Universidade Federal do Rio de Janeiro

MATHLETS: POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES PARA UMA ABORDAGEM DINÂMICA E QUESTIONADORA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Victor Cesar Paixão Santos

2008

MATHLETS: POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES PARA UMA ABORDAGEM DINÂMICA E QUESTIONADORA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Victor Cesar Paixão Santos

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientadora: Angela Rocha dos Santos

Rio de Janeiro

Agosto de 2008

Paixão, Victor.

Mathlets: Possibilidades e Potencialidades para uma Abordagem Dinâmica e Questionadora no Ensino de Matemática/ Victor Paixão. - Rio de Janeiro: UFRJ/ IM, 2008.

x, 91f.:il.; 31 cm.

Orientadora: Angela Rocha dos Santos

Dissertação (Mestrado) – UFRJ/ IM/ Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2008.

Referências Bibliográficas: f. 79-82.

1. Mathlets. 2. Informática Educativa. 3. Matemática Interativa. I. Santos, Angela Rocha dos. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. III. Título.

Dedicatória

Dedico esta pesquisa a tudo e a todos que, de alguma forma, ajudaram e/ou atrapalharam o seu correto andamento; pois, no fim das contas, tudo sempre acaba dando certo...

Agradecimentos

Ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, representando seus professores e funcionários, pela possibilidade de desenvolvimento desta pesquisa, pelo conhecimento adquirido e pela falta de burocracia excessiva.

À minha família, especialmente meu pai, Fernando, minha mãe, Glória, e minha avó, Lay (*in memoriam*), por terem transformado um lindo bebê sorridente em um homem de bem.

Ao homem do outro lado do espelho, por nunca ter deixado de acreditar na minha força frente ao tempo e aos obstáculos.

À Luciana, minha esposa, amiga e companheira, por todos os momentos juntos e pelo grande apoio.

À minha orientadora, professora Angela Rocha dos Santos, que sempre me incentivou e soube deixar minha imaginação fluir sem tirar, contudo, os pés do chão; dando, de fato, orientação.

Ao professor Ricardo Kubrusly, matemático, poeta e amigo, pois tudo isto é, no fundo, culpa dele.

Aos professores Victor Giraldo, Ana Canen e Beth Belfort por terem auxiliado de modo decisivo esta pesquisa, durante o Exame de Qualificação.

Aos amigos da turma 2006 do Mestrado em Ensino de Matemática, pela amizade, companheirismo, união, e por terem encarado o experimento com os mathlets; e à Maria José (turma 2008) pela importante ajuda com o espanhol.

Aos professores Fernando Villar e José Román Galo Sánchez - muito gentis em colaborar com esta pesquisa -, pelas importantes informações disponibilizadas.

À Irene Madeira, gerente do Projeto IPÊ, por aliviar minha barra e me deixar à vontade nos momentos decisivos da pesquisa.

Aos meus grandes amigos, que sempre estão por perto dando força, fazendo rir, tocando e ouvindo rock 'n' roll, abrindo cervejas e batendo um papo-cabeça.

Ao azul, ao preto e ao branco, comigo onde eu estiver …

É naturalmente mais fácil fornecer a demonstração de um problema quando adquirimos conhecimento prévio sobre ele, por meio de um método mecânico, do que achar a demonstração sem nenhum conhecimento prévio a respeito dele.

Arquimedes (III A.C.)

Resumo da Dissertação de Mestrado entregue ao Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática (M.Sc.).

MATHLETS: POSSIBILIDADES E POTENCIALIDADES PARA UMA ABORDAGEM DINÂMICA E QUESTIONADORA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Victor Cesar Paixão Santos

Agosto de 2008

Orientadora: Angela Rocha dos Santos
Programa: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

Esta pesquisa tem por objetivo mostrar de que modo a ferramenta computacional definida aqui como um "construtor de mathlets" é capaz de modificar a prática docente, transformando o professor em criador de sua própria prática – pesquisador em ação – e conduzindo-o a um ganho qualitativo não apenas em seus saberes docentes mas, sobretudo, nas imagens de conceito de seus alunos acerca dos tópicos ensinados por ele. Em suma, esta pesquisa pretende servir de subsídio para uma abordagem interativa, dinâmica e questionadora no ensino de Matemática, levando professores e alunos a modificarem sua forma de agir frente à sala de aula e às questões didáticas cotidianas.

Abstract of Dissertation presented to Institute of Mathematics of the Federal University of the Rio de Janeiro (IM-UFRJ) as part of the necessary requirements for getting the Master's degree in Teaching of Mathematics (M.Sc.).

MATHLETS: POSSIBILITIES AND POTENTIALITIES FOR A DYNAMIC AND QUESTIONING APPROACH IN THE TEACHING OF MATHEMATICS

Victor Cesar Paixão Santos

Agosto de 2008

Advisor: Angela Rocha dos Santos
Department: Pós-Graduação em Ensino de Matemática

This research aims to show how the computational tool defined here as a "builder of mathlets" is capable of changing the teaching practice, transforming the teacher in creating their own practice – action researcher – and leading it to a gain quality not only in their knowledge teachers, but especially the concept images of their students on the topics taught by him. In short, this research aims to provide a subsidy for an interactive, dynamic and questioning approach in the teaching of Mathematics, leading teachers and students to change their way of acting in the classroom and with everyday issues.

Sumário

1 Introdução

A partir do final da década de 80, com o começo da popularização do computador, diversos questionamentos a respeito da aplicabilidade deste ferramental foram introduzidos em toda a sociedade. No caso da educação, esta discussão perdura até os dias atuais, dado que qualquer mudança da práxis docente pode ter conseqüências importantes no desenvolvimento cognitivo dos estudantes e, portanto, no processo ensino-aprendizagem como um todo.

Diversos programas são desenvolvidos na tentativa de utilizar a tecnologia na melhoria desse processo, dentre eles podemos destacar os de Geometria Dinâmica, os sistemas de computação algébrica e os traçadores de gráficos. Como exemplos de tentativas de utilização da tecnologia no Brasil, podemos citar os trabalhos referentes ao uso das calculadoras gráficas – como em BORBA [8] –, dos sistemas de computação algébrica – como em SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI [29] – e dos softwares de geometria dinâmica – como em GUIMARÃES *et al* [16]. Em cada um dos casos, uma determinada característica (ou potencialidade) do programa é explorada. Nas calculadoras gráficas, são expostas a mobilidade da ferramenta e sua capacidade de desenhar gráficos e realizar cálculos com alguma rapidez quando comparadas ao processo manual. Já no caso dos sistemas de computação algébrica, é enfatizada a capacidade de traçar gráficos e realizar cálculos substancialmente mais complexos do que os possíveis nas calculadoras. Por outro lado, os softwares de geometria dinâmica oferecem ao aluno a possibilidade de interagir diretamente com as formas geométricas, em tempo real, preservando suas propriedades, conduzindo-o à observação de relações entre diversos entes matemáticos. Estes são apenas alguns dos diversos estudos realizados neste "novo" e vasto campo de pesquisas.

Dentro desta temática ainda surge, em meados dos anos 90, outro fator: a expansão da internet. Assim, além das reflexões a respeito da aplicabilidade do computador, desencadearam-se outras, buscando dar sentido à utilização deste novo modo de comunicação em prol da melhoria do processo ensino-aprendizagem. Com o uso difundido da "grande rede" abriram-se possibilidades, antes inexistentes ou sequer imaginadas para, por exemplo, o ensino a distância, que dentro deste contexto pode ocorrer de forma síncrona ou não. No entanto, estes novos cenários didáticos carecem ainda de avaliação, e de propostas e análises detalhadas visando a sua utilização, de modo proveitoso e eficiente, de forma a contribuir no salto qualitativo que buscamos no ensino de Matemática.

Unido a este debate sobre a relação da informática/internet com a educação, e de como estas mídias podem ser utilizadas de modo eficaz, surge o problema de como qualificar corretamente o professor para o uso destes recursos. Este problema é ainda agravado, como sugerem BORBA & PENTEADO [9], por uma "resistência ao novo" encontrada em alguns docentes, e ainda por correntes que pregam que o computador seria "a solução de todos os problemas" ou que "o computador apenas atrapalha o aluno, tornando-o um mero 'apertador de botões' ".

Baseados no trabalho de TALL[39] sobre o uso de tecnologias no ensino de Matemática (como veremos ao longo do texto), pretendemos nesta pesquisa dissertar sobre o papel destas novas tecnologias – representadas aqui por aplicativos conhecidos como *mathlets* – na transformação de nossa prática educativa e na melhoria da aprendizagem em Matemática.

Como enfatizado por SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI [28], a formação da maioria dos professores no Brasil - e, conseqüentemente, suas aulas - está relacionada a práticas docentes que seguem metodologias expressas pela cadeia "definição $\rightarrow$ teorema $\rightarrow$ demonstração $\rightarrow$ corolário (aplicações)", evidenciando um pressuposto de que a Matemática deve ser apresentada como um conhecimento pronto, encerrado. Isto acaba por minar qualquer tentativa de análise crítica, indagação ou criação proveniente do aluno, diminuindo suas chances de conduzir um processo de investigação científica ou apreciá-lo com visão crítica. Em contraposição à apresentação da Matemática como um corpo fechado de conhecimento, PAIS [20] afirma:

> *"O aluno deve ser sempre estimulado a realizar um trabalho na direção de uma iniciação à 'investigação científica'... Aprender a valorizar sempre o espírito de investigação. Esse é um dos objetivos maiores da educação matemática, ou seja, despertar no aluno o hábito permanente de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela resolução de problemas."*

A partir desta visão de que o aluno deve ser construtor de seu próprio conhecimento, novamente nos deparamos com a questão da formação do professor: afinal, como formar um professor de modo que ele "aprenda" a estimular o aluno na construção de seu próprio conhecimento? De que modo este professor deve agir? Que recursos e metodologia utilizar?

Neste ponto podemos vislumbrar uma oportunidade para o uso da tecnologia, aproveitando as potencialidades que a informática e a internet dispõem. Esta é uma demanda recorrente nos dias atuais. No entanto, é necessário que o professor esteja apto a incorporar estas mídias em sua prática docente e, como alertado por SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI [28], boa parte dos "materiais educativos" disponíveis em páginas web não contribui, de fato, para a melhoria do ensino de Matemática. Algumas destas páginas exibem apenas textos, imagens de livros e outros acessórios que, em alguns casos, deslizam sobre a tela sob o pomposo nome de “demonstrações dinâmicas”.

Buscando utilizar a tecnologia disponível de modo a promover as mudanças que defendemos de modo a conduzir o aluno a, efetivamente, tornar-se agente do processo educativo, propomos a inclusão pelo professor de mathlets em sua prática docente.

Um mathlet é, segundo publicação em JOMA [17], uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática. Em nosso caso, tal “plataforma” é um mini-aplicativo (Applet Java[1].) gráfico e interativo, que pode ser executado a partir de qualquer navegador web. Cabe citar que a palavra “mathlet” é um acrônimo para *“mathematic’s applet”* (applet de matemática). Um exemplo de mathlet pode ser visto na figura[2] 1.1.

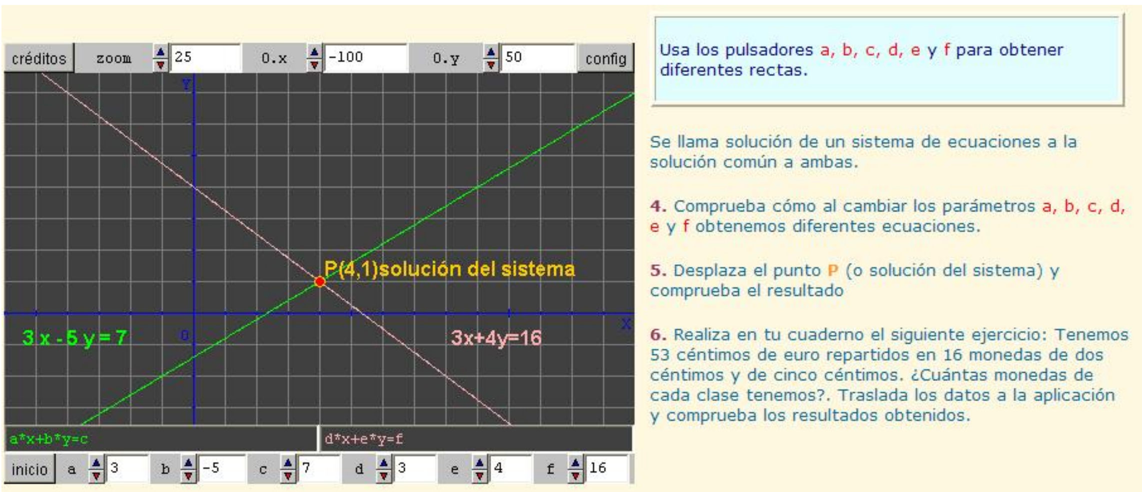


Figura 1.1: Exemplo de Mathlet

Dentre as vantagens comumente atribuídas a este tipo de ferramenta, podemos citar o fato de que os alunos podem participar de verdadeiros “laboratórios” de Matemática onde, a partir de experiências interativas, é possível fortalecer sua imagem de conceito, migrando da abordagem tradicionalmente utilizada no ensino de Matemática, baseada na cadeia “definição $\rightarrow$ teorema $\rightarrow$ demonstração $\rightarrow$ corolário (aplicações)”, para a cadeia “exploração $\rightarrow$ conjectura $\rightarrow$ tentativa de demonstração $\rightarrow$ conclusão e aplicação”.

Destacamos ainda que, para a construção de seus próprios aplicativos e elaboração de seus roteiros didáticos, o professor deverá ter sua própria imagem de conceito melhor adequada à definição formal[3]. Isto lhe trará um ganho em conhecimentos matemáticos e na inter-relação de

[1]Pequeno aplicativo desenvolvido em linguagem de programação Java, portanto independente de plataforma (sistema operacional), que é executado a partir de qualquer navegador web

[2]Figura retirada de atividade disponível na página da biblioteca Descartes[23]

[3]Isto é, a definição aceita pela comunidade matemática

conceitos, que lhe será de grande valia em sua práxis. Além disso, como vantagem adicional, enfatizamos o fato de que o material preparado utilizando esta tecnologia é adequado tanto ao ensino presencial quanto ao ensino a distância, sem que se percam suas características interativas-exploratórias.

No entanto, a utilização dos mathlets torna-se extremamente custosa em certos aspectos práticos. Dada a natureza do mathlet - um pequeno programa escrito em linguagem Java -, um professor que deseje incorporá-los em sua prática necessita de conhecimento a respeito da elaboração destas aplicações, isto é, precisa ter experiência em programação na linguagem Java. Tal tarefa não é, de modo algum, simples; apesar de ser uma linguagem livre, com vasta documentação, e que gera aplicativos passíveis de execução em qualquer navegador web, Java é uma linguagem de aprendizado extremamente difícil, em particular para professores que nunca tiveram qualquer contato com programação de computadores[4].

Apesar da existência de um grande número de bibliotecas de mathlets prontos, e roteiros didáticos que fazem uso destas bibliotecas, esta dificuldade não é superada, pois tais bibliotecas não podem ser adaptadas, e nunca serão extensas o suficiente para suprir as necessidades de todos os professores na realização da transposição didática - no sentido de CHEVALLARD, *apud* PAIS [20] - que melhor se adapte ao perfil de seus alunos.

Buscando solucionar os problemas inerentes à utilização dos mathlets na prática docente, foram desenvolvidos os chamados construtores de mathlets, isto é, bibliotecas de mathlets configuráveis onde, com a alteração de alguns parâmetros de um mathlet já existente, gera-se uma nova aplicação, completamente diferente da anterior. Além disso, um construtor de mathlets busca ter uma interface intuitiva, permitindo que um professor que nunca teve contato com programação desenvolva suas próprias aplicações.

Ao utilizar um construtor de mathlets, o professor tem ainda a possibilidade de - visto que está criando sua própria aplicação - resolver a questão referente à realização de uma transposição didática que leve em consideração o perfil de seus alunos, pois lhe é dada a oportunidade de explorar determinadas características ou reforçar determinados aspectos do conteúdo estudado, buscando uma melhor adequação do material ao nível de desenvolvimento da imagem de conceito por parte de seus alunos.

Neste sentido, a presente pesquisa visa estudar o modo como os mathlets e, mais especificamente, seus construtores podem desempenhar um papel importante na modificação

[4]Em verdade, dada minha experiência como programador, afirmo que a linguagem Java, por tratar-se em certos aspectos de uma ruptura completa de paradigma de programação, é de difícil aprendizado mesmo para programadores experientes.

da práxis docente. Defendemos neste trabalho que, utilizando estes construtores, o professor torna-se um "pesquisador em ação" – desenvolvedor de sua própria prática –, capaz de produzir ambientes corporificados[5] que auxiliem o aluno a ter um aprendizado significativo, que possa expandir a sua imagem de conceito referente aos assuntos abordados em "sala de aula"[6]. Pretendemos, ainda, fornecer subsídios para uma reflexão por parte de pesquisadores e docentes a respeito do real papel das ditas "novas tecnologias" neste cenário científico-educacional, das possibilidades e potencialidades da ferramenta utilizada, e de possíveis formas de utilização da mesma.

Convém ainda alertar que de modo algum sugerimos que toda e qualquer outra metodologia didática deva ser abandonada em prol do uso do computador e das novas mídias disponíveis. O intuito da pesquisa é exatamente o de fornecer ao professor uma nova possibilidade, um elemento a mais para que possa enriquecer sua prática docente de modo a produzir um salto qualitativo no processo ensino-aprendizagem. É neste sentido que falamos em "possibilidades" e em "abordagem questionadora": o professor deve ser o agente de sua prática educativa, explorando novas possibilidades didáticas e metodológicas, levando os alunos a uma nova postura investigativa sumarizada na cadeia exploratória citada anteriormente. A partir desta exploração e dos questionamentos por ela gerados, o aluno terá a oportunidade de ter um aprendizado significativo, corporificado, baseado em suas próprias experiências. Por outro lado, a partir da construção de suas próprias aplicações, o professor terá possibilitada a adequação de sua prática à realidade de seus alunos, a objetivos traçados e às avaliações periódicas da turma, transformando-se verdadeiramente em um "pesquisador em ação".

1.1 Estrutura da Pesquisa

Esta dissertação está estruturada como se segue: no Capítulo 2 discutimos os principais objetivos e a motivação para a pesquisa. No Capítulo 3, fazemos uma discussão a respeito dos critérios que culminaram com a escolha dos construtores de mathlets como ferramenta a ser pesquisada.

No Capítulo 4, descrevemos os referenciais teóricos da pesquisa, divididos em dois eixos: o eixo computacional, que contém os referenciais que se relacionam com o uso do computador e da internet na sala de aula de Matemática; e o eixo educacional, que contém os referenciais

[5]Isto é, ambientes computacionais que utilizem-se de percepções sensórias (essencialmente visuais) do indivíduo, no intuito de proporcionar-lhe intuição , visando posterior abstração , acerca de conceitos matemáticos.

[6]O termo "sala de aula" é utilizado neste ponto com um significado extremamente geral, podendo representar uma sala de aula física ou virtual, presencial ou à distância.

que embasam das questões relativas à didática e ao aprendizado em Matemática. Segue-se o Capítulo 5, onde descrevemos a metodologia da pesquisa em questão, e como esta se desenvolveu e foi executada.

Os capítulos 6 e 7 nos conduzem através da execução da pesquisa, com a apresentação e discussão a respeito dos estudos realizados.

Finalmente, temos as considerações finais (Capítulo 8), produzindo um fechamento, descrevendo e amarrando as principais idéias e resultados obtidos nesta pesquisa. Pontuando os artigos, livros e demais referências envolvidas, contamos com as Referências Bibliográficas e, encerrando o texto, a fim de exemplificar o uso da ferramenta em questão, temos no Anexo um roteiro didático elaborado com a biblioteca de mathlets Descartes[23].

Vale aqui ressaltar que as referências a publicações que não fazem parte do escopo desta dissertação e que, por tal motivo, não caberiam no conjunto de Refeências Bibliográficas, foram incluídas em forma de notas de rodapé ao longo do texto. Esta iniciativa teve por objetivo não privar os leitores de referências que possibilitem aprofundamento em questões não abordadas (ou tratadas apenas superficialmente) neste trabalho.

2 Objetivos

2.1 Motivação

Durante os últimos 20 anos, a difusão do computador por todo o mundo trouxe uma série de questionamentos sobre sua possível utilização em todos os ramos do conhecimento e, como não poderia deixar de ocorrer, também no Ensino. Diversas pesquisas foram desenvolvidas, tanto no sentido de valorizar o uso do computador em sala de aula quanto na expectativa de descobrir possíveis prejuízos à formação do aluno, escamoteadas por trás desta "inovação tecnológica".

Em meados dos anos 90, a criação dos cursos de Ensino Médio (outrora denominados 2^{o} Grau) técnicos em informática trouxe à tona a realidade da disseminação do uso do computador pela sociedade (claro, em escala muito menor do que a que vemos nos dias atuais), e "despejou" no mercado dezenas de milhares de recém-formados "programadores de computador". Muitos voltaram-se para o mercado de trabalho e o desenvolvimento de programas que permitiam gerir empresas com maior precisão e lisura; outros voltaram-se para o desenvolvimento de ferramentas que visavam objetivos mais específicos. Alguns destes técnicos ingressaram em cursos de graduação em Informática ou Matemática, e passaram a adquirir conhecimentos matemáticos necessários para a criação de ferramentas com o fim específico de auxiliar o professor na tarefa de ensinar Matemática. Assim, diversas iniciativas e projetos destinados a desenvolver ferramentas de ensino foram nascendo e evoluindo.

Com a disseminação da internet, alguns desenvolvedores de ferramentas de ensino de Matemática vislumbraram a possibilidade de criar mecanismos que lhes permitissem usufruir deste novo meio de comunicação para agregar cada vez mais valor didático e tecnológico às suas ferramentas. Esta iniciativa foi responsável pela criação de diversas páginas web e programas que utilizavam-se das possibilidades da "grande rede" para comunicar, expor conteúdos ou disponibilizar informações referentes à Matemática em seus mais diversos níveis. Como exemplos, podemos citar o "Portal Só Matemática"[1], o "Portal Matemático"[2], e o site "Calculando"[3]; além de plataformas de ensino à distância, como o Moodle[4], e de softwares de

[1]http://www.somatematica.com.br
[2]http://www.portalmatematico.com
[3]http://www.calculando.com.br
[4]http://moodle.org

aprendizagem colaborativa, como o Tabulæ Colaborativo[5].

Muito foi produzido até hoje em questão de software educativo – como Maple, Graphmatica, Geogebra, Tabulæ, Geometer's Sketchpad, entre outros –, para diversos fins e utilizando diversos meios de divulgação e funcionamento. Hoje, podemos encontrar centenas de páginas destinadas ao ensino e à pesquisa de conteúdos matemáticos. Desde uma exposição simples de um tópico até um fórum de discussão mais elaborado; de um pequeno aplicativo que permite manipular gráficos ou figuras até aplicações web extremamente complexas e robustas.

No entanto, duas décadas depois, diversas ferramentas foram desenvolvidas, abandonadas ou re-estruturadas, mas pouquíssimas pesquisas foram realizadas no país visando estudar a utilização dos programas de computador dentro do ambiente escolar, seja através de pesquisas de campo, seja através do embasamento em reconhecidos e difundidos referenciais teóricos, nacionais ou estrangeiros. No entanto, algumas das pesquisas já realizadas voltam-se para o estudo do comportamento do aluno frente ao computador, ou da ferramenta computacional frente ao aluno, ignorando quase que completamente a influência, ou mesmo a existência – fundamental, diga-se –, do professor neste delicado processo ensino-aprendizagem.

Unidos a estes fatores acadêmicos está, sem dúvida, minha experiência pessoal como professor de Matemática que sempre buscou utilizar o computador em sala de aula, conduzindo os alunos a tomarem conhecimento das vantagens deste recurso, bem como minha experiência como programador de computadores e o particular interesse pela criação de aplicativos que fossem capazes de servir à Matemática e às estratégias de ensino deste vasto campo do conhecimento humano. A união dos três fatores - Matemática, Ensino e Programação de Computadores - teve certamente um grande peso não apenas sobre a escolha do tema desta pesquisa, como também sobre a própria decisão de ingressar no curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, pela qual sou Graduado em Licenciatura em Matemática.

Neste sentido, de integrar computador e sala de aula de Matemática, a busca por diferentes opções didáticas e metodológicas passa, obrigatoriamente, por questionamentos acerca da real eficácia das ferramentas desenvolvidas e utilizadas com a finalidade de ensinar Matemática. A comprovação desta "eficácia" dar-se-á por duas possíveis vias: a experimentação e/ou o embasamento através de teorias que possuam algum tipo de relação com o universo avaliado, isto é, ensino de Matemática apoiado por computador.

A primeira via nos permite, em linhas gerais, obter indícios factuais de que determinada

[5] http://tabulae.net/Tabulae_Colaborativo

ferramenta pode ser utilizada de modo eficiente[6] em sala de aula, com possíveis ganhos do ponto de vista do processo ensino-aprendizagem. Este tipo de pesquisa demanda que o pesquisador organize uma sessão de aplicação da ferramenta, observando detalhes do uso da ferramenta por parte do professor e dos alunos, buscando identificar pontos onde estes tenham maior facilidade ou maior dificuldade de operação do recurso computacional. Desta forma, o pesquisador pode adquirir elementos importantes para possíveis melhorias no programa e para a elaboração de roteiros didáticos que permitam utilizar a ferramenta e explorar características que beneficiem aspectos específicos do conteúdo a ser ensinado, de acordo com expectativas e planejamento do professor - levando em conta todos os atores do processo ensino-aprendizagem.

Já a segunda via - o embasamento teórico - demanda, em paralelo a uma detalhada experimentação, uma pesquisa a respeito das principais teorias relacionadas ao uso da tecnologia na sala de aula de Matemática, de modo a obter elementos significativos que sinalizem para o fato de que a utilização da ferramenta pesquisada obterá êxito, e em que aspectos e/ou condições.

Isto torna esta pesquisa - que opta pela segunda via - de grande valia, no sentido de ratificar junto a referenciais teóricos relacionados ao uso de computador em sala de aula em que condições e aspectos os mathlets e seus construtores serão importantes na transformação da prática docente, conduzindo o aluno a uma aprendizagem baseada na cadeira exploratória ("exploração → conjectura → tentativa de demonstração → conclusão e aplicação"), e levando o professor a tornar-se um pesquisador em ação, agente e criador de sua própria prática.

2.2 Objetivos da Pesquisa

Dadas as motivações e aspectos citados na seção anterior, os objetivos desta pesquisa são, em linhas gerais, realizar um estudo a respeito do que denominamos "construtores de mathlets", no sentido de identificá-los como ferramenta computacional para o ensino de conteúdos matemáticos e sinalizar, através de referenciais teóricos relevantes do campo de Ensino da Matemática e de estudos de casos apropriados, para suas possibilidades e potencialidades no caminho de mudança da prática docente, fazendo com que o professor tenha condições de, ao criar e recriar seus próprios aplicativos, tornar-se um "pesquisador em ação".

Note que, ao fazermos isto, fazê-mo-lo do ponto de vista do professor, não do aluno, pois modificar o modo como o professor enxerga e vive sua prática é modificar o modo como todos os

[6]Note que, via de regra, esta "eficiência" varia de acordo com o professor, sua didática/prática docente, e sua turma, incluindo a homogeneidade ou não desta última.

seus alunos, daquele ponto em diante, beneficiar-se-ão desta prática para aprender Matemática.

