

Justifique

A função derivada é crescente nesse intervalo, pois acompanhando o movimento do gráfico, as retas tangentes dos x presentes no mesmo possuem valor positivo.

b) O segundo gráfico tem concavidade voltada “para baixo” sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é decrescente. (crescente – decrescente)

Justifique

A função é decresente pois acompanha o movimento decrescente do gráfico (nesse intervalo). Assim, as retas tangentes dos valores de x presentes no mesmo diminuem o seu valor ao longo do intervalo.

Participante R1

(Q1) R1 apresentou a seguinte diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea:

A taxa de variação média e a mesma coisa que a taxa de variação instantânea, porém na media o Δt é um tempo grande (Ex: 2 s), já na instantânea é um tempo infinitamente pequeno deixando a analise do que é pedido muito mais clara e com mais detalhes, e a taxa de variação é a variação do Y em relação ao X

(Q2) Quando perguntamos, o que entendia por derivada, R1 respondeu:

A derivada e a derivação de uma função, ela é utilizada para podermos construir graficos complexos que não sabemos poder [redacted] achar informações sobre o grafico se é positivo, negativo quando, ela tem um nível abaixo (Ex: ax^2+bx+c derivada $2ax+b$) e derivando algumas funções podemos achar outras (Ex [redacted] $\frac{\Delta S}{\Delta t} \to V \to \frac{\Delta V}{\Delta t} \to a$)

(Q3) Apresentou a seguinte interpretação geométrica para a derivada:

A derivada é sempre a tangente de um ponto no grafico

1º - a

2º - 2ax+b

3º - 3ax²+bx+cx+d

(Q4) Em relação à importância de se determinar derivadas, R1 afirmou:

Poder ajudar a traçar graficos que são dificeis, saber a origem do grafico e naquele ponto positivo negativo, [redacted] se derivarmos esses graficos, podemos achar outras funções importantes

(Q5) Pedimos que deduzissem a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$, usando o conceito estudado. Deveriam explicar, passo a passo, a dedução.

R1 não apresentou o desenvolvimento pedido. Apesar de usar a fórmula correta para obter a expressão da derivada de uma função polinomial (no caso um monômio), não utilizou a notação correta para representar a sentença da função derivada, $f'(x)$.

$f(x) = m\,a^{m-1}$

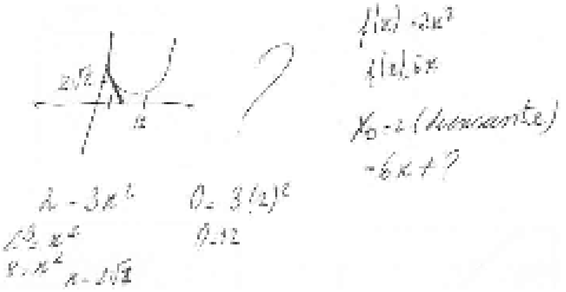
$f(x) = x^3$

$f(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$

$f(x) = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta t \to 0}$

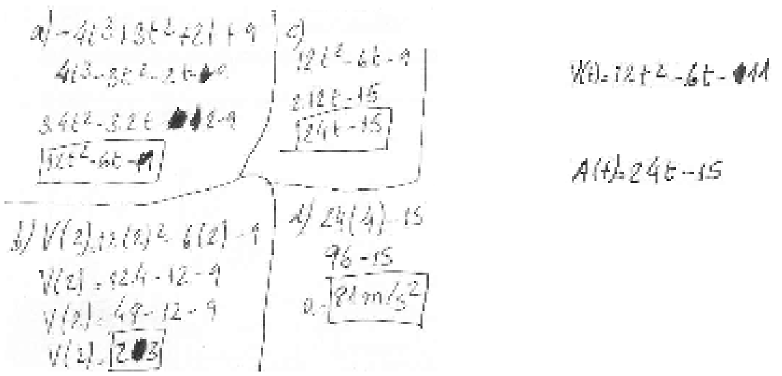
(Q6) Dada uma função real definida por $f(x) = 3x^2$, pedimos para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

O aluno apresentou os seguintes cálculos sem conclusão:



(Q7) Apresentamos um problema de cinemática no qual o deslocamento do móvel era descrito por uma função horária definida por $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Dessa forma, pedimos para que determinassem a sentença da velocidade instantânea e a sentença da aceleração instantânea, a seguir, que calculassem $v(2)$ e $a(4)$.

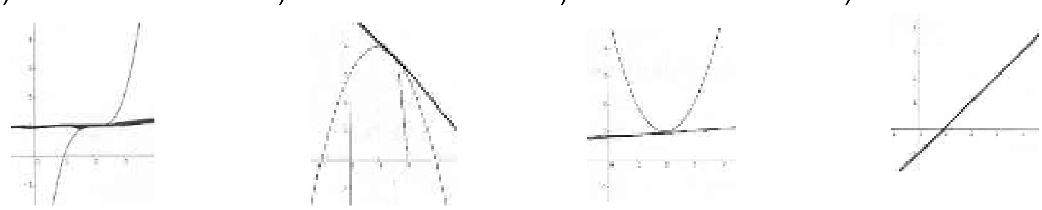
Solução de R1:

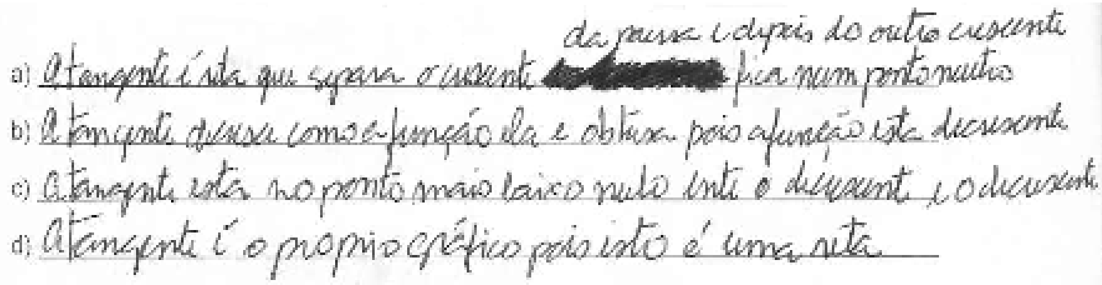


(Q8) Nesta atividade, foram dados, quatro gráficos de funções. Pedimos que traçassem a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$ e, a seguir, justificassem a resposta.

Traçados e justificativas apresentadas por R1:

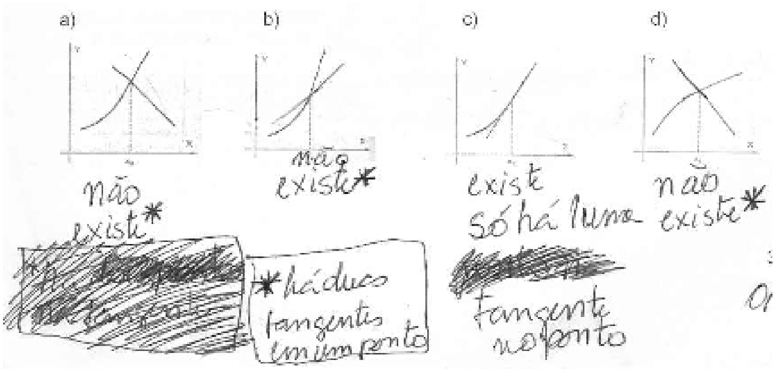
a) b) c) d)

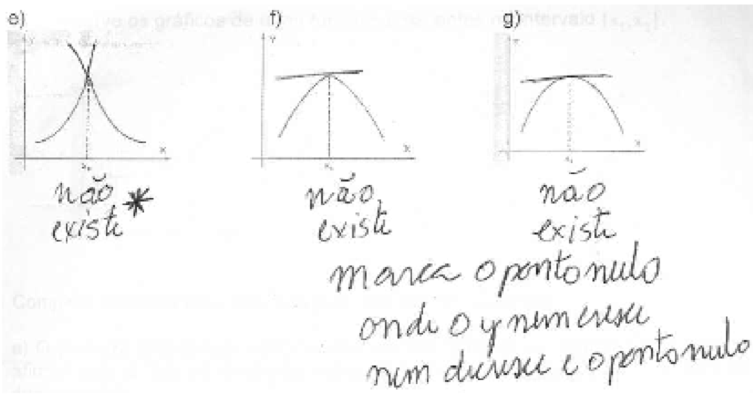




(Q9) Alguns gráficos de função foram apresentados a fim de que fosse observada a existência ou não da derivada no ponto indicado. Pedimos que justificassem as respostas.

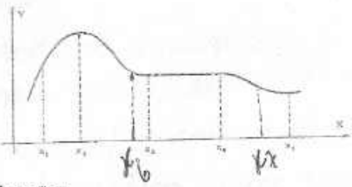
Respostas apresentadas por R1





(Q10) Nesta questão, através da análise do gráfico dado, pedimos que registrassem os intervalos que tivessem derivadas positiva, negativa ou nula. Ao mesmo tempo, deveriam apresentar os intervalos em que a função fosse crescente decrescente ou constante.

Respostas apresentadas por R1:



Essa função:

a) tem derivada positiva entre x_1 e x_2;
é crescente no intervalo $[x_1, x_2[$

b) tem derivada negativa entre x_2 e x_3;
é decrescente no intervalo $]x_2, x_3[$

c) tem derivada nula entre x_3 e x_4;
é constante no intervalo $[x_3, x_4]$

d) tem derivada negativa entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $]x_4, x_5[$

e) tem derivada menor ou igual a zero nos pontos x_3, x_6, x_7
é decrescente no intervalo $]x_2, x_3[$ e $]x_4, x_5[$

(Q11) Nesta última questão, apresentamos os gráficos de duas funções crescentes num intervalo $[x_1, x_2]$. Pedimos que analisassem o modo como cada uma crescia através da análise do crescimento da função derivada neste mesmo intervalo. Deveriam apresentar justificativa.

a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada "para cima", sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente. (crescente – decrescente)

Justifique

quando a concavidade é para cima a derivada é crescente se
for para baixo é decrescente a função 1 ela cresce rapidamente
pois seu grafico começa devagar e depois cresce rapido e no
segundo grafico começa rapido, depois vai indo devagar por isso
o primeiro é mais lento, por isso a derivada é cres-
cente no 1º e no 2º e decrescente no segundo a velocidade decresce no final

b) O segundo gráfico tem concavidade voltada "para baixo" sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é decrescente. (crescente – decrescente)

No primeiro gráfico a derivada é crescente pois ele vai devagar
mais crescente, já no segundo a derivada é decrescente
pois o grafico começa rapido mais vai diminuindo sua
velocidade

Participante R2

(Q1) R2 apresentou a seguinte diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea:

a taxa de variação média é quanto uma função varia em um determinado intervalo e a taxa de variação instantânea é a variação quase que momentânea pois o intervalo tende a zero.

(Q2) Quando perguntamos, o que entendia por derivada, M1 respondeu:

É a taxa de variação instantânea de uma função.

