GISELA MARIA DA FONSECA PINTO

COMPREENSÃO GRÁFICA DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL EM UM CURSO DE CÁLCULO SEMI-PRESENCIAL

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

UFRJ
RIO DE JANEIRO
2008

GISELA MARIA DA FONSECA PINTO

COMPREENSÃO GRÁFICA DA DERIVADA DE UMA FUNÇÃO REAL EM UM CURSO DE CÁLCULO SEMI-PRESENCIAL

*Dissertação apresentada à Banca Examinadora da Universidade Federal do Rio de Janeiro como exigência parcial para obtenção do título de **MESTRE EM ENSINO DE MATEMÁTICA**, sob orientação da **Profª. Drª. Claudia Segadas Coelho Vianna**.*

UFRJ
RIO DE JANEIRO
2008

RESUMO

Nesta pesquisa verificamos de que forma os alunos da Educação a Distância do Consórcio CEDERJ – Fundação CECIERJ compreendem graficamente o conceito de derivada. Realizamos atividades de pesquisa de campo onde propusemos uma pequena lista de exercícios para que fosse resolvida pelos nossos sujeitos da pesquisa, alunos das licenciaturas de Matemática, Física e Química. As análises foram feitas a partir dos resultados obtidos por esta lista de exercícios, pelas provas dos alunos feitas durante um curso de Cálculo I e por um questionário e duas entrevistas: uma sobre hábitos de estudos e outra analisando o que eles fizeram no teste e nas provas. Procuramos relacionar estes hábitos à compreensão de derivadas. Analisamos a flexibilidade dos alunos em transitar de uma a outra formas de representação da derivada de uma função. Concluímos que esta compreensão é falha e insuficiente, sendo os alunos em sua maioria incapazes de compreender a derivada em situações gráficas.

Palavras-chave: **d**erivada de uma função real, ensino a distância, gráficos de funções.

ABSTRACT

We verify in this research of that it in the distance forms the pupils of the Education of Trust CEDERJ - Foundation CECIERJ understands the derivative concept graphically. We carry through activities of field research where we considered a small list of exercises so that it was decided by our citizens of the research, pupils of the Mathematics, Physics and Chemistry. The analyses had been made from the results gotten for this list of exercises, the tests of the pupils made during a course of Calculation I and for a questionnaire and two interviews: one on habits of studies and another one analyzing what they had made in the test and the tests. We look for to relate these habits to the graphical understanding in derivatives. We analyze the flexibility of the pupils in transiting of one to another forms of representation of the derivative of a function. We conclude that this understanding is insufficient imperfection and, being the pupils in its majority incapable to understand the derivative in graphical situations.

Word-key: derivative of a real function, education in the distance, graphs of functions.

Sumário

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Como tutora da disciplina Cálculo I do CEDERJ há 3 anos tive a oportunidade de observar a enorme dificuldade dos alunos em lidar com derivadas no contexto de gráficos de funções. Estas dificuldades aparecem tanto em atividades de esboço do gráfico de uma função $f(x)$ como também em situações em que é necessária a utilização instrumental desse gráfico, seja para determinar a $f'(x)$ a partir da inclinação m da reta tangente ou relacionar crescimento de $f(x)$ e variação do sinal de $f'(x)$.

Considerando que os alunos do CEDERJ são em sua maioria licenciandos em Matemática, este quadro torna-se particularmente sério. Como estamos formando professores, é desejável que eles tenham uma concepção rica e completa de funções e seus gráficos. O estudo das derivadas neste contexto pode contribuir fortemente para enriquecer a imagem do conceito de função do futuro docente.

No intuito de investir na qualidade da formação inicial do professor de Matemática, esta pesquisa se dedica a estudar como são as concepções dos licenciandos do CEDERJ sobre as conexões entre derivadas e gráficos, bem como verificar de que forma seus hábitos de estudo influenciam na formação destas concepções.

No capítulo 1 apresentamos a problemática da compreensão do conceito de derivadas pelo aluno do CEDERJ, buscando na literatura referenciais que possam nortear esta pesquisa, apresentando-os ao leitor. O capítulo 2 apresenta a EaD em todas as suas especificidades, além de esclarecer sobre a UAB e o CEDERJ, para que o leitor possa se familiarizar com esta instituição e com as peculiaridades desta modalidade de ensino. Formulamos o problema no capítulo 3, onde procuramos esclarecer exatamente o que nos propomos a pesquisar, ou seja, a que pergunta procuramos responder durante o desenvolvimento deste trabalho.

A metodologia de pesquisa utilizada é apresentada no capítulo 4 em todos os seus pormenores – a atividade, as provas e as entrevistas realizadas com os alunos. Os resultados destas são relatados no capítulo 5 e a primeira fase de entrevistas é apresentada no capítulo 6, onde fazemos uma análise dos hábitos de estudo. No capítulo 7 utilizamos as entrevistas obtidas na segunda fase para analisarmos num aspecto global cada um dos alunos que participou desta etapa. Concluindo o trabalho, apresentamos as considerações finais no capítulo 8 e ainda algumas sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 1 - PROBLEMÁTICA E REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentamos ao leitor as teorias e resultados de pesquisas feitos nas áreas de 1.1 – formação do conhecimento matemático, 1.2 – construção, análise e utilização de gráficos de funções e 1.3 – ensino e aprendizagem de derivadas num contexto gráfico.

1.1 – Formação Do Conhecimento Matemático

Apresentamos ao leitor alguns trabalhos escritos sobre a formação do conhecimento matemático. Julgamos importante esclarecer sobre isto porque a esta pesquisa se propõe a entender como os alunos compreendem graficamente o conceito de derivada. Acreditamos que a compreensão de como os conceitos matemáticos são formados teria papel fundamental em auxiliar a nossa própria compreensão de em que ponto da aprendizagem está o aluno e de que forma ele concebe o conceito em questão.

Existem na literatura vários autores que teorizam sobre como se dá a formação dos conceitos em matemática avançada. Apresentamos a seguir alguns deles para em seguida correlacioná-los procurando entender de uma maneira mais ampla como se dá a formação do conhecimento matemático.

Sfard (1991) discorre sobre a natureza dual dos objetos matemáticos, como processo e objeto, afirmando que todo conceito matemático tem em sua origem duas formas de pensamento fundamentalmente diferentes: uma operacional e outra estrutural. O quadro a seguir exemplifica conceitos e suas concepções estrutural e operacional.

	Estrutural	**Operacional**
Função	Conjunto de todos os pares ordenados que atendem a uma dada relação. (Bourbaki, 1934)	Processo computacional ou um método bem definido de transformar um sistema em outro. (Skemp, 1973).
Simetria	Propriedade de uma forma geométrica.	Transformação de uma forma geométrica.
Número Natural	Propriedade de um conjunto ou A classe de todos os conjuntos com a mesma cardinalidade finita.	0 ou qualquer número obtido de outro número natural por adição de uma unidade (o resultado de uma contagem).
Número Racional	Par de inteiros (um membro de um conjunto de pares especialmente definido).	O resultado da divisão de inteiros.
Círculo	O lugar geométrico de todos os pontos equidistantes de um ponto dado.	A curva obtida pela rotação de um compasso em torno de um ponto fixo.

Tabela 1 - **Descrições operacionais e estruturais de noções matemáticas (In: Sfard, 1991, p. 5)**

Baseada nisto, a autora propõe um modelo de desenvolvimento conceitual no qual afirma que o que surge primeiro é a concepção operacional, ou seja, o aprendiz concebe certos conceitos matemáticos como o resultado de determinados processos ou até mesmo os identifica como os próprios processos. Esta é a fase da *interiorização*. Em seguida, quando tais processos já são devidamente familiares ao estudante, ocorre a *condensação.* A partir daí, quando estas noções processuais transformam-se em objetos reais – concepção estrutural – que podem ser manipulados e operados junto a outras estruturas mais complexas é a fase da *reificação*. Nesta fase o conceito – agora um objeto – já faz parte da estrutura cognitiva do aprendiz e está disponível a participar de outros processos e auxiliar na formação de novos objetos matemáticos.

Sfard exemplifica que, no caso do conceito de função, pode-se dizer que ele foi interiorizado quando a noção de variável é entendida, a partir de onde o aluno mostra “capacidade de usar uma fórmula para encontrar valores da variável dependente” (Sfard, 1991, p. 19). O avanço do estudante nesta etapa pode ser percebido pela destreza em trabalhar a correspondência por inteiro sem sentir a necessidade de voltar a valores específicos. Assim, ele será capaz de “investigar funções, esboçar os seus gráficos, compôr e até encontrar a inversa de uma função dada” (Sfard, 1991, p. 19). Pode-se dizer que esta noção foi reificada pelo aluno quando ele desenvolver a habilidade de identificar funções em suas mais diversas representações bem como se deslocar de uma forma para outra com destreza; resolver equações funcionais onde as incógnitas são funções; compôr e inverter funções e perceber “que os cálculos algébricos não são uma característica necessária dos conjuntos de pares ordenados que definem funções” (Sfard, 1991, p. 20).

A partir das observações acima podemos conceber como se dá a aprendizagem do conceito de derivada de uma função real de uma variável. O aluno está na fase de interiorização quando apenas concebe a derivada como o processo algorítmico de determinar a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ num dado ponto ou como a determinação da lei algébrica de $f'(x)$ a partir das regras de derivação. A fase da condensação caracteriza-se por uma compreensão mais ampliada do conceito, onde o aprendiz é capaz de conceber estes processos como únicos, sendo apenas representados de diferentes maneiras. Ele entende ainda nesta fase que a cada valor x_0 do domínio de $f(x)$ que admita derivada, existe $f'(x_0)$ que representa a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$. A partir daí a reificação ocorre com o desenvolvimento da noção da derivada como uma função em todas as suas formas de representação.

A teoria APOS de Dubinsky também apresenta um modelo de apreensão de um conceito matemático, tendo sido citada por Breidenbach et al (1992), Palis (2003) e Clark et al. (1997), entre outros, para embasar suas pesquisas sobre as construções mentais e as compreensões de funções, gráficos e tópicos de cálculo diferencial e integral, entre outros da matemática avançada. Esta teoria baseia-se na Abstração Reflexiva de Piaget e é discutida em detalhes em Dubinsky (1991). APOS é uma sigla formada pelas letras iniciais das palavras *ação*, *processo*, *objeto* e *esquema* (do inglês *schema*).

Segundo esta teoria, a construção de um conhecimento matemático inicia-se com a *ação*, que é a transformação de objetos matemáticos em outros objetos. A ação é entendida como o seguir de uma receita passo-a-passo, de maneira que todos os processos envolvidos na ação são exteriores ao aprendiz. Quando o indivíduo reflete sobre o procedimento, sendo capaz de pensar nele sem a necessidade de seguir o passo-a-passo, diz-se que as ações foram interiorizadas em *processos*. Nesta etapa da construção do conhecimento matemático, o sujeito é capaz de utilizar o processo para obter novos processos, por inversão ou coordenação com outros processos preexistentes.

Breidenbach et al. (1992) destacam que ações e processos transformam objetos. A principal diferença entre uma ação e um processo é a necessidade de uma receita explícita ou de uma fórmula que descreva a transformação. Assim, em uma ação o aprendiz pensa sobre a transformação através de cada um dos passos descritos por uma fórmula ou algoritmo (processo externo à mente do aprendiz); já um processo, por outro lado, representa uma transformação que não precisa estar explícita, ela precisa apenas ser imaginada pelo sujeito (processo interno).

Quando o indivíduo torna-se consciente do processo como totalidade, diz-se que este processo foi *encapsulado* como um *objeto*. Nesta etapa, o sujeito é capaz de conceber o conceito como um objeto cognitivo, sendo capaz de realizar ações sobre o objeto e de raciocinar sobre as suas propriedades. O *esquema* é o conjunto de todas as ações, processos e objetos, além de outros esquemas relacionados ao conceito em questão, que formam uma estrutura coerente na mente do indivíduo.

Breidenbach et al. (1992) e Palis (2003) utilizam este modelo para classificar as concepções dos aprendizes em suas pesquisas. Assim, um aluno tem a concepção ação de um conceito quando tem somente a habilidade de manipular os objetos mecanicamente segundo uma receita, fórmula ou algoritmo que lhe sugira um passo-a-passo a ser seguido. Como exemplo, um aluno tem a concepção ação de função quando suas ações se limitam a, dado um número específico, determinar quanto vale a função para este número por meio de sua lei algébrica (Palis, 2003). Ou ainda, ele comporá funções cujas leis algébricas conheça por substituição imediata de uma na outra seguida de simplificação, sem ser capaz de compôr duas funções em situações mais gerais, como por exemplo, se não forem conhecidas suas leis algébricas (Breidenbach, et al., 1992). No caso das derivadas, a concepção ação fica clara quando o aluno é unicamente capaz de determinar algebricamente a derivada de funções também dadas algebricamente a partir da memorização e aplicação das regras de derivação. A noção do limite associada à definição de derivadas não é natural para ele.

Porém, se o aluno é capaz de imaginar apenas a ação sem segui-la passo-a-passo, se concebe a transformação como uma atividade completa que se inicia com algum tipo de objeto, fazendo algo com estes objetos e obtendo como resultados novos objetos, dizemos que ele tem uma *concepção processo* do conceito em questão. É importante que o aluno tenha sido capaz de apenas imaginar estes processos e que não tenha sentido a necessidade de realizá-los fisicamente para que possa perceber a transformação. No contexto das funções, Palis (2003) afirma que um aluno tem a concepção processo de função quando "ele a percebe como recebendo valores e retornando valores, um ato imaginado, sem necessidade de efetuar cálculos, raciocinando sem o apoio de uma fórmula" (p. 220). A concepção processo no estudo de derivadas pode caracterizar-se quando o aluno tem a consciência de que a cada valor do domínio de $f(x)$ que admite derivada existe um valor numérico para $f'(x)$ que representa a inclinação ao gráfico de f em x. Assim, concebendo a derivada de maneira dinâmica e não pontual, o estudante será capaz de conceber a derivada também como uma função.

A *concepção objeto* aparece quando o estudante tem a noção do conceito como um todo matemático, concebendo todas as ações sobre ele. No caso das funções, Palis (2003) diz que ocorre este tipo de concepção quando o aluno é plenamente capaz de compô-la ou derivá-la, por exemplo, sendo capaz de pensar a função como um todo. Quando o aluno percebe a derivada $f'(x)$ como uma função que pode ser representada graficamente e que indica como variam os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de $f(x)$ em todos os valores do seu domínio que admitam derivada, podemos dizer que ele tem a concepção objeto de derivadas. Ele a percebe como um todo, uma função, um processo de determinar inclinações de retas tangentes, um gráfico ou um limite.

Os termos *procedimento* no sentido da ação algorítmica propriamente dita, *processo* em relação aos aspectos cognitivos envolvidos no procedimento e *conceito* para comentar sobre a dualidade das idéias matemáticas são usados por Gray & Tall (1994) para explicar a formação de um conceito matemático. Os autores destacam que ocorre a utilização do mesmo *símbolo* para representar tanto um processo como o resultado deste processo. Esta *ambigüidade* no *simbolismo* leva a uma *flexibilidade no pensamento matemático* para mover-se livremente entre o processo necessário para realizar certa tarefa matemática e o conceito manipulado mentalmente, sem a necessidade da utilização de símbolos particulares e específicos para cada caso.

Com a finalidade de esclarecer sobre a formação dos esquemas das idéias matemáticas, os autores usam a expressão *proceito* e explicam que "um proceito elementar é o amálgama de três componentes: um *processo* que produz *objeto* matemático, e um *símbolo* que é usado para representar tanto o processo quanto o objeto" e que um "*proceito* consiste de um grupo de *proceitos* elementares que têm o *mesmo objeto*" (p. 120).

Em relação aos tipos de pensamento possíveis nos aprendizes, comentam sobre o *pensamento procedimental* e o *pensamento proceitual*, onde o primeiro é caracterizado pelo foco nos procedimentos, reduzindo o foco à relação entre processo e produto e o segundo pela "habilidade de compressão de etapas na manipulação de símbolos até o ponto em que estes são vistos como objetos e que podem ser decompostos e recompostos de maneira flexível." (p. 133).

Vimos então nesta seção as idéias de alguns teóricos no estudo da formação do conhecimento matemático. Inserimos também algumas observações nossas que esclarecessem como compreendemos, baseado nestes autores, a formação do conceito de derivada de uma função real. As teorias dos autores acima mencionados diferem quanto a forma ou estrutura, mas se assemelham quando se referem à formação do pensamento matemático. A próxima seção apresenta algumas pesquisas relacionadas à compreensão e utilização dos gráficos de funções pelos estudantes. Nosso objetivo é correlacionar estas concepções com o que vimos agora, de maneira que possamos compreender de que maneira este conceito está presente na estrutura cognitiva do aprendiz.

1.2 - Construção, Análise E Utilização Instrumental De Gráficos De Funções

Tall (1997) comenta que conceitos relacionados ao estudo de funções devem ser abordados com a maior diversidade possível, passando por vários níveis de representação. – numérico, algébrico, visual, gráfico e formal. Porém o que posso observar a partir da minha prática docente é que o estudo gráfico de funções é feito normalmente por uma única mão: dada a lei algébrica de uma função, esboçar seu gráfico utilizando tabelas numéricas.

Como consequência desta prática, formamos alunos que têm normalmente grandes dificuldades em ler, interpretar, extrair dados e utilizar instrumentalmente gráficos de funções. Tais dificuldades ficam claras quando constata-se que um estudante é incapaz de ver um gráfico como algo além de pontos interligados determinados algebricamente por alguma estrutura semelhante à tabela. Estudá-los somente desta forma inviabiliza a formação do conceito e do objeto matemático ‘gráfico de função’, uma vez que o mecaniza e não estimula o aluno a operar com ele. Desta forma o gráfico fica sendo apenas um objetivo a ser alcançado e não um objeto matemático com o qual é possível operar e extrair dados. Como exemplo podemos pensar em dadas somente as representações gráficas de $f(x)$ e $g(x)$, em um mesmo sistema de eixos (figura 1), localizar os números $f(g(a))$ ou $f^{-1}(b-a)$ no eixo vertical.

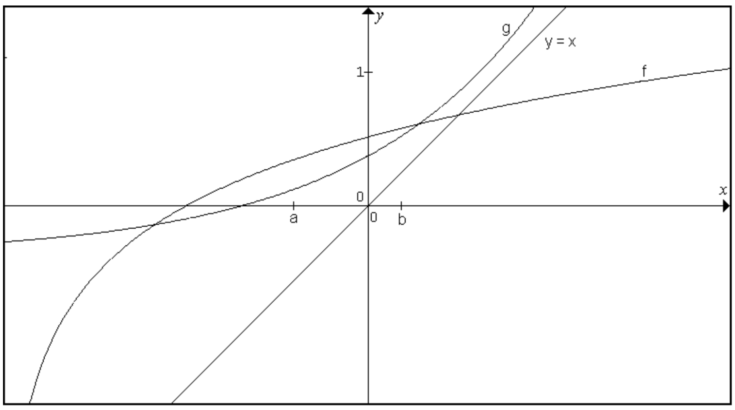


Figura 1

Este tipo de atividade propõe ao estudante um estudo a partir do gráfico de funções reais e não somente por suas expressões algébricas.

Palis (2003) comenta que o estudo de gráficos desvinculados de sua expressão algébrica correspondente deixa o aluno sem referencial por não existir explicitamente uma receita a ser seguida. Ele no máximo consegue "memorizar o método de marcar f(b) no eixo vertical a partir de um certo valor b marcado no eixo horizontal" (p. 224), mas normalmente fica nisso. Minicursos dados por mim junto a um grupo de colegas mestrandos no IX ENEM (IX Encontro Nacional de Educação Matemática – Belo Horizonte, 18 a 21 de julho de 2007) e no IV CIEM (IV Congresso Internacional de Ensino de Matemática – Canoas, 25, 26 e 27 de outubro de 2007) foram também muito esclarecedores sobre o assunto. Em ambos trabalhamos com atividades com gráficos de funções nos quais não apareciam as leis algébricas que os determinavam. Nosso público-alvo eram professores e licenciandos de Matemática e o que ficou muito claro foi que a sua dificuldade em compor, operar e inverter funções a partir de seus gráficos, desconhecidas as suas leis algébricas, era muito profunda, o que poderia situá-los na concepção ação em relação a gráficos de funções.

As imagens dos estudantes sobre função nem sempre estão bem formados quando tem início o curso de Cálculo. Thompson (1994) afirma que a imagem de conceito de função para os alunos está ligada a uma regra algébrica, a uma lei de formação, de forma quase única.

Também Gravina (1986) comenta sobre as dificuldades dos alunos na manipulação dos gráficos de funções. Em seu artigo, a autora comenta que os alunos chegam ao curso superior muito presos ao uso de tabelas numéricas de pontos arbitrários na construção dos gráficos de funções, o que não contribui com a formação de uma idéia geral de função. Este tipo de procedimento reduz o problema de esboçar o gráfico de uma função a um problema computacional que não traz nenhum tipo de ganho cognitivo para o aluno. Mais ainda, esta abordagem não garante que se chegue a um gráfico que expresse as características principais da função que ele representa. A tabela para ser útil deverá ter os valores para x escolhidos a partir do prévio conhecimento do formato do gráfico da função e da localização de seus pontos notáveis. A autora propõe que o tema seja enfocado a partir das famílias das funções, procurando levar o aluno a observar que gráficos de uma mesma família de funções têm o mesmo formato, variando apenas por translações, compressões, expansões ou simetrias horizontais ou verticais conforme variem os parâmetros em sua lei algébrica. Assim, o trabalho se torna mais interessante e frutífero se o professor mostra ao aluno a possibilidade de estudar esses parâmetros a partir da lei algébrica, por meio de manipulações, onde o aluno chegará de maneira imediata ao gráfico procurado. Ao concluir seu artigo, a autora comenta que este tipo de atividade deixa os alunos mais seguros e entusiastas em relação aos gráficos de funções.

A utilização instrumental do gráfico de funções para resolver problemas também não é uma prática usual entre os alunos e professores. Conforme Segadas Vianna (1998), a imagem de função é fortemente conectada com a dominância de abordagens analíticas. A grande dificuldade é pensar em diferentes representações de função, particularmente a representação gráfica. Tais dificuldades impedem que o aluno utilize os gráficos de funções como ferramentas em situações diversas. Como exemplo, Segadas Vianna (1998) cita a determinação de $\int_{-1}^{1} |x|\, dx$. Em estudo realizado com 148 alunos do final do curso de Cálculo I da UFRJ, apenas 37 acertaram a questão. Poucos (4 alunos) utilizaram o gráfico desta função para resolver a integral. Tomando por base este e outros exemplos e a análise de entrevistas, a autora relata que “as imagens gráficas são utilizadas pelo professor mais para ilustrar os conceitos que como ferramentas para resolver os problemas.” (p. 255).

Utilizando o recurso do gráfico como ferramenta, ele poderia simplesmente pensar:

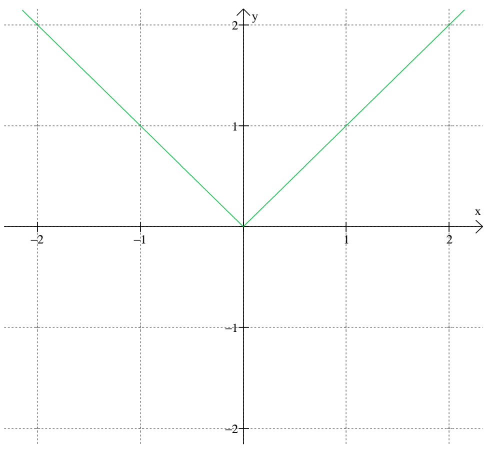


Figura 2 – O gráfico da função módulo

Conforme o gráfico, temos $\int_{-1}^{1}|x|\,dx=\frac{1\cdot 1}{2}+\frac{1\cdot 1}{2}=1$, que é a soma das áreas dos triângulos formados quando x varia de -1 a 0 e de 0 a 1, respectivamente. Note-se que este método demanda muito menos esforço e memorização de técnicas ou fórmulas particulares de integração. Desta forma, o aluno usa o conceito de área e assim utiliza realmente a noção inicial da integral associada com a imagem de área sob o gráfico de uma função. (Ferrini-Mundy e Lauten, 1994).

Apesar do número crescente de pesquisas nesta área e do evidente interesse dos educadores matemáticos por este tema, notamos que a implementação da utilização do gráfico de uma função como objeto com o objetivo de enriquecer o conceito de função em sala de aula ainda está faltando. Dreyfus (1991 apud Costa, 2002) afirma que isto provavelmente ocorre por uma das duas causas: ou porque os desenvolvedores de currículo não atribuem ainda aos gráficos de funções o papel de construtor de conceitos além de ilustrador de aulas, ou por serem as atividades gráficas mais difíceis por pressuporem fortemente a intuição matemática, necessitando assim serem adquiridas por um trabalho refletido e árduo.

Concluindo, Ferrini-Mundy e Lauten (1994) afirmam que pensar visualmente pode ser extremamente útil em contextos relacionados ao Cálculo. O uso de atividades que promovam e encoragem o pensamento visual tem grande validade não somente para o aluno, mas também para o professor. A próxima seção versa sobre a utilização dos gráficos de funções no ensino de derivadas e sobre o entendimento gráfico dos alunos sobre este conceito.

1.3 – Estudo e ensino de derivadas

O ensino de derivadas é geralmente direcionado à determinação imediata das leis algébricas das derivadas de funções dadas. Seja por problemas de tempo, seja por dificuldade dos alunos, o fato é que esta abordagem é priorizada em detrimento da gráfica, que normalmente só é praticada na via esboço de gráfico de função a partir da lei algébrica da função por meio do estudo da variação do crescimento e concavidade e estudo do comportamento assintótico. (Pimentel 1995 apud Almeida e Viseu, 2002)

Em virtude de ser concebido como um estudo “altamente simbólico por natureza” (Berry & Nyman, 2003, p. 483), os alunos de Cálculo costumam conduzir seu primeiro curso priorizando a manipulação dos símbolos sem se preocupar com os seus signifcados. Esta conduta gera uma compreensão procedimental e não estrutural dos seus conceitos. Neste mesmo sentido, Orton (1983) comenta que “é sabido que alguns estudantes começam a estudar derivação como uma regra a ser aplicada sem muita intenção de refletir sobre as razões e justificativas para efetuar o procedimento” (p. 242). Porém a compreensão em Cálculo envolve muito mais que a utilização de “regras algorítmicas padronizadas” (Berry & Nyman, 2003, p. 483).