Em paralelo a este objetivo principal, temos ainda a expectativa de, por meio desta pesquisa e de trabalhos correlatos, divulgar esta poderosa ferramenta e difundi-la em salas de aula de Matemática, fazendo com que o aluno também se beneficie das inovações tecnológicas que são levadas ao conhecimento de seus professores, não ficando estas apenas "guardadas" em poder dos docentes.

Para isto, esta pesquisa conta com um estudo de caso que versa sobre a difusão dos mathlets e de um de seus construtores[7] na Espanha, através de iniciativas do governo local, de um estudo de caso a respeito de um curso de formação continuada de professores que teve contato com os mathlets, de uma entrevista com um docente brasileiro que já utiliza os mathlets em sua prática cotidiana, e de dois casos de pesquisa-ação, uma realizada com alunos de graduação e de pós-graduação a partir de atividades baseadas na ferramenta, outra relatando um mini-curso apresentado em congressos da área de Educação Matemática, e que teve como principal objetivo ensinar os participantes como utilizar o construtor de mathlets Descartes.

De modo a atingir seu objetivo principal, isto é, a identificação do papel dos construtores de mathlets na transformação da práxis docente, a pesquisa conta com os referenciais teóricos envolvidos e nossas contribuições e conclusões acerca da relação destes referenciais com o universo dos mathlets e de seus construtores. Com isto, pretendemos dispor de uma pesquisa que, a qualquer tempo, possa ser de grande valia a professores e pesquisadores em Ensino de Matemática, bem como docentes do Ensino Básico e/ou Superior, no sentido de fornecer-lhes fundamentação para a aplicação dos construtores de mathlets em sua prática docente e ainda para uma reflexão a respeito de como se dá essa prática e de que forma ela pode ser modificada, de modo a torná-lo agente da criação do processo educativo ao mesmo tempo em que o aluno se transforma em agente de sua própria aprendizagem.

Assim, podemos dizer que nossa pergunta de pesquisa é representada pelo seguinte questionamento: "de que maneira os construtores de mathlets podem modificar a prática docente?".

Finalmente, a partir das referências bibliográficas constantes na pesquisa, o leitor terá a oportunidade de obter informações que vão além do escopo desta, e que permitirão futuras pesquisas que visem, a cada passo, aumentar a abrangência desta ferramenta no ensino de Matemática.

Com isto, pretendemos que esta pesquisa seja direta, focada, porém aberta a novos

[7] O Descartes [23], financiado pelo Ministério da Educação e Cultura da Espanha.

horizontes e a possibilidades de continuação de estudos - correlatos a este -, de modo a completar lacunas que certamente serão futuramente identificadas.

3 Escolha da Ferramenta

A escolha de uma ferramenta adequada aos objetivos traçados – possibilitar uma participação ativa do aluno na construção de seu próprio conhecimento, permitir a elaboração de material didático passível de disponibilização à distância ou presencialmente, transformar o professor em desenvolvedor de sua própria prática docente, e fazer uso do computador de modo produtivo, explorando o seu potencial didático – envolve uma série de fatores e tomadas de decisão, visando não apenas atender a todas as características esperadas, como ainda ser uma aplicação didática eficiente e de uso agradável tanto para professores quanto para alunos. Afinal, um dos grandes problemas diagnosticados[1] em alguns membros da classe docente é a chamada "resistência ao novo", o que torna a tarefa de introduzir uma nova tecnologia algo ainda mais difícil.

No entanto, é anterior a isto a decisão pelo uso de uma ferramenta computacional como auxiliar do processo ensino-aprendizagem, motivo pelo qual esta é a primeira decisão que temos a justificar. Decidido o uso do computador, passamos à questão presencial *versus* distância – que como veremos não representa, necessariamente, uma dicotomia. Após a escolha da internet como via de interação entre professores e alunos, segue a decisão sobre o uso de aplicativos web, ao invés de páginas web estáticas, que representam o tipo mais comum de uso da web, como relatado por SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI [28].

Uma vez definidas as diretrizes de nossa escolha, passamos à escolha da ferramenta propriamente dita, isto é, os mathlets. Neste ponto surge ainda a opção que fazemos por mathlets desenvolvidos na linguagem Java, e a escolha dos construtores como facilitadores para a criação e utilização dos mathelts em sala de aula.

Todos os passos e escolhas relatados serão descritos e justificados nas seções a seguir.

[1]Estes problemas foram detectados em minha experiência pessoal em cursos de formação continuada de professores – tal como o Sucesso Escolar, parceria entre a Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro e a Universidade Federal do Rio de Janeiro –, bem como em estágios durante o curso de graduação em Licenciatura em Matemática.

3.1 Novas Tecnologias (Computador)

Tradicionalmente, toda discussão e pesquisa científica em ensino - em nosso caso, especificamente em ensino de Matemática - tem por objetivo final a aplicação em prol de um ganho qualitativo nas práticas didatico-pedagógicas, no processo de aprendizagem e na assimilação dos conteúdos por parte dos alunos. É importante notar que, ao citarmos os dois últimos itens distintamente, estamos sinalizando para o fato de que o processo de aprendizagem envolve eventuais obstáculos epistemológicos que devem ser superados para que se consiga uma correta assimilação e expansão da imagem de conceito do aluno sobre o tópico ensinado. Deste modo, identificamos 3 partes do processo a serem atingidas: como o professor ensina; como dá-se a passagem entre professor e aluno; como o aluno aprende.

As atuais pesquisas sobre o uso do computador em sala de aula devem levar em conta todos estes aspectos, sob pena de tornarem-se obsoletas antes mesmo de concluídas, dado que não serão apropriadamente utilizadas. Uma metodologia que vise apenas "facilitar a vida do professor", sem levar em conta se esta "facilidade" aplicar-se-á também ao modo como os alunos terão contato com o conteúdo durante as aulas ou mesmo como estes amadurecerão após as aulas - dando consistência a suas imagens de conceito - estará certamente fadada à ineficácia e ao abandono.

Dada ainda a presente evolução da tecnologia disponível e a disseminação do computador por toda a sociedade, faz-se de grande importância o desenvolvimento e a divulgação de ferramentas que façam uso destas chamadas "novas mídias" no ensino de Matemática, não apenas para "utilizá-las por utilizar", mas visando criar oportunidades para o contato do estudante com a tecnologia disponível e possibilitar um aprendizado onde ele próprio seja o agente do processo educativo.

Assim, ao decidirmos pela utilização do computador, não estamos tão somente tomando parte no processo de divulgação e manuseio das mídias por ele suportadas; vamos além, no sentido de que acreditamos ser o computador uma ferramenta extremamente útil sob diversos aspectos e à luz de diversas teorias amplamente difundidas na comunidade acadêmica da área de Ensino de Matemática. Deste modo, fazemos do computador nossa primeira escolha.

3.2 Internet

Além da difusão do uso do computador por toda a sociedade, nos últimos anos a sociedade moderna viveu o chamado "boom" da internet, onde grande parte da população, em todo o mundo, passou a ter acesso à "grande rede" e às facilidades, potencialidades e possibilidades por ela proporcionadas. Não devemos entrar no mérito das discussões que pretendem determinar – como se lhes fosse possível – se a internet traz mais benefícios ou malefícios à sociedade. Importa-nos somente determinar que benefícios esta ferramenta pode fornecer às pesquisas e à prática docente, em nosso caso relativas ao ensino[2] da Matemática.

Em aplicativos "off-line", como os diversos programas educativos disponíveis no mercado ou na Academia (Cabri Geométre, Tabul*æ*, Graphmatica, Geometer's Sketchpad, Maple, entre outros) temos como uma das principais limitações a falta de interatividade entre os alunos, além da impossibilidade de que um professor ministre suas aulas à distância. Isto tem levado diversos pesquisadores a buscar alternativas de adaptação de seus programas a esta nova realidade de interação em tempo real, possibilitada pela internet.

Desta forma, nos é fundamental a capacidade da internet de comunicar a grandes distâncias, pois isto possibilita que um professor consiga manter contato com seus alunos mesmo estando a milhares de quilômetros de distância! Isto abre imediatamente uma possibilidade que antes seria impensável, e que a cada dia torna-se uma alternativa mais e mais palpável: a elaboração e execução de cursos (de curta ou mesmo longa duração) à distância ou semi-presenciais[3]. Indo além podemos, através dos "laboratórios de informática", acenar para uma potencialidade ainda mais poderosa: ministrar o mesmo curso, utilizando as mesmas ferramentas sitiadas na internet, para uma turma presencial e outra não presencial. E tudo isto sem a necessidade de alteração de uma única atividade proposta durante o curso!

Como podemos constatar, a dicotomia "presencial *versus* à distância" mostra-se a cada dia menos real, graças à evolução e disseminação da internet. Isto faz da internet nossa escolha, como um meio a ser investigado.

3.3 Aplicativos on-Line x Páginas Estáticas

Como já relatado anteriormente, SANTOS, KUBRUSLY & BIANCHINI [28] acenaram para um dos grandes problemas do uso do computador e da internet no campo de ensino-aprendizagem. Boa parte dos autores de atividades voltadas para o uso da internet recaem no que podemos considerar uma "sub-utilização da tecnologia disponível". Ocorre que

[2] Note que a grafia da palavra "*ensino*" no último parágrafo da seção anterior ("*Ensino*") é diferente desta, pois referem-se a duas idéias distintas.

[3] Em um curso semi-presencial o aluno tem a obrigação de dirigir-se fisicamente a um local em intervalo de tempo estipulado pelo professor, além dos dias de realização de provas (pois estas são, integral ou parcialmente, presenciais).

tais autores de atividades as organizam em páginas web estáticas, com apenas texto e, quando muito, algumas figuras e/ou animações, às quais dá-se o pomposo nome de "demonstrações dinâmicas".

Na verdade podemos comparar tais páginas a um livro impresso; o leitor da página não sentirá diferença alguma caso imprima esta página e tome-a pela mão para, por exemplo, lê-la durante um momento livre qualquer. Tais páginas acabam por sub-utilizar a tecnologia disponível no sentido em que, atualmente, dispomos de diversas ferramentas que nos permitem interagir com uma página web, e obter desta respostas às nossas ações em tempo real. Assim, podemos sugerir os questionamentos "*Qual a diferença entre ler um livro ou ler uma página estática?*", "*Uma página estática representa, de fato, um avanço em relação ao papel?*", "*Ao criar uma página estática estamos explorando o máximo das potencialidades que o computador e a internet nos proporcionam?*".

Estas e outras questões mostram que os aplicativos web representam um novo paradigma no que diz respeito ao uso da internet com fins educacionais, pois abre uma série de novas possibilidades: agora o professor pode disponibilizar um conteúdo totalmente on-line, com o qual os alunos podem interagir visando a formulação de conjecturas, para posteriormente passá-las ao papel em linguagem matemática formal. Esta fase de experimentação e formulação de conjecturas é de suma importância nesta pesquisa, dado que buscamos um processo onde o aluno seja o agente da construção de seu próprio conhecimento. A passagem da passividade – característica da maior parte das aulas de Matemática – para a atividade dar-se-á por meio do que chamamos "experiências matemáticas".

Isto faz dos aplicativos que permitem interatividade nossa escolha como tipo de ferramenta web a ser pesquisada.

3.4 Mathlets

Dentre as aplicações voltadas para a internet, podemos distinguir aquelas que apenas "servem" para o ensino de Matemática (como aplicações com tabelas, planilhas e gráficos interativos) das que são desenvolvidas com o objetivos específico de fazer uso da tecnologia disponível para ensinar Matemática de forma interativa. Destas últimas, destacamos o que o Journal of On-Line Mathematics and Applications - JOMA [17] - definiu como *mathlet*.

Um mathlet, segundo o Journal Online of Mathematics and its Applications (JOMA), é "uma pequena plataforma independente e interativa para o ensino de Matemática". Por esta definição, podemos considerar aplicações desenvolvidas exclusivamente para a internet ou não, em qualquer linguagem de programação, em qualquer plataforma. A grande vantagem atribuída aos mathlets é a possibilidade real de interatividade, aliada ao caráter "independente" que a aplicação possui, onde entendemos por "independente" o fato de que um mathlet não está atrelado a nada mais que não um navegador web. Deste modo, não faz-se necessário que as aplicações residam em algum servidor baseado na internet ou mesmo que qualquer outro software seja adquirido[4].

Alguns exemplos de mathlets podem ser observados nas figuras 3.1, 3.2, 3.3 e 3.4 – disponíveis no site do Projeto Descartes [23] –, bem como na página do Projeto Novas Tecnologias no Ensino[5].

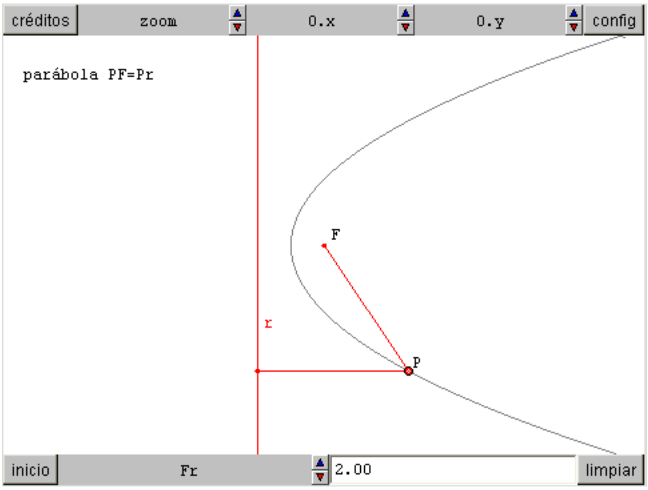


Figura 3.1: Propriedade da parábola

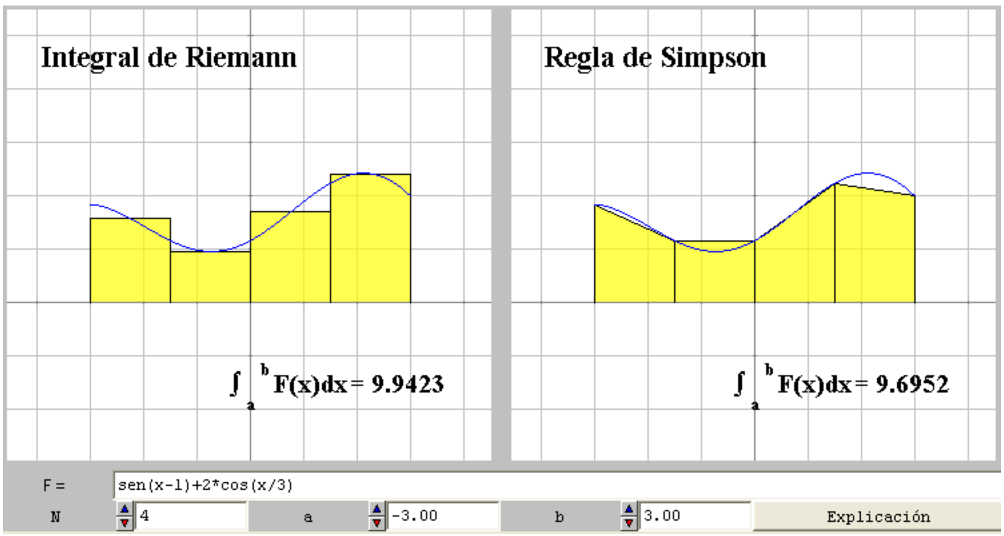


Figura 3.2: Comparação entre definições de integral

[4]Nas versões atuais dos sistemas operacionais existentes, o usuário precisa apenas dispor de um navegador e, em alguns casos específicos, de um plug-in – espécie de adicional ao software – para este navegador.

[5]Ver SANTOS [34]

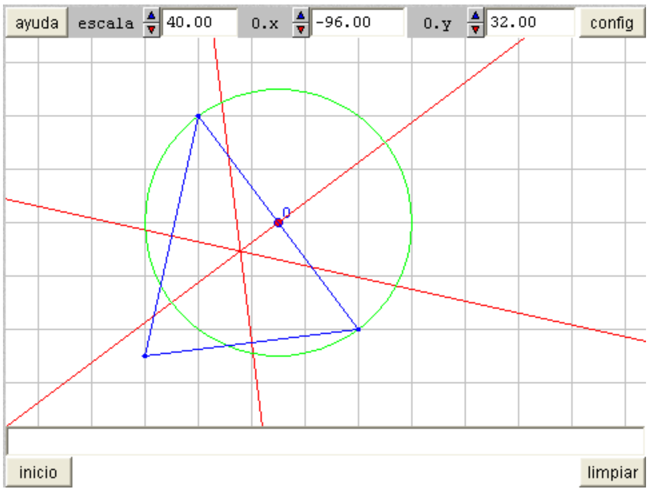


Figura 3.3: Buscando a circunferência circunscrita ao triângulo

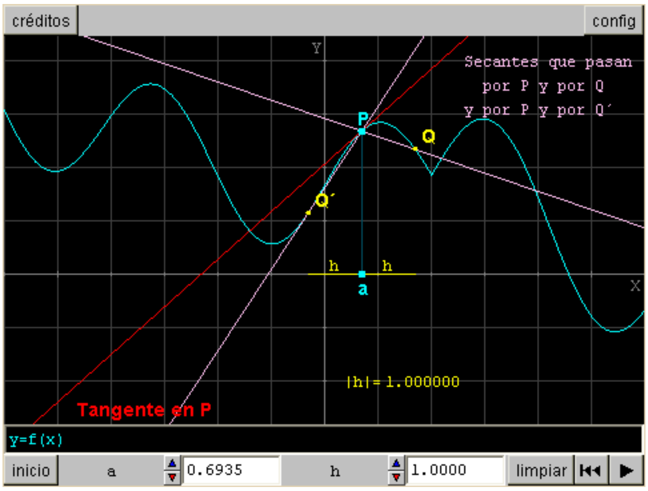


Figura 3.4: Buscando a reta tangente ao gráfico no ponto

Este modo muito peculiar de interatividade professor-aluno, onde o professor pode disponibilizar aplicativos (mathlets) que explorem determinadas características do conteúdo proposto, para que o aluno possa, através da experimentação, elaborar conjecturas e inferir propriedades relacionadas aos entes matemáticos envolvidos na aplicação, simboliza a utilização do que chamamos, baseados em pesquisas de TALL [39] e NÚÑEZ, EDWARDS e MATOS [18] de "ambientes corporificados informatizados" (ou simplesmente "ambientes corporificados"), dado que são sistemas computacionais que possuem como característica uma abordagem essencialmente visual (gráfica), mas que permite, através de roteiros didáticos e/ou da presença física do professor, uma exploração dirigida no sentido de que o aluno construa por si só intuições e conjecturas, as quais ele submeterá interpretações simbólicas e a análises formais, chegando por fim a compreender o conceito estudado.

Tais ambientes devem possuir a característica de serem objetos/softwares diretamente voltados ao ensino, que possibilitem ao aluno um aprendizado baseado em experiências corporificadas, através de noções visuais que lhes são familiares.

Dado que os mathlets contemplam esta característica desejada, isto é, possibilitam o aprendizado através de ambientes corporificados, temos os mathlets como nossa escolha de ferramenta a ser pesquisada.

3.5 Linguagem Java

De todas as possibilidades de mathlets disponíveis, faz-se necessário tomar uma decisão a respeito da forma pela qual os mathlets pesquisados podem ser desenvolvidos. Existem diversas possibilidades de linguagens de programação para a internet que nos permitiriam desenvolver aplicativos passíveis de execução a partir de uma página web. Uma vez escolhida uma linguagem específica, podemos abstraí-la para refletir tão somente sobre o modo como este ferramental pode ser aplicado, e não sobre como ou em que linguagem ele é desenvolvido.

Desta forma, ao tomar como opção uma linguagem de programação específica, temos que levar em conta sua capacidade de execução nos mais diversos computadores e sistemas operacionais, a fim de que os mathlets criados atinjam o maior número possível de professores e alunos.

Dada a característica multiplataforma da linguagem Java – isto é, sua capacidade de execução em qualquer sistema operacional[6] – e a possibilidade que ela nos dá de escrever aplicativos voltados para páginas web, aliada ao fato de que a linguagem Java é uma linguagem livre (não paga), de código aberto (qualquer um pode ter acesso ao código-fonte das classes nativas da linguagem Java) e com vasta documentação disponível, decidimos pela linguagem Java como o meio mais transparente (para o usuário) de desenvolvimento de mathlets. Isto faz do Java nossa escolha quanto à linguagem de programação para os mathlets pesquisados.

3.6 Construtores de Mathlets

Ao decidir pela utilização da linguagem Java, esbarramos em alguns sérios problemas relacionados ao desenvolvimento dos mathlets. O primeiro deles é que, embora a linguagem Java seja bastante difundida e com vasta documentação, seu aprendizado pode ser extremamente complicado mesmo para um programador experiente; mais ainda o será para um professor que

[6]Desde que previamente instalada a Máquina Virtual Java, aplicativo responsável pela execução dos programas escritos em Java. Existe uma JVM (Java Virtual Machine) para cada sistema operacional disponível no mercado.

nunca teve qualquer contato com programação de computadores.

Buscando superar esta barreira, podemos notar que pesquisadores – como os responsáveis pelo JOMA [17], por exemplo – têm organizado e desenvolvido mathlets independentes ou conjuntos de mathlets para o ensino de determinados conceitos matemáticos que, aliados a artigos publicados sobre estes mathlets, permitem ao professor utilizá-los sem maiores dificuldades em sua prática docente. Existem ainda roteiros digitais prontos para o ensino de alguns tópicos em Matemática, como podemos observar em SANTOS [19].

No entanto, a maior parte destas bibliotecas não podem ser adaptadas ou reescritas, e nunca serão extensas o suficiente para atender às necessidades de todos os professores, e/ou a diversidade de seus alunos. Assim, os mathlets por si só não poderiam responder pela condução do professor à posição de criador de sua própria prática docente, um dos requisitos para torná-lo um "pesquisador em ação" e fazer dele um personagem ativo na transposição didática dos saberes a ensinar para os saberes efetivamente ensinados.

Neste sentido, SANTOS, PAIXÃO & PEREIRA [31] introduzem e fazem uso do conceito de "construtores de mathlets". Um construtor de mathlets é uma biblioteca de mathlets configuráveis, onde a alteração de alguns parâmetros é capaz de produzir uma nova aplicação, completamente diferente da anterior. Em geral, deseja-se de um bom construtor de mathlets que este possua uma interface com o usuário (GUI, de *Graphics User Interface*) amigável e intuitiva, além da possibilidade de geração automática de código HTML[7]. Com isto, um professor que nunca teve contato com programação de computadores será capaz de, sabendo apenas as propriedades que envolvem os entes matemáticos que serão explorados, desenvolver um novo mathlet e um roteiro didático para a utilização deste. Podemos observar um mathlet, sua janela de configuração , bem como seu código HTML, nas figuras 3.5, 3.6 e 3.7, respectivamente.

No processo de construção/modificação dos mathlets, o professor, além de expandir a sua própria imagem de conceito sobre o tópico estudado, consegue adaptar suas atividades ao perfil de seus alunos e aos aspectos e propriedades que ele deseje explorar, introduzir ou enfatizar durante sua aula. Deste modo, torna-se o professor ativo na elaboração da práxis docente, fazendo uso do que BARBIER [2] denomina como Pesquisa-Ação.

Finalmente, podemos considerar como objeto de pesquisa os construtores de mathlets e suas características, possibilidades, potencialidades e limitações, no que diz respeito às mudanças promovidas por esta ferramenta na prática e na elaboração da prática docente, à luz das teorias da Pesquisa-Ação e da Cognição Corporificada, descritas no Capítulo 4.

[7]Linguagem própria das páginas web.

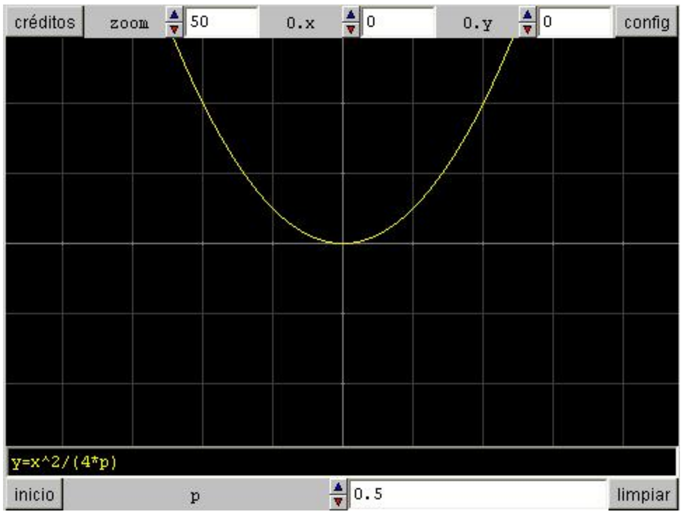


Figura 3.5: Exemplo de mathlet

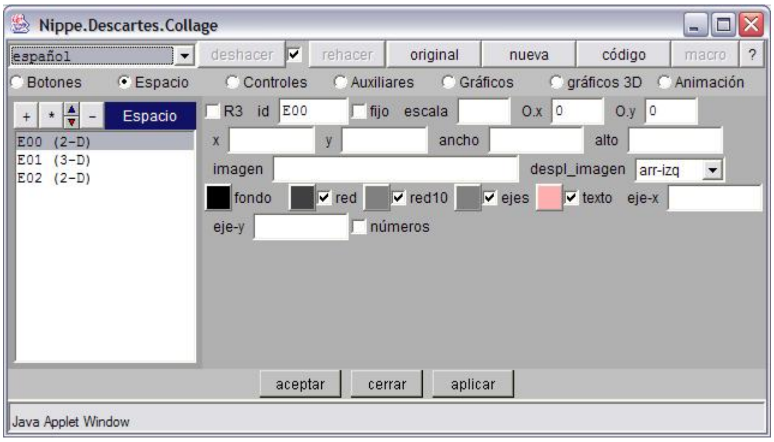


Figura 3.6: Janela de configuração do mathlet

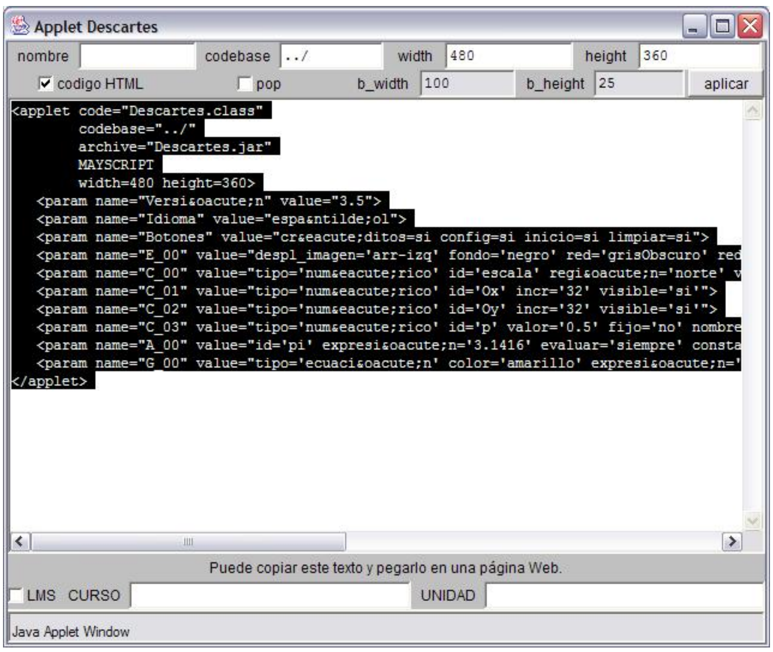


Figura 3.7: Janela com código gerado pelo construtor

4 *Referencial Teórico*

Ao tomar parte em um processo que se mantém constantemente em evolução, como é o da informática educativa, temos que tomar o cuidado de observar aplicações bem-sucedidas – e mal-sucedidas – do ferramental disponível, a fim de estabelecer critérios que nos permitam decidir por determinada abordagem de um conceito matemático em sala de aula.