(Q3) Apresentou a seguinte interpretação geométrica para a derivada:

a derivada é o coeficiente angular de uma função

$$TV_A = \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \Delta x \to 0$$

(Q4) Em relação à importância de se determinar derivadas, R2 afirmou:

Ser resultados mais exatos aumentar a precisão para achar um determinado ponto

(Q5) Pedimos que deduzissem a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$, usando o conceito estudado (a definição). Deveriam explicar, passo a passo, a dedução. M1 apresentou a seguinte solução:

$$f'(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{\cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - \cancel{x_0^2}}{\Delta x}$$

$$\frac{(2x_0 + \Delta x)\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} \overset{\Delta x \to 0}{=} 2x_0 \qquad f'(x) = 2x_0$$

1

(Q6) Dada uma função real definida por $f(x) = 3x^2$, pedimos para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

O aluno apresentou a seguinte solução:

$f'(x) = 6x$

$f'(2) = 6.2 = 12$

$f'(x) = 12x - 12$

$12x + b = f'(x_2)$

$12.2 + b = 12$

$24 + b = 12$

$b = -12$

(Q7) Apresentamos um problema de cinemática no qual o deslocamento do móvel era descrito por uma função horária definida por $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Dessa forma, pedimos que determinassem a sentença da velocidade instantânea e a sentença da aceleração instantânea, a seguir, que calculassem $v(2)$ e $a(4)$.

Solução de R2.

$S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$

$4t^3 - 3t^2 + 2t + 9$

$12t^2 - 6t + 1$

a) a função velocidade instantânea;

$12t^2 - 6t + 1$

b) a velocidade instantânea em $t = 2s$.

37 m/s

c) a função aceleração instantânea;

$a = 24t - 1$

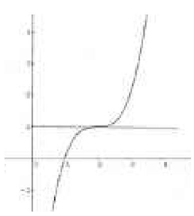
a) a aceleração instantânea desse móvel (em m/s²) no instante $t = 4s$.

96 m/s²

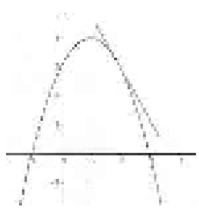
(Q8) Nesta questão, foram dados quatro gráficos de funções. Pedimos que traçassem a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$ e, a seguir, que justificassem a resposta.

Traçados e justificativas apresentados por R2.

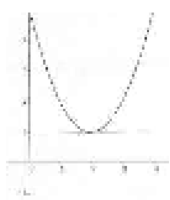
a)



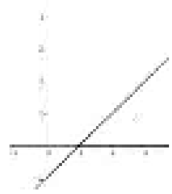
b)



c)



d)



a) mudança de concavidade taxa de variação = 0

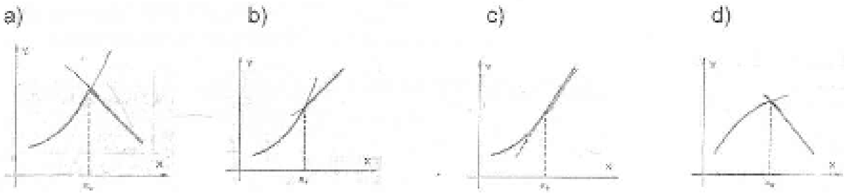
b) É assim pois a tangente passa por esse ponto, é negativa

c) mudança de concavidade, taxa de variação = 0

d) tangente e gráfico coincidem pois possuem a mesma equação e coeficiente angular

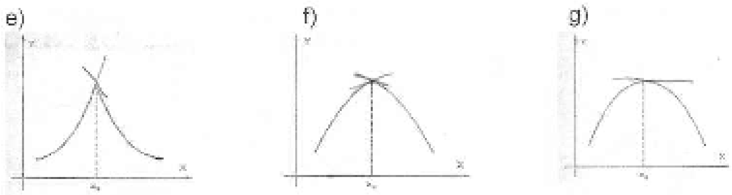
(Q9) Alguns gráficos de função foram apresentados a fim de que fosse observada a existência ou não da derivada no ponto indicado. Pedimos que justificassem as respostas.

Respostas apresentadas por R2:



a, b e d, não possuem derivada no ponto indicado pois no ponto indicado podem ser marcadas 2 tangentes. 3

c possui pois só passa uma tangente pelo ponto.

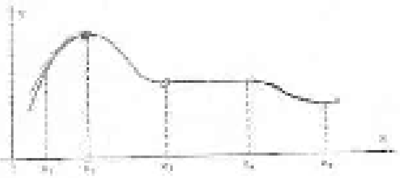


e e f possuem duas tangentes no ponto $x_0 = 2$

g possui derivada pois só passa uma tangente pelo ponto

(Q10) Nesta questão, através da análise do gráfico dado, pedimos que registrassem os intervalos que tivessem derivadas positiva, negativa ou nula. Ao mesmo tempo, deveriam apresentar os intervalos em que a função fosse crescente decrescente ou constante.

Respostas apresentadas por R2:



Essa função:

a) tem derivada positiva entre x_1 e x_2;
é crescente no intervalo $[x_1, x_2[$.

b) tem derivada negativa entre x_2 e x_3;
é decrescente no intervalo $]x_2, x_3[$.

c) tem derivada nula entre x_3 e x_4;
é constante no intervalo $[x_3, x_4]$.

d) tem derivada negativa entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $[x_4, x_5[$.

e) tem derivada menor ou igual a zero entre x_2 e x_5;
é decrescente no intervalo $]x_2, x_5[$

(Q11) Nesta última questão apresentamos os gráficos de duas funções crescentes num intervalo $[x_1, x_2]$. Pedimos que analisassem o modo como cada uma cresce através da análise do crescimento da função derivada neste mesmo intervalo. Deveriam apresentar justificativa.

a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada "para cima", sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente. (crescente – decrescente)

Justifique

A função é crescente e rápida pois ela começa com um coeficiente angular e depois aumenta, aceleração no ritmo de crescimento.

b) O segundo gráfico tem concavidade voltada "para baixo" sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente. (crescente – decrescente)

Justifique

Como a função tem a concavidade virada para baixo, apesar de ser crescente, cada vez é mais lento esse seu crescimento.

Participante R3

(Q1) R3 apresentou a seguinte diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea:

Taxa de variação média é quanto a imagem variou num dado intervalo $(x; x+\Delta x)$.
A taxa de variação instantânea é a taxa de variação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando Δx tende a zero.

(Q2) Perguntamos, o que entendia por derivada, M1 respondeu:

Derivada de um número é a taxa de variação instantânea do gráfico naquele ponto.

(Q3) Apresentou a seguinte interpretação geométrica para a derivada:

A derivada de um número é o valor do ~~cof~~ coeficiente angular da reta tangente à curva naquele ponto

(Q4) Em relação à importância de se determinar derivadas, R3 afirmou:

Conhecer o comportamento (crescente, decrescente ou constante) da função em um ponto.

(Q5) Pedimos que deduzissem a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x) = x^2$ ou $f(x) = x^3$, usando o conceito estudado. Deveriam explicar, passo a passo, a dedução.

R3 apresentou o seguinte desenvolvimento:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{x_0+\Delta x - x_0} = \frac{(x_0+\Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \left(\cancel{x_0^3} + 2x_0^2\Delta x + 2x_0\Delta x^2 + x_0\Delta x^2 + \Delta x\, x_0^2 + \Delta x^3 - \cancel{x_0^3}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{\Delta x}} = 2x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x + x_0^2 + \Delta x^2 \cong$$

$(\Delta x \to 0)$

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} \cong 3x_0^2 \quad (\Delta x \to 0)}$$

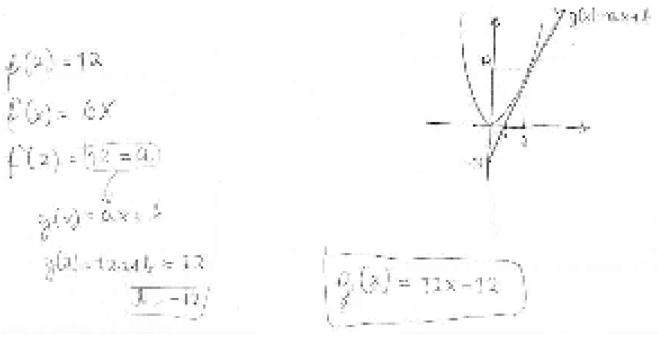
É a variação da imagem $(\Delta f(x))$ sobre a variação do respectivo domínio (Δx) quando levamos em conta uma variação Δx tão curta que tende a zero.

1

A fórmula é deduzida a partir da idéia que x_0 é o primeiro valor do domínio e tem imagem $f(x_0) = x_0^3$; o segundo ponto do domínio é $(x_0+\Delta x)$, cujo imagem é $f(x_0+\Delta x) = (x_0+\Delta x)^3$.

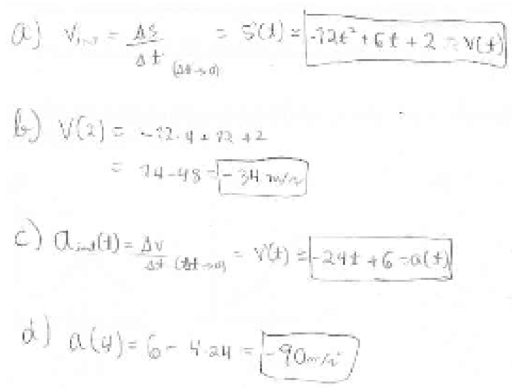
(Q6) Dada uma função real definida por $f(x) = 3x^2$, pedimos para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

O aluno apresentou a seguinte solução:



(Q7) Apresentamos um problema de cinemática no qual o deslocamento do móvel era descrito por uma função horária definida por $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Dessa forma, pedimos que determinassem a sentença da velocidade instantânea e a sentença da aceleração instantânea, a seguir, que calculassem $v(2)$ e $a(4)$.

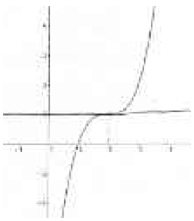
Solução de R3



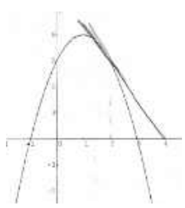
(Q8) Nesta questão, foram dados quatro gráficos de funções. Pedimos que traçassem a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$ e, a seguir, que justificassem a resposta.

Traçados e justificativas apresentadas por R3.