Refletindo sobre a compreensão em Cálculo, Tall (1991) relata que estudantes não entendem derivada e integral indefinida como funções. Assim, é muito difícil para o aluno conceber o gráfico da derivada de uma função, bem como pensar sobre seu significado. Ele comenta ainda que os professores não abordam a derivada como uma função inicialmente. Normalmente ‘simplifica-se’ a teoria, concentrando esforços inicialmente no que acontece em um ponto. Assim, fixa-se um x e considera-se a inclinação da reta que passa pelos pontos de abscissa x e $x + h$ e faz-se $h \to 0$, o que já implica em dificuldades ocultas no conceito de limite. Depois disso é que se comenta sobre a possibilidade da variação de x, gerando assim a função derivada. Este processo dá maior ênfase ao limite que à idéia da função derivada que exprime a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em cada ponto do domínio onde exista esta reta. Mais ainda, o autor comenta que a utilização de um software gráfico que possibilite a magnificação local permite que se aborde o conceito de derivada pela idéia da reta tangente, permitindo que se forme inicialmente o conceito de função derivada para posteriormente incluir o trabalho formal com o limite que a define (Tall, 1985). Assim, nem sempre são explorados os conceitos gráficos relacionados ao conceito de derivada, o que faz com que o assunto tenha uma abordagem prioritariamente algébrica.

Orton (1983) ainda cita que os estudantes geralmente acham as aplicações das regras de diferenciação “relativamente fáceis” (p. 235), cometendo apenas alguns erros de execução provavelmente oriundos de alguma desatenção ou deficiência em sua formação anterior.

Também os livros textos de Cálculo dão ao tema um tratamento mais algébrico que gráfico. Ferraz e Gitirana (2007), ao fazerem uma análise de como aparecem os gráficos de funções em Courant (1965), de Moise (1970), Anton (2000) e Thomas (2002), perceberam que, de maneira geral, ocorreram grandes transformações, deixando evidente que há um movimento geral de valorização do esboço do gráfico de funções no estudo desta disciplina. Porém ainda persistem mesmo nos títulos mais recentes a ausência de atividades de análise das características do gráfico. Todos os autores pesquisados apresentam gráficos de funções como "representações geométricas da representação simbólica" (p. 11). Thomas e Anton ainda dedicam um capítulo exclusivamente ao estudo do esboço de curvas que representem gráficos de funções, mas a abordagem ainda se restringe a este tipo de atividade: dada a lei algébrica, esboce o gráfico. É evidente que houve um ganho no sentido de que estes gráficos são estudados qualitativamente – por suas características – e não apenas por plotagem de pontos, mas ainda não é o suficiente para que o estudante de Cálculo seja capaz de desenvolver por completo o conceito-objeto de gráfico de função.

Por outro lado, o livro-texto de Cálculo I do Consórcio CEDERJ – que aborda os conceitos de limites e derivadas de funções reais de uma variável real – procura apresentar ao aluno as funções reais e os seus gráficos como um mesmo objeto, conforme podemos ver no trecho que se segue:

> "O gráfico da função f é uma conseqüência de sua definição, mas, dado G_f podemos *reconstruir* a função f. Dessa forma, podemos nos referir à função f ou ao seu gráfico como se fossem, essencialmente, o mesmo objeto. A grande vantagem do gráfico (...) permite uma enorme interface entre a álgebra (...) e a geometria. Dessa maneira, podemos simplesmente *desenhar* funções, ampliando enormemente nosso estoque de exemplos." (CEDERJ, p. 12, aula 01, versão 2.0, 2005)

Talvez motivado pela consciência de ser direcionado a um curso na modalidade semi-presencial, os livros didáticos desta Instituição devem estabelecer algum tipo de diálogo com o aluno, de maneira que seja possível o entendimento dos conceitos estudados sem a presença efetiva do professor. Assim, o material oferecido aos estudantes desta modalidade procura esclarecer pontos que normalmente não são abordados nos livros de Cálculo de maneira geral.

Sobre o ensino de Cálculo, Hughes-Hallett et al. (1994) escreveram:

> "Uma das diretrizes principais é a 'Regra dos Três', que diz que sempre que possível tópicos devem ser ensinados graficamente e

numericamente, bem como analiticamente. O objetivo é produzir um curso onde os três pontos de vista são balanceados e onde estudantes vejam uma idéia principal por vários ângulos." (p. 121 *apud* Berry & Nyman, 2003, p. 483)

Neste mesmo sentido, Artigue (1991) afirma que no ensino do conceito de derivada deve-se passar pela abordagem formal como limite da razão $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ quando h tende a zero, pela inclinação da reta tangente ao gráfico em x_0 e pelo número ou função obtida a partir da derivação com as regras usuais para funções elementares. Giraldo (2003) acrescenta a estas ainda a inclinação local do gráfico de f em x_0, a tangente do ângulo entre a reta tangente ao gráfico de f em x_0 e o eixo horizontal e a taxa de variação instantânea em x_0. Quando o ensino procura seguir esta variedade de abordagens, aumentam as possibilidades do aluno conceber os diferentes processos coordenados ao conceito de derivada e assim a imagem de conceito do tema se torna mais rica e completa. Desta forma o aluno será capaz de conceber um esquema de derivadas que adicione a noção de função à de derivada o que, conseqüentemente, permitirá um estudo qualitativo do gráfico da derivada da função e do significado gráfico da derivada da função num contexto mais amplo e não somente pontual.

O estudo de Almeida e Viseu (2002) mostra que a abordagem prioritariamente algébrica ocasiona uma compreensão de derivadas bastante superficial, uma vez que há considerável diferença entre a maneira pela qual os alunos descrevem o conceito de derivada e como a aplicam (p. 199). Em sua pesquisa participaram 19 professores estagiários de Matemática que responderam a 10 questões abertas relacionadas à interpretação gráfica da derivada de uma função. Os autores perceberam que "a maioria dos estagiários não interpretou nem relacionou convenientemente, numa perspectiva gráfica, os vários aspectos inerentes ao estudo da derivada de uma função" (p. 203), citando ainda que os processos do cálculo eram em geral "apreendidos a um nível puramente algorítmico e com pouca utilização de representações gráficas" (p. 203).

Asiala et al (1997), ao estudarem o desenvolvimento da compreensão gráfica da derivada, perceberam que alunos que são submetidos a uma formação tradicional em Cálculo têm esta compreensão significativamente mais fraca que alunos que estudaram no modelo denominado pelos autores como C^4L - do inglês

Calculus, Concepts, Computers and Cooperative Learning. As estratégias utilizadas nesta modalidade de curso incluem a construção das idéias matemáticas utilizando um software de programação matemática, a investigação de conceitos usando um sistema computacional simbólico e trabalho cooperativo em grupos que se dedicam a atividades de resolução de problemas e discussão dos resultados. Entendemos que os autores classificam como *formação tradicional* o curso que seguiu estritamente um livro-texto e estimulou a resolução de exercícios individualmente com lápis e papel. Os pesquisadores submeteram um grupo de 17 alunos a um curso nesta modalidade e outro grupo com 24 alunos a um curso na modalidade tradicional.

A estratégia pedagógica usada no curso da modalidade C^4L foi uma combinação de atividades computacionais desenvolvidas para ajudar a construção mental do conceito. Também realizavam tarefas de classe sem computadores seguidas de discussão, que tinham o objetivo de levar os alunos a refletirem sobre o que tinham feito no computador. Pedia-se ainda aos alunos que fizessem com lápis e papel alguns exercícios para ajudá-los a reforçar o conhecimento que tinha sido construído. Em geral os estudantes trabalhavam em grupos de 4 ou 5 alunos que se mantiveram durante todo o curso. Foram desenvolvidos 5 tipos de atividades no computador, a saber: aproximações de inclinação e variação; investigações gráficas do conceito de derivada; construção de uma função que representasse uma aproximação da função; regras para calcular derivadas e várias aplicações relacionadas a inclinação de retas tangentes, gráficos de funções, interpretações gráficas de derivadas e taxas de variação instantâneas. Um aspecto importante é que a derivada foi trabalhada como função desde o início e continuamente abordada durante todo o curso. Ao final do curso, ambos os grupos foram submetidos a exame de avaliação e entrevistados para pesquisar as razões de suas resoluções. As questões de avaliação estão mostradas nas figuras 3 e 4 a seguir.

Interview Question 6. Suppose that the line L is tangent to the graph of the function f at the point (5,4) as indicated in the figure below. Find $f(5)$, $f'(5)$.

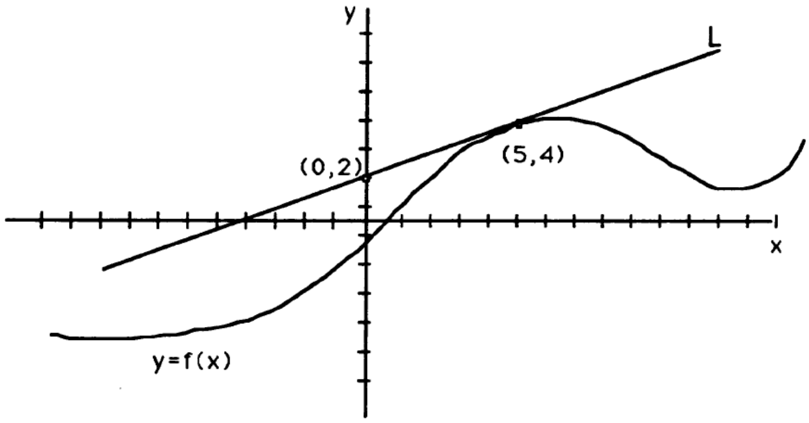


Figura 3 - Questão 6 de Asiala et al

Fonte: Asiala et al, 1997(p. 404)

A questão 7 está mostrada a seguir:

Interview Question 7. Sketch a graph of the function *h* which satisfies the following conditions:

h is continuous

$h(0) = 2,\ h'(-2) = h'(3) = 0$ and $\lim_{x\to 0} h'(x) = \infty$

$h'(x) > 0$ when $-4 < x < 2$ and when $-2 < x < 3$

$h'(x) < 0$ when $x < -4$ and when $x > 3$

$h''(x) > 0$ when $-2 < x < 0$ and when $x > 5$

$\lim_{x\to -\infty} h(x) = \infty$ and $\lim_{x\to \infty} h'(x) = -2$

Figura 4 – Questão 7 de Asiala et al

Fonte: Asiala et al, 1997 (p. 405)

Ao comparar o desenvolvimento da compreensão gráfica de derivada realizado entre os dois grupos, os autores relataram que cerca de metade dos estudantes do curso tradicional foram avaliados com códigos completamente satisfatórios, enquanto que ¼ eram muito fracos. Já para os alunos do curso na modalidade C^4L, os resultados da avaliação mostraram que todos eles obtiveram códigos completamente satisfatórios. Os autores notam a clara necessidade dos estudantes do curso tradicional de cálculo em trabalhar com a lei algébrica da função, tentando determiná-la de alguma maneira a partir do gráfico. Na questão que pedia que, a partir da figura 2, o aluno determinasse $f(5)$ e $f'(5)$, alguns alunos do curso tradicional determinaram a equação da reta L para depois derivá-la e determinar $f'(5)$ ou para substituir $x = 5$ nesta equação (da reta L) e determinar $f(5)$. Já a questão 7 (mostrada na figura 3) não foi corretamente respondida por 25% dos estudantes da modalidade tradicional enquanto que apenas 6% - 1 aluno – não foi capaz e resolvê-la satisfatoriamente do grupo que fez o curso da modalidade C^4L.

As dificuldades dos alunos são normalmente relacionadas a concepções incompletas ou insuficientes sobre funções e derivadas quando dadas graficamente. Amit e Vinner (1990) pontuam que estudantes equiparam a derivada de uma função com a equação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto dado, o que também ocorreu na pesquisa de Asiala et al (1997) citada acima. Ferrini-Mundy e Lauten (1994) discutem sobre o desejo dos estudantes em achar uma equação para uma função representada graficamente antes de tentar esboçar o gráfico da derivada. Orton (1983) relata que que cerca de 20% dos participantes de seu estudo confundiam a derivada em um ponto com a ordenada, ou o valor de y do ponto de tangência, demonstrando dificuldades até mesmo em identificar o próprio ponto de tangência.

Vimos então que estudantes que estudam Cálculo em uma modalidade tradicional têm muita dificuldade em entender a derivada como uma função que pode também ser representada por um gráfico. Além disso, normalmente o aluno correlaciona a derivada com a inclinação da reta tangente, mas as pesquisas demonstram que este é um entendimento teórico, ou seja, o aluno não se mostra capaz de aplicar este conhecimento em situações que não o solicitem textualmente. O que foi possível perceber é que num contexto gráfico essa percepção é fraca, inconsistente e insuficiente. Pode-se ainda observar que a instrução diferenciada oferecida pelo curso na modalidade C^4L mostrou-se mais eficiente que a tradicional no desenvolvimento da compreensão gráfica da derivada de uma função.

A próxima seção destina-se a reunir o que foi exposto nas três seções anteriores relacionando-as com nosso objeto de estudo.

1.4 - Síntese

Refletindo sobre a aprendizagem de derivadas, podemos dizer que este conceito pode ser considerado como efetivamente compreendido pelo aluno quando este é capaz de mover-se livre e autonomamente entre as diversas maneiras de representá-la. Por esta razão, entendemos que não somente a compreensão mas também a utilização instrumental da representação gráfica de uma função e de sua derivada pode auxiliar fortemente na formação da concepção estrutural deste conceito pelo aluno.

Estudos mostram porém que não existe o hábito de trabalhar graficamente o conceito da derivada de uma função. Mais ainda, vemos que a falta desta prática leva os graduandos a considerarem atividades que enfatizam gráficos praticamente insolúveis. E ao tentar resolvê-las, normalmente o aluno tenta de alguma forma traduzir algebricamente os dados gráficos, o que muita vezes gera erros ou cálculos despropositados e inúteis.

O estudo de Asiala et al (1997) em especial mostra que quando o curso de cálculo é dado de maneira não tradicional, ou seja, com a adição de atividades diferenciadas – modalidade C^4L – o aluno tem uma visão muito mais abrangente e completa dos conceitos trabalhados, sendo mais capaz que os demais em trabalhar de modo não algébrico.

Entendemos que este tipo de atividade tem grande importância por auxiliar também na formação e enriquecimento do conceito de função. Particularmente na Licenciatura em Matemática acreditamos que esta compreensão é fundamental por possibilitar a formação de um professor de Matemática que terá um entendimento completo sobre o conceito de função, sendo capaz portanto de auxiliar na formação deste conceito na estrutura cognitiva do aluno.

Especialmente na modalidade de Licenciatura semi-presencial oferecida pelo CEDERJ cremos que tais atividades tenham caráter ainda mais indispensável por poderem ser implementadas a distância. Pode-se pensar em um curso que proponha roteiros de atividades aos alunos,computacionais ou não, e que este relate o que foi possível observar e aprender com eles. Acreditamos que o investimento em atividades que promovam o entendimento e a manipulação gráfica do conceito de derivada de uma função na EaD será particularmente interessante por permitir que este conceito seja plenamente visto e entendido pelo aluno. Tal abordagem pode ser feita por meio de atividades com lápis e papel e através da própria rede de comunicação, utilizando os recursos computacionais.

O próximo capítulo introduz alguns conceitos essenciais da EaD, seu funcionamento e pressupostos. Para familiarizar o leitor com o Consórcio CEDERJ e sua Licenciatura em Matemática, descrevemos brevemente seu funcionamento nas páginas que se seguem. Comentaremos nelas sobre como se dão as aulas, as sessões de tutoria e os momentos de avaliação.

CAPÍTULO 2 - A EAD NO BRASIL E O CONSÓRCIO CEDERJ

Este capítulo dedica-se a apresentar ao leitor a Educação a Distância em todas as suas especificidades, o surgimento no Brasil e a tendência de se tornar uma modalidade cada vez mais freqüente principalmente na formação de professores da educação básica. Comentamos também sobre a Fundação CEDERJ – Consórcio CECIERJ e a UAB – Universidade Aberta do Brasil, ao qual pertencem os nossos sujeitos de pesquisa e sobre a estrutura do curso de Licenciatura em Matemática. Nosso objetivo é esclarecer sobre esta modalidade incipiente no Brasil e cada vez mais presente nos cursos universitários.

2.1 – A EaD no Brasil

A EaD – Educação a Distância – no Brasil surge para atender a uma demanda de estudantes que têm o acesso à Universidade na modalidade presencial dificultada seja por dificuldades de acesso ou de freqüência. O Ministério da Educação a define pelo decreto nº. 5622 de 19 de dezembro de 2005, em seu artigo 1° do capítulo I, como uma "... modalidade educacional na qual a mediação didático-pedagógica nos processos de ensino e aprendizagem ocorre com a utilização de meios e tecnologias de informação e comunicação, com estudantes e professores desenvolvendo atividades educativas em lugares ou tempos diversos." (In: www.mec.gov.br). Já para Moore e Kearsley (2007), é "o aprendizado que se dá, normalmente, em um local diferente do ensino, exigindo técnicas especiais de criação do curso de ensino, métodos especiais de comunicação por meio eletrônico ou por outra tecnologia, bem como disposições especiais de ordem organizacional e administrativa" (p. 2).

A existência de cursos de graduação a distância já é hoje uma realidade em nosso país. Tais cursos são oferecidos por instituições privadas e públicas, e têm como objetivo principal, segundo o MEC (página da SEED – Secretaria de Educação a distância – http://portal.mec.gov.br/seed), democratizar e elevar o padrão de qualidade da educação brasileira. Sendo assim, a aceitação da Universidade a distância tem sido enorme, e seu público tem se ampliado semestre a semestre.

A criação do Sistema Universidade Aberta do Brasil – UAB – pelo decreto nº 5622 de 19 de dezembro de 2005 vem formalizar e organizar o funcionamento de tais universidades na esfera pública. A página do portal do MEC na internet dedicada ao Sistema Universidade Aberta do Brasil estabelece como prioridade a capacitação – formação inicial e continuada – de professores da educação básica, oferecendo principalmente cursos de licenciatura (apesar de não serem estes os únicos cursos oferecidos pelo Sistema). Cada município que deseja aderir à UAB deve disponibilizar um pólo de atendimento presencial com laboratórios de informática, biologia, química e física, além de biblioteca e de apoio aos tutores presenciais. As Instituições Públicas de Ensino Superior têm a atribuição de elaborar e desenvolver todo o material didático e pedagógico dos cursos oferecidos. Ainda segundo a página oficial do Sistema Universidade Aberta do Brasil, em 2007 chegou-se a 291 pólos regionais, perfazendo um total de cerca de 46 mil alunos matriculados. A expectativa é de que, com o lançamento de novos editais de adesão a municípios, alcance-se em 2010 a marca de mais 750 novos pólos e 300 mil novas vagas no sistema de educação superior. Assim, espera-se ter ensino superior público chegando às mais remotas regiões de nosso país, com a mesma qualidade dos cursos presenciais. (HTTP://uab.mec.gov.br/conteudo.php?co_pagina=20&tipo_pagina=1).

A próxima seção esclarece sobre o funcionamento propriamente dito do Sistema Universidade Aberta do Brasil e da educação a distância de maneira geral, discorrendo brevemente sobre seus pressupostos em relação a estrutura física e pedagógica dos seus cursos de graduação.

2.2 – O Modelo de EaD utilizado pela UAB e a Aprendizagem a Distância

O modelo de funcionamento da graduação da UAB segue o modelo piloto implantado pela Fundação CECIERJ – Consórcio CEDERJ em 2002. As aulas ocorrem a distância, através do material didático – livros ou apostilas escritos por professores das Instituições Federais de Ensino Superior, com o objetivo de permitir o entendimento do conteúdo pelo aluno sem a necessidade física do professor. Existem ainda os recursos de multimídia, como aulas na web, murais de comunicação, e-mail e fórum para que o aluno se comunique com o tutor a distância ou com colegas ou ainda com a direção do pólo ou do curso através da página da instituição de ensino a distância na internet.

Existem ainda nos pólos os tutores presenciais e nas Universidades os tutores a distância. Segundo Moore e Kearsley (2007), os tutores ou orientadores são "especialistas que proporcionam orientação educacional aos alunos durante um curso de educação a distância, geralmente em termos de tarefas de revisão e avaliação." (p. 352). Assim, o tutor é alguém que deve orientar o estudante, tirar suas dúvidas em relação ao conteúdo, estimulá-lo ao estudo em bibliografias complementares sugeridas pelo professor e incentivá-lo a encontrar-se com outros colegas no pólo com o objetivo de formar grupos de estudo. Portanto o tutor não é professor e não deve jamais atuar como tal; o professor é aquele que é responsável pelo desenvolvimento sistematizado do conteúdo; é quem está habilitado para ministrar as aulas, mesmo que não presencialmente. Normalmente fazemos nas atividades de tutoria o papel do monitor nos cursos presenciais, com o diferencial de ainda acumularmos a função de um 'irmão mais velho' que zela pelo bom andamento do curso de seus tutorados.

A modalidade a distância pressupõe ainda, segundo Martins e Rocha (2000 *apud* Rocha, 2000) a existência de recursos computacionais para que possa existir satisfatoriamente. São estes recursos que viabilizarão a comunicação Universidade – aluno – aluno – professor. Portanto, a graduação a distância é mediatizada pelo computador, e deve ter uma abordagem interacionista.

Sobre a dinâmica da aprendizagem, Rocha (2000) afirma que "a não existência da figura do professor deixa para o aluno a responsabilidade de zelar pelo aprendizado. O controle do aprendizado é realizado muito mais intensamente pelo aluno do que pelo professor (...)" (p. 9).

Tal fato leva a uma mudança de paradigma: o paradigma do ensino se transforma em paradigma da aprendizagem (Abreu, 1998 apud Rocha, 2000). Ainda sobre o modelo pedagógico, Rocha (2000) comenta:

> "Cabe aqui diferenciar, com clareza, um modelo pedagógico, cujo propósito é educar, de outro modelo, cujo propósito é ensinar. O primeiro há de ser uma prática educativa que propõe ambientes pedagógicos mais centrados na aprendizagem, pois, assim estará estimulando o aprendiz a desenvolver a sua independência, autodisciplina e a iniciativa individual, habilidades que o contexto atual considera fundamentais." (p. 10)

Tais objetivos são gradativamente alcançados a medida que o aluno avança no curso. Inicialmente ele sente alguma dificuldade pela estranheza de não haver um professor presente. Mas conforme o tempo passa o estudante percebe a necessidade de criar hábitos de estudo rígidos e organizados. Normalmente criam-se grupos de estudo e observamos em nossa prática que, conforme o licenciando progride e avança no curso, ele sente cada vez menos necessidade de freqüentar as tutorias presenciais. Isto demonstra que realmente ele vai se tornando autônomo com o passar do tempo, pois suas dúvidas vão se tornando cada vez mais pontuais e precisas.

Borba, Malheiros e Zulatto (2002) afirmam que, com o surgimento das Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (NCTIs), surgiram possibilidades nunca antes vistas de interação professor/aluno ou aluno/aluno que podem ficar registradas através de e-mails, fóruns de discussão ou murais virtuais. Tais meios eletrônicos apresentam muitas vantagens em relação aos meios convencionais e presenciais porque "permitem combinar a flexibilidade da interação humana (com relação à fixidez dos programas informáticos, por mais interativos que sejam) com a independência no tempo e no espaço, sem por isso perder velocidade." (Borba, Malheiros e Zulatto, 2002: p. 2)

O material didático deve também atender às especificidades desta modalidade. Castro et al (2002) comentam que:

> "O Material Didático deve ser uma ferramenta básica de aprendizagem e como princípio ser necessariamente **auto-explicativo** - permitindo a auto-aprendizagem, **motivador -** incentivando e estimulando ao estudo e **variado -** sendo adequado aos vários estilos de aprendizagem.

> Deve o material didático ter como características, **interatividade -** permitindo ao aprendiz um papel ativo e proporcionando-lhe uma construção do seu aprendizado em nível de sensibilização diferenciado, **praticidade -** possibilitando-lhe encontrar as informações para entender qualquer ponto que porventura não tenha compreendido, **autonomia** - que permite que o aprendiz navegue livremente pelo material proposto implicando numa estruturação própria do seu conhecimento, **consistência** - sendo coerente com o plano proposto para o curso e com as metas propostas.” (p. 6)

Passaremos na próxima seção a esclarecer como se dá o funcionamento do CEDERJ, instituição de graduação a distância que motivou este trabalho e que forneceu os sujeitos desta pesquisa. Nosso objetivo é esclarecer ao leitor alguns pontos fundamentais neste trabalho bem como a terminologia bastante particular que será utilizada nos capítulos seguintes.

2.3 - O Consórcio Cederj – Fundação Cecierj

O Consórcio CEDERJ – Fundação CECIERJ é uma instituição de ensino a distância que foi criada em abril de 2002 com a união da autarquia Centro de Ciências do Estado do Rio de Janeiro – CECIERJ e o Centro de Educação a Distância do Estado do Rio de Janeiro – CEDERJ. O consórcio é formado pelas seis universidades públicas sediadas no Estado do Rio de Janeiro – UENF, UERJ, UFF, UFRJ, UFRRJ e UNIRIO e tem, segundo sua própria concepção, “o objetivo fundamental de democratizar o acesso ao ensino superior público, gratuito e de qualidade.” (http://www.cederj.edu.br/fundacaocecierj/exibe_artigo). Foi recentemente incorporado ao Sistema Universidade Aberta do Brasil, que adotou o seu modelo de funcionamento como padrão para todos os seus cursos de graduação.

O aluno tem acesso aos cursos por meio de aprovação em concurso vestibular próprio do consórcio. Sendo aprovado no processo seletivo, ele será aluno regularmente matriculado em uma das universidades consorciadas, recebendo ao final do curso diploma equivalente aos dos alunos da modalidade presencial.

Segundo a página oficial do consórcio, ele baseia-se em quatro pilares para o funcionamento de seu modelo educacional: material didático preparado especificamente para a modalidade; atendimento tutorial presencial ou a distância; processos avaliativos presenciais e a distância e uso de laboratórios nas disciplinas como informática, física, biologia e química nos pólos regionais e de frequência mínima obrigatória em diversos horários disponibilizados para este fim.

Ainda aparece na página o objetivo principal do consórcio, que é a formação integral dos alunos de maneira que eles se tornem produtores de conhecimento. Para alcançar este fim, a proposta é que os cursos ofereçam autonomia de estudo por meio da utilização de "material atraente e com linguagem adequada, realização de atividades relevantes e contextualizadas, troca de experiências e interação social e fontes de informação de qualidade" (http://www.cederj.edu.br/fundacaocecierj/exibe_artigo).

Todas as disciplinas dos cursos de graduação utilizam recurso de avaliação presencial tradicional. Desta forma não somente impõe-se o cumprimento do cronograma proposto em cada disciplina como também se garante a qualidade da formação que está sendo oferecida.

Apresentaremos agora ao leitor a Licenciatura em Matemática do CEDERJ, esclarecendo sobre a sua estrutura e funcionamento.