No entanto, não é apenas "observando aplicações da tecnologia" que chegamos a estabelecer uma cultura sobre o uso de tal tecnologia. Faz-se necessário o embasamento, através de teorias largamente difundidas, reconhecidas e aceitas pela comunidade acadêmica, para que uma proposta de uso da tecnologia em sala de aula possa ser avaliada e posta em prática.

Dada a característica da ferramenta escolhida, que permite transformar o professor em um construtor de suas próprias práticas didáticas, adotamos como uma das metodologias de pesquisa (e também como proposta didática) a "pesquisa-ação", aliada às idéias da "cognição corporificada" – que nos será de grande valia na argumentação sobre as potencialidades da ferramenta no campo da aprendizagem – e ao conceito de micromundo, relacionado aqui aos "organizadores genéricos", no sentido de TALL [35].

Ressaltamos ainda o papel da ferramenta no processo ensino-aprendizagem, recorrendo para tal à teoria das imagens de conceito e à noção de transposição didática, associadas às outras teorias que formam nosso referencial teórico.

O referencial está dividido em dois eixos teóricos: o eixo computacional, contendo os referenciais que se relacionam com o uso do computador e da internet na sala de aula de Matemática; e o eixo educacional, contendo os referenciais que embasam as questões relativas à didática e ao aprendizado em Matemática.

4.1 Eixo Computacional

Entenda-se por Eixo Teórico Computacional o conjunto de fundamentos teóricos que embasa a pesquisa no âmbito da utilização do computador e da internet em sala de aula. A partir deste referencial verificaremos algumas das potencialidades dos mathlets dentro do segmento de uso do computador na escola.

Por considerarmos os mathlets e seus construtores recursos computacionais condizentes com a definição de micromundo fornecida por BALACHEFF e complementada por BELLEMAIN (seção 4.1.2), bem como com a definição de organizador genérico proposta por TALL[1], e munidos de características próprias do que chamamos "ambientes corporificados" – como a potencialidade de utilização com o intuito de produzir uma intuição no aluno a respeito de um dado conceito a partir de experiências visuais –, optamos por incluir estas idéias no presente eixo teórico.

Portanto, neste conjunto, denominado Eixo Teórico Computacional, enquadram-se as idéias da *Cognição Corporificada/Ambientes Corporificados* e dos *Micromundos/Organizadores Genéricos*.

4.1.1 Cognição Corporificada & Ambientes Corporificados

A idéia de cognição corporificada[2], originada com NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS [18] – mas empregada aqui no sentido de TALL [3] [39] –, é uma perspectiva sob a qual considera-se que o aprendizado e a prática de Matemática não são apenas atividades intelectuais isoladas mas levam em conta, além de fatores sociais e culturais e do contexto onde esta prática está inserida, também fatores estritamente corpóreos, isto é, relativos aos sentidos e às percepções do corpo. Desta forma eles estão, segundo os próprios, em parte concordando com autores como LAVE, COBB e CONFREY [4], com a diferença de que estes não levam em conta os fatores corpóreos.

Ainda segundo os autores, o contexto social no qual o ambiente escolar está inserido não apenas influencia a prática docente mas, sobretudo, determina de que forma dar-se-á esta prática. Assim podemos, em livre interpretação , tratar da cognição corporificada como um processo contextualizado social, econômica e geograficamente, ambientado em torno das relações entre os atores deste processo, isto é, professores e alunos, mas situado única e exclusivamente nas percepções sensíveis de cada aluno.

Fazendo um contraponto, NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS [18, p.48] caracterizam a tradicional corrente cognitivista, que dissocia completamente o raciocínio de reações corpóreas

[1] Ver mesma seção.

[2] Tradução nossa para o termo original, do inglês, *embodied cognition*

[3] Esclarecimento adiante.

[4] As obras citadas são:
LAVE, J. *Cognition in Practice: Mind, Mathematics and Culture in Everyday Life*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
COBB, P. Where is the mind? Constructivist and Sociocultural Perspectives on Mathematical Development. *Educational Research*, n. 23, v. 7, 1994, p. 13-20.
CONFREY, J. A Theory of Intellectual Development. *For The Learning of Mathematics*, n. 15, v. 1, p. 38-48

e do próprio entendimento humano. Eles, os cognitivistas, assumem uma divisão entre a mente (uma entidade abstrata) e o corpo, ao qual a primeira transcende, como vemos a seguir:

> *O raciocínio (incluindo o pensamento matemático) também é não-corpóreo, atemporal e universal. Conceitos, os produtos de raciocínio, são igualmente abstratos, e não são limitados por realidades físicas ou corporais. O cognitivismo basea-se no objetivismo, doutrina que assume verdades transcendentais que são independentes da compreensão humana.* (tradução nossa)[5]

Por considerarem válidas as pesquisas que dão conta dos fenômenos co-determinados pelo meio ao qual os agentes e pacientes estavam submetidos, os autores acreditam que o processo de aprendizagem está igualmente co-determinado pelas experiências pessoais (essencialmente físicas, sensórias) às quais os alunos são submetidos. No entanto, alertam os autores, isto não significa que o ensino deva estar pautado em contextualização, uso de exemplos e materiais concretos, manipulação física, e metodologias afins.

Como uso da cognição corporificada, podemos citar um exemplo dado por JOHNSON (*apud* NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS [18, p. 50]), do entendimento abstrato a respeito do método de equilíbrio de equações. Esta experiência (equilibrar, balancear) é fisicamente possível e comum em nosso dia-a-dia (embora não com este sentido, matemático), o que permite ao aluno uma analogia baseada em sua "experiência real" com balanças, a fim de entender o procedimento matemático descrito pelo professor. O termo "balancear", associado ao processo matemático pelo professor, é relacionado instantaneamente pelo aluno à idéia de "equilíbrio": se uma balança está em equilíbrio, adicionamos um determinado peso em um dos pratos, e queremos devolvê-la ao seu estado de equilíbrio, basta que adicionemos a mesma quantidade no outro prato. E é exatamente isso o que ocorre com as equações: quando adicionamos[6] determinada "quantidade" no primeiro membro de uma igualdade (equilíbrio), devemos adicionar a mesma "quantidade" no segundo membro, a fim de manter a igualdade (equilíbrio) válida.

Buscando uma associação entre o uso do computador e a cognição corporificada como processo mental de aprendizagem, TALL [39] faz uma "adaptação " desta teoria, e propõe que utilize-se a tecnologia como suporte a uma abordagem corporificada, através do que

[5]Reasoning (including mathematical thought) is also non-corporeal, timeless and universal. Concepts, the products of reasoning, are similarly abstract, and are not limited by physical or bodily realities. Cognitivism is thus based on objectivism, the doctrine that assumes transcendental ontological truths that are independent of human understanding.

[6]Utilizamos aqui a operação de adição apenas como uma simplificação da escrita.

nós denominamos "Ambientes Corporificados". Neste sentido, TALL[7]considera que uma abordagem corporificada é aquela que leva em conta as experiências sensórias dos alunos, fazendo disparar um processo mental que conduz à construção de uma imagem mental que será o ponto de partida para uma conjectura e posterior formalização e/ou abstração do conceito matemático explorado. Assim, uma abordagem corporificada com uso da tecnologia é, em geral, uma abordagem visual/gráfica que leva o aluno, de algum modo, a construir uma intuição acerca de um determinado tópico.

Note que o sentido de TALL é bem diferente, e mais restrito, que o de NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS pois, além destes últimos considerarem que "tudo é corporificado" – afirmação criticada por TALL [40, p. 30] –, TALL propõe que o computador seja um meio que permita uma abordagem corporificada como "ponte" entre o que ele denomina "mundo corporificado" (parte da Matemática essencialmente pautada pelas percepções e significados fornecidos pelas sensações do indivíduo) e "mundo simbólico" (parte essencialmente pautada pela introdução da simbologia para representar objetos matemáticos) [8]. Cabe ressaltar que este tipo de pensamento – levar o aluno de um modo de raciocínio sensório para uma operação concreta, e a seguir para um pensamento abstrato-formal – já era conhecido antes de TALL, através dos trabalhos do construtivista Jean Piaget[9].

Segundo BRUNER[10] - *apud* TALL[11]-, as representações mentais podem ser classificadas em três grupos, onde o primeiro engloba as representações sensório-motoras, relacionadas diretamente com a ação (física), às quais BRUNER denomina "*enactive*"; a segunda depende basicamente de características visuais e de outros sentidos, denominada "*iconic*" pelo autor; já a terceira, trata das representações através de palavras ou da linguagem de modo geral, a qual recebe a designação de "*symbolic*". A reunião destes três tipos de representação - e mais, a interrelação entre eles - possibilita uma série de avanços do ponto de vista cognitivo. Portanto, é de se esperar de um ambiente corporificado a capacidade de, através do contato com representações que combinam características visuais, simbólicas e físicas, como ocorre com os ambientes computacionais, desempenhar um papel importante no sentido de facilitador da aprendizagem.

Ainda segundo TALL [39], após o movimento de Reforma no Cálculo[12] a classificação de Bruner caiu em esquecimento, e com isto o autor (TALL) decidiu por criar novas categorias de

[7] *Ibid.*
[8] TALL, *op. cit.*
[9] Por exemplo, PIAGET [22].
[10] Obra citada: BRUNER, J. S. *Towards a Theory of Instruction*. Cambridge: Harvard, 1966.
[11] *Ibid.*
[12] *Calculus Reform*: movimento iniciado nos Estados Unidos na década de 1980, que teve como uma de suas principais características a inclusão de um grande número de aplicações numéricas e computacionais no Cálculo.

representação, que podemos observar a seguir:

Corporificada Representação baseada nas percepções humanas e nas ações características do "mundo real", inclusive, mas não limitada a, aspectos visuais e inatos.

Simbolico-Proceitual Representação que combina a regra de símbolos da aritmética, álgebra e cálculo, baseada na teoria de que estes símbolos atuam como processos e como conceitos ("proceito"[13]).

Formal-Axiomático Uma abordagem formal, partindo de alguns axiomas escolhidos e formulando deduções lógicas para provar teoremas.

Estas categorias culminaram em uma teoria publicada por TALL [40, 41], sobre os "três mundos da Matemática"[14]: o mundo corporificado (*conceptual-embodied world*, ou simplesmente *embodied world*), o mundo proceitual (*proceptual-symbolic world*, ou simplesmente *proceptual world*), e o mundo formal (*formal-axiomatic world*, ou *formal world*).

A representação corporificada - associada, na devida medida, às idéias da cognição corporificada - é a representação mais primitiva do ser humano, atrelada aos sentidos, suas percepções e ações, constituindo imagens e concepções mentais associadas a objetos do "mundo real". No âmbito da cognição corporificada, mais especificamente na área de Ensino da Matemática, TALL[15] cita o trabalho de NÚÑEZ, EDWARDS & MATOS [18] como sendo um dos de maior relevância[16]. Sobre estes, particularmente, TALL afirma evitar o sentido de "*embodiment*" dado pelos autores, que chegam a assumir que tudo poderia ser tratado como corporificado [40, p. 30], consideração desprezada por TALL. Nesta pesquisa nos preocuparemos um pouco mais com as representações corporificadas, mas sem nos esquecermos da importância dos três mundos relatados por TALL e da interrelação entre eles.

A representação corporificada, quando explorada por um ambiente computacional, permite que o estudante faça uso de suas próprias experiências e sensações pessoais durante a construção do conhecimento. Mas este tipo de abordagem deve sempre ter o complemento de outras representações – simbólicas e/ou formais –, a fim de evitar conflitos cognitivos por conta da incorreta abstração de um dado conceito. Podemos exemplificar isto tomando as noções primitivas da Geometria Euclidiana Plana: ponto, reta e plano. Ao ter contato com geometrias

[13]Baseado no termo "procept", definido por TALL [42]
[14]Tradução nossa para a teoria de TALL, *Three Worlds of Mathematics*.
[15]TALL, *op. cit.*, p. 4
[16]As outras obras citadas por TALL são:
LAKOFF, G.; JOHNSON, M. *Philosophy in the Flesh*. New York: Basic Books, 1999.
LAKOFF, G.; NÚÑEZ, R. E. *Where Mathematics Comes From*. New York: Basic Books, 2000.

não-euclidianas, alguns estudantes podem ter dificuldades para perceber que uma linha reta não é exatamente aquilo que imaginam através do sentido físico-corpóreo.

Por este motivo, um ambiente corporificado deve ter sempre associado a ele meios de promover o crescimento da capacidade de abstração do estudante a respeito do conceito trabalhado, sob pena de limitar de modo danoso a imagem de conceito do mesmo[17]. Tais meios podem ser representados por determinadas estratégias didáticas adotadas pelo professor, como a utilização de materiais de apoio que proponham a resolução de problemas capazes de apontar prováveis obstáculos epistemológicos do conceito e identificar conflitos cognitivos no estudante. Desta forma, o professor tem a garantia de utilizar o ambiente corporificado como um aliado na tentativa de promover um ganho qualitativo em sua prática docente, colaborando efetivamente e facilitando o aprendizado do estudante. Uma discussão a respeito do papel dos mathlets como ambientes corporificados no ensino de Matemática e do ganho qualitativo que este pode dar à prática docente pode ser vista em SANTOS & PAIXÃO [30].

4.1.2 Micromundos & Organizadores Genéricos

Um organizador genérico é, segundo TALL [37], um ambiente que dá ao aluno acesso à manipulação de exemplos (ou contra-exemplos, se for o caso) de um determinado conceito matemático ou de um conjunto de conceitos matemáticos relacionados entre si. Um organizador genérico pode ser de qualquer espécie desde, por exemplo, materiais concretos presentes nas primeiras séries do Ensino Básico - como observado por ESCARLATE [11] -, até um programa de computador, e deve conduzir o indivíduo por um processo evolutivo entre o que ele já sabe[18] e o que ele deve aprender. Ainda segundo TALL (*apud* ESCARLATE[19]), um organizador genérico deve ser baseado em uma idéia âncora já familiar para estudante, para que o mesmo não tenha dificuldades em manipular o ambiente, e deve possibilitar uma exploração evolutiva da teoria, sem no entanto esgotar todas as possibilidades do conceito estudado. Em sua tese de Doutorado [36] e em artigo precedente a ela [35], TALL define um organizador genérico do seguinte modo [20]:

> *Um organizador genérico é um micromundo que habilita o estudante a manipular exemplos de um conceito matemático específico ou um sistema de*

[17] A teoria das imagens de conceito está relatada na seção 4.2.1

[18] Algo que TALL denomina "raiz cognitiva", devendo ser familiar ao indivíduo (isto é, algo que ele já conheça, que faça sentido para ele) e, ao mesmo tempo, conter oportunidades de desenvolvimento, permitindo expandir a imagem de conceito do mesmo a patamares mais elevados. Para mais informações, ver TALL [37] e TALL [38]

[19] *Ibid.*

[20] As definições divergem apenas em alguns termos utilizados.

> *conceitos relacionados. O termo "genérico" significa que a atenção do estudante é direcionada para certos aspectos dos exemplos que corporificam conceitos mais abstratos.* (tradução nossa)[21]

TALL[22]alerta, no entanto, que a existência de um organizador genérico para determinado conceito não garante que o estudante será capaz de partir dos casos particulares que o organizador genérico dá conta e abstrair para o caso geral. Para solucionar este problema, TALL define o personagem "agente organizador"[23], como sendo um "mentor" que guia o estudante na utilização do organizador genérico, obtendo deste os melhores resultados possíveis. Este personagem pode ser representado por um professor - presencial ou à distância -, um livro texto, ou mesmo um tutorial multimídia, desenvolvido para este fim. O autor também define um "sistema organizacional genérico"[24], que é a combinação de um organizador genérico com um agente organizador.

Para TALL [37], é de grande importância a possibilidade de manipulação de contra-exemplos, principalmente em tópicos mais avançados - como convergência de seqüências, continuidade e diferenciabilidade de funções - pois a definição de conceito pode ser tão complicada a ponto de conduzir o estudante a sérias dificuldades no aprendizado.

No caso de organizadores genéricos computacionais, TALL[25]descreve três formas distintas de entendimento:

Entendimento Externo Occore quando o usuário do organizador genérico não sabe o que acontece dentro do computador, mas já possui algum conhecimento a respeito do conceito estudado, sendo capaz de validar (ou não) os resultados obtidos por meio dele. Como exemplo, TALL cita o caso em que o usuário não faz idéia do algoritmo utilizado pelo computador, mas pode ter conhecimentos de outra espécie que lhe permitam checar se o resultado obtido é, de fato, satisfatório.

Entendimento Análogo Ocorre quando o usuário do organizador genérico tem alguma idéia sobre o algoritmo executado pelo mesmo. Como exemplo, TALL cita o caso em que o usuário sabe que a raiz de uma equação é calculada pelo computador utilizando o Método de Newton-Raphson, desconhecendo, no entanto, como ele está implementado.

[21]A generic organizer is an environment (or microworld) which enables the learner to manipulate examples of a specific mathematical concept or a related system of concepts. The term "generic" means that the learner's attention is directed at certain aspects of the examples which embody the more abstract concept.

[22]*Ibid.*

[23]Tradução nossa para o termo, em inglês, *organising agent*.

[24]Tradução nossa para o termo, em inglês, *generic organisational system*.

[25]*Ibid.*

Entendimento Específico Ocorre quando o usuário do organizador genérico tem total conhecimento de como o programa está construído. Segundo TALL, isto é raramente possível ou até mesmo desejável pela maioria dos usuário de computador, mas seria útil para os estudantes terem, pelo menos, um entendimento externo ou, preferencialmente, um entendimento análogo [37, p.8].

Já BELLEMAIN [3] utiliza o conceito de micromundo para designar ambientes independentes que sirvam para o ensino de determinado assunto, sob um ponto de vista construtivista. Podemos dizer que a definição de micromundo representa uma idéia mais geral em relação à definição de organizador genérico fornecida por TALL, de modo que um organizador genérico é, legitimamente, um micromundo.

A definição de micromundo é atribuída a BALACHEFF [1] - *apud* BELLEMAIN - e, segundo o autor, um micromundo é constituído de dois sistemas. O primeiro é um sistema formal, no sentido matemático, composto por um grupo de entes matemáticos, operações elementares e regras sobre como executar e associar estas operações. Já o segundo é um sistema comportamental, que determina como os objetos e operações do sistema formal relacionar-se-ão com a interface[26].

BALACHEFF admite ainda que um micromundo deve possibilitar a criação de objetos e processos complexos, formados por agrupamentos dos objetos e operações elementares. Com isto, ele sinaliza que um micromundo deve possuir a característica de não apenas permitir uma manipulação "programada", rígida e restrita; um micromundo deve ir além, conduzindo o usuário à livre manipulação e reagindo a cada ação executada por ele.

Neste sentido, da livre manipulação e da interpretação das ações do usuário, BELLEMAIN [3] propõe um terceiro sistema, chamado sistema de interpretação , que é responsável por determinar as possíveis ações do usuário. Este sistema interpreta as decisões e ações do usuário e as converte em operações sobre os entes matemáticos do sistema formal, implementando a manipulação direta usuário-micromundo[27]. O sistema de interpretação é formado por comando e mecanismos de construção e manipulação dos objetos elementares, criando uma espécie de "camada" que, através do sistema comportamental, comunica-se com o sistema formal.

[26]Parte do ambiente responsável por realizar a comunicação entre o usuário e o micromundo, permitindo a ação do primeiro sobre o segundo e a resposta do segundo às ações do primeiro, em geral, dinamicamente.

[27]Neste caso, segundo BELLEMAIN [3], as visualizações das representações dos entes matemáticos e suas relações não são somente elementos no lado da saída de dados, mas também no lado da entrada de dados. As representações visuais são, neste caso, tanto produto das ações do usuário quanto objeto receptor destas mesmas ações.

Segundo BELLEMAIN, os sistemas comportamental e de interpretação destacam a importância das ações significativas que ocorrem na interação entre o indivíduo e o micromundo, ações essas de grande importância do ponto de vista da aprendizagem. Neste sentido, PAPERT [21] propõe que o estudante seja ativo na sua própria aprendizagem, considerando que a utilização dos micromundos na resolução de problemas favorece a construção de conhecimentos matemáticos, justificando, pois, a sua utilização [28].

No entanto, tais ações, analisadas do ponto de vista do ensino, podem mostrar-se igualmente importantes quando vistas da perspectiva de uma possível melhoria no micromundo. O professor, ao trabalhar com micromundos criados por ele próprio, tem a possibilidade de, utilizando-se da análise das ações significativas de seus alunos, promover melhorias e/ou adaptações no micromundo, tornando-o mais didático, matematicamente mais consistente, ou mesmo aproximando-o de características específicas do tópico ensinado, que ele decida explorar. Para realizar esta análise das ações do aluno - uma tarefa muito complicada de ser executada -, BELLEMAIN trabalha sobre a criação de um ator denominado "agente micromundo". Este seria tão somente um novo micromundo, capaz de comunicar-se com outros micromundos, transmitindo comandos, gerenciando conexões, entre outras tarefas. Desta forma, o professor poderia "coletar" informações a respeito das atividades executadas por seus alunos, bem como os próprios alunos poderiam ter seus micromundos comunicando-se. Uma conseqüência atual deste tipo de iniciativa pode ser vista nas pesquisas voltadas para o ensino colaborativo.

Aliado a esta possiblidade de melhorias, podemos considerar o fato de que, para utilizar um micromundo (em nosso caso um organizador genérico computacional) em sala de aula, faz-se necessária a elaboração de roteiros didáticos que permitam, em geral a partir da resolução de problemas, a manipulação direta dos entes matemáticos envolvidos, promovendo assim um aprendizado ativo e significativo para o aluno.

Deste modo, ao elaborar seus próprios micromundos, e obviamente seus próprios roteiros didáticos para utilização destes, o professor terá a oportunidade tornar-se criador de sua própria prática docente, preparando micromundos que funcionem como organizadores genéricos dos conceitos que ele deseja introduzir, observando o comportamento de seus alunos frente ao micromundo, seus pontos fortes e fracos e, por fim, revendo a estrutura do micromundo, seja reconstruindo-o ou simplesmente alterando o roteiro didático a ele destinado, e retornando em seguida ao início da cadeia, reaplicando o micromundo e observando os novos resultados [29].

[28] BELLEMAIN [3, p.56]

[29] Note que esta é uma das características da Pesquisa-Ação .

4.2 Eixo Educacional

Entenda-se por Eixo Teórico Educacional o conjunto de fundamentos teóricos que embasa a pesquisa no âmbito das concepções pedagógicas pertinentes aos objetivos traçados.

Por considerarmos importantes as influências dos mathlets e de seus construtores sobre a imagem de conceito dos alunos a respeito dos conteúdos matemáticos ensinados, e pela importância que uma correta transposição dos saberes a ensinar, através de roteiros didáticos elaborados pelo próprio professor, pode proporcionar ao aprendizado de seus estudantes, optamos por incluir estas idéias no presente eixo teórico.

Assim, neste conjunto, denominado Eixo Teórico Educacional, enquadram-se a teoria das *Imagens de Conceito/Definições de Conceito* e a noção de *Transposição Didática*.

4.2.1 Imagem de Conceito & Definição de Conceito

Segundo TALL & VINNER [43], o termo imagem de conceito define a estrutura cognitiva total associada a um determinado conceito, como podemos observar no trecho seguinte:

> *Utilizaremos o termo imagem de conceito para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, incluindo todas a imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo da vida através de experiências de todas as formas, sendo alterada à medida que o indivíduo conhece novos estímulos e amadurece.* (tradução nossa)[30]

Os autores dão como exemplo o conceito de subtração que, quando ensinado pela primeira vez, sugere às crianças que como resultado teremos uma redução do minuendo; isto causa conflitos posteriomente, ao terem contato com a subtração de números negativos. Assim, a imagem de conceito deveria conter todas as características associadas ao conceito, a fim de facilitar o manuseio de determinados conflitos futuros, culminando com o crescimento da gama de informações que a imagem de conceito do aluno sobre a subtração possui.

Como já enfatizado por GIRALDO [14], esta definição deixa claro que só é possível falar em imagem de conceito de uma pessoa, nunca de um grupo de indivíduos ou de uma turma inteira. Além disso, a imagem de conceito mostra-se algo parcialmente dissociado do conceito:

[30]We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures.

ela não está simplesmente atrelada ao conceito, pois depende diretamente do entendimento do indivíduo. Com isto, podemos ter duas pessoas com imagens de conceito completamente distintas - e não necessariamente coerentes com a definição formal do conceito, isto é, a definição aceita pela comunidade matemática - em um mesmo grupo de indivíduos.

TALL & VINNER vão além, indicando que nenhum conceito matemático deve ser trabalhado baseado apenas em sua definição formal, sob pena de que o aluno não seja efetivamente capaz de tomar para si todo o conhecimento acerca das propriedades do conceito que lhe fora ensinado. Assim, se faz necessária uma integração entre diversos aspectos e características do conceito, de modo que o aluno seja capaz de interrelacioná-los, construindo uma estrutura robusta e adequada à definição formal.

Neste sentido, ESCARLATE [11, p.3] alerta que não é conveniente, do ponto de vista didático, utilizar a definição formal de um conceito durante sua introdução [31]; e VINNER [44] sinaliza ainda para a importância de que, em algum momento, o aluno seja apresentado a esta definição, de modo a mantê-lo a par da utilidade de tal definição para o entendimento do conceito.

A cada momento em que uma característica específica de um dado conceito é necessária, o indivíduo utiliza o que TALL & VINNER definiram como "imagem de conceito evocada", isto é, uma parte da imagem de conceito que está sendo utilizada em um dado momento. As diferentes partes da imagem de conceito não são, obrigatoriamente, coerentes umas com as outras. Em alguns casos, imagens conflitantes de um mesmo conceito podem ser evocadas ao mesmo tempo, o que cria no aluno o que chamamos usualmente de conflitos cognitivos.

Os autores introduzem ainda a idéia de definição de conceito. A definição de conceito é simplesmente uma sentença de palavras que o indivíduo utiliza para dar significado ao conceito. Ela também é individual e, obrigatoriamente, faz parte da imagem de conceito do indivíduo. A definição de conceito pode ser criada ou não pelo indivíduo e, por isso, pode ter ou não relação com a definição formal do conceito em questão. Nos casos em que o professor fornece aos alunos uma definição , sentença ou teorema pronto para que os alunos decorem, incorremos no caso em que o aluno apenas absorve a definição de conceito formulada por outra pessoa. Já em outros casos, o aluno é levado, a partir de experimentações, exemplos e raciocínio dedutivo, a construir sua própria definição de conceito. Há ainda os indivíduos que não possuem qualquer definição de conceito formada, embora sua imagem de conceito não seja necessariamente inexistente.

[31] ESCARLATE, *op. cit.*, ao comentar artigo de VINNER, aponta que o autor defende a existência da possibilidade de que não seja utilizada a definição formal inicialmente.

Ambos, imagem de conceito e definição de conceito, podem mudar ao longo da vida do indivíduo, incorporando novas características (imagens mentais, propriedades ou processos) ainda desconhecidas por ele, adequando-se melhor à definição formal, ou absorvendo novas descobertas científicas a respeito do conceito em questão.