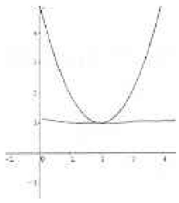
a)



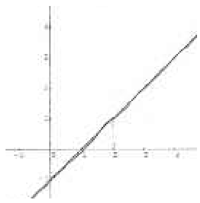
b)



c)



d)



a) Nos pontos onde há mudança de concavidade, a variação é nula

b) Quando a função é decrescente, a derivada é negativa

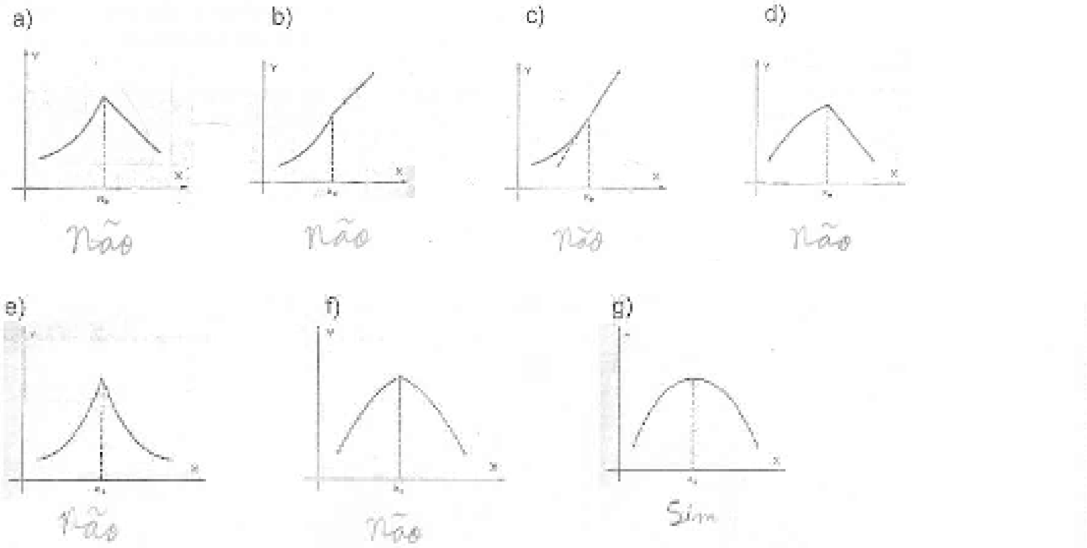
c) Nos pontos onde há mudança de concavidade, a variação é nula

d) Como a taxa de variação é constante, a reta tangente a uma reta é a própria reta.

(Q9) Alguns gráficos de função foram apresentados a fim de que fosse observada a existência ou não da derivada no ponto indicado. Pedimos que justificassem a resposta.

Não apresentou nenhum registro nos gráficos.

Respostas apresentadas por R3:

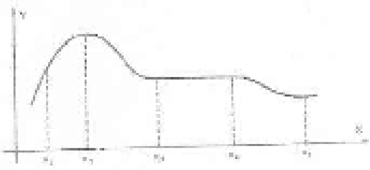


Em a, b, c, d, e e f, foram assinalados pontos onde a função muda de comportamento, ou seja, a função passa a ser definida por uma sentença diferente.

Em g, foi escolhido um ponto de uma função afim.

(Q10) Nesta questão, através da análise do gráfico dado, pedimos que registrassem os intervalos que tivessem derivadas positiva, negativa ou nula ao mesmo tempo, deveriam apresentar os intervalos em que a função fosse crescente decrescente ou constante.

Respostas apresentadas por R3:



Essa função:

a) tem derivada positiva entre x_1 e x_2;
é crescente no intervalo $[x_1 ; x_2]$.

b) tem derivada negativa entre x_2 e x_3;
é decrescente no intervalo $[x_1 ; x_2]$.

c) tem derivada nula entre x_3 e x_4;
é constante no intervalo $[x_3 ; x_4]$.

d) tem derivada negativa entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $[x_4 ; x_5]$.

e) tem derivada menor ou igual a zero entre x_4 e x_5;
é decrescente no intervalo $[x_4 ; x_5]$

(Q11) Nesta última questão apresentamos os gráficos de duas funções crescentes num intervalo $[x_1, x_2]$. Pedimos que analisassem o modo como cada uma cresce através da análise do crescimento da função derivada neste mesmo intervalo. Deveriam apresentar justificativa.

R3 não justificou nenhuma das respostas dadas a essa questão.

a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada "para cima", sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é crescente. (crescente – decrescente)

b) O segundo gráfico tem concavidade voltada "para baixo" sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é decrescente. (crescente – decrescente)

Anexo V

Ficha I

Nome: ___________________________________ Data: ____/____/____

Questionário

O que você entende por função?

Explique suas principais idéias sobre função.

O que é domínio de uma função? O que é imagem de uma função?

Dada uma função f e x elemento do domínio, o que representa a notação f(x)?

Qual a sentença que representa a função polinomial do 1º grau?

Considerando $x \in \mathbb{R}$, qual a representação gráfica dessa função?

Na fórmula da função polinomial do 1º grau, que valor constante representa o coeficiente angular?

Qual a interpretação geométrica do coeficiente angular?

O que significa determinar velocidade média de um móvel num determinado intervalo de tempo?

O que você entende por velocidade instantânea?

Atividades relacionadas à 1ª etapa

Anexo VI

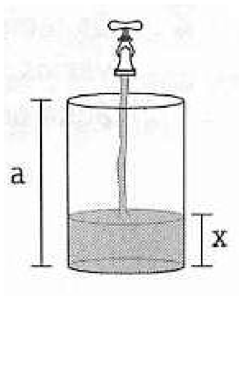
Ficha II

Nome: ___________________________________ Data: ____/____/____

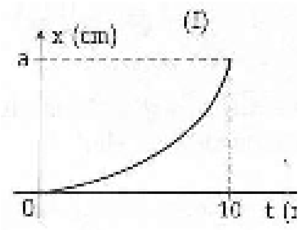
Atividade

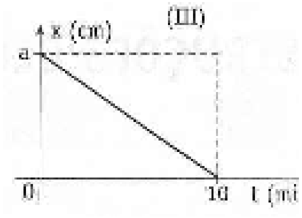
Resolva os problemas:

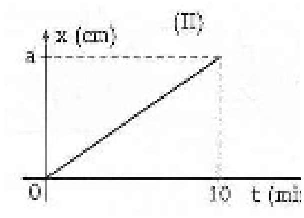
1) Um reservatório cilíndrico de altura a (em cm), com capacidade máxima de 100 L, vai ser usado pela primeira vez. Para enchê-lo, abriu-se uma torneira que despeja 10 L de água por minuto.



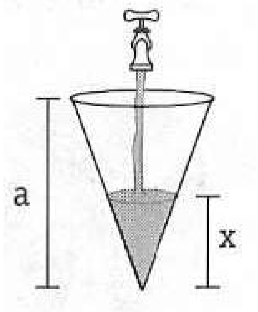
Qual dos gráficos seguintes expressa corretamente a variação da altura *x* da coluna de água em função do tempo *t*?



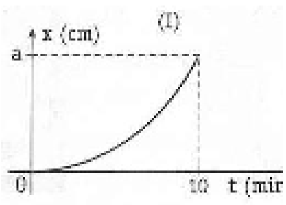


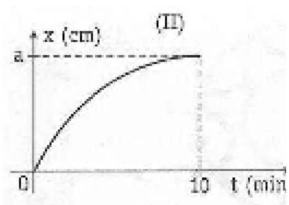


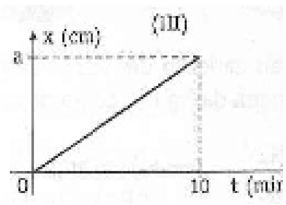
2) Um reservatório cônico de altura a (em cm), com capacidade máxima de 100 L, vai ser usado pela primeira vez. Para enchê-lo, abriu-se uma torneira que despeja 10 L de água por minuto.



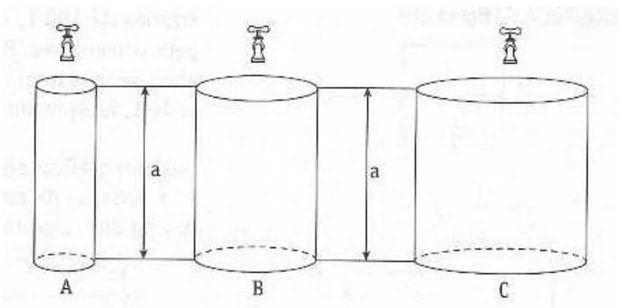
Qual dos gráficos seguintes expressa corretamente a variação da altura x da coluna de água em função do tempo t?



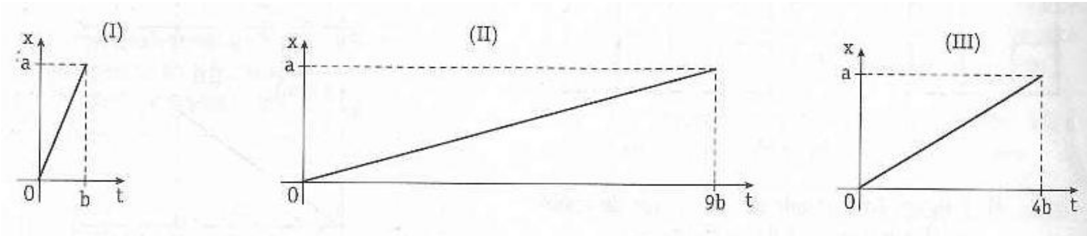




3) Os recipientes cilindricos A, B, e C, que têm altura a e raios da base respectivamente iguais a r, 2r e 3r, estão vazios. As torneiras que os abastecem estão igualmente reguladas para despejar o mesmo número de litros de água por minuto.



Os gráficos mostram a variação da altura x da coluna de água em função do tempo t. Associe cada recipiente ao gráfico correspondente a ele:



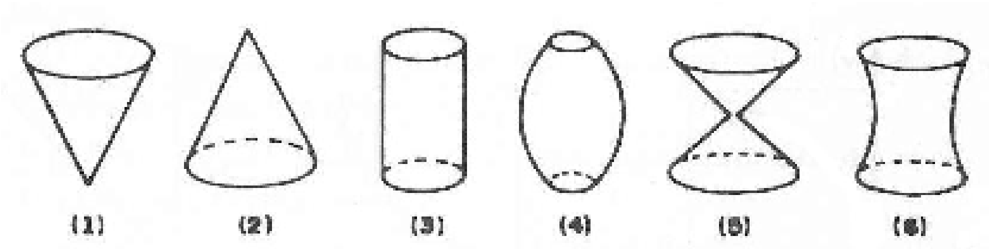
Nesta atividade, a partir da análise das formas dos objetos, o aluno deveria associar o melhor gráfico que correspondesse à variação da altura em função do tempo.

Anexo VII

Ficha III

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

A idéia de variação de uma função está relacionada com o seu comportamento (crescimento, decrescimento ou estabilidade) num determinado intervalo do seu domínio. O problema proposto é o seguinte: são dados diversos reservatórios com a mesma capacidade e a mesma altura. (Gravina, 1992)



Temos torneiras enchendo cada um dos reservatórios e vamos admitir que a vazão da água é a mesma para todos eles, constante e igual a k metros cúbicos por minuto. Queremos analisar o comportamento do nível de água no decorrer do tempo. Seja $f_i(t)$ a altura do nível de água no instante t (i = 1,2,3,4,5,6, conforme o reservatório); vamos medir a altura em metros e o tempo em minutos. Temos $f_i(0) = 0$ e $f_i(t) = A$, onde A é a altura dos reservatórios e t é o tempo necessário para enchê-los. É claro que a altura $f_i(t)$ aumenta à medida que t aumenta, ou seja, todas as funções são crescentes. Mas existem diferenças significativas nestas funções que dizem respeito ao aumento mais rápido ou mais lento do nível de água, conforme o tipo de reservatório.