O consórcio oferece cursos de graduação nas áreas de Licenciatura em Ciências Biológicas, Matemática, Química e Física, Pedagogia para as séries iniciais, Administração e Tecnologia da Computação. A seguir daremos mais detalhes do curso de Licenciatura em Matemática pois foi principalmente com os alunos deste que realizamos este estudo.

2.4 - A Licenciatura Em Matemática

2.4.1 - Estrutura

O curso de Licenciatura em Matemática é de responsabilidade do Instituto de Matemática da UFF – Universidade Federal Fluminense. A estes alunos são oferecidas disciplinas de Física sob responsabilidade do Instituto de Física da UFRJ e disciplinas didático-pedagógicas sob responsabilidade da Faculdade de Educação da UERJ, porém de comum acordo com a Coordenação do Curso de Licenciatura em Matemática da UFF e CEDERJ.

Os objetivos do curso são:

> "Garantir aos seus egressos uma sólida formação de conteúdos matemáticos, formação pedagógica dirigida ao trabalho do professor, formação de conteúdos de áreas afins, necessárias ao exercício do

magistério e uma formação que possibilite a vivência crítica da realidade do ensino em sua região, tornando-os capazes de experimentar propostas interdisciplinares com seus alunos.” (http://www.cederj.edu.br/fundacaocecierj/exibe_artigo.php).

O curso é formado por disciplinas obrigatórias e eletivas, procurando utilizar recursos diversos de aprendizagem, tais como desenvolvimento de projetos e estágios supervisionados. Uma parte importante da aprendizagem é feita a distância, contando, quando o aluno julgar necessário, com a ajuda de tutores presenciais nos pólos regionais em horários pré-estabelecidos e de tutores a distância nas Universidades, através de e-mail, telefone ou fax. Vemos a seguir a grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática:

Período	Disciplina	CHT	CHTP
Primeiro	Matemática Discreta Pré-cálculo Geometria Básica Introdução Informática	75 90 75 75	315
Segundo	Geometria Analítica Cálculo I Introdução às Ciências Físicas Construções Geométricas	75 90 90 60	315
Terceiro	Álgebra Linear I Cálculo II Física I Fundamentos I Prática I (Didática)	75 90 90 60 75	390
Quarto	Álgebra Linear II Cálculo III Física II Fundamentos II Prática II	75 90 90 60 75	390
Quinto	Equações Diferenciais Fundamentos III Física III Métodos e Técnicas de Avaliação Estágio Supervisionado I Informática no Ensino da Matemática	60 60 60 75 90 75	420
Sexto	Álgebra I Fundamentos IV Instrumentação do Ensino da Geometria Estágio Supervisionado II	90 60 90 90	330
Sétimo	Álgebra II Optativa Matemática Optativa Pedagógica Instrumentação do Ensino da Álgebra e Aritmética Estágio Supervisionado III	90 60 60 90 120	420
Oitavo	Análise Real Optativa Matemática Optativa Pedagógica Estágio Supervisionado IV Filosofia da Ciência	60 60 60 120 60	360

Figura 5 – Grade Curricular da Licenciatura em Matemática do CEDERJ

Fonte: www.cederj.edu.br/fundacaocecierj

Os pólos regionais que oferecem os cursos de Licenciatura em Matemática localizam-se nos municípios de Angra dos Reis, Bom Jesus do Itabapoana, Rio de Janeiro (Campo Grande), Cantagalo, Volta Redonda, Petrópolis, Paracambi, Piraí, Itaperuna, Itaocara, Macaé, Magé, Natividade, Nova Iguaçu, Santa Maria Madalena, São Pedro d'Aldeia, Saquarema, São Fidélis, São Francisco de Itabapoana, Resende, Rio Bonito, Rio das Flores e Três Rios.

2.4.2 – Material Didático

A Licenciatura em Matemática, particularmente os cursos de Cálculo I e II utilizam material didático próprio especialmente escrito para esse fim. Todo o material didático impresso de Cálculo 1 está sendo refeito e as atividades e avaliações têm tido uma abordagem diferenciada, preocupando-se mais com a compreensão conceitual dos conteúdos fundamentais desta disciplina. São disponibilizadas também aos alunos as aulas na web, que são arquivos de hipertexto que contam com figuras e animações que têm por objetivo auxiliar na compreensão dos conteúdos pelos alunos. O material didático é impresso ou digitalizado, disponibilizado na Internet, atendendo às recomendações do Ministério da Educação em sua elaboração (Decreto nº 5622 de 19 de dezembro de 2005). Através da Plataforma CEDERJ, no endereço www.cederj.edu.br/fundacaocecierj, utilizando login e senha individuais, o aluno tem acesso ao curso de uma maneira geral: material, aulas na web, calendários e cronogramas de estudo, ementas de disciplinas, fóruns de discussão, ferramentas chat, e-mail e mural de avisos das direções dos pólos e dos cursos, entre outras informações.

Neste mesmo sentido são disponibilizadas semanalmente na Plataforma do CEDERJ listas de atividades denominadas Exercícios Programados que enfocam o conteúdo previsto para a semana, conforme o cronograma da disciplina. Assim, o Exercício Programado-01 é a lista de exercícios programados para a semana 1, o Exercício Programado-02 para a semana 2 e assim sucessivamente. Este tipo de atividade permite que o aluno tenha alguma interação com o coordenador da disciplina, uma vez que nem sempre o coordenador é o autor do material que está sendo usado no curso. Desta maneira, o coordenador transmite ao aluno que objetivos pretende alcançar durante o decorrer do curso e que tipo de abordagem pretende dar a ele. Inicialmente esses exercícios saem na versão aluno, sem respostas e com comentários e orientações do docente responsável pela disciplina. Em Pré-Cálculo e em Cálculo I nessas listas também são oferecidas as Atividades Eletrônicas. Elas são uma nova modalidade de exercícios onde o coordenador da disciplina propõe uma atividade feita com auxílio de algum software computacional que tem o objetivo de levar o aluno a tratar de maneira diferenciada alguns conteúdos do curso. Fazer a atividade eletrônica é uma opção do aluno; se ele a faz, ele recebe uma bonificação em pontos. A seguir vemos, a título de exemplo, a atividade eletrônica proposta pela coordenação do curso de Cálculo I no segundo semestre do ano de 2006, na terceira lista de exercícios programados:

Atividade Eletrônica

Voce usará um Applet contendo joguinhos de quebra-cabeça sobre gráficos de derivadas. Ele se encontra no site

http://www.univie.ac.at/future.media/moe/galerie/diff1/diff1.html (em ingles)
ou
http://www.cete-sonora.gob.mx/AFDA/recursos/mat/moe/galerie/diff1/diff1.html (em espanhol)

São apresentados 3 quebra-cabeças: Derivative Puzzle 1, Derivative Puzzle 2 e Derivative Puzzle 3.

Escolha o primeiro. Aparecerão vários gráficos. Escolha "Exercise" onde estão as instruções. Bem, voce deverá deslizar com o mouse os gráficos que aparecem na direita para os corretos quadrados vazios que estão na esquerda. Cada um deverá ser colocado de forma que o gráfico abaixo de cada um é o gráfico da derivada da função acima. Ao todo são 9 quadros. Depois "click" em "Check" para saber seu resultado. Caso algum esteja errado, voce verá um comentário. Selecione "Reset" para tentar novamente (minha sugestão) ou "Solution" para saber a solução. Depois vá para os outros dois puzzles e faça o mesmo.

Voce poderá, no final, ir para o grande quebra - cabeças de derivadas ("big derivative puzzle"), da seção de testes interativos, e resolve-los.

Envie um e-mail para

calculoum@gmail.com

colocando AE 11 no campo *assunto* e comente brevemente o que voce achou desta atividade eletronica.

Não se esqueça de colocar o nome, o curso e o pólo!!

Figura 6 – Exemplo de Atividade Eletrônica

Fonte: Ep-11 de Cálculo I, 2007-2, CEDERJ

Alguns dias depois do Exercício Programado do aluno é disponibilizada a versão tutor, onde os alunos podem ver a resolução destes exercícios que foram propostos. Os tutores das disciplinas têm acesso a ela desde o momento em que a versão aluno é oferecida aos discentes. A idéia aqui é que o aluno utilize inicialmente o Exercício Programado sem resolução, resolva os exercícios e os confira diretamente com o tutor presencial ou através do site na versão tutor do Exercício Programado oferecido posteriormente. Porém nossa prática permite observar que nem sempre é isto que acontece. Normalmente o aluno aguarda que saia o Exercício Programado do tutor e o segue de modo imediato. Assim, ele não chega a fazer o exercício, ele o vê diretamente resolvido. Além disso, esta prática ainda o impede de tomar conhecimento da Atividade Eletrônica, uma vez que esta é oferecida no Exercício Programado do aluno e não na do tutor.

2.4.3 - Avaliação

Os alunos são avaliados de duas formas: por uma avaliação a distância, denominada AD e por uma avaliação presencial, chamada AP. Nas disciplinas da Matemática consistem em listas de exercícios, sendo os das ADs de nível mais elevado que as das APs. Cada aluno faz duas avaliações de cada tipo. De acordo com a página oficial do Consórcio CEDERJ, as avaliações presenciais devem seguir o mesmo rigor e seriedade das Universidades Consorciadas, tanto no que se refere à fiscalização quanto à elaboração, aplicação e correção das provas.

A nota do aluno na disciplina é gerada pela média entre as notas N1 e N2, que são computadas cada uma como a média ponderada entre a AD1 e AP1 (para N1) e AD2 e AP2 (para N2). A cada AD é atribuído peso 2 e a cada AP, peso 8. É considerado aprovado na disciplina o aluno que obtiver média igual ou superior a 6. Caso isto não aconteça, existe uma avaliação presencial suplementar, denominada AP3, como uma oportunidade extra para aquele aluno que porventura não obteve nota suficiente para aprovação nas avaliações anteriores ou que não pode comparecer a alguma delas.

Nas disciplinas de Pré-Cálculo e Cálculo I o aluno que fez as atividades eletrônicas recebe uma bonificação em pontos. Porém como normalmente eles buscam mais o exercício programado do tutor, acabam por não fazer as atividades eletrônicas e não fazendo jus a este bônus.

Na sequência sintetizamos o que foi apresentado até agora, comentando como a estrutura que foi aqui apresentada se relaciona com este trabalho.

2.5 - Síntese

Vimos neste capítulo que as políticas públicas em educação têm investido e incentivado a inserção de cursos de graduação a distância, principalmente na área de formação de professores da educação básica. Os baixos custos e a facilidade de acesso a pessoas que não têm a possibilidade de cursar a modalidade presencial, seja por estar a Universidade distante, seja por dificuldades de horário em virtude de trabalho, tem estimulado o crescimento da oferta de vagas na graduação a distância.

Há porém que se cuidar que estes cursos realmente formem profissionais aptos a exercer suas profissões. É vital para tanto que tenham uma efetiva e eficiente estrutura de funcionamento a distância, com material próprio elaborado para esse fim segundo as orientações dos estudiosos na área.

Esperamos com esta pesquisa verificar se as dificuldades relacionadas a aspectos gráficos da derivadas são acentuados pelo não uso ou uso indevido do material. Também gostaríamos de verificar se os fatos que observamos no Capítulo 1, na revisão da literatura, se fazem presentes neste nosso estudo. Desta forma esperamos contribuir na formação de um profissional mais completo e capaz de auxiliar efetivamente na formação matemática de seus alunos.

Para tanto, trabalhamos não somente nos aspectos cognitivos da derivada, mas também nos instrumentos utilizados pela Instituição para formar estes conceitos. Analisamos a maneira pela qual o curso é enfocado, bem como a utilização que os licenciandos fazem do material didático que lhes é disponibilizado

O próximo capítulo apresenta a formulação de nosso problema. Apresentamos alguns dados sobre aprovação e reprovação no curso de Cálculo I da UFF, UFRJ e CEDERJ e discorremos sobre a formulação do problema desta pesquisa.

CAPÍTULO 3 - FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

3.1 – Motivação

Um dos maiores desafios do ensino superior é o ensino de Cálculo, disciplina tão útil e de tão difícil transposição para os universitários de cursos como Matemática, Física, Informática, Engenharia e Economia, entre outros. Rezende (2003) afirma que, de 1996 a 2000, os índices de reprovação nos cursos de Cálculo na UFF se deram conforme o gráfico a seguir[1]:

[1] Todos os gráficos aqui apresentados relacionam como reprovados todos os alunos que não foram aprovados, ou seja, aqueles que abandonaram o curso e também os que não alcançaram a média mínima de aprovação.

Figura 7 – A reprovação em Cálculo I na UFF

Fonte: Rezende (2003)

Na UFRJ a situação não é muito diferente. Dados obtidos pelo Prof. Dr. Ivo Lopez em 2007 (em fase de elaboração) junto à secretaria da graduação do Instituto de Matemática mostram que, dentre os alunos que efetivamente cursam a disciplina de Cálculo 1 – daí já excluídos os desistentes ou os que obtiveram conceitos zero nas avaliações – cerca de 30% deles ficam realmente reprovados. No gráfico a seguir podemos ver a quantidade de alunos aprovados e reprovados nos últimos anos.

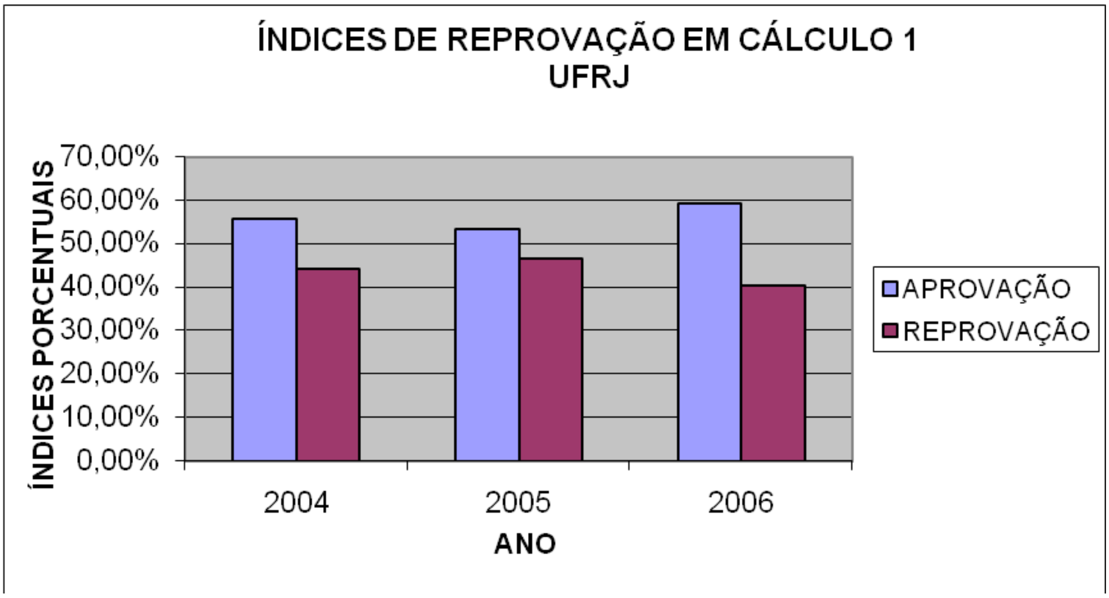


Figura 8 – A reprovação em Cálculo I na UFRJ

Fonte: Lopez (2007)

No CEDERJ, estes índices são ainda mais pungentes. Dados obtidos junto ao LANTE – Laboratório de Novas Tecnologias de Ensino – ligado ao Instituto de Matemática da UFF (responsável pelas disciplinas de Matemática do Consórcio CEDERJ) nos mostram claramente isto.

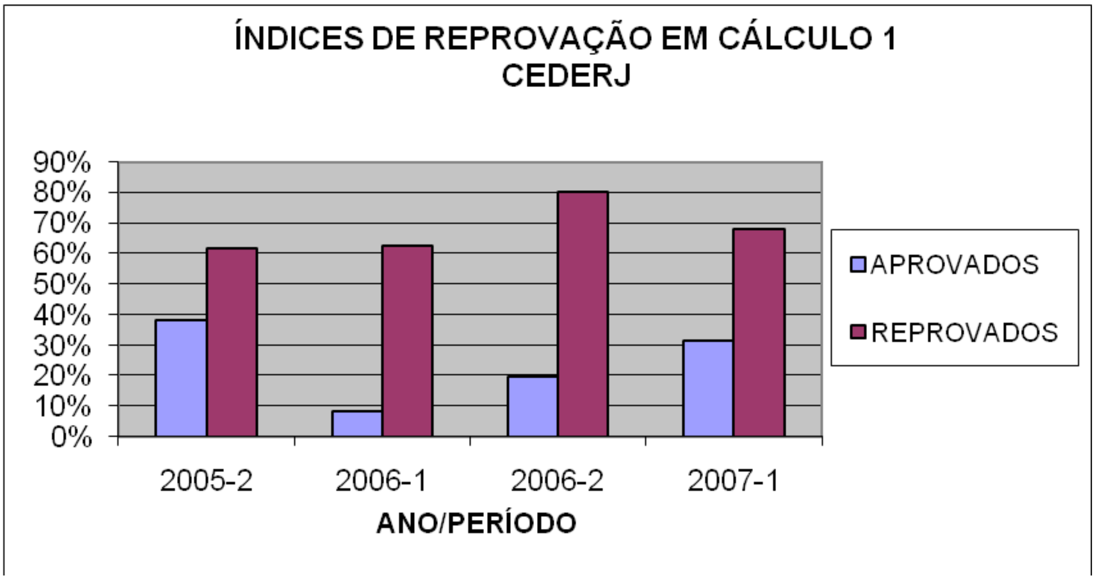


Figura 9 – A reprovação em Cálculo I no CEDERJ

Fonte: LANTE (2007)

Várias tentativas de contornar estas dificuldades são feitas pelas instituições, tais como: alongamento do curso de semestral para anual, o que permite uma abordagem menos acelerada e a inserção de conteúdos que embasam o estudo do cálculo; acréscimo de um curso introdutório ao curso de cálculo que o anteceda (comumente denominado pré-cálculo ou cálculo zero) ou ainda a formação de turmas especiais, presenciais ou semi-presenciais, com abordagem diferenciada para aqueles que já fizeram Cálculo 1 alguma vez sem alcançar sucesso.

Especificamente em relação aos gráficos, sejam de funções ou de suas derivadas, pode-se facilmente notar a partir dos estudos relatados no capítulo 1 que os resultados são ainda piores, pelo menos para aqueles alunos que têm um curso tradicional de cálculo. Acreditamos que o aluno não tem o hábito de utilizar os gráficos como um ponto de partida, ou seja, como uma maneira sintética de apresentar dados. Usualmente ele dá ao gráfico o tratamento de um objetivo a ser atingido, e não o caráter de um uso instrumental. Assim, tratando-se o Cálculo de uma forma de conhecimento matemático que utiliza principalmente estruturas simbólicas para representar suas idéias, tal dificuldade gera obstáculos de difícil transposição para o aluno. Da mesma forma, o aluno do CEDERJ demonstra o mesmo nível de dificuldade, talvez acentuado pelo fato de não haver um professor presente para dialogar com ele sobre estas idéias.

Durante a Educação Básica, a preferência por técnicas algébricas é notória. De nossa prática docente e convívio com colegas de profissão foi possível perceber que o professor, por razões que não vamos abordar neste trabalho, normalmente faz a opção por dar ao tema “funções” um tratamento essencialmente algébrico e procedimental. Tal ocorrência gera alunos que preferem trabalhar com funções de maneira algorítmica e que, em consequência disto, não desenvolvem uma imagem suficientemente rica. Para estes alunos, o estudo deste assunto limita-se a determinar pontos, calcular imagens ou fazer composições e inversões com leis de funções , preferencialmente as mais complicadas possíveis. O mais próximo que se chega de uma abordagem gráfica é associar a cada uma das funções estudadas no nível médio – afim, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica – o formato de seu gráfico de maneira que o aluno possa, apenas vendo a lei de definição da função – perceber qual é o formato de seu gráfico e vice-versa.

Desta forma o aluno chega ao Ensino Superior, especificamente aos cursos que exigem a disciplina Cálculo Diferencial e Integral e se depara com situações em que o pleno domínio do conceito e das imagens associadas à função tornam-se instrumental mínimo necessário para que se possa fazer o curso com eficiência e bom aproveitamento. Caso contrário, o recurso alternativo que utiliza é transformar de algum modo o que está sendo estudado em um tipo de receita, onde para cada questão há um determinado procedimento para que se chegue ao resultado correto. Desta forma muitos sobrevivem ao Cálculo, deixando de perceber os reais significados dos conceitos que são a ele apresentados e perdendo, em consequência disto, toda a riqueza e magnitude desta disciplina que é a porta de entrada ao universo do pensamento matemático avançado.

É exatamente isto que observamos ocorrer no CEDERJ, talvez magnificado por não haver a presença do professor. Nosso estudo mostra que nesta Instituição o aluno busca claramente padrões a serem seguidos, muitas vezes ignorando toda a teoria que embasa as atividades propostas. Esta é uma situação que requer muita atenção e cuidado por se tratarem de alunos que tornar-se-ão brevemente professores de matemática. Este tipo de concepção de funções impedirá que ele transmita algo mais que isso aos seus alunos, que muito provavelmente terão uma concepção de funções ainda mais restrita que a dele próprio. Cria-se assim um círculo vicioso que somente trará mais insucesso futuro não somente nas disciplinas do cálculo, mas na matemática de maneira geral.

Da observação destes fatos e da preocupação com a formação inicial dos professores de Matemática neste contexto surgiu o desejo de compreender de que maneira estes alunos compreendem o conceito de derivada estudado graficamente. O tema foi escolhido por exigir como pré-requisito a noção de função e de seus gráficos, conteúdo que normalmente não é enfocado de uma maneira mais abrangente no Ensino Médio. Nossa expectativa é que possamos colaborar de alguma forma com a melhoria na compreensão dos conceitos matemáticos pelos futuros professores de Matemática, e conseqüentemente com a sua atuação docente.

3.2 – Formulação Do Problema

Tomando como referência o que os teóricos mencionados no capítulo 1 comentam acerca da aprendizagem de conceitos em matemática avançada, podemos conceber a aprendizagem do conceito de derivada como a encapsulação de um conjunto de vários processos a ela relacionados e coordenados entre si. Entendemos que, num momento inicial, a determinação da reta tangente a uma curva num determinado ponto possa atuar como problema motivador do estudo de derivadas. A utilização da idéia geométrica de derivada pode justificar as razões do estudo da derivada quando leva-se o aprendiz a perceber que a reta tangente aproxima localmente a função no ponto de tangência. A partir daí, deve-se conceber a idéia de variação associada a derivada, no sentido de que a cada x do domínio da função primitiva – onde ela é derivável – está associada uma inclinação de reta tangente. Assim será possível entender a derivada também como uma função – a função derivada, que associa a idéia de função como variação à de derivada como inclinação da reta tangente. Ao entender a derivada como uma função, o aluno compreenderá que ela poderá ser dada por uma lei algébrica – que trará nela o processo de determinação algébrica da derivada por meio das regras de derivação – ou por um gráfico que a descreva sucintamente. A partir daí, será mais natural o entendimento da correlação entre a variação do sinal da derivada e crescimento da primitiva, num contexto gráfico ou algébrico.

Assim, podemos pensar como processos relacionados a derivadas:

- Determinação da reta tangente a uma curva dada num ponto, relacionando a inclinação desta reta com a derivada da função no ponto considerado, dados tanto num contexto algébrico quanto gráfico;
- Estudo da derivabilidade das funções usuais e das operações entre elas bem como a determinação algébrica das derivadas por meio da aplicação das regras de derivação usuais;
- Correlação entre o sinal da derivada de uma função e os seus intervalos de monotonicidade num contexto gráfico e algébrico.

A familiarização com esses processos consiste em atividades que os abordem em sentidos diretos e inversos. Por exemplo, no processo de estudar os intervalos de monotonicidade de uma função a partir da variação do sinal da derivada primeira, esboçar gráficos de funções a partir deste estudo e determinar o gráfico da derivada a partir do gráfico das funções. O aluno somente será capaz de alcançar uma concepção estrutural de derivadas quando estiver perfeitamente familiarizado com estes processos e todas as suas possibilidades.

Nossa experiência nas sessões de tutoria de Cálculo I no CEDERJ sugerem que os alunos desenvolvem uma compreensão insuficiente de derivadas. O aluno tem noção de como fazer, como calcular, mas não é capaz de dizer exatamente o que significa derivar uma função. Cremos que quando o aluno pensa sobre derivada, ele imagina um cálculo algébrico regido por determinadas regras por ele memorizadas. Parece que não existe a concepção de que aquela lei algébrica por ele determinada é também uma função, que tem um gráfico e que esse gráfico descreve sucintamente como se dá o crescimento da sua primitiva.

No intuito de confirmar as conjecturas acima mencionadas, neste trabalho estudaremos como se dá o entendimento gráfico das derivadas dos alunos do CEDERJ – pólo Angra dos Reis – no contexto da exploração e compreensão dos gráficos das funções reais. A partir da análise das respostas obtidas em atividade aplicada aos alunos de Cálculo 1 da Fundação CEDERJ, procuraremos entender e descrever as concepções dos alunos participantes sobre o tema em questão, bem como de que maneira eles estudam, analisando de que forma os seus hábitos de estudo podem ou não influenciar na formação destas concepções.

Acreditamos ser interessante inferir sobre a relação entre estes hábitos e a compreensão dos assuntos estudados pelo fato de se tratar de uma modalidade de estudo não convencional, da qual ainda não vimos relatos específicos. Desta forma, acreditamos que seremos capazes de sugerir estratégias de ensino que os auxiliem em suas dificuldades e, futuramente, desenvolver atividades que possam colaborar com uma melhor capacidade em operar graficamente não somente com derivadas mas também com funções.

O próximo capítulo trata da metodologia utilizada, descrevendo em detalhes tudo o que foi feito durante este estudo.

CAPÍTULO 4 - METODOLOGIA

Na expectativa de contribuir para a melhoria do ensino e aprendizagem do conceito de derivada, o objetivo deste trabalho é identificar que concepções os alunos têm sobre derivadas. Para que esse estudo pudesse ser feito, desenvolvemos uma atividade que foi aplicada aos alunos do curso de Cálculo I matriculados no pólo CEDERJ de Angra dos Reis. Escolhemos este entre os 25 pólos por duas razões: a relativa proximidade com minha residência facilita o acesso e o fato de já ter eu atuado como tutora neste pólo durante um ano e meio, o que me torna já conhecida pelos alunos, pelo tutor de Cálculo I e pela administração do pólo.

O pólo de Angra dos Reis se caracteriza por uma frequência bem alta de alunos às sessões de tutoria, o que não acontece em meu pólo atual – pólo Campo Grande, cidade do Rio de Janeiro.