Esta teoria relaciona-se com a pesquisa de uma forma muito intensa no âmbito da aplicação da ferramenta ao cotidiano escolar. Ao elaborar seus mathlets e ao aplicá-los em seus alunos, os professores estarão operando diretamente sobre a imagem de conceito de cada indivíduo participante do processo ensino-aprendizagem (incluindo ele próprio!).

4.2.2 Transposição Didática

A noção de transposição didática, de origem na escola francesa, uma das mais influentes no Brasil, refere-se à transformação que ocorre entre os diversos tipos de saber, do científico (proveniente da Academia) ao efetivamente ensinado nas escolas, chegando finalmente ao aluno.

Esta idéia é atribuída a CHEVALLARD [5, p.39], que nos fornece uma primeira definição para a transposição didática:

> *Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os "objetos de ensino". O "trabalho", que de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática.* [32]

Chevallard afirma que o saber científico passa por uma seqüência de transformações até chegar ao aluno, e a primeira delas determina quais devem ser os componentes do conjunto de conteúdos escolares (currículo), bem como os valores e objetivos que conduzirão o processo de ensino. Tal transformação (transposição) é realizada por um modificador denominado *noosfera*, composto por cientistas, professores, especialistas, instâncias políticas encarregadas da educação, autores de livros, entre outros agentes [33].

Note, no entanto, que, segundo PAIS [20], alguns destes personagens não estão em contato com a sala de aula, tornando este trabalho quase que totalmente desvinculado do professor e de seu papel de formar o aluno não apenas científica e educacionalmente, mas

---

[32] Tradução de PAIS [20, p.16]

[33] Dentre os personagens citados podemos, no Brasil, incluir ainda os exames vestibulares e o mercado de trabalho, que têm exercido um papel determinante na organização do que será ensinado nas escolas, influindo diretamente sobre esta decisão.

também cultural e socialmente. Como conseqüência direta deste fato, é possível encontrar em diversas escolas projetos “interdisciplinares” e/ou “contextualizados”, que buscam inserir os conteúdos escolares no dia-a-dia do aluno ou mesmo interrelacioná-los. Neste mesmo sentido, é possível encontrar diversas estratégias didáticas totalmente inadequadas à realidade do aluno, por terem sido elaboradas sem qualquer conhecimento das necessidades didáticas/práticas - ou mesmo qualquer participação- de docentes em atividade nas turmas para as quais tal estratégia destina-se.

PAIS [20, p.19] relata ainda que um processo de transposição pode ser analisado sob dois aspectos distintos:

> *Quando observamos as transformações das idéias matemáticas são analisadas em relação a um determinado conceito específico, trata-se de uma transposição didática stricto sensu. Por outro lado, se a análise é desenvolvida no contexto mais amplo, não se atendo a uma noção particular, podemos então falar de uma transposicção didática lato sensu.*

Neste último caso, PAIS[34]enquadra o movimento conhecido como Matemática Moderna, que foi uma tentativa de estruturar o ensino da Matemática de maneira axiomática, onde todos os conceitos matemáticos deveriam seguir uma ordem didática que pode ser expressa pela cadeia “definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações e/ou exercícios)”. Com esta reforma, tensionava-se a ênfase em tópicos como a teoria dos conjuntos, a lógica, a topologia, e as propriedades algébricas. Frutos desta reforma são, por exemplo, a introdução dos diagramas de Venn como um objeto de estudo e a descontextualização dos produtos notáveis, que passaram a ser ensinados como tópicos isolados, distantes de suas reais aplicações e finalidades.

Observada em sentido mais amplo, a transposição didática relaciona três tipos de saberes. O primeiro deles, denominado saber científico, representa o saber constituído na Academia (Universidades e grupos/institutos de pesquisa) e não necessariamente adaptável ao Ensino Básico; sua representatividade é maior em termos científicos, econômico-políticos e tecnológicos. Este saber, como ressaltado por PAIS, nem sempre é relatado em linguagem acessível, dado o caráter formal e técnico dos textos acadêmicos. Para que seja possível esta transposição, do saber científico ao saber escolar, PAIS[35]considera necessário um trabalho didático que seja capaz de reformular o saber científico, visando a prática educativa-pedagógica.

Já o segundo, denominado saber a ensinar, representa um saber mais ligado à didática

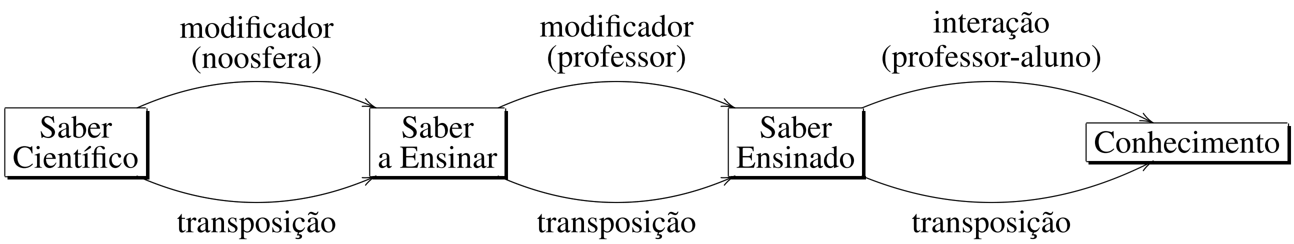
[34] *Ibid.*
[35] *Ibid.*

utilizada para apresentar o saber científico ao aluno. Este vai um pouco além do "mero" saber, incorporando elementos acerca de como tais saberes seriam ensinados em sala de aula. Isto envolve o que PAIS [20] classifica como "simulação de descoberta do saber", dando conta da relação existente entre o saber e o modo como ele será apresentado aos alunos. Neste tipo de saber podemos enquadrar o conteúdo dos livros didáticos e os conteúdos programáticos das escolas.

Por fim, temos um terceiro tipo de saber, denominado saber ensinado, que consiste no conteúdo efetivamente transmitido pelo professor ao longo de suas aulas[36]. Este não é, necessariamente, idêntico ao que consta nos livros didáticos e nos conteúdos programáticos, pois depende diretamente de como o professor vê sua turma através de diversos pontos de vista como, por exemplo, a inclinação da curva de aprendizagem dos alunos e o contexto geográfico, econômico e social.

Além destes, podemos citar ainda o processo dado durante a assimilação do conteúdo por parte do aluno, que vai interferir diretamente sobre a sua imagem de conceito do mesmo, e que depende do entendimento do aluno acerca da explicação dada pelo professor, da própria relação professor-aluno, e do quão clara foi a explanação do professor[37]. Esta última etapa conduz finalmente o saber científico até o aluno, que o terá depreendido ou não.

Assim, podemos caracterizar a transposição didática, observada em todas as suas etapas, através do diagrama abaixo, que representa todas as transposições realizadas do saber científico até o entendimento do aluno:



Transposição Didática

Indo um pouco além PAIS, a partir de uma análise do trabalho de CHEVALLARD, define como "textualização do saber" um processo de preparação pelo qual o saber a ensinar passa, visando a organização didática do mesmo. Este processo deve seguir algumas regras, como

[36]Note-se que, neste ponto, consideramos como única "prova" do que foi ensinado em sala o plano de aula do professor, dando a ele a credibilidade de relatar como, de fato, transcorreu a aula.

[37]Note que isto não está escrito nos planos de aula!

enumera o autor [38] :

> . . . a *desincretização* , que consiste na exigência de proceder a uma divisão da teoria em várias áreas e em especialidades bem delimitadas; a *despersonalização* , que consiste na exigência da separação do saber de qualquer contexto pessoal; a *programabilidade*, que consiste no estabelecimento de uma programação da aprendizagem segundo uma seqüência progressiva e racional; a *publicidade*, que é a definição explícita do saber que deverá ser ensinado.

Note que a estrutura apontada por PAIS acaba por reger a elaboração de alguns livros didáticos e, de modo bem significativo, a estruturação dos currículos escolares. Cabe observar ainda que esta estrutura é afetada diretamente por variáveis que o autor denomina "tempo didático" e "tempo de aprendizagem", que nada mais são que o tempo previsto para que um dado tópico seja ensinado (definido no plano de curso, ou mesmo em alguns livros didáticos) e o tempo que o aluno leva para compreender o assunto.

Mas devemos ter em mente que isto não é algo simples, dado que é variável o tempo que o professor necessita, de fato, para ensinar determinado tópico - depende da metodologia e da estratégia didática utilizada -, e igualmente o é o tempo que o aluno leva para superar todos os conflitos cognitivos com os quais se depare (que também varia, de indivíduo para indivíduo).

Neste ponto, CHEVALLARD parece crer que o processo ensino-aprendizagem seja algo linear, seqüencial e rígido, podendo perfeitamente ser comprimido ou estendido pelo tempo didático. Este pensamento valoriza mais o cumprimento do programa pré-determinado, tratando o ensino da Matemática como algo pronto e acabado, diminuindo as chances de que o aluno desenvolva uma visão crítica a respeito da Matemática. Se tratados literalmente, os dois tempos são contraditórios, dado que enquanto um deles (o tempo didático) prega que um dado assunto deve ser ensinado em um espaço de tempo pré-definido, o outro (o tempo de aprendizagem) nos mostra que nenhum conteúdo pode ter um tempo pré-determinado para ser ensinado.

Eis aí um dos grandes desafios do professor: conseguir dosar, de modo produtivo, tempo didático e tempo de aprendizagem. Para tal, o professor deve buscar estratégias que lhe permitam ensinar um tópico de modo mais rápido e eficiente e, ao mesmo tempo, que esta estratégia permita ao aluno compreender mais rapidamente os pormenores do conceito dado e superar os obstáculos epistemológicos e os possíveis conflitos congnitivos que ele venha a deparar-se. Tal estratégia deve ser sempre revista, dado que a cada momento temos variações dos tempos descritos por CHEVALLARD. Note que tal "revisão de estratégias" é uma das

[38] PAIS [20, p.30]

características da Pesquisa-Ação, metodologia constante de nossa proposta de mudança na prática docente.

Ao relacionarmos esta noção de transposição didática à pesquisa, acreditamos que o professor-pesquisador deve ter em mente que, para construir seus mathlets com maior adequação às características cognitivas de seus alunos, deve cuidar para que se transponham os “saberes científicos” em “saberes a ensinar”, e finalmente estes em “saberes ensinados” - todos no sentido de CHEVALLARD, *apud* PAIS [20] - da melhor forma possível, tanto com relação ao tempo de aprendizagem, quanto com relação ao tempo didático.

5 Metodologia

Visando verificar a validade de nossas conjecturas, esta pesquisa baseia-se na análise de alguns dados de suma importância no correto entendimento do modo como a utilização dos mathlets interfere na prática docente.

O modo como estes dados foram coletados e analisados relacionam-se com duas metodologias bastante difundidas dentro do campo de pesquisa em educação: a pesquisa-ação e o estudo de caso.

Este capítulo visa esclarecer a que nos referimos ao utilizarmos os termos "pesquisa-ação" e "estudo de caso", de modo a situar a pesquisa dentro de um contexto metodológico bem definido.

5.1 Pesquisa-Ação

Ao utilizar o termo "pesquisa-ação", estamos fazendo referência à metodologia de pesquisa onde o pesquisador interage direta e continuamente com o objeto de sua pesquisa, podendo, em alguns casos, até mesmo desempenhar o papel, ele próprio, de pesquisado.

De modo geral, podemos dizer que esta metodologia nos permite, a cada passo dado, reavaliar e reestruturar a pesquisa, obtendo assim uma pesquisa consideravelmente adaptável a novas possibilidades e/ou entraves que possam surgir ao longo do desenvolvimento da mesma. Ao contrário de pesquisas totalmente fechadas onde, ao iniciar, o pesquisador já sabe exatamente onde quer e vai chegar, no caso da pesquisa-ação uma mudança de rumos no decorrer da coleta e/ou da análise de dados é algo completamente possível e freqüente.

No caso específico deste trabalho, buscamos com a pesquisa-ação não apenas analisar dados coletados, mas sobretudo avaliar de que modo a utilização dos mathlets em sala de aula pode modificar a práxis docente, transformando o professor em um "pesquisador em ação", capaz de construir, avaliar e modificar sua própria prática, adaptando-a à sua realidade docente cotidiana.

Portanto, sugerindo que o professor se torne um pesquisador de sua própria prática a partir do uso de construtores de mathlets, estamos tensionando à melhoria qualitativa de sua atividade docente, possibilitando assim uma melhoria qualitativa no aprendizado de seus alunos.

A metodologia da pesquisa-ação tem – segundo FRANCO [12] – suas origens nos trabalhos de Kurt Lewin, em 1946, no sentido de uma pesquisa experimental, de campo. Tais pesquisas tinham por objetivo alterar hábitos alimentares e atitudes racistas de parte da população norte-americana.

Durante os anos 50 esta concepção original adquire um grande número de variantes, como a que ANDRÉ [7] atribiu a COREY [1], segundo a qual este seria o proceso prático de estudo de problemas, de modo a orientar, corrigir e avaliar suas ações. Os livros da época, ainda segundo ANDRÉ[2], descrevem esta vertente da pesquisa-ação como uma ação sistemática e controlada, desenvolvida pelo próprio pesquisador, sendo denominada ”investigação-ação” (*action research*[3]).

Após ficar praticamente esquecida nos anos 60 - segundo ANDRÉ[4]-, durante meados dos anos 70 a pesquisa-ação ressurge, dando origem a diversas ramificações. É a partir de então que, segundo FRANCO [12], a pesquisa-ação passa a ter como finalidade a melhoria da prática educativa docente.

Dentre as diversas correntes, podemos citar algumas, enumeradas por ANDRÉ [7]:

Corrente Anglo-Saxônica Possui um caráter de diagnóstico, com a proposta do professor-pesquisador introduzida e defendida por STENHOUSE e sustentada por ELLIOT [5]. Inicialmente esta linha focava-se prioritariamente na imagem do professor, mas com o tempo foi buscando também questões sobre o currículo e sobre as condições da instituição escolar.

Corrente Australiana Tem como representantes principais CARR e KEMMIS [6]. Também preocupa-se com o currículo, mas sugere que a pesquisa seja voltada para o desenvolvimento profissional docente, para melhorias nas escolas e nas políticas educacionais. Esta vertente considera que deve-se estabelecer uma série de ações, a serem

---

[1] Obra citada: COREY, S.M. *Action Research to Improve School Practices*. New York: Columbia University, 1953, 161p.

[2] *Ibid.*

[3] Embora o termo *research* admita como tradução tanto a palavra ”pesquisa” quanto a palavra ”investigação”, optamos por relatar a tradução fornecida por ANDRÉ [7] em sua publicação.

[4] *Ibid.*

[5] Obras citadas:
STENHOUSE, L. *What is Action Research?* Centre for Applied Research in Education (C.A.R.E.), Norwich: University of East Anglia, 1979.
ELLIOTT, J. Teachers as Researchers. In: KEEVES, J.P. (Ed.). *Educational Research, Methodology and Measurement: an International Handbook*. Pergamon Press, 1988, p.78-81

[6] Obras citadas:
CARR, W. & KEMMIS, S. Becoming Critical. *Education, Knowledge and Action Research*. Lewes: Falmer, 1986.
CARR, W. & KEMMIS, S. *Teoria crítica de la enseñanza*. Barcelona: Martinez Roca, 1988.

sistematicamente submetidas a observação, reflxão, e mudança.

Corrente Espanhola/Portuguesa São semelhantes às correntes anteriores, e têm como autores PEREZ GOMES e ANTÓNIO NÓVOA [7]. Estas linhas tratam da pesquisa-ação no que cerne à formação continuada de professores.

Corrente Francesa I Voltada para a educação de adultos, educação popular, educação permanente e a animação sociocultural. Tem como alvo principal a conscientização do grupo para uma ação conjunta em busca da emancipação. BARBIER [2] é o principal representante desta linha, que na América Latina desenvolveu-se com o nome de pesquisa participante. Nela, os participantes estão envolvidos em diferentes fases da pesquisa, inclusive na definição do que será pesquisado. Esta linha possui, claramente, um caráter político, no sentido em que tenta conscientizar o grupo de sua condição de dominado (social e economicamente desfavorecidos), transformando-o.

Corrente Francesa II Voltada para a pesquisa-ação institucional, com o objetivo de que os grupos-objeto nas instituições se tornem grupos-sujeito à medida que vão se conhecendo, analisando e renovando. Isto visa tornar as relações sociais entre os grupos mais justas.

Corrente Norte-Americana Tem início a partir do trabalho de LEWIN (em 1946), diversificando-se e defendendo um tipo de investigação cooperativa, que privilegia o trabalho conjunto e a colaboração progressiva entre o pesquisador e os indivíduos pesquisados.

Segundo FRANCO [12], uma das principais referências no Brasil é o trabalho de BARBIER [2] (corrente francesa), no qual ele enfatiza a "abordagem em espiral", observando que cada tomada de decisão por parte do grupo de pesquisadores deve levar em conta os fatos observados sobre os indivíduos pesquisados, conduzindo assim a um (re)planejamento a cada fase da pesquisa.

Nas abordagens mais recentes – ainda segundo FRANCO –, podemos notar que a pesquisa-ação visa a transformação da prática (docente) através da própria prática. É, em boa parte dos casos, fruto de observações dos pesquisadores sobre os pesquisados, ou dos pesquisados sobre os próprios pesquisados. Em alguns casos a pesquisa-ação é, erroneamente, confundida com "trabalho de campo"; na verdade a pesquisa-ação abrange muito mais do que

[7] Obras citadas:
PEREZ GOMES, A. O Pensamento Prático do Professor: a Formação do Professor como Profissional Reflexivo. In: NÓVOA, A. (Coord.). *Os Professores e sua Formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1992.
NÓVOA, A. As ciências da educação e os processo de mudanças. In: PIMENTA, S.G. (Coord.). *Pedagogia, Ciência da Educação?* São Paulo: Cortez, 1996, p.71-106.

trabalho de campo, pois leva em conta as observações realizadas a cada parte da pesquisa para proceder a um novo planejamento, face aos novos parâmetros encontrados, prosseguindo com a adequação da pesquisa, uma nova experimentação, um novo planejamento, e assim sucessivamente. Um exemplo de aplicação da pesquisa-ação nos dias atuais pode ser vista no programa Sucesso Escolar, desenvolvido através de uma parceria entre a Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro e a Universidade Federal do Rio de Janeiro, e relatado por CANEN & SANTOS [4].

Em nossa proposta de trabalho docente (com os mathlets)[8], o professor faz o papel de pesquisador e seus alunos são os pesquisados; e, ainda, o professor pode desempenhar ambos os papéis ao focar o olhar especificamente sobre sua práxis. Com a mudança da prática docente, visamos uma melhoria no processo ensino-aprendizagem, por meio não só do aumento da consistência da imagem de conceito do discente nos diversos tópicos abordados pelo professor, mas também pela transformação do aluno de paciente em agente do processo ensino-aprendizagem e pela transformação do professor em desenvolvedor de sua própria prática.

Nesta proposta, o professor-pesquisador, a partir de reflexões sobre o que considera importante ao desenvolvimento cognitivo de determinada turma, trata de criar uma estratégia didática baseada no uso de mathlets, de modo a alcançar os objetivos propostos.

5.2 Estudo de Caso

Segundo PONTE [6], um estudo de caso pode ser definido como um estudo que, sobre uma ambiente restrito, “visa conhecer em profundidade o ’como’ e os ’porquês’, evidenciando a sua unidade e identidade próprias (...) se debruça sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspectos”. Com isto, esta metodologia busca descobrir o que caracteriza essencialmente tal situação analisada.

Contudo podemos, aprofundando um pouco mais, assumir o estudo de caso como uma pesquisa[9] a respeito de uma determinada pessoa ou organização, buscando compreender como se dá uma atividade específica de seu cotidiano, a fim de identificar elementos que corroborem ou derrubem conjecturas teóricas, ou simplesmente buscando exemplificar a utilização de determinada metodologia de trabalho.

[8] Isto é, a proposta de que o professor utilize os construtores de mathlets em sua prática docente.

[9] Em verdade, ao fazer uso do termo “pesquisa” estamos incorrendo em um abuso de linguagem, pois um estudo de caso, por si só não constitui uma pesquisa bem definida, sem o devido suporte teórico.

Neste sentido, esta pesquisa se apóia na metodologia do estudo de caso no intuito de, através de exemplos de utilização de mathlets e de seus construtores no ensino de Matemática, compreender como a incorporação desses construtores na práxis docente permite que o professor se transforme em um "pesquisador em ação", criador de sua própria prática. De fato, segundo YIN [45], o estudo de caso é preferido quando a questão de pesquisa é constituída na forma "como?" ou "por que?".

Em linhas gerais, um estudo de caso tem, via de regra, características descritivas. De fato, o pesquisador busca conhecer uma dada situação em seu curso normal, sem qualquer tipo de interferência direta. Deste modo, o pesquisador é capaz de produzir um relato, por vezes suficientemente detalhado, de todos os eventos ocorridos ao longo da atividade observada, podendo assim, posteriormente, analisar seu dados com olhos de pesquisador - embasado em seu referencial teórico.

No entanto, segundo PONTE [6], um estudo de caso não é, necessariamente, uma descrição de uma dada situação. Ela pode confrontar a situação observada com outras já conhecidas, ou mesmo com teorias existentes. Deste modo, o estudo de caso pode auxiliar na elaboração de novas questões de pesquisa, ou mesmo de novas teorias. Como enfatizado por YIN, *apud* PONTE[10], um estudo de caso não almeja generalizar para um universo – dado que o objeto analisado é diferente de qualquer outro que outro pesquisador possa ter em conta – e sim generalizar uma teoria, fazendo surgir novas teorias ou corroborando teorias existentes.

Assim um estudo de caso, enquanto trabalho de investigação, pode assumir características exploratórias – onde busca-se obter informações básicas a respeito do objeto de estudo –, descritivas – onde busca-se descrever os eventos decorrentes do caso em questão –, e analíticas – onde procura-se problematizar o objeto de estudo, de modo a desenvolver uma nova teoria ou confrontá-la com outra(s) já existente(s). Estes últimos possuem a particularidade de permitirem um avanço mais efetivo no conhecimento e na relação entre teoria e prática. São os estudos analíticos os mais "generalistas" dentre os estudos de caso; porém, deve-se ter em mente que um estudo de caso não deve, levianamente, buscar a formulação de afirmações de caráter coletivo.

Relacionado a isto, MERRIAM, *apud* PONTE, afirma:

> *Num estudo de caso não faz sentido formular conclusões sob a forma de proposições gerais. Poderá haver, isso sim, a formulação de hipóteses de trabalho que poderão ser testadas em novas investigações. Além disso, parte da tarefa de pensar em que medida certos aspectos se podem ou não aplicar a outros casos fica*

[10]*Ibid.*

a cargo dos leitores que deles têm um conhecimento mais direto, ou seja, tem lugar a generalização pelo próprio leitor.

Em particular, um estudo de caso pode ter um caráter interpretativo, que tem como intenção conhecer a realidade do ambiente tal como ela é vista por seus membros. Em nossa pesquisa, faremos uso de estudos de caso essencialmente interpretativos, com elementos de descrição e análise presentes de modo significativo.

Obviamente, como já dito, um estudo de caso por si só não garante uma pesquisa bem definida; faz-se necessária a escolha de teorias que fundamentem a análise dos dados coletados, bem como justificativa da relevância do caso a ser estudado. Como observado por HARTLEY, *apud* DIAS [10]:

> *Um método por si só não é bom ou ruim. O julgamento a respeito de um método em uma determinada pesquisa depende de dois fatores: o relacionamento entre a teoria e o método; e como o pesquisador lida com as potenciais deficiências do método.*

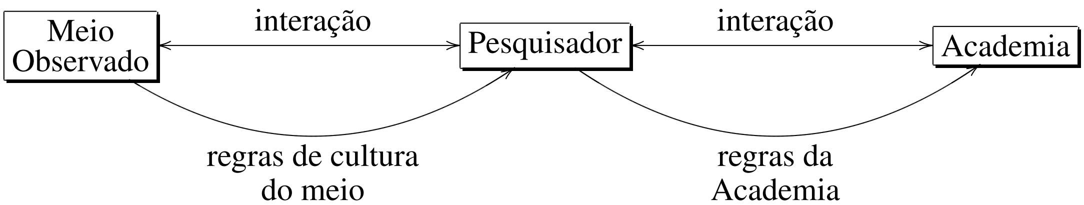
A respeito dos métodos de coleta de dados, HARTLEY, *apud* DIAS [10], relata que os métodos mais utilizados são a observação, a observação participante (onde o observador interfere nos eventos analisados), os questionários e a entrevistas – semi-estruturadas ou não estruturadas. No entanto, outros métodos de coleta de dados também podem ser utilizados (como gravação por meios digitais). Ao coletar dados, o pesquisador deve prezar por três princípios básicos, segundo YIN [45]:

Usar múltiplas fontes de evidência: a partir deste princípio, o pesquisador é capaz de investigar diversos aspectos do mesmo evento, tornando suas conclusões mais convincentes, graças ao conjunto de evidências constituído.

Construir uma base de dados: seguindo este princípio, o pesquisador deve, na medida do possível, produzir uma separação entre os dados coletados e o relato, de modo a garantir a confiabilidade do estudo e permitir que outros pesquisadores tenham acesso aos dados. Tais registros de dados podem se dar por documentos, notas, ou mesmo narrativas dos eventos observados.

Formar uma cadeia de evidências: por este princípio, o pesquisador deve estruturar o relato do estudo de caso de modo a conduzir o leitor através de uma concatenação lógica das evidências apresentadas, a fim de que este se convença da legitimidade do estudo, partindo das premissas iniciais e das questões de pesquisa, e chegando até as conclusões. É necessário, ainda, deixar claro ao leitor que as evidências apresentadas foram, de fato, provenientes dos dados coletados, ilustrando sempre que necessário com dados e com referências ao embasamento teórico escolhido.

Ao descrever um estudo de caso, o pesquisador deve ter em mente o seu papel de “ponte” entre o caso estudado e a Academia. Segundo EISENHART, *apud* PONTE, o investigador deve interpretar as experiências dos participantes (meio investigado) em termos das regras de sua cultura, e deve interpretar suas próprias experiências em termos das regras da comunidade intelectual na qual está inserido.



Caminhos de interpretação das experiências vivenciadas.

Deste modo o pesquisador, ao realizar um estudo de caso, está na verdade conduzindo uma tradução entre a cultura e a linguagem do ambiente estudado e a cultura e a linguagem do meio acadêmico, devendo para isso observar as regras e de cada população. Ele deve para isso usar de linguagem clara e direta, exibindo sempre que necessário referências ou exemplos relativos aos dados coletados. Assim, o pesquisador garante a credibilidade de seu trabalho.

Durante a fase de análise das informações coletadas o pesquisador deve, a partir da base de dados formada, definir uma estratégia analítica geral, que vai conduzir o tratamento da informação do modo mais imparcial possível. Ao preparar uma estratégia, o pesquisador pode optar por dois caminhos distintos: apoiar-se em um referencial teórico previamente escolhido; ou desenvolver uma descrição criativa do caso observado.

Utilizando um referencial teórico, acredita-se que este vá conduzir a pesquisa desde o seu estágio inicial, através da formulação de perguntas pertinentes à pesquisa, revisões de publicações sobre o referencial e/ou sobre o assunto pesquisado, culminando com a concepção de novas idéias, às quais se quer corroborar ou derrubar com o estudo.