Atividade 1

Analisando a forma de cada um dos reservatórios, descreva de que maneira a altura varia em função do tempo no início, meio e fim do processo. Use, quando necessário, as palavras lentamente, rapidamente e uniformemente.

Reservatório (1)

Reservatório (2)

Reservatório (3)

Reservatório (4)

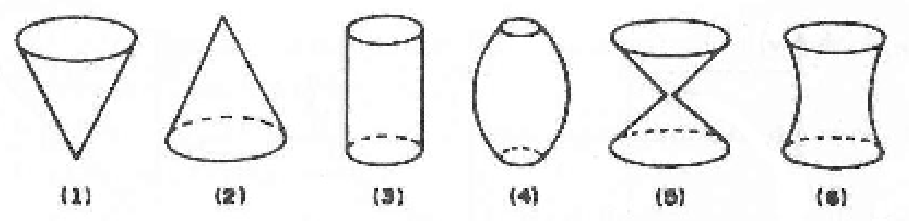
Reservatório (5)

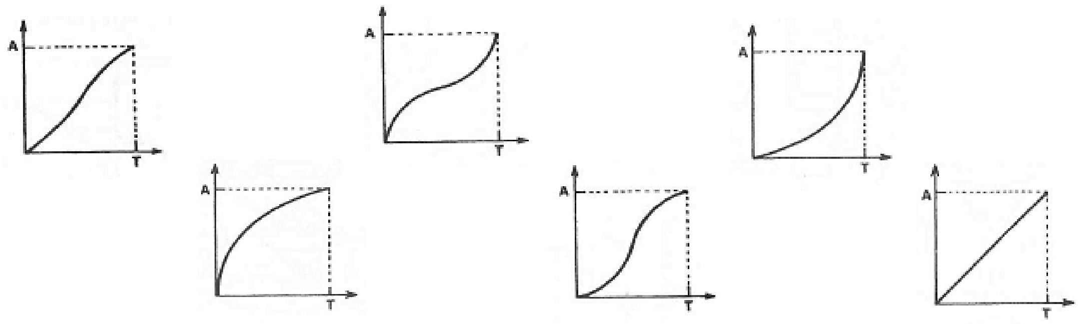
Reservatório (6)

A atividade 1 analisaria a velocidade do crescimento de cada função definida por $f_i(t)$.

Atividade 2

Relacione a forma do pote com o gráfico da variação da altura em função do tempo de cada um deles.

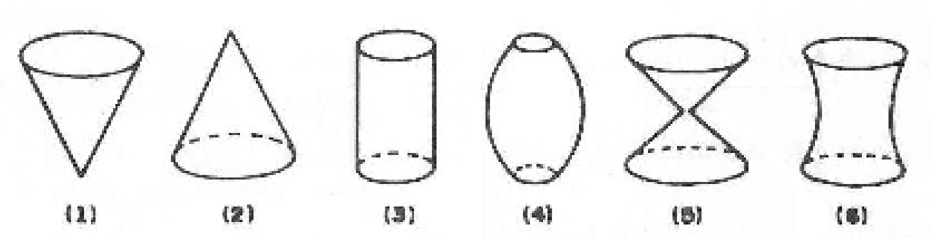




Depois da análise feita na atividade 1, o aluno deveria associar o melhor gráfico que descrevesse a velocidade de crescimento a partir da forma do recipiente.

Atividade 3

Esboce os gráficos das alturas em função do tempo para cada reservatório.



Reservatório (1)

f_1

Reservatório (2)

f_2

Reservatório (3)

f_3

Reservatório (4)

f_4

Reservatório (5)

f_5

Reservatório (6)

f_6

Nosso objetivo é entender qual o conceito matemático que registra estas diferenças no comportamento crescente dessas funções.

Depois de corrigir e recolher a atividade 2, foi aplicada a atividade 3, cujo objetivo era verificar se o aluno compreendeu a idéia do crescimento com velocidades diferentes através da reprodução dos gráficos analisados na atividade anterior.

Atividades relacionadas à 2ª etapa

Anexo VIII

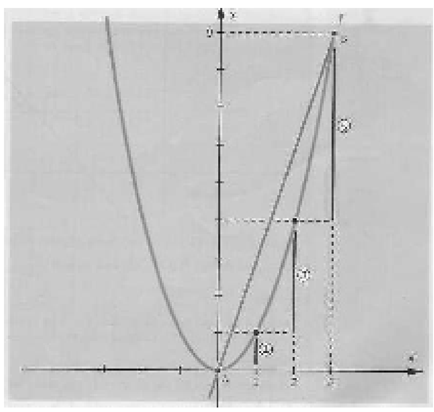
Ficha IV

Nome: __________________________________ Data: ____/____/____

Atividade 1

O conceito de *taxa de variação média* está na base do estudo de funções e exprime a razão com que a função "cresce" num dado intervalo do domínio.

Observe o gráfico da função quadrática definida por $f(x) = x^2$.



Quanto variou $f(x)$ quando x variou de 0 a 3?

Qual foi a variação média da função nesse intervalo?

Pelo gráfico, podemos notar que $f(x)$ variou de___ a ___ quando a variável x variou de 0 a 3. Em média, a variação foi de:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

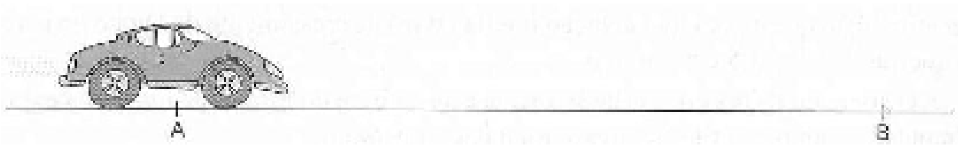
O número __, chamado de *taxa de variação média* da função no intervalo $[0;3]$, revela que y variou, em média, ___ unidades para cada unidade da variável x.

Note que, no intervalo $[0;1]$, $f(x)$ variou ___ unidade; no intervalo $[1;2]$, ela variou ___ unidades; e no intervalo $[2;3]$, variou ____ unidades.

Em geral, chamamos de *taxa de variação média* (TV_m) de uma função f, num intervalo de seu domínio, o quociente entre a variação (Δy) de $f(x)$ e a variação (Δx) da variável x nesse intervalo.

Atividade 2

Vejamos ainda mais um exemplo:



Um automóvel desloca-se de A para B. A tabela a seguir relaciona o espaço percorrido com o tempo decorrido:

Tempo (segundos)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
Espaço (metros)	0	2	5	9	14	20	27	35	...

Calcule as taxas de variação média do espaço em função de t:

- no intervalo $[2;\ 3]$ $\quad TV_m =$
- no intervalo $[4;\ 5]$ $\quad TV_m =$
- no intervalo $[6;\ 7]$ $\quad TV_m =$

Vemos que o movimento é cada vez mais rápido, portanto é acelerado.

Calcule agora a taxa de variação média, por exemplo, entre 2 e 7 segundos:

- no intervalo $[2;\ 7]$ $\quad TV_m =$

Podemos dizer que a velocidade média entre 2 e 7 segundos foi de _______.

As atividades 1 e 2 tinham o objetivo de interpretar a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Anexo IX

Ficha V

Nome: ________________________________ Data: ___/___/___

Anotações de aula

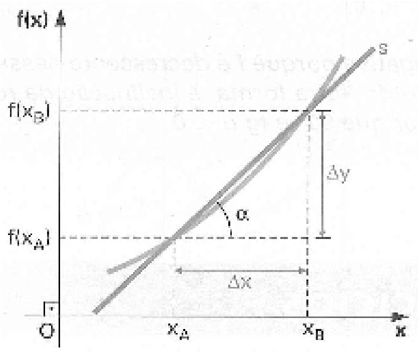
Generalizando para qualquer função contínua, podemos dizer que:

A **taxa de variação média** de uma função *f* no intervalo [x_A ; x_B] com $x_A < x_B$ é definida por:

$TV_m =$ $\qquad\qquad =$ $\qquad$,

sendo $\Delta y =$ $\qquad\qquad$ e $\Delta x =$

A taxa de variação média de uma função f, num intervalo [x_A ; x_B], pode ser interpretada geometricamente considerando-se a reta ***s*** (secante) que passa pelos pontos A(x_A , $f(x_A)$) e B(x_B , $f(x_B)$) do gráfico de f .



O coeficiente angular da reta ***s*** é:

$a =$ no intervalo [x_A ; x_B].

Ou seja, o coeficiente angular da reta que passa por **A** e **B** é a ____________________ de f em [x_A ; x_B].

A tangente de α será calculada através da razão $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ e não pela medida de α , pois esta pode variar dependendo da escala utilizada nos dois eixos coordenados. O desenho utilizado é apenas ilustrativo.

Passamos a definir formalmente taxa de variação média como uma razão de variações de grandezas. A seguir, fizemos a interpretação geométrica desta razão associando-a ao coeficiente angular da reta secante ao gráfico.

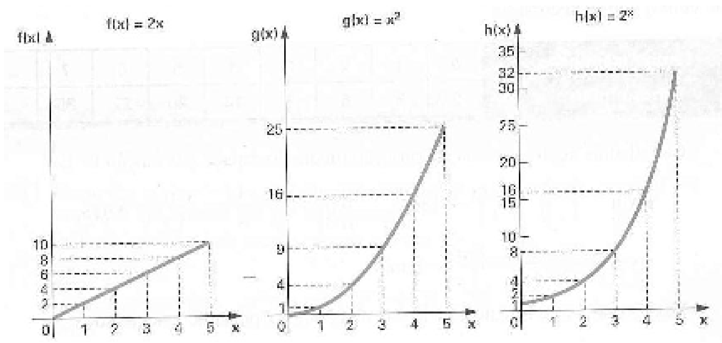
Anexo X

Ficha VI

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Atividade

Analisando as três funções abaixo no intervalo *[0; 5].*



A partir de seus gráficos e com o que sabemos sobre funções, podemos afirmar que as três funções são crescentes nesse intervalo, mas há uma diferença na forma como elas crescem.

Os valores de $f(x)$ crescem 2 unidades cada vez que x varia uma unidade. Já os valores $g(x)$ e $h(x)$ crescem de forma diferente quando x varia uma unidade.

1) a)Complete a tabela abaixo.

x no intervalo	Taxa de variação média de f ($f(x) = 2x$).	Taxa de variação média de g ($g(x) = x^2$).	Taxa de variação média de h ($h(x) = 2^x$).
[0; 1]			
[1; 2]			
[2; 3]			
[3; 4]			
[4; 5]			
[0;5]	A taxa de variação média de f é _______________	A taxa de variação média de g é ____________	A taxa de variação média de h é ____________

Podemos afirmar que, apesar de as três funções serem crescentes no intervalo [0; 5], elas crescem com velocidades diferentes.