A atividade foi aplicada durante uma sessão de tutoria de Cálculo I pelo tutor da disciplina no pólo a 20 alunos presentes na ocasião. O tutor foi orientado a não esclarecer dúvidas relativas à execução das atividades e a cada aluno foi esclarecido na própria atividade, em texto introdutório no qual eu me identificava e informava a que se destinaria tal teste, que seu desempenho não seria medido para fins de nota na disciplina. Os alunos puderam desenvolver a atividade por duas horas, tempo de duração da tutoria.

Com o objetivo de complementar este estudo, foi sugerido pela banca durante o exame de qualificação que também analisássemos as provas da disciplina de Cálculo I destes mesmos alunos feitas durante o segundo semestre do ano de 2007, mesmo período da aplicação da atividade. Estas provas foram gentilmente disponibilizadas pelo LANTE-UFF – Laboratório de Novas Tecnologias da Universidade Federal Fluminense – e delas tiramos cópias para que pudéssemos verificá-las.

Realizamos ainda dois momentos de entrevistas. A primeira foi feita com 14 dos 20 alunos no mês de março de 2008 com o objetivo de esclarecer alguns pontos pertinentes aos seus hábitos de estudo. Acrescentamos nesta entrevista duas perguntas sobre suas concepções sobre gráfico e derivada de uma função. A segunda ocorreu no início do mês de maio de 2008 e contou com a participação de três alunos entrevistados individualmente por cerca de 40 minutos cada, onde procuramos esclarecer alguns pontos acerca da resolução das atividades propostas por nós e observadas nas Avaliações Presenciais.

As próximas seções detalham como foram a atividade, as provas e as entrevistas.

4.1 – A Atividade

A atividade foi aplicada no dia 16 de novembro de 2007 e era composta por uma lista com seis questões envolvendo gráficos e derivadas, seguida por uma pequena entrevista que pretendia pesquisar sobre os hábitos de estudo dos participantes. Das seis questões propostas, a primeira e a quarta foram descartadas por conterem imprecisões em sua formulação. A seguir colocamos as atividades que efetivamente foram analisadas posteriormente, comentando-as brevemente. Todas elas foram baseadas em atividades propostas por Malta, Pesco e Lopes (2002).

2- Considere uma função diferenciável f:IR→IR tal que:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

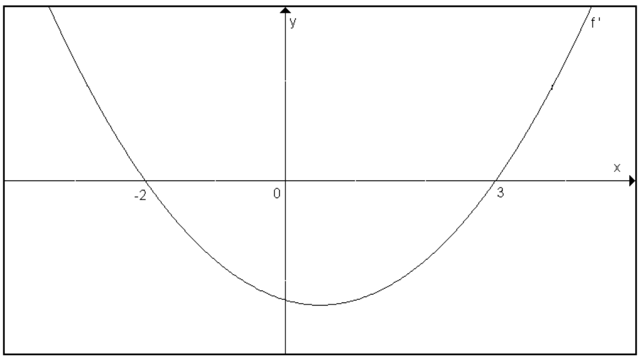
d) f(1) = 1

e) $f'(x) > 0$ *se e somente se* $x \in (0,1)$
f) $f'(x) = 0$ *se e somente se x = 0 ou x = 1*

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = y$ *.*

Esta questão tinha por objetivo verificar a capacidade do aluno em construir um gráfico a partir de sua descrição simbólica, interpretando os dados apresentados. O diferencial desta questão em relação àquelas que a ele são normalmente apresentadas é que nenhuma lei algébrica foi apresentada, o que não lhe permite a utilização de tabela ou similares bem como evita a ocorrência de erros operacionais algébricos. Esta questão está identificada nos capítulos seguintes como T.2.

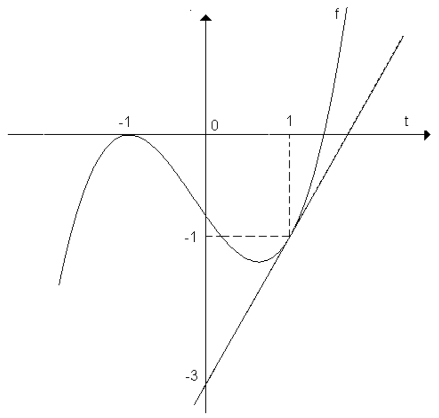
3- Seja f um polinômio de grau 3 tal que o gráfico da derivada de f é dado na figura a seguir:



a) *Dado que f(-2) = -1 e f(3) = -3, faça um esboço do gráfico de* $f(x) = y$ *.*
b) *Quantas soluções tem a equação f(x) = 0?*

Esta questão tinha o objetivo de avaliar: 1º) de que maneira o aluno interpreta o gráfico da derivada de uma função, entendendo-o como uma forma simbólica de apresentar a variação do crescimento de sua primitiva; 2º) se o aluno entende os zeros da derivada como máximos e mínimos da primitiva; 3º) em se tratando claramente de uma parábola, verificar se os alunos sentir-se-iam tentados a determinar sua lei algébrica para tentar operar com ela de alguma maneira e 4º) se o aluno concebe graficamente a solução da equação f(x) = 0. Esta questão aparece identificada nos próximos capítulos como T.3.

5- Seja $g(t) = f(t^2 + t - 5)$ onde f é a função cujo gráfico está dado na figura a seguir:



a) Ache f '(1)
b) Ache g'(2)
c) Ache a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto t = 2.

Esta questão abordava o conceito de composição de funções, cuja derivada deve ser feita por meio da regra da cadeia. Nosso objetivo com esta questão era verificar: 1º) se o aluno percebe a derivada de f em x = 1 como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1; 2º) se o aluno é capaz de identificar a necessidade de utilização da regra da cadeia para determinar a derivada de g em x = 2 e 3º) se o aluno identifica o valor da derivada como a inclinação da reta tangente. Enquanto no item (a) o aluno encontra a resposta numérica a partir do gráfico, em (c) ele deve compreender que o número encontrado em (b) é a inclinação da reta tangente pedida. A questão está identificada como T.5 nos próximos capítulos.

6- a)Use as regras de derivação para calcular a derivada da função $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$.
b) Determine a derivada de f em x = 4.

Esta questão tinha abordagem puramente algébrica e tem como objetivo verificar: 1º) se o aluno entende a regra da cadeia e a aplica corretamente, num contexto algébrico e 2º) se ele entende que o resultado encontrado por ele em (a) é uma função, determinando o que se pede. Ela estará identificada como T.6 nas seções subsequentes.

A atividade continha ainda uma folha de perguntas de múltipla escolha relacionadas a hábitos de estudo do aluno, conforme podemos ver a seguir.

QUESTIONÁRIO

1- Esta é a primeira vez que você estuda derivadas?
( ) SIM ( ) NÃO

Caso negativo, não é a primeira vez porque:
( ) já comecei a disciplina e tranquei.
( ) já fiz a disciplina e fiquei reprovado no CEDERJ.
( ) já fiz a disciplina em outra Instituição. (Qual? __________)
( ) Outros

2- Quando estuda, você:
( ) segue estritamente o material didático da disciplina (apostila, EPs)
( ) segue o material didático mas consulta outras fontes, como livros ou materiais on-line de outros sites externos ao CEDERJ
( ) segue o material didático mas se preocupa mais em fazer os Exercícios Programados corretamente (EPs)
( ) Outros. (Qual? ____)

3- Quanto aos EPs, você:
( ) resolve o EP versão aluno assim que ele é colocado na plataforma e confere depois com a versão tutor.
( ) estuda diretamente o EP versão tutor por dificuldades de tempo.
( ) não costuma resolver nem estudar o EP por problemas de tempo.

4- Você costuma acompanhar as aulas na web disponíveis na plataforma?
( ) Sim, e acho que elas ajudam a entender os conteúdos.
( ) Sim, mas não acho que acrescentam muito.
( ) Só recorro a elas quando há algo particularmente difícil.
( ) Nunca usei as aulas na web.

5- Você costuma fazer uso das ferramentas de estudo a distância (fórum, troca de e-mail entre colegas discutindo as questões ou com o tutor a distância) ?
( ) Sim, e considero importantes estes recursos.
( ) Ocasionalmente, quando há algo particularmente difícil.
( ) Não, nunca utilizo estes meios.

6- Você costuma fazer as Atividades Eletrônicas propostas pela Coordenação de Cálculo 1?
( ) Sim, faço todas elas e envio por e-mail para a coordenação.
( ) Sim, mas não costumo fazer todas elas por problemas de tempo ou de acessibilidade.
( ) Não, não costumo fazer as Atividades Eletrônicas.
( ) Outros. (Qual? ____)

4- Você é aluno do curso de:
( ) Matemática
( ) Física
( ) Química

Estas perguntas pretendiam delinear o perfil dos alunos participantes em relação ao seu contato com a disciplina e a seus hábitos de estudo.

4.2 – As Provas – Ap1 E Ap2 De Cálculo 1 Do Segundo Semestre De 2007 Do Cederj

As provas dos 20 alunos participantes deste estudo foram usadas por sugestão da banca do exame de qualificação deste trabalho como fonte complementar de análise de atividades produzidas pelos alunos. Foram utilizadas algumas questões da Avaliação Presencial 1 e da Avaliação Presencial 2 do segundo semestre do ano de 2007 – respectivamente AP1 e AP2 – que serão colocadas a seguir para ciência do leitor.

Questões utilizadas da Avaliação Presencial 1 – Cálculo 1 – 2007/2

3^a **Questão** (2.0 pontos) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x \cos x^2$

Esta questão foi selecionada porque tinha um enfoque prioritariamente algébrico, o que nos permitiu avaliar a familiaridade e o conforto dos alunos ao trabalhar com este tipo de situação e será identificada nas próximas seções como AP1.3.

5^a **Questão** (2.0 pontos) Encontre os pontos onde a tangente é horizontal na função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Esta questão tinha foco em uma situação gráfica, apesar de não fornecer nenhum gráfico e não pedir diretamente esboço de gráfico. O aluno para resolvê-la com sucesso deve ter a noção precisa de que o coeficiente angular da reta tangente é o valor da derivada da função no ponto de tangência, que é a raiz do entendimento gráfico local da derivada de uma função. Ela aparece identificada nas próximas páginas como AP1.5.

Questão utilizada da Avaliação Presencial 2 – Cálculo 1 – 2007/2

1ª Questão (4,0 pontos) Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{8-x^2}{(x-2)^2}$ e dê explicitamente o que se pede, considerando que $f'(x) = 4\,\dfrac{x-4}{(x-2)^3}$ e $f''(x) = -8\,\dfrac{x-5}{(x-2)^4}$:

- domínio D de f;
- intervalos de D em que f é contínua;
- equações das assíntotas verticais e horizontais do gráfico;
- pontos de D onde f é crescente e onde f é decrescente;
- extremos relativos de f e os respectivos pontos de D onde ocorrem;
- intervalos onde a concavidade do gráfico é para cima, onde é para baixo e os seus pontos de inflexão;
- imagem de f.

Escolhemos esta questão por se tratar de uma questão clássica do curso de Cálculo I. É bem rica por abordar de uma só vez conceitos como crescimento e concavidade da função a partir do estudo das derivadas, cujas leis algébricas foram dadas. Ao aluno compete apenas analisar como variam os sinais das derivadas primeira e segunda e esboçar um gráfico que tenha estas características. Nossa observação da resolução desta questão levará em conta principalmente estes itens, por serem os que nos interessam diretamente. Procuraremos avaliar se o gráfico esboçado pelo aluno está correto em relação a estes pontos. Somente esta questão foi escolhida desta prova pela sua relação com os objetivos desta pesquisa. Será identificada nos próximos capítulos por AP2.1.

4.3 – As Entrevistas

A primeira entrevista foi realizada com 14 dos 20 alunos inicialmente participantes da pesquisa. Não foi previamente marcada com os alunos – as dificuldades em conseguir que abdiquem de alguns momentos de seu tempo de estudo são bem grandes. Fui ao pólo em um dia que sabia ser de tutoria, momento em que certamente encontraria os alunos. Anteriormente já havia tentado combinar com eles uma data que não interferisse diretamente na tutoria, mas não obtive sucesso, tendo ido por duas vezes ao pólo sem ter a presença de sequer um dos alunos para um encontro e entrevista mais demorados e detalhados.

Em virtude destas dificuldades, nossa entrevista foi breve, tendo sido semi-estruturada com perguntas que procuravam esclarecer pontos pertinentes aos seus hábitos de estudo, seguindo o roteiro a seguir:

- *Faz uso do material didático?*
- *Resolve as AEs e envia para o coordenador?*
- *Estuda sozinho ou em grupo?*
- *Consegue acompanhar o cronograma da disciplina?*
- *Costuma freqüentar as sessões de tutoria?*
- *Quais as suas concepções sobre gráfico e derivada de uma função real?*

O segundo momento de entrevistas ocorreu no início do mês de maio de 2008. Participaram dele 3 alunos que se mostraram dispostos a contribuir com a execução deste trabalho de pesquisa. Nele procuramos esclarecer pontos importantes acerca da compreensão dos alunos acerca do nosso tema de pesquisa.

Os próximos capítulos apresentam ao leitor, respectivamente, os resultados obtidos nas atividades analisadas e nos dois momentos de entrevistas.

CAPÍTULO 5 - RESULTADOS

5.1 – As Tarefas Analisadas

Os resultados da atividade de maneira geral confirmaram o que já havia sido observado durante meus dois anos e meio de experiência na tutoria de Cálculo I do CEDERJ.

Tomando como referência a análise feita por Asiala et al (1997, p. 421), utilizamos um código numérico que classifica como é a compreensão do aluno sobre cada tópico, a saber:

0- O aluno não fez o item.
1- O aluno mostra pouca ou nenhuma compreensão sobre o item.
2- O aluno parece ter as idéias principais mas não demonstra domínio ou cometeu erros.
3- O aluno demonstra compreensão completa.

A cada questão apresentaremos um conjunto de três códigos referentes ao que foi observado na questão. Esses códigos serão formados pela indicação da questão seguida das letras A, B ou C, que relacionam que habilidade está sendo verificada no item. Apresentaremos ainda uma tabela que resume o desempenho do conjunto de alunos na questão como “bom”, “regular” ou “fraco”, formulada segundo o critério a seguir exibido:

- Bom – Alunos que obtiveram pelo menos dois indicadores “3” – bom desempenho.
- Regular – Alunos que obtiveram um indicador “3” – desempenho regular.
- Fraco – Alunos que não obtiveram nenhum indicador “3” – fraco desempenho.

Cada aluno foi identificado por um nome fictício para que seja mantida em sigilo a sua identidade.

Iniciaremos a apresentação dos resultados com as tarefas T2 e AP2.1. Optamos por apresentar as questões e suas observações agrupadas por afinidades de objetivos.

QUESTÃO T.2

2- Considere uma função diferenciável f:IR→IR tal que:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

d) f(1) = 1

e) $f'(x) > 0$ *se e somente se* $x \in (0,1)$

f) $f'(x) = 0$ *se e somente se x = 0 ou x = 1*

Faça um esboço do gráfico de $f(x) = y$ *.*

Observações:

T.2A – O aluno compreende que f é crescente somente em x $\in$ (0,1) e que há pontos críticos candidatos a extremos em x = 0 e x = 1.

T.2B – O aluno compreende que o ponto (1,1) está no gráfico de f.

T.2C – O aluno esboça o gráfico da função.

Os resultados estão descritos na tabela a seguir:

QUESTÃO T.2

	Alberto	Bruno	Carlos	Diego	Eduardo	Felipe	Geraldo	Henrique	iago	Jorge	Leonardo	Marcos	Nivaldo	Odilon	Paulo	Quelber	Ricardo	Suellen	Tiago	Vinícius
A	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3	3	0	2	1	0
B	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	3	3	0	3	2	0
C	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	3	3	0	2	1	0

Tabela 2

Marcos recebeu código 2 em T2C por não ter percebido que a função descrita tem como assíntota o eixo dos x quando $x \to +\infty$, ficando o seu gráfico parcialmente correto em relação aos itens anteriores. Vemos a seguir o gráfico do aluno:

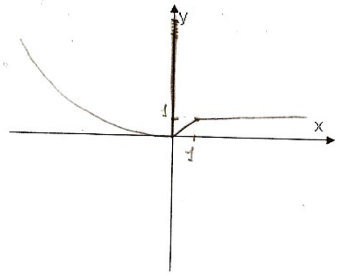


Figura 10: T2 do Marcos

Suellen chega a marcar o ponto (1,1) no gráfico, o que mostra que boa compreensão de T2B, mas em relação ao crescimento, somente acerta para valores menores que zero. A figura a seguir é o gráfico apresentado pelo aluno para o item.

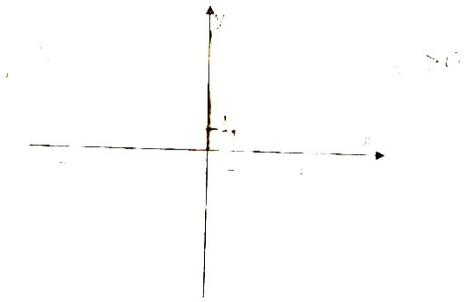


Figura 11 – T2 do Suellen

Atribuímos valor 2 à observação T2B do Tiago por ter ele marcado o ponto (1,1) em seu gráfico porém ele somente foi capaz de fazer, conforme podemos ver na figura a seguir.

Figura 12 – T2 do Tiago

Vemos a seguir a tabela do Desempenho Geral na questão.

Desempenho Geral na Questão T.2

Bom	Regular	Fraco

4	1	15

Tabela 3

Apenas 6 alunos tentaram esboçar o gráfico da função, sendo que destes somente 3 tiveram sucesso. Mais ainda, o fato de que 14 alunos se abstiveram em esboçar o gráfico sugere que o que os impede de fazê-lo não são somente suas dificuldades de cálculo e nem suas análises e sim a maneira como ele concebe uma função. Sua concepção em relação ao gráfico de uma função limita-se à ação de plotar pontos. Neste caso, como o gráfico não pode ser determinado a partir de seus pontos, o aluno se vê em uma situação com a qual não se sente a vontade.

QUESTÃO AP2.1

1^a **Questão** (4,0 pontos) Esboce o gráfico da função $f(x) = \dfrac{8-x^2}{(x-2)^2}$ e dê explicitamente o que se pede, considerando que $f'(x) = 4\dfrac{x-4}{(x-2)^3}$ e $f''(x) = -8\dfrac{x-5}{(x-2)^4}$:

- domínio D de f;
- intervalos de D em que f é contínua;
- equações das assíntotas verticais e horizontais do gráfico;
- pontos de D onde f é crescente e onde f é decrescente;
- extremos relativos de f e os respectivos pontos de D onde ocorrem;
- intervalos onde a concavidade do gráfico é para cima, onde é para baixo e os seus pontos de inflexão;
- imagem de f.

Observações:

AP2.1A – O aluno correlaciona o sinal da 1ª. derivada com o crescimento da função.

AP2.1B – O aluno correlaciona as raízes da 1ª derivada com os possíveis extremos relativos de f.

AP2.1C – O aluno esboça o gráfico de uma função que tenha as características descritas no estudo da variação do sinal da primeira derivada.

O quadro a seguir mostra os resultados.

QUESTÃO AP2.1

	Alberto	Bruno	Carlos	Diego	Eduardo	Felipe	Geraldo	Henrique	iago	Jorge	Leonardo	Marcos	Nivaldo	Odilon	Paulo	Quelber	Ricardo	Suellen	Tiago	Vinicius
A	1	3	2	2	0	3	2	1	2	2	1	1	0	3	0	3	1	0	3	0
B	0	1	1	2	2	0	3	0	1	0	0	1	0	2	0	2	1	0	2	0
C	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	3	1	0	0	0	0

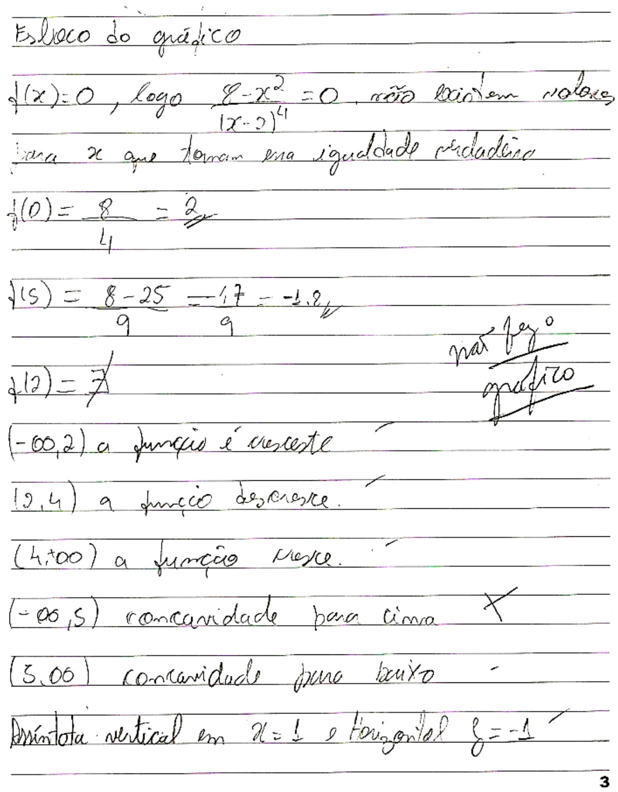
Tabela 4

Desempenho Geral na Questão AP2.1

Bom	Regular	Fraco
0	7	13

Tabela 5

Podemos fazer aqui algumas observações interessantes sobre a resolução dos alunos. Inicialmente, chama a atenção o fato de que 14 alunos sequer tentaram esboçar o gráfico da função, sendo que dentre estes, cinco mostram ter conhecimento da relação existente entre a primeira derivada, o estudo do crescimento e os máximos e mínimos da função. Houve ainda um fato interessante de um aluno que considerou como esboço do gráfico o resumo de tudo o que tinha calculado na questão, inclusive escrevendo no topo da página "esboço do gráfico", conforme podemos ver a seguir.


Esboço do gráfico

$f(x)=0$, logo $\frac{8-x^2}{(x-2)^4}=0$, não existem valores para x que tornam esa igualdade verdadeira

$f(0)=\frac{8}{4}=2$

$f(5)=\frac{8-25}{9}=\frac{-17}{9}=-1,8$

$f(2)=\cancel{7}$

não fez o gráfico

$(-\infty,2)$ a função é crescente

$(2,4)$ a função decresce.

$(4,+\infty)$ a função cresce.

$(-\infty,5)$ concavidade para cima

$(5,\infty)$ concavidade para baixo

Assíntota vertical em $x=1$ e horizontal $y=-1$

3

Figura 13 – Esboço do Gráfico de AP2-1 do Bruno

Observamos ainda que somente Paulo esboçou o gráfico de maneira correta, o que foi muito surpreendente porque ele não fez nenhum cálculo.

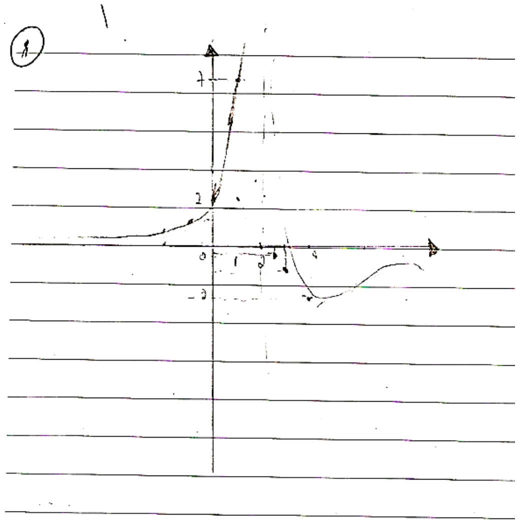


Figura 14 – AP2-1 – Esboço do Gráfico – Paulo

Dos outros cinco que tentaram esboçar o gráfico, nenhum acertou, nem em relação ao estudo do crescimento. Odilon acertou algebricamente o estudo do crescimento mas ao esboçar o gráfico, ele não representou o que havia encontrado neste estudo. A seguir seguem os gráficos que alguns alunos apresentaram.

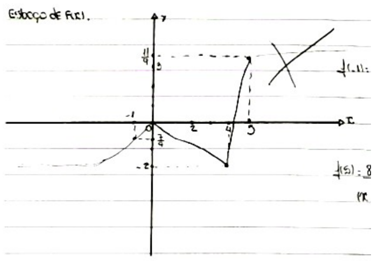


Figura 15 – Esboço do Gráfico do Odilon em AP2-1

Figura 16 – Esboço do gráfico do Carlos em AP2-1

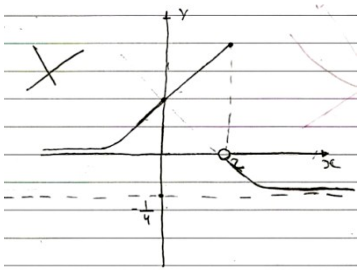


Figura 17 – Esboço do gráfico do Iago em AP2-1

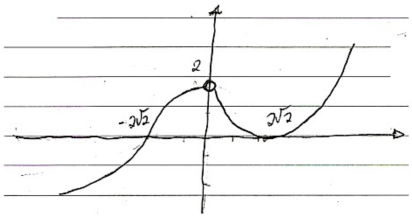
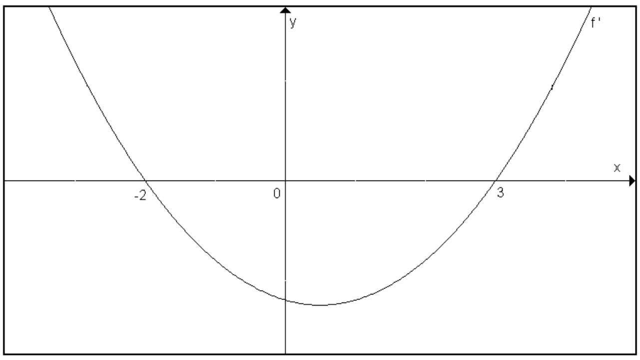


Figura 18 – Esboço do gráfico do Marcos em AP2-1

Notamos que nestas duas questões (T2 e AP2-1) poucos alunos tentaram esboçar o gráfico pedido. Destes, somente o Paulo acertou nas duas. Curiosamente, foi justamente este aluno que esboçou o gráfico em AP2.1 sem efetuar cálculo algum, conforme comentado e mostrado.

QUESTÃO T.3

3- Seja f um polinômio de grau 3 tal que o gráfico da derivada de f é dado na figura a seguir:



a) *Dado que f(-2) = -1 e f(3) = -3, faça um esboço do gráfico de* $f(x) = y$.
b) *Quantas soluções tem a equação f(x) = 0?*

Observações:

T.3A – O aluno utiliza o gráfico dado para estudar a variação do crescimento de f, percebendo os seus pontos extremos.

T.3B – O aluno esboça o gráfico de uma função que pode responder ao item (a).

T.3C – O aluno identifica quantas são as soluções da equação f(x) = 0 graficamente.