Sempre que possível, é preferível a criação de “categorias” [11] para os dados coletados, de modo a facilitar a organização do relato. Uma análise de dados orientada por categorias já

[11] Uma categoria seria, por exemplo, um tipo de resposta para uma pergunta formulada em um questionário.

testadas em outros estudos, ou fundamentadas teoricamente, também oferece grande qualidade ao trabalho final. Para cada categoria criada, o pesquisador deve apresentar evidências relacionadas ao referencial teórico da pesquisa, dando ênfase às categorias mais comuns e às que diferenciaram-se das demais em algum aspecto relevante. Este cuidado tornará a pesquisa mais eficiente na tarefa de dar ao leitor a oportunidade de perceber as particularidades do problema apresentado e do caso estudado.

A fim de estabelecer critérios de qualidade para um estudo de caso, julgando-os necessários, tal como enfatizado por PONTE [6], porém levando em consideração a liberdade descritiva que um estudo desta natureza deve ter, as autoras GOETZ & LeCOMPTE [12] propuseram os seguintes critérios de avaliação de um estudo de caso: *adequação*, *clareza*, *caráter completo*, *credibilidade* e *significância*. Estes são complementados por outros dois, adotados por PONTE [6]: *criatividade* e *caráter único*.

Quando fala-se em credibilidade, estamos considerando a *validade conceitual* [13] – respeito aos conceitos-chave definidos durante a classificação dos dados –, a *validade interna* – coerência nas conclusões obtidas, condizendo com a realidade dos observados e não sendo apenas uma construção proveniente da imaginação do pesquisador –, a *validade externa* – grau em que as representações obtidas podem ser comparadas a outros casos –, e a *fidedignidade* [14] – aplicabilidade dos métodos de recolha e análise de dados, obtendo resultados semelhantes.

Segundo PONTE, em geral os estudos de caso qualitativos (caso desta pesquisa) tendem a ganhar em validade interna e a perder irremediavelmente em fidedignidade. Não que isto torne uma pesquisa inválida, apenas lhe fornece uma característica menos geral do ponto de vista de população[15]. Deve-se ter em mente que o ator principal de um estudo de caso é exatamente o pesquisador, que desempenha o importante papel de transcrever o ambiente analisado, “traduzindo” a cultura do objeto de estudo em uma linguagem própria do meio acadêmico.

Assim buscamos, com os casos analisados nesta pesquisa, fornecer evidências substanciais no intuito de corroborar nossa suspeita de que a utilização dos construtores de mathlets na prática docente de Matemática pode transformar o professor em um pesquisador de sua própria prática e, ainda, identificar de que maneira se dá esta mudança.

[12] Obra citada: GOETZ, Judith P. & LeCOMPTE, Margaret D. *Ethnography and Qualitative Design in Educational Research*. San Diego: Academic Press, 1984.

[13] Alguns autores, como YIN, utilizam o termo “validade do constructo”.

[14] Alguns autores, como YIN, utilizam o termo “Confiabilidade”.

[15] Isto é, os resultados aqui obtidos adequar-se-ão à elaboração de novas conjecturas e teorias, mas não a uma generalização de prática para todo o ensino de Matemática.

6 *Dados Coletados*

A seguir, temos o relato da pesquisa-ação e dos estudos de casos realizados. Ao todo, a pesquisa conta com 5 estudos, a saber:

1. Pesquisa-Ação: aplicação de atividade utilizando mathlets com alunos do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da mesma universidade.

2. Pesquisa-Ação: organização e apresentação do mini-curso "Construindo Nosso Próprio Mathlet" em congressos (locais, nacionais e internacionais) ligados à área de Educação Matemática.

3. Estudo de Caso: atividades de disciplina do curso de especialização de Matemática, ministrada pela professora Angela Rocha dos Santos no Centro Universitário Franciscano, em Santa Maria, Rio Grande do Sul.

4. Estudo de Caso: relato do andamento do projeto Descartes, financiado pelo Ministerio da Educação da Espanha, por parte de seu coordenador, o professor José R. Galo Sánchez.

5. Estudo de Caso: entrevista realizada com o professor Fernando Villar, do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, que utiliza os mathlets constantemente em sua prática.

6.1 Pesquisa-Ação: experimento com professores e futuros professores

No intuito de coletar informações acerca do papel dos mathlets no processo ensino-aprendizagem de Matemática, bem como obter dados a respeito da aplicabilidade desta ferramenta por professores em atividade e por futuros professores de Matemática, propomos a realização de um teste com dois grupos distintos de educadores em Matemática. Um grupo, de 5 pessoas, é formado por professores em atividade e alunos do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro. O outro, de 13 pessoas, é formado por alunos de graduação, do curso de Licenciatura em Matemática da mesma universidade.

A escolha da Universidade Federal do Rio de Janeiro como local de estudos deu-se não somente pela facilidade de acesso aos participantes da pesquisa, mas sobretudo pela importância e pelo reconhecimento que esta instituição adquiriu ao longo das últimas décadas no que diz respeito à formação, inicial e continuada, de professores. Tal importância pode ser observada em programas como o Sucesso Escolar, parceria firmada entre o Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza desta universidade e a Secretaria de Educação do Estado do Rio de Janeiro, que visa o enriquecimento dos saberes docentes dos professores em atividade na rede estadual, através de cursos de formação continuada, bem como palestras e mesas-redondas sobre temas recorrentes no ensino de Matemática e Ciências.

O primeiro grupo (dos alunos de Mestrado) tem a importância de ser constituído por professores e pesquisadores da área de Ensino de Matemática, o que nos permite obter uma visão apurada e crítica a respeito da abordagem sugerida por esta pesquisa, no que tange ao papel da ferramenta pesquisada no efetivo ensino de Matemática, além de abrir possibilidades para que estes professores-pesquisadores também procurem adotar as práticas aqui propostas em sua práxis cotidiana.

Já o segundo grupo (dos alunos de Graduação) tem a importância de ser constituído por futuros professores e, quem sabe, pesquisadores das áreas de Matemática e Ensino de Matemática, o que nos permite interferir indiretamente no futuro do ensino desta disciplina, fazendo com que os alunos tenham contato com as novas tecnologias disponíveis, fator aliás levado em muita consideração pelo curso de Licenciatura em Matemática, que busca a todo o tempo manter o contato dos alunos com as novas tecnologias, seja através de softwares de Geometria Dinâmica, de Sistemas de Computação Algébrica, de plataformas de ensino à distância, entre outros. Os alunos selecionados para este estudo são da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar III, cuja ementa refere-se ao estudo de funções.

A escolha da atividade a ser explorada levou em consideração uma tentativa de exemplificar de que modo a utilização dos mathlets, por meio de uma abordagem corporificada, gráfica e experimental, pode contribuir para expandir a imagem de conceito dos alunos, fazendo uso de idéias básicas acerca do estudo de funções, a partir de um problema relacionado à interligação entre as interpretações gráfica, numérica e analítica de um sistema de equações do 1^o grau. Mediante a utilização de um roteiro didático organizado de modo progressivo, dividindo um problema, aparentemente complexo, em pequenos grupos de perguntas acompanhadas de mathlets que permitem a manipulação da situação descrita, acreditamos interferir sobre a imagem de conceito dos pesquisados, levando-os a compreender a situação-problema em sua essência, os conceitos matemáticos envolvidos, e a inter-relação entre eles. Deste modo, um roteiro didático que utiliza os mathlets tem por objetivo promover um ganho qualitativo no aprendizado do aluno no que tange à compreensão do conteúdo ensinado e seu significado frente a situações concretas de aplicação.

Neste sentido, estamos de acordo com uma das soluções propostas para o ensino de Matemática[1] que surgiu nos Estados Unidos na década de 1980, buscando solucionar o grave problema do "fracasso no ensino de Cálculo". O movimento, intitulado *Calculus Reform*, teve como características o uso da tecnologia (basicamente softwares computacionais e calculadoras gráficas) na introdução de conceitos e na resolução de problemas, o ensino via "Regra dos Três", onde todos os tópicos deveriam ser abordados numérica, geométrica e analiticamente, e a preocupação em mostrar a aplicabilidade do Cálculo através de exemplos reais. No entanto, esta reforma teve como conseqüência a diminuição da competência algébrica por parte dos alunos, tendo esta falta sido "compensada" com o treinamento no uso de sistemas de computação algébrica.

Além disto, REZENDE [26] relata que um dos grandes problemas existentes no ensino de Matemática[2] é a prevalência da técnica sobre o significado, fazendo com que o aluno seja mais "instruído" (e cobrado) acerca de fórmulas, algoritmos e "macetes" do que sobre o real significado e interpretação dos entes matemáticos e suas relações com o tópico apresentado pelo professor.

Seguindo este modelo, o aluno torna-se apenas um reprodutor do que lhe é imposto pelos livros didáticos e pelos professores, deixando de lado o pensamento crítico e investigativo, primordial em um estudante de Matemática.

A aplicabilidade real se dá, em nosso caso, por meio de um exemplo cotidiano – envolvendo uma viagem de avião – que nos permite transpor os saberes relacionados a função afim, a interpretação física de coordenadas no plano e da declividade de uma reta, e a sistemas de equações lineares em uma situação-problema denominada "O Problema do Ponto Sem Retorno". A abordagem do roteiro didático, que consiste em dividir o problema em duas partes (cada uma referente a função afim) e em seguida realizar uma comparação entre as duas partes, sobrepondo-as de modo a coexistirem, é estruturada visando incentivar a interpretação e a visualização dos elementos constituintes do problema por parte do aluno, para que este seja capaz de construir imagens mentais consistentes acerca do significado matemático de cada dado físico do problema, e do significado físico de cada elemento matemático constante nos mathlets vinculados ao roteiro.

[1] Na verdade, a proposta era específica para o ensino de conceitos de Cálculo. O que fazemos aqui é simplesmente utilizarmo-nos das idéias principais.

[2] Neste caso, REZENDE também está tratando especificamente do ensino de Cálculo.

Assim este experimento, além de representar uma aplicação de um roteiro didático que faz uso de mathlets buscando evidenciar aspectos gráficos relacionados a situações físicas reais, representa uma pesquisa-ação, dado o fato de que foram realizadas reavaliações e adaptações do experimento ao longo de sua realização, bem como contém uma análise da própria ferramenta, realizada pelos docentes e pelos futuros docentes que participaram do experimento. É, enfim, um caso que contempla de diversos modos, e por diversos caminhos, a aplicação dos mathlets em sala de aula.

6.1.1 Organização e Andamento do Experimento

Inicialmente a idéia era selecionar alguns alunos do curso de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRJ para que resolvessem, primeiramente sem o auxílio do computador, depois com o uso deste, o problema conhecido como “Problema do Ponto sem Retorno”[3], que tem o seguinte enunciado:

Um avião de pequeno porte, com autonomia para quatro horas de viagem, é capaz de desenvolver uma velocidade de cruzeiro de 300 Km/h quando não há vento. Durante um vôo, na viagem de ida, um vento de 50 Km/h sopra a favor, o que aumenta a velocidade de cruzeiro do avião, em relação à Terra, para 350 Km/h. De repente, o piloto se dá conta de que na viagem de volta o mesmo vento estará soprando contra e, em conseqüência, a velocidade do avião se reduzirá para 250 Km/h. O problema é determinar qual a distância máxima que o avião pode cobrir na viagem de ida de tal maneira a estar seguro de que há combustível para fazer a viagem de volta. A esta distância máxima chamamos de ponto sem retorno.

No entanto, foi adotada como prática inicial pedir que o grupo de alunos resolvesse o problema em casa, para que, em outra data, fosse marcada uma aula no laboratório de informática de modo a executar a atividade com o auxílio computacional. Embora não nos déssemos conta na hora, este processo não seria eficiente, pois não garantiria que o aluno não teve acesso à solução durante o intervalo até a entrega, e muito menos que este, de fato, estaria presente no dia da aula de laboratório. Foi necessário então um replanejamento, próprio da pesquisa-ação, para que o teste com o auxílio do computador fosse realizado no mesmo dia e local do teste sem a ferramenta.

Surgiu ainda a possibilidade de, como se tratava de um grupo de docentes e pesquisadores na área de ensino, realizar uma entrevista de caráter aberto[4] dias após o experimento. No entanto, deparamo-nos com um problema semelhante ao anterior, não tendo condições de

[3] O problema, bem como a atividade utilizada nos experimentos consta no Anexo A.

[4] Isto é, sem um roteiro pré-concebido

viabilizar encontros com cada participante para extrair-lhe informações acerca da utilização da ferramenta.

Neste ponto, já estava em curso a possibilidade de aplicação do mesmo teste em uma turma do curso de Licenciatura em Matemática da mesma instituição, para que fosse também considerada a visão de futuros docentes a respeito da ferramenta pesquisada. Assim, o teste dado aos alunos do Mestrado passou por uma revisão, sendo dividido em três partes: (I) resolução do problema sem o auxílio do computador; (II) resolução do mesmo problema, agora com o auxílio de um roteiro didático utilizando mathlets; (III) questionário (de livre dissertação escrita) avaliativo da ferramenta.

O teste foi aplicado no grupo de alunos da graduação e, a seguir, replanejando o estudo que já estava em andamento, o mesmo questionário avaliativo foi submetido ao grupo de alunos do Mestrado (que fizera o teste primeiro), para que fosse respondido por eles. Folhas de modelos das três partes estão disponíveis no Anexo B.

Os principais resultados constam a seguir, e foram obtidos a partir de aplicações realizadas nos meses de Outubro/2007 (Mestrado) e Junho/2008 (Graduação).

6.1.2 Grupo 01: Alunos do Mestrado

Na resolução do problema sem a utilização do roteiro didático, 3 dos 5 alunos buscaram uma solução através de fórmulas de Física (Mecânica), essencialmente $V = \frac{\Delta S}{\Delta T}$. Porém apenas um – que denominaremos de M01 – encontrou a resposta de modo exato; um – que chamaremos de M02 – chegou a uma resposta entre 1h40min e 2h20min, mas não teve certeza, tendo utilizado o termo “aproximadamente” ao lado da resposta; e um – que chamaremos de M03 – confundiu-se e não chegou à resposta correta.

Já dentre os dois alunos que não fizeram uso de fórmulas físicas, um – que chamaremos de M04 – utilizou essencialmente a idéia de sistema de equações lineares baseadas nos tempos de ida e volta, a partir das equações 6.1, obtendo a resposta correta. Já o outro – que denominaremos M05 – buscou determinar o tempo de ida e de volta através das fórmulas exibidas em 6.2, e não chegou à resposta certa.

$$\begin{cases} 350x = 250y \\ x + y = 4 \end{cases} \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} t_{ida} &= \frac{x}{350} \\ t_{volta} &= 4 - \frac{x}{350} \end{aligned} \tag{6.2}$$

Na resolução do problema com a utilização do recurso computacional dos mathlets um aluno, M02, que na resposta sem uso dos mathlets encontrou um valor aproximado, não chegou à resposta correta. Outro aluno, M05, que também não chegara à resposta correta inicialmente (mas não tinha optado pelo caminho "físico"), resolveu corretamente o problema com o auxílio do computador, mas equivocou-se em uma conta (já na parte final) e não chegou na resposta certa. Os outros três, M01, M03 e M04, – incluindo um dos que erraram sem o auxílio computacional – acertaram o problema através da seqüência de passos dada pelo roteiro didático.

Em suma, os dois alunos que acertaram o problema sem o auxílio do computador (M01 e M04) também o fizeram com a ferramenta, enquanto dos três que erraram o problema sem o auxílio dos mathlets, um deles resolveu com precisão (M03) e outro errou um conta (M05), chegando a uma resposta equivocada. Apenas um aluno errou o problema nas duas abordagens (M02).

De todos os alunos que realizaram o experimento na turma do Mestrado, apenas um (M05) conseguiu, a partir dos passos propostos no roteiro didático, chegar a uma generalização do problema, que consiste em considerar uma velocidade de vento variável de modo a encontrar o lugar geométrico descrito pelos pontos sem retorno para diferentes velocidades do vento.

Já na parte de avaliação da ferramenta, apenas três alunos (M02, M04 e M05) responderam ao questionário enviado posteriormente a eles.

O aluno identificado por M04 afirmou, a respeito da resolução com auxílio do computador, que "a visualização da situação facilitou encontrar a solução mas, como não tenho experiência nesse tipo de atividade, foi mais fácil resolver com lápis e papel". O aluno deixa claro ainda que, em sua opinião, a ferramenta permite a visualização da relação entre as expressões algébricas e seu significado.

Perguntado se o par "ferramenta-atividade" contribuiu para um correto entendimento do problema, o aluno disse que sim, e que esta abordagem permite "entender o significado de, por exemplo, aumentar ou diminuir a distância e manter o tempo ou manter a distância e variar o tempo", além de "compreender o significado da declividade negativa na viagem de volta".

Solicitada uma comparação entre as duas abordagens, o aluno afirmou que a segunda abordagem (com computador) incentivou mais a busca pela solução e deu a seguinte resposta, a respeito das vantagens e desvantagens das duas abordagens:

> *A primeira abordagem (sem o computador) é mais imediata, mas é menos rica na construção de conceitos e se apóia em procedimentos. A segunda (com computador) facilita conexões entre a física e a matemática, permite uma construção reflexiva do conhecimento. A única desvantagem que percebo na segunda abordagem é a questão da demanda de tempo, de equipamento e de domínio da ferramenta.*

Finalizando, o aluno afirmou que – desde que dispusesse de equipamentos para o trabalho – tem como preferência para utilização em sala de aula a abordagem com o uso dos mathlets.

Já o aluno identificado por M05 considera que a atividade proposta, com uso dos mathlets, possibilitou a visualização e a manipulação do problema, tornando mais fácil e natural a sua modelagem. Além disso, o aluno considera que, uma vez que o professor cria um roteiro que leve à análise dos aspectos relevantes do problema, a ferramenta torna-se uma ótima alternativa de visualização e compreensão do problema.

Acerca da contribuição do par "ferramenta-atividade" para um correto entendimento do problema, o aluno considera que a tentativa inicial de resolução (com lápis e papel) permitiu a familiarização com a situação descrita. Esta familiaridade, quando da resolução com computador, torna-se perfeita para uma completa compreensão do problema proposto.

O aluno apontou que a realização da atividade com o computador mostrou-se extremamente positiva, e acrescentou:

> *O próprio ambiente já facilita a interação aprendiz-problema. Porém a abordagem inicial com lápis e papel é também importante, pelo menos em momentos posteriores, para que o aprendiz seja capaz de modelar ele mesmo situações que lhe sejam propostas.*

Finalmente, o aluno acrescenta que a tentativa com lápis e papel lhe é, particularmente, mais interessante, por representar "o desafio da descoberta da solução", nas palavras do próprio; e segue considerando que, em uma situação de aprendizagem, a abordagem feita no experimento – isto é, inicialmente com lápis e papel, depois com os mathlets, e finalizando com a generalização no papel – é bastante adequada, não devendo o recurso computacional representar a única estratégia didática, dado que o uso da tecnologia sem que o aluno conheça o significado das operações realizadas faz com que o saber ensinado se perca.

O aluno identificado por M02 considerou que, embora os gráficos referentes às viagens de ida e volta pudessem ser feitos com lápis e papel, a atividade com os mathlets possibilitou uma melhor visualização desta alternativa de visualização do problema, além de economizar tempo na interpretação e resolução.

Além disto, o aluno afirma que, embora a abordagem sem os mathlets o tenha incentivado a buscar uma resposta (desafio), por não tê-la encontrado no tempo disponível para resolução acabou por não tentar procurar por uma alternativa de solução. A segunda parte da atividade (com os mathlets) é, na opinião do aluno, "melhor elaborada, dividida em etapas e vai dando uma breve idéia de como o problema pode ser resolvido, não partindo direto para a resolução".

Ao comentar as duas abordagens, o aluno disse:

> *A primeira abordagem [sem computador] sendo exclusivamente algébrica não incentiva muito a resolução para aqueles que não conseguem modelar o problema, logo não vejo vantagens, dado ainda que não permite a exploração do problema como na segunda atividade [com computador], partindo direto em direção a resposta. A atividade com o computador permite a observação e interpretação do gráfico, a exploração de pares ordenados e da função do primeiro grau aplicado a um problema real e dá condições para que através do passo a passo seja possível encontrar a resposta. A desvantagem da atividade trata-se exclusivamente do computador e caso não haja um planejamento bem direcionado para o uso do mesmo, a atividade pode tornar-se inútil.*

Concluindo, o aluno M02 nos afirma sua preferência para aplicação em sala de aula pela atividade com os mathlets pois, além de poder visualizar melhor o problema, o aluno pode variar a velocidade do vento, explorando o problema de diversas maneiras diferentes.

6.1.3 Grupo 02: Alunos da Licenciatura

De um total de 13 alunos inicialmente presentes ao experimento na turma de Licenciatura em Matemática, 1 (identificado por L06) ficou até o final do experimento, mas não respondeu ao problema proposto, nem ao questionário avaliativo. Dos demais, 6 (identificados por L01, L03, L04, L05, L07 e L13) responderam apenas parcialmente ao experimento, enquanto 3 (identificados por L08, L09 e L12) responderam integralmente ao teste. Os alunos identificados por L02, L10 e L11 saíram sem entregar o teste escrito, antes de concluído o tempo de realização do mesmo.

Os alunos L03, L04, L05 e L13 buscaram resolver o problema sem o auxílio computacional através de fórmulas físicas – essencialmente a fórmula $V = \frac{\Delta S}{\Delta T}$ –, e apenas o aluno L03 não conseguiu chegar à solução correta do problema.

Dentre os que não buscaram soluções baseadas em fórmulas físicas (L01, L07, L08, L09, L12), o aluno L01 apenas escreveu uma resposta equivocada, sem resolução, o aluno L08 escreveu a resposta correta, mas também sem resolução. O aluno L07 equivocou-se na resolução. Já os alunos L09 e L12, que optaram pelo mesmo sistema de equações 6.1, descrito na seção 6.1.2, página 49, chegaram corretamente à resposta.

De modo geral, os alunos que obtiveram a resposta correta foram capazes de identificar o significado físico dos elementos do problema proposto.

Acerca da resolução do problema com o auxílio dos mathlets, os alunos L04 e L05 apenas escreveram respostas soltas para três itens, não respondendo os demais. Já os alunos L08, L09 e L12 responderam corretamente às perguntas propostas pelo roteiro didático com o auxílio dos mathlets. Destes, apenas o aluno L08 tentou, corretamente, obter a generalização proposta pela atividade, para diversas velocidades do vento.

Já na parte final do experimento, isto é, a avaliação da ferramenta pelos futuros docentes, os alunos L03 e L04 declararam preferência pela abordagem sem o computador, por não terem, no pouco tempo disponível, se adaptado ao funcionamento da ferramenta. O aluno L03 disse ainda que “a questão sem o computador, por não ser trivial, pode desanimar os alunos. E o uso somente do computador reduz o raciocínio da montagem do problema matemático”. O aluno L05, que também prefere a abordagem no papel, afirma que sua preferência deve-se ao fato de não ter compreendido fisicamente o fenômeno ocorrido.

Já o aluno L09, acha a abordagem no papel “mais lógica”, porém considera interessante a questão da visualização proporcionada pelos mathlets. O aluno acredita ainda que a abordagem com o computador estimula mais os alunos, embora ele, pessoalmente, prefira a abordagem no papel (por gostar de desafios, segundo o aluno).

Os alunos L01, L07 e L13 demonstraram preferência pela resolução com o computador, apontando que o recurso dos mathlets “auxilia sobremaneira a compreensão do problema”, através da visualização do problema por parte dos alunos, nas palavras do aluno L01. Esta opinião também é compartilhada pelo aluno L08, que afirma ter visualizado o problema de outra maneira, pois a atividade proposta permitiu “dividir o problema em dois” e, ainda, possibilitou uma rápida visualização através de mudanças interativas, em tempo real.

O aluno L12 considerou que a atividade proposta, com os mathlets, auxiliou na resolução do problema, pela facilidade de enxergar a situação em forma de gráfico, aliando a teoria ao entendimento prático do gráfico. Além disso, ele afirma que a abordagem sem computador é mais teórica e com cálculos maiores, enquanto a abordagem com os mathlets é mais simples e mais fácil de visualizar. Finalmente, o aluno demonstra preferência pela resolução com computador, sem contudo abrir mão da abordagem com lápis e papel, de modo que ambas complementem-se.

6.1.4 Síntese do Experimento

A partir dos dados apresentados, podemos tirar algumas conclusões a respeito da aplicabilidade da ferramenta no cotidiano da sala de aula de Matemática e, ainda, a partir de algumas observações mais detalhadas, analisar os pontos onde a conjectura formulada – isto é, de que o uso dos mathlets contribui positivamente para o aprendizado – parece não se confirmar.

O experimento nos permite notar, a princípio – como exposto na Tabela 6.1 – que, no grupo do Mestrado em Ensino de Matemática, apenas um aluno não chegou a uma solução coerente para o problema utilizando a ferramenta computacional. Analisamos isto como um indício de que, por já estarem familiarizados com a ferramenta[5], os pesquisados tinham maior facilidade em utilizá-la e em seguir os passos propostos pelo roteiro didático. Conjecturamos ainda que este único aluno que não chegou a uma solução satisfatória em nenhum dos métodos pode não ter compreendido ou interpretado corretamente a situação-problema proposta, incorrendo no equívoco já mencionado anteriormente de prevalência da técnica sobre o significado das informações expressas pelos mathlets constantes no roteiro.

Metodologia	Solução Proposta	Classificação das Soluções		
		Corretas	Parcialmente Corretas	Incorretas
Sem Mathlets	Fórmulas físicas	1	-	2
	Sist. de equações	1	-	-
	Tempo como função da distância	-	-	1
Com Mathlets	Roteiro didático	3	1	1

Tabela 6.1: Resultados do Experimento - Mestrado em Ensino de Matemática

Assim, observamos que a utilização do computador e das ferramentas computacionais disponíveis – em particular, em nosso caso, os mathlets – deve ser incentivada a fazer parte dos

[5]O grupo do Mestrado já tivera contato com o aplicativo Descartes, quando da apresentação de um seminário interno do programa de Mestrado ao qual este trabalho está vinculado.

currículos dos cursos de formação inicial e de formação continuada de professores, de modo a fornecer subsídios para que os docentes possam tomar parte neste processo de difusão das ditas “novas tecnologias” no ensino.

Além disso, fica evidenciado que, por tratar-se de uma situação-problema “real”, de conotação física, a maior parte dos participantes deste grupo optou por buscar uma solução ligada a fórmulas físicas, novamente mostrando um caso de prevalência da técnica sobre o significado.

Por fim, um dos participantes, a partir da execução do roteiro didático proposto, foi capaz de construir uma conjectura que o levou a demonstrar e concluir acerca da generalização do problema, o que nos mostra que, de fato, a utilização dos mathlets associados a um roteiro didático consistente pode interferir positivamente sobre a imagem de conceito dos alunos, levando-os a tirar suas próprias conclusões e construir suas próprias conjecturas.

De modo geral, os participantes deste grupo avaliaram a ferramenta positivamente, por considerarem que esta facilitou o entendimento do problema. Esta opinião foi compartilhada por todos os membros deste grupo.

Já no caso dos participantes do grupo da Licenciatura em Matemática, cujos resultados estão exibidos na Tabela 6.2, podemos notar inicialmente que nem todos os alunos responderam integralmente ao experimento. Alguns deles por terem saído sem entregar (3) ou terem entregue em branco (1), outros por terem respondido no papel apenas parte do experimento (6).