2) Observamos que *a* TV_m *da função polinomial do 1º grau é* _______________ em todos os intervalos e, no exemplo acima, igual a 2. Vemos que esta TV_m corresponde ao ________________ da reta que representa esta função. *A variação foi a mesma em todos os intervalos considerados*.

3) No mesmo intervalo de *x*, a função exponencial *h* cresce mais rapidamente que as outras duas funções. E mais, $h(x) = 2^x$ varia (cresce) mais rapidamente nos últimos intervalos, veja a tabela.

Mais uma vez exploramos a idéia de velocidade de crescimento, utilizando uma tabela para análise da taxa de variação média nos intervalos definidos.

Anexo XI

Ficha VII

Nome: ___________________________________ Data: ____/____/____

Atividade

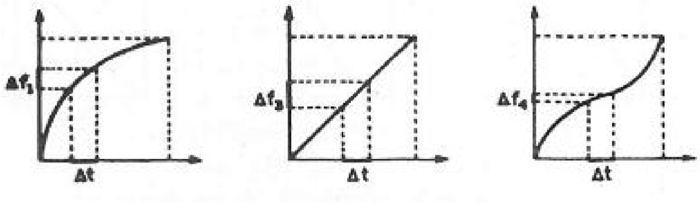
Ao esboçar os gráficos na atividade 2 da Ficha III, o que fizemos, através da observação, foi analisar a razão com que sobe o nível de água em intervalos de tempo bastante pequenos. Se Δt é uma fração de tempo, t é um dado instante de tempo e [t , t + Δt] é um intervalo, a razão

$$\frac{\Delta f_i(t)}{\Delta t} = \frac{f_i(t+\Delta t) - f_i(t)}{\Delta t}$$

(que é uma razão do tipo *metros/minuto*) nos fornece quantos metros por minuto está subindo o nível de água no intervalo [t , t + Δt] , já que $f_i(t+\Delta t) - f_i(t)$ é a variação do nível de água neste intervalo e Δt é a fração de tempo decorrida a partir de t .

Vamos analisar esta razão graficamente. Para isto, tomando intervalos de tempo de mesmo tamanho Δt em diferentes fases do processo. Assim, nos gráficos a seguir, vemos que, conforme avançamos no tempo:

Lembre-se: $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$



Nesta atividade os alunos foram orientados a completar as lacunas de acordo com a velocidade de crescimento (lento, rápido, constante).

(a) $\dfrac{\Delta f_1(t)}{\Delta t}$ diminui, o que nos diz que o aumento do nível de água é cada vez mais ______________;

(b) $\dfrac{\Delta f_3(t)}{\Delta t}$ é constante, o que nos diz que o aumento do nível de água é ________________ ;

(c) $\dfrac{\Delta f_4}{\Delta t}$ diminui até chegar ao meio do processo e, depois, começa a aumentar, o que nos diz que o nível de água sobe cada vez mais ____________ até a metade do reservatório e, depois, cada vez mais _____________ ;

(d) os casos $\dfrac{\Delta f_2}{\Delta t}$, $\dfrac{\Delta f_5}{\Delta t}$ e $\dfrac{\Delta f_6}{\Delta t}$ serão analisados oralmente (compare $\dfrac{\Delta f_2}{\Delta t}$ com $\dfrac{\Delta f_1}{\Delta t}$ e $\dfrac{\Delta f_5}{\Delta t}$ com $\dfrac{\Delta f_6}{\Delta t}$).

É importante notar que a razão $\dfrac{\Delta f_i}{\Delta t}$ nos dá a informação relevante sobre como é o crescimento de f_i sempre que Δt for bastante pequeno e, quanto menor Δt, melhor é a informação. Se Δt for grande, o crescimento não é registrado uma vez que, na média, esta informação se perde.

Este parágrafo foi lido com o grupo. Conversamos sobre a importância da razão $\dfrac{\Delta f_i}{\Delta t}$ e da escolha do Δt para analisar o comportamento da função.

Anexo XII

Ficha VIII

Nome: ___________________________________ Data: ____/____/____

Atividade

1) Responda, justificando.

a) Qual a taxa de variação média da função $s(t) = 5t + 2$ sendo t tempo em segundos e s espaço percorrido em metros?

b) Qual a interpretação, na Física, desta taxa de variação?

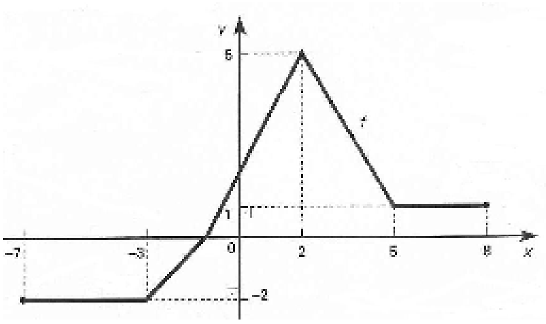
c) Se uma função tem taxa de variação constante e não nula num intervalo $I \subset D(f)$, seu gráfico nesse intervalo, no plano cartesiano, será uma linha _________.

d) Se uma função tem taxa de variação variável num intervalo $I \subset D(f)$, seu gráfico nesse intervalo, no plano cartesiano, será uma linha ____________.

e) Que tipo de função apresenta taxa de variação nula?

f) Duas funções polinomiais do 1º grau são representadas pelas sentenças $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = 3x - 2$. Analisando a taxa de variação de cada função, que posição no plano cartesiano (paralelas/ concorrentes), teriam as retas que representam essas funções?

2) Considere os intervalos [-7,-3], [-3,-1], [-1,2], [2, 5] e [5, 8] do gráfico de uma função f. A seguir, determine o que é pedido em cada item:



a) D(f) = ____________ Im(f) = _______________

b) Em que intervalo(s) do domínio a função é crescente?

c) Em que intervalo do domínio a taxa de variação média é negativa?

d) Em que intervalo de *x* temos $f(x) \geq 0$?

e) Em que intervalo do domínio há maior taxa de variação média? Qual o valor desta taxa?

f) Qual a taxa de variação média no intervalo *[5, 8]* ?

3) A desvalorização de um equipamento industrial ocorre segundo uma função do 1°grau. O equipamento vale hoje R$ 8 000,00 e daqui a seis anos, R$ 5 000,00.
Responda:

a) Qual a sentença que relaciona valor (V) e tempo de desvalorização (t) do equipamento?
b) Qual a taxa média de desvalorização deste equipamento?
c) Determine o intervalo de tempo para o qual o equipamento em questão ainda possuirá valor comercial.

4) Esboce o gráfico da função real dada pela equação $y = 4 - x^2$ e responda:

a) Quando *x* passa de 0 para 4, de quanto varia y?
b) Qual a taxa de variação média no intervalo $[0; 4]$?
c) Qual é a taxa de variação média dessa função quando *x* varia de 0 a 2?

5) Esboce o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e calcule sua taxa de variação média nos seguintes intervalos de *x*:

a) [- 1; 0];
b) [0; 1];
c) [1; 2].

Em qual desses intervalos a função varia mais rapidamente?

Aplicamos esta atividade no final da segunda etapa com o objetivo de revisar e reforçar os conceitos de taxa de variação média até então estudados.

Atividades relacionadas à 3ª etapa

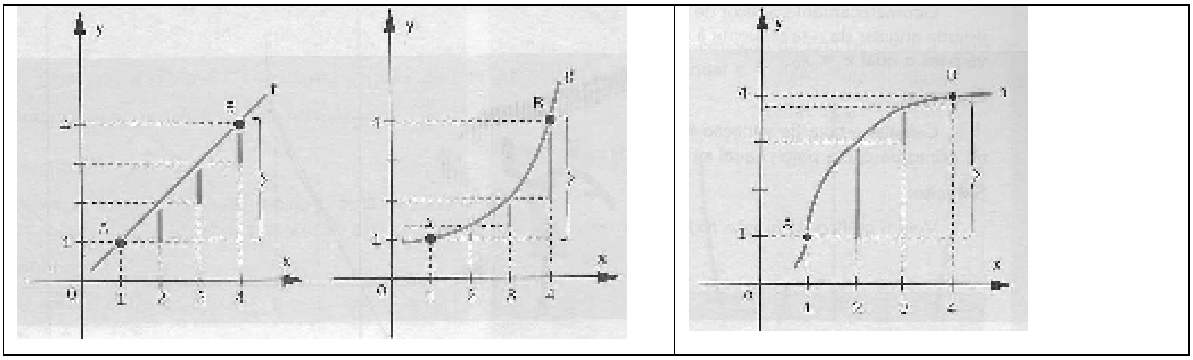
Anexo XIII

Ficha IX

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Atividade

Qual a taxa de variação média das funções abaixo no intervalo *[1; 4]*?



Podemos constatar que a taxa de variação média dessas três funções, no intervalo *[1;4],* é igual a _____ , isto é, no intervalo *[1;4]*, elas variam em média _________________ para cada unidade da variável *x*.

Entretanto, como vemos nos gráficos, a função *f* tem variação __________ (função polinomial do 1º grau), a função *g* varia (cresce) mais ___________ no começo do intervalo e mais _______________ no final, e a função *h* varia (cresce) mais _______________ no início do intervalo e mais ______________ no final.

(Completar as lacunas acima com as palavras rápido, devagar ou constante)

Observando nos gráficos as variações das três funções no intervalo *[1;2]*, por exemplo, notamos que a função *g* variou menos, e a função *h* variou mais.

Assim, quanto menor for o intervalo a ser analisado de uma função, mais significativa será a análise da variação no intervalo em questão.

Nesta atividade, mostramos aos alunos que a taxa de variação média nem sempre oferece uma análise precisa do comportamento de uma função num intervalo do domínio.

Anexo XIV

Ficha X

Nome: ___________________________________ Data: ____/____/____

Atividade 1

a) Traçar o gráfico da função f definida por $f(x) = x^2 - 3x$.

b) Magnificar a curva $f(x) = x^2 - 3x$ em torno do ponto $x_0 = 2$.

c) Mudar a janela gráfica para *[1,8 ; 2,2]* × *[-3; 1]*

Atividade 2

a) Traçar o gráfico da função *g* definida por $g(x) = 2^x$.

b) Magnificar a curva $g(x) = 2^x$ em torno do ponto $x_0 = 1$.

c) Mudar a janela gráfica para $[-1; 2] \times [-0,5; 4,5]$

d) Mudar a janela gráfica para $[0,6 ; 1,4] \times [-0,5; 4,5]$

Atividade 3

a) Traçar o gráfico da função g definida por $h(x) = sen\, x$.

b) Magnificar a curva $h(x) = sen\, x$ no ponto $x_0 = \dfrac{3\pi}{2}$.

c) Mudar a janela gráfica para $[2,9 ; 6,5] \times [-2; 2]$

d) Mudar a janela gráfica para $[1,4\pi ; 1,6\pi] \times [-2; 2]$

Atividade 4

a) Construir a reta *r* tangente à curva $f(x) = x^2 - 3x$ no ponto $x_0 = 2$ na janela gráfica $[-3; 8] \times [-5; 5]$

b) Mudar a janela gráfica para $[-1; 3] \times [-3; 4]$

c) Mudar novamente a janela gráfica para $[1,5; 2,5] \times [-2,5; -1,5]$

d) Repetir o procedimento para a janela gráfica $[1,8; 2,1] \times [-2,2; -1,8]$

Responda:

Quando magnificamos o gráfico em torno do ponto $x_0 = 2$, ou seja, buscamos uma janela gráfica conveniente para observar “mais de perto” a parábola e a reta tangente à parábola em $x_0 = 2$, o que podemos constatar em relação a esses dois gráficos?