A tabela a seguir mostra os resultados:

QUESTÃO T.3

	Alberto	Bruno	Carlos	Diego	Eduardo	Felipe	Geraldo	Henrique	iago	Jorge	Leonardo	Marcos	Nivaldo	Odilon	Paulo	Quelber	Ricardo	Suellen	Tiago	Vinícius
A	1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
B	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
C	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0

Tabela 6

Desempenho Geral na Questão T.3

Bom	Regular	Fraco
0	0	20

Tabela 7

Vários fatos merecem destaque aqui. Todos os alunos estão no grupo de fraco desempenho nesta questão. Isto sugere que de fato não ocorre a identificação de derivada com uma função ou que não sabem utilizar os dados que o gráfico da derivada fornece.

Dentre os 20 alunos participantes, 6 tentaram resolver algebricamente a questão, determinando a lei algébrica da parábola (Alberto, Eduardo, Geraldo, Iago, Quelber e Suellen). Nenhum deles porém demonstra ter feito efetivo uso do que calcularam.

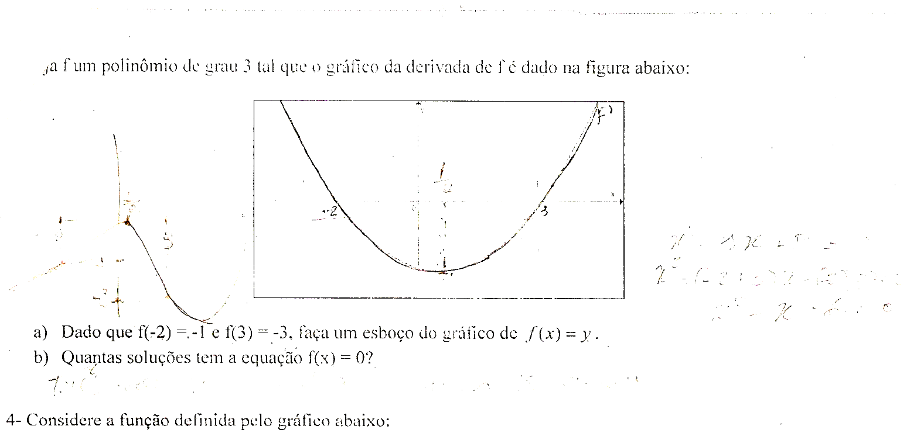


Figura 19 – T3 do Suellen

Alberto, Eduardo, Geraldo, Iago e Quelber ainda foram além, tentando determinar a primitiva de alguma forma, mas também não a utilizaram de maneira evidente para esboçar o gráfico pedido. Vemos a seguir alguns exemplos disso.

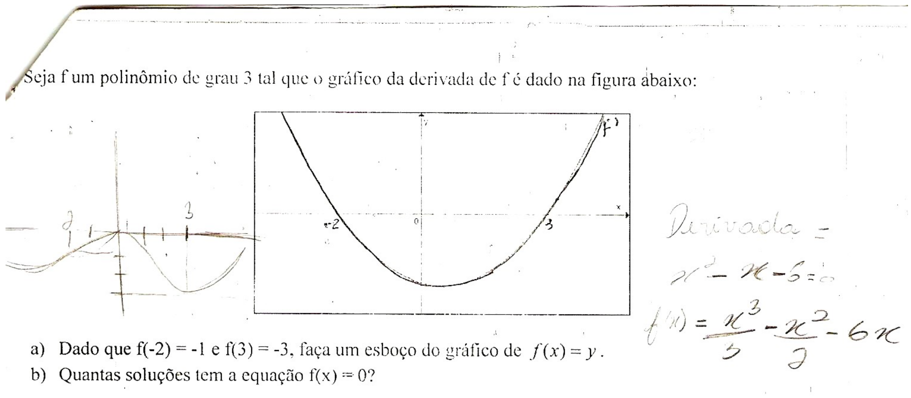


Figura 20 – T3 do Alberto

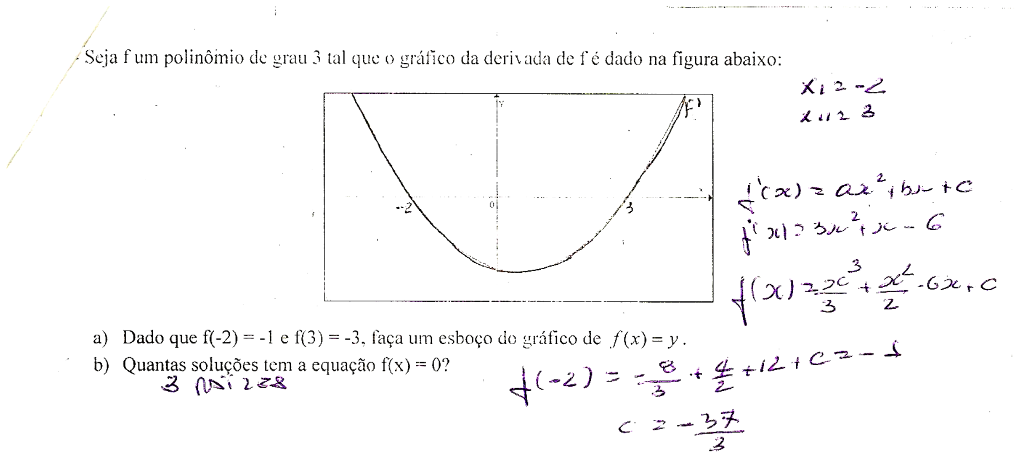


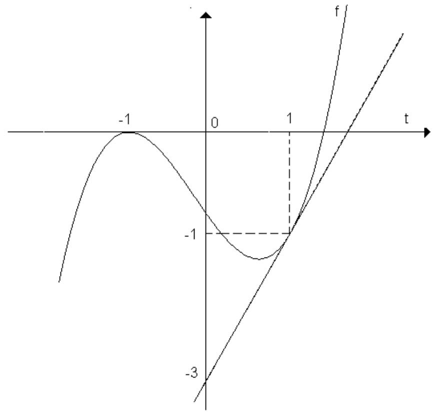
Figura 21 – T3 do Geraldo

Além disso, tivemos a total abstenção de 12 alunos que sequer tentaram resolver a questão. Dentre os que esboçaram algum gráfico (Alberto, Quelber e Suellen), nenhum relacionou a quantidade de vezes que a sua curva interceptava o eixo x com o número de raízes da equação f(x) = 0. Os poucos alunos que responderam ao item (b) de T3 o fizeram utilizando a informação de que tratava-se de uma função de grau 3, afirmando que são três raízes.

Os fatos acima citados sugerem que o aluno não concebe a derivada como uma função, em particular quando esta é dada por um gráfico. Unem-se aí as dificuldades em analisar gráficos com aquelas diretamente relacionadas a derivadas. Todos os que tentaram resolver a questão estiveram presos aos procedimentos algébricos, procurando reduzir o problema a uma equação que pudesse traduzir o gráfico. Percebe-se uma dependência deste tipo de linguagem, sem a qual o aluno sente-se sem referencial.

QUESTÃO T.5

5- Seja $g(t) = f(t^2 + t - 5)$ *onde f é a função cujo gráfico está dado na figura a seguir:*



a) *Ache f ’(1)*
b) *Ache g’(2)*
c) *Ache a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto t = 2.*

Observações:

T.5A – O aluno relaciona a inclinação da reta tangente ao gráfico de f com o valor da derivada de f em t = 1.

T.5B – O aluno deriva g para encontrar g’(2).

T.5C – O aluno associa g’(2) com a inclinação da reta tangente ao gráfico de g no ponto t = 2.

O quadro a seguir mostra os resultados.

Questão T.5

	Alberto	Bruno	Carlos	Diego	Eduardo	Felipe	Geraldo	Henrique	iago	Jorge	Leonardo	Marcos	Nivaldo	Odilon	Paulo	Quelber	Ricardo	Suellen	Tiago	Vinícius
A	0	0	1	1	0	1	3	1	2	0	1	2	1	0	2	2	1	2	2	0
B	0	0	2	2	0	2	3	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	0
C	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0

Tabela 8

O desempenho dos alunos é descrito na tabela a seguir:

Desempenho Geral na Questão T.5

Bom	Regular	Fraco
1	0	19

Tabela 9

Merece destaque o fato de que somente um aluno teve bom desempenho nesta questão. Sete deles foram capazes de associar a derivada de f em x = 1 com a inclinação da reta tangente ao gráfico de f neste ponto, sendo que destes apenas

1 teve pleno êxito. Além disto, nenhum aluno foi capaz de resolver o item (c) desta questão, sendo que três deles chegaram a escrever a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, mas não passaram disso. Tal fato sugere que o aluno não percebe que g'(2) é o coeficiente angular da reta pedida.

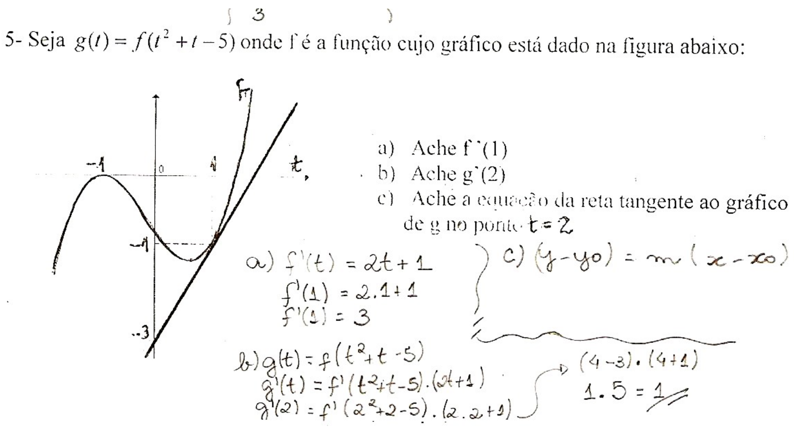


Figura 22 – T5 do Diego

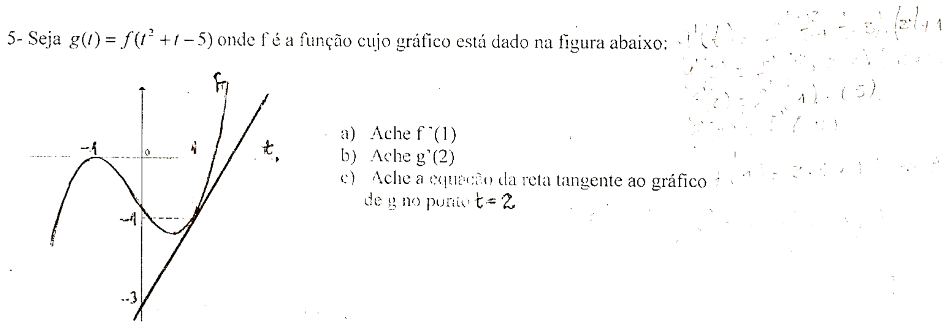


Figura 23 – T5 do Ricardo

Catorze alunos perceberam a necessidade de utilizar a regra da cadeia no item (b). Existe de fato maior familiaridade com o algebrismo que com os seus significados gráficos.

QUESTÃO AP1.5

5^a Questão (2.0 pontos) Encontre os pontos onde a tangente é horizontal na função $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

Observações:

AP1.5A – O aluno percebe que o coeficiente angular da reta tangente é nulo.

AP1.5B – O aluno correlaciona o coeficiente angular da reta com a derivada da função f.

AP1.5C – O aluno compreende que deve fornecer abscissa e ordenada para responder à questão.

QUESTÃO AP1.5

	Alberto	Bruno	Carlos	Diego	Eduardo	Felipe	Geraldo	Henrique	iago	Jorge	Leonardo	Marcos	Nivaldo	Odilon	Paulo	Quelber	Ricardo	Suellen	Tiago	Vinícius
A	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2
B	1	1	2	2	1	1	3	1	2	1	1	1	1	1	2	3	1	1	1	3
C	1	1	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	3	1	1	1	2

Tabela 10

Desempenho Geral naQuestão AP1.5

Bom	Regular	Fraco
2	1	17

Tabela 11

Existem algumas observações interessantes sobre a resolução dos alunos. Dos 20 alunos que fizeram a questão 5 da AP1, 10 confundiram os conceitos de assíntota e tangente, estudando o domínio da função e os limites laterais nos pontos em que o domínio não está definido e os limites no infinito, conforme podemos ver a seguir.

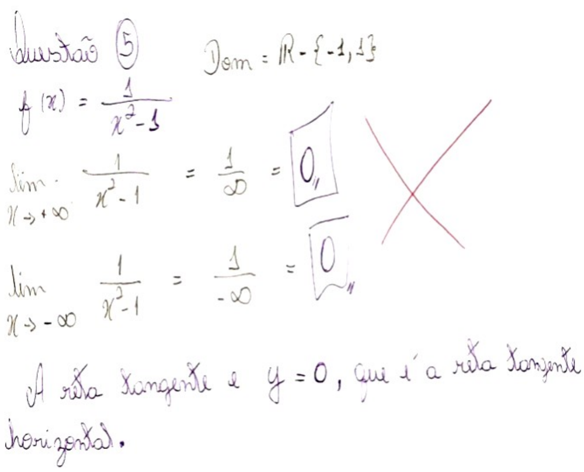


Figura 24 – AP1-5 do Alberto

Houve ainda um aluno que tentou resolver esta mesma questão numericamente (Henrique), ou seja, fez uma tabela e atribuiu valores a x para esboçar o gráfico da função.

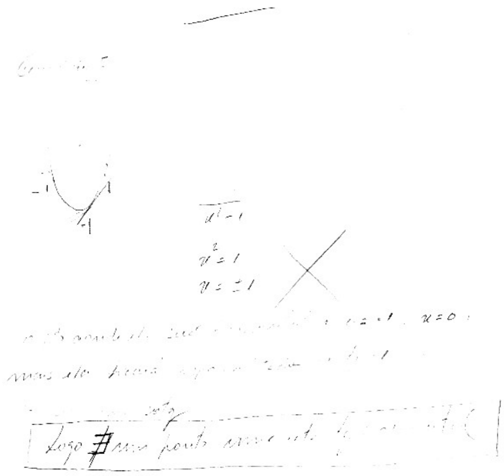


Figura 25 – AP1-5 do Henrique

As questões apresentadas a seguir têm caráter algébrico, onde a resolução independe de qualquer tipo de interpretação gráfica. Por essa razão elas serão apresentadas conjuntamente.

QUESTÃO T.6

6- a)Use as regras de derivação para calcular a derivada da função $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$.

b) Determine a derivada de f em x = 4.

Observações:

T.6A – O aluno utiliza as regras de derivação para derivar a função dada.

T.6B – O aluno reconhece f’ como uma função, sendo capaz de determinar f’(4).

Os resultados são exibidos na tabela a seguir.

Questão T.6

	Alberto	Bruno	Carlos	Diego	Eduardo	Felipe	Geraldo	Henrique	iago	Jorge	Leonardo	Marcos	Nivaldo	Odilon	Paulo	Quelber	Ricardo	Suellen	Tiago	Vinícius
A	2	3	1	2	3	2	3	2	2	0	3	1	3	3	3	2	3	2	2	0
B	0	0	0	0	3	2	3	2	0	0	0	0	3	3	2	2	2	0	0	0

Tabela 12

Desempenho Geral na Questão T.6

Bom	Regular	Fraco
4	7	9

Tabela 13

Observação: Como nesta questão há apenas duas observações, classificamos como bons aqueles alunos que alcançaram dois índices “3”; como regulares aqueles que tiveram um “3” ou dois “2” e os demais foram considerados fracos.

É possível observar nesta questão que 16 alunos identificam bem a necessidade da utilização da regra da cadeia para derivar a função dada. Porém uma dificuldade surge na percepção de quais são as funções que estão sendo compostas e em que ordem. Fato interessante também é que 11 alunos não responderam ao item (b), onde pedíamos $f'(4)$. Pode-se perceber aí que a situação não usual não os deixa confiantes em tentar responder ao item. Apenas 4 alunos efetuaram corretamente os cálculos. Dos outros 5 que tentaram resolver, dois erraram em contas, tendo determinado corretamente a lei algébrica de f'.

Questão AP1.3

3^a **Questão** (2.0 pontos) Calcule as derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x \cos x^2$

Observações:

AP1.3A – O aluno identifica as regras de derivação que devem ser utilizadas.

Os resultados foram:

Questão AP1.3

	Alberto	Bruno	Carlos	Diego	Eduardo	Felipe	Geraldo	Henrique	iago	Jorge	Leonardo	Marcos	Nivaldo	Odilon	Paulo	Quelber	Ricardo	Suellen	Tiago	Vinícius
A	2	2	2	2	3	2	3	2	1	3	2	0	1	2	1	1	2	1	2	1

Tabela 14

Desempenho Geral na Questão AP1.3

Bom	Regular	Fraco
3	10	7

Tabela 15

Observação: Os alunos foram considerados como bom desempenho quando obtiveram índice “3” e regular para índice “2”, correspondendo “0” e “1” ao fraco desempenho. Classificamos como “2” o aluno que percebeu que deveria utilizar as regras do produto e da cadeia, mas que cometeu algum erro em alguma destas etapas. O índice “1” significa que o aluno não notou que deveria usar uma (ou ambas) destas regras.

De maneira geral observa-se que os alunos sentem mais conforto em responder a esta questão. Isto fica notório quando comparamos a quantidade de alunos que tentaram responder T6, onde apenas um aluno não o fez.

Reunimos os quadros de desempenho geral para podermos compará-los com mais facilidade:

	BOM	REGULAR	FRACO
T2	4 (20%)	1 (5%)	15 (75%)
AP2.1	0	7 (35%)	13 (65%)
T3	0	0	20 (100%)
T5	2 (10%)	0	18 (90%)
AP1.5	2 (10%)	1 (5%)	17 (85%)
T6	4 (20%)	7 (35%)	9 (45%)
AP1.3	3 (15%)	10 (50%)	7 (35%)

Tabela 16

Do quadro acima podemos observar que os índices de fraco desempenho são bastante altos. Percebemos que nas questões que têm foco algébrico, o desempenho dos alunos foi melhor que nas outras questões. Já nas questões que não apresentam possibilidade de algebrização (T2, T3, T5 e AP1.5), os índices de fraco desempenho são maiores ou iguais a 75%. Na questão AP2.1, que mescla interpretação gráfica da derivada com processos algébricos, o desempenho dos alunos também foi fraco, mas um pouco melhor que nas anteriores, ficando em 65%.

É notório que eles se sentem muito mais confortáveis em questões que tem enfoque exclusivamente algébrico e que não exijam deles nada mais que determinação de leis algébricas desvinculadas de qualquer significado geométrico ou algébrico. As questões que exigem alguma compreensão gráfica de derivada, seja no sentido da noção de derivada como inclinação da reta tangente ou na interpretação ou construção de gráficos a partir da derivada descrita ou calculada parecem ser de muito mais difícil execução por parte dos alunos.

5.2 – Análise Global

Com o objetivo de analisar globalmente o desempenho dos alunos nas questões avaliadas, agrupamos as questões por afinidades de objetivos, ou seja, em função de que habilidades dos alunos desejávamos avaliar. Utilizamos, baseados em Asiala et al (1997) – citados no capítulo 1 – um código que associa a cada grupo de questões uma habilidade que está sendo verificada. Temos então a seguinte estrutura:

COMPREENSÃO GRÁFICA DA DERIVADA DA FUNÇÃO

- D1 - O estudante parece compreender o valor de f'(x) como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto (x, f(x)) – Questões T5 e AP1-5

- D2 - O aluno é capaz de operar com a derivada da função baseado somente em informações gráficas e sem fazer uso de qualquer expressão que defina a função – Questão T3

- D3 - O estudante aparenta compreender como usar derivadas para determinar intervalos de monotonicidade para a função, sendo capaz de esboçar um gráfico da função a partir de informações sobre a função e a derivada – Questões T2 e AP2-1

COMPREENSÃO ALGÉBRICA DA DERIVADA DA FUNÇÃO

- A – O aluno parece ter compreensão da utilização das regras algébricas de derivação para determinar a lei (algébrica) da derivada de uma função – Questões T6 e AP1-3.

Analisamos a resolução apresentada por cada um dos alunos a cada grupo de questões. Atribuímos a cada um dos quesitos acima mostrados um valor numérico (1, 2 ou 3) com os mesmos significados já usados em 5.1, que repetimos aqui para facilitar a leitura:

1- O aluno demonstra pouca ou nenhuma compreensão sobre o item.

2- O aluno parece ter as idéias principais mas não demonstra domínio.

3- O aluno demonstra compreensão completa.

Assim, temos:

- D1

- ♦ 1- Indica que o aluno compreende minimamente ou não compreende o valor de f'(x) como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto (x, f(x)).
- ♦ 2- Indica que o aluno conhece as idéias principais relativas à compreensão do valor de f'(x) como a inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto (x, f(x)), mas não é capaz de utilizar estas idéias.
- ♦ 3- Indica que o aluno demonstra compreender que o valor de f'(x) é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função f no ponto (x, f(x)).

- D2
  - ♦ 1- O aluno não é capaz de operar com a derivada da função baseado somente em informações gráficas e sem fazer uso de qualquer expressão algébrica que defina a função.
  - ♦ 3- O aluno é capaz de operar com a derivada da função baseado somente em informações gráficas e sem fazer uso de qualquer expressão algébrica que defina a função.

Obs.: Não utilizamos o valor 2 para este quesito por entendermos que não se aplica neste contexto.

- D3
  - ♦ 1- O aluno não compreende a utilização de derivadas para determinar intervalos de monotonicidade para a função, sendo incapaz de esboçar um gráfico da função a partir de informações sobre a função e sua derivada.
  - ♦ 2- O aluno demonstra alguma compreensão da utilização de derivadas para determinar intervalos de monotonicidade para a função mas não é capaz de esboçar um gráfico da função a partir de informações sobre a função e sua derivada.
  - ♦ 3- O aluno compreende a utilização de derivadas para determinar intervalos de monotonicidade para a função e é capaz de esboçar um gráfico da função a partir de informações sobre a função e sua derivada.

- A
  - 1- O aluno não é capaz de utilizar as regras algébricas de derivação para determinar a lei algébrica da derivada de uma função.
  - 2- O aluno demonstra alguma capacidade de utilização das regras algébricas de derivação para determinar a lei algébrica da derivada de uma função mas comete erros ou omite alguma etapa.
  - 3- O aluno demonstra ser capaz de utilizar as regras algébricas de derivação para determinar a lei algébrica da derivada de uma função.

Apresentamos a seguir um quadro que sintetiza, a partir da análise das resoluções dos alunos, de que maneira está desenvolvida a sua habilidade em relação a cada um dos itens D1, D2, D3 e A.

Alunos	D1	D2	D3	A
Alberto	1	1	2	2
Bruno	1	1	2	2
Carlos	2	1	2	2
Diego	2	1	2	2
Eduardo	1	1	1	3
Felipe	1	1	2	2
Geraldo	2	1	2	3
Henrique	1	1	1	2
Iago	2	1	2	2
Jorge	1	1	2	2
Leonardo	1	1	1	2
Marcos	2	1	2	2
Nivaldo	1	1	1	3
Odilon	1	1	2	3
Paulo	2	1	2	2
Quelber	2	1	2	2
Ricardo	1	1	1	2
Suellen	2	1	1	2
Tiago	2	1	2	2
Vinícius	2	1	1	2

Tabela 17 – Índices dos alunos distribuídos pelas categorias

Na tabela a seguir apresentamos as quádruplas de resultados obtidas pelos estudantes e o número de estudantes que obtiveram cada quádrupla:

D1	D2	D3	A	Número de estudantes
1	1	1	2	3
1	1	1	3	1
1	1	2	2	4
1	1	2	3	1
2	1	1	2	2
2	1	1	3	1
2	1	2	2	7
2	1	2	3	1

Tabela 18 –Ocorrência dos resultados obtidos

Este resultado nos permite observar que de maneira geral todos os alunos demonstram ter compreensão algébrica da derivada, onde 5 (25%) deles foram plenamente capazes de operar desta forma, e os demais têm as idéias principais mas ainda cometem erros principalmente na própria manipulação algébrica. Orton (1983) comenta sobre a freqüência destes erros, classificando-o como *erro de execução*. Ainda sobre isto, Almeida e Viseu (2002) mencionam que a preferência por métodos algébricos gera uma aprendizagem um tanto superficial do tema em questão.

Outro fato que aparece de maneira contundente observando a segunda coluna da Tabela 18 é que *nenhum aluno foi capaz de operar com a derivada da função baseado somente em informações gráficas e sem fazer uso de qualquer expressão que defina a função*. A questão T.3 avaliava esta habilidade e houve dois tipos de postura do aluno frente à questão: ou ele tentou resolvê-la algebricamente, ou seja, tentando determinar a lei da função para então esboçar o gráfico ou então ignorou a questão, não a respondendo. Encontramos 6 soluções do primeiro tipo, tendo 14 alunos omitido a solução. Esse fato é bastante expressivo e denota a falta de prática do aluno em trabalhar graficamente. Alguns ainda tentam resolver de alguma forma, traduzindo em linguagem que dominem, mas 14 (70%) deles ficam inertes frente a esta dificuldade.

Asiala et al (1997) afirmam, a partir de sua pesquisa, que alunos que têm um curso de Cálculo que não utiliza nenhuma inovação metodológica demonstram maior necessidade de utilização da lei algébrica da função e de sua derivada. Também Ferrini-Mundy e Lauten (1994) mostram a mesma percepção, discutindo sobre o desejo claro dos estudantes em determinar uma lei algébrica para as curvas envolvidas nos problemas. Essa conclusão também pode ser aplicada aos alunos envolvidos nessa pesquisa pois, apesar do curso ser semi-presencial, eles não fazem uso de nenhum dos métodos diferenciados propostos pela coordenação da disciplina, como as aulas na web ou as Atividades Eletrônicas. Ocorre que os alunos sequer tentam usar apenas o gráfico, seja ele da derivada de uma função ou da função propriamente dita. A falta de prática de operar em situações gráficas praticamente os impede de utilizá-las como fontes ricas e sintetizadas de informações.

Também a concepção da derivada como inclinação da reta tangente é bastante teórica (Asiala et al, 1997). Quando os alunos foram confrontados com situações em que essa compreensão era necessária, demonstraram bastante dificuldade em aplicar esta noção para solucionar os problemas. Nosso estudo mostra que 11 alunos têm a noção precisa deste fato, chegando a igualar $f'(x)$ e $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, mas sem demonstrar maior autonomia; por outro lado, 9 alunos aparentam não compreender este fato, ou seja, não estabeleceram ainda esta correlação em sua compreensão de derivada. Na questão AP1.5, somente 5 alunos demonstraram estabelecer esta conexão, sendo que 11 dos 20 alunos aparentam não ter nenhuma compreensão deste fato, confundindo os conceitos de assíntota e tangente ao estudar os limites e o comportamento assintótico, procurando assíntotas horizontais. Isto mostra uma clara inconsistência na concepção de tangente. A confusão com assíntota pode ser explicada por assíntota e tangente apresentarem aproximações da curva estudada, a última de caráter local e a primeira uma aproximação no infinito. Este é um estudo que parece ser interessante para trabalhos futuros.