Metodologia	Solução Proposta	Classificação das Soluções		
		Corretas	Parcialmente Corretas	Incorretas
Sem Mathlets	Fórmulas físicas	3	-	1
	Sist. de equações	2	-	-
	Apenas resposta	1	-	1
	Raciocínio confuso	-	-	1
Com Mathlets	Roteiro didático	3	2	-

Tabela 6.2: Resultados do Experimento - Licenciatura em Matemática

Dentre os que responderam à parte do experimento que não utilizou o computador, fica também evidenciada a preferência por métodos de cálculo baseados em fórmulas físicas; no entanto, assim como ocorreu com o grupo do Mestrado, todos os que utilizaram um sistema de equações na tentativa de solução chegaram à resposta correta. Isto nos mostra que os participantes que identificaram um sistema de equações a ser resolvido compreenderam, de fato, a natureza da situação-problema tratada no experimento.

Já dentre os que responderam à Parte II do experimento (com o recurso computacional dos mathlets), 2 participantes deram apenas algumas das respostas, não permitindo-nos uma análise mais profunda, e outros 3 responderam corretamente a todos os itens, mostrando que o uso do roteiro didático levou-os a encontrar uma solução correta para o problema proposto. Dentre estes 3, foi unânime a preferência pela resolução com os mathlets, o que evidencia o estímulo causado pelo recurso computacional, e ainda o auxílio que a ferramenta provê à compreensão e à visualização do problema.

Mesmo outros 2 participantes, que não responderam à parte do experimento que utiliza os mathlets, responderam ao questionário avaliativo dando preferência ao uso do recurso computacional, por considerarem os grandes benefícios desta ferramenta ao processo de entendimento e aprendizagem.

Outros participantes, que não responderam à Parte II, mostraram-se mais familiarizados com a resolução com lápis e papel, evitando (ou não preferindo) o uso dos mathlets. Dentre as respostas obtidas, alguns alegaram não ter compreendido fisicamente o fenômeno descrito, ou não terem se adaptado à ferramenta por conta do pouco tempo disponível para o experimento[6]. Conjecturamos que, por estarem habituados ao ensino baseado na cadeia tradicional axiomática, estes alunos tenderam ao modelo de resolução mais adaptado ao seu cotidiano, buscando uma *"região de conforto"* (*"resistência ao novo"*). Os resultados do questionário avaliativo da ferramenta, para o grupo de alunos da Licenciatura, podem ser observados na Tabela 6.3.

Preferência	Justificativa	Freqüência
Lápis e Papel	Não adaptou-se à ferramenta (pouco tempo)	2
	Não compreendeu fisicamente o problema	1
	Gosta de desafios	1
	TOTAL	**4**
Mathlets	Auxilia na compreensão/visualização	3
	Permitiu dividir o problema	1
	Facilitou o entendimento prático do gráfico	1
	TOTAL	**5**

Tabela 6.3: Avaliação da Ferramenta - Licenciatura em Matemática

6.2 Pesquisa-Ação: mini-curso sobre a construção de mathlets

Com o intuito de enriquecer esta pesquisa com informações acerca de tentativas de difusão dos construtores de mathlets no Brasil, temos a seguir o relato de um mini-curso

[6]O tempo total foi de 1 hora e 40 minutos, sendo 30 minutos com lápis e papel, 55 minutos com os mathlets, e 15 minutos com o questionário avaliativo da ferramenta

– intitulado "Construindo Nosso Próprio Mathlet" e apresentado em diversos congressos da área de Educação Matemática –, que tem por objetivo divulgar e levar os participantes a compreenderem o funcionamento do construtor de mathlets Descartes [23], financiado pelo governo da Espanha.

Com isto pretendemos mostrar um exemplo de uma pesquisa-ação, através da reestruturação do mini-curso após cada aplicação do mesmo, que representa uma de nossas tentativas de difundir os construtores de mathlets como alternativa didática para uma abordagem dinâmica e questionadora no ensino de Matemática.

6.2.1 Mini-Cursos Ministrados

O mini-curso "Construindo Nosso Próprio Mathlet" foi ministrado, no ano de 2007, em três oportunidades. A primeira delas, no 31^o Encontro do Projeto Fundão [31] (Rio de Janeiro/RJ), em Junho; a segunda, no IX Encontro Nacional de Educação Matemática [32] (Belo Horizonte/MG), em Julho; e, finalmente, a terceira, no IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática [33] (Canoas/RS), em Outubro. Os mini-cursos tiveram carga horária entre 3 horas e meia e 4 horas.

6.2.2 Organização do Mini-Curso

O mini-curso foi organizado por SANTOS, PAIXÃO & PEREIRA [31, 32, 33], de modo a dar aos participantes condições de criarem suas próprias aplicações e roteiros didáticos com o uso do construtor de mathlets Descartes, em sua versão 3. Para tal, ele contou com quatro momentos.

No primeiro momento, uma apresentação é exibida de modo a situar os participantes no universo do curso. É definido o conceito de mathlet e de construtor de mathlets, apresentando suas vantagens e desvantagens. Os presentes são apresentados também ao site do construtor de mathlets Descartes, financiado pelo governo da Espanha.

No segundo momento, os participantes são levados a explorar páginas web contendo roteiros didáticos produzidos para utilização de mathlets, com o objetivo de que se familiarizem com o manuseio dos mathlets e tenham contato com o tipo de roteiro didático desenvolvido a partir desta ferramenta .

No terceiro momento, os presentes têm contato com as características e com os modos de configuração do construtor de mathlets. Deste modo, o principal objetivo dessa parte é ensinar aos participantes como, a partir de um mathlet já existente, criar uma nova aplicação, independente da primeira.

No quarto e último momento, os participantes têm a possibilidade de desenvolver suas próprias aplicações, a partir de uma página web modelo, onde precisam apenas configurar o mathlet e esboçar o roteiro didático, evidenciando as habilidades e competências a serem desenvolvidas a partir da atividade proposta e os objetivos a serem atingidos. É também neste momento que eles têm a oportunidade de aprender como criar uma nova aplicação a partir de uma página web vazia, tendo contato com os (poucos) comandos, próprios da linguagem HTML, necessários para tal.

Deste modo, um participante do mini-curso passa por todas as etapas relacionadas ao aprendizado do construtor Descartes, conhecendo a ferramenta, explorando-a livremente, aprendendo os comandos e opções básicas de configuração e, finalmente, tendo a oportunidade de desenvolver sua própria aplicação com o Descartes.

6.2.3 A Pesquisa-Ação Envolvida

Inicialmente, o mini-curso passou por uma fase de organização que determinou três momentos distintos, equivalentes aos momentos 2, 3 e 4. A seguir, as fases foram ordenadas, e surgiu a necessidade de preparar uma introdução para o mini-curso com uma apresentação rápida, equivalente ao momento 1. Então, cada fase foi estruturada no sentido de proporcionar ao participante uma experiência progressiva na utilização da ferramenta Descartes. Estava assim o mini-curso preparado para sua primeira aplicação.

Após cada aplicação do mini-curso, foi feita uma reavaliação , não apenas no intuito de otimizar o tempo gasto em cada momento do curso mas, sobretudo, buscando aprimorar o mini-curso no sentido de fornecer maiores subsídios aos professores que vão futuramente utilizar o construtor de mathlets Descartes como auxiliar da sua prática docente.

Deste modo, o mini-curso passou por constante renovação, seguindo os ideais da pesquisa-ação, com o objetivo de tornar-se consistente no objetivo de conduzir docentes ao aprendizado de como construir seus próprios mathlets, e levá-los a ter contato com roteiros didáticos prontos, a fim de que estes tenham de antemão idéias e referências para a construção de suas próprias atividades.

Cabe ressaltar que, durante a execução do mini-curso, muitos participantes demonstraram grande interesse pela ferramenta, buscando informações adicionais para incorporar esta tecnologia em sua prática docente cotidiana. Estes nos questionavam sempre a respeito da possibilidade de termos futuramente uma versão em português do construtor Descartes [7], além de uma quantidade maior de roteiros didáticos prontos em português [8].

A partir de contato com membros do projeto Descartes na Espanha, temos a possibilidade de tornar factíveis estas idéias, fazendo aumentar a abrangência do projeto, e dando aos docentes brasileiros novos roteiros prontos para aplicação em nosso próprio idioma.

Com isto, é possível que o mini-curso passe por nova reformulação, transformando-se talvez em um curso maior, com uma estrutura que leve em conta a exploração de todas as funcionalidades disponíveis no construtor Descartes[9] e a produção de material didático para disponibilização aos professores que participarem do curso e a quaisquer docentes que demonstrarem interesse por conhecer e aplicar esta ferramenta em sua prática.

Devido à própria característica da atividade proposta (mini-curso em congresso), não nos foi possível acompanhar os professores assistentes a fim de avaliar a transformação de sua prática. Foi possível apenas constatar a grande aceitação da ferramenta e a facilidade de uso por leigos em computador, a partir das manifestações dos participantes.

6.3 Estudo de Caso: curso de formação continuada de professores

A fim de coletar dados sobre uma aplicação dos construtores de mathlets em uma experiência de transformação da prática docente, foi selecionado um caso que consistiu no desenvolvimento do trabalho final da disciplina Tópicos Especiais de Matemática, do curso de Especialização em Ensino de Matemática do Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), localizado em Santa Maria, Rio Grande do Sul. Este caso foi selecionado, também, por se tratar de uma realidade completamente diferente (interior do Rio Grande do Sul) dos demais casos estudados.

A UNIFRA, que hoje conta com um curso de Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática, tinha a professora Angela Rocha dos Santos, da UFRJ, como colaboradora do curso de Especialização em Ensino de Matemática no ano de 2003 e, nesta condição, esta foi convidada a ministrar um curso de 30h, condensado em uma semana, versando sobre transformações no plano. Pelas características do tema, onde a visualização dos movimentos é essencial no enriquecimento da imagem dos conceitos envolvidos, o uso de

[7] Até a versão 3, todas as opções podem ser vistas apenas nos idiomas espanhol e inglês
[8] Do mesmo modo, temos uma grande quantidade em espanhol, na página do projeto Descartes [23].
[9] No mini-curso ministrado atualmente, apenas uma parte das funcionalidades é explorada.

ferramental computacional foi relevante e essencial ao desenvolvimento do curso.

Este caso aconteceu no âmbito de um convênio entre o Instituto de Matemática da UFRJ e a UNIFRA, que tinha como um de seus objetivos a apresentação das ditas "novas tecnologias" a professores do interior do Rio Grande do Sul, dentro de um programa de formação continuada. Algumas atividades produzidas pelos alunos do curso exemplificam nossa argumentação de que, a partir do uso de construtores de mathlets é possível transformar o professor em agente e criador de sua própria prática, tornando o processo ensino-aprendizagem mais adequado ao perfil e às necessidades de seus alunos.

6.3.1 Organização e Andamento do Curso

O curso foi ministrado pela professora Angela Rocha dos Santos a cerca de 30 alunos regularmente matriculados no curso de Especialização em Matemática do centro universitário supracitado, coordenado pela professora Eleni Bisognin, com carga horária de 30 horas, parcialmente à distância (essencialmente a tarefa final), e parcialmente no laboratório de informática. Em ambos os momentos, o construtor de mathlets Descartes [23], então na versão 1, foi utilizado.

A estrutura da parte presencial, onde foi desenvolvida a parte "teórica" do tema transformações no plano, foi constituída por um momento de "experiências laboratoriais" que visavam migrar da cadeia formal do ensino tradicional de Matemática – representada pela seqüência "definição $\rightarrow$ teorema $\rightarrow$ demonstração $\rightarrow$ corolário (aplicações)" – para a cadeia exploratória – caracterizada pelos passos "exploração $\rightarrow$ conjectura $\rightarrow$ tentativa de demonstração $\rightarrow$ conclusão e aplicação" – que evidencia as vantagens para o ensino de Matemática do uso do ambiente corporificado. Essas atividades serviram também para que os alunos-professores explorassem livremente e pudessem se familiarizar com o potencial da ferramenta. Num segundo momento, foi solicitado que os alunos construíssem uma atividade a partir da reconfiguração de uma atividade pronta e configuração do construtor. E num terceiro momento, foi solicitado aos alunos que fizessem uma atividade e colocassem esta em uma página web com formato definido *a priori*. Sobre esta estrutura, podemos dizer que ela foi inspiradora da organização do mini-curso "Construindo Nosso Próprio Mathlet", ministrado 4 anos mais tarde e relatado na seção 6.2.

Na parte à distância foi proposto que os alunos realizassem tarefas direcionadas e, ao final, uma tarefa livre. Foram entregues pelos alunos arquivos de texto com roteiros didáticos propostos por eles, e ainda arquivos de internet – páginas web – com exemplos de mathlets construídos com o auxílio da biblioteca Descartes. As atividades foram feitas em grupos de dois alunos.

6.3.2 Dados Coletados Sobre Curso

A primeira observação cabível a respeito do curso em questão é que, inicialmente, o conhecimento dos alunos sobre o funcionamento e manuseio do computador era quase inexistente.

Na parte direcionada da tarefa final, os alunos deveriam construir um mathlet que ao movimento de uma "bolinha" (ponto da janela gráfica do aplicativo) descrevesse desenhos na tela, e explorar simetrias. O roteiro associado a este(s) mathlet(s) deveria explorar as simetrias obtidas. Um exemplo de mathlet criado por um dos alunos da disciplina pode ser visto na figura 6.1.

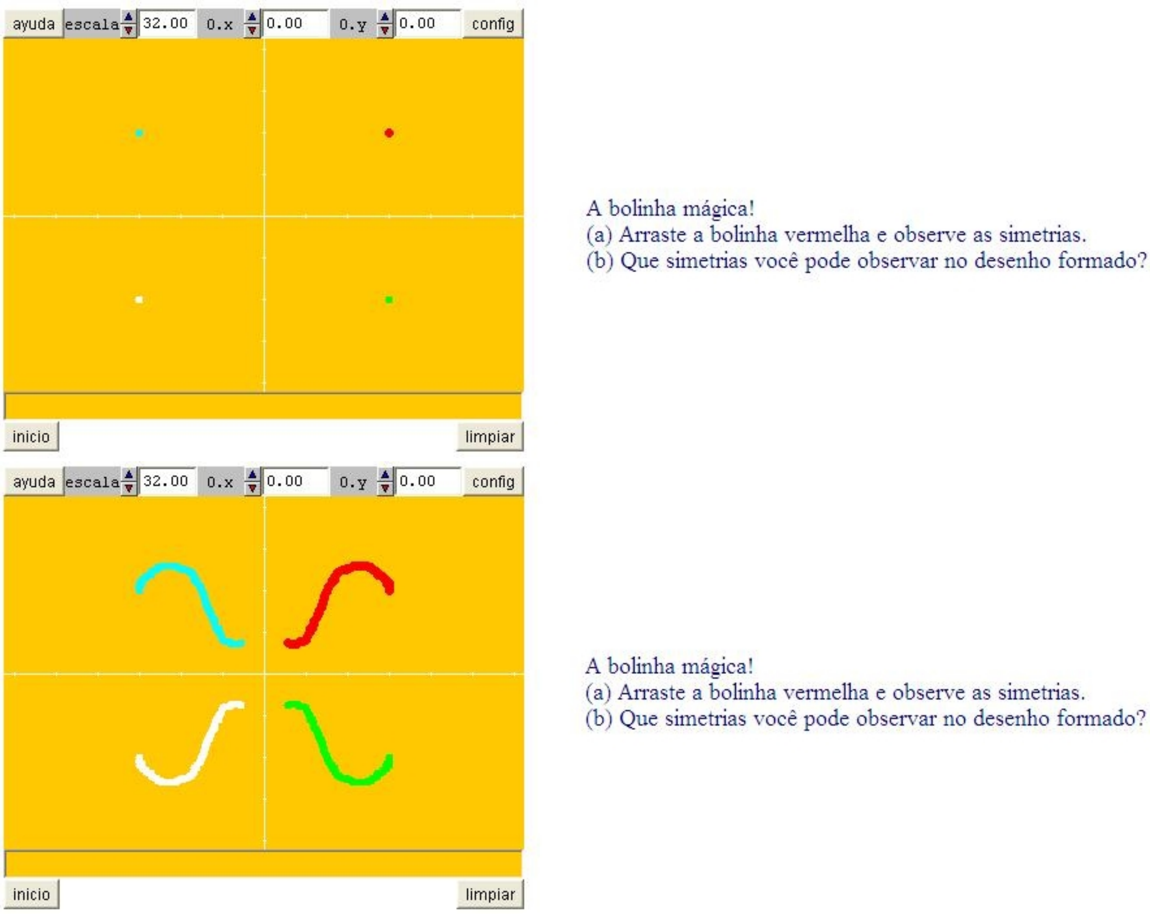


Figura 6.1: Atividade da "bolinha" (criada por aluno do curso).

Esta parte da tarefa foi executada sem problemas por todos os alunos da turma.

Ao explorar simetrias e transformações no plano, alguns alunos optaram por outro caminho, que foi o de translação de polígonos e transformações em gráficos de funções, particularmente funções quadráticas e trigonométricas.

Na figura 6.2 podemos observar uma atividade proposta por um dos alunos, visando a compreensão das transformações ocorridas no gráfico da função $f(x) = x^2$ ao somarmos uma constante c à ordenada e à abscissa. Já na figura 6.3, observamos um mathlet que trabalha com a variação dos coeficientes na função trigonométrica seno.

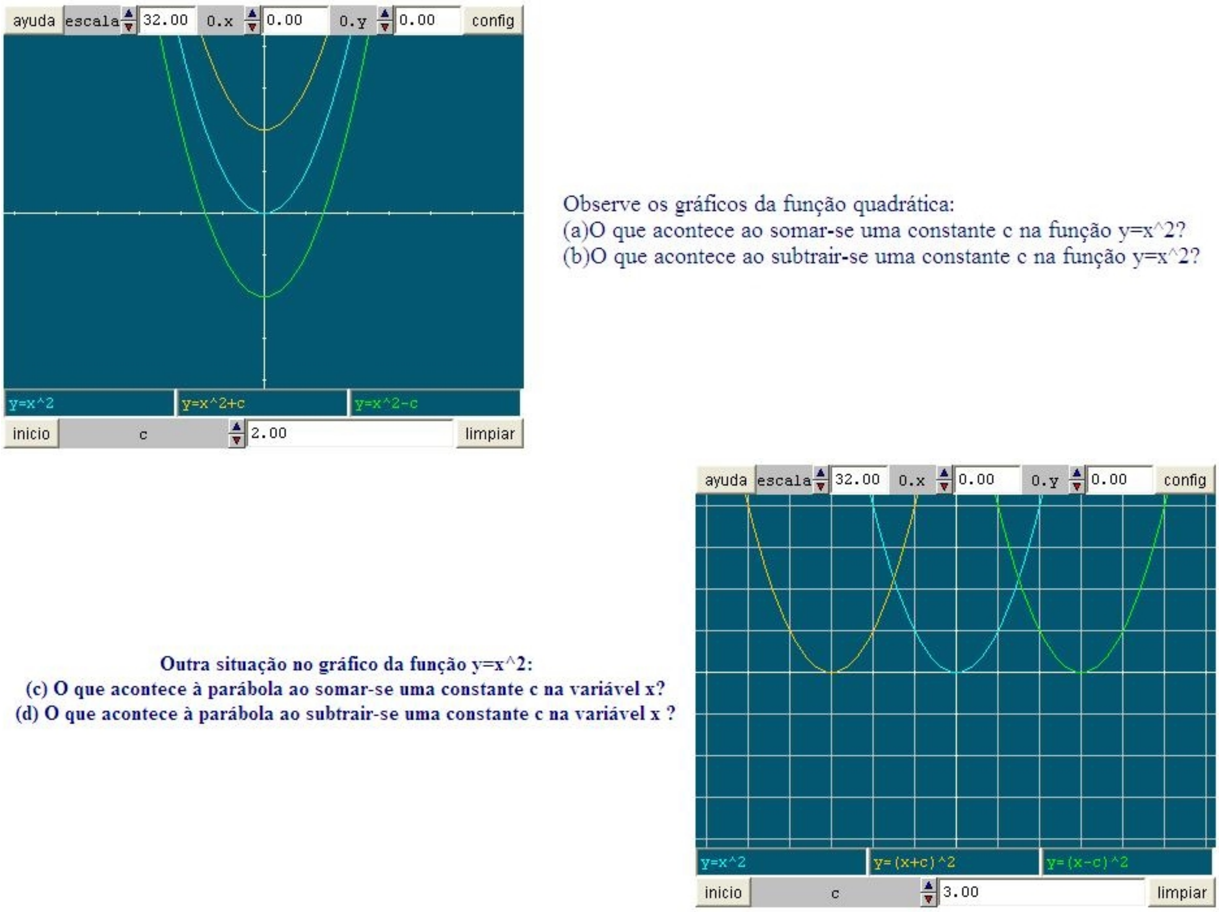


Figura 6.2: Atividade sobre função quadrática (criada por aluno do curso).

Dentre os mathlets desenvolvidos pelos alunos, alguns destacaram-se por representarem algo diferente do proposto pela maioria. Um destes casos pode ser visto na figura 6.4, onde o aluno propôs observar a translação de um "cubo" sobre um plano. Outro, ilustrado pela figura 6.5, mostra atividade sobre a variação da parábola pela adição de constantes, mas de um modo diferente, explorando os deslocamentos vertical e horizontal simultaneamente pela variação do parâmetro c, que representava a soma deste parâmetro à ordenada e a subtração da abscissa, respectivamente.

Porém, dentre todos os mathlets e roteiros entregues pelos alunos do curso, um merece destaque por mostrar como o professor pode fazer uso desta ferramenta para adaptar sua prática e seu material didático ao contexto e à realidade de seus alunos. A atividade ilustrada pela

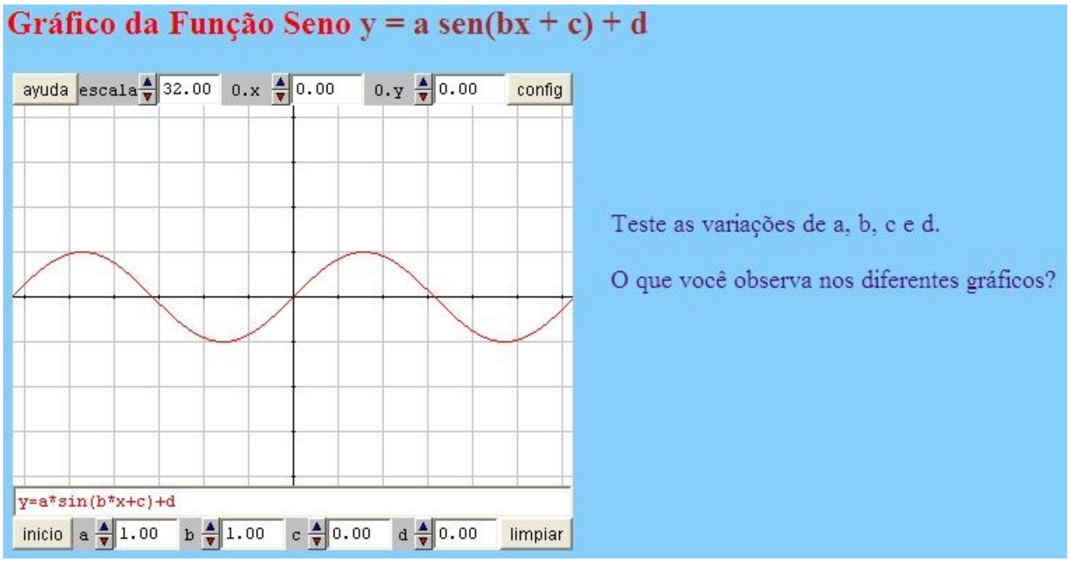


Figura 6.3: Atividade sobre função seno (criada por aluno do curso).

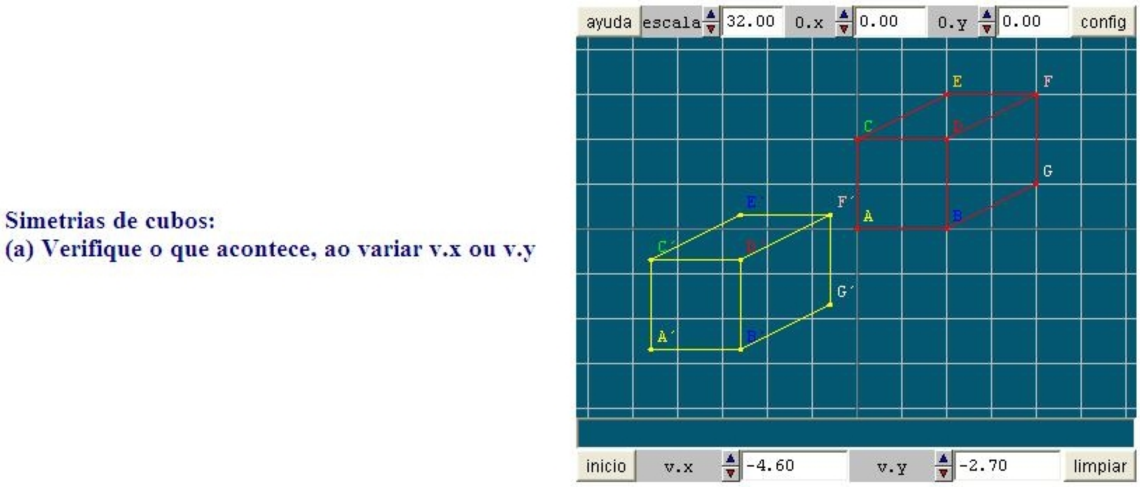


Figura 6.4: Atividade sobre translação do cubo (criada por aluno do curso).

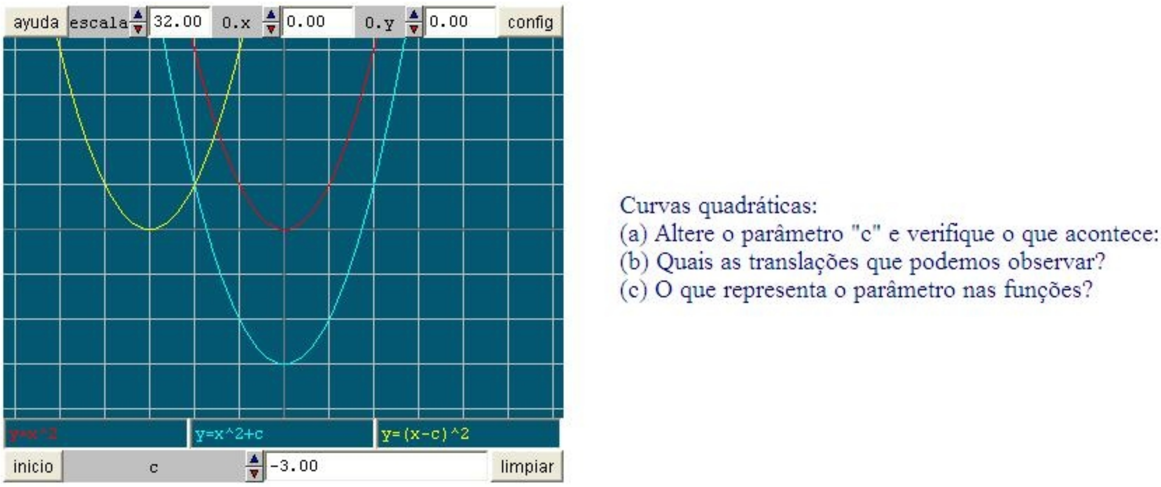


Figura 6.5: Atividade sobre função quadrática (criada por aluno do curso).

figura 6.6 mostra a representação de uma cuia de chimarrão [10] e relata de modo pitoresco algumas regras para servir a bebida. Fica clara neste caso a utilização de um conceito matemático (translações) com uma temática regional motivadora, capaz de agregar valor de modo significativo à atividade e à prática do professor de modo geral.