____

____

Nesta atividade, utilizamos o organizador genérico Graphmatica. O aluno pôde, através da mudança de janela gráfica, magnificar o gráfico da função em torno de um ponto x_0 e observá-lo “mais de perto”. Desta forma, pôde perceber a retidão local do gráfico da função (diferenciável).

Construiu a reta tangente ao gráfico no mesmo ponto x_0, utilizando recurso do programa e pôde, assim, verificar a linearidade local.

Anexo XV

Ficha XI

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Atividade 1

Responda:

Quantos pontos em comum podem ter uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

( ) um único ponto.

( ) dois pontos.

( ) pelo menos um ponto.

( ) infinitos pontos.

Atividade 2

Traçar o gráfico das funções abaixo e a seguir a reta tangente ao gráfico nos pontos dados. Suponha que as funções tenham domínio R.

1) Traçar a curva definida por $f_1(x) = x^3$ e a reta tangente à curva no ponto $x_0 = 0{,}5$.

Usar a janela gráfica $[-2; 2] \times [-2; 2{,}5]$

Quantos pontos os gráficos têm em comum? ______________

2) Traçar a curva definida por $f_2(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ e a reta tangente no ponto $x_0 = 1$.

Usar a janela gráfica $[-3; 4] \times [-2; 4]$

Quantos pontos os gráficos têm em comum? ______________

3) Traçar a curva definida por $f_3(x) = x^2 - 4x + 3$ e a reta tangente à curva no ponto $x_0 = 2$.

Usar a janela gráfica $[-2; 6] \times [-3; 4]$

Quantos pontos os gráficos têm em comum? ______________

4) Traçar a curva definida por $f_4(x) = \dfrac{x}{2} - 1$ e a reta tangente no ponto $x_0 = 3$.

Usar a janela gráfica $[-3; 6] \times [-4; 4]$.

Quantos pontos os gráficos têm em comum? ______________

Responda:

Quantos pontos em comum têm uma reta tangente a um gráfico e o próprio gráfico?

( ) um único ponto.

( ) dois pontos.

( ) pelo menos um ponto.

( ) infinitos pontos.

Neste momento torna-se necessário fazer algumas considerações em relação à reta tangente a um gráfico num ponto x_0 .

Depois da primeira atividade colocamos no quadro branco a figura familiar da reta tangente a um círculo e perguntamos se a reta tangente sempre tocaria o gráfico em um único ponto. Sem dar a resposta, iniciamos a segunda atividade desta ficha utilizando o Graphmatica.

Após a segunda atividade discutimos sobre as cinco situações apresentadas de reta tangente a um gráfico.

Anexo XVI

Ficha XII

Nome: ___________________________________ Data: ____/____/____

Anotações de aula

Relacionar as principais idéias apresentadas até o momento.

1. ____
   ____
   ____
2. ____
   ____
   ____
3. ____
   ____
   ____
4. ____
   ____
   ____
5. ____
   ____
   ____

Antes de relacionarmos as principais idéias trabalhadas durante o curso, no quadro branco, propusemos a seguinte atividade: cada participante deveria fazer uma relação prévia das noções estudadas no verso da ficha e a seguir ler para o grupo. Desta forma, poderíamos observar as principais idéias retidas pelo aluno.

A seguir, listamos formalmente as principais idéias até então estudadas e buscamos uma relação lógica entre elas. Esta relação pode ser observada na seção 2.2.5.

Anexo XVII

Ficha XIII

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Atividade

Resolva o problema:

A posição s em função do instante t de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória retilínea, é dada por $s(t) = 2t^2 + 3$, (para s em metros e t em segundos). Determinar:

Lembre-se: $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$

a) a posição desse móvel nos instantes $t = 2\ s$ e $t = 3\ s$.

b) a velocidade média no intervalo de $t = 2\ s$ a $t = 3\ s$.

c) um valor aproximado para a velocidade instantânea nos instantes t = 2s e t = 3s baseado nos dados obtidos nas tabelas abaixo.

tempo (segundos)	velocidade média
t = 1,98 e t = 2,0100	
t = 1,99 e t = 2,0010	
t = 1,999 e t = 2,0009	
t = 1,9999 e t = 2,0001	

t = 2	velocidade instantânea $v_i =$

tempo (segundos)	velocidade média
t = 2,98 e t = 3,0100	
t = 2,99 e t = 3,0010	
t = 2,999 e t = 3,0009	
t = 2,9999 e t = 3,0001	

t = 3	velocidade instantânea $v_i =$

d) a velocidade instantânea nos instantes $t = 2\ s$ e $t = 3\ s$ usando a fórmula da Física. Lembre-se: $v_i(t) = v_0 + at$.

Nesta atividade, utilizamos problema de Cinemática, familiar da Física para retomar a taxa de variação média (velocidade média) e discutir a idéia de velocidade instantânea.

Anexo XVIII

Ficha XIV

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____Atividade

Resolver a letra d) do problema anterior utilizando os conceitos estudados e o recurso do *Graphmatica*.

Utilizando o *Graphmatica*, traçar o gráfico da função definida por $s(t) = 2t^2 + 3$ com domínio [0, ∞[a seguir, magnificar o gráfico em torno do ponto t = 2 e a seguir, através do comando desenhar tangente, traçar a tangente neste ponto.

Aparecerá na tela do Graphmatica o gráfico da função $s(t) = 2t^2 + 3$, a reta tangente em *t = 2* e uma janela informando a equação da função, as coordenadas do ponto de tangência ________, a equação da reta tangente ___________ e a inclinação (coeficiente angular) _____.

Desta forma podemos constatar (comparando com o cálculo feito anteriormente) que a velocidade instantânea em *t = 2 s*, v_i = *8 m/s*, corresponde ao ____ no ponto em questão. Da mesma forma em *t = 3 s* a reta tangente tem equação ____________ e conseqüentemente teremos v_i = _______.

Foi solicitado aos participantes que traçassem o gráfico da função horária do problema anterior, magnificassem o gráfico em torno de t = 2 e, a seguir, traçassem a reta tangente nesse ponto. Repetimos o procedimento para t = 3. O programa apresentou uma janela com informações sobre a curva, o ponto de tangência, a equação da reta tangente e o declive (coeficiente angular) desta reta. Desta forma, pedimos aos alunos que comparassem estas informações com os resultados obtidos na letra d) do problema apresentado na ficha anterior.

Discutimos, a relação da velocidade instantânea com o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico. Passamos a fazer a seguinte relação no quadro branco:

$velocidade\ média \rightarrow taxa\ de\ \mathrm{var}iação\ média \rightarrow coeficiente\ angular\ da\ reta\ \mathrm{sec}ante$

$velocidade\ ins\tan tânea \rightarrow taxa\ de\ \mathrm{var}iação\ ins\tan tânea \rightarrow coeficiente\ angular\ da\ reta\ \tan gente$

Levantamos, aqui, a seguinte questão: Se a taxa de variação média (TV_m) de uma função num determinado intervalo pode ser determinada pela razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, qual seria a expressão que determinaria a taxa de variação instantânea (TV_i) de uma função (diferenciável) num determinado instante t?

Anexo XIX

Ficha XV

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Anotações de aula

Obtendo a expressão algébrica da variação instantânea.

Para chegarmos à expressão algébrica da taxa de variação instantânea, nos valemos da seqüência de imagens da seção 2.2.6. Utilizamos, aqui, aula expositiva com o recurso do quadro branco.

Anexo XX

Ficha XVI

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

A **taxa de variação instantânea** de uma função f num ponto $x_0 \in I \subset D(f)$ é dada por:

$$\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow TV_i,\ quando\ \ \Delta x \rightarrow 0}$$

Atividade

Determinar a expressão algébrica da taxa de variação instantânea de algumas funções elementares.

Função constante: $f : R \to R, \quad f(x) = k, \quad k \in R$

$$TV_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\Delta x \to 0$$

Como você explicaria geometricamente este resultado?

____

____

____

Função polinomial do 1º grau : $f : R \to R, \quad f(x) = ax + b \quad com \ \{a, b\} \subset R$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\Delta x \to 0$$

Este resultado já era previsto? Por quê?

____

____

Embora Δx seja um valor indefinidamente pequeno, não chega a se anular desta forma, é sempre possível a simplificação $\frac{a\Delta x}{\Delta x} = a$.

Portanto a taxa de variação instantânea de qualquer função polinomial do 1º grau é constante e igual ao coeficiente angular da reta: *a*.

Observação: Na função polinomial do 1º grau temos $TV_m = TV_i = a, \forall x \in D(f)$.

Elaboramos os dois questionamentos, pois queríamos ver como cada um associaria estes resultados a temas antes estudados e mais, queríamos que observassem a importante relação deste cálculo para determinar TVi com os conceitos apresentados.

Função polinomial do 2º grau: $f : R \to R, \ f(x) = ax^2 + bx + c \ , \ x \in R \ e \ \{a,b,c\} \subset R$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\Delta x \to 0$$

Sendo Δx um valor indefinidamente pequeno, a parcela $a\Delta x$ torna-se desprezível para efeito de cálculo sendo assim, podemos considerar $2ax_0 + b + a\Delta x \cong 2ax_0 + b$.

Função polinomial do 3º grau: $f : R \to R,\ \ f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ \ \ x \in R\ \ e\ \{a,b,c\} \subset R$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$\Delta x \to 0$$

O objetivo desta atividade foi obter a expressão algébrica da taxa de variação de algumas funções elementares (as familiares aos alunos) pela razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando $\Delta x \to 0$.

Anexo XXI

Ficha XVII

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Atividade

Resolver o problema algebricamente utilizando os conceitos de taxa de variação média e taxa de variação instantânea.

A posição *s* em função do instante *t* de um móvel, que se desloca segundo uma trajetória retilínea, é dada por $s(t) = 2t^2 + 3$ (para s em metros e *t* em segundos). Determinar:

a) a posição desse móvel nos instantes t = 2 *s* e *t = 3 s*.

b) a velocidade média no intervalo de t = 2 *s* a *t = 3 s*.

c) a velocidade instantânea nos instantes t = 2 s e *t = 3 s*.

Antes de iniciarmos esta atividade, fizemos uma relação, no quadro branco, das expressões das taxas de variação instantânea obtidas na atividade anterior. A seguir, pedimos aos alunos que resolvessem o mesmo problema de Cinemática (Ficha XIII) utilizando o recurso algébrico obtido.