Sobre a compreensão do uso da derivada para estudar os intervalos de monotonicidade da função e para esboçar gráficos, o desempenho dos alunos foi um pouco mais satisfatório, pelo menos em relação aos aspectos algébricos envolvidos nesta questão. Treze dos estudantes pesquisados demonstram ter noção de que o estudo da variação do sinal da primeira derivada está diretamente ligado à variação do crescimento de sua primitiva. Mas em T.2, somente 6 alunos esboçaram um gráfico, dos quais 3 atendiam ao que era descrito na questão; já na questão AP2.1, apenas 4 alunos tentaram esboçar o gráfico, sendo que nenhum teve real sucesso nesta empreitada. Ainda nesta questão, pode-se observar que 9 alunos relacionam crescimento da função e estudo da variação do sinal da derivada. Apenas 1 aluno (Quelber) teve bom desempenho nas duas questões que avaliavam esta habilidade.

Esta observação completa perfeitamente o que pude observar durante os três anos de sessões de tutoria de Cálculo I. O que pode ser mecanizado como um processo, o aluno faz, ou seja, o roteiro de estudar o sinal da derivada e relacionar derivada positiva com função crescente e derivada negativa com função decrescente é razoavelmente compreendido pelo aluno. Porém o momento onde ele realmente terá que unir estas informações àquelas oriundas do estudo do comportamento assintótico é um grande problema para o aluno.

Determinar extremos também se mostrou ser um tópico confuso para o aluno no sentido de que ele aponta qualquer mudança de crescimento como extremo. Muitos alunos indicaram, por exemplo, em AP2.1 o valor $x = 2$ como abscissa de ponto extremo, não observando que na verdade a função não está definida para este valor. Isto denota mais uma vez o tratamento compartimentalizado à questão, onde cada item se encerra em si mesmo. Daí provavelmente vem uma das causas da dificuldade em esboçar o gráfico da função, pela dificuldade de reunir todas as informações e analisá-las conjuntamente.

5.2 – Questionário

A seguir estão as respostas obtidas com o questionário respondido pelos alunos ao final do teste. Para cada pergunta colocamos quantas respostas de cada tipo existiram.

1- Esta é a primeira vez que você estuda derivadas?

Sim	**Não**
15	5

Tabela 19

2- Quando estuda, você:

Segue o Material	**Consulta outras fontes**	**Segue os EPs**	**Outros**
5	13	3	0

Tabela 20

3- Quanto aos EPs, você:

Utiliza versão aluno	Utiliza versão tutor	Não utiliza
5	12	3

Tabela 21

4- Acompanha as aulas na web?

Sim e gosto	Sim mas não julgo relevante	Só quando há algo muito difícil	Nunca usei
4	1	5	10

Tabela 22

5- Utiliza fórum, e-mail ou tutoria a distância?

Sim	Ocasionalmente	Não
3	7	10

Tabela 23

6- Costuma fazer as Atividades Eletrônicas?

Sim, faço todas	Às vezes	Não
0	6	14

Tabela 24

7- Você é aluno de:

Matemática	Física	Química
14	2	4

Tabela 25

Vemos nestes resultados que os alunos não costumam seguir o livro didático de Cálculo 1 do CEDERJ, dando preferência a usar outras fontes de estudo. A consulta a outras bibliografias é um hábito positivo, mas é importante ressaltar que, por se tratar de modalidade semi-presencial, o livro didático foi desenvolvido especificamente para este fim, o que já não acontece com os demais livros.

Percebe-se também que, em relação ao uso do Exercício Programado, muitos usam a versão do tutor, que vem com os exercícios resolvidos. Podemos perceber que priorizam resolver exercícios a estudar teoria. Assim, os alunos procuram se embasar em uma prática que lhes permita a repetição de modelos de exercícios. Desta forma, memorizam técnicas de resolução para cada tipo de questão proposta e procuram estudar as versões de semestres anteriores na esperança de que as questões possam se repetir.

Os alunos também não desenvolveram o hábito de usar os recursos da interação a distância. Isto fica claro pelas respostas neste questionário às perguntas 4 e 5, onde 10 alunos afirmam que nunca usaram estes recursos. Este é um resultado que evidencia que o aluno ainda não está plenamente consciente de que realiza um curso cuja aprendizagem deve ocorrer a distância.

Um outro resultado bastante contundente foi o relacionado ao hábito de fazer as Atividades Eletrônicas. Nenhum aluno tinha o hábito de enviar ao coordenador da disciplina as AEs resolvidas, nem mesmo com a motivação de alguma pontuação bônus. Tal resultado sugere que não existe o hábito de estudar utilizando recursos não tradicionais. O aluno ainda vê como estudo a prática de exercícios e fica então, nesta modalidade, uma lacuna onde estaria o professor atuando, levando o aprendiz a considerar outros aspectos que não somente a mecanização de processos resolutivos de exercícios. Acreditamos que seja por esta razão que os Exercícios Programados versão tutor seja preferidos, por propiciarem ao aluno uma fonte de exercícios resolvidos que podem ser facilmente reproduzidos.

No intuito de compreender melhor sobre as razões dos hábitos de estudo percebidos no questionário e sobre as compreensões dos alunos relacionadas às questões analisadas, realizamos entrevistas com os alunos em duas fases, que estão descritas e analisadas nos próximos capítulos.

CAPÍTULO 6 - ENTREVISTAS: FASE 1

As entrevistas ocorreram em duas etapas, que chamaremos de Entrevista 1 e Entrevista 2. A Entrevista 1 ocorreu no dia 13 de março de 2008 e teve por objetivo investigar com maior profundidade os hábitos de estudo dos alunos. Conversamos nesta ocasião com 14 dos 20 alunos inicialmente participantes da pesquisa, que foram selecionados pela sua disposição em colaborar com esta pesquisa. Cada conversa durou cerca de dez minutos pois ocorreram durante a sessão de tutoria de cálculo 2 e eles não podiam despender muito tempo com isso.

A Entrevista 2 foi feita no dia 10 de maio do mesmo ano e teve a participação de três alunos que foram entrevistados individualmente, também estes selecionados pela concordância em colaborar. O objetivo desta conversa era estudar de forma mais aprofundada as compreensões dos alunos sobre derivadas de acordo com as suas resoluções no teste e nas avaliações presenciais analisadas. Para tanto, conversamos com cada um destes por cerca de quarenta minutos em média, onde retomamos as atividades e as provas que eles fizeram no último período letivo (2007-2). Cada questão foi comentada e as que não tinham sido feitas inicialmente ou que estavam incorretas foram refeitas com orientação. Procuramos esclarecer alguns pontos que ainda causavam dúvidas em relação a suas resoluções e verificar exatamente de que forma eles concebem essas noções. As observações relacionadas à segunda fase da entrevista serão mostradas no próximo capítulo. Esta seção dedica-se a comentar sobre a fase 1 da entrevista e a esclarecer pontos relacionados aos hábitos de estudo dos alunos. Organizamos a observação de cada item em tópicos: uso do Exercício Programado, uso do livro didático, uso da tutoria presencial e execução das Atividades Eletrônicas.

6.1 – *Uso do Livro Didático do CEDERJ*

O livro didático utilizado nas disciplinas de Pré-Cálculo, Cálculo 1 e Cálculo 2 do CEDERJ – também conhecido como módulo da disciplina – foi desenvolvido especificamente para este fim, ou seja, para ser utilizado como fonte de estudo para o aluno do curso semi-presencial de Cálculo a uma variável. São organizados em aulas – cada capítulo é uma aula e ao final são propostos exercícios para aplicação do que foi estudado naquela seção. No início de cada semestre letivo elabora-se o cronograma da disciplina, que organiza o estudo semanal do aluno, sugerindo que aulas ele deve estudar a cada semana. Paralelamente ao estudo do livro didático, são disponibilizadas semanalmente para o aluno listas de exercícios referentes ao conteúdo estudado na semana – denominados pela instituição como Exercícios Programados ou EP. Assim o aluno lê as aulas no livro didático e aplica o que estudou nos exercícios propostos ao final de cada aula e também nos dos EPs.

No início da semana seguinte é oferecido ao aluno o gabarito do EP com todos os exercícios resolvidos (EP versão tutor). Desta forma ele pode conferir as suas soluções, verificando o que acertou e o que errou. Também o tutor presencial e o tutor a distância da disciplina dispõem do EP versão tutor desde o momento em que o EP do aluno é disponibilizado na plataforma. Assim a qualquer momento o aluno pode procurar o tutor para tirar dúvidas relacionadas não somente ao conteúdo das aulas previstas para a semana mas também sobre os exercícios do EP.

No questionário respondido pelos participantes desta pesquisa vimos que dos 20 alunos, apenas 5 responderam que fazem uso do livro didático. Por esta razão, julgamos interessante retornar a este ponto nesta fase das entrevistas, uma vez que estamos procurando esclarecer alguns pontos relacionados aos hábitos de estudo dos alunos.

Quando perguntamos sobre como eles estudam Cálculo, dentre os 14 entrevistados somente 5 afirmaram usar o módulo e outros 6 afirmaram usar outros livros tomados emprestados em bibliotecas públicas ou do próprio pólo. Espontaneamente 10 alunos afirmaram que têm muitas dificuldades em compreender o que o módulo apresenta, seja por questões de linguagem ou por dificuldades em conhecimentos anteriores – pré-requisitos para a inteira compreensão do que está sendo ali apresentado. O aluno Alberto comenta, quando questionado sobre a leitura do livro aula a aula:

Alberto: *Não, é muito complicado, a gente quase não entende nada, lê uma página e dá vontade de dormir... É melhor pegar a AD passada, o EP passado, a AD passada.*

Geraldo afirma que costuma usar os livros sugeridos na bibliografia da apostila. Nivaldo é bastante incisivo em seu comentário, falando que "*é como ler um livro em inglês*". Para Eduardo a leitura do livro didático não é necessária porque ele prefere a tutoria presencial.

Eduardo: *Não, sinceramente eu não leio não, inclusive porque o tutor é show de bola, é o melhor livro que a gente pode ter.*

Estes dados revelam que os alunos pesquisados não priorizam a leitura do livro didático. A percepção deste fato sugere que há, por parte do aluno, pouca ênfase nos aspectos teóricos da disciplina. A próxima seção discorre sobre a utilização dos EPs, onde veremos que na verdade há uma preocupação muito maior com os exercícios e as técnicas de resolvê-los.

6.2 – Uso do Exercício Programado

Todos os alunos entrevistados nesta fase da pesquisa afirmaram que utilizam o Exercício Programado para estudar. Porém, dentre estes, 10 sinalizam utilizar somente a versão tutor do EP, seja devido a dificuldades de tempo ou de custo. O trecho a seguir exemplifica isto. O aluno Jorge, quando perguntado sobre a versão do EP que usa, responde:

Jorge: *Tutor, por questões de tempo, é mais rápido e mais barato.*

Isto significa que o aluno concebe o Exercício Programado como uma fonte de consulta, de aprendizagem e não apenas como uma maneira de aplicar e exercitar o que foi visto teoricamente na aula do livro didático. O que foi concebido originalmente para ser uma fonte adicional de exercícios – o livro didático já oferece exercícios para que o aluno pratique – tornou-se o ponto principal do material didático oferecido pela Instituição para estudo. Destacamos a seguir o comentário do aluno Eduardo sobre como se prepara para ir à sessão de tutoria:

Eduardo: *(...) eu normalmente olho o EP antes mas ir no livro é difícil (...)*

Revela-se aí uma utilização distinta para o EP do que foi originalmente planejado. Esta lista de exercícios é oferecida ao aluno para que ele o resolva e confira posteriormente com o tutor ou no gabarito (versão tutor), possibilitando que ele aplique o que estudou no livro didático. Mas o que de fato ocorre é que o aluno aguarda que seja disponibilizada a versão tutor para então imprimi-la e estudar diretamente por ela. Desta maneira, ele tem acesso direto aos exercícios resolvidos e assim não tenta resolvê-los inicialmente. Ele observa como o exercício ali proposto foi feito para então procurar em outros EPs anteriores atividades semelhantes para aplicar o mesmo formato de resolução.

Este hábito torna a prática do Cálculo mecânica e repetitiva, onde o aluno estuda apenas por repetição. É claro que a resolução de exercícios tem aspectos muito positivos – a familiarização somente é obtida por meio da prática – mas impede que o aluno desenvolva a criatividade, a interpretação e ainda que utilize os seus conhecimentos teóricos na resolução destas atividades.

Uma outra conseqüência da prática da utilização apenas do EP versão tutor é que nele não está a Atividade Eletrônica – este tipo de atividade somente é oferecida no EP versão aluno. Assim, o aluno deve fazê-la e enviar seu resultado ou observações ao coordenador da disciplina. Dos alunos que responderam ao questionário, nenhum afirmou ter o hábito de fazer as AEs. Retornamos a este ponto na entrevista, onde 5 alunos comentaram que faziam-nas “às vezes”, quando “dava tempo” ou quando o tutor os orientava. Porém todos estes afirmaram que eram situações interessantes e que os ajudavam a compreender alguns conceitos. Sobre isto, o aluno Jorge comenta:

Jorge: *Sim, principalmente o contato com um software matemático, isso ajuda a... ele traz para a visualização de um conceito matemático. Na verdade o primeiro contato que eu tive com um software foi ali, e ainda hoje uso em algumas questões de Cálculo II.*

Acreditamos que a utilização habitual de práticas de laboratório de informática, com a inserção de atividades como as que são propostas nas Atividades Eletrônicas podem ser bastante eficientes na formação dos conceitos matemáticos relacionados ao Cálculo, principalmente por se tratar de um curso de ensino a distância. A realização destas atividades permite não somente ao aluno visualizar e conjecturar a respeito de determinadas situações como também aumenta o contato entre aluno e coordenador da disciplina – o docente – quando o aluno envia a este algum tipo de relatório da observação da atividade. Borba, Malheiros e Zulatto (2002) comentam sobre a importância da utilização das Novas Tecnologias de Informação e Comunicação no sentido de promover a interação professor-aluno nos cursos de modalidade semi-presencial ou a distância. Também Asiala et al (1997) relatam, segundo os resultados obtidos em seus estudos, que o ensino de Cálculo que utiliza recursos computacionais e aprendizagem cooperativa gera alunos com uma compreensão de Cálculo mais abrangente que a daqueles que estudam unicamente pelos meios tradicionais.

Analisando o que apresentamos em 6.1 em conjunto com o que vimos nesta seção em relação à utilização por eles feita dos Exercícios Programados, podemos perceber que estes alunos buscam mais exercícios que teoria, ou seja, concebem a aprendizagem em Matemática – especificamente em Cálculo – como a prática de resolução de exercícios não dependente de um corpo teórico que a embase. Considerando o fato de que dos 20 alunos pesquisados 14 fazem o curso de Licenciatura em Matemática, isto se torna particularmente sério por supor a possibilidade de que, quando formados, dêem ao ensino de Matemática o mesmo tratamento que dão a sua aprendizagem, traduzindo-a apenas como técnicas de resolução de exercícios.

6.3 – Uso da Tutoria Presencial

A tutoria presencial do CEDERJ é oferecida em sessões que normalmente têm duas horas de duração. Durante este tempo, o tutor deve orientar os alunos em seus estudos e apenas tirar dúvidas relacionadas a conteúdo ou exercícios. Os tutores da Matemática são graduados em Matemática e são selecionados por meio de concurso público, ficando então aptos a dar tutoria de qualquer disciplina da Matemática.

No pólo de Angra dos Reis pode-se observar que a frequência à tutoria presencial é bem grande. Normalmente os alunos não deixam de ir à tutoria presencial pois é ali a oportunidade que têm de tirar suas dúvidas, formar grupos de estudo ou acessar à plataforma da Instituição por meio dos laboratórios de informática disponíveis nos pólos, por exemplo.

Da prática como tutora em Angra dos Reis e do que foi observado durante a realização desta pesquisa podemos inferir que a tutoria em Cálculo I tem importância vital para os alunos. Eles sempre comparecem às sessões de tutoria. Sobre isto, o aluno Geraldo comenta:

Geraldo: *Sim, eu até acho que são poucas horas, venho sempre, é fundamental para mim.*

Alguns comentam que o hábito de ir à tutoria facilita no cumprimento do cronograma. Alberto afirma que para ele, a tutoria basta:

Alberto: *Eu vou pela tutoria. O livro de Cálculo tá zerado ainda, eu nunca abri, uso só a tutoria e os exercícios.*

Este comentário de Alberto é bastante revelador em relação aos hábitos de estudos dos alunos de Cálculo. O aluno normalmente usa o Exercício Programado do tutor, quando dá tempo o lê e vai à tutoria, onde os exercícios normalmente são resolvidos um a um. E para ele isto basta, é suficiente. Se ele sabe resolver os exercícios, então sabe Cálculo. Marcos afirma que a freqüência às sessões de tutoria de Cálculo I melhoraram suas notas, que antes de ele adquirir este hábito não andavam tão boas. Ele justifica esta melhoria da seguinte forma:

Marcos: *É um pouco de tudo, a gente forma grupo, a tutoria em si ajuda muito, a gente tira dúvidas, o tutor faz os exercícios etc.*

O hábito de freqüentar às sessões de tutoria estimula também a formação de grupos de estudo – 5 alunos mencionaram ser o grupo de estudos uma das formas que eles usam para estudar. Observamos que estes grupos são constantes e são formados por questões de afinidades. Os alunos combinam o dia e hora em que vão ao pólo para estudar juntos. A formação de grupos é um excelente hábito decorrente da modalidade semi-presencial. Neles, os alunos têm oportunidade de trocar idéias, discutir soluções e um ajuda o outro naquele assunto que domina mais.

Há alunos ainda que concebem o tutor como o professor da disciplina, como se o curso fosse presencial e fosse ele o docente responsável. Isto fica bem claro no comentário de Eduardo já citado na seção 6.1 mas que consideramos pertinente repeti-lo aqui pela sua força:

Eduardo: *(...) o tutor é show de bola, é o melhor livro que a gente pode ter.*

Este porém é um aspecto perigoso da tutoria. O tutor não é o docente responsável pela disciplina, não tem a formação necessária para tanto e, principalmente, não é essa a sua função no contexto de um curso onde o ensino ocorre a distância. Sua função é, segundo Moore e Kearsley (2007), orientar os alunos, normalmente em tarefas de revisão e avaliação e não ministrar aulas. Porém, quando o aluno afirma que o tutor substitui o livro didático significa que ele substitui as aulas a distância pela freqüência à tutoria. Acreditamos que isto ocorre pela dificuldade que os alunos sentem em acompanhar as aulas pelo módulo e pela falta de hábito de utilizar as aulas na web – nenhum dos alunos entrevistados citou este como um recurso de estudo. Então eles naturalmente atribuem ao tutor esse papel, não somente em relação à resolução dos exercícios como também muitas vezes o de explicar, esclarecer os conteúdos previstos pelo cronograma para aquela semana.

6.4 - Síntese

A realização desta entrevista foi bastante esclarecedora em relação aos hábitos de estudo dos alunos. Notamos que a prática da aprendizagem cooperativa por meio de grupos de estudo surge naturalmente a partir do contato entre os alunos no pólo. A freqüência ao pólo estimula a que isto aconteça e é suscitada pelas sessões de tutoria, à qual os alunos procuram nunca faltar. Para eles, a sessão de tutoria é tida como a aula da disciplina e o tutor é muitas vezes visto como professor. Esta atribuição de função docente ao tutor decorre diretamente da falta de hábito de leitura do módulo, que ocorre tanto por dificuldades de compreensão do que é ali apresentado como também por dificuldades oriundas da própria formação escolar do aluno, muitas vezes deficiente não somente em fundamentos matemáticos como também em leitura e interpretação de textos. O hábito de estudar pela lista de Exercícios Programados do tutor fortalece esta dificuldade uma vez que gera um estudo focado em resolução de exercícios.

O próximo capítulo apresenta ao leitor três dos alunos pesquisados que participaram da segunda fase de entrevistas. Elaboramos para cada um deles um perfil que tem o objetivo de detalhar mais as questões relacionadas à compreensão da derivada de uma função real por meio de análise das suas resoluções às questões do teste e das Avaliações Presenciais.

CAPÍTULO 7 - ENTREVISTAS FASE 2

As entrevistas 2 foram feitas com o objetivo de permitir um maior aprofundamento no nosso entendimento de como os alunos pesquisados concebem a derivada. Participaram dela os alunos Alberto, Eduardo e Geraldo, que foram escolhidos pela disposição em participar da pesquisa.

Estas entrevistas foram realizadas no dia 10 de maio de 2008. Conversamos individualmente com cada um deles durante cerca de 40 minutos. Nossa intenção inicial era analisar o que tinham feito em cada questão, pedindo-lhes que resolvessem aquelas que não haviam sido feitas, ou que pelo menos falassem sobre elas. Todos recusaram-se a fazê-las por, segundo eles, não terem nem noção de como começar ou por onde. A partir da recusa, oferecemos então que as fizéssemos juntos, o que foi prontamente aceito e então fui orientando como proceder a análise e resolução das questões, buscando interagir com eles no sentido de buscar que conhecimentos eles detinham sobre derivadas. É importante lembrar que o curso de Cálculo I (limites e derivadas) tinha sido concluído no semestre anterior (dezembro de 2007) e que agora eles cursam Cálculo II (integrais e funções vetoriais). Cremos que também por esta razão – devido à falta de um contato assíduo com o tema – tenham encontrado tanta dificuldade em resolver as questões eles mesmos. A entrevista então se tornou um tipo de aula informal individual, onde procurei buscar que conhecimentos eles tinham sobre os tópicos enfocados nas questões. As questões que eles acertaram foram comentadas mais brevemente, e as que eles não fizeram foram a nossa maior preocupação.

No intuito de dar ao leitor uma visão bastante detalhada e completa sobre cada um dos alunos, passamos agora a discorrer sobre eles individualmente. Inicialmente fazemos um breve histórico do desempenho de cada um na fase anterior da pesquisa e a seguir, para relatar o que acrescentou esta segunda fase da entrevista utilizamos os quesitos D1, D2, D3 e A mencionados no capítulo 5 para avaliá-los em relação a estes aspectos.

7.1 – O aluno Alberto

Alberto é um jovem estudante muito comunicativo e bastante disposto a conversar. Comenta que não "tem matéria", que "aprende melhor quando vê as coisas sendo feitas" e que por esta razão não costuma ler nem o livro didático nem outros livros, sente muita dificuldade na leitura. Considera uma das suas dificuldades em Cálculo o fato de nunca ter estudado este conteúdo antes (no período escolar), além de uma formação matemática anterior deficiente. Quando perguntamos a ele sobre gráfico de função e sobre derivada na primeira fase das entrevistas, respondeu dizendo que sabe fazer mas não sabe explicar. Já ficou reprovado em Cálculo I no próprio CEDERJ.

No teste não fez as questões T5 e parcialmente T6. Nas Avaliações Presenciais obteve grau 6,1 na primeira e 5,8 na segunda, tendo aferido ainda 0,5 ponto na AP1 por ter enviado uma Atividade Eletrônica que fez porque teve o auxílio e o estímulo do tutor.

D1: Compreensão do valor numérico de $f'(x)$ como inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$

Nas questões relacionadas à interpretação gráfica de inclinação da reta tangente como o valor da derivada em um ponto, o aluno demonstrou pouca habilidade, principalmente em T5. Quando perguntamos a ele o que significava achar a derivada de uma função em um ponto, ele responde:

Não lembro. Eu na verdade não sei.

A própria concepção geométrica de tangente parece ser difícil para ele. Não houve resposta quando indicamos a reta tangente ao gráfico de f em T5 e perguntamos o que ela era em relação ao gráfico de f. Mas a partir do momento em que revelamos a ele que a reta era tangente ao gráfico de f no ponto $(1,-1)$, curiosamente surgiu de maneira espontânea a seguinte fala:

A gente acha o coeficiente angular dela que vai ser a derivada de f.

Podemos observar então que existe a idéia formal, memorizada de que a derivada de uma função num ponto é a inclinação da reta tangente ao gráfico da sua primitiva neste ponto, porém não há uma real compreensão do significado desse fato. A partir deste ponto, o exercício fluiu, o aluno determinou o coeficiente angular da reta, encontrando assim o valor de $f'(1)$, determinou $g'(2)$ pela regra da cadeia e encontrou a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 2. Necessitou de alguma ajuda, mas demonstrou domínio das situações de determinação algébrica da derivada de g e da determinação da equação da reta. Sua dificuldade foi a identificação do valor da derivada a partir do gráfico apresentado. Esta é uma situação bastante interessante que revela a dificuldade em compreender localmente num contexto gráfico a derivada de uma função.

O mesmo tipo de observação pode ser feito em relação a AP1-5, onde lhe foi dada a lei de uma função e pedido o ponto (ou pontos) em que a curva que representava a função tinha uma tangente horizontal. Nesta questão, o aluno na prova estudou o comportamento assintótico horizontal da função. No momento da entrevista já identificava que deveria ter estudado a derivada da função, demonstrando que faz a associação entre a reta tangente e a derivada. Porém ele deriva f – comete alguns erros algébricos – e não tem mais idéia do que deveria ser feito, chegando a crer que já tinha resolvido a questão. Estabelecemos então o seguinte diálogo:

Pesq.: *Dá uma olhada no enunciado da questão, o que tá sendo pedido?*
Alberto: *Bom, tá pedindo o ponto.*
Pesq.: *Isso mesmo, vc achou o ponto?*
Alberto: *Não, mas como vou achar?*
Pesq.: *Vamos lá, que reta vc quer obter?*
Alberto: *A reta tangente horizontal.*
Pesq.: *E qual é o coeficiente angular dessa reta, vc sabe?*
Alberto: *Se ela é horizontal, então é zero?*
Pesq.: *É isso aí. E agora, faz o quê?*
Alberto: *Substitui o zero na derivada?*
Pesq.: *Se vc substituir o zero na derivada dá o quê, dá uma olhada na questão 3. Quando calculamos f'(1) achamos o que?*
Alberto: *O coeficiente angular da reta tangente.*
Pesq.: *Então se colocar o zero na derivada vc vai achar o que?*
Alberto: *O coeficiente angular da reta tangente.*
Pesq.: *Mas isso vc já sabe, é zero, então faz o que?*
Alberto: *Iguala a zero?*
Pesq.: *Agora sim, igualando a zero vai dar o que?*

Percebemos que o aluno não demonstra nenhuma autonomia em, conhecida a lei algébrica da derivada da função dada e a inclinação da reta tangente determinar o ponto de tangência. Mais uma vez notamos aqui que a idéia de associar reta tangente com derivada é apenas teórico. O aluno procura associar alguma palavra ou expressão a algum processo já conhecido por ele. Assim, no momento da prova, a associação foi da palavra *horizontal* com a determinação de *assíntota*. No momento da entrevista – talvez por estarmos já tratando de derivadas – a associação foi de *tangente* com *derivada* mas não passou disso. Não existe flexibilidade de pensamento em situações que envolvam a noção geométrica de derivadas.