Figura 6.6: Atividade regional sobre chimarrão (criada por aluno do curso).

Embora alguns alunos tenham entregue atividades semelhantes às de outros, eles buscaram acrescentar algo à sua tarefa, o que mostra a capacidade da turma de adaptação de materiais às suas próprias idéias e à sua própria prática docente.

Após o término desta disciplina os docentes do curso de especialização, que não sabiam utilizar o construtor Descartes, foram ensinados pelos alunos que cursaram-na, mostrando que estes estavam aptos a dar seqüência à transformação da prática docente local por conta própria

[10] Bebida preparada com erva-mate verde e água quente, em cuia e bomba próprias, característica do Rio Grande do Sul.

e que o resultado do curso, considerando o estado inicial do conhecimento dos alunos acerca do computador, foi excelente.

6.4 Estudo de Caso: o Projeto Descartes

De modo a coletar importantes informações acerca do desenvolvimento e da difusão dos mathlets e de seus construtores, selecionamos um caso para estudo que reflete um exemplo claro de atuação bem sucedida dos órgãos governamentais no intuito de agregar valor à prática docente através do uso de recursos e estratégias variadas de ensino. Tal é o caso do Projeto Descartes, incentivado e financiado pelo governo da Espanha – na figura do "Centro Nacional de Innovación y Comunicación Educativa" (CNICE), vinculado ao "Ministerio de Educación, Política Social y Deporte" – e bastante difundido não apenas em solo espanhol, mas em toda a Iberoamérica.

Com isto, temos como ganho qualitativo o conhecimento de experiências bem sucedidas de utilização da ferramenta por professores, e de como (na Espanha, diga-se) se dão as mudanças na prática docente a partir da incorporação do Descartes no cotidiano do professor. Pretendemos com isto mostrar uma possibilidade de prática a ser adotada no Brasil, levando o professor a adotar as novas tecnologias em sua atividade docente de modo produtivo e enriquecedor, tanto para sua práxis quanto para o aprendizado de seus alunos.

6.4.1 Organização e Método de Entrevista

Dada a impossibilidade de contato pessoal com os membros do projeto na Espanha, fizemos a opção de buscar um contato por meio eletrônico (e-mail, neste caso). Deste modo, organizamos esta entrevista com o intuito de coletar o maior número de informações possíveis para necessitarmos, no máximo, de mais uma correspondência eletrônica no intuito de sanar eventuais dúvidas surgidas durante a análise dos dados.

A partir desta estratégia, obtivemos uma resposta recheada de informações e referências de publicações do projeto, enriquecendo esta pesquisa com dados muito valiosos acerca do uso do construtor de mathlets Descartes e do desenvolvimento de seu projeto.

A resposta nos foi fornecida pelo coordenador do Projeto Descartes – José Román Galo Sánchez – que, além da atenção dispensada, mostrou-se aberto a novos contatos visando aumentar a abrangência da ferramenta, "em prol do Projeto Descartes e da educação", nas palavras do próprio professor.

6.4.2 Impressões Sobre Entrevista

Inicialmente, o professor José Sánchez nos informa que o construtor de mathlets Descartes está bastante difundido não apenas na Espanha, mas em toda a Iberoamérica e em alguns outros lugares do mundo. No período de julho de 2007 a junho de 2008, o site do Projeto Descartes teve um total de 6.331.307 acessos, o que dá uma média de, aproximadamente, 527.609 acessos por mês. Segundo dados fornecidos pelo professor Sánchez, os meses com maior quantidade de acessos neste período são agosto, setembro e outubro e abril, quando foram atingidas faixas superiores a 600.000 acessos – com pico de 890.765 em setembro de 2007.

O projeto está vinculado ao CNICE – Centro Nacional de Inovação e Comunicação Educativa [11] – um órgão do Ministério de Educação, Política Social e Desporto [12] que promove a introdução das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) nas salas de aula, por meio de sistemas de informação, conexões com a internet, desenvolvimento de materiais didáticos a partir da utilização destas tecnologias e cursos de formação continuada para os professores, além de incentivar a experimentação dos materiais produzidos e a divulgação de resultados obtidos.

Como nos foi indicado pelo professor, o Projeto Descartes tem diversas publicações acerca do uso efetivo em sala de aula do construtor de mathlets Descartes, onde se refletem as experiências promovidas pelos membros do projeto dentro de uma rede de implantação das TIC, em uma iniciativa denominada HEDA [25] – Parcerias Escolares com Descartes em Andalucía [13] –, que é um projeto interescolar composto por professores da comunidade da região de Andalucía. Uma publicação sobre o Projeto HEDA foi realizada por SÁNCHEZ & GONZÁLEZ [27], descrevendo as principais características e a abrangência do projeto. Além disto, nos anos de 2005 e 2007 o Projeto EDA [24] – Experimentos com Descartes em Aula [14] – rendeu muitos frutos, como roteiros didáticos para uso em diversos níveis de ensino.

Dentre as publicações do grupo, podemos observar a comunicação de GÓMEZ, CALVO & SÁNCHEZ [15], onde os autores relatam a experiência de formação de docentes na utilização das TIC no âmbito do Projeto HEDA, fazendo um histórico e uma caracteriação dos projetos envolvidos (Descartes e HEDA), e uma investigação acerca da opinião dos professores sobre o uso de tais tecnologias. Nesta pesquisa, 88% dos professores entrevistados afirmaram terem aprendido "bastante" ou "muito" durante curso de formação em utilização das TIC, e 98% disseram que voltarão a utilizar tais tecnologias "com freqüência" ou "sempre que puderem".

[11] Tradução nossa para "Centro Nacional de Innovación y Comunicación Educativa".
[12] Tradução nossa para "Ministerio de Educación, Política Social y Deporte".
[13] Tradução nossa da expressão, em espanhol, "Hermanamientos Escolares con Descartes desde Andalucía".
[14] Tradução nossa da expressão, em espanhol, Experimentación con Descartes en el Aula

Já sobre os resultados obtidos pelos professores com seus alunos, observou-se pelos autores que 44% tiveram seu rendimento melhorado com a utilização da tecnologia, e ainda que o interesse pela matéria lecionada aumentou em cerca de 70%.

Acerca da adoção das tecnologias de informação e comunicação por parte dos professores, o professor Sánchez nos relata que os professores escolhem as ferramentas que consideram mais adequadas às suas pretensões educacionais e, dentre estas, estão os materiais produzidos pelo Projeto Descartes. Segundo o professor, não há nenhum tipo de resistência ao uso da tecnologia por parte dos professores, pelo simples fato de que não há nenhuma imposição neste sentido (de utilizar a tecnologia). Ainda segundo o professor Sánchez, outro fator determinante para a implementação das novas tecnologias no ensino é a necessidade de uma formação metodológica específica para a utilização das TIC, o que não é algo intuitivo.

A respeito do conhecimento de outras ferramentas semelhantes ao construtor Descartes, o professor Sánchez lembra que applets interativos para ensinar Matemáica existem vários, como Geogebra, JClic, Cabri e Geonext, mas o que distingue o Descartes dos demais é o fato de que sua edição é completamente interativa, permitindo que qualquer mathlet possa ser configurado e adaptado ao gosto do autor.

Perguntamos ao professor sobre a possibilidade de termos uma versão do construtor Descartes no idioma português-Brasil. Ele nos diz neste ponto que o construtor já tem uma tradução para este idioma, porém ela não está disponível na página do projeto, sendo necessário contato direto com ele, na figura de coordenador do Projeto Descartes, para obter a versão que contempla os idiomas português-Portugal e português-Brasil. Ele também se propôs a nos transmitir uma relação de termos com suas respectivas traduções, caso julguemos necessário revisar a tradução , que foi realizada (segundo o próprio professor Sánchez) por brasileiros, e não por eles.

O professor acrescentou ainda que, caso professores-pesquisadores brasileiros desejem traduzir os roteiros didáticos desenvolvidos na página do projeto para o idioma local, toda a equipe do Projeto Descartes sentir-se-ia muito encantada com essa possibilidade. Esta tradução deve atender apenas à licença da Creative Commons, sob a qual estão publicados os conteúdos na página do projeto. A licença pode ser vista na figura 6.7.

Segundo o professor Sánchez, interessa ao membros do projeto conhecer os avanços das iniciativas brasileiras de uso do construtor Descartes, bem como das traduções realizadas. Para tal, inclusive, o professor, na qualidade de coordenador do projeto, nos abre a possibilidade de incorporação de tais traduções à página do Projeto Descartes, o que potencializaria, em muito, o trabalho de tradução e sua divulgação.

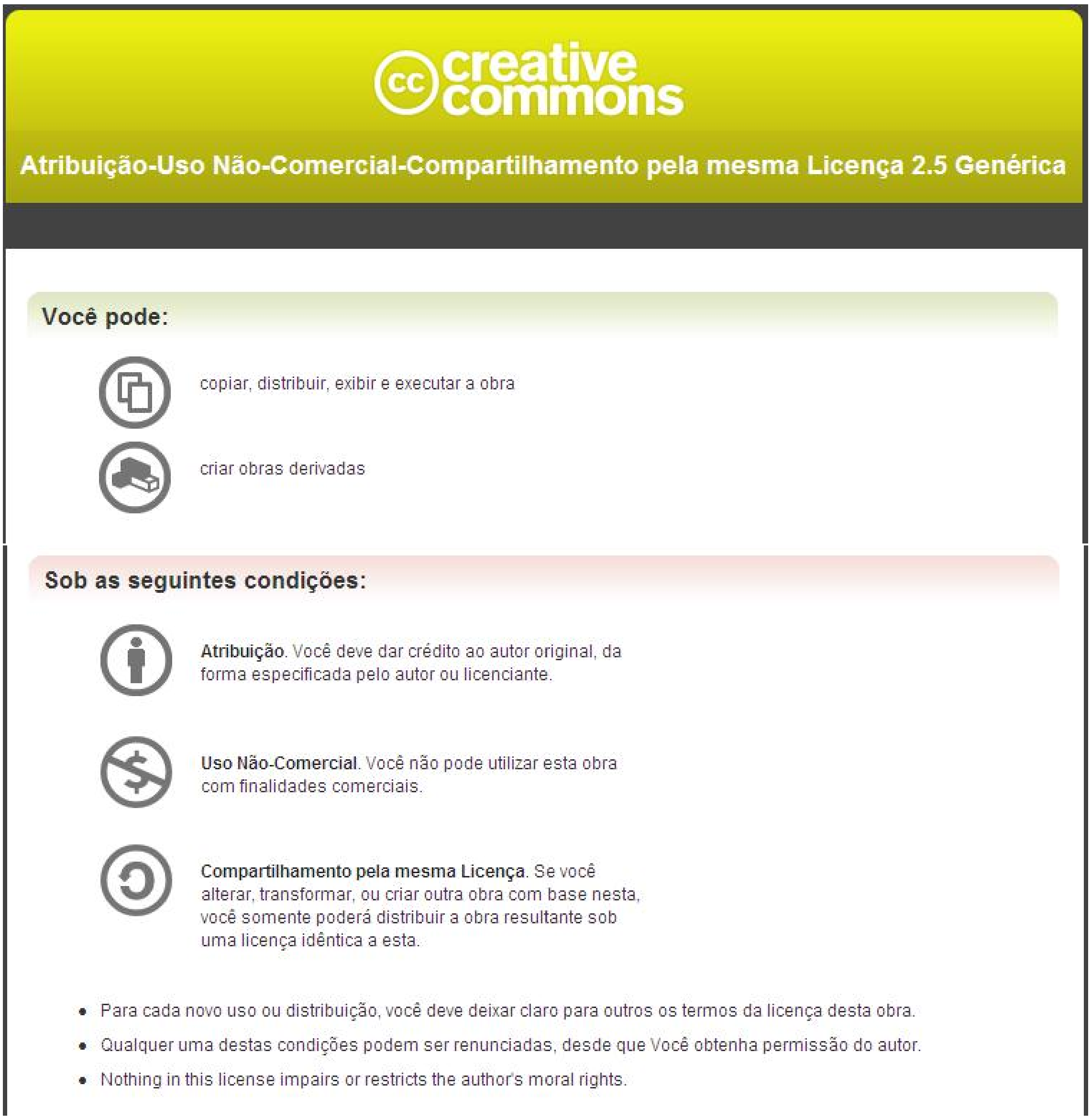


Figura 6.7: Licença dos Roteiros Didáticos do Projeto Descartes

Finalmente, o professor nos informa que, por estarem em época de férias escolares na Espanha – retornando apenas no mês de Setembro –, ele não teria como nos encaminhar para entrar em contato com docentes que desenvolvem os roteiros didáticos constantes na página do projeto. Mas assegurou-nos que, caso seja interessante, os professores estão à disposição para dar quaisquer informações sobre os materiais desenvolvidos, abrindo uma possibilidade interessante de trabalho futuro, ligado aos roteiros e à sua possível tradução.

6.5 Estudo de Caso: utilização dos mathlets por docente brasileiro

Visando mostrar como o uso dos construtores de mathlets é uma realidade possível para os docentes brasileiros, selecionamos um estudo de caso que consiste em uma entrevista realizada com o professor Fernando Celso Villar Marinho, professor titular do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro, e que utiliza o construtor de mathlets Descartes em sua prática docente.

Com este estudo de caso, buscamos exibir um caso de utilização bem sucedida dos construtores de mathlets na prática docente brasileira, como forma de incentivar docentes em atividade, futuros docentes e pesquisadores em Ensino de Matemática a adotarem os construtores de mathlets como alternativa didática, usufruindo de seus benefícios no sentido de transformarem-se em criadores de sua própria prática ("pesquisadores em ação") com a possibilidade de adequar as atividades desenvolvidas às necessidades de seus alunos.

6.5.1 Organização e Método de Entrevista

A entrevista foi organizada através de perguntas diretas, mas que permitissem ao professor o desenvolvimento livre de suas respostas. Devido à limitação de tempo, a entrevista foi realizada por meio eletrônico (e-mail). Este fato, embora não tenha prejudicado com gravidade a execução, acabou por tornar a "conversa" um tanto limitada.

As impressões obtidas a partir desta entrevista constam a seguir.

6.5.2 Impressões Sobre Entrevista

O professor Fernando Villar tem formação em Matemática, possuindo grau de Mestre em Matemática Pura pela Universidade Federal do Rio de Janeiro, desenvolve há 9 anos atividades docentes em sala de aula e leciona atualmente no Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro (CAp-UFRJ), em turmas do 7^o ano do Ensino Fundamental e 1^o ano do Ensino Médio.

Segundo o professor Fernando Villar, o colégio onde leciona disponibiliza laboratório de informática para seus alunos e ele o utiliza com certa freqüência, fazendo uso de recursos computacionais como programas de representação gráfica de funções, programas de Geometria Dinâmica, aplicativos para visualização em três dimensões, e mathlets, desenvolvidos a partir do construtor Descartes.

Sobre os mathlets, o professor relata que o construtor Descartes foi seu primeiro contato com aplicativos desta natureza, através de um licenciando em Matemática que realizava estágio no CAp-UFRJ, e que desconhece outros programas similares a ele.

Questionado a respeito de sua prática docente quando da utilização dos mathlets, o professor Fernando Villar disse elaborar o próprio material didático (mathlets e roteiros), não recorrendo a fontes externas em nenhum momento. Perguntado sobre que fatores leva em conta durante a criação de um roteiro para uso de um mathlet, o professor respondeu:

Interação com o aluno, construção crescente em termos de dificuldade, apresentação dos conteúdos de forma reduzida. Opto sempre por deixar os alunos chegarem às suas próprias conclusões. Elaboro o material com este objetivo. Procuro evidenciar os chamados desafios epistemológicos em cada conteúdo.

O professor identifica como uma das principais vantagens do uso de mathlets em relação ao uso do tradicional trio “quadro-negro, lápis e papel” o fato da ferramenta possibilitar a avaliação de aspectos qualitativos dos conteúdos apresentados, “deixando os alunos livres para o que é mais importante em relação a cada novo tópico”, nas palavras do próprio professor.

Já comparativamente a outros programas de computador com fins educativos, o professor aponta como principal vantagem a portabilidade, e como desvantagem uma certa limitação da ferramenta para alguns tipos de atividades e a possibilidade de criarem-se alguns erros conceituais a partir de uma programação interna equivocada. Nas palavras do professor:

Desvantagem relacionada à limitação do ferramental para algumas atividades e alguns erros conceituais que podem ser gerados a partir da programação interna do aplicativo, por exemplo, a forma como interpreta ou não ângulos superiores a 180^o.

Como vantagens da utilização dos mathlets no cotidiano escolar, o professor apontou:

- Acesso às atividades didáticas fora do horário escolar;
- Possibilidade de execução das atividades em qualquer ambiente, por exemplo, em casa ou em uma *lan house*;
- Maior interação com os conteúdos;
- Possibilitar o interesse pela programação e pela Matemática para resolver as atividades propostas.

Concluindo a entrevista, o professor Fernando Villar ressaltou que, para facilitar o uso de recursos computacionais educativos nas escolas, é de grande importância ampliar o acesso dos alunos aos computadores.

7 Discussão

Ao analisar os dados coletados durante a pesquisa, podemos notar que o recurso dos mathlets e dos construtores de mathlets mostrou-se eficiente e foi bem recebido pelos docentes e futuros docentes aos quais esta abordagem foi submetida. Boa parte das entrevistas realizadas, e relatadas na seção 6.1, apontou que o modo mais eficaz de trabalhar os conteúdos matemáticos é mesclar as abordagens com e sem o computador, fato que já é defendido por boa parte dos teóricos da área de Ensino de Matemática, como por exemplo TALL [41].

A experiência de contato com o coordenador do Projeto Descartes, na Espanha, nos mostra que a utilização dos mathlets pode ser bem sucedida, desde que respeitadas as concepções didático-metodológicas dos professores, sem qualquer tipo de pressão, e que sejam ministrados aos docentes cursos de capacitação no intuito de dar-lhes a conhecer esta ferramenta e seu modo de operação, a fim de que, conhecendo a ferramenta, eles possam decidir conscientemente se esta é a sua melhor alternativa didática. Devemos perceber que, ao usar o termo "melhor alternativa", é preciso ter em mente que o estudo de caso realizado com docentes e futuros docentes (seção 6.1) apontou explicitamente que a "melhor alternativa" consiste em uma abordagem híbrida, iniciando com uma descrição do problema proposto e uma primeira análise (no papel ou verbalmente), seguida de uma atividade estruturada em etapas, utilizando os mathlets, e seguida finalmente de uma formalização e/ou generalização (quando for o caso) do problema proposto, novamente com lápis e papel. Deste modo, os dados coletados nos dão indícios da eficácia dos mathlets quando utilizados como meio de criação de conjecturas acerca do problema proposto, visando uma posterior formalização. Nisto, estamos de acordo com as idéias propostas por TALL [39], de utilização do computador como uma abordagem corporificada (visual) no ensino de Matemática.

Sobre a "abordagem corporificada", fica claro a partir dos dados coletados no curso de especialização da UNIFRA – e descritos na seção 6.3 – que os mathlets e seus construtores podem, de fato, auxiliar a modificação da prática docente no sentido de fazer com que este seja capaz de adaptar sua prática à realidade de seus alunos e a uma linha de ensino baseada na cadeia empírica "exploração $\rightarrow$ conjectura $\rightarrow$ tentativa de demonstração $\rightarrow$ conclusão e aplicação". Um exemplo claro disto está na atividade proposta por um dos alunos da UNIFRA, que tratava de uma conteúdo matemático (translações) sob aspectos práticos de uma roda de chimarrão, parte do costume local, do dia-a-dia dos professores e de seus alunos. Deste modo, o professor tem em mãos uma ferramenta que lhe dá a possibilidade de adaptar sua prática ao cotidiano dos alunos, tornando-a muito mais motivadora para seus aprendizes. Além disso, o uso da ferramenta é tão simples que os alunos da UNIFRA – que antes do curso possuíam conhecimento extremamente limitado acerca do computador – foram capazes, após o curso, de ensinar os professores locais a fazerem uso dos recursos disponíveis no construtor de mathlets Descartes. Isto mostra clarammente como a utilização da tecnologia, neste caso os construtores de mathlets, pode mudar positivamente a prática docente, fornecendo mais ferramentas para que os professores possam produzir um salto qualitativo no processo ensino-aprendizagem. Esperamos ter mostrado como os alunos deste curso puderam agregar valor às suas imagens de conceito, de modo a permitir que o aluno se transforme de paciente em agente do processo educativo.

Já a pesquisa-ação descrita na seção 6.2, relatando a organização e execução do mini-curso "Construindo Nosso Próprio Mathlet", nos proporciona a descoberta de que os participantes demonstram grande interesse pela utilização dos construtores em suas práticas cotidianas, e ainda que estes gostaria de ter acesso a roteiros didáticos em idioma português, bem como têm interesse de que o construtor de mathlets Descartes seja traduzido para o português, de modo a permitir uma melhor difusão e uma maior utilização desta ferramenta no Brasil. A respeito disto, o professor Sánchez nos deixa claro que esta possibilidade é real, e que o Projeto Descartes interessar-se-ia muito por uma iniciativa brasileira de tradução dos roteiros disponíveis. Acerca da tradução da ferramenta, o coordenador do projeto também nos dá informações valiosas de que esta tradução já existe, abrindo novas possibilidades de difusão da ferramenta, a partir de novos cursos semelhantes ao mini-curso relatado, a partir de novos contatos com os membros do Projeto Descartes, ou a partir da elaboração de um manual de utilização do construtor de mathlets Descartes, escrito em português, detalhando todas as funcionalidades desta ferramenta.

Pensando na difusão dos construtores de mathlets no Brasil, o relato do professor Fernando Villar (seção 6.5), que já utiliza este recurso computacional em sua prática, nos fornece algumas informações importantes sobre o modo como os professores podem fazer uso desta ferramenta. Além da busca por roteiros prontos – que dar-se-ia pela tradução dos roteiros didáticos disponíveis na página do Projeto Descartes ou pela elaboração de novos roteiros em português – o professor Fernando aponta uma possibilidade que mostra explicitamente como a utilização dos construtores de mathlets pode representar uma pesquisa-ação, transformando o professor em criador de sua própria prática, por meio da utilização do construtor de mathlets na criação de aplicações e roteiros didáticos próprios, transpondo os saberes a ensinar em saberes ensinados de modo a explorar características julgadas relevantes pelo docente. O professor aponta ainda alguns fatores importantes na criação desta prática, como por exemplo deixar os alunos chegarem às suas próprias conclusões e organizar a atividade em etapas com nível de dificuldade crescente. A limitação apontada pelo professor apenas nos permite enfatizar que, para que o professor faça bom uso dos construtores de mathlets, ele não necessita de profundos conhecimentos de programação de computadores, mas sim de conhecimentos matemáticos acerca dos conteúdos abordados. Além disso, faz-se necessário que o professor saiba explorar, utilizando a seu favor, as limitações existentes nos sistemas computacionais – os chamados "conflitos teórico-computacionais" por GIRALDO [14] – no sentido de expandir a imagem de conceito de seus alunos.

Observando o ganho qualitativo apontado pelo professor no que tange ao uso dos mathlets, fica identificada a possibilidade de que o aluno pode, a qualquer tempo e em qualquer local, navegar pela internet e acessar o roteiro didático disponibilizado pelo professor, aumentando o poder de abrangência da ferramenta, mesmo fora do horário escolar. Sobre isto, o relato fornecido pelo professor Sánchez, coordenador do Projeto Descartes, dá conta de que o número de acessos à página do projeto é bastante elevado, e que a comunicação apresentada por ele – GÓMEZ, CALVO & SÁNCHEZ [15] – informa que os alunos têm o costume de trabalhar com as atividades contidas na página mesmo após as aulas. Isto nos abre a possibilidade de que o ensino não deva ser contido entre as paredes físicas da escola; ele deve, sobretudo, estar presente na vida dos estudantes mesmo após o horário escolar, não na forma de exercícios entediantes, mas como atividades interativas, dinâmicas e questionadoras, que levem os alunos a interessarem-se pelos conteúdos abordados.

De modo geral, podemos dizer que a utilização dos micromundos denominados aqui construtores de mathlets, com base nos dados coletados, pode interferir positivamente sobre a prática docente, transformando o professor em um pesquisador em ação, criador de sua própria prática – adaptada às necessidades e às particularidades de seus alunos e/ou da região em que vivem –, transpondo os saberes matemáticos em saberes ensinados de modo eficiente e questionador, conduzindo o aluno a, por meio da experimentação e da visualização, compreender os detalhes e as relações entre os elementos contidos nas atividades propostas, ao mesmo tempo em que permite ao aluno propor conjecturas, visando posterior abstração e formalização, acerca dos conteúdos, servindo assim de "ponte" entre o mundo corporificado e o mundo simbólico, no sentido de TALL [41].

Em resposta à pergunta "de que maneira os construtores de mathlets podem modificar a prática docente?", podemos apontar os seguintes indicativos, baseados nos relatos dos casos estudados:

- Os construtores de mathlets permitem ao professor, a partir de roteiros já prontos, utilizar a tecnologia disponível em prol de uma mudança na abordagem tradicional do ensino de Matemática, migrando da cadeia formal (“definição → teorema → demonstração → corolário (aplicações)”) para a cadeia empírica (“exploração → conjectura → tentativa de demonstração → conclusão e aplicação”);

- Os construtores permitem que o professor modifique aplicações já prontas, obtendo um novo mathlet completamente diferente do anterior; deste modo, a readaptação da ferramenta possibilita que o professor se torne um pesquisador em ação, criador de sua própria prática;

- Os construtores dão ao professor liberdade para criar e organizar suas próprias atividades, explorando aspectos específicos do conteúdo ensinado que o docente julgue pertinentes;

- Os construtores permitem que o professor adapte sua prática às particularidades de seus alunos, sejam elas regionalismos, preferências culturais ou sociais, entre outras;

- Os construtores permitem que o professor desenvolva atividades que podem ser acessadas por seus alunos fora do horário escolar, fazendo com que o aprendizado torne-se algo contínuo, para além da sala de aula.

Estes fatores, exemplificados ao longo dos casos relatados, demonstram o quão importantes os construtores de mathlets podem ser no sentido de conduzir uma melhoria da prática docente, utilizando as ditas “novas tecnologias” em prol do avanço da educação, dos saberes docentes e dos saberes ensinados.

8 Considerações Finais

Uma das principais contribuições que esta pesquisa se propõe a oferecer é o estudo de uma ferramenta computacional do ponto de vista da prática docente, sem no entanto esquecer-se de que na outra extremidade do processo ensino-aprendizagem está um outro ator muito importante: o aluno.

Neste sentido, esta pesquisa almeja subsidiar o professor no momento de (re)pensar sua prática docente e incorporar o computador ao seu conjunto de ferramentas didáticas efetivamente utilizáveis. A pesquisa não se propõe a ensinar como utilizar o computador, ou como operar com este ou aquele mathlet ou com um construtor de mathlets específico; ela tem como objetivo discutir de que modo o professor pode, utilizando um construtor de mathlets, tornar-se desenvolvedor de sua própria prática docente, de modo a adaptá-la à sua realidade, levando em conta as características cognitivas, regionais, econômicas e sociais de seus alunos.

Obviamente, isto não pode ser descrito por um livro didático, dado que cada aluno ou grupo de alunos possui um perfil único, necessitando que cada grupo - ou mesmo cada aluno! - tivesse o seu livro personalizado. Ao realizar a transposição didática dos saberes científicos para os saberes a ensinar, os integrantes da noosfera estão atentos a estas questões, fazendo com que os conteúdos e os livros sejam os mais "gerais" e "impessoais" possíveis, através do processo de "textualização do saber". Assim, cabe sempre ao professor a tarefa de adaptar o saber a ensinar à sua própria prática docente; seja simplesmente em apontamentos no quadro-negro, oralmente, através de atividades com materiais concretos, ou utilizando o computador.