Atividades relacionadas à 4ª etapa

Anexo XXII

Ficha XVIII

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Anotações de aula

O conceito de derivada.

A partir da idéia de taxa de variação instantânea, apresentamos o conceito de derivada de uma função (diferenciável) num ponto x_0. Passamos aqui a usar a notação $f'(x_0)$ para representar a derivada neste ponto.

Anexo XXIII

Ficha XIX

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Anotações de aula

O conceito de função derivada

Neste momento formulamos a seguinte proposição: Se em cada ponto de um intervalo I contido no domínio de uma função contínua for possível traçar uma única tangente, então existirá derivada em cada ponto considerado desse intervalo. Desta forma, passamos a buscar uma expressão geral que nos fornecesse a derivada em cada ponto x desse intervalo. Assim, chamamos $y = f'(x)$ de expressão geral ou sentença da função derivada.

Fizemos, aqui, uma relação das sentenças das funções derivadas obtidas das funções elementares apresentadas na Ficha XVI.

Oportunamente, apresentamos alguns contra-exemplos, casos em que não era possível obter a derivada num determinado ponto do domínio. Vimos esses contra-exemplos nas figuras 27 e 28 da seção 2.2.7.

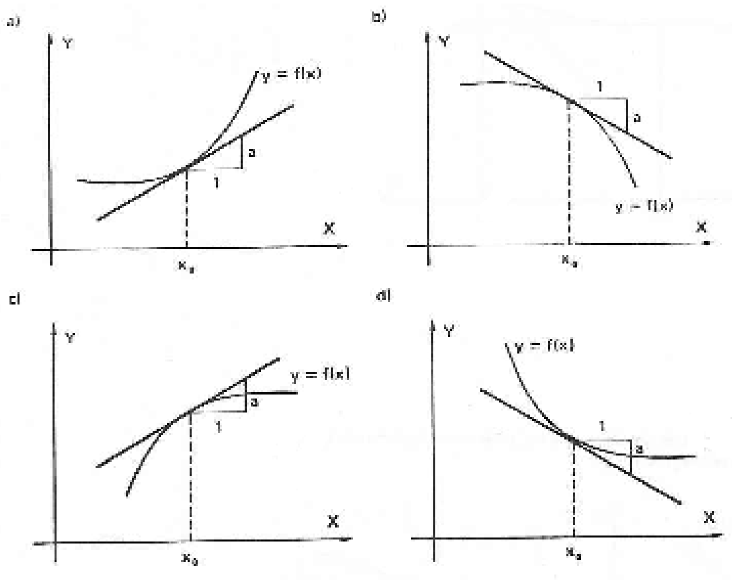
Anexo XXIV

Ficha XX

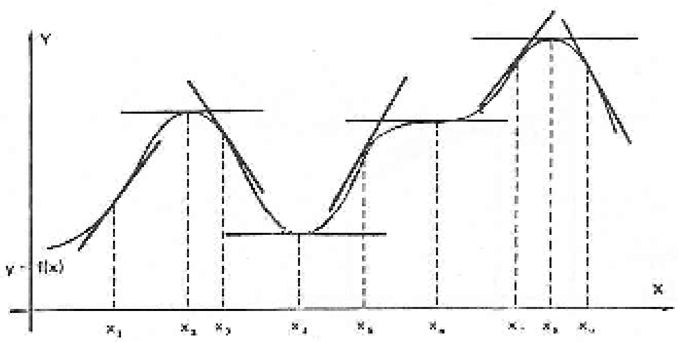
Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Atividade 1

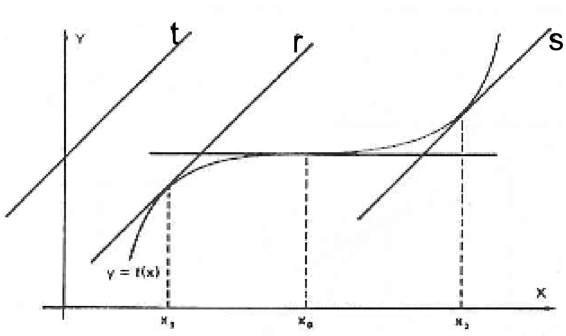
1) Para cada uma das funções, representadas por seus respectivos gráficos, determine o sinal da derivada no ponto de abscissa x_0:



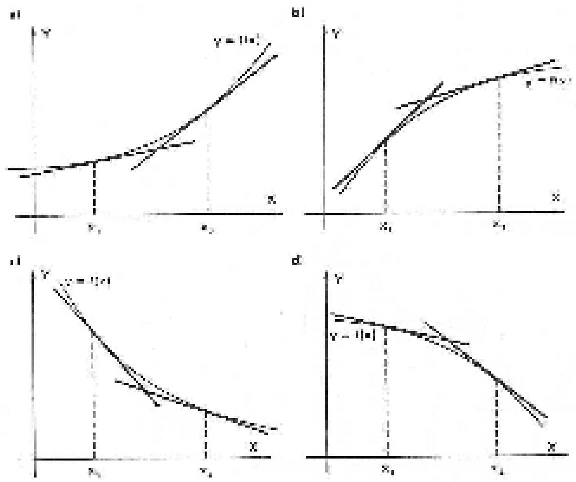
2) Dados o gráfico de uma função f definida por $y = f(x)$ e os pontos de abscissas $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$ e x_9, determine o sinal da derivada em cada caso, indicando onde ela se anula.



3) Calcule a derivada da função representada pelo gráfico abaixo nos pontos de abscissas x_0, x_1 e x_2. (As retas r e s são paralelas à reta t de equação $y = 3x + 9$).



4) Compare os valores das derivadas nos pontos de abscissas x_1 e x_2, determinando, em cada caso se $f'(x_1) = f'(x_2)$, se $f'(x_1) > f'(x_2)$ ou se $f'(x_1) < f'(x_2)$:



A atividade 1 desta ficha teve os seguintes objetivos: o estudo do sinal da derivada através da inclinação da reta tangente; o valor da derivada a partir do coeficiente angular da reta tangente; associação do crescimento (ou decrescimento) de uma função e sua concavidade ao crescimento ou decrescimento da derivada em cada ponto do intervalo considerado do domínio.

Atividade 2

Problemas

1) Um corpo em queda livre, a partir do repouso, percorre um distância *S* (em metros) que varia com o tempo *t* (em segundos), de acordo com a fórmula $S(t) = 5t^2$. Qual a velocidade instantânea desse corpo no instante $t_0 = 1\,s$?

Solução

Resposta: ____

2) Um objeto é lançado obliquamente no espaço. A partir do solo, a sua altura é dada pela fórmula $h(t) = -10t^2 + 100t$ (*h* em metros e *t* em segundos). Quanto tempo depois do lançamento o objeto atinge a altura máxima? Qual é essa altura?

Solução

Resposta: ______________________________________

3) Em Cinemática, define-se do seguinte modo a função aceleração instantânea, $a(t)$, de um móvel que se desloca segundo a função horária $S(t)$ e cuja velocidade instantânea é $v(t)$, sendo $v(t) = S'(t)$:

$$a(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\Delta t \to 0$$

Portanto, $a(t) = v'(t)$.

Uma partícula se move sobre uma trajetória obedecendo à equação horária $S(t) = 2t^3 + t + 1$ (S dado em metros e t dado em segundos). Determine:

a) a função velocidade em função do tempo;

b) a velocidade da partícula no instante $t = 2\ s$;

c) a função aceleração em função do tempo;

d) a aceleração da partícula no instante $t = 3\ s$.

Solução:

Resposta: ____

4) Chama-se custo marginal de produção de um artigo o custo adicional para se produzir um artigo além da quantidade já prevista. Na prática, a função custo marginal é a derivada da função custo.

Uma fábrica de sapatos tem um custo para produzir *x* pares de sapatos dado por $C(x) = 3000 + 25x$, com *C* em reais.

Qual é o custo marginal $m(x)$ que essa fábrica terá para produzir mais um par de sapato?

Solução:

Resposta: ____

5) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 1$.

Solução:

Resposta: ______________________________________

6) Uma torneira lança água em um tanque. O volume de água nele, no instante *t*, é dado por $V(t) = 5t^3 + 3t$ litros, *t* sendo dado em minutos. Calcule a vazão da água, no instante *t = 3* minutos.

Solução

Resposta: ________________________________

A atividade 2 teve o objetivo de aplicar os recursos algébricos estudados para o cálculo da derivada na resolução de problemas relacionados a outras ciências e na própria Matemática.

Anexo XXV

Ficha XXI

Nome: ________________________________ Data: ____/____/____

Atividade

Revendo os conceito estudados.

1) Um corpo se move em linha reta, de modo que sua posição no instante *t* é dada por $S(t) = 16t + t^2, \ 0 \leq t \leq 8$, onde o tempo é dado em segundos e a distância em metros.

a) ache a velocidade média quando o tempo passa de *3* para *3,01* segundos.

b) ache a velocidade do corpo no instante qualquer *t*;

c) ache a velocidade do corpo no instante *t = 3*.

d) ache a aceleração no instante *t*.

2) Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função $f(x) = x^3$ no ponto $x_0 = 2$.

3) Esboce o gráfico da função $h: R \to R$ definida por $h(x) = \frac{1}{x}$ (Esta função assim definida é conhecida como função recíproca).

Determine a expressão geral da derivada da função h $(h'(x))$ usando a razão $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, quando $\Delta x \to 0$, a seguir, determine as equações das retas tangentes a essa curva, nos pontos da curva cujas abscissas são $x = 1$ e $x = -1$.

Esta atividade teve o objetivo de revisar os conceitos estudados.

Anexo XXVI

Ficha XXII (Avaliação Final)

Nome: ___________________________________ Data: ____/____/____

Parte I

Questionário

1) Qual a diferença entre taxa de variação média e taxa de variação instantânea?

2) O que você entende por derivada?

3) Dê a interpretação geométrica da derivada.

4) Qual a importância do cálculo da derivada?

Parte II

5) Deduzir a fórmula para o cálculo da derivada de uma função real definida por $f(x) = x^2$ usando a definição. Explicar detalhadamente passo a passo da dedução.

6) Calcular o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de uma função definida por $f(x) = 3x^2$ no ponto de abscissa $x_0 = 2$.

7) Um móvel se desloca segundo a função horária $S(t) = 9 + 2t + 3t^2 - 4t^3$ (S em metros e t em segundos). Determine:

a) a função velocidade instantânea;

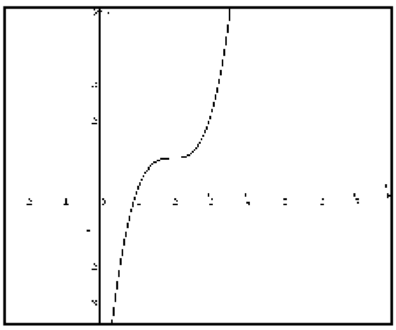
b) a velocidade instantânea em $t = 2s$.

c) a função aceleração instantânea;

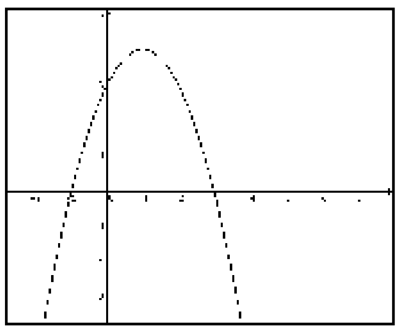
d) a aceleração instantânea desse móvel (em m/s²) no instante $t = 4s$.