D2: Capacidade de operar com a derivada da função baseando-se somente em informações gráficas

Esta habilidade foi verificada em T3 e foi a primeira questão analisada na entrevista. O aluno determinou a equação da parábola representada graficamente e uma equação da primitiva sem utilizar os pontos dados. Esboçou um gráfico para responder ao item (a), deixando de responder (b). Perguntamos a ele por que tinha determinado a equação da parábola, ao que ele respondeu:

Alberto : *Porque... Esse aqui é o gráfico da derivada, certo, aí, eu posso achar a equação da parábola, aí se eu voltasse ela para a equação que ela era antes de derivar eu ia saber qual era a função e ia conseguir fazer o gráfico.*

Esta fala demonstra que o aluno somente consegue conceber o gráfico de uma função vinculado a sua lei algébrica. Assim, ele precisa dela para ser capaz de esboçar um gráfico.

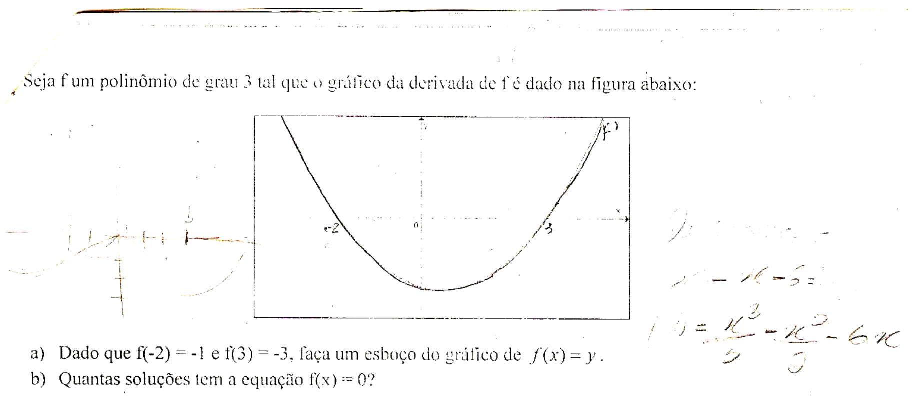


Figura 26 – T3 de Alberto

O gráfico apresentado pelo aluno contém uma das raízes da equação por ele encontrada para f (x = 0) mas considera parcialmente aspectos relacionados à variação de crescimento e a extremos dados pela parábola. Quando comentamos com ele, mostrando como poderia usar o gráfico dado para esboçar o gráfico pedido, ele percebe que o esboço por ele apresentado não correspondia a nenhum possível gráfico de f. É interessante ainda destacar que o aluno não respondeu ao item (b), sugerindo que não percebe graficamente as soluções da equação $f(x) = 0$.

D3: Compreensão do uso da derivada para estudar intervalos de monotonicidade da função e capacidade de esboçar um gráfico de uma função f a partir de informações sobre a sua derivada.

O aluno esboça corretamente o gráfico pedido em T2, por isso não nos detivemos na sua análise. Conversamos sobre AP2-1, questão em que era dada a lei algébrica de uma função e pedido o esboço do gráfico de acordo com estudos de comportamento assintótico, crescimento e concavidade. Entendemos que o aluno tem conhecimento da relação entre crescimento e sinal da derivada. O trecho a seguir exemplifica:

Pesq.:	*O que o sinal da derivada fala a respeito da função?*
Alberto:	*Ah, diz os máximos e mínimos...*
Pesq.:	*Isso mesmo, o crescimento e o decrescimento,*
Alberto:	*No positivo é crescente e no negativo é decrescente.*

Ocorreram alguns erros operacionais em relação ao estudo de como varia o sinal da derivada – o aluno avaliou apenas o denominador, conforme podemos ver a seguir:

Pesq.:	*(...) Aqui no item que pede que estude o crescimento, como é que vc chegou a essa conclusão?*
Alberto:	*Olhando. Eu olhei aqui pra f', x-2, tem o menos, então pra qualquer valor menor que 2 é negativo mas fica positivo por causa do menos então é crescente, e pra qualquer valor maior que 2 é positivo que fica negativo, então vai dar decrescente.*
Pesq.:	*E o numerador?*
Alberto:	*Tem que usar ele?*
Pesq.:	*Claro que sim, ele faz parte da função.*
Alberto:	*Eu não sabia.*
Pesq.:	*Pois é. Além disso, aqui vc coloca que os extremos ocorrem em x = 2. Mas 2 está no domínio da função?*
Alberto:	*Não.*
Pesq.:	*E então?*
Alberto:	*(Sorriso constrangido). É, o que acontece aqui é que a maioria tá há muito tempo sem estudar e veio de escola fraca. Eu mesmo, por exemplo, esses negócios do cálculo, eu nunca vi no segundo grau, aí vem a apostila com uma linguagem pesadona, a gente não entende nada, eles acham que a gente já sabe e a gente na verdade não sabe.*

Uma outra questão interessante foi que o aluno não esboçou o gráfico da função. Mais uma vez encontramos um ponto em que o aluno tem o conceito teórico mas que aplicado na prática, principalmente em um contexto gráfico, não demonstra domínio. Um aspecto curioso foi o fato de que ele respondeu T2 corretamente mas não foi capaz de esboçar o gráfico em AP2-1. Acreditamos que isto tenha ocorrido por que no momento do teste ele estava em uma situação informal, o que o deixou mais a vontade e tranqüilo para pensar.

A: Compreensão da utilização das regras algébricas de derivação para determinar a lei algébrica da derivada de uma função

Sua compreensão acerca dos aspectos algébricos da derivada é média. O aluno identifica as situações em que deve aplicar as regras de derivação, cometendo erros apenas operacionais na aplicação das regras propriamente ditas, conforme podemos ver a seguir (comentário da questão AP1-3).

Pesq.:	*Ah, legal. Bom, aqui na questão 3a, vc cometeu um erro. Dá uma olhada se você identifica o que errou.*
Alberto:	*Aqui sabe o que aconteceu? Eu não sei direito onde é que fica o 2 e se eu ainda deixo ele aqui (no expoente de x) ou não.*
Pesq.:	*Bom, vamos lembrar da regra da cadeia? (escrevo para ele e falo) deriva a de fora repete a de dentro e multiplica pela derivada da de dentro. Então, olha para a sua resolução e tenta corrigir.*
Alberto:	*Bom, aqui então tinha que ficar x^2 e não x, e depois ainda colocar... 2x?*
Pesq.:	*Isso mesmo. Você acabou fazendo tudo de uma vez só, o que gerou o seu erro.*

O aluno estava derivando a função $f(x) = x \cos x^2$. Na sua resolução ele aplicou a regra do produto corretamente mas cometeu erro na aplicação da regra da cadeia para derivar o segundo fator, conforme descrito acima. A regra da cadeia é, em particular, uma situação algébrica que exige a percepção de que funções estão sendo compostas e em que ordem, o que gera um fator de dificuldade adicional. Acreditamos ser exatamente neste ponto que resida a dúvida mencionada por Alberto. O fato de que ele não sabe onde “fica o 2” demonstra isto bem claramente. Na sua resolução na prova, ele escreveu $f'(x) = 1 \cdot \cos x^2 - 2 \sin x \cdot x$, omitindo o expoente de x e o fator x. O mesmo tipo de erro foi cometido ao derivar g em T5, conforme vemos a seguir:

Pesq.:	*Isso aí. Bom, vamos agora ao item b. Temos que determinar g’(2). Você tem alguma idéia de como fazer isso?*
Alberto:	*Tem que derivar g e substituir 2, a gente pode ir por aqui (indica a expressão $g(t) = f(t^2 + t - 5)$ dada no enunciado).*
Pesq.:	*E como é que deriva?*
Alberto:	*Usa a regra da cadeia.*
Pesq.:	*Então tenta fazer aí. .*

(o aluno escreve $f'(2t + 1)$)

A regra da cadeia é um caso de derivação algébrica que pode ser memorizado mas não inteiramente mecanizado. Cremos que por esta razão ocorreram estes erros nas questões que exigiam este conhecimento.

Síntese

O aluno demonstra dificuldades em utilizar a derivada em contextos gráficos, seja na compreensão geométrica de derivada como inclinação da reta tangente, seja em situações de esboço de gráficos a partir da derivada. Não demonstra domínio em interpretar informações dadas graficamente. Tem ainda dificuldades em analisar a variação do sinal da derivada, o que reporta a dificuldades em funções. Aparenta estar ainda muito preso às abordagens algébricas, tendo bastante dificuldade em se locomover sem ela. Mesmo nas situações algébricas, onde se sente mais seguro, aparenta algumas dificuldades de ordem operacional. Estuda por meio de exercícios, o que pode justificar as imprecisões percebidas acerca do conceito de derivada.

7.2 – O aluno Eduardo

Eduardo é também um jovem que aparenta ser muito empolgado com o que faz. É estudioso, gosta de estudar em grupo – costuma estudar junto ao Geraldo e ao Vinícius – mas não utiliza para tanto o livro didático do CEDERJ. Não usava habitualmente nenhum tipo de ferramenta de estudo a distância e não fazia as Atividades Eletrônicas. Nunca falta às sessões de tutoria – na verdade, ele comenta que “o tutor é o melhor livro que a gente pode ter”. Sobre o gráfico de uma função, diz que “serve pra mostrar o que ela é, ela é um valor em função do outro” (entrevista fase 1); já sobre derivadas demonstra uma idéia instrumental para “confirmar se o gráfico... está certo” (entrevista fase 1).

Esta foi a primeira vez que estudou Cálculo. Comenta que tenta se preparar para a sessão de tutoria olhando o Exercício Programado antes, mas que isto não é habitual. Considera o livro didático difícil e pouco claro. Na primeira prova obteve grau 7,5 e na segunda 5,7.

D1: Compreensão do valor numérico de $f'(x)$ como inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$

O aluno não aparenta ter compreensão da derivada como a inclinação da reta tangente ao gráfico de uma função. Nas questões que exigiam este conhecimento, seu desempenho foi fraco.

O aluno não fez T5 na ocasião da realização do teste. Ao conversarmos sobre esta questão, demonstra estar totalmente preso a situações algébricas, supondo ser f uma função do terceiro grau – apesar de nada ser dito na questão sobre isto:

Pesq.:	*Bom, vamos comentar agora sobre T5. Vc não fez. Vamos ler a questão (lemos juntos). Como a gente pode achar f'(1)?*
Eduardo:	*Bem, pensando essa função, postivamente ela é uma função do terceiro grau, então integrando ela vai cair numa função de segundo grau...*
Pesq.:	*Integrando?*
Eduardo:	*Não, derivando. Então a gente acha a equação do segundo grau aí e substitui o domínio pra achar a imagem desse ponto.*

É fácil perceber que o aluno depende de algum tipo de lei algébrica para ser capaz de conceber a função. Nada havia na questão que sugerisse que f se tratava de uma função polinomial do terceiro grau.

Sugeri a ele que tentasse pensar na questão de outra forma para tentar determinar $f'(1)$.

Pesq.:	*Tá ok, mas em relação ao gráfico, o que a gente pode dizer sobre ela (a reta)?*
Eduardo	*(Silêncio)*
Pesq.:	*Qual a posição dela em relação ao gráfico de f?*
Eduardo	*Ela tá encostando.*
Pesq.:	*Se está encostando então ela é...*
Eduardo	*Tangente?*
Pesq.:	*Isso, tangente ao gráfico de f. E assim, como é a reta tangente...*
Eduardo	*Ela é a derivada de f.*
Pesq.:	*(...) Então como a gente pode achar f'(1)?*
Eduardo	*Pelo coeficiente angular dessa reta, é verdade, eu não tinha visto isso.*

O comentário de Eduardo traduz com perfeição o que temos observado ao longo da realização deste trabalho. O aluno não “vê” a derivada, ou seja, não a compreende segundo uma ótica geométrica, visual, gráfica. A partir da percepção de que é a reta tangente e da conclusão do aluno da necessidade de derivar, Eduardo conclui a questão tranquilamente, com algum auxílio no item (b) para derivar g utilizando a regra da cadeia.

A questão AP1-5 também suscitou uma discussão interessante em relação á mesma confusão entre assíntota e reta tangente observada com Alberto.

Eduardo:	*O que eu pensei, a reta tangente horizontal seria uma assíntota horizontal, então o que eu pensei, vou ver o limite tendendo a infinito aí deu zero e aí foi isso que eu fiz, achei que era o próprio eixo dos x, aí eu pensei nisso, como eu não sabia o que fazer aí eu fiz assim.*
Pesq.:	*E agora depois do que a gente viu, o que vc acha que deveria fazer?*
Eduardo:	*Achar a derivada.*
Pesq.:	*Ok, e então, fazer o que?*
Eduardo:	*...*
Pesq.:	*Se queremos uma reta horizontal, o que devemos fazer?*
Eduardo:	*...*
Pesq.:	*Qual o coeficiente angular de uma reta horizontal?*
Eduardo:	*Uma reta horizontal na realidade seria zero, uma constante.*
Pesq.:	*Então vc ia fazer o que?*
Eduardo:	*Igualar a derivada a zero.*
Pesq.:	*Isso, e achar o x.*
Eduardo:	*Era bem mais fácil do que o que eu fiz.*

Da mesma forma que observamos com Alberto, fica claro que também para Eduardo o conceito geométrico de derivada não está bem formado. A confusão com assíntota horizontal evidencia que o aluno se prende à idéia da horizontalidade, aludindo entao à assíntota que é o que ele costuma ver associado à palavra “horizontal”. Na verdade ele não tem formados nem o conceito geométrico de assíntota nem de tangente. Ambos nada mais são que cálculos desvinculados de qualquer tipo de significado.

D2: Capacidade de operar com a derivada da função baseando-se somente em informações gráficas

Esta habilidade foi avaliada na questão T3. O aluno tenta resolver a questão utilizando recursos algébricos. Ele determina a lei algébrica da parábola e em seguida a equação da primitiva, utilizando inclusive os pontos dados em (a) para determinar a constante. Porém não esboça gráfico conforme solicitado. Perguntado sobre por que não esboçou o gráfico se dispunha da lei algébrica, respondeu:

Pesq.:	*Agora me diz por que que, se vc já tinha a equação da função, por que vc não esboçou o gráfico pedido?*
Eduardo:	*Pra ser sincero eu não lembro exatamente por que eu não fiz, mas eu acho que olhando assim a princípio chegou naquela minha limitação de linguagem, eu não compreendo direito.*

A dificuldade de linguagem a que ele se refere aqui vem de um comentário anterior:

Eduardo:	*A matemática é uma linguagem, se a gente não entender a linguagem matemática é como vc chegar lá na Etiópia e não entender o que os caras estão falando aí vc fica perdido. Pra gente nem todas as linguagens da matemática são claras, se eu digo que p é igual a alfa 1 sobre v então se o cara não sabe distinguir que alfa 1 é diretamente proporcional e que v é inversamente então o cara não sabe então é isso, é desmistificar essas representações. O que é aquele traço em cima do f, o que é isso?*

Continuamos a estudar a questão, onde fomos conduzindo o aluno a analisar o gráfico apresentado. Ao responder sobre a variação da função do segundo grau expressa pela parábola, Eduardo demonstra depender de um tipo de processo memorizado para estudar este sinal, conforme fica claro no trecho a seguir:

Pesq.:	*Agora vc sabe dizer, olhando para esse gráfico, para essa parábola, vc sabe dizer onde ela é positiva e onde ela é negativa?*
Eduardo:	*Ela é positiva no sinal inverso de... No caso aqui ela é negativa aqui e positiva aqui do lado (indica corretamente)*

Esta é uma relação bastante usada por professores de Matemática do ensino médio e ainda enfatizada em alguns livros. A referência a ela feita pelo aluno sugere que ele não é totalmente capaz de analisar o sinal da função somente a partir de seu gráfico. Esta dificuldade reside na falta de hábito de analisar situações matemáticas dadas por gráficos. Determinada a variação do sinal da parábola, e lembrando que ela representava a derivada de f, Eduardo foi capaz de esboçar o gráfico pedido. Comenta então:

Eduardo:	*Uma questão dessa, quando o aluno tem o conceito, ele tem a visão, a linguagem matemática ele já mata isso aí de cara porque ele já sabe né um polinômio de grau três então já imagina a cara do gráfico, já sabe que se ele derivar vai cair um grau, já imagina uma parábola, então já sabe que é pra cima e imagina os sinais dos coeficientes angulares, então se ele já tem a linguagem matemática pra isso então ele já faz logo.*

Esta observação é bastante pertinente e retrata exatamente o que acontece. A referência à detenção do conceito como condição para a resolução da questão é exatamente o que percebemos que falta ao aluno. O conceito de derivada como função, e não somente como operações algébricas ainda não está totalmente formado. O aluno não concebe que a derivada, por ser também uma função, tem também um gráfico associado. Normalmente a variação do sinal da derivada é determinada a partir de processos algébricos de estudo de sinal e sempre a partir da lei algébrica da derivada, nunca a partir de seu gráfico.

D3: Compreensão do uso da derivada para estudar intervalos de monotonicidade da função e capacidade de esboçar um gráfico de uma função f a partir de informações sobre a sua derivada.

O aluno não demonstra boa compreensão deste aspecto da derivada. Em T2 ele não esboça o gráfico da função, respondendo de maneira bastante confusa ao que perguntamos:

Pesq.:	*Quando a gente diz que f'(x) > 0 se e somente se x está entre 0 e 1, o que vc acha que significa, o que quer dizer isto?*
Eduardo:	*No caso eu tô entendendo que a derivada, que a função f'(x) tá sendo maior que zero nesse intervalo aqui, no caso entre zero e um.*
Pesq.:	*E isso graficamente tem algum significado para vc?*
Eduardo:	*Tem, tem sim, no caso sendo f'(x) uma função de segundo grau, taria limitado nesses domínios, no caso x entre zero e um e na hora de esboçar o gráfico a gente já pode visualizar que tá limitado nesses valores, entre zero e um.*

Novamente percebemos aqui a necessidade da utilização de alguma referência algébrica que o deixe mais confortável na questão. A menção à função de segundo grau exemplifica essa dependência. Nada havia na questão que mencionasse de que tipo de função se tratava e nem tampouco era necessária essa informação uma vez que não havia nenhum cálculo a ser feito. Todas as informações foram dadas e era necessário apenas que o aluno analisasse conjuntamente todas as informações para que o gráfico fosse esboçado.

Em AP2-1, outra questão que abordava a mesma situação, também o aluno demonstra pouco domínio desta relação. Ele não faz o estudo do crescimento da função, limitando-se a determinar os extremos como as raízes da derivada. Percebe corretamente que em x = 2 não há extremo uma vez que escreve na prova que $f(2) = \frac{4}{0} = \infty$, utilizando assim um abuso de notação e concluindo pela inexistência de extremo para este valor de x. Afirma que em (4, -2) há ponto de máximo, mas não efetua nenhum cálculo para justificar esta afirmação. Quando perguntado, comenta que atribuiu a x = 2 valor mínimo – caso tivesse tido resultado numérico para $f(2)$ - e máximo para x = 4 meramente por ser 4 um número maior que 2, logo seria máximo. Isto denota que a concepção de máximo para o aluno não se refere a um máximo para a função e sim para os valores de x encontrados como raízes de $f'(x) = 0$.

O aluno também não fez, nesta questão, o estudo do crescimento. Na entrevista afirma que ainda não tinha muita noção na época de como faria este estudo.

Pesq.:	*Você também não fez o estudo do crescimento. Por quê?*
Eduardo:	*Porque naquela época eu ainda não sabia direito disso, ainda tava tudo meio confuso...*

Mas ao conversarmos sobre T2 já demonstra ter noção da relação entre a variação do sinal da derivada e o crescimento da função. Consegue, com alguma ajuda, esboçar o gráfico de T2.

A: Compreensão da utilização das regras algébricas de derivação para determinar a lei algébrica da derivada de uma função

O aluno demonstra bom domínio dos aspectos algébricos da derivada, sendo plenamente capaz de resolver com sucesso as questões T6 (a) e (b) e AP1-3. Aplicou corretamente as derivadas das funções elementares, a regra do produto e a regra da cadeia, identificando que funções estavam sendo compostas e em que ordem. Também respondeu ao item (b) de T6, efetuando corretamente o cálculo de $f'(4)$.

Síntese

Eduardo é um aluno que tem hábito de estudar, ou seja, não costuma deixar o estudo para momentos em que será submetido a algum tipo de avaliação. Prefere estudar pelos Exercícios Programados e pela tutoria, evitando o livro didático e gosta de resolver exercícios para estudar. O aluno não demonstra domínio dos aspectos não algébricos relacionados à derivada, como o significado geométrico da derivada como inclinação da reta tangente ou como função que traduz o comportamento da variação do crescimento de suas primitivas. Não é capaz de conceber a derivada de uma função se esta não estiver dada algebricamente.

7.3 – O aluno Geraldo

Geraldo é um senhor muito dedicado aos estudos. É bom aluno, não deixa de freqüentar às sessões de tutoria e costuma estudar em grupo, normalmente junto ao Eduardo e outros colegas. Um comentário seu na primeira fase das entrevistas evidencia a sua concepção de estudar:

Geraldo: *Se eu não tô almoçando eu tô estudando, se eu não tô trabalhando eu tô estudando eu nunca tô jogando futebol ou vendo televisão. Então essa é que é a regra, porque é muito puxado, por mais que a gente tente, forme grupo de estudo é muito difícil. (...) Eu vou na bibliografia da apostila, procuro esses livros e só depois disso é que eu volto na apostila, porque a apostila é muito boa para o professor e péssima para o aluno, porque o aluno não raciocina, não pesquisa, acha que tudo tem que estar pronto e chega no dia a dia na escola ele se perde.*

Esta postura frente ao seu curso fez com que ele alcançasse desempenho bastante razoável em relação ao grupo pesquisado. Nas Avaliações Presenciais 1 e 2 alcançou graus 6,5 e 6,4 respectivamente. Também em nosso teste foi um dos que teve melhor resultado geral. Comentou ter recebido uma carta de mérito acadêmico pelas notas alcançadas durante o curso, fato do qual se orgulha muito.

Geraldo ficou bastante tempo fora da escola, tendo concluído os estudos em 1983. É economista formado e comenta que, em função desta prática, ele normalmente toma gráficos prontos para analisar e atribui a isto alguma dificuldade nas atividades que envolvem esboço de gráficos de funções.

Geraldo (...)*Eu fiquei muitos anos fora da escola, eu me formei em 83 e basicamente aquela coisa acadêmica da escola eu não sei. (...) A gente não tem muita prática em analisar o gráfico porque normalmente o gráfico já vem pronto. No meu caso de economista, eu fiz economia, a gente costumava muito analisar o gráfico, entendeu, então a construção do gráfico o aluno tem certa dificuldade, até porque não se usa muito no primeiro e segundo graus a construção de gráficos. Talvez seja isso mesmo, uma falta de hábito de fazer aquele tipo de exercício. Se vc não tem o hábito então isso já gera uma certa dificuldade. E eu vou ser sincero pra vc, quando chega nessa parte de gráfico, se não tem o tutor pra ajudar a gente não faz mesmo porque tem certas coisas que são o feeling mesmo, (...) Porque o que acontece com a matemática é o algebrismo mesmo, e aí vc não tem muito contato com a parte gráfica.(...) Então a dificuldade do aluno no gráfico é conseqüência do tipo de linguagem mesmo, é a falta da prática de manusear, de lidar com o gráfico. Quando chega no terceiro grau, o aluno fica meio perdido, quando é uma parábola, uma reta ainda fica mais fácil, mas quando pega uma assíntota, uma elipse, são coisas que ele ainda não viu e que aí já se supõe que ele saiba e já tenha visto. E você tem que desenvolver a leitura gráfica, a leitura visual, que se não for trabalhado antes a gente realmente não entende e não sabe.*

Este comentário é bastante esclarecedor no sentido de evidenciar que os alunos realmente não costumam ter contato com atividades que envolvam gráficos de funções. Este desconhecimento leva o aluno a se concentrar e preferir os aspectos algébricos da derivada por proporcionarem um conforto maior pela familiaridade.

D1: Compreensão do valor numérico de $f'(x)$ como inclinação da reta tangente ao gráfico da função no ponto $(x, f(x))$

O aluno demonstra um conhecimento sólido em relação à noção geométrica de derivada. Na questão T5 efetuou todos os cálculos corretamente, associando a inclinação da reta dada com o valor $f'(1)$ e, a partir daí e aplicando a regra da cadeia, calculou $g'(2)$. Mas não determinou a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abscissa 2. Quando questionamos por que não o fez ele se desculpou dizendo que na ocasião do teste ele não estava muito bem. Propus a ele que resolvesse ao que ele prontamente atendeu, determinando corretamente a equação pedida, sem necessitar de auxílio.

Analisando também a questão AP1-5 pode-se perceber que ele também a acertou, evidenciando que realmente ele tem um bom domínio do conceito geométrico de derivada. Cometeu nesta questão um erro de conclusão de exercício. A questão pedia em que ponto a reta tangente era horizontal; ele derivou a função dada e igualou a zero, calculando x = 0 mas, ao determinar o ponto, substituiu x na própria derivada e não na função primitiva, o que lhe deu o ponto (0,0) como solução, o que era incorreto. Acreditamos que este tenha sido um erro decorrente de alguma pressa em concluir a questão e não signifique nenhum lapso conceitual, uma vez que o aluno associou imediatamente a idéia de reta tangente horizontal com o valor nulo para a derivada da função.

D2: Capacidade de operar com a derivada da função baseando-se somente em informações gráficas

Esta habilidade foi verificada na questão T3. Nenhum aluno, nem mesmo o Geraldo, foi capaz de resolver esta questão.

Geraldo tentou, assim como todos os 6 alunos que tentaram resolver a questão, determinar a lei algébrica da função f, utilizando também, da mesma maneira que Eduardo, os pontos dados para determinar a constante. Porém não esboçou gráfico algum para a questão. Conversando com ele sobre a ausência do esboço, ele comenta, refletindo sobre como poderia ser o gráfico de acordo com o que ele determinara algebricamente:

A *Bom, construir um gráfico, poderia pensar em ... x^3 poderia ser uma senóide, uma cossenóide... (faz com as mãos um movimento sinuoso).*

Este comentário mostrou-se particularmente interessante por mostrar que o aluno associa senóide e cossenóide com o gráfico de uma função de grau 3, que foi o que ele encontrou quando determinou a lei algébrica de f. Essa associação evidencia que Geraldo não considera os aspectos globais do gráfico, como o fato de que uma função polinomial de grau 3 deve tender a menos infinito e a mais infinito necessariamente, enquanto que as senóides e cossenóides são limitadas. Pela nossa experiência, a associação parece ocorrer por classificarem as funções em algum tipo familiar a eles de funções – se é reta então é do primeiro grau, se é curva com formato de "morro" então é parábola; quando é uma curva sinuosa então é uma senóide ou uma cossenóide. Porém esse tipo de categorização faz com que os aspectos qualitativos do gráfico não sejam enfocados. Aspinwall, Shaw e Presmeg (1997) chamam isto de "imagem mental incontrolável" e a definem como as imagens que estão além do que o próprio estudante pode controlar pela sua vontade. Afirmam ainda que ela é incontrolável em dois sentidos: tanto porque parece surgir independentemente da vontade do aprendiz, como também pela sua persistência em permanecer e surgir mesmo face a evidências contrárias.