É claro que não estamos pregando o abandono do quadro-negro ou dos materiais concretos; ao contrário, esta pesquisa oferece uma alternativa de ferramenta didática, realiza uma análise desta ferramenta sob a perspectiva docente, relata experiências de utilização satisfatória da mesma, e propõe um novo modo do professor relacionar-se com sua prática, através da pesquisa-ação.

Como alertado por GIL [13], o uso da tecnologia na educação não é milagroso; faz-se necessário ao professor desenvolver materiais consistentes e que permitam uma certa dose de "adaptação", de modo a garantir que ano após ano suas atividades continuem atuais e utilizáveis em sala de aula. A autora ainda observa que, com sete anos de experiência de uso dos construtores de mathlets (neste caso o construtor Descartes), seus alunos continuam motivados e capazes de compreender conteúdos que seriam muito difíceis de ensinar usando apenas quadro e giz. Além disso, ela atenta para o fato de que um construtor de mathlets pode ser reconfigurado a qualquer momento, proporcionando a "adaptação", caso seja necessária, no momento da própria aula.

Ao fazer uso de um construtor de mathlets - um micromundo, segundo a definição de BALACHEFF, *apud* BELLEMAIN [3] - aliado à teoria da pesquisa-ação, o professor tem a possibilidade de adequar seus mathlets às características do conceito ensinado. Tais mathlets podem ser feitos e avaliados, através da aplicação e da observação dos resultados com os alunos, para posteriormente serem reorganizados, refeitos, e reavaliados, se for o caso.

Outro ponto importante é a natureza corporificada (visual) dos mathlets: ao utilizar-se dos mathlets o professor pode conduzir o aluno a construir seu próprio conhecimento através da experimentação e da observação . Mais ainda: ele próprio, o professor, pode experimentar e propor desafios ao construir os mathlets para seus alunos, fazendo com que este processo de "construção da prática - aplicação da prática - avaliação da prática - reconstrução da prática" torne mais consistente as imagens de conceito sobre o tópico abordado - tanto a do aluno quanto a do professor.

Por fim, os construtores de mathlets representam a união de todas as teorias mencionadas e devidamente descritas no Referencial Teórico (Capítulo 4), tornando a pesquisa consistente e completamente conexa.

Este trabalho abre diversas possibilidades de atividades correlatas. Dentre outras, podemos destacar:

- Manutenção do contato com a equipe do Projeto Descartes na Espanha, visando a difusão do projeto no Brasil e a divulgação desta iniciativa e de seus resultados por parte do site do projeto, de grande visibilidade não apenas na Espanha, mas em toda a Iberoamérica;

- Concepção, organização, divulgação e execução de um curso de curta ou média duração a respeito do NIPPE Descartes, versando sobre suas funcionalidades e aplicações didáticas, voltado para professores em formação inicial ou continuada, podendo ainda ser ministrado em forma de capacitação para professores em atividade nas redes públicas e/ou privadas de todo o país;

- Elaboração de material didático para o curso supracitado, unificado na forma de um livro paradidático sobre a ferramenta Descartes, para publicação impressa ou na forma de livro digital (*e-book*);

- Elaboração de artigo para publicação sobre os principais resultados obtidos no experimento com os mathlets, realizando uma análise mais detalhada acerca das potencialidades da ferramenta na expansão da imagem de conceito de alunos e professores;
- Elaboração de artigo para publicação fornecendo maiores informações sobre o andamento e os principais resultados obtidos – em cursos de formação e em sala de aula – pelo Projeto Descartes na Espanha, visando prover informações sobre iniciativas bem sucedidas de utilização desta ferramenta;
- Execução de estudo acerca do ganho qualitativo da utilização dos mathlets sobre o processo de aprendizagem dos alunos, em todos os níveis de Ensino (Fundamental, Médio e Superior);
- Criação de novos mathlets e roteiros didáticos – utilizando a ferramenta Descartes – para a página do Projeto Novas Tecnologias no Ensino, visando a sua aplicação em um curso semi-presencial de Introdução ao Cálculo.

Visando aumentar ainda mais a abrangência deste trabalho, podemos relacioná-lo a outra Dissertação de Mestrado que vem sendo desenvolvida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, de autoria do mestrando Vinícius M. C. Pereira, e que versa sobre o ensino preparatório de Cálculo ("pré-cálculo"), tendo entre suas atividades uma seqüência didática para introdução e exploração do conceito de taxa de variação no Ensino Médio, utilizando-se de mathlets elaborados a partir do construtor Descartes [23]. Desta forma, os trabalhos se complementam, fornecendo à comunidade acadêmica e aos docentes um conjunto coeso e relevante no âmbito do uso da tecnologia no Ensino de Matemática no Brasil.

Referências Bibliográficas

[1] BALACHEFF, N. Apprendre la preuve. In *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, J. SALLANTIN and J.-J. SZCZECINIARZ, Eds., Nouvelle encyclopédie Diderot. PUF, Paris, 1999, pp. 197–236.

[2] BARBIER, R. *A Pesquisa-Ação - tradução de Lucie Didio*, vol. 3 of *Série Pesquisa em Educação* . Líber Livro Editora, Brasília, 2004.

[3] BELLEMAIN, F. G. R. O paradigma micromundo. In *Anais do I HTEM* (Rio de Janeiro, 2002), IME-UERJ, pp. 51–63.

[4] CANEN, A., AND SANTOS, A. R. D. Formação continuada de professores para o sucesso escolar: Um caso de parceria entre a universidade e o poder público estadual do Rio de Janeiro. In *Anais do IX Congresso da SPCE - Educação para o Sucesso: Práticas e Atores* (Funchal - Ilha da Madeira, Lisboa - Portugal, 2007), pp. 1–12. SPCE (Sociedade Portuguesa de Ciência da Educação).

[5] CHEVALLARD, Y. *La transposition didactique: du savoir savant au savoir au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grénobre, 1991.

[6] DA PONTE, J. P. O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Revista Quadrante 3*, 1 (1994).

[7] DE ANDRÉ, M. E. D. A. *Diferentes Tipos de Pesquisa Qualitativa*, 9 ed. Série Prática Pedagógica. Papirus Editora, Campinas, 2003, ch. 2, pp. 27–33.

[8] DE CARVALHO BORBA, M. *Calculadoras Gráficas e Educação Matemática*, vol. 6 of *Série Reflexão em Educação Matemática*. Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro, 1999.

[9] DE CARVALHO BORBA, M., AND PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática*, 3 ed. Coleção Tendências em Educação Matemática. Autêntica, Belo Horizonte, 2007.

[10] DIAS, C. Estudo de caso: Idéias importantes e referências, 2000.

[11] ESCARLATE, A. Uma investigação sobre a aprendizagem de integral em turmas iniciais de cálculo. Exame de qualificação (mestrado em ensino de matemática), Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.

[12] FRANCO, M. A. S. *Pedagogia da Pesquisa-Ação* , vol. 31, n.3 of *Educação e Pesquisa*. sciELO, São Paulo, 2005.

[13] GIL, C. R. Descartes, avances y novedades. Año 2008. In *I Congresso Nacional Internet en el Aula* (Santander, 2008), p. 4.

[14] GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada*. Tese de doutorado (doutorado em engenharia de sistemas e computação), Instituto Alberto Luiz Coimbra de Pós-Graduação e Pesquisa de Engenharia (COPPE), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2004.

[15] GÓMEZ, J. F., CALVO, I. C., AND SÁNCHEZ, J. R. G. Cómo formarse en el uso pedagógico de las TIC. In *III Jornadas Nacionales sobre TIC y Educación* (Lorca (Murcia), 2008), p. 10.

[16] GUIMARÃES, L. C., ET AL. Tabul*æ*, um software de geometria dinâmica. In *Anais do XIV Simpósio Brasileiro de Informática Educativa* (Rio de Janeiro, 2003).

[17] JOMA. Journal of online mathematics and its applications. http://www.joma.org. Acesso em março de 2007.

[18] NÚÑEZ, R. E., EDWARDS, L. D., AND MATOS, J. F. Embodied cognition as grounding for situatedness and context in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 39 (1999), 45–65.

[19] O ponto sem retorno: um problema de declividades. In *Projeto Novas Tecnologias no Ensino - Introdução às Funções Reais*, A. R. d. SANTOS, Ed. Instituto de Matemática - UFRJ, 2001. Seção Módulo II, Função Afim.

[20] PAIS, L. C. Transposição didática. In *Educação Matemática: Uma Introdução* , S. D. A. MACHADO et al., Eds. EDUC, São Paulo, 1999, pp. 29–30.

[21] PAPERT, S. *Mindstorms: Children, Computers and Powerful Ideas*. Basic Books, New York, 1980.

[22] PIAGET, J. *A Equilibração das Estruturas Cognitivas (tradução Álvaro Cabral)*. Jorge Zahar Editor, Rio de Janeiro, 1975.

[23] PROYECTO DESCARTES. Página do projeto, 1999. http://descartes.cnice.mec.es. Acesso em março de 2007.

[24] PROYECTO DESCARTES. Experimentación con Descartes en el aula (EDA), 2008. http://descartes.cnice.mes.es/index_eda.html. Acesso em julho de 2008.

[25] PROYECTO HEDA. Hermanamientos escolares con Descartes desde Andalucía (HEDA), 2007. http://descartes.cnice.mec.es/heda. Acesso em julho de 2008.

[26] REZENDE, W. M. O ensino de cálculo: Dificuldades de natureza epistemológica. In *II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (Santos, 2003), p. 20.

[27] SÁNCHEZ, J. R. G., AND GONZÁLEZ, J. A. S. Proyecto HEDA: Hermanamientos escolares con Descartes desde Andalucía. In *I Congresso Nacional Internet en el Aula* (Santander, 2008), p. 6.

[28] SANTOS, A. R. D., KUBRUSLY, R. S., AND BIANCHINI, W. Mathlets: Applets Java para o ensino de matemática. In *Anais do II HTEM* (Rio de Janeiro, 2004), IME-UERJ, pp. 19–25.

[29] SANTOS, A. R. D., KUBRUSLY, R. S., GIRALDO, V. A., AND BIANCHINI, W. *Introdução às Funções Reais - Um Enfoque Computacional*. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1998.

[30] SANTOS, A. R. D., AND PAIXÃO, V. Mathlets como ambientes corporificados no ensino de matemática. In *Anais do IV HTEM* (Rio de Janeiro, 2008), IM-UFRJ.

[31] SANTOS, A. R. D., PAIXÃO, V., AND PEREIRA, V. M. C. Construindo nosso próprio mathlet. In *Livro de Resumos do* 31^o *Encontro do Projeto Fundão* (Rio de Janeiro, 2007), Projeto Fundão, UFRJ.

[32] SANTOS, A. R. D., PAIXÃO, V., AND PEREIRA, V. M. C. Construindo nosso próprio mathlet. In *Anais eletrônicos do IX Encontro Nacional de Educação Matemática* (Belo Horizonte, 2007), UNI-BH.

[33] SANTOS, A. R. D., PAIXÃO, V., AND PEREIRA, V. M. C. Construindo nosso próprio mathlet. In *Anais do IV Congresso Internacional de Ensino da Matemática* (Canoas, 2007), ULBRA.

[34] Projeto novas tecnologias no ensino - introdução às funções reais. http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/index.htm. Acesso em agosto de 2007.

[35] TALL, D. O. Using computer graphics as generic organizers for the concept image of differentiation. In *Proceedings of 9th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education* (Holland, 1985), no. 9, pp. 105–110.

[36] TALL, D. O. *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Ph.d. thesis, University of Warwick, 1986.

[37] TALL, D. O. Concept images, computers, and curriculum change. In *For The Learning of Mathematics* (1989), vol. 9, pp. 37–42.

[38] TALL, D. O. Biological brain, mathematical mind & computational computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). In *Asian Technology Conference in Mathematics* (Chiang Mai, 2000), J.-C. C. Wei-Chi Yang, Sung-Chi Chu, Ed., no. 5, ATCM Inc., pp. 3–20. ATCM Inc, Blackwood VA.

[39] TALL, D. O. Using technology to support an embodied approach to learning concepts in mathematics. In *Anais do I HTEM* (Rio de Janeiro, 2002), IME-UERJ, pp. 1–28.

[40] TALL, D. O. Introducing three worlds of mathematics. In *For the Learning of Mathematics* (2004), vol. 23, pp. 29–33.

[41] TALL, D. O. Thinking through three worlds of mathematics. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psycology of Mathematics Education* (2004), vol. 4, pp. 281–288.

[42] TALL, D. O., GRAY, E., ALI, M. B., CROWLEY, L., DEMAROIS, P., MCGOWEN, M., PITTA, D., PINTO, M., THOMAS, M., AND YUSOF, Y. Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 1 (2001), 80–104.

[43] TALL, D. O., AND VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12 (1981), 151–169.

[44] VINNER, S. The role of definitions in the teaching and learning mathematics. *Advanced Mathematical Thinking* (1991), 65–81.

[45] YIN, R. K. Case study research: Design and methods, tradução e síntese de ricardo lopes pinto, adaptação de gilberto de andrade martins, 1984.

ANEXO A – O Problema do Ponto sem Retorno

Neste anexo podemos observar como se dá a utilização dos mathlets em um exemplo real. O roteiro didático abaixo está disponível na internet[1] e faz parte do Projeto Novas Tecnologias no Ensino - SANTOS [34]; ele refere-se ao problema conhecido como "problema do ponto sem retorno".

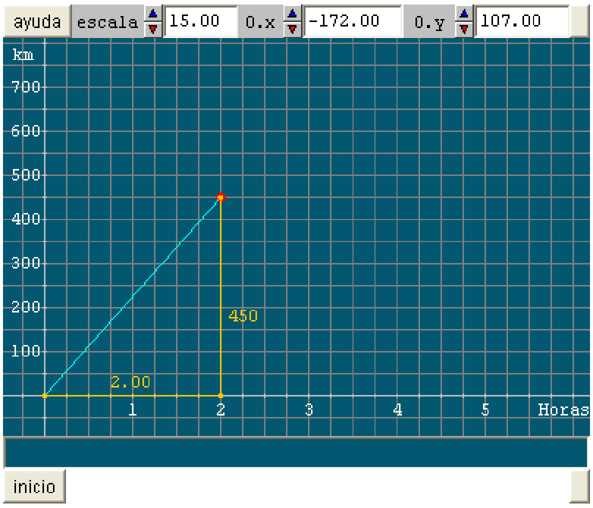
A.1 O ponto sem retorno: um problema de declividades

Um avião de pequeno porte, com autonomia para quatro horas de viagem, é capaz de desenvolver uma velocidade de cruzeiro de 300 Km/h quando não há vento. Durante um vôo, na viagem de ida, um vento de 50 Km/h sopra a favor, o que aumenta a velocidade de cruzeiro do avião, em relação à Terra, para 350 Km/h. De repente, o piloto se dá conta de que na viagem de volta o mesmo vento estará soprando contra e, em conseqüência, a velocidade do avião se reduzirá para 250 Km/h. O problema é determinar qual a distância máxima que o avião pode cobrir na viagem de ida de tal maneira a estar seguro de que há combustível para fazer a viagem de volta. A esta distância máxima chamamos de ponto sem retorno. Investigar quais são esses pontos para distintas velocidades do vento é o objetivo das atividades a seguir.

A.2 Analisando a viagem de ida

No quadro abaixo, arrastando o ponto vermelho podemos situar o avião a uma distância fixa do aeroporto e descobrir quando tempo leva para o avião chegar a este ponto.

[1] Ver [19].



(a) Coloque o avião no ponto (2, 600). Qual o significado destas coordenadas? Qual a velocidade desenvolvida pelo avião até chegar a este ponto?

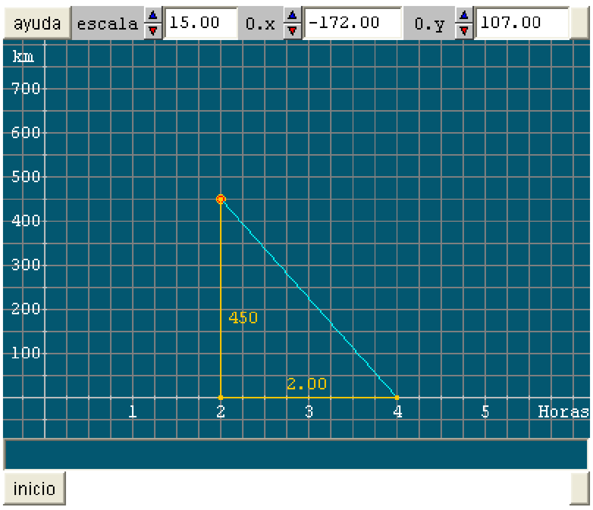
(b) Qual a declividade do segmento azul? Qual o significado físico dessa declividade?

(c) Situe o avião nos pontos (0.5, 300), (1.25, 400), (1, 350) e responda as perguntas dos itens anteriores para esses casos.

(d) Como é possível calcular a velocidade do avião em um gráfico como este?

A.3 Analisando a viagem de volta

No quadro abaixo, o ponto vermelho representa o ponto onde o avião inicia o retorno. A viagem completa dura quatro horas.



(a) Coloque o avião no ponto (2.5, 500). Qual o significado destas coordenadas? Quanto tempo demorou a viagem de volta? Qual a velocidade desenvolvida pelo avião até voltar ao aeroporto?

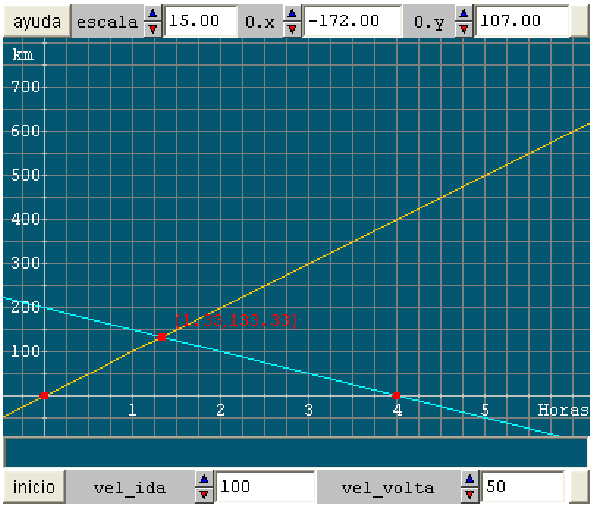
(b) Qual a declividade do segmento azul? Qual o significado físico dessa declividade? O que representa o seu sinal?

(c) Situe o avião nos pontos (0.5, 300), (1.25, 400), (1, 350) e responda as perguntas dos itens anteriores para esses casos.

(d) Como é possível calcular a velocidade de regresso em um gráfico como este?

A.4 Solucionando o problema

Representando as viagens de ida e de volta por suas retas correspondentes, podemos localizar os pontos sem retorno para distintas velocidades nas viagens de ida e de volta.



(a) Ajuste os parâmetros vel_ida (velocidade de ida) e vel_volta (velocidade de volta) para que estas velocidades sejam iguais as descritas no problema. Para essas velocidades, a que distância do aeroporto o avião pode chegar antes de iniciar o retorno?

(b) Em que momento é preciso iniciar a viagem de volta? Comprove essa conjectura seguindo os passos a seguir.

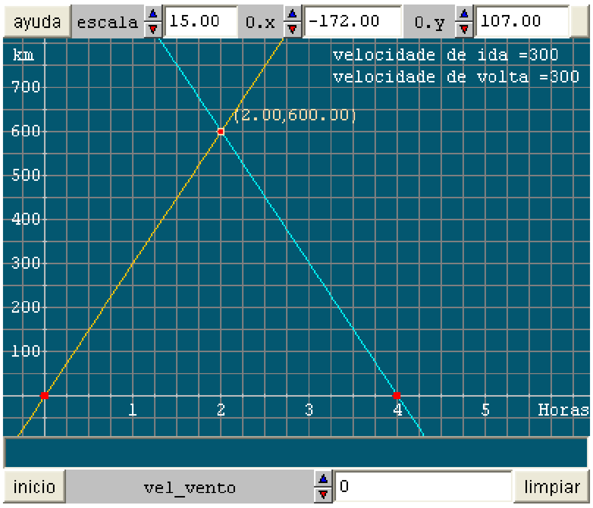
(c) Expresse a velocidade atingida pelo avião, na viagem de ida, como uma função da distância percorrida (d) e do tempo transcorrido (t).

(d) Expresse a velocidade atingida pelo avião, na viagem de volta, como uma função da distância percorrida (d) e do tempo transcorrido (t).

(e) Resolva o problema proposto a partir das expressões algébricas obtidas em (c) e (d).

A.5 Generalizando

Está claro que, ao modificar a velocidade do vento, obtemos distintos pontos sem retorno que definem uma curva no plano. No quadro abaixo, podemos variar o parâmetro que simula a velocidade do vento (vel_vento) para estudar a curva descrita por estes pontos. Experimente!



(a) Qual o significado físico de valores negativos para a velocidade do vento?

(b) Modifique a velocidade do vento e observe a curva descrita por estes pontos. Quais as principais características desta curva e o que estas características indicam?

(c) Qual a curva descrita pelos pontos sem retorno?

(d) Você é capaz de provar a conjectura feita em (c)? Para isso, a partir das expressões para d (distância percorrida) obtidas na atividade anterior, tente obter d como uma função do tempo transcorrido. A que conclusões você pode chegar?

ANEXO B – Modelos de Formulários Utilizados no Experimento

Este anexo conta com os modelos dos formulários utilizados no experimento realizado com alunos da turma de Mestrado em Ensino de Matemática e de Licenciatura em Matemática, descritas na seção 6.1.

Na primeira página, o formulário referente à parte I do experimento, sem a utilização do recurso computacional. Já na segunda página, o formulário referente à parte II do experimento, com a utilização do roteiro didático criado a partir dos mathlets construídos com a ferramenta Descartes [23]. Finalmente, temos na terceira página deste anexo o formulário utilizado na parte III do experimento, referente à avaliação da ferramenta por parte dos professores e futuros professores.

Este material passou por diversas reformulações, como visto na seção correspondente, tornando-se um caso clássico de uma pesquisa-ação desenvolvida na tentativa de realizar um diagnóstico visando a melhoria do ensino e da aprendizagem de Matemática.

Cabe observar ainda que os modelos foram mantidos em sua formatação original, apenas recebendo a paginação adequada.

Problema do Ponto Sem Retorno

PARTE I) <u>Sem o auxílio do computador</u>, resolva o seguinte problema:
Um avião de pequeno porte, com autonomia para quatro horas de viagem, é capaz de desenvolver uma velocidade de cruzeiro de 300 Km/h quando não há vento. Durante um vôo, na viagem de ida, um vento de 50 Km/h sopra a favor, o que aumenta a velocidade de cruzeiro do avião, em relação à Terra, para 350 Km/h. De repente, o piloto se dá conta de que, na viagem de volta, o mesmo vento estará soprando contra e, em conseqüência, a velocidade do avião se reduzirá para 250 Km/h. O problema é determinar qual a distância máxima que o avião pode cobrir na viagem de ida, de tal maneira a estar seguro de que há combustível para fazer a viagem de volta. A esta distância máxima chamaremos *ponto sem retorno*.
Determine, **explicando sua solução/raciocínio**:

(a) A que distância máxima do aeroporto o avião pode chegar antes de iniciar o retorno?

(b) Em que momento é preciso iniciar a viagem de volta?

Note que, ao modificar a velocidade do vento, obtemos outro “ponto sem retorno”.

(c) Qual o significado físico de valores negativos para a velocidade do vento?

(d) Qual a curva descrita pelo conjunto dos “pontos sem retorno”, para diferentes velocidades do vento? Você é capaz de provar formalmente qual é esta curva?

Problema do Ponto Sem Retorno

PARTE II) Entre na página a seguir e dê início à atividade disponível, a fim de analisarmos o problema com o auxílio do recurso computacional (neste caso, aplicativos web conhecidos como mathlets). Responda abaixo as perguntas da atividade. (Acesse, na página, o *Módulo II*, *seção 3*, *item 18*.)
http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/Atividades/index.htm

01 - Analisando a Viagem de Ida

(a) Coloque o avião no ponto (2, 600). Qual o significado destas coordenadas? Qual a velocidade desenvolvida pelo avião até chegar a este ponto?
(b) Qual a declividade do segmento azul? Qual o significado físico dessa declividade?
(c) Situe o avião nos pontos (0.5, 300), (1.25, 400), (1, 350) e responda as perguntas dos itens anteriores para esses casos.
(d) Como é possível calcular a velocidade do avião em um gráfico como este?

02 - Analisando a Viagem de Volta

(a) Coloque o avião no ponto (2.5, 500). Qual o significado destas coordenadas? Quanto tempo demorou a viagem de volta? Qual a velocidade desenvolvida pelo avião até voltar ao aeroporto?
(b) Qual a declividade do segmento azul? Qual o significado físico dessa declividade? O que representa o seu sinal?
(c) Situe o avião nos pontos (0.5, 300), (1.25, 400), (1, 350) e responda as perguntas dos itens anteriores para esses casos.
(d) Como é possível calcular a velocidade de regresso em um gráfico como este?

03 - Solucionando o Problema

(a) Ajuste os parâmetros vel_ida (velocidade de ida) e vel_volta (velocidade de volta) para que estas velocidades sejam iguais as descritas no problema. Para essas velocidades, a que distância do aeroporto o avião pode chegar antes de iniciar o retorno?
(b) Em que momento é preciso iniciar a viagem de volta? Comprove essa conjectura seguindo os passos a seguir.
(c) Expresse a velocidade atingida pelo avião, na viagem de ida, como uma função da distância percorrida (d) e do tempo transcorrido (t).
(d) Expresse a velocidade atingida pelo avião na viagem de volta como uma função da distância percorrida (d) e do tempo transcorrido (t).
(e) Resolva o problema proposto a partir das expressões algébricas obtidas em (c) e (d).

04 - Generalizando

(a) Qual o significado físico de valores negativos para a velocidade do vento?
(b) Modifique a velocidade do vento e observe a curva descrita por estes pontos. Quais as principais características desta curva e o que estas características indicam?
(c) Qual a curva descrita pelos pontos sem retorno?

(d) Você é capaz de provar a conjectura feita em (c)? Para isso, a partir das expressões para d (distância percorrida) obtidas na atividade anterior, tente obter d como uma função do tempo transcorrido. A que conclusões você pode chegar?

Problema do Ponto Sem Retorno

01 – Sobre a resolução com lápis e papel

(a) Qual foi sua primeira idéia para a resolução do problema? Ela se mostrou coerente ou acabou sendo abandonada?

(b) Você conseguiu encontrar uma solução (independente da posterior verificação de estar correta ou não) para o problema durante o tempo estabelecido?

02 – Sobre a resolução com o computador

(c) A atividade proposta lhe auxiliou na resolução do problema? Por quê?

(d) A ferramenta utilizada permitiu uma melhor visualização do problema? Por quê?

(e) O par “ferramenta-atividade” contribuiu para um correto entendimento do problema? Por quê?

03 – Quadro comparativo

(f) Faça comentários a respeito das duas abordagens propostas (com e sem o uso do computador). Aponte características, vantagens e desvantagens identificadas por você em cada uma delas.

(g) Qual das duas abordagens mais o incentivou a buscar a solução? Por quê?

(h) Qual das duas abordagens seria de sua preferência para utilização com seus alunos? Por quê?