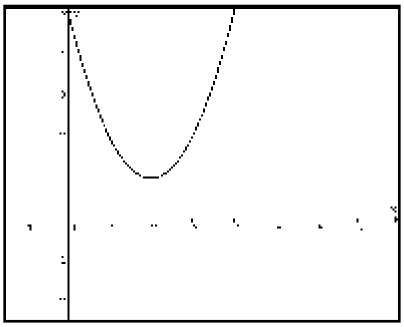
8) Dados os gráficos abaixo, desenhar a reta tangente a esses gráficos no ponto $x_0 = 2$.Justifique suas respostas.

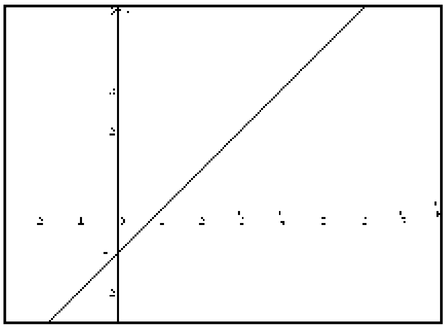
a)



b)



c) 

d) 

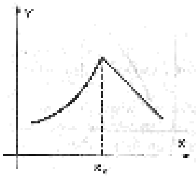
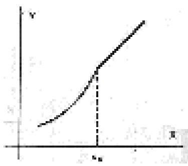
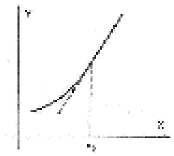
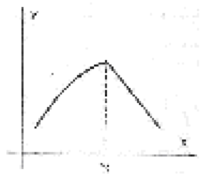
a) ____

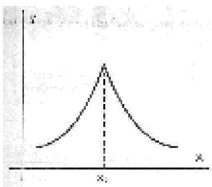
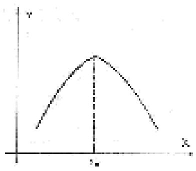
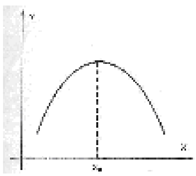
b) ____

c) ____

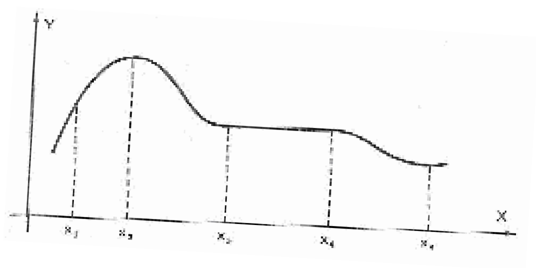
d) ____

9) Em cada caso, indique se existe ou não, no ponto indicado a derivada da função. Justifique suas respostas.

10) Analise o gráfico da função f definida por $y = f(x)$.
Essa função:



a) tem derivada positiva entre ____ e ____;
é crescente no intervalo ___________.

b) tem derivada negativa entre ____ e ____;
é decrescente no intervalo ____________.

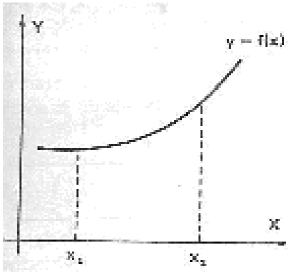
c) tem derivada nula entre ____ e ____;
é constante no intervalo _________.

d) tem derivada negativa entre ____ e ____;
é decrescente no intervalo ___________.

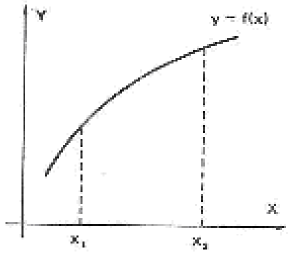
e) tem derivada menor ou igual a zero entre ____ e ____;
é decrescente no intervalo __________

11) Observe os gráficos de duas funções crescentes no intervalo $[x_1, x_2]$.

1)



2)



Complete a lacuna com uma das palavras entre parênteses.

a) O primeiro gráfico tem concavidade voltada "para cima", sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é ______________. (crescente – decrescente)

Justifique

b) O segundo gráfico tem concavidade voltada "para baixo" sendo assim, podemos afirmar que a função derivada neste intervalo é ______________. (crescente – decrescente)

Justifique

Anexo XXVII

Sobre o programa *Graphmatica* (Barufi & Lauro, 2001):

O programa utiliza um conjunto de operadores, funções e constantes pré-definidas:

Operador	Significado
+	adição
-	subtração
*	multiplicação
/	divisão
^	potenciação
[( )]	parênteses*

* É importante ficarmos atentos ao uso dos parênteses, pois podemos obter como resultado gráficos diferentes dos esperados.

Exemplo:

A função $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ deverá ser digitada da seguinte forma $y = (x+1)/(x+2)$. Se digitarmos $y = x + 1/x + 2 \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{x} + 2$. ou $y = x + 1/(x+2) \Leftrightarrow y = x + \dfrac{1}{(x+2)}$.

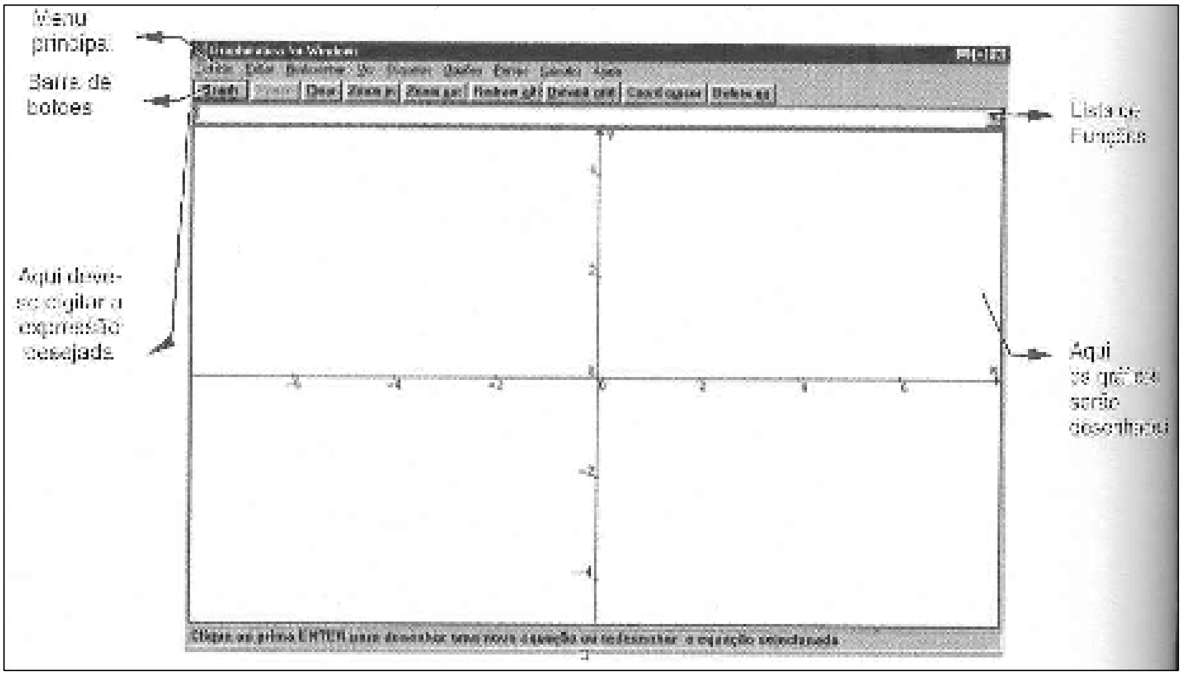
Constantes usadas

constante	valor
d	converte graus em radianos
e	o irracional 2,718281828459...
pi	o irracional 3,141592653589...

Em relação a constante **d** temos como exemplo: $sen(45d) = sen\left(\frac{\pi}{4} rad\right)$.

Função	Significado
abs	módulo ou valor absoluto
cos	cosseno
cot	cotangente
csc	cossecante
exp (ou e^)	exponencial (base e)
ln	logaritmo natural (base e)
log	logaritmo decimal (base 10)
sin	seno
sec	secante
sqr	raiz quadrada
tan	tangente

Ao entrarmos no *Graphmatica* será apresentada a seguinte tela:



A janela do *Graphmatica*

A barra de botões possui os seguintes comandos:

Graph	Desenha o gráfico da expressão digitada (use esse botão ou a tecla *ENTER*).
Pause	Pausa (esse botão está ativado somente enquanto um gráfico está sendo desenhado).
Clear	Apaga todos os gráficos da tela.
Zoom in	Ampliação.
Zoom out	Redução.
Redraw all	Desenha todos os gráficos que estão armazenados na Lista de Funções.
Default grid	Volta à escala padrão.
Coord cursor	Mostra as coordenadas de um ponto selecionado no gráfico.
Delete eq	Remove a equação selecionada da tela e da Lista de Funções.

Lista de Funções: o *Graphmatica* armazena as últimas 25 expressões digitadas.

No menu principal encontramos as opções:

Ficheiro	abre, salva e imprime os arquivos.
Editar	exporta textos e imagens.
Redesenhar	desenha o gráfico da última expressão introduzida na Lista de Funções; desenha todos os gráficos que estão na Lista de Funções; esconde e apaga gráficos e expressões.
Ver	altera a aparência da janela do programa (papel de fundo, escala, cores etc).
Etiquetas	insere textos (título, legenda e anotações) na janela dos gráficos.
Opções	visualiza e define opções de aparência na janela dos gráficos; mostra tabelas contendo as coordenadas de pontos da função desenhada.
Pontos	encontra as coordenadas de um ponto do gráfico; calcula numericamente as coordenadas de um ponto do gráfico; determina (com o uso do mouse) o domínio de uma função; mostra painel de variáveis livres e constantes.
Cálculos	encontra e desenha os gráficos das funções derivada e integral de uma função selecionada; encontra a inclinação e desenha a reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto escolhido.
Ajuda	ajuda do *Graphmatica*.

Especificando o domínio:

No *Graphmatica*, podemos especificar o domínio, isto é, o campo de validade de uma função; isso nos permite desenhar apenas uma parte de um gráfico.

Exemplo:

a) Para a função $f:[-2,4]\to R$ definida por $f(x)=2^x$, devemos digitar: $y=2\wedge x \quad \{-2;4\}$.

b) Para a função $f:[2;\ \infty[\to R$ definida por $f(x)=|2x-3|$, devemos digitar: $y=abs(2x-3) \quad \{2,\ \ \}$.

c) Para a função $f:]-\infty;\pi]\to R$ definida por $f(x)=senx$, devemos digitar: $y=sin(x) \quad \{\ \ ,\pi\}$.