Sugeri a ele que pensássemos juntos na questão sem tentar algebrizar o problema. Perguntei a ele sobre a variação do sinal da função expressa pela parábola. Novamente, da mesma maneira que vimos em Eduardo, ele respondeu:

Geraldo: *Veja bem, ela é positiva entre as raízes, como a concavidade é pra cima ela é negativa aqui (indica o intervalo entre as raízes da derivada) e positiva nas pontas.*

Mais uma vez percebemos a utilização de uma técnica em lugar da simples observação da localização da parábola no plano cartesiano. A utilização de regras e técnicas é priorizada em detrimento da análise do gráfico propriamente dito.

A partir da conclusão sobre a variação do sinal da derivada, ele percebe, com algum auxílio, que dali podemos inferir sobre os intervalos de monotonicidade de f. O esboço do gráfico e o número de soluções da equação $f(x) = 0$ surgem então sem maiores dificuldades mas com um pouco de ajuda. E comenta, refletindo sobre a facilidade em resolver a questão quando analisada graficamente::

Geraldo: *Você vê, a teorização a gente até sabe, mas juntar tudo isso numa coisa só... Porque é uma coisa tão simples e ao mesmo tempo tão complexa por causa de uma informação vc fica perdido, e aí vc acha até que tem alguma coisa errada aqui, a gente sente poxa mas essa curva não devia vir pra baixo, devia ficar assim, mas faltam os recursos matemáticos pra verificar não realmente isso não tá certo, tem que ser assim. Então falta alguma coisa pra gente. Tem umas coisas que eu não compreendo bem. Por exemplo, se vc pega um livro de cálculo pra estudar, é mais interessante, eu gosto mesmo, prende a atenção. Agora, quando vc vê a apostila, fica difícil, vc vê, a apostila de cálculo 2 fica duas aulas falando de integral trigonométrica e no livro de cálculo não tem isso especificamente, ele aparece no meio das outras coisas. Dá impressão que fica mais difícil do que é de verdade.*

Geraldo deixa claro por suas palavras e resoluções no decorrer da entrevista, que não tem bem desenvolvida a habilidade de analisar a derivada dada por um gráfico, associando-a às características gráficas da primitiva.

D3: Compreensão do uso da derivada para estudar intervalos de monotonicidade da função e capacidade de esboçar um gráfico de uma função f a partir de informações sobre a sua derivada.

As questões T2 e AP2-1 estudam esta habilidade. Em AP2-1, Geraldo tem bom resultado – mas não esboça o gráfico – tendo cometido um erro imediatamente identificado por ele quando indiquei:

Pesq.:	*(...) A AP2-1 ficou com um erro aqui no estudo do crescimento, o que aconteceu aqui, vc lembra? Dá uma olhadinha.*
Geraldo:	*Eu vou te falar, sabe onde que eu errei isso aqui? Foi quando eu fiz o domínio, isso que me matou, o domínio não pode ser IR senão anula aqui embaixo, eu fiquei revoltado com isso. Tinha que ser os reais menos o dois, aí eu olhei no crescimento olhei só o quatro. Sabe como se chama isso? Apavoramento. Eu tirei 6.4, se eu tivesse precisando tirar 6.7 tava reprovado, é isso que o professor precisava ver, tudo bem, tá errado, o prédio ia cair, mas tinha que levar em consideração.*

Também em T2 Geraldo não esboça gráfico. Quando mostro a ele a questão e pergunto por que não fez, que tipo de dificuldade sentiu, ele comenta sobre as dificuldades oriundas da falta de prática de trabalhar em situações dadas num contexto gráfico. Explica que não está acostumado a esboçar gráficos – e de fato, nestas atividades por nós observadas, ele não chega a fazer nenhum esboço de gráfico. Com auxílio, ajudando-o a interpretar sob uma ótica gráfica as informações dadas na questão, ele consegue esboçar o gráfico pedido.

Analisando então o desempenho de Geraldo em D3, percebemos que ele associa a comportamento de uma função em relação ao seu crescimento com a variação do sinal da derivada, mas que não é capaz de esboçar gráficos que traduzam o que ele conclui algebricamente.

A: Compreensão da utilização das regras algébricas de derivação para determinar a lei algébrica da derivada de uma função

As questões T6 e AP1-3 que tinham enfoque exclusivamente algébrico foram ambas resolvidas pelo aluno corretamente, não tendo suscitado nenhum tipo de dúvida ou comentário. O aluno demonstra bom domínio da aplicação das regras algébricas de derivação para funções elementares, regra do produto e inclusive a regra da cadeia, identificando corretamente as funções que são compostas e em que ordem.

Síntese

O aluno é bastante dedicado aos estudos e sente maior conforto em operar algebricamente, mesmo quando isto não é algo que esteja sendo solicitado pela questão. Não foi capaz de esboçar nenhum gráfico dos que lhe foram pedidos sozinho. Somente com ajuda sentiu confiança em esboçar gráfico para T2. Também não mostra domínio em situações que exijam análise do sinal da derivada dada por um gráfico. Refere-se muito à falta de prática e à sua dificuldade em acompanhar o livro didático do CEDERJ.

CAPÍTULO 8 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho estudou como são as concepções de derivada dos alunos do CEDERJ – pólo Angra dos Reis. A escolha desta instituição foi motivada não somente pelo fato de ser a pesquisadora também tutora da disciplina de Cálculo I, inicialmente no pólo de Angra dos Reis, mas também pela observação de que esta é uma modadlidade de ensino que tem crescido muito no país nos últimos anos – principalmente na formação de professores. Por esta razão, acreditamos que a pesquisa nesta área se mostra particularmente interessante por fornecer subsídios para que futuras pesquisas possam ser realizadas e que seja possível investir na melhoria das atividades propostas nesta modalidade.

A pesquisa foi conduzida com 20 alunos que resolveram uma lista de atividades propostas pela pesquisadora e responderam a um questionário e a duas entrevistas, em momentos distintos, com parte destes alunos. Para análise também foram utilizadas as avaliações presenciais da Instituição. Buscamos compreender à luz das teorias de Sfard (1991), Dubinsky (1991) e Tall (1994) como são formados os conceitos em Matemática para então sermos capazes de analisar de que maneira estão formadas as concepções sobre o tema em questão na estrutura cognitiva dos pesquisados. Procuramos ainda na literatura trabalhos preexistentes relacionados ao tema, encontrando Asiala et al (1997), Palis (2003), Tall (1985, 1997), Ferrini-

Mundy & Lauten (1994), Conceição e Viseu (2002) e Berry & Nyman (2003), entre outros, que relatam resultados obtidos em pesquisas anteriores.

A maioria dos alunos pesquisados eram licenciandos em Matemática, alguns ainda de Química e de Física. Por esta razão, investir em sua formação principalmente nos assuntos relacionados ao Cálculo – pois nesta disciplina o aluno amplia o conceito de função – pode ser de grande ajuda na melhoria do ensino de Matemática de maneira geral. Esta situação fica ainda magnificada se pensarmos no fato de serem alunos da graduação a distância, prática que se torna cada dia mais presente, deixando evidente que muitos dos profissionais ora formados terão estudado nesta modalidade.

Da análise feita à luz de Sfard (1991), Dubinsky (1991), Tall (1985, 1991, 1994) e Asiala et al (1997) resultou a observação de que as concepções dos alunos são principalmente relacionadas aos processos envolvidos no conceito de derivação. Assim, o aluno tem preferência nítida por procedimentos algébricos, demonstrando grande dificuldade em enfrentar situações gráficas, seja para análise ou construção de gráficos. Sua compreensão de derivada limita-se à determinação das leis algébricas de derivadas a partir de outras leis algébricas. Esta preferência revela que na realidade a sua concepção de função é tão restrita quanto à de derivadas, o que significa que ele só percebe a função quando identifica sua lei algébrica. Quando se oferece ao aluno uma questão onde a função derivada está expressa por um gráfico e não por uma lei algébrica o aluno tem grandes dificuldades em resolver. Na verdade, todas as atividades que envolvem gráficos e derivadas, seja numa utilização instrumental, seja analisando ou construindo, se mostram particularmente difíceis para os alunos. Uma questão importante aqui é que tipo de formação matemática este futuro professor dará ao seu aluno. Provavelmente este terá as mesmas concepções que o professor, limitadas e incompletas, perpetuando assim um ciclo de má formação e compreensão em Matemática. A idéia, citada por Geraldo, um dos nossos pesquisados, de que "Matemática é o algebrismo mesmo" é compartilhada por muitos alunos e, o mais sério, por muitos professores. É preciso que esta visão seja modificada e que se tenha da Matemática a idéia da ciência que trabalha com investigação, análise e argumentação e que vive do que pode ser abstraído a partir das necessidades do mundo real cotidiano, acadêmico ou científico.

No estudo sobre os hábitos de estudo destes alunos, percebemos que eles utilizam a metodologia da reprodução de exercícios, buscando sempre listas de atividades resolvidas que possam ser usadas como modelos para outros exercícios semelhantes. Não pretendemos dizer aqui que os alunos não devem praticar exercícios. De fato, da prática vem a familiaridade que é essencial à formação do conceito matemático. Mas o que questionamos é que este seja o único recurso de aprendizagem utilizado pelo aluno. Tal procedimento pode ser construtivo se estas atividades forem bastante diferenciadas e se estiverem sempre acompanhadas pela teoria que embasa o método de resolução. Porém não foi isto que percebemos, muitos alunos usam somente os exercícios sem dar atenção à teoria e sem procurar diversificar os tipos de atividades que praticam.

A procura pelas sessões de tutoria presencial também é grande e nestas os alunos solicitam ao tutor que atue resolvendo todos os exercícios que são trazidos para a sessão. Preocupa-nos porém a percepção de que muitas vezes o aluno sequer tentou resolver as atividades propostas antes da sessão de tutoria, o que incentiva à memorização de processos de resolução e dificulta a aprendizagem dos conceitos. Devemos ainda dar destaque ao que Rocha (2000) comenta, que nesta modalidade de estudo é o próprio aluno que zela pela sua aprendizagem e não o professor. Não há portanto alguém que oriente o aluno no sentido de que esta prática não é a ideal e nem será eficiente na construção do conhecimento. É então imprescindível que sejam inseridas no curso atividades que promovam esta construção e que leguem ao aluno o seu real papel nesta modalidade, que é o de gestor de sua própria aprendizagem.

A proposta das Atividades Eletrônicas mostra-se muito interessante e produtiva segundo nos relatam os poucos alunos que tentaram fazê-las em algum momento. Um aluno afirma que utiliza até hoje alguns softwares sugeridos pela coordenação da disciplina para analisar situações em Cálculo II. Pelo sucesso e pela baixa procura espontânea, sugerimos que sejam inseridas práticas de laboratório obrigatórias para os licenciandos em Matemática adequadas a cada período de sua formação acadêmica. Nos momentos em que estudam Cálculo I, a utilização efetiva de softwares e abordagens computacionais ou diferenciadas de maneira geral mostrou ser, no experimento de Asiala et al (1997) de grande valia no desenvolvimento da concepção estrutural do conceito de derivada. Assim, o aluno é capaz de se movimentar entre os diversos tipos de representação de uma função e de sua derivada, tendo sucesso em situações gráficas. Ele se torna mais capaz de analisar gráficos à luz do conceito de derivada, relacionando crescimento, tangentes e variação de sinal, enriquecendo assim a sua concepção de derivada.

Cursos nesta modalidade pressupõem sempre a utilização efetiva destes recursos (Borba, Malheiros e Zulatto, 2002). Como não existe a figura do professor, o aluno não dispõe dos recursos de argumentação e convencimento de que normalmente o docente faz uso. Então, no intuito de suprir essa carência, as aulas na web, os mathlets – appleths matemáticos – e a utilização de softwares computacionais em atividades orientadas – como as que são propostas nas Atividades Eletrônicas – podem ser bastante interessantes e eficazes no sentido de auxiliar na construção do conhecimento em questão.

Percebemos ainda que o aluno não costuma utilizar as ferramentas de interação a distância, como fórum, e-mail ou tutoria a distância. Vemos então que não existe o hábito da comunicação virtual com fins de estudo. Borba, Malheiros e Zulatto (2002) argumentam que a comunicação a distância estabelecida para fins de estudo é um hábito que pode ser muito enriquecedor para o desenvolvimento de habilidades como escrever e argumentar por escrito em Matemática. Atividades como fórum de discussão sobre algum tema específico da disciplina, trabalhos em grupo a distância ou a possibilidade (e o estímulo) de contato por e-mail com o docente responsável pela disciplina são exemplos de situações que conduzirão o aluno a utilizar estas ferramentas, auxiliando assim no desenvolvimento dessas habilidades.

A observação dos hábitos de estudos declarados nos questionários conjuntamente com os resultados obtidos no teste e nas avaliações presenciais analisadas sugerem que os alunos têm melhor resultado nas situações algébricas. Acreditamos que isto ocorre porque somente para este tipo de questão é possível aplicar um processo de resolução previamente memorizado.

A abordagem computacional também pode ser bastante rica. Considerando que o curso do qual estamos tratando é oferecido na modalidade a distância no que se refere ao ensino e aprendizagem, atividades que oferecessem algum tipo de manipulação trariam grande ganho no sentido de auxiliar a construir o conhecimento matemático.

Retornando aos nossos referenciais teóricos que comentam sobre a formação do conhecimento matemático, entendemos que os alunos estão ainda na etapa da manipulação dos procedimentos algébricos associados ao conceito de derivada, ou seja, o seu pensamento sobre derivada de uma função é procedimental apenas. Há duas conclusões que podemos inferir a partir desta observação. Primeiro, que o conceito gráfico e geométrico de derivadas não foi ainda formado. É por esta razão que os alunos não identificam o valor da derivada como a inclinação da reta tangente num contexto gráfico. A derivada é apenas um procedimento algébrico. É necessário que ocorra também alguma manipulação gráfica do conceito geométrico de derivada para que o aluno seja capaz de visualizar e compreender o valor da derivada como inclinação da reta tangente e que também possa conceber a função derivada e seu gráfico. Segundo, a não existência do conceito gráfico e geométrico de derivadas impede a que a flexibilidade do pensamento matemático, mencionada por Gray & Tall (1994), possa ocorrer, uma vez que não havendo o conceito não haverá movimentações mentais de uma a outra formas de representação da derivada. A representação simbólica da derivada é usada pelo aluno em um único sentido, que é o da algebrização.

Para trabalhos futuros, estruturar que atividades seriam capazes de desenvolver estas habilidades parece ser não somente muito interessante mas também necessário. Mas é importante considerar que estas atividades serão realizadas a distância, ou seja, não haverá o acompanhamento e orientação do professor. Propomos que um tutor de Matemática acompanhe as atividades de laboratório de Matemática. Também um estudo mais profundo sobre os métodos de estudo dos alunos da EaD em Matemática pode ser bastante eficiente para fornecer material para auxiliar aos desenvolvedores dos materiais didáticos usados nesta modalidade. As especificidades deste tipo de ensino exigem que estes livros sejam elaborados de maneira diferenciada; porém o caráter muito recente desta prática não oferece ainda maiores referenciais para estes autores.

Nunca devemos deixar de ter em mente que o nosso objetivo maior é auxiliar na formação de professores de Matemática que conheçam mais profundamente o que se propõem a ensinar e que tenham plena noção de como fazê-lo. Para tanto, o mero conhecimento do como fazer não é suficiente. É necessário mais, é preciso que ele conheça profundamente todos os meandros desta disciplina, todas as suas minúcias e especificidades e que seja capaz de gerir a sua própria aprendizagem.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1- ABREU, R. A.S. *Software Educacional ou o caráter Educacional do Software?* Revista Tecnologia Educacional. Rio de Janeiro, ano XXVI, n. 142, p.23-26, 1998. *apud* ROCHA, H. C. G. *Educação a Distância: concepções, metodologias e recursos*. Dissertação de Mestrado: UFSC: Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Florianópolis, 2000.

2- ALMEIDA, C. & VISEU, F. *Interpretação Gráfica das Derivadas de uma Função por Professores Estagiários de Matemática.* Revista Portuguesa de Educação 15, nº 001. Universidade do Minho, Portugal, pp. 193 – 219. 2002.

3- AMIT, M. & VINNER, S. *Some misconceptions in calculus: anedotes or the tip of the iceberg?* In George Booker, Paul Cobb & T. N. de Mendicuti (Eds.), Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 1 (pp. 3-10). Oastepec, Mexico: CINVESTAV, 1990.

4- ARTIGUE, M. *Analisys*. In D. Tall (ed.), Advanced Mathematical Thinking, 167-198. Kluwer, Dordrecht: 1991.

5- ASIALA, M., COTTRILL, J., DUBINSKY, E. & SCHWINGENDORF, K. E. *The Development of Students' Graphical Understanding of the Derivative* In Journal of Mathematical Behavior, 16 (4), pp. 399 – 431, 1997.

6- ASPINWALL, L.., SHAW, K. L.& PRESMEG, N. C. *Uncontrollable Mental Imagery: Connections Between a Function and its Derivative.* Educational Studies in Mathematics 33: 301-317. 1997.

7- BERRY, J. S. & NYMAN, M. A. *Promoting students' graphical understanding of the calculus*. Journal of Mathematical Behavior, 22, pp. 481 – 497. 2003.

8- BORBA,M., MALHEIROS, A. P. e ZULATTO, R. *Educação a Distância online.* Belo Horizonte: Autêntica, 2002.

9- BRASIL. Lei 5622 de 19 de dezembro de 2005. Disponível em HTTP://uab.mec.gov.br/conteudo.php?co_pagina=20&tipo_pagina=1 Acesso em 25 de fevereiro de 2008 às 16 h 52 min).

10- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação a Distância. Disponível em HTTP://portal.mec.gov.br/seed. Acesso em 28 de abril de 2008, às 12h 30 min.

11- BREIDENBACH, D., DUBINSKY, E., HAWKS, J. & NICHOLS, D. *Development of the Process Conception of Function*. Educational Studies in Mathematics 23, pp. 247 – 285. 1992.

12- CASTRO, N. J., HAGUENAUER, C., SILVAM E. M., ALVES, L. A., WASHINGTON, M. G. M., CARVALHO, M. B., RESENDE, R., ROCHA, S. S.,

FERREIRA, S., GARCIA, S., PEDROSO, T. *Estudo a Distância com Apoio da Internet* [on line]. Associação Brasileira de Educação a Distância (www.abed.org.br) publicado em 10/09/2002 às 19:17

13- CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DO RIO DE JANEIRO. Plataforma do Consórcio. Apresentação do Consórcio aos visitantes virtuais. Rio de Janeiro, 2005, disponível em:
http://www.cederj.edu.br/fundacaocecierj/exibe_artigo.
Acesso em 28/04/2008 às 15:24

14- CENTRO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DO RIO DE JANEIRO. Plataforma do Concórcio. Material Didático de Cálculo 1. Aula 01, versão 02. Rio de Janeiro, 2006, disponível em:
15- http://www.cederj.edu.br/fundacaocecierj/exibe_artigo.
Acesso em 27/06/2008 às 18:00

16- CLARK, J. M., CORDERO, F., COTTRILL, J., CZARNOCHA, B., DEVRIES, D. J., ST. JOHN, D., TOLIAS, G. VIDAKOVIC, D. *Constructing a Schema: the Case of the Chain Rule.* Journal of Mathematical Behavior 16 (4), pp. 345 – 364. 1997.

17- COSTA, C. *Processos Mentais Associados ao Pensamento Matemático Avançado*. 17, pp. 257-251. Portugal, 2002.

18- CURY, H. e CASSOL, M. *Análise de erros em cálculo: uma pesquisa para embasar mudanças*. Acta Scientiae, v. 6, n.1, pp. 27-36. 2004.

19- DREYFUS, T. *Advanced Mathematical thinking* . Em P. Nesher e J. Kilpatrick. (Eds). Mathematics and Cognition (pp 113-134). Cambridge: University Press. 1990.

20- DREYFUS, T. *On the status of visual reasoning in Mathematics and Mathematics Education*, Plenary address to PME XV, Proceedings Fifteen PME conference, Assisi, Volume I, p. 33-48. 1991. *apud* COSTA, C. *Processos Mentais Associados ao Pensamento Matemático Avançado*. 17, pp. 257-251. Portugal, 2002.

21- DUBINSKY, E. *Constructive Aspects of Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. L. P. Steffe (ed.), Epistemological Foundations of Mathematical Experience, Springer-Verlag, New York. 1991 *apud* BREIDENBACH, D., DUBINSKY, E., HAWKS, J. & NICHOLS, D. *Development of the Process Conception of Function*. Educational Studies in Mathematics 23, pp. 247 – 285. 1992.

22- DUBINSKY, E. *Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking*. D. Tall (Org.), Advanced Mathematical Thinking, Dordrecht: Kluwer: pp. 95 - 123. 1991.

23- FERRAZ, A. G. e GITIRANA, V. *Uma Análise do Esboço de Gráficos de Função em Livros Textos de Cálculo Diferencial e Integral*. In: IX Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte, 2007.

24- FERRINI-MUNDY, J. e LAUTEN, D. *Learning about Calculus Learning*. The Mathematics Teacher 87 (2), 115-121: 1994

25- GIRALDO, V. *Descrições e Conflitos Computacionais: o Caso da Derivada.* Tese de Doutorado. Instituto de Matemática, UFRJ: 2003.

26- GRAVINA, M. A. *O quanto precisamos de tabelas na construção de gráficos de funções.* Revista do Professor de Matemática, v. 17. São Paulo: 1986.

27- GRAY, E. e TALL, D. *Duality, Ambiguity and Flexibility: a Proceptual View of Simple Arithmetic.* The Journal for Research in Mathematics Education 26 (2), pp. 115 – 141. 1994.

28- GRAY, E. e TALL, D. *Relationships between embodied objects and symbolic procepts:an explanatory theory of success and failure in mathematics*. Proceedings of PME 25, pp. 65-72. Utretch: 2001.

29- GUTIERREZ, F, PRIETO, D. *A mediação pedagógica: educação a distância alternativa*. Campinas: Papirus, 1994.

30- HUGHES-HALLETT, D.; GLEASON, A., FLATH, D., GORDON, S., LOMEN, D., LOVELOCK, D., MCCALLUM, N., OSGOOD, B., PASQUALE, A., TECOSKY-FELDMAN, F., THRASH, J., & THRASH, K. *Calculus*. New York: John Wiley and sons, Inc: 1994 *apud* BERRY, J. S. & NYMAN, M. A. *Promoting students' graphical understanding of the calculus*. Journal of Mathematical Behavior, 22, pp. 481 – 497. 2003.

31- LIMA, E. L. *Curso de Análise.* V. 1. IMPA, 1999.

32-LOPES, I. Trabalho em fase de elaboração: notas pessoais. UFRJ: IM, 2007.

33- MALTA, I., PESCO, S. e LOPES, H.: *Cálculo a uma variável*. Rio de Janeiro. Ed. PUC-Rio, 2002.

34- MARTINS, R. X., ROCHA, H. C.G. *Educação a Distância como evento da Modernidade*. Revista Interação. Revista de Ensino, Pesquisa e Extensão. FEPESMIG/UEMG, v.1, p.54-62, 2000. *apud* ROCHA, H. C. G. *Educação a Distância: concepções, metodologias e recursos*. Dissertação de Mestrado: UFSC: Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Florianópolis, 2000.

35- MOORE, M. G. e KEARSLEY, G. *Educação a Distância: Uma Visão Integrada*. São Paulo: Thomson Learning, 2007.

36-ORTON, A. *Students' Understanding of Differentiation*. Educational Studies in Mathematics 14, pp. 235 – 250. 1983.

37- PALIS, G. L. R. *Uma Análise das Construções Mentais Subjacentes à Produção e Interpretação de Gráficos de Funções.* História e Tecnologia no Ensino de Matemática 1: pp. 217-225. IME – UERJ: 2003.

38- PAURA, A. *Um estudo sobre o Ensino de Matemática no Ensino Médio*. Monografia de Conclusão de Especialização. Instituto de Matemática. UFRJ, 2006.

39- PIMENTEL, T. *O papel da calculadora gráfica na aprendizagem de conceitos de análise matemática: estudo de uma turma do 11º ano com dificuldades.* Lisboa, APM. 1995 *apud* ALMEIDA, C. & VISEU, F. *Interpretação Gráfica das Derivadas de uma Função por Professores Estagiários de Matemática.* Revista Portuguesa de Educação 15, nº 001. Universidade do Minho, Portugal, pp. 193 – 219. 2002.

40- PONTE, J., MATOS, J. e ABRANTES, P. (1998). *Investigação em Educação Matemática e Desenvolvimento Curricular* (versão de trabalho). Lisboa.

41- REZENDE, Wanderley Moura *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Anais do II SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 29 a 1º de novembro de 2003. Santos, SP. (CD-ROM)

42- ROCHA, H. C. G. *Educação a Distância: concepções, metodologias e recursos*. Dissertação de Mestrado: UFSC: Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção. Florianópolis, 2000.

43- SEGADAS VIANNA, C. C. *Students' Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus: an Exploration of Definitions, Theorems and Visual Imagery*. Tese de Doutorado. Institute of Education, University of London: 1998.

44- SFARD, A. *On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin.* Educational Studies in Mathematics 22, pp. 1 – 36. 1991.

45- TALL, D & VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12 151– 169: 1981.

46- TALL, D. *Understanding the Calculus.* Mathematics Teaching 110 49– 53. 1985.

47- TALL, D. *The Gradient of a Graph*. Mathematics Teaching 111, pp. 48 – 52: 1985.

48- TALL, D. *Intuition and Rigor: the role of visualization in the Calculus*. Visualization in Mathematics (ed. Zimmermann & Cunningham), M.A.A., Notes No. **19**, 105–119 1991.

49- TALL, D. *Functions and Calculus*. A. J. Bishop et al (Eds.), International Handbook of Mathematics Education, 289-325, Dordrecht: Kluwer 1997.

50- THOMPSON, P. W. Images of Rate and Operational Understanding of the Fundamental Theorem of Calculus. Educational Studies in Mathematics, 26:pp. 229 – 274. 1